

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CÂMPUS CURITIBA
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

CAMILA DEMBINSKI
RAFAELA SCACIOTA SIMÕES DA SILVA

**CONTROLE ÓTIMO APLICADO A UMA PLANTA ECONÔMICA DE
GERAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA NO ESTADO DO PARANÁ**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA
2016

CAMILA DEMBINSKI
RAFAELA SCACIOTA SIMÕES DA SILVA

**CONTROLE ÓTIMO APLICADO A UMA PLANTA ECONÔMICA DE
GERAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA NO ESTADO DO PARANÁ**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação, apresentado à disciplina de TCC 2, do curso de Engenharia de Controle e Automação do Departamento Acadêmico de Eletrotécnica (DAELT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), como requisito para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Fontes Souto

Coorientador: Prof. Dr. Ricardo Lobato Torres

CURITIBA
2016

Camila Dembinski
Rafaela Scaciota Simões da Silva

CONTROLE ÓTIMO APLICADO A UMA PLANTA ECONÔMICA DE GERAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA NO ESTADO DO PARANÁ

Este Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação foi julgado e aprovado como requisito parcial para a obtenção do Título de Engenheira de Controle e Automação, do curso de Engenharia de Controle e Automação do Departamento Acadêmico de Eletrotécnica (DAELT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Curitiba, 28 de novembro de 2016.

Prof. Paulo Sérgio Walenia, Esp.
Coordenador de Curso
Engenheira de Controle e Automação

Prof. Amauri Amorin Assef, Dr.
Responsável pelos Trabalhos de Conclusão de Curso
de Engenharia de Controle e Automação do DAELT

ORIENTAÇÃO

Rafael Fontes Souto, Dr.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Orientador

Ricardo Lobato Torres, Dr.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Co-Orientador

BANCA EXAMINADORA

Alceu André Badin, Dr.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Glauber Gomes de Oliveira Brante, Dr.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

AGRADECIMENTO

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades. Agradeço também a instituição de ensino a qual junto com o meu docente orientador me proporcionou este momento de realização e sucesso. Agradeço aos meus familiares, namorado e amigos que me deram força para que a conclusão deste trabalho fosse possível, foram pessoas importantes e fundamentais em todo esse processo de apoio e aprendizado. Por fim, agradeço a todos que auxiliaram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTO

Deus,

Obrigado porque a Tua graça se renova a cada manhã. Obrigada pois o Senhor se fez presente em todo o período do TCC e se faz presente todos os dias. Obrigada por que o Senhor me deu pais que incentivaram meu crescimento intelectual, emocional e espiritual. Pais que me deram a oportunidade de escolher minha profissão, pais que me colocaram desde criança nos caminhos do Senhor, pais que moldaram meu caráter. Obrigada por ter colocado em minha vida os dois melhores amigos que eu poderei ter para o resto da vida, Ju e João. Obrigada por colocar em meu caminho colegas, professores e amigos que foram fundamentais a todo momento. Obrigada por me dar a capacidade e a inteligência para poder cursar uma universidade de engenharia. Obrigada por renovar minhas forças todos os dias, por entender meu lamento e realizar a tua vontade em minha vida acima de tudo. Obrigada por ter me dado a oportunidade de honrar, bendizer e glorificar o teu Nome em tudo que eu faço. Toda honra, glória e louvor sejam dados a Ti.

"Pois dele, por ele e para ele são todas as coisas. A ele seja a glória para sempre! Amém." Romanos 11:36

RESUMO

DEMBINSKI, Camila; SILVA, Rafaela S.S. **Controle Ótimo Aplicado a uma Planta Econômica de Geração de Energia Elétrica no Estado do Paraná**. 2016. 54 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Elétrica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016.

Este trabalho relata o estudo de diversos conceitos da economia relacionados a oferta, demanda e preço final da energia elétrica no estado do Paraná, bem como a teoria de controle ótimo utilizada para projetar um controlador para o sistema. Como ponto de partida, foi necessário obter a política de controle ótimo para um sistema linear, para que, com base nesta, fosse possível criar a política para um sistema afim. Com base nas equações de mercado de estoque, simulou-se a estabilidade do sistema econômico autônomo. A simulação ocorreu no ambiente do *software* MATLAB. Inserindo o controle ótimo no sistema, observou-se que o preço estabiliza mais rápido do que no sistema autônomo. Realizou-se diferentes simulações, com cenários que controlam o preço, a quantidade de energia demandada e gerada, apenas para comparação. A partir da implementação do controlador linear quadrático no sistema, pode-se observar que tanto o preço da energia elétrica quanto a demanda e geração de energia foram estabilizadas mais rapidamente e com uma oscilação e *overshoot* mais amenos.

Palavras-chave: Controle Ótimo, Modelo de Mercado Econômico, Energia Elétrica.

ABSTRACT

DEMBINSKI, Camila; SILVA, Rafaela S.S. **Optimal Control Applied to an Economic Plant of Generating Electricity in the State of Paraná.** 2016. 54 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Elétrica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016.

This paper reports the study of several concepts of the economy related to supply, demand and final price of electricity in the state of Paraná, and the optimal control theory used to design a controller for the system. As a starting point, it was necessary to obtain the optimal control policy for a linear system, and then, based on it, it was possible to create the policy for an affine system. The stability of the autonomous economic system was simulated based on the stock market equations. The simulation occurred in the MATLAB software. By inserting optimal control in the system, it was observed that the price stabilizes faster than in the autonomous system. It was carried out various simulations with scenarios controlling price, the amount of energy required and generated just for comparison. From the implementation of quadratic linear controller in the system with scenarios controlling price, that the price of electricity, the demand and the power generation stabilized more quickly and with less considerable oscillation and overshoot.

Keywords: Optimal Control, Economic Market Model, Electric Power.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Relação entre Quantidade Demandada de Energia Elétrica e Preço	37
FIGURA 2	– Relação entre Quantidade Gerada de Energia Elétrica e Preço	37
FIGURA 3	– Curva de Preço, Geração e Demanda	39
FIGURA 4	– Estabilidade do sistema Autônomo	40
FIGURA 5	– Evolução do preço ao longo do Tempo	41
FIGURA 6	– Evolução dos estados ao longo do tempo	43
FIGURA 7	– Evolução do Preço ao longo do tempo	43
FIGURA 8	– Evolução do controlador ao longo do tempo	44
FIGURA 9	– Evolução dos estados ao longo do tempo com o sistema limitado	44
FIGURA 10	– Evolução do Preço ao longo do tempo com o sistema limitado	45
FIGURA 11	– Evolução do Preço ao longo do tempo controlando produção de energia elétrica	46
FIGURA 12	– Evolução dos estados ao longo do tempo controlando produção de energia elétrica	46
FIGURA 13	– Evolução dos estados ao longo do tempo controlando preço e produção de energia elétrica	47
FIGURA 14	– Evolução do Preço ao longo do tempo controlando preço e produção de energia elétrica	47
FIGURA 15	– Evolução dos estados ao longo do tempo controlando preço e tendo a quantidade demanda maior que a quantidade produzida	48
FIGURA 16	– Evolução do Preço ao longo do tempo preço e tendo a quantidade demanda maior que a quantidade produzida	48
FIGURA 17	– Parâmetros Econômicos	54

LISTA DE ABREVIATURA, SIGLAS E ACRÔNIMOS

A.C Antes de Cristo

ANEEL Agência Nacional de Energia Elétrica

BEN Balanço Energético Nacional

COFINS Contribuição para o Financiamento da Seguridade Social

COPEL Companhia Paranaense de Energia

DAGEE Departamento Acadêmico de Gestão e Economia

EPE Empresa de Pesquisa Energética

ICMS Imposto sobre Operações relativas à Circulação de mercadorias

LQR *Linear Quadratic Regulator* (Regulador Linear Quadrático)

MALAB *Matrix Laboratory* (Laboratório de Matrizes)

ONS Operadora Nacional do Sistema Elétrico

PID Proporcional Integral Derivativo

PIS Programa Integração Social

TCC Trabalho de Conclusão de Curso

UTFPR Universidade Tecnológica Federal do Paraná

VCAI Sistema Estocásticos nos quais a Variação da Magnitude do Controle Aumenta a Incerteza

LISTA DE SÍMBOLOS

Qd	Quantidade demandada
Qp	Quantidade produzida
A	Matriz de estados
B	Matriz de controle
x	Entrada do sistema
y	Saída do sistema
u	Política de controle
Q_k	Matriz semi-definida
R_k	Matriz semi-definida
N	Número de etapas do problema
V_k	Custo mínimo quadrático
K_k	Ganho do sistema de controle
P_k	Equação de Riccati
L_k	Parte controle na política de controle do sistema afim
N_{k+1}	Parte linear no custo quadrático do sistema afim
T_{k+1}	Parte constante no custo quadrático do sistema afim
k	Instante
α	Consumo autônomo
β	Sensibilidade de demanda ao preço
γ	Custos fixos de produção
δ	Sensibilidade de oferta ao preço
σ	Hiato entre oferta e demanda
G	Vetor constante
E	Estabilidade do sistema

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
1.1 TEMA	10
1.1.1 Delimitação do Tema	13
1.2 PROBLEMAS E PREMISSAS	14
1.3 OBJETIVOS	14
1.3.1 Objetivo Geral	14
1.3.2 Objetivos Específicos	15
1.4 JUSTIFICATIVA	15
1.5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	16
1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO	16
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA EM CONTROLE ÓTIMO	18
2.1 REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO (LQR)	19
2.1.1 Política de Controle Ótimo para um Sistema Linear	19
2.1.2 Política de Controle Ótimo para um Sistema Afim	22
3 MODELAGEM DO SISTEMA ECONÔMICO AUTÔNOMO	27
3.1 MODELO AUTÔNOMO	28
3.1.1 Equações Dinâmicas do Sistema Autônomo	28
3.1.2 Modelo em Espaço de Estados	29
3.1.3 Modelo via Equações a Diferenças	31
3.2 PARÂMETROS ECONÔMICOS	34
4 ANÁLISE DO SISTEMA ECONÔMICO	39
4.1 SISTEMA AUTÔNOMO	39
4.1.1 Estabilidade do Sistema em Espaço de Estados	40
4.1.2 Estabilidade do Sistema via Equações a Diferença	40
4.2 SISTEMA COM CONTROLE	42
5 CONCLUSÃO	50
5.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS	50
5.2 SUGESTÃO PARA FUTUROS TRABALHOS	51
REFERÊNCIAS	52
Apêndice A – CÁLCULO MATRICIAL	53
A.1 OPERAÇÕES COM MATRIZES	53
A.2 DERIVADAS MATRICIAIS	53
Anexo A – TABELA DE ANÁLISE DE REGRESSÃO DOS PARÂMETROS ECONÔMICOS TRIMESTRALMENTE	54

1 INTRODUÇÃO

1.1 TEMA

Pessoas querendo controlar sistemas existem desde muito antes se pensar em teorizar todo o estudo de controle. Basicamente toda a teoria que se conhece hoje teve seu início há muito tempo atrás. Tem-se conhecimento de estudos que utilizavam sistemas de realimentação com intuito de controlar e sanar problemas ocasionados na Grécia Antiga, na Mesopotâmia e no Egito Antigo. Acredita-se que um dos primeiros sistemas utilizando o conceito de controle ocorreu na Grécia Antiga e, entre estes, encontra-se o relógio de água de Ktesibios, construído por volta de 270 A.C. Consistia em uma boia dentro de um compartimento de óleo combustível com a finalidade de manter o nível do óleo sempre constante (DORF, 2011). Neste primeiro momento, trabalhava-se de forma empírica, não havendo ainda qualquer modelagem matemática da dinâmica do sistema nem mesmo análise de seu comportamento espectral.

Um dos primeiros problemas solucionado ao longo da história a partir da teoria de controle clássico foi o de controlar a temperatura de um forno utilizado para aquecer uma incubadora. Projetado por Cornelis Drebbel, aproximadamente em 1620, consistia em colocar uma espécie de sensor de temperatura dentro do forno e controlar o sistema de resfriamento fora da caixa (DORF, 2011).

Outro famoso problema solucionado pelo controle clássico foi a busca de um sistema que pudesse controlar a velocidade de rotação de um eixo. Este problema estava ligado a melhoria do uso de um moinho movido pelo vento. O método promissor à época utilizava um pêndulo cônico e ficou conhecido como “governador de bolas flutuantes” (FRANKLIN et al., 2013).

De um modo geral, os sistemas de controle são formados por subsistemas e processos que têm como objetivo o controle das variáveis de interesse no processo, controle este que se buscou desde os primórdios da humanidade, conforme mencionado nos exemplos anteriores. A teoria conhecida como controle clássico consiste em trabalhar com sistemas lineares, invariantes no tempo e que contêm entradas e saídas únicas.

Depois de anos projetando controladores na ótica do domínio do tempo, surgiram

alguns estudiosos que introduziram o conceito de projeto de controle no domínio da frequência. Entre eles estão H.W. Bode que, com Black e Nyquist, por volta de 1927, nos laboratórios Telefônicos Bell, começou a estudar técnicas no domínio da frequência com o uso da transformada de Laplace e do plano complexo de frequência (DORF, 2011).

Sendo assim, a teoria de controle atingiu vários ramos, dentre os quais podem ser citados a análise da estabilidade de um sistema, a resposta em frequência, os estudos temporais dos sistemas, entre outros. Uma das áreas em que o estudo de controle, inserida no processo do controle industrial, produziu grande impacto foi o desenvolvimento do que é conhecido hoje como automação, ou seja, sistemas que funcionam de maneira automática sem a necessidade de interferência do homem.

A automação tornou-se possível e predominante nas indústrias, pois buscava-se a produtividade. Essa demanda nos processos industriais fez surgir o controlador proporcional-integrador-derivador (PID). O controle PID foi descrito primeiramente em 1935 por Ralph Callender que utilizava o controlador antecipando a variação do sinal do erro (FRANKLIN et al., 2013). Até hoje, é o tipo de controlador mais utilizado na indústria, com um conceito resistente e de fácil aprendizado.

Contudo, com o passar dos anos, esse tipo de controle se mostrou muito limitado em algumas áreas da engenharia, pois não conseguia ser aplicado nos problemas mais avançados. Então, observou-se a necessidade de pesquisas para a compreensão de um sistema de controle que fosse mais abrangente. Em meados da década de 1930 houve o surgimento do controle moderno. Entretanto, foi durante a Segunda Guerra Mundial que a base do controle ótimo e de outros vieses do controle moderno começaram a ser aprimorados e receberam grande estímulo.

Por volta da década de 1950, o estudo em que se utilizava equações diferenciais ordinárias como um modelo para sistema de controle foi novamente foco dos pesquisadores, resultando em diversos trabalhos apresentados na primeira Conferência da Federação Internacional de Controle Automático, realizada em Moscou em 1960. A grande maioria destes trabalhos apresentava a teoria de espaço de estados com ampla utilidade para computadores (DORF, 2011).

Uma grande contribuição no estudo e na pesquisa da engenharia de controle aconteceu com o advento do Sputnik, que era um projeto em que a União Soviética concebia a produção da primeira remessa de satélites artificiais. Esse tipo de tecnologia necessitava de controles mais modernos e com mais exatidão. No dia 4 de outubro de 1957, foi lançado o primeiro satélite artificial, conhecido como Sputnik 1 (DORF, 2011). Este fato foi de grande importância para o estudo de controle ótimo, trabalhando com os métodos de frequência e do domínio do tempo

e mostrando que a engenharia de controle precisava considerar ambas as vertentes de estudo simultaneamente para uma análise mais completa de alguns tipos de sistemas.

Apenas em 1962 com Bryson e Denham que o estudo do controle ótimo tomou grande evidência no meio acadêmico, por meio da apresentação da capacidade de um avião supersônico em mergulhar em um certo ponto com o objetivo de atingir determinada altitude no menor tempo possível (FRANKLIN et al., 2013).

Sendo assim, visando aplicar a engenharia de controle em alguns sistemas mais complexos foi possível a consolidação do que se conhece hoje como Teoria de Controle Moderno. A mesma não trabalha unicamente com o domínio de frequência, integrando o domínio do tempo nas resoluções dos problemas e cercando os sistemas com o conceito de estados. Vale a pena ressaltar que a engenharia de controle não se restringe apenas ao contexto dos sistemas mecânicos, térmicos ou elétricos. De fato, a teoria de controle moderno pode também ser aplicada em outros contextos, tais como sistemas biológicos, sociais ou econômicos.

A teoria de controle aplicada em um sistema econômico tem como objetivo manter o mesmo em equilíbrio. Para exemplificar, tem-se o controle da inflação. Uma economia aquecida¹ é quase sempre favorável para todas as classes, pois, se há mais vendas para os empresários, há mais emprego para os trabalhadores. Entretanto, se um produto possuir muita demanda, estes podem ficar escassos e passarem a custar mais, causando inflação.

Para manter o nível de inflação o governo faz uso da política monetária, por meio da taxa de juros. O Banco Central fixa a meta da inflação em cinco por cento ao ano, sendo este um valor de referência e, para alçar o objetivo, o Banco Central atua aumentando ou diminuindo os juros. Caso os juros do país estejam altos, o consumidor tende a comprar menos, porque as prestações dos produtos serão mais altas e isso implica na queda da inflação.

Um sistema de controle visando o cenário econômico foi implementado por André du Pin Calmon (CALMON, 2009) em sua dissertação de Mestrado. O aluno relata que existem diversas fontes de incertezas que influenciam a definição da política por um Banco Central, como a transparência, transmissão de informação e expectativa, e que a maneira adota pelo Federal Reserve Bank baseada no Regulador Linear Quadrático não é a melhor forma para representar a política monetária. Para provar ele utiliza a política de controle ótima para um

¹Uma economia aquecida se refere a taxa básica de juros, por exemplo, o Banco Central é capaz de aquecer a economia, por tanto temos uma queda da taxa, ou desaquecer colocando alta dos juros. Tendo juros baixos, as fábricas contam com um custo favorável, porém os preços dos podem aumentar caso a indústria não esteja preparada para produzir mais e assim a inflação pode crescer. Por outro lado, tendo os juros em alta, as compras ficam em baixa e a inflação tende a baixar (Portal Brasil, 2012).

sistema VCAI (Sistema Estocásticos nos quais a Variação da Magnitude do Controle Aumenta a Incerteza), para modelar a definição da política monetária por um Banco Central ou pelo Federal Reserve Bank que representa melhor as decisões reais do Federal Reserve.

Outro exemplo de controle utilizado na economia é o controle de estoques. Os estoques são utilizados para reduzir os problemas causados pela diferença entre oferta e demanda. Assim como os juros, os estoques funcionam da mesma maneira. Quando a demanda de um produto está alta, o valor deste tende a aumentar, aumentando o estoque. Do contrário, se uma mercadoria ou serviço não forem procurados, o preço tende a cair e com isso tende-se diminuir o estoque. O escopo desse trabalho tem o enfoque na aplicação da teoria de controle em um sistema econômico onde o produto não pode ser estocado facilmente.

1.1.1 Delimitação do Tema

O foco deste Trabalho de Conclusão de Curso foi o estudo de um sistema econômico associado a obtenção do preço final da energia elétrica utilizando a Teoria do Controle Ótimo, visando a obtenção de ações econômicas que produzam melhores desempenhos.

A planta econômica estudada é um modelo simples de mercado com estoque tal como apresentado por (CHIANG; WAINWRIGHT, 2011). Nesse modelo, a dinâmica do mercado busca equilibrar a demanda e a oferta para que não haja excesso ou falta de energia elétrica, obtendo assim uma menor variação no preço. Neste caso, a definição de estoque não é usual, pois este produto não pode ser armazenado ou não pode ter a oferta fora de uma faixa pré-determinada pelo produtor. A energia elétrica é um bem que depende de outros fatores para ser produzida, como, em usinas hidrelétricas, quantidade de água nos rios, vazão do rio, entre outros.

Para a obtenção do preço, duas variáveis importantes próprias da economia foram analisadas, a saber, a quantidade demandada, Q_d , e a quantidade atualmente produzida, Q_p (CHIANG; WAINWRIGHT, 2011). O ajuste do preço não está restrito a uma compensação de mercado, podendo ser estabelecido pelos próprios tomadores de decisão por meio de uma correção estratégica.

O tomador de decisão foi inserido como uma variável de controle no modelo do sistema econômico, para alcançar o equilíbrio entre a oferta e a demanda, interferindo diretamente no preço final da energia elétrica.

Dessa forma, objetiva-se determinar uma política de controle ótima de preços que atenda às necessidades do mercado e da empresa.

1.2 PROBLEMAS E PREMISSAS

“Economia é o estudo de como a sociedade associa seus recursos escassos. ”
(MANKIW, 2009)

Economia é uma ciência que possui conceitos e termos muito próprios, por isso esse foi um dos problemas ao longo do TCC. Foi necessário um aprofundamento em conceitos que estão fora da área de estudo de um curso de Engenharia de Controle e Automação, fazendo com que seja necessária a ajuda de especialistas e professores para auxiliar na área de economia.

Após esta primeira fase de estudos e de aprendizagem de conceitos, foi necessário traduzir e aplicar esses conceitos no contexto de sistemas de controle. No entanto, a premissa é trabalhar com o controle ótimo em um modelo em espaço de estados. Sendo assim, foi feita a modelagem de um sistema econômico sob este ponto de vista.

O enfoque foi aprofundar os estudos em uma teoria de controle pouco apresentada na sala de aula, a teoria de controle ótimo.

Antes do começo da escrita desta proposta, foram lidas várias pesquisas para a elaboração e escolha de quais seriam os modelos apropriados e adequados a um TCC. A maioria dos modelos econômicos encontrados eram muito complexos, pois muitos deles não eram lineares e vários, por serem contínuos no tempo e estocásticos, apresentavam e utilizavam métodos que necessitavam de equações de difusão, o que demandaria um estudo mais extenso.

Sendo assim, a premissa deste TCC para o sistema econômico a ser estudado tratou de modelos lineares e discretos no tempo. A modelagem foi realizada de forma simplificada, não levando em conta todos os aspectos envolvidos em um mercado real. Isso permitiu um tratamento analítico do problema de controle a partir de equações já conhecidas na literatura.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

Analisar o sistema de controle de um modelo de mercado com estoque, a partir do ponto de vista da teoria de controle ótimo, tendo em vista determinar a melhor política de variação de preço minimizando as oscilações.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Estudar a representação matemática correta dos elementos que fazem parte de um sistema econômico: produto, custo, estoque, receita, etc.;
- Estudar a representação na forma de equação de estados de um sistema econômico: produto, custo, estoque, receita, etc., bem como modelar o sistema de interesse;
- Obter a política ótima de controle para o sistema econômico modelado;
- Explorar diversos cenários econômicos e utilizar o *software* Matlab para simulá-los e visualizar os resultados graficamente.

1.4 JUSTIFICATIVA

A conta de energia elétrica é a cobrança feita pelas distribuidoras de energia elétrica a seus consumidores. A energia pode ser cobrada de acordo com o consumo verificado a cada mês (com um valor mínimo a ser cobrado sempre), ou de acordo com o pré-contrato com a distribuidora.

A tarifa cobrada é definida pelo território geográfico onde cada empresa distribuidora fornece energia. Se a área coincide com a de um estado, a tarifa é única naquela unidade federativa. Há uma diferença também dependendo do tipo de estabelecimento que utilizará essa energia. A tarifa cobrada em uma residência é diferente, por exemplo, de uma cobrada em uma indústria.

Para o cálculo desta tarifa são levadas em conta três variáveis, a geração de energia, a transmissão e distribuição de energia e os encargos e tributos. Mesmo que estas sejam as variáveis para a tarifa da conta de luz, sabe-se que há um valor mínimo na fatura do consumidor, ainda que este não utilize a energia elétrica durante o período correspondente. Trata-se do custo de disponibilidade, isto é, o custo para que se possa utilizar a energia quando necessário.

Apesar de se ter uma fórmula matemática e a Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) designar a taxa para a geração de energia, por meio de um leilão para obter a menor taxa, não se pode afirmar que a somatória será a menor para o consumidor.

Retratando esse cenário, verifica-se o quanto é importante um estudo de um meio mais abrangente e confiável para obtenção de uma melhor certeza para a cobrança da tarifa final. Sendo assim, uma alternativa para tentar tornar constante essa variável é com o uso de um sistema de controle.

Utilizando-se de um sistema de controle ótimo, é possível obter uma ação de máximo benefício; no nosso caso, obter uma tarifa contínua em prol do consumidor. Tendo uma boa modelagem econômica, este tipo de controle proporcionará mais estabilidade às concessionárias, menor custo aos consumidores e diminuirá o desperdício relacionado ao mal planejamento de demanda.

Com a inclusão do controle, não só as concessionárias serão beneficiadas, já que continuarão com o mesmo lucro e evitarão desperdícios, mas também os consumidores, pois apreciarão um determinado produto ou serviço com pouca ou nenhuma oscilação de preço.

Estes são os pontos ditos como motivação e justificativa para realização deste estudo, sendo o foco principal obter uma menor variação do preço da geração de energia elétrica.

1.5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para o estudo inicial do problema foi utilizada a metodologia de estudo qualitativo bibliográfico, por meio de pesquisas em monografias e artigos.

Por meio de vasto referencial bibliográfico, buscou-se entender e representar de maneira adequada a modelagem do sistema econômico utilizando todos os conhecimentos prévios com o intuito de compor um sistema de controle.

Ao ser projetado o sistema de controle para a resolução ótima do problema, iniciou-se as simulações utilizando o *software* Matlab no qual auxiliarão no entendimento e na análise dos resultados obtidos pelo controle automático implementado.

Ao final das simulações e dos estudos relativos ao controle do sistema, foram analisados os resultados apresentados e a otimização adequada ao sistema econômico ao qual estamos inserindo a teoria de controle ótimo.

Estas análises de modelo e de um estudo econômico mais aprofundado foram realizadas com o auxílio e as contribuições do coorientador, professor do departamento de economia (DAGEE) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), que tem profunda experiência em análise de mercado microeconômico.

1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

Para o desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso foram consideradas as seguintes etapas e divisão de capítulos:

- Metodologia Aplicada ao TCC: Capítulo 1;
- Trabalho de Conclusão de Curso 1: Capítulos 2 e 3;
- Trabalho de Conclusão de Curso 2: Capítulos 4 e 5.

Capítulo 1: Introdução

Contém a apresentação do trabalho, tema, delimitação do tema, problemas e premissas, objetivos gerais e específicos, justificativas, procedimentos metodológicos, estrutura do trabalho e cronograma.

Capítulo 2: Fundamentação Teórica em Controle Ótimo

Projeto de um controlador ótimo para um sistema linear discreto no tempo.

Capítulo 3: Modelagem do Sistema Econômico Autônomo

Desenvolvimento matemático sob formas de equações de estado dos diversos componentes de um sistema de controle para um sistema econômico.

Capítulo 4: Análise do Sistema Econômico

Desenvolvimento de simulações, fazendo o uso do *software* Matlab, utilizando o método de controle clássico e de controle ótimo, para assim ser feita uma comparação e, realizando por fim, uma análise dos respectivos resultados.

Capítulo 5: Conclusões

Considerações finais a respeito do trabalho realizado.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA EM CONTROLE ÓTIMO

Para influenciar e controlar um sistema qualquer é necessária a implementação de uma política de controle, ou seja, é preciso inserir no espaço de estados do sistema uma matriz de controle. A partir desta matriz, tem-se a possibilidade de controlar a quantidade produzida e o preço do produto. Sabe-se que um sistema a ser controlado na representação de espaço de estados da-se a partir de:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (1)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k. \quad (2)$$

Temos A como a matriz de estados do meu sistema e B a matriz de controle. O sinal conhecido como x representa a entrada do sistema e o sinal y a saída do mesmo sistema a ser controlado. O sinal u é a política de controle que será utilizada no sistema. Visando obter um certo padrão de funcionamento intimamente ligado a um desempenho que se deseja alcançar, necessita-se de ferramentas que possibilitem que o sistema atenda tais objetivos. Sendo assim, a teoria de controle ótimo aplicada pelo método de programação dinâmica de R. E. Bellman tem como intuito minimizar uma equação funcional de custo relacionando às variáveis de estado ao sinal de controle.

A política de controle ótima foi encontrada a partir de uma equação recursiva oriunda da aplicação dos conceitos de programação dinâmica.

Neste capítulo foi considerado o método de programação dinâmica com o objetivo de resolver o problema linear quadrático (LQR). O problema do regulador linear quadrático envolve a classe de sistemas lineares ao qual representamos o critério de custo como quadrático. O regulador linear quadrático trata-se de um caso de controle que busca manter os estados de um sistema dinâmico o mais próximo possível de um valor de referência, otimizando o uso do controlador.

2.1 REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO (LQR)

Considere um sistema qualquer com uma dinâmica discreta dado por $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ e horizonte finito, isto é $k = 0, 1, \dots, N$ com estado inicial igual a x_0 . O problema consiste em encontrar a sequência de controle $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, \dots, u_{N-1}^*)$ que causa ao sistema uma trajetória $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_{N-1}^*, x_N^*)$ e minimiza o custo quadrático calculado por:

$$J_N(x, u) = \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q(k) x_k + u_k^T R(k) u_k) + x_N^T Q_N x_N, \quad (3)$$

em que Q_k e R_k são respectivamente uma matriz semi-definida e definida positiva para cada k . O número N representa o número de etapas do problema. Neste caso, como dito anteriormente por se tratar de um problema de horizonte finito, considera-se $N < \infty$. A resolução desse problema dá-se fundamentalmente pelo princípio de otimalidade de Bellman. O princípio de otimalidade relata que em uma política ótima independente do estado inicial e da decisão inicial, as próximas decisões devem seguir uma política ótima que diz respeito ao estado resultante da primeira decisão (BELLMAN, 1971). A partir desse princípio surgiu a equação de Bellman, também conhecida como equação da Programação Dinâmica.

Considerando $V_k(x_k)$ custo mínimo a partir de um instante intermediário qualquer k e fixando Q_k e R_k como constantes. Pode-se assim escrever a equação de Bellman como:

$$V_k(x_k) = \min_u [x_k^T Q x_k + u^T R u + V_{k+1}(x_{k+1})]. \quad (4)$$

2.1.1 Política de Controle Ótimo para um Sistema Linear

Seja um sistema descrito por,

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k. \quad (5)$$

Considerando que o custo restante é dado por uma relação quadrática do tipo:

$$V_{k+1}(x_{k+1}) = x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1}. \quad (6)$$

Com P_{k+1} uma matriz simétrica pode-se substituir a equação (6) na equação (4) e encontrar a política de controle ótimo como segue:

$$\begin{aligned}
V_k(x_k) &= \min_u [x_k^T Q x_k + u^T R u + x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1}] \\
&= \min_u [x_k^T Q x_k + u^T R u + (Ax_k + Bu)^T P_{k+1} (Ax_k + Bu)].
\end{aligned} \tag{7}$$

Considerando $V_k(x_k)$ uma função diferenciável, é possível encontrar o mínimo fazendo a derivada em relação a u e igualando a zero:

$$\frac{\partial V_k(x_k)}{\partial u} = 0 \tag{8}$$

Portanto:

$$\frac{\partial}{\partial u} (x_k^T Q x_k + u^T R u + (Ax_k + Bu)^T P_{k+1} (Ax_k + Bu)) = 0 \tag{9}$$

Desenvolvendo o termo $(Ax_k + Bu)^T P_{k+1} (Ax_k + Bu)$:

$$\frac{\partial}{\partial u} (x_k^T Q x_k + u^T R u + x_k^T A^T P_{k+1} A x_k + x_k^T A^T P_{k+1} B u + u^T B^T P_{k+1} B u + u^T B^T P_{k+1} A x_k) = 0 \tag{10}$$

Aplicando as propriedades de derivada Matricial do Apêndice A obtém-se:

$$u^T R + x_k^T A^T P_{k+1} B + u^T B^T P_{k+1} B = 0 \tag{11}$$

Fazendo o transposto de ambos os lados tem-se:

$$(R + B^T P_{k+1} B)u + B^T P_{k+1} A x_k = 0 \tag{12}$$

Isolando u conclui-se que:

$$u = -(R + B^T P_{k+1} B)^{-1} (B^T P_{k+1} A) x_k = u^* \tag{13}$$

Note que, $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, \dots, u_{N-1}^*)$ é a política de controle ótima. Definindo-se uma matriz K_k como sendo:

$$K_k = (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} (B^T P_{k+1} A) \tag{14}$$

Pode-se reescrever a equação (13) como:

$$u_k^* = -K_k x_k \quad (15)$$

A matriz K_k , pode ser entendida como o ganho para o sistema de controle em um dado instante, k . Este ganho depende do valor de P_{k+1} . Portanto, conhecendo o valor de P_{k+1} podemos obter a ação de controle ótima u_k^* .

Para determinar a matriz P_{k+1} deve-se substituir a equação (15) na equação (4) levando em conta o custo em (6). Fazendo o desenvolvimento da equação de Bellman, tem-se:

$$\begin{aligned} V_k(x_k) &= x_k^T Q x_k + u^{*T} R u^* + (A x_k + B u^*)^T P_{k+1} (A x_k + B u^*) \\ &= x_k^T Q x_k + x_k^T A^T P_{k+1} A x_k + u^{*T} (R + B^T P_{k+1} B) u^* + x_k^T A^T P_{k+1} B u^* + u^{*T} B^T P_{k+1} A x_k \\ &= x_k^T Q x_k + x_k^T A^T P_{k+1} A x_k + x_k^T K_k^T (R + B^T P_{k+1} B) K_k x_k \\ &\quad - x_k^T A^T P_{k+1} B K_k x_k - x_k^T K_k^T B^T P_{k+1} A x_k \end{aligned} \quad (16)$$

$$V_k(x_k) = x_k^T (Q + A^T P_{k+1} A + K_k^T (R + B^T P_{k+1} B) K_k - A^T P_{k+1} B K_k - K_k^T B^T P_{k+1} A) x_k \quad (17)$$

Substituindo a equação (14) em (17):

$$V_k(x_k) = x_k^T (Q + A^T P_{k+1} A - (A^T P_{k+1} B) (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} (B^T P_{k+1} A)) x_k \quad (18)$$

À luz da equação (6), pode-se escrever:

$$V_k(x_k) = x_k^T P_k x_k \quad (19)$$

Comparando a equação (19) com a equação (18) conclui-se que:

$$P_k = Q + A^T P_{k+1} A - (A^T P_{k+1} B) (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} (B^T P_{k+1} A) \quad (20)$$

A Equação (20) é conhecida como a equação de Riccati para um sistema discreto. Sua solução P_k pode ser obtida através de recursão.

2.1.2 Política de Controle Ótimo para um Sistema Afim

Para que um sistema seja classificado como afim, o mesmo deve em sua equação de espaço de estados conter uma matriz de constantes. Esta matriz de constantes também pode ser considerada como o offset do sistema proposto. Sendo assim, considera-se o sistema linear com a dinâmica discreta descrito pela seguinte equação:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + G \quad (21)$$

Considerando que o custo restante para um sistema afim é dado por uma relação quadrática do tipo:

$$V_{k+1}(x_{k+1}) = x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} + N_{k+1} x_{k+1} + T_{k+1} \quad (22)$$

Usa-se de referência a equação, (4), de Bellman, apresentado no início do subcapítulo. Substituindo a equação (22) na (4) e tem como o objetivo encontrar a política de controle ótimo, para um sistema afim, como segue:

$$V_k(x_k) = \min_u [x_k^T Q x_k + u^T R u + x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} + N_{k+1} x_{k+1} + T_{k+1}] \quad (23)$$

Substituindo a equação (21) na (23):

$$\begin{aligned} V_k(x_k) &= \min_u [x_k^T Q x_k + u^T R u + V_{k+1}(x_{k+1})] \\ &= \min_u [x_k^T Q x_k + u^T R u + (Ax_k + Bu + G)^T P_{k+1} (Ax_k + Bu + G) \\ &\quad + N_{k+1} (Ax_k + Bu + G) + T_{k+1}] \end{aligned} \quad (24)$$

Considerando $V_k(x_k)$ uma função diferenciável é possível determinar o mínimo fazendo a derivada em relação a u e igualando a zero:

$$\frac{\partial V_k(x_k)}{\partial u} = 0 \quad (25)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} (x_k^T Q x_k + u^T R u + (A x_k + B u + G)^T P_{k+1} (A x_k + B u + G) \\ + N_{k+1} (A x_k + B u + G) + T_{k+1}) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Desenvolvendo o termo $(A x_k + B u + G)^T P_{k+1} (A x_k + B u + G)$ e o termo $N_{k+1} (A x_k + B u + G)$ obtem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} (u^T (R + B^T P_{k+1} B) u + u^T (B^T P_{k+1} A x_k + B^T P_{k+1} G) \\ + (x_k^T A^T P_{k+1} B + G^T P_{k+1} B + N_{k+1} B) u) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Aplicando as propriedades de derivada matricial como apresentado no Apêndice A obtem-se:

$$2u^T (R^T + B^T P_{k+1}^T B) + 2(A x_k + G)^T P_{k+1}^T B + N_{k+1} B = 0 \quad (28)$$

Dividindo toda a equação e fazendo a transposta dos dois lados:

$$(R + B^T P_{k+1} B) u = -B^T P_{k+1} A x_k - B^T (P_{k+1} G + (\frac{N_{k+1}}{2})^T) \quad (29)$$

Isolando o u :

$$u = -(R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A x_k - (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T (P_{k+1} G + (\frac{N_{k+1}}{2})^T) = u^* \quad (30)$$

Onde, $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, \dots, u_{N-1}^*)$ é a política de controle ótima para um Sistema Afim. Definindo-se uma matriz K_k, L_k , como sendo:

$$K_k = -(R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A x_k \quad (31)$$

$$L_k = -(R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T (P_{k+1} G + (\frac{N_{k+1}}{2})^T) \quad (32)$$

Pode-se reescrever a equação (30) como sendo:

$$u_k^* = -(K_k x_k + L_k) \quad (33)$$

Nota-se que em (33) o valor de K_k é igual ao obtido no caso linear acrescido de uma parcela que surge devido ao sistema afim representada por L_k , estas representam o ganho do sistema de controle para o Sistema Afim. Este ganho depende do valor de P_{k+1} , N_{k+1} , T_{k+1} . Portanto, conhecendo o valor de P_{k+1} , N_{k+1} , T_{k+1} pode-se obter a ação de controle ótima u_k^* . A matriz P_{k+1} é a solução da equação de Riccati discreta para um sistema padrão. Portanto o sistema controlado do tipo Afim também depende da matriz P_{k+1} com um deslocamento quadrático, V_{k+1} , dado por N_{k+1} , T_{k+1} . Fazendo o desenvolvimento da equação de Bellman tem-se:

$$\begin{aligned} V_k(x_k) &= x_k^T Q x_k + x_k^T A^T u^{*T} P_{k+1} (A x_k + G) + G^T P_{k+1} (A x_k + G) + N_{k+1} (A x_k + G) + T_{k+1} + u^{*T} \\ &\quad (R + B^T P_{k+1} B) u^* + u^{*T} (B^T P_{k+1} A x_k + B^T P_{k+1} G) + (x_k^T A^T P_{k+1} B + G^T P_{k+1} B + N_{k+1} B u^*) \\ &= x_k^T (Q + A^T P_{k+1} A + K_k^T (R + B^T P_{k+1} B) K_k - K_k^T B^T P_{k+1} A - A^T P_{k+1} B K_k) x_k \\ &\quad + (2(G^T P_{k+1} A - L_k^T (R + B^T P_{k+1} B) K_k - G^T P_{k+1} B K_k + L_k^T B^T P_{k+1} A) + N_{k+1} A - N_{k+1} B K_k) x_k \\ &\quad + T_{k+1} + L_k^T (R + B^T P_{k+1} B) L_k + 2G^T P_{k+1} B L_k + G^T P_{k+1} G + N_{k+1} B L_k + N_{k+1} G \end{aligned} \quad (34)$$

Substituindo a equação (31) em (34):

$$\begin{aligned} V_k(x_k) &= x_k^T (Q + A^T P_{k+1} A + A^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A \\ &\quad - 2A^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A) x_k + (2(G^T P_{k+1} A - L_k^T B^T P_{k+1} A \\ &\quad - C^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A + L_k^T B^T P_{k+1} A) + N_{k+1} A \\ &\quad - N_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A) x_k + T_{k+1} + L_k^T (R + B^T P_{k+1} B) L_k + 2G^T P_{k+1} B L_k \\ &\quad + G^T P_{k+1} G + N_{k+1} B L_k + N_{k+1} G \\ &= x_k^T (Q + A^T P_{k+1} A - A^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A) x_k \\ &\quad + (2G^T P_{k+1} + N_{k+1}) (A - B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A) x_k \\ &\quad + T_{k+1} + L_k^T (R + B^T P_{k+1} B) L_k + 2G^T P_{k+1} B L_k + G^T P_{k+1} G + N_{k+1} B L_k + N_{k+1} G \end{aligned} \quad (35)$$

Fazendo (32) em (35):

$$\begin{aligned}
V_k(x_k) &= x^T (Q + A^T P_{k+1} A - A^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A) x_k \\
&\quad + (2G^T P_{k+1} + N_{k+1}) (A - B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A) x_k \\
&\quad + T_{k+1} + (P_{k+1} G + (\frac{N_{k+1}}{2})^T)^T B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T (P_{k+1} G + (\frac{N_{k+1}}{2})^T) \\
&\quad - 2G^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T (P_{k+1} G + (\frac{N_{k+1}}{2})^T) + G^T P_{k+1} G \\
&\quad - N_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T (P_{k+1} G + (\frac{N_{k+1}}{2})^T) + N_{k+1} G \\
&= x^T (Q + A^T P_{k+1} A - A^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A) x_k \\
&\quad + (2G^T P_{k+1} + N_{k+1}) (A - B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A) x_k \\
&\quad + T_{k+1} - G^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} G - N_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} G \\
&\quad - \frac{1}{4} N_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T N_{k+1}^T + G^T P_{k+1} G + N_{k+1} G
\end{aligned} \tag{36}$$

À luz da equação (22), pode-se escrever:

$$V_k(x_k) = x_k^T P_k x_k + N_k x_k + T_k \tag{37}$$

Tal que,

$$\begin{aligned}
V_k(x_k) &= x^T \underbrace{(Q + A^T P_{k+1} A - A^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A)}_{P_k} x_k \\
&\quad + \underbrace{(2G^T P_{k+1} + N_{k+1}) (A - B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A)}_{N_k} x_k \\
&\quad + \underbrace{T_{k+1} - G^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} G - N_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} G}_{T_k} \\
&\quad - \underbrace{(\frac{1}{4}) N_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T N_{k+1}^T + G^T P_{k+1} G + N_{k+1} G}_{T_k}
\end{aligned} \tag{38}$$

Sendo assim tem-se P_k , N_k e T_k ,

$$P_k = Q + A^T P_{k+1} A - A^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A \tag{39}$$

$$N_k = (2G^T P_{k+1} + N_{k+1})(A - B(R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A) \quad (40)$$

$$T_k = T_{k+1} - G^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} G - N_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} G \\ + \left(\frac{1}{4}\right) N_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T N_{k+1}^T + G^T P_{k+1} G + N_{k+1} G \quad (41)$$

Nota-se que é necessário começar pelo cálculo de P_k para a obtenção do parâmetro N_k . T_k depende de P_k e N_k . A política ótima, u^* , como observado na equação (30), será determinada a partir dos valores de P_k e N_k . Observa-se que o valor de T_k não influencia na política de controle. A partir dessas informações e da análise das constantes de cálculo do sistema modelado, pode-se simular situações para a planta de controle.

Comparando as análises realizadas e a obtenção do controlador ótimo para os casos de um sistema linear e de um sistema afim, nota-se que para um sistema linear o custo tem como característica gráfica uma função quadrática com concavidade centrada na origem. No caso do sistema afim, esta quadrática está deslocada. Este deslocamento ocorre pois o custo terá uma parte linear e uma parte constante agregada.

3 MODELAGEM DO SISTEMA ECONÔMICO AUTÔNOMO

A fim de modelar o preço de um sistema econômico partiu-se dos conceitos de oferta, demanda e mercado. Estes conceitos de oferta e demanda são as premissas que fazem as economias de mercado funcionarem.

“Um mercado é um grupo de compradores e vendedores de um determinado bem ou serviço.” (MANKIW, 2009)

O conceito de oferta está associado a quantidade de mercadorias que os vendedores estão dispostos a colocar à venda a determinado preço (PINDYCK; RUBINEFELD, 2005). Como trabalhou-se com um sistema de geração de energia elétrica, a oferta fica associada com a quantidade disponível de produto que produzimos.

Demanda é o conjunto de pessoas (ou empresas) dispostas a adquirir uma mercadoria a um determinado preço (PINDYCK; RUBINEFELD, 2005). Quando a mercadoria é de necessidade pública, ou seja, todos precisam utilizar em suas atividades, sendo elas de trabalho ou lazer, esta mercadoria possui uma demanda constante, variando pouco em períodos. Um exemplo desta variação se dá no horário em que grande parte da população está dormindo ou não necessita de energia elétrica.

O preço final pode ser associado à escassez ou ao excesso de produto. Pode-se também perceber que a quantidade demandada diminui quando o preço aumenta e aumenta quando o preço diminui, sendo assim, a quantidade de produto ofertado é negativamente relacionada com o preço.

O modelo de sistema econômico admite que o preço de algum produto ou serviço seja estabelecido com o objetivo de compensar a produção que ocorre em cada um dos períodos de tempo. A premissa para que este sistema seja verificado para cada período de tempo implica que a mercadoria associada ao preço seja uma mercadoria perecível e que não possa ser estocada. Como exemplo e forma de aplicação deste modelo de sistema com estas especificações sobre a mercadoria utilizaremos a mercadoria como sendo a energia elétrica.

Neste capítulo será apresentado o modelo do sistema econômico, autônomo e com entrada, com as decisões de seus parâmetros e equações. O objetivo também é analisar a estabilidade dos modelos previamente obtidos.

3.1 MODELO AUTÔNOMO

3.1.1 Equações Dinâmicas do Sistema Autônomo

Para obter um modelo simplificado de um sistema econômico envolvendo o mercado de energia elétrica é necessário fazer as seguintes suposições.

1. A quantidade consumida (demandada), Qd_k , e a quantidade produzida, Qp_k , são funções lineares do preço do produto P_k , avaliadas em tempo discreto em cada instante de k (CHIANG; WAINWRIGHT, 2011).

2. Os vendedores estabelecem um preço para cada intervalo $(k, k + 1)$ levando em conta a situação do estoque no instante k . Se houver um acúmulo de estoque no período anterior, o preço do próximo período será fixado em um valor mais baixo que o do período anterior. No entanto, se for notado uma baixa no estoque, o preço do período corrente será mais alto em relação ao período anterior (CHIANG; WAINWRIGHT, 2011). Sabendo que para o contexto da energia elétrica o estoque é o desequilíbrio da geração de energia e de carga demandada, ambos cenários são prejudiciais ao sistema de geração de energia elétrica.

A partir das afirmações de Chiang e Wainwright, formula-se as seguintes equações para o modelo de mercado com estoque:

$$Qd_k = \alpha - \beta P_k, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (42)$$

$$Qp_k = -\gamma + \delta P_k, \quad \gamma, \delta > 0. \quad (43)$$

$$P_{k+1} = P_k - \sigma(Qp_k - Qd_k), \quad \sigma > 0. \quad (44)$$

As constantes impostas na equação acima representam:

α = consumo autônomo,

β = sensibilidade de demanda ao preço,

γ = custos fixos de produção,

δ = sensibilidade de oferta ao preço,

σ = hiato entre oferta e demanda.

O consumo autônomo, α , representa o máximo de consumo, ou seja, a quantidade demandada pelo produto caso seu preço seja igual a zero. (PINDYCK; RUBINEFELD, 2005). No caso do sistema apresentado acima, o consumo autônomo existe, pois se trata da energia elétrica que é um item de necessidade básica da sociedade. No entanto, se a energia elétrica fosse de graça a população não utilizaria este produto a todo momento, pois não tem-se esta necessidade.

Tem-se que β trata-se de um coeficiente linear que mostrará quanto varia a demanda em função de uma variação de preço (PINDYCK; RUBINEFELD, 2005). Na energia elétrica é o valor que associa a quantidade de energia que está disponível ao consumidor com a variação de preço no mercado.

Assim, à luz da equação (42), quanto maior o preço do produto, menor será o demanda em relação ao máximo possível em uma economia.

A constante γ pode ser interpretada como os custos fixos da produção, isto é, aquelas despesas que a empresa incorre independentemente de seu volume de produção (PINDYCK; RUBINEFELD, 2005). Neste caso, não basta que o preço seja positivo, ele deve ser elevado o suficiente para cobrir os custos da empresa. Somente a partir daí a quantidade produzida de um produto passa a ser positiva. Neste sistema, o custo fixo de produção está associado ao valor gasto inicialmente para produzir a energia, por exemplo, o preço do maquinário, da construção da hidrelétrica e os custos fiscais de uma empresa.

A sensibilidade de oferta ao preço, δ , é um coeficiente linear que denota a variação da oferta de bens e serviços em relação ao aumento do preço no mercado (PINDYCK; RUBINEFELD, 2005). Em relação a um sistema de produção de energia elétrica em uma hidrelétrica, este conceito pode ser aplicado a abertura ou fechamento dos vertedouros, conforme a demanda necessária.

A constante referente ao hiato entre oferta e demanda, σ , determina como o preço varia conforme a diferença entre a quantidade ofertada e a quantidade demandada (PINDYCK; RUBINEFELD, 2005). Temos como exemplo a inserção da tarifação associada a bandeira verde, vermelha e amarela na conta de luz, que ocorre quando a demanda está maior que a oferta fazendo com que o preço da conta de luz aumente.

3.1.2 Modelo em Espaço de Estados

A partir das equações (42), (43) e (44) apresentadas na seção anterior, pode-se obter o modelo desse sistema econômico em espaço de estados. Tais equações representam um modelo

dinâmico em tempo discreto, o qual relaciona o valor das variáveis em instantes diferentes. Em um sistema dinâmico, o estado é definido como um vetor (denominado vetor de estado), formado pelo menor conjunto de variáveis (denominadas variáveis de estado) cuja determinação junto ao conhecimento da entrada do sistema indica o comportamento deste para qualquer instante (OGATA, 2010). Em suma, são necessárias três diferentes variáveis para analisar o espaço de estados de um sistema dinâmico, sendo elas: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado (OGATA, 2010).

Para o espaço de estados do sistema econômico apresentado, o vetor de estado será:

$$x_k = \begin{bmatrix} Qd_k \\ Qp_k \\ P_k \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Nota-se que a equação (44) já está adequada com o vetor de estado escolhido, no entanto com o objetivo de obter o espaço de estados, tem-se a necessidade de reescrever as equações (42) e (43), respectivamente,

$$Qd_{k+1} = \alpha - \beta P_{k+1}, \quad (46)$$

$$Qp_{k+1} = -\gamma + \delta P_{k+1}. \quad (47)$$

Em seguida, substituindo a equação de (44) nas equações (46) e (47) obtém-se,

$$\begin{aligned} Qd_{k+1} &= \alpha - \beta [P_k - \sigma(Qp_k - Qd_k)] \\ &= \alpha - \beta P_k + \beta \sigma Qp_k - \beta \sigma Qd_k, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} Qp_{k+1} &= -\gamma + \delta [P_k - \sigma(Qp_k - Qd_k)] \\ &= -\gamma + \delta P_k - \delta \sigma Qp_k + \delta \sigma Qd_k. \end{aligned} \quad (49)$$

A partir da definição do vetor de estado na equação (45) e com as equações (44), (48) e (49), é possível determinar as matrizes um modelo em espaço de estados na forma,

$$x_{k+1} = Ax_k + G, \quad (50)$$

que define um sistema afim devido à presença do vetor constante G .

Assim,

$$A = \begin{bmatrix} -\beta\sigma & \beta\sigma & -\beta \\ \delta\sigma & -\delta\sigma & \delta \\ \sigma & -\sigma & 1 \end{bmatrix}, \quad (51)$$

$$G = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\gamma \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

3.1.3 Modelo via Equações a Diferenças

A análise e dedução da trajetória temporal, P_k , inicia com a substituição das equações (44) e (42) na equação (43), condensando todas as equações do modelo em uma equação de diferenças, como apresentado a seguir,

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= P_k - \sigma((- \gamma + \delta P_k) - (\alpha - \beta P_k)) \\ &= P_k + \sigma\gamma - \sigma\delta P_k + \sigma\alpha - \sigma\beta P_k \\ &= [1 - \sigma(\delta + \beta)]P_k + \sigma(\alpha + \gamma). \end{aligned} \quad (53)$$

Para o desenvolvimento da equação de primeira ordem apresentada anteriormente serão utilizadas substituições como pode ser notado abaixo:

$$A = \sigma(\delta + \beta), \quad (54)$$

$$B = \sigma(\alpha + \gamma). \quad (55)$$

Desenvolvendo P_k , tem-se que:

Para o período k ,

$$P_k = P_{k-2}(1 - A)^2 + B(2 - A). \quad (56)$$

Período igual a $k - 1$,

$$P_k = P_{k-3}(1-A)^3 + B[(2-A) + (1-A)^2]. \quad (57)$$

Período igual a $k - 2$,

$$P_k = P_{k-4}(1-A)^4 + B[1 + (1-A) + (1-A)^2 + (1-A)^3]. \quad (58)$$

Assim:

$$\begin{aligned} P_k &= P_0(1-A)^k + B \sum_{n=0}^{k-1} (1-A)^n \\ &= (1+A)^k \left(P_0 - \frac{B}{A} \right) + \frac{B}{A}. \end{aligned} \quad (59)$$

Pode-se escrever (53) em função de P_0 , que representa o preço inicial:

$$\begin{aligned} P_k &= \left(P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \right) [1 - \sigma(\beta + \delta)]^k + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \\ &= (P_0 - \bar{P})[1 - \sigma(\beta + \delta)]^k + \bar{P}, \end{aligned} \quad (60)$$

em que,

$$\bar{P} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}. \quad (61)$$

Como comparação pode-se obter P_k a partir da transformada Z. Sendo assim faz-se,

$$X = 1 - \sigma(\delta + \beta), \quad (62)$$

$$Y = \sigma(\alpha + \gamma). \quad (63)$$

Tem-se

$$P_{k+1} = XP_k + Y \quad (64)$$

Fazendo a transformada Z de (64),

$$\begin{aligned} ZP_z - ZP_0 &= XP_z + \frac{YZ}{Z-1}, \\ (Z-X)P_z &= ZP_0 + \frac{YZ}{Z-1}, \\ &= \frac{Z(Z-1)P_0 + YZ}{Z-1}, \\ \frac{P_z}{Z} &= \frac{(Z-1)P_0 + Y}{(Z-X)(Z-1)}. \end{aligned} \quad (65)$$

Obtem-se,

$$\frac{P_z}{Z} = \frac{w_1}{(Z-X)} + \frac{w_2}{(Z-1)}. \quad (66)$$

Fazendo a transformada inversa de Z:

$$P_k = w_1 Ax^k + w_2 \quad (67)$$

Sendo,

$$w_1 = \frac{(X-1)P_0 + Y}{(X-1)} = P_0 + \frac{Y}{(X-1)}, \quad (68)$$

$$w_2 = \frac{Y}{(1-X)} = -\frac{Y}{(X-1)}. \quad (69)$$

Substituindo X e Y em (69) tem-se,

$$w_2 = -\frac{\sigma(\alpha + \gamma)}{(-\sigma(\delta + \beta))} = \frac{(\alpha + \gamma)}{(\delta + \beta)}. \quad (70)$$

Comparando (69) e (68), conclui-se que

$$w_1 = P_0 - w_2. \quad (71)$$

Utilizando (70), obtem-se

$$w_1 = P_0 - \frac{(\alpha + \gamma)}{(\delta + \beta)}. \quad (72)$$

Portanto P_k é igual a:

$$P_k = \left(P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \right) [1 - \sigma(\beta + \delta)]^k + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \quad (73)$$

3.2 PARÂMETROS ECONÔMICOS

Para que a análise do sistema de controle obtido na subseção 3.1.1 possa ser comparada a cenários reais, faz-se necessária a obtenção dos parâmetros que compõe as equações (42), (43) e (44). Ou seja, é necessário obter os valores relacionados ao sistema de geração de energia elétrica. Sendo assim, estima-se os parâmetros a partir da suposição das elasticidades referentes ao preço da demanda e da oferta obtidos através de artigos referente a estudo de estabilidade do sistema de geração de energia elétrica. Elasticidade é um fator que referencia a quantidade demandada ou a quantidade ofertada em relação a variação em seus determinantes (MANKIW, 2009). A elasticidade referente ao preço da demanda é relacionada ao fator do quanto a quantidade demandada de um certo produto reage a partir da mudança do preço do mesmo produto. Enquanto a elasticidade relacionada ao preço da oferta tem-se por meio da variação do preço em relação a quantidade ofertada de um bem de consumo.

No caso do sistema de geração de energia elétrica apresentado em (42), (43) e (44), o valor da elasticidade referente ao preço da demanda é igual a $-0,5$ (MATTOS, L. B., 2005). Esta demanda é considerada uma demanda inelástica, ou seja, a quantidade da demanda varia

proporcionalmente menos do que se comparada ao preço. O valor de elasticidade utilizado para o preço da oferta (geração) é igual a 0,5 (SCHIMIDT, C. A. J. and LIMA, M. A., 2012), sendo considerada uma oferta inelástica e, portanto, a quantidade da oferta varia proporcionalmente menos do que se comparada ao preço.

A partir das definições de elasticidade, tem-se,

$$\text{Elasticidade de demanda} = \frac{\Delta Qd}{\Delta P} \frac{P_k}{Qd_k}, \quad (74)$$

$$\text{Elasticidade de geração} = \frac{\Delta Qp}{\Delta P} \frac{P_k}{Qp_k}. \quad (75)$$

Associa-se então na teoria de elasticidade a relação entre a variação de demanda e de geração com a variação no preço ao coeficientes angular da reta de quantidade demandada e da reta quantidade produzida, respectivamente,

$$\text{Elasticidade de demanda} = \beta \frac{P_k}{Qd_k}, \quad (76)$$

$$\text{Elasticidade de geração} = \delta \frac{P_k}{Qp_k}. \quad (77)$$

Nota-se que para obter os parâmetros δ e β é necessário possuir os valores de elasticidade de demanda e geração. Substituindo os valores de P_k , Qd_k e Qp_k com os dados reais levantados e apresentados no Anexo A utilizou-se a tabela para encontrar os parâmetros δ e β . Esses valores foram coletados no período do ano de 2007 à 2015, referentes a trimestres. Ou seja, para cada ano, tem-se 4 valores referentes a cada variável.

O preço, P_k , da energia elétrica é fornecido pela empresa distribuidora. Os parâmetros que compõe este preço na conta de luz levam em conta preço da tarifa definido pela distribuidora com os impostos (ICMS, PIS e COFINS) (COPEL, 2016). No caso deste escopo, trabalhou-se com o preço da tarifa da COPEL sem os valores dos respectivos impostos. Desta maneira, há uma aproximação no valor do preço, pois não é todo o estado do Paraná que recebe energia elétrica a partir da COPEL distribuição.

O operador nacional do sistema elétrico (ONS) fornece em seu site um resumo mensal de geração de energia elétrica por estado, onde obteve-se os valores de Qp_k (ONS, 2016). No entanto, no estado do Paraná reside a Itaipu. A Itaipu sozinha tem carga instalada suficiente para gerar energia para atender ao estado do Paraná, mas a energia elétrica gerada pela Itaipu

não abastece o estado do Paraná. Sendo assim, o valor final de energia elétrica gerada dá-se a partir do valor obtido pelo ONS retirando a porcentagem que é de domínio do Paraguai na energia elétrica gerada pela Itaipu (ITAIPU, 2016).

A resenha mensal do mercado de energia elétrica produzida pela Empresa de Pesquisa Energética (EPE), associada ao Ministério de Minas e Energia, apresenta no Balanço Energético Nacional (BEN) a demanda anual de cada estado. E a partir de um resumo anual, pode-se obter o valor da quantidade demandada de energia elétrica, Qd_k , trimestralmente por estado.

Pode-se obter os parâmetros δ e β para cada trimestre como pode ser visto no Anexo A. A partir do δ e β associados a cada trimestre, realizou-se uma média aritmética a fim de determinar o valores médios destes para o período de 2007 à 2015. A média aritmética é usualmente utilizada pelos economistas. Os valores de δ e β médio serão utilizados no escopo deste trabalho. Sendo eles:

$$\beta = 1,2606 \cdot 10^4,$$

$$\delta = 2,6824 \cdot 10^4.$$

Substituindo os parâmetros obtidos de β e δ nas respectivas equações (42) e (43) é possível encontrar os parâmetros α e γ . Calculou-se estes para cada trimestre e com uma média aritmética entre os valores obteve-se α e γ que irão fazer parte deste TCC. Com isso,

$$\alpha = 9,825 \cdot 10^3,$$

$$\gamma = 6,835 \cdot 10^3.$$

O parâmetro σ é obtido isolando-o na equação (44) e utilizando o mesmo raciocínio dos parâmetros acima a partir da média aritmética entre os 36 valores referentes a cada trimestre. Assim:

$$\sigma = 1,41 \cdot 10^{-5}.$$

Todos os parâmetros obtidos nesta subseção estão em Giga Watt hora (GWh). No Anexo A é possível visualizar uma tabela com todos os valores citados referentes a cada trimestre entre o ano de 2007 a 2015.

Substituindo os parâmetros obtidos no decorrer desta seção nas equações (42), (43) e (44) tem-se,

$$Qd_k = 9,825 \cdot 10^3 - 1,2606 \cdot 10^4 P_k, \quad (78)$$

$$Qp_k = -6,835 \cdot 10^3 + 2,682 \cdot 10^4 P_k, \quad (79)$$

$$P_{k+1} = P_k - 1,41 \cdot 10^{-5} (Qp_k - Qd_k). \quad (80)$$

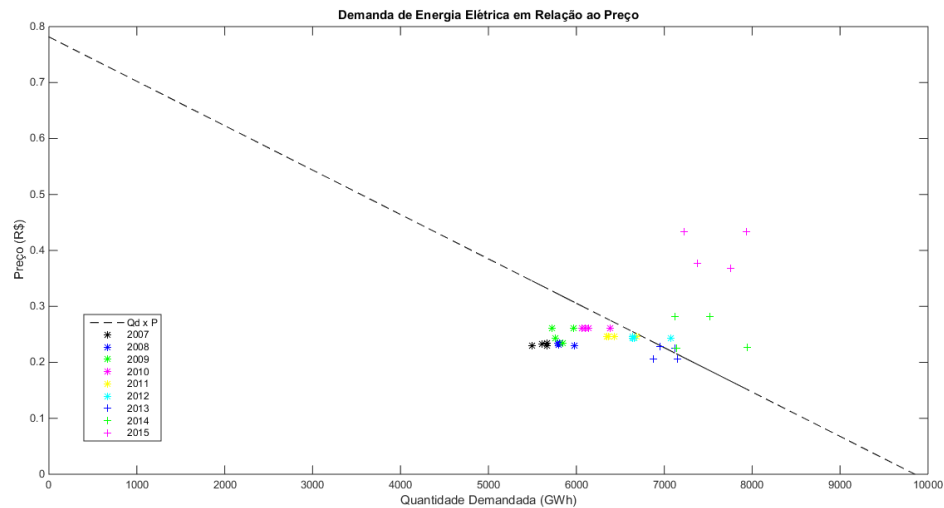


Figura 1: Relação entre Quantidade Demandada de Energia Elétrica e Preço

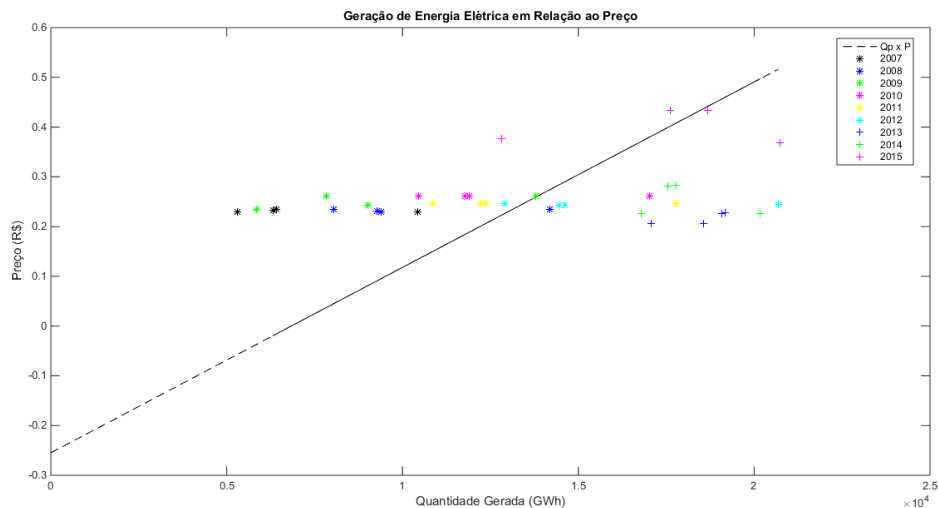


Figura 2: Relação entre Quantidade Gerada de Energia Elétrica e Preço

A partir dos dados que estão na Figura 17 contida no Anexo A, traçou-se dois gráficos. A Figura 1 apresenta, de acordo com os dados obtidos em cada trimestre entre os anos de 2007 à 2015, os pontos relacionando a demanda e o preço da energia elétrica. No mesmo gráfico temos a curva resultante dos parâmetros obtidos a partir da análise de regressão do sistema, equação (78).

A Figura 2 apresenta a relação entre a quantidade gerada de energia elétrica no estado do Paraná e o preço imposto pela empresa que distribui esta energia elétrica. Aparece no mesmo gráfico a curva referente a equação (79) obtida.

Tendo em vista ambas as Figuras, 1 e 2, nota-se que há um erro referenciado a cada uma delas. Este erro dá-se principalmente pelo problema da obtenção dos valores que compõe cada parâmetro. Os valores de P , Q_d e Q_p foram obtidos de diferentes fontes. Também observa-se que o valor do preço da energia elétrica dobrou nos últimos 2 anos. Este aumento deu-se por causa dos problemas de seca no país e também pela instabilidade financeira que o Brasil tem, neste período, passado. Porém, para fins do estudo proposto aqui, este erro é irrelevante para a obtenção das simulações e resultados referentes ao sistema econômico.

4 ANÁLISE DO SISTEMA ECONÔMICO

As equações (78), (79) e (80) representam o sistema econômico de uma planta de geração de energia elétrica. Neste ponto do trabalho é analisado como o sistema responde, ou seja, qual é a estabilidade do sistema, o tempo que esse sistema demora para estabilizar, o *overshoot* do sistema econômico, o ponto de equilíbrio entre outros fatores, visando obter o melhor preço de energia elétrica que forma a tarifa elétrica paga pelo consumidor.

4.1 SISTEMA AUTÔNOMO

Em um sistema autônomo tem-se a resposta do sistema quando este não sofre a influência de nenhum sinal externo. Segundo a economia a maneira de obter o preço de equilíbrio do mercado é pela intersecção das retas de quantidade demandada e quantidade produzida, apresentada na Figura 3. A quantidade de energia gerada no sistema inicia no negativo, isso ocorre pois para iniciar uma produção qualquer setor precisa primeiro investir, ou seja, no início de qualquer investimento paga-se para produzir. Sendo assim, tem-se um preço mínimo para que haja um retorno positivo no sistema.

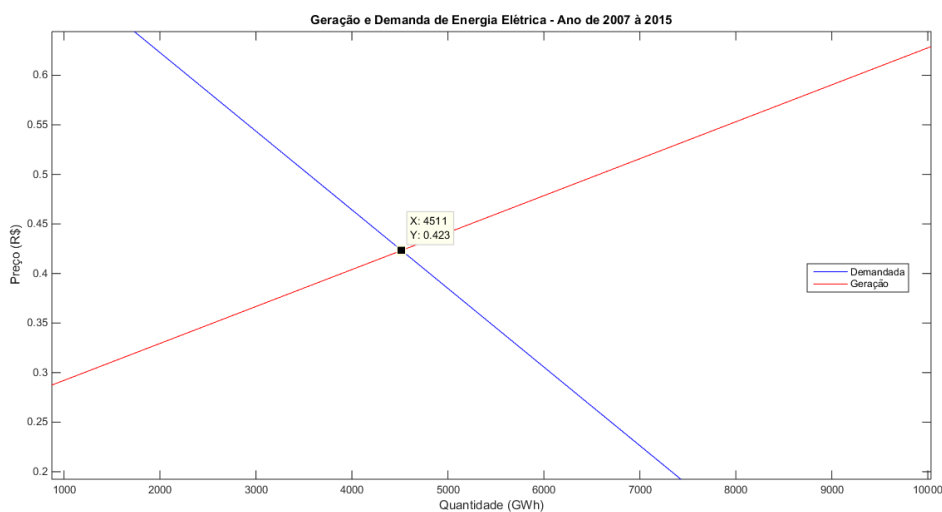


Figura 3: Curva de Preço, Geração e Demanda

Nota-se que a estabilidade deste sistema ocorre quando a reta de relação entre a

demanda e o preço e a reta que relaciona a geração e o preço se cruzam. Isso ocorre quando o preço da energia elétrica é aproximadamente de R\$ 0,42.

4.1.1 Estabilidade do Sistema em Espaço de Estados

Um sistema é estável se, para toda entrada limitada, a saída for limitada. Para isso todas as raízes da equação característica devem estar dentro do círculo unitário no plano complexo. Esta afirmação deve ser válida para qualquer condição inicial. A partir da função de transferência do sistema econômico, é possível obter as raízes da equação característica. Foi necessário obter a função de transferência do sistema para verificar a estabilidade do sistema em questão. Então, encontrou-se os pólos da função de transferência. Utilizando o *software* MATLAB obteve-se a função de transferência e os pólos do sistema. Verificando a Figura 4, é possível concluir que todas as raízes do sistema se encontram dentro do raio unitário. Sendo assim, o sistema é estável.

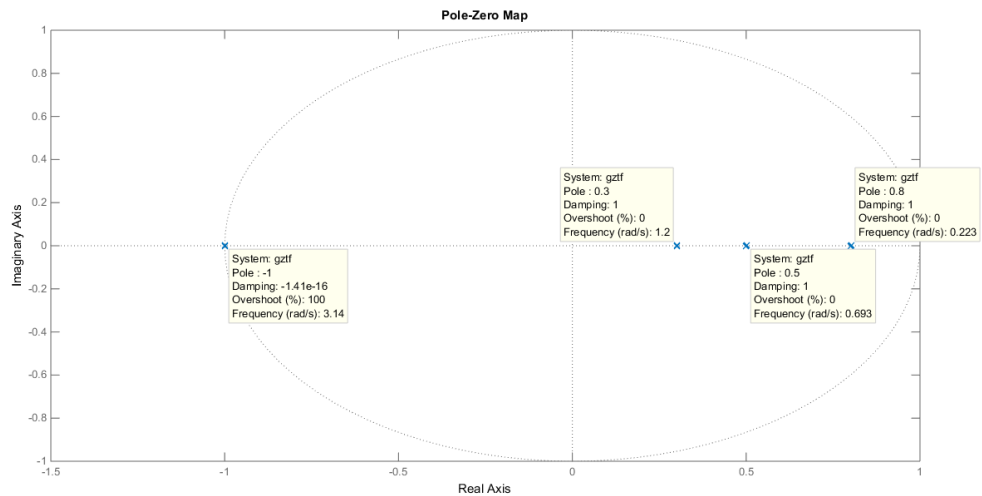


Figura 4: Estabilidade do sistema Autônomo

4.1.2 Estabilidade do Sistema via Equações a Diferença

O modelo dado por (53) permite analisar mais claramente a influência dos parâmetros na estabilidade do sistema formado pelas equações (78), (79) e (80). A partir da equação (73) pode-se afirmar que a estabilidade, E , do modelo descrito acima depende do termo:

$$E = 1 - \sigma(\beta + \delta), \quad (81)$$

E deve assumir valores iguais ou maiores que -1 e menores que 1 para que o sistema seja estável. A partir do valor de E é possível determinar a evolução do sistema em função do tempo e com isso percebe-se a estabilidade do sistema. Para o sistema proposto e com os parâmetros σ , β e δ obtidos anteriormente tem-se,

$$E = 1 - 1,41 \cdot 10^{-5} (1,261 \cdot 10^4 + 2,682 \cdot 10^4) = 4,440 \cdot 10^{-1}. \quad (82)$$

Tem-se na Figura 5 o gráfico da evolução do preço em função do tempo do sistema econômico autônomo obtido a partir de valores de (42), (43) e (44) do mercado de energia elétrica no período pré-determinado.

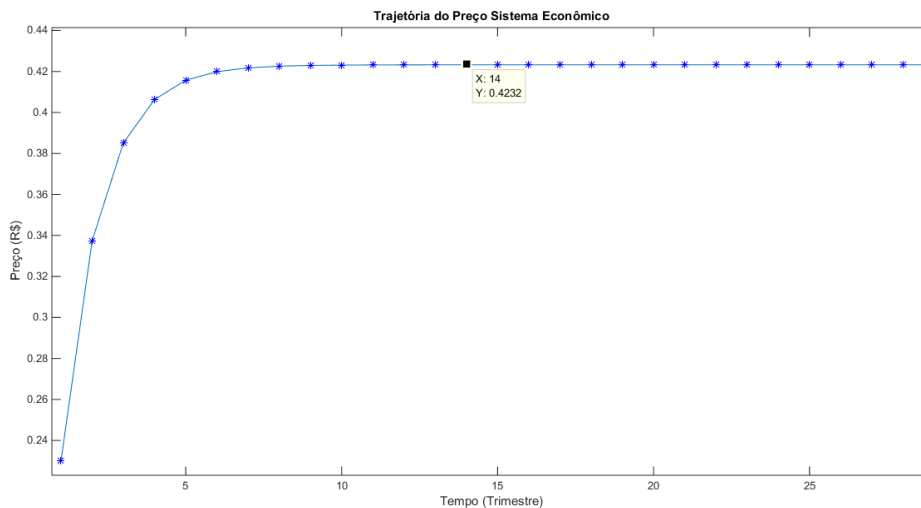


Figura 5: Evolução do preço ao longo do Tempo

Observe que a natureza da trajetória temporal do preço é não oscilatória e convergente. Tendo em vista a diminuição do tempo de estabilização é necessária a introdução de uma variável de controle. Esta variável significa que o ajuste do preço não será efetuado por compensação de mercado em cada período, mas por análise de um sistema de realimentação com um processo de estabelecimento de preços feito pelos agentes de controle.

A curva de estabilidade do sistema apresentada na Figura 5 mostra que o sistema estabiliza quando o valor do preço da energia elétrica atinge aproximadamente R\$ 0,42. Já na Figura 3, o ponto de equilíbrio das equações obtidas dá-se na intersecção das retas e determina a relação entre o preço de equilíbrio e a quantidade demandada e gerada de equilíbrio, coincidindo com o valor de R\$ 0,42 para o preço.

4.2 SISTEMA COM CONTROLE

É possível observar pela Figura 5 e pela Figura 3 que o preço tende a convergir para o valor de R\$ 0,42. Porém para que isto ocorra, deve-se esperar no mínimo 14 trimestres, ou seja, 42 meses como pode ser visualizado na Figura 5. Tendo este cenário em vista, será adicionado ao sistema um controle com o objetivo de estabilizar a curva de preço em um período reduzido de trimestres. Contudo, pode ser que ocorra no começo do controle uma grande variação do preço, tanto um aumento quanto uma queda.

O sistema controlado utiliza equações de espaço de estado de um sistema afim. Esta equação está descrita pela equação (83). A equação (83) é formada pelas matrizes A, B e G. As matrizes A e G foram obtidas na modelagem do sistema econômico. A matriz B é a matriz de controle e é por ela que é possível determinar quais serão as variáveis que serão controladas no sistema. Pela matriz B pode-se controlar a quantidade demandada, a quantidade produzida e o preço. A lei de controle utilizada neste sistema é a obtida no Capítulo 2 e dá-se a partir da equação (87).

Assim,

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + G, \quad (83)$$

$$B = \begin{bmatrix} Qd \\ Qp \\ P \end{bmatrix}, \quad (84)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\beta\sigma & \beta\sigma & -\beta \\ \delta\sigma & -\delta\sigma & \delta \\ \sigma & -\sigma & 1 \end{bmatrix}, \quad (85)$$

$$G = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\gamma \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (86)$$

$$u = -(R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A x_k - (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T (P_{k+1} G + (\frac{N_{k+1}}{2})^T) \quad (87)$$

Aplicando a teoria de controle ótimo apresentada no Capítulo 2 no sistema econômico

apresentado no Capítulo 3, visou-se controlar o preço da energia elétrica para diminuir o tempo de estabilização de 14 trimestres. Para o caso de controlar apenas o preço temos a matriz B sendo,

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (88)$$

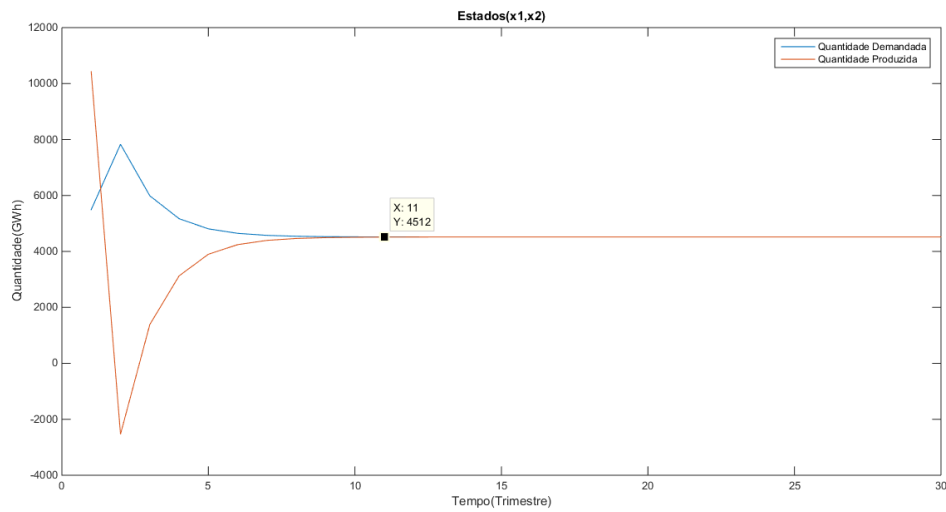


Figura 6: Evolução dos estados ao longo do tempo

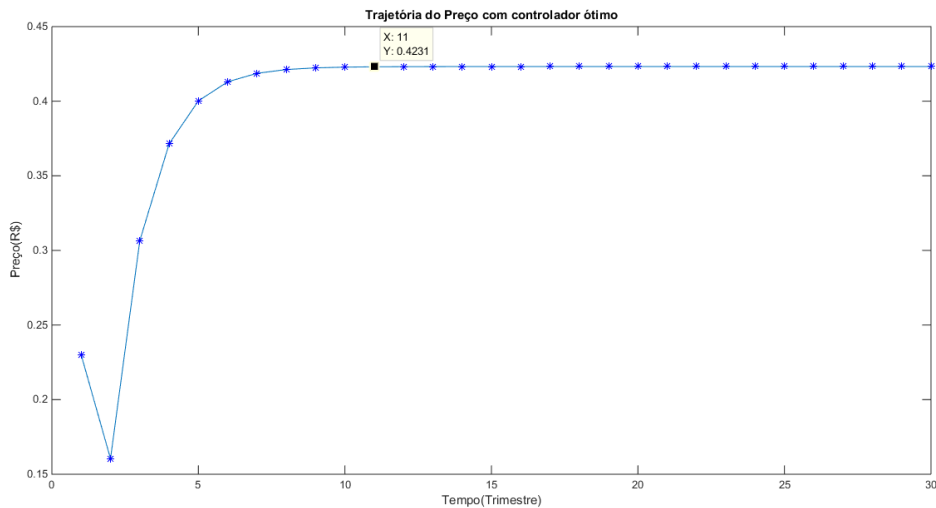


Figura 7: Evolução do Preço ao longo do tempo

A estabilização do preço da energia elétrica a partir do controle ótimo acontece no décimo primeiro período, como pode ser vista na Figura 7. Esta estabilização ocorre quando o preço atinge aproximadamente R\$ 0,42.

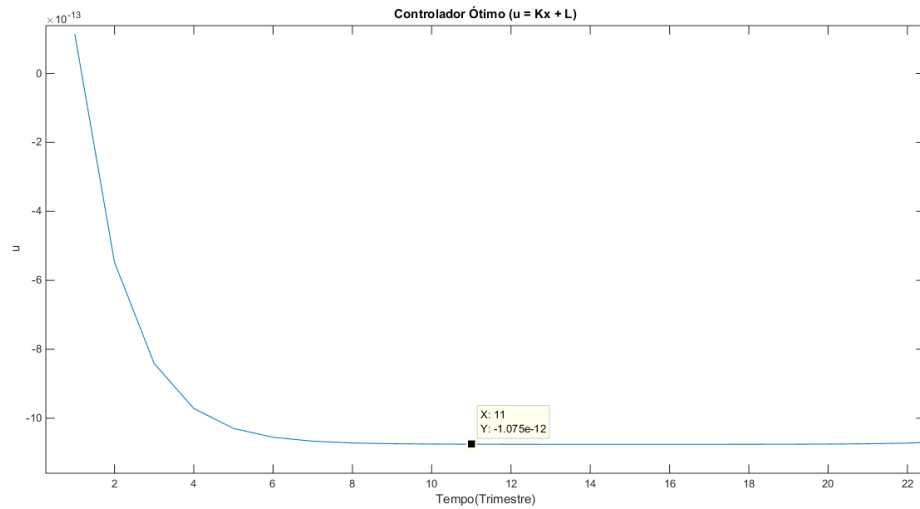


Figura 8: Evolução do controlador ao longo do tempo

A evolução dos estados Qd e Qp , respectivamente, é apresentada na Figura 6. Observa-se que a estabilização do sistema resulta, como esperado, na igualdade dos estados.

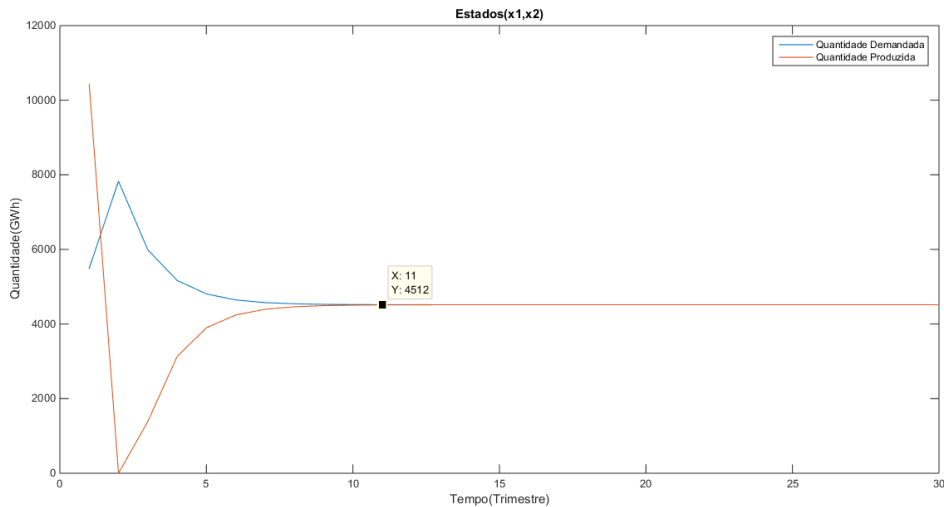


Figura 9: Evolução dos estados ao longo do tempo com o sistema limitado

A Figura 8 representa a evolução do controlador ao longo do tempo. O controlador atua a fim de estabilizar o sistema fazendo com que os estados do sistema atinjam o mesmo valor. O preço da energia elétrica só será estabilizado quando o valor da quantidade produzida for igual ao valor da quantidade demanda.

Nota-se, na Figura 6 que para estabilizar o sistema atingiu-se valores negativos durante um período de tempo no estados referente a quantidade produzida de energia elétrica. Este fenômeno não apresenta a realidade pois a geração de energia elétrica é sempre positiva. Sendo

assim, limitou-se os estados para valores positivos, ou seja, a quantidade de energia elétrica produzida e demandada será sempre igual ou maior que zero.

Nota-se na Figura 9 que os estados não atingem valores negativos. O preço continuou estabilizando no período de 11 trimestres como pode ser observado na Figura 10. O preço de estabilização manteve-se inalterado.

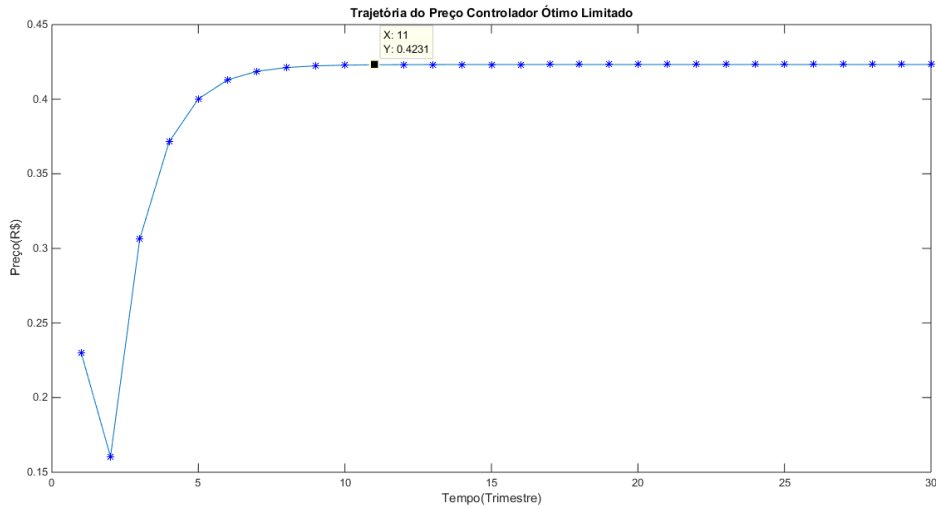


Figura 10: Evolução do Preço ao longo do tempo com o sistema limitado

Outro cenário a ser analisado acontece quando o sistema é controlado pela quantidade de energia elétrica produzida. Sendo assim o controle é aplicado diretamente nas usinas produtoras de energia elétrica. Como pode ser visualizado na Figura 11, este controle é mais lento se comparado ao controle do preço. Isso se dá devido ao fato que a população deverá utilizar somente a energia elétrica disponível, ou seja, demora mais períodos para que essa situação venha a ser normalizada. Na Figura 12, é possível verificar a igualdade que se dá entre a quantidade de energia elétrica produzida e a quantidade demandada pela população. A matriz de controle, B , utilizada neste cenário é:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (89)$$

Utilizando o controle na produção de energia elétrica obteve-se a estabilização do sistema com 12 trimestres, como visto na Figura 11. Essa estabilização é mais rápida que a obtida pelo sistema autônomo, sem controle, que ocorreu com 14 trimestres. No entanto, é mais lenta que a estabilização obtida controlando só o preço. Sendo assim, a aplicação do controle ótimo visando apenas a diminuição do tempo de estabilização neste cenário, não se faz

necessária por retardar o sistema econômico.

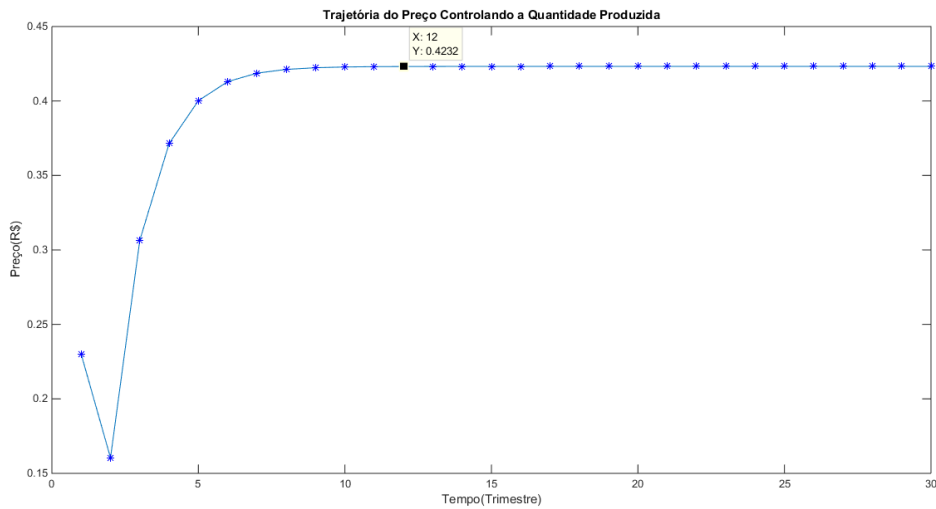


Figura 11: Evolução do Preço ao longo do tempo controlando produção de energia elétrica

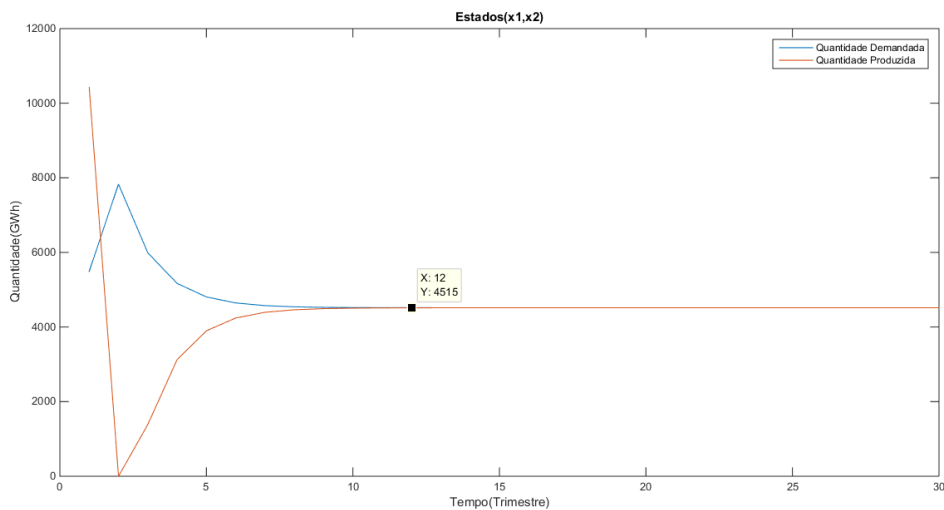


Figura 12: Evolução dos estados ao longo do tempo controlando produção de energia elétrica

Sabe-se que é importante conhecer a quantidade de energia elétrica gerada no sistema para ter disponível energia suficiente para atender o consumidor. Tendo em vista este cenário e o resultado apresentado pelo controle do preço e da geração de energia elétrica, decidiu-se controlar estes simultaneamente, a fim de obter melhores resultados no tempo de estabilização do sistema. A matriz de controle utilizada neste cenário,

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (90)$$

Nota-se nas Figuras 13 e 14 que o sistema estabilizou em 11 trimestres. Este foi o mesmo período encontrado quando somente o preço foi controlado. Porém, o fato de poder controlar duas variáveis no sistema não apresenta maior benefícios se o resultado sinal apresentado não for melhor aos apresentados anteriormente. De fato, é necessário mais trabalho de controle a partir do controlados não resultando em um controle mais rápido do que os apresentados nos cenários anteriores.

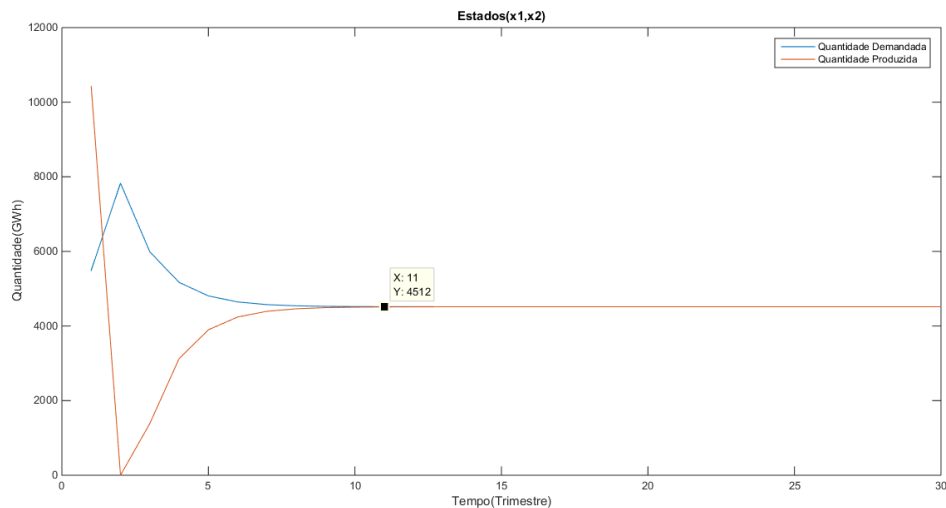


Figura 13: Evolução dos estados ao longo do tempo controlando preço e produção de energia elétrica

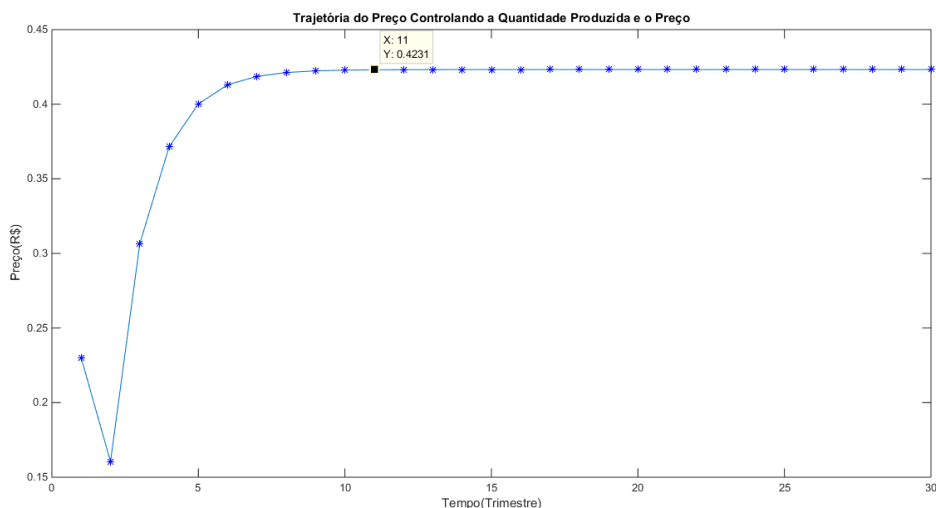


Figura 14: Evolução do Preço ao longo do tempo controlando preço e produção de energia elétrica

Visando controlar o preço da energia elétrica tem-se o cenário onde a quantidade inicial demandada de energia elétrica pela população é maior que a quantidade inicial produzida no estado. Este cenário ocorre quando a quantidade produzida no estado do Paraná não é suficiente

em relação a quantidade demandada necessária. É possível visualizar nas Figuras 15 e 16 que o sistema estabilizou em 14 trimestres. O controle aplicado nesse cenário é o mais demorado e se equipara a estabilização do sistema autônomo.

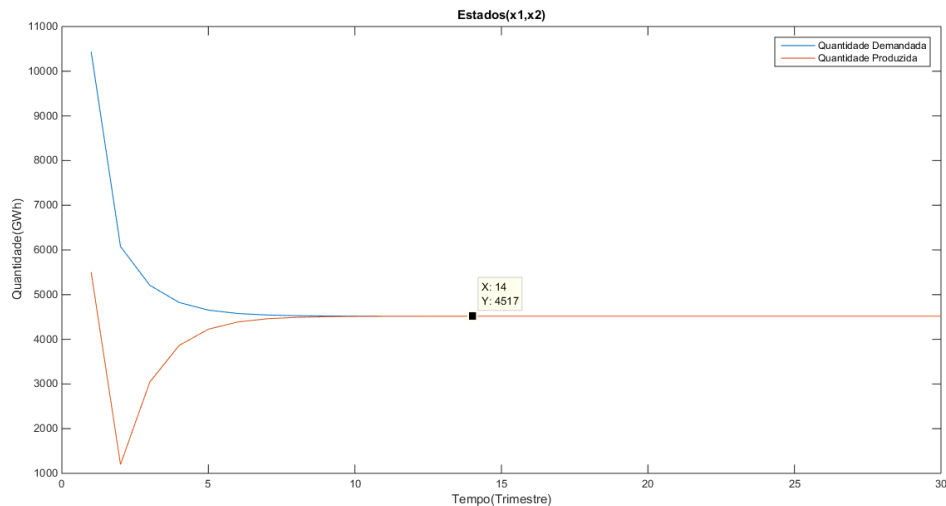


Figura 15: Evolução dos estados ao longo do tempo controlando preço e tendo a quantidade demanda maior que a quantidade produzida

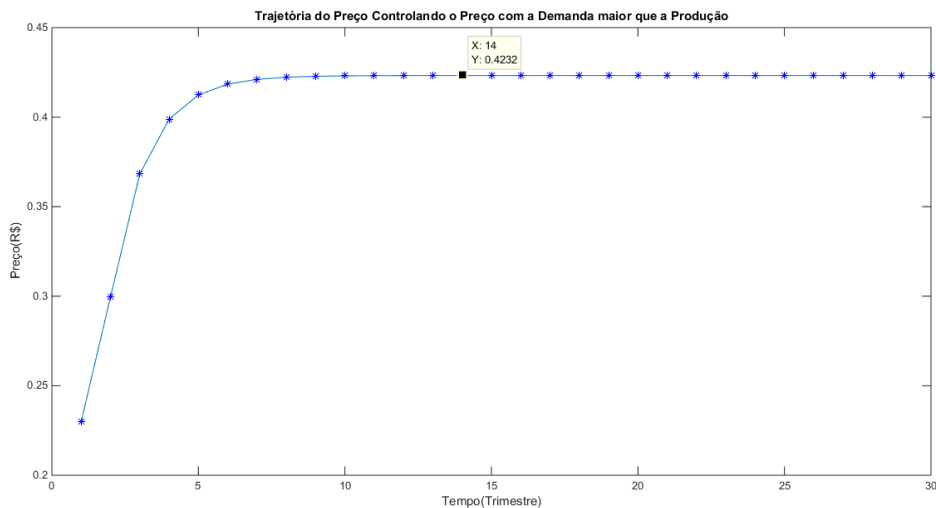


Figura 16: Evolução do Preço ao longo do tempo preço e tendo a quantidade demanda maior que a quantidade produzida

É importante ressaltar que o controle deve ser aplicado segundo a necessidade do sistema em questão e visando o menor tempo de estabilização. As figuras apresentadas representam sistemas discretos, sendo assim as ações serão tomadas período a período e a estratégia ou o controle pode ser alterado a cada trimestre.

Pode-se observar a partir das simulações realizadas que o controle influencia no

sistema. Notou-se que em grande parte dos cenários houve uma melhora no tempo de estabilização do preço da energia elétrica. Observou-se que esta estabilização depende da variável que será controlada no sistema. Descartou-se o cenário onde a demanda seria controlada, devido ao fato do controle da demanda tratar de uma política social, em que seria necessário a instrução aos consumidores sobre o desperdício ou a baixa utilização da energia elétrica.

5 CONCLUSÃO

5.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram estudados diversos conceitos sobre geração, produção e distribuição de energia elétrica a serem aplicados a um controlador em malha fechada, a fim de analisar o tempo de estabilização do sistema em diferentes cenários de simulação. Um sistema econômico de geração de energia elétrica foi modelado a partir das equações de Chiang e Wainwright e transformado em um sistema de espaço de estados. Apesar da complexidade do sistema afim, foi possível verificar a atuação de um controlador linear quadrático.

O desenvolvimento do modelo econômico em espaço de estados resultou em um sistema afim, dificultando o projeto analítico do controlador. O modelo em espaço de estados foi implementado visando analisar a resposta autônoma do sistema. Este modelo prevê algumas constantes econômicas referentes ao cenário da geração de energia elétrica. Sendo assim, a partir dos conceitos referentes a elasticidade do sistema utilizados na economia, pode-se então obter tais constantes para a finalização do sistema econômico a ser modelado.

Por meio do *software* MATLAB, foi possível verificar o funcionamento e a estabilização do modelo econômico autônomo, assim como o modelo controlado a partir da teoria de controle ótimo. O controle aplicado considera o sistema como um todo, ou seja, cada decisão que o controlador toma influencia em todas as variáveis do sistema.

Para efeitos de comparação, foi implementado diversos cenários de simulação a fim de verificar o tempo de estabilização do sistema econômico. Havia três possibilidades de controle: quantidade demandada, quantidade produzida e preço. A partir das simulações, observou-se que o controle somente do preço e o controle simultaneamente do preço e da geração de energia foram os que apresentaram o menor tempo de estabilização em relação a controlar somente o preço, controlar somente a demanda e controlar o preço com o valor inicial da quantidade demandada maior do que o valor inicial da quantidade produzida.

De modo geral, a abordagem utilizando o conceito de espaço de estados e matrizes de controle facilita a ampliação do sistema para diferentes entradas, já que para isso se faria necessário apenas alterar as dimensões das matrizes do controlador.

5.2 SUGESTÃO PARA FUTUROS TRABALHOS

Para dar sequência nos trabalhos, é importante explorar outros tipos de controlador, o que inclui outros equacionamentos, para analisar a eficiência do controle ótimo comparado a outras metodologias. Uma sugestão seria a utilização do Controle Robusto, para resolver o problema estudado, uma vez que o objetivo deste sistema é garantir o desempenho do sistema independente da presença de incertezas consideráveis.

A expansão para outros métodos de geração de energia para que haja um estudo do controle do preço de todo o estado pode trazer cenários mais realistas de simulação e até mesmo levar a utilização deste como base para as concessionárias manterem uma trajetória mais realista no aumento do valor da energia.

Por fim, tem-se também a possibilidade de um estudo mais detalhado de sistemas de controle afim, podendo trazer benefícios para a área acadêmica.

REFERÊNCIAS

- BELLMAN, R. E. **Introduction to the mathematical theory of control processes**. IMA, 1971.
- CALMON, A. du P. **Variação do Controle como Fonte de Incerteza**. 2009. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP, 2009.
- CHIANG, A. C.; WAINWRIGHT, K. **Matemática para Economistas**. New Jersey: LTC Editora, 2011.
- COPEL. **Dados Econômicos-Financeiros**. 2016. [Online; acessado em 13-Setembro-2016]. Disponível em: <<http://www.investsite.com.br/>>.
- DORF, R. C. **Sistemas de Controle Moderno**. 12. ed. São Paulo: LTC Editora, 2011.
- FRANKLIN, F.; POWELL, D. J.; EMAMI-NAEINI, A. **Sistemas de Controle para Engenharia**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman Editora Ltda, 2013.
- ITAIPU. **Produção Ano a Ano**. 2016. [Online; acessado em 26-Setembro-2016]. Disponível em: <<https://www.itaipu.gov.br/energia/producao-ano-ano>>.
- MANKIWI, N. G. **Introdução a Economia**. 3. ed. Rio e Janeiro: Cengage Learning, 2009.
- MATTOS, L. B. Uma Estimativa da Demanda Industrial de Energia Elétrica no Brasil: 1974-2002. **Organizações rurais agroindustrial**, Lavras, 7, n. 2, p. 238–246, 2005.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- ONS, O. N. do S. **Boletim Mensal de Geração por Estado**. 2016. [Online; acessado em 13-Setembro-2016]. Disponível em: <<http://www.ons.org.br>>.
- PINDYCK, R. S.; RUBINEFELD, D. L. **Microeconomia**. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2005.
- Portal Brasil. **Economia e Emprego: Juros**. 2012. [Online; acessado em 03-Outubro-2016]. Disponível em: <<http://www.brasil.gov.br/economia-e-emprego/2012/04/juros>>.
- SCHIMIDT, C. A. J. and LIMA, M. A. Estimacões e Previsões da Demanda por Energia Elétrica no Brasil. **Secretaria de Acompanhamento Econômico - SEAE**, Rio de Janeiro, 2012.

APÊNDICE A - CÁLCULO MATRICIAL

A.1 OPERAÇÕES COM MATRIZES

Considerando uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, temos que:

$$1. (AB)^T = B^T A^T$$

$$2. (A + B)^T = A^T + B^T$$

A.2 DERIVADAS MATRICIAIS

Considerando uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um vetor $x \in \mathbb{R}^n$, temos que:

$$1. \frac{\partial A}{\partial X} = 0$$

$$2. \frac{\partial X^T A X}{\partial X} = X^T (A + A^T)$$

$$3. \frac{\partial A X}{\partial X} = A$$

$$4. \frac{\partial X^T A}{\partial X} = A^T$$

**ANEXO A – TABELA DE ANÁLISE DE REGRESSÃO DOS PARÂMETROS
ECONÔMICOS TRIMESTRALMENTE**

ANÁLISE DE REGRESSÃO - PARÂMETROS ECONÔMICOS											
ANO	Trimestre	Demanda (GWh)	Preço (GWh)	Geração (GWh)	Preço/Demanda (GWh)	Preço/Oferta (GWh)	Beta	Alpha	Delta	Gamma	Sigma
2007	1	5,66E+03	0,23	5,29E+03	4,06E-05	4,34E-05	-1,23E+04	8,50E+03	1,15E+04	-2,65E+03	-
	2	5,49E+03	2,30E-01	1,04E+04	4,19E-05	2,21E-05	-1,19E+04	8,24E+03	2,27E+04	-5,21E+03	0,00E+00
	3	5,61E+03	2,33E-01	6,32E+03	4,16E-05	3,69E-05	-1,20E+04	8,42E+03	1,35E+04	-3,16E+03	-4,26E-07
	4	5,67E+03	2,35E-01	6,42E+03	4,14E-05	3,66E-05	-1,21E+04	8,50E+03	1,37E+04	-3,21E+03	-2,15E-07
2008	1	5,79E+03	2,35E-01	8,05E+03	4,05E-05	2,91E-05	-1,23E+04	8,68E+03	1,72E+04	-4,03E+03	2,16E-08
	2	5,81E+03	2,35E-01	1,42E+04	4,04E-05	1,65E-05	-1,24E+04	8,72E+03	3,03E+04	-7,10E+03	0,00E+00
	3	5,80E+03	2,32E-01	9,28E+03	3,99E-05	2,50E-05	-1,25E+04	8,70E+03	2,00E+04	-4,64E+03	4,09E-07
	4	5,98E+03	2,30E-01	9,40E+03	3,85E-05	2,45E-05	-1,30E+04	8,97E+03	2,04E+04	-4,70E+03	2,01E-07
2009	1	5,97E+03	2,60E-01	7,83E+03	4,36E-05	3,33E-05	-1,15E+04	8,95E+03	1,50E+04	-3,91E+03	-4,77E-06
	2	5,72E+03	2,60E-01	1,38E+04	4,55E-05	1,89E-05	-1,10E+04	8,58E+03	2,65E+04	-6,89E+03	0,00E+00
	3	5,76E+03	2,43E-01	9,01E+03	4,22E-05	2,70E-05	-1,18E+04	8,64E+03	1,85E+04	-4,51E+03	2,44E-06
	4	5,85E+03	2,35E-01	9,13E+03	4,01E-05	2,57E-05	-1,25E+04	8,78E+03	1,95E+04	-4,57E+03	1,16E-06
2010	1	6,10E+03	2,60E-01	1,05E+04	4,27E-05	2,49E-05	-1,17E+04	9,15E+03	2,01E+04	-5,23E+03	-4,05E-06
	2	6,06E+03	2,60E-01	1,70E+04	4,30E-05	1,53E-05	-1,16E+04	9,09E+03	3,27E+04	-8,51E+03	0,00E+00
	3	6,14E+03	2,60E-01	1,18E+04	4,24E-05	2,21E-05	-1,18E+04	9,21E+03	2,26E+04	-5,88E+03	0,00E+00
	4	6,38E+03	2,60E-01	1,19E+04	4,08E-05	2,19E-05	-1,23E+04	9,57E+03	2,28E+04	-5,95E+03	0,00E+00
2011	1	6,35E+03	2,47E-01	1,09E+04	3,89E-05	2,27E-05	-1,29E+04	9,52E+03	2,20E+04	-5,43E+03	1,98E-06
	2	6,44E+03	2,47E-01	1,78E+04	3,83E-05	1,39E-05	-1,30E+04	9,65E+03	3,60E+04	-8,88E+03	0,00E+00
	3	6,37E+03	2,47E-01	1,22E+04	3,87E-05	2,02E-05	-1,29E+04	9,55E+03	2,48E+04	-6,12E+03	0,00E+00
	4	6,69E+03	2,47E-01	1,24E+04	3,69E-05	1,99E-05	-1,35E+04	1,00E+04	2,51E+04	-6,19E+03	0,00E+00
2012	1	6,64E+03	2,46E-01	1,29E+04	3,70E-05	1,90E-05	-1,35E+04	9,96E+03	2,62E+04	-6,45E+03	1,42E-07
	2	6,64E+03	2,44E-01	2,07E+04	3,67E-05	1,18E-05	-1,36E+04	9,95E+03	4,24E+04	-1,03E+04	2,84E-07
	3	6,65E+03	2,43E-01	1,45E+04	3,65E-05	1,68E-05	-1,37E+04	9,98E+03	2,97E+04	-7,23E+03	8,63E-08
	4	7,07E+03	2,44E-01	1,46E+04	3,44E-05	1,67E-05	-1,45E+04	1,06E+04	3,00E+04	-7,31E+03	-5,81E-08
2013	1	7,12E+03	2,25E-01	1,91E+04	3,16E-05	1,18E-05	-1,58E+04	1,07E+04	4,24E+04	-9,54E+03	2,35E-06
	2	6,95E+03	2,28E-01	1,92E+04	3,27E-05	1,19E-05	-1,53E+04	1,04E+04	4,21E+04	-9,59E+03	-2,86E-07
	3	6,87E+03	2,06E-01	1,86E+04	3,00E-05	1,11E-05	-1,67E+04	1,03E+04	4,50E+04	-9,28E+03	2,51E-06
	4	7,15E+03	2,06E-01	1,71E+04	2,88E-05	1,20E-05	-1,74E+04	1,07E+04	4,15E+04	-8,53E+03	5,50E-08
2014	1	7,52E+03	2,81E-01	1,75E+04	3,74E-05	1,60E-05	-1,34E+04	1,13E+04	3,12E+04	-8,77E+03	-1,36E-05
	2	7,13E+03	2,82E-01	1,78E+04	3,96E-05	1,59E-05	-1,26E+04	1,07E+04	3,15E+04	-8,89E+03	-2,17E-07
	3	7,14E+03	2,26E-01	1,68E+04	3,16E-05	1,34E-05	-1,58E+04	1,07E+04	3,72E+04	-8,40E+03	7,33E-06
	4	7,95E+03	2,26E-01	2,02E+04	2,85E-05	1,12E-05	-1,76E+04	1,19E+04	4,46E+04	-1,01E+04	-7,23E-08
2015	1	7,39E+03	4,34E-01	1,87E+04	5,87E-05	2,32E-05	-8,52E+03	1,11E+04	2,15E+04	-9,34E+03	4,64E-04
	2	7,23E+03	4,34E-01	1,76E+04	6,01E-05	2,46E-05	-8,33E+03	1,08E+04	2,03E+04	-8,80E+03	2,23E-08
	3	7,38E+03	3,77E-01	1,28E+04	5,11E-05	2,94E-05	-9,79E+03	1,11E+04	1,70E+04	-6,41E+03	3,16E-05
	4	7,75E+03	3,68E-01	2,07E+04	4,74E-05	1,77E-05	-1,05E+04	1,16E+04	2,82E+04	-1,04E+04	4,20E-06
2016	1	7,19E+03	4,34E-01	-	6,04E-05	-	-8,28E+03	1,08E+04	-	-	-
	2	7,50E+03	4,34E-01	-	5,79E-05	-	-8,64E+03	1,12E+04	-	-	-
MÉDIA						-1,26E+04	9,83E+03	2,68E+04	-6,84E+03	1,41E-05	

Figura 17: Parâmetros Econômicos