

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JÉSSICA DE PAULA SILVA

**ESTUDO DE CASO DO MANEJO DE PLANTAS DANINHAS: IMPACTOS NA
PRODUÇÃO DA SOJA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO
2019

JÉSSICA DE PAULA SILVA

**ESTUDO DE CASO DO MANEJO DE PLANTAS DANINHAS: IMPACTOS NA
PRODUÇÃO DA SOJA**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação, apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná — UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Elenice Weber Stiegelmeier

CORNÉLIO PROCÓPIO

2019



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática



FOLHA DE APROVAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Elenice Weber Stiegelmeier
(Orientador)

Prof. Dr. André Luiz Machado Martinez

Profa. Dra. Glauca Maria Bressan

AGRADECIMENTOS

Nada foi possível sozinha, este trabalho tem a ajuda de muitos que passaram por mim durante este processo.

Por isso, em primeiro lugar agradeço a Deus, pois sem Ele ter chegado aqui seria impossível.

Para me orientar, contei com a enorme ajuda da minha orientadora Profa. Dra. Elenice Weber Stiegelmeier, obrigada pela sabedoria com que me guiou, por não ter desistido de mim quando eu mesma queria desistir e pela paciência com meus atrasos. Também agradeço ao professor André e a professora Glaucia que me ajudaram com suas sugestões.

Aos meus colegas de sala, aos que estão aqui perto e aos que já estão longe, fica aqui meu muito obrigada. Agradeço em especial as minhas amigas Glaucia, Mirian e Stephany que sempre estiveram ao meu lado nos momentos alegres e tristes que todo o processo proporcionou. Fico muito feliz por ter me tornado uma pessoa melhor ao lado de vocês!

Meu namorado não poderia ficar de fora, pois foi ele quem abraçou durante os diversos momentos de choro e medo e me acalmou quando o \LaTeX detectava algum erro.

Agradeço a minha família, que nos momentos de desordem, me proporcionaram um crescimento pessoal, mesmo sem notarem.

Para todos os professores que passaram por mim neste curso, que de alguma forma contribuíram para meu amadurecimento profissional: obrigada.

Gostaria de deixar registrado também meu agradecimento as professoras que trabalham comigo diariamente, elas me ensinam muito sobre como ser uma professora melhor.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

"Sandy: Isso é o fim?"

"Danny: Claro que não. Isso é apenas o começo."

Fazendo meu filme 1: a estreia de Fani, 2014.

RESUMO

SILVA, Jéssica de Paula. **Estudo de caso do manejo de plantas daninhas: Impactos na produção da soja**. 2019. 50 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2019

As plantas daninhas estão presentes nos mais diversos solos agrícolas e são caracterizadas por seu crescimento espontâneo sem serem cultivadas pelo homem. E, ainda, as plantas daninhas são conhecidas por sua competitividade e por sua vasta produção e longevidade das sementes, o que ocasiona perdas consideráveis de rendimento da cultura. O objetivo principal deste trabalho é estudar a dinâmica do crescimento populacional de plantas daninhas ao longo do tempo e verificar estratégias para o controle da população. Dessa forma, busca-se estudar um modelo matemático que descreve a dinâmica dessas plantas, a fim de melhor compreender a sua evolução e auxiliar na tomada de decisão do produtor. Neste trabalho será analisado um modelo dinâmico do crescimento de plantas daninhas a fim de determinar seus pontos de equilíbrio e verificar a influência dos parâmetros no modelo. O controle das plantas daninhas será realizado através da função dose-resposta. Um estudo de caso será apresentado para analisar a influência da planta daninha *Euphorbia heterophylla* na cultura da soja com tratamento através do herbicida Glifosato.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Crescimento populacional. Função dose-resposta. Plantas daninhas.

ABSTRACT

SILVA, Jéssica de Paula. **Case study of weed management: Impacts on soybean production.** 2019. 50 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2019

Weeds are present in the most diverse agricultural soils and are characterized by their spontaneous growth without being cultivated by man. And yet, weeds are known for their competitiveness and for their vast production and longevity of the seeds, which causes considerable loss of crop yield. The main objective of this work is to study the dynamics of population growth of weeds over time and to verify strategies for population control. In this way, it is sought to study mathematical models that describe the dynamics of these plants, in order to better understand their evolution and help in the search for control strategies that can collaborate with the increase of production in the field. In this work a dynamic model of weed growth will be analyzed in order to determine its equilibrium points and verify the influence of the parameters in the model. Weed control will be performed through the dose-response function. A case study will be presented to analyze the influence of the *Euphorbia heterophylla* weed on the soybean crop with treatment through the herbicide Glyphosate.

Keywords: Mathematical Modeling. Population growth. Dose-response function. Weeds.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Plantação de soja em Santa Mariana, Paraná.	19
FIGURA 2 – <i>Euphorbia heterophylla</i> com inflorescência com flores e frutos.	20
FIGURA 3 – Gráfico da solução de uma equação diferencial.	25
FIGURA 4 – Gráfico que ilustra a existência de uma única solução.	26
FIGURA 5 – Propagação de Plantas Anuais	32
FIGURA 6 – Fluxograma que representa o ciclo de plantas daninhas	35
FIGURA 7 – Função dose-resposta proposta por Seefeldt, Jensen e Fuerst (1995).	36
FIGURA 8 – Taxa de mortalidade induzida pelo herbicida para a população de plantas daninhas.	37
FIGURA 9 – Decaimento do banco de sementes com $u = 100$ onde em (a) $\delta = 0,3$, em (b) $\delta = 0,5$ e em (c) $\delta = 0,8$	40
FIGURA 10 – Decaimento do banco de sementes com $u = 1000$ onde em (a) $\delta = 0,3$, em (b) $\delta = 0,5$ e em (c) $\delta = 0,8$	40
FIGURA 11 – Decaimento do banco de sementes com $u = 2000$ onde em (a) $\delta = 0,3$, em (b) $\delta = 0,5$ e em (c) $\delta = 0,8$	41
FIGURA 12 – Decaimento do banco de sementes com $u = 4000$ onde em (a) $\delta = 0,3$, em (b) $\delta = 0,5$ e em (c) $\delta = 0,8$	41
FIGURA 13 – Decaimento do banco de sementes com $u = 100$ onde em (a) $\delta = 0,3$, em (b) $\delta = 0,5$ e em (c) $\delta = 0,8$	42
FIGURA 14 – Decaimento do banco de sementes com $u = 1000$ onde em (a) $\delta = 0,3$, em (b) $\delta = 0,5$ e em (c) $\delta = 0,8$	42
FIGURA 15 – Decaimento do banco de sementes com $u = 2000$ onde em (a) $\delta = 0,3$, em (b) $\delta = 0,5$ e em (c) $\delta = 0,8$	43
FIGURA 16 – Decaimento do banco de sementes com $u = 4000$ onde em (a) $\delta = 0,3$, em (b) $\delta = 0,5$ e em (c) $\delta = 0,8$	43
FIGURA 17 – Equilíbrio da população de plantas daninhas sem dose	45

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Parâmetros da função de dose-resposta (VARGAS et al., 2011)	37
TABELA 2 – Parâmetros do modelo populacional	39
TABELA 3 – Parâmetros populacionais para ponto de equilíbrio	44

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	CONCEITOS PRELIMINARES	23
2.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	23
2.2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM	24
2.3	PROBLEMA DE VALOR INICIAL	25
2.3.1	Variáveis Separáveis	26
2.4	EQUAÇÕES DE DIFERENÇA	28
2.4.1	Equações de Diferença Lineares	28
2.4.2	Equações de Diferença Não Lineares	29
2.5	MODELOS POPULACIONAIS	32
2.5.1	Modelo de Malthus	33
2.5.2	Modelo de Verhulst	33
3	METODOLOGIA	35
3.1	MODELO POPULACIONAL DE PLANTAS DANINHAS	35
3.2	FUNÇÃO DOSE-RESPOSTA	36
4	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E PONTO DE EQUILÍBRIO	39
4.1	CENÁRIO 1	39
4.2	CENÁRIO 2	39
4.3	PONTO DE EQUILÍBRIO	42
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	47
	REFERÊNCIAS	49

1 INTRODUÇÃO

A soja é um dos produtos agrícolas mais antigos que a humanidade consome, cuja origem se atribui ao continente asiático. Por séculos, a cultura da soja ficou restrita ao oriente, com a finalidade de alimentar. Quando ficou conhecida na Europa, sua cultura era voltada para a ornamentação e mais tarde, depois de seu valor proteico conhecido, passou a ser introduzido na alimentação (SINDMILHO, 2018).

O cultivo comercial da soja se iniciou com os norte-americanos, que desenvolveram novas variedades do grão. No Brasil, a leguminosa foi introduzida por volta de 1882, com seus grãos usados na alimentação dos animais inicialmente, pois naquela época o interesse pela cultura não era pelo seu material nobre, o grão, era pela planta como uma espécie a ser utilizada como forrageira e na rotação de culturas (SINDMILHO, 2018).

Relatos indicam que por volta do século XX, no estado do Rio Grande do Sul, começou-se a cultivar a soja. A região sul foi por muitos anos a produtora majoritária do país. Hoje, a cultura se estendeu pelo Brasil, indo desde o sul até o Mato Grosso na região centro-oeste e, abrangendo também o chamado polígono dos solos ácidos: Triângulo Mineiro, Mato Grosso do Sul, Mato Grosso, Goiás, Tocantins, sul do Maranhão, sul do Piauí e oeste da Bahia (SINDMILHO, 2018).

Atualmente, o Brasil é o segundo país na produção e processamento mundial de soja, sendo, também, o segundo maior exportador de grão, óleo e farelo de soja. Segundo dados disponíveis no site da Embrapa (Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária), a produção de soja em 2017/2018 foi de 116, 996 milhões de toneladas e a área plantada foi de 35, 100 milhões de hectares (EMPRAPA SOJA, 2018).

Entretanto, a produção da soja, representada na Figura 1, é ameaçada por plantas daninhas que surgem como resultado de um desequilíbrio do ecossistema. Segundo a literatura, plantas daninhas são todas ou quaisquer plantas estranhas a uma cultura, que ocorre de modo espontâneo e prejudicial. Elas competem fortemente com as plantas cultivadas por recursos vitais (água, luz e nutrientes) por se caracterizarem pela grande agressividade vegetativa, reprodutiva

Figura 1 – Plantação de soja em Santa Mariana, Paraná, Brasil.



Fonte: Autoria própria

e multiplicadora.

Especificamente na cultura da soja, as plantas daninhas causam perda de rendimento, perda de qualidade do produto e, no mais extremo dos casos, pode inviabilizar a colheita. No mundo, cerca de 30% a 40% da redução da produção agrícola é atribuído à interferência das plantas daninhas, que reduzem a eficiência agrícola e aumenta os custos de produção (LORENZI, 2000).

Uma das espécies mais comuns de plantas daninhas que competem com a cultura da soja é a *Euphorbia heterophylla* (Figura 2), conhecida popularmente como leiteiro ou amendoim-bravo, a qual ciclo de vida anual, porte herbáceo, ereta, com altura variando de 0,2 a 2 metros de altura. Sua raiz principal é pivotante, a partir da qual se formam raízes secundárias e suas folhas possuem formato variável (GAZZIERO et al., 2006). Esta espécie produz várias gerações de plantas em um único ano, desde o início do desenvolvimento da cultura, podendo uma única planta produzir até 490 sementes (FONTES; MORAIS, 2015).

Figura 2 – *Euphorbia heterophylla* com inflorescência com flores e frutos.



Fonte: AGROLINK (2017)

Para o controle das plantas daninhas, o método mais utilizado pelos agricultores é o controle químico. O Brasil, com suas dimensões territoriais e condições climáticas, se destaca, desde 2008, com o primeiro lugar no uso de agrotóxicos. Para que haja uma redução no uso destes produtos torna-se necessário a utilização de métodos de controle mais eficientes e menos impactantes ao meio ambiente (EMPRAPA SOJA, 2018).

No entanto, o uso intensivo de produtos químicos para o controle de plantas daninhas gera uma seleção de espécies de plantas daninhas tolerantes a determinado herbicida. A aplicação repetitiva de um ou mais herbicidas em uma população de plantas daninhas, seleciona os indivíduos de espécies com habilidades em sobreviver aos tratamentos de herbicidas. Este fenômeno caracteriza uma pressão de seleção, causada pelo uso intensivo do herbicida em uma população, e contribui para o aumento da proporção de indivíduos tolerantes para a próxima geração (DIAS, 2004). Nesse caso, o uso intensivo de herbicidas na agricultura é uma das maiores causas de pressão de seleção, proporcionando os fenômenos de mudança de espécies na área e resistência de plantas daninhas a herbicidas.

Devido à necessidade de gerar mecanismos de controle, foram desenvolvidos modelos matemáticos para a dinâmica populacional da planta daninha, os quais possibilitam entender como esta planta se relaciona com o meio, de que forma compete com a plantação (PARK; BENJAMIN; WATKINSON, 2003), qual o seu comportamento quando se tenta controlar a infestação, qual a probabilidade e a taxa de evolução da resistência a herbicidas (MAXWELL; ROUSH;

RADOSEVICH, 1990; DIGGLE; NEVE; SMITH, 2003) e quais as formas de atacar o problema de infestação.

Visando reduzir as perdas de rendimento causadas pela competição da planta daninha com a lavoura (COUSENS, 1985), diversas formas de controle foram desenvolvidas para maximizar os lucros em uma determinada estação ou ano e, conseqüentemente, diminuir os custos em um sistema de colheita.

No presente trabalho será utilizado o modelo de crescimento populacional de plantas daninhas baseado proposto por Jones e Cacho (2000). Para ilustrar o comportamento do modelo será analisado um estudo de caso baseado na planta daninha *Euphorbia heterophylla* e o controle considerado será o herbicida *Glifosato* (N-fosfonometil glicina). Esse é um potente herbicida não seletivo de pós-emergência e largo espectro, que tem como uma de suas características principais a rápida translocação das folhas da planta para as raízes. Quando é aplicado, ocorre uma rápida penetração, seguida por uma longa fase de lenta penetração, sendo este um processo que varia de acordo com a espécie, idade, condições ambientais e concentração do glifosato. Os sintomas comuns observados após a aplicação de glifosato são: clorose foliar (produção insuficiente de clorofila), enrugamento ou malformações (especialmente nas áreas de rebrotamento) e necrose (YAMADA; CASTRO, 2007).

Os impactos ambientais, além da competição citada, é um fator importante que o produtor rural deve levar em consideração no momento da escolha do herbicida. Deve-se analisar o comportamento do produto químico escolhido frente ao meio ambiente. Segundo estudos apresentados em Karam, Silva e Foloni (2009), o glifosato, um dos herbicidas mais conhecidos do mundo, apresenta um quociente de impacto ambiental de 60,3. Este valor é estimado através de um modelo descrito por Kovach et al. (1992), sendo definido levando em consideração alguns parâmetros como: degradação do solo, componentes de toxicidade, exposição e contaminação do manuseio, potencial de risco ecológico, entre outros.

Tomando como base a redução dos impactos ambientais causados pelo uso excessivo dos herbicidas, os objetivos traçados para o presente trabalho envolvem reduzir o banco de sementes da planta daninha e minimizar o uso dos herbicidas. Para isso, será estudado e analisado o modelo dinâmico populacional que descreve como a planta se relaciona com a cultura, o controle por meio da função dose-resposta, possibilitando uma análise de caso específica, com dados retirados da literatura, por meio de simulações numéricas.

O trabalho está organizado em 5 Capítulos. No Capítulo 2, seguinte a esta introdução, apresentam-se as definições matemáticas que envolvem a teoria de equações diferenciais e equações de diferença, utilizados no decorrer do trabalho. No Capítulo 3 é apresentada a metodologia onde são apresentadas a descrição do modelo populacional de plantas daninhas e a função dose-resposta, os quais serão utilizados para realizar as análises do trabalho, baseadas nos objetivos traçados. No Capítulo 4 apresenta-se as simulações numéricas realizadas através do MATLAB que referem-se a análise do comportamento do banco de sementes com variação de parâmetros e análise do ponto de equilíbrio. Para terminar, o Capítulo 5 traz considerações sobre a dinâmica do banco de sementes e os impactos ambientais.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

O estudo das equações diferenciais iniciou-se com Newton e Leibniz durante o século XVII. Esses contribuíram com estudos envolvendo cálculo diferencial e integral, além dos estudos iniciais sobre equações diferenciais. Os irmãos Jakob e Johann Bernoulli, Leonhard Euler e Joseph-Louis Lagrange foram outros grandes matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento das equações diferenciais.

Neste capítulo, apresenta-se as definições teóricas sobre equações diferenciais ordinárias e equações de diferenças, uma vez que o modelo populacional de plantas daninhas é modelado com equações de diferença. Definições e exemplos foram baseados em Zill e Cullen (2001) e Zill (2003).

2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Os princípios, leis, que regem o comportamento de determinado fenômeno natural são relações envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Em linguagem matemática, pode-se representar as relações como equações e as taxas como derivadas. Assim, equações contendo derivadas são denominadas equações diferenciais.

Definição 1 *Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de **equação diferencial**.*

Uma equação diferenciável é dita **ordinária** (EDO) se a função incógnita depender apenas de uma variável. Por exemplo,

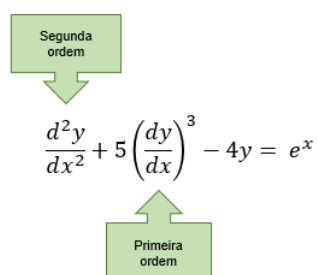
$$\frac{dy}{dx} - 5y = 1$$

$$(y - x) dx + 4x dy = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Se depender de mais de uma variável será denominada **equação diferencial parcial**.

A **ordem** de uma equação diferencial é indicada pela maior ordem de derivação que aparece na equação. Por exemplo,



$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (ou ordem dois). Note que a equação diferencial $(y - x) dx + 4xdy = 0$ pode ser dividida por dx , assim, pode ser escrita na forma

$$4x \frac{dy}{dx} + y = x$$

trata-se, então, de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.

Uma EDO de ordem n pode ser escrita como:

$$F \left[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n} \right] = 0 \quad (2.1)$$

onde F é uma função de $n + 1$ variáveis.

A equação (2.1) representa a relação entre a variável independente x e os valores da função incógnita y e suas n primeiras derivadas.

Também, pode-se explicitar a equação (2.1) como:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right) \quad (2.2)$$

Uma equação diferencial é chamada de *linear* quando pode ser escrita na forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (2.3)$$

Note que as equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

(a) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1.

(b) Cada coeficiente depende apenas da variável independente x .

Definição 2 Qualquer função f definida em algum intervalo I , quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de **solução** para a equação no intervalo.

Ou seja, uma solução para uma equação diferencial ordinária, com $I = (a, b)$, é uma função $y = \varphi(x)$ que, juntamente com suas derivadas, satisfaz a equação (2.2). Portanto, resolver uma EDO é encontrar uma função $y = \varphi(x)$, definida e derivável até a ordem n no intervalo I , que satisfaz a equação (2.2).

2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem é

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.4)$$

onde f é uma função definida num aberto A de \mathbb{R}^2 com valores em \mathbb{R} . A solução de (2.4) é uma função $y = \varphi(x)$ com $x \in (a, b)$, derivável e satisfazendo:

$$\begin{aligned} (1) & (x, \varphi(x)) \in A \\ (2) & \frac{d\varphi}{dx} = f(x, \varphi(x)) \end{aligned}$$

Em geral, a equação (2.4) estabelece uma relação entre as coordenadas de um ponto e o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da solução, em cada ponto.

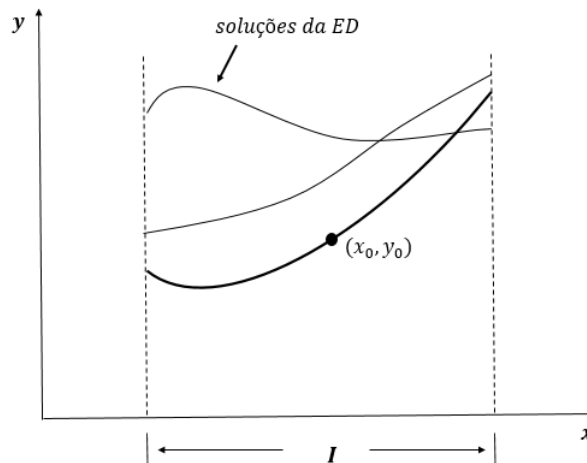
2.3 PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Definição 3 Um problema de valor inicial (PVI) é constituído por uma EDO e uma condição inicial na forma

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Em termos geométricos, estamos procurando uma solução para a equação diferencial, definida em algum intervalo I tal que o gráfico da solução passe por um ponto (x_0, y_0) .

Figura 3 – Gráfico da solução de uma equação diferencial.



Fonte: Zill e Cullen (2001)

Na Figura 3 é ilustrada uma solução para a equação diferencial em um intervalo I contendo x_0 de tal forma que uma curva integral passe pelo ponto (x_0, y_0) prescrito.

O termo condição inicial vem de sistemas físicos em que a variável independente é o tempo t e em que $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_1$ representam, respectivamente a posição e a velocidade de um objeto no instante inicial t_0 .

Ao considerar um PVI, precisamos considerar duas questões fundamentais:

1. A solução desse problema existe?
2. Se existe, é única?

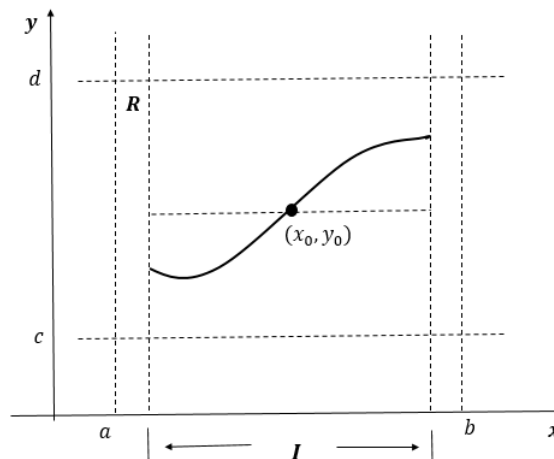
A maior parte das equações diferenciais terá soluções e as soluções do problema de valor inicial serão provavelmente únicas. Com problemas reais, não é assim, portanto é desejável saber se há uma solução para o problema.

A seguir, será apresentado um dos teoremas de existência e unicidade para equações diferenciais de primeira ordem, pois os critérios de continuidade de $f(x, y)$ e $\partial f / \partial y$ são relativamente fáceis de ser verificados.

Teorema 1 *Seja \mathbb{R} uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ que contém o ponto (x_0, y_0) . Se $f(x, y)$ e $\partial f / \partial y$ são contínuas em \mathbb{R} , existe algum intervalo $I_0 : x_0 - \lambda < x < x_0 + \lambda$, $\lambda > 0$, contido em $a \leq x \leq b$, e uma única função $y(x)$, definida em I_0 , que é uma solução do problema de valor inicial (2.5).*

A discussão da demonstração do teorema apresentado acima, pode ser encontrada em Boyce e DiPrima (2002). A representação geométrica do Teorema 1 é ilustrada na Figura 4.

Figura 4 – Gráfico que ilustra a existência de uma única solução.



Fonte: Zill e Cullen (2001)

2.3.1 Variáveis Separáveis

Uma equação diferencial é dita separável se pode ser escrita na forma de funções separáveis.

Definição 4 *Uma equação diferencial da forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

*é chamada **separável** ou tem variáveis separáveis.*

Se $g(x)$ é uma função contínua dada, então a equação de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{2.6}$$

pode ser resolvida por integração. A solução para (2.6) é

$$y = \int g(x)dx + c \tag{2.7}$$

Desta forma, uma equação separável pode ser escrita com

$$h(x) \frac{dy}{dx} = g(x) \quad (2.8)$$

Note que (2.8) se reduz a (2.6) quando $h(y) = 1$.

Se $y = f(x)$ denota uma solução para (2.8), tem-se

$$h(f(x))f'(x) = g(x) \quad (2.9)$$

logo,

$$\int h(f(x))f'(x)dx = \int g(x)dx + c \quad (2.10)$$

Observe que $dy = f'(x)dx$, assim (2.10) é o mesmo que

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c \quad (2.11)$$

Por fim, a equação (2.11) indica o procedimento para resolver equações separáveis. Não há necessidade de usar duas contantes de integração, a diferença $c_2 - c_1$ pode ser substituída por uma única constante c .

A seguir será apresentado um exemplo retirado de Zill (2003):

$$\text{Resolva } (1 + x)dy - ydx = 0$$

Solução:

Inicialmente, os termos da equação são divididos por $(1 + x)y$:

$$\frac{(1 + x)dy}{(1 + x)y} - \frac{ydx}{(1 + x)y} = 0$$

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{(1 + x)} = 0$$

Aplicando integral em ambos os lados da equação, tem-se:

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{(1 + x)}$$

$$\ln |y| = \ln |1 + x| + c_1$$

$$y = e^{\ln |1+x| + c_1}$$

$$y = e^{\ln |1+x|} \cdot e^{c_1}$$

$$y = |1 + x|e^{c_1}$$

Note que,

$$\begin{cases} |1+x| = 1+x, & x \geq -1 \\ |1+x| = -(1+x), & x < -1 \end{cases}$$

Então,

$$y = \pm e_1(1+x).$$

Renomeando $\pm e_1$ como c , obtém-se a solução $y = c(1+x)$.

2.4 EQUAÇÕES DE DIFERENÇA

Em diversas áreas do conhecimento, tais como a Matemática, Economia e Física, são encontrados problemas que apresentam situações envolvendo variáveis que mudam discretamente, tornando-se um processo dinâmico. Para os processos que ocorrem em intervalos regulares, ou seja, são discretos no tempo, estes eventos são descritos matematicamente por meio de equações de diferenças (fórmulas de recorrência), estabelecendo uma relação entre os termos de uma sucessão.

Como exemplo, considere a seguinte equação de diferença:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad (2.12)$$

com a seguinte notação para sucessões,

$$x_n = x_0, x_1, x_2, \dots \quad (2.13)$$

A equação (2.13) descreve a formação dos elementos, a partir do terceiro, somando-se os dois antecedentes e conhecidos os dois elementos iniciais.

Assim, nesta seção apresenta-se os conceitos relacionados as equações de diferença lineares e não lineares, bem como os critérios de estabilidade destes modelos. As definições e conceitos apresentados neste capítulo foram baseados em Diniz (2011).

2.4.1 Equações de Diferença Lineares

Definição 5 *A forma geral de uma equação de diferença linear, de primeira ordem, é dada por*

$$a_1 x_{n+1} + a_2 x_n = a_3 \quad (2.14)$$

onde a_i são coeficientes ou parâmetros da equação e x_j são os termos da sucessão. No caso em que $a_3 = 0$, a equação é denominada homogênea. Se $a_3 \neq 0$, a equação é denominada não homogênea.

Definição 6 *Dada uma equação de diferença, denomina-se solução geral de uma equação diferencial a forma geral do termo de ordem n , que satisfaz a equação de diferença.*

Observe que qualquer combinação linear das soluções de uma equação de diferença linear homogênea, também será solução da mesma equação, ou seja, pode-se definir um subespaço vetorial a partir das soluções de uma equação de diferença linear homogênea.

Definição 7 Para a equação de diferença linear, de segunda ordem, a forma geral é dada por

$$a_1x_{n+m} + a_2x_{n+m-1} + \dots + a_{m+1}x_n = a_{m+2} \quad (2.15)$$

No caso em que os parâmetros a_i são constantes (reais ou complexos), a equação recebe a classificação adicional de equação de diferenças lineares com coeficientes constantes.

Definição 8 Dada uma equação de diferenças na forma da equação (2.15), se denomina equação característica associada a equação homogênea de (2.15), a equação obtida em λ , ao adotar uma solução geral dada por $K\lambda^n$ em (2.15), após a fatoração e cancelamento do fator comum $K\lambda^n$, ou seja, a equação homogênea equivalente a (2.15) em λ , dada por

$$a_1\lambda^m + a_2\lambda^{m-1} + \dots + a_{m+1} = 0 \quad (2.16)$$

Definição 9 As raízes da equação característica são denominadas autovalores desta equação.

Assim, a solução geral da equação de diferenças homogêneas é composta pela combinação linear dos autovalores de sua equação característica associada, ou seja, se x_n é solução de

$$a_1x_{n+m} + a_2x_{n+m-1} + \dots + a_{m+1}x_n = 0,$$

então, x_n é dada por

$$x_n = K_1\lambda_1^n + K_2\lambda_2^n + \dots + K_m\lambda_m^n \quad (2.17)$$

quando se tem m raízes distintas.

Observando a solução x_n apresentadas em (2.17) se conclui que as propriedades dos autovalores λ_i determinam de maneira única o comportamento da solução x_n . Com relação aos autovalores associados a equação característica (2.16), ressalta-se que eles podem ser reais ou complexos e distintos ou com multiplicidade.

2.4.2 Equações de Diferença Não Lineares

Definição 10 Uma equação de diferença não linear de primeira ordem é uma fórmula de recorrência do tipo

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (2.18)$$

onde f é uma combinação não linear de x_n .

Para equações não lineares, geralmente não é possível analiticamente encontrar soluções para a equação acima. A solução é uma expressão que relaciona x_n e a condição inicial x_0 , para cada estágio n . Assim, uma maneira de analisar o comportamento das soluções destas equações é através de seus pontos de equilíbrio.

No contexto das equações de diferenças se tem a estabilidade do processo quando não ocorre variação do estágio n para o estágio $n + 1$, isto é,

$$x_{n+1} = x_n = x^* \quad (2.19)$$

Da equação (2.18) e (2.19), se tem um ponto de equilíbrio x^* quando

$$x^* = f(x^*) \quad (2.20)$$

ou seja, x^* é um ponto fixo da função f .

A estabilidade de um ponto de equilíbrio x^* pode ser determinada, analiticamente, pelo valor do módulo de

$$\lambda = \left. \frac{df(x_n)}{dx_n} \right|_{x_n = x^*} \quad (2.21)$$

onde λ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x_n)$ no ponto x^* .

Teorema 2 (*Critérios de Estabilidade*) Conforme os valores que λ assume, se tem que:

- a) Se $0 < |\lambda| < 1$ x^* é, localmente, assintoticamente estável (atrator), ou seja, x_n está próximo de x^* , então x_n converge para x^* ;
- b) Se $|\lambda| > 1$ o ponto de equilíbrio x^* é instável (repulsor);
- c) Se $|\lambda| = 1$, o ponto de equilíbrio x^* é neutralmente estável, ou simplesmente estável.

A demonstração do Teorema 2 pode ser encontrada em Cipolli (2012).

A seguir será apresentado, como exemplo, um breve estudo da dinâmica propagação anual de plantas, através de Equações de Diferença, empregando uma modelagem matemática (FERNANDES, 2015).

Problema: dinâmica da propagação anual de plantas.

O objetivo deste estudo será obter uma expressão para o número de sementes produzidas no período de um e dois anos, e do número de plantas mortas pela presença de um predador. Essa propagação é dada através do ciclo de vida da planta: florescimento, germinação e morte, onde a mesma deixa sua genética para novas sementes.

Hipótese do problema: *As sementes germinam somente até a idade de dois anos, sendo que a maioria germina com um ano, e a presença de predadores aumenta de forma proporcional à fração de sementes que germinam com dois anos de idade.*

Parâmetros do problema:

γ	número de sementes em janeiro
α	fração de sementes de 1 ano de idade em outubro
β	fração de sementes de 2 ano de idade em outubro
σ	fração de sementes sobreviventes em cada inverno
θ	taxa de mortalidade na presença de predador

Da hipótese tem-se que $\frac{\beta}{\alpha}$ é pequeno e $p(n)$ denota o número de plantas presentes na geração n . Então temos,

$$p(n) = \left\{ \begin{array}{l} \text{plantas provenientes de sementes de 1 ano} \\ + \\ \text{plantas provenientes de sementes de 2 ano} \\ - \\ \text{plantas mortas pelos predadores} \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Considere as plantas antes da germinação, em setembro, com $q(n)$ sendo o número de plantas que morreram no tempo n , tem-se

$$p(n) = \alpha S_1(n) + \beta S_2(n) - q(n) \quad (2.23)$$

Para representar o número de sementes deixadas após a germinação, duas equações podem ser escritas:

$$\tilde{S}_1(n) = (1 - \alpha)S_1(n) \quad (2.24)$$

$$\tilde{S}_2(n) = (1 - \beta)S_2(n) \quad (2.25)$$

onde \tilde{S}_1 e \tilde{S}_2 representam o número de sementes deixadas em outubro, após algumas terem germinado. Novas plantas S_0 são produzidas em janeiro à taxa de γ por planta (veja Figura 5), tem-se

$$S_0(n) = \gamma p(n) \quad (2.26)$$

Após o inverno, as sementes S_0 estarão com um ano de idade na próxima geração $n + 1$, e uma fração delas sobreviverá, assim:

$$S_1(n + 1) = \sigma \gamma p(n) \quad (2.27)$$

similarmente,

$$S_2(n + 1) = \sigma \tilde{S}_1(n) \quad (2.28)$$

que por (2.24) produz

$$S_2(n + 1) = \sigma(1 - \alpha)S_1(n) \quad (2.29)$$

e por (2.27) tem-se

$$S_2(n + 1) = \sigma^2 \gamma (1 - \alpha) p(n - 1) \quad (2.30)$$

Utilizando as expressões anteriores, obtem-se

$$p(n + 1) = \alpha \gamma \sigma p(n) + \beta \gamma \sigma^2 (1 - \alpha) p(n - 1) - q(n + 1) \quad (2.31)$$

e

$$p(n + 1) = \alpha \gamma \sigma p(n + 1) + \beta \gamma \sigma^2 (1 - \alpha) p(n - 1) - q(n + 2) \quad (2.32)$$

Supondo uma taxa $\theta = \frac{\beta}{2}$ o número de plantas mortas será aproximadamente

$$q(n) = \frac{\beta}{2} S_2(n) \quad (2.33)$$

Por fim, obtêm-se a equação de diferença de segunda ordem que modela o problema, dada por:

$$p(n + 2) = \alpha \gamma \sigma p(n + 1) + \frac{\beta}{2} \sigma^2 \gamma (1 - \alpha) p(n) \quad (2.34)$$

A equação característica correspondente é dada por

$$k^2 - \alpha \gamma \sigma k - \frac{\beta}{2} \gamma \sigma^2 (1 - \alpha) = 0 \quad (2.35)$$

com raízes

$$k_1 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2\beta}{\gamma\alpha^2}(1 - \alpha)} \right] \tag{2.36}$$

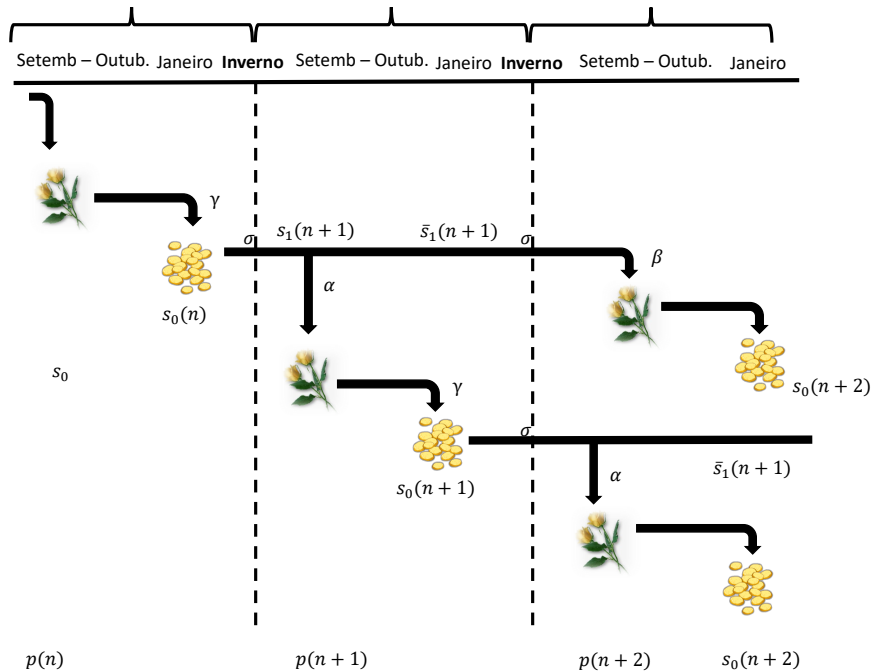
$$k_2 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2\beta}{\gamma\alpha^2}(1 - \alpha)} \right] \tag{2.37}$$

Se a taxa $\alpha < 1$, observa-se K_1 e K_2 são raízes reais, então a solução da equação (2.34) é

$$p(n) = c_1 k_1^n + c_2 k_2^n \tag{2.38}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Figura 5 – Propagação de Plantas Anuais



Fonte: Fernandes (2015)

Para uma análise sobre o comportamento da solução para garantir uma boa propagação de plantas, veja Fernandes (2015).

2.5 MODELOS POPULACIONAIS

Chamamos de **modelo matemático** a descrição matemática de um sistema ou fenômeno da vida real (ZILL, 2003). Normalmente, as hipóteses sobre um sistema envolvem uma taxa de variação de uma ou mais variáveis, assim, a descrição matemática envolverá derivadas.

A seguir, apresenta-se dois modelos matemáticos desenvolvidos para analisar o crescimento populacional, o modelo de Malthus e Verhulst.

2.5.1 Modelo de Malthus

A primeira tentativa de estimar o crescimento da população mundial foi desenvolvida pelo economista e demógrafo Thomas Robert Malthus (1766-1834) e apresentado em 1798. Segundo o modelo proposto, o crescimento populacional, se não fosse controlado, se daria segundo uma progressão geométrica, enquanto os meios de sobrevivência cresceriam em progressão aritmética (BASSANEZI; JÚNIOR, 1988).

A seguir, será apresentado em termos de equações diferenciais a lei de Malthus e o modelo modificado de Verhulst. Os modelos apresentados foram baseados em Bassanezi e Júnior (1988).

Seja $P = P(t)$ o total da população de um país no instante t em um intervalo de tempo Δt . O modelo pressupõe que os nascimentos e as mortes são proporcionais ao tamanho da população e ao tamanho do intervalo, ou seja,

Número de nascimentos = $\alpha P(t)\Delta t$, onde α é o coeficiente de natalidade,

Números de mortes = $\beta P(t)\Delta t$, onde β é o coeficiente de mortalidade.

Assim,

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t) = \alpha P(t)\Delta t - \beta P(t)\Delta t$$

$$\Delta P = (\alpha - \beta)P(t)\Delta t$$

$$\text{ou}$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = (\alpha - \beta)P(t)$$

Da equação de diferenças, tomando \lim quando $\Delta t \rightarrow 0$, temos a equação diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta)P \quad (2.39)$$

A solução para (2.39) é da seguinte forma:

$$P(t) = P_0 e^{(\alpha - \beta)t}, P(0) = P_0$$

- Se $\alpha = \beta$ (natalidade = mortalidade) $P(t) \equiv P_0$, a população não varia;
- Se $\alpha > \beta$ (natalidade > mortalidade), a população cresce exponencialmente com o tempo;
- Se $\alpha < \beta$ (natalidade < mortalidade), a população diminui e tende à extinção à medida que t cresce.

2.5.2 Modelo de Verhulst

Em 1837, o matemático belga Verhulst propôs uma modificação na equação original de Malthus. O novo modelo supõe que a população, vivendo num determinado meio, atinja um limite sustentável, quando $P_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$, considera também que a equação incorpore a queda de crescimento, à medida que a população cresce.

Seja

$$\frac{dP}{dt} = Pf(P)$$

onde,

$$f(P) = \lambda \left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty} \right)$$

com $\lambda > 0$.

Explicitando $f(P)$ na equação diferencial, obtêm-se:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left(1 - \frac{P}{P_{\infty}} \right) \quad (2.40)$$

Comparando-se a equação (2.39) com (2.40), observe que a taxa de crescimento $\alpha - \beta = \lambda - \frac{\lambda}{P_{\infty}}P$ decresce linearmente com a população e tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

A equação (2.40) é conhecida como *equação logística* e foi utilizada em 1920 no estudo da população norte-americana (BASSANEZI; JÚNIOR, 1988).

3 METODOLOGIA

Neste capítulo, apresenta-se os procedimentos metodológicos que serão utilizados para a realização do trabalho. Na primeira seção apresenta-se o modelo populacional de plantas daninhas, bem como o ciclo de vida das plantas, ilustrado na Figura 6. Na sequência, apresenta-se a função dose-resposta que será utilizada para o controle da população de plantas daninhas.

3.1 MODELO POPULACIONAL DE PLANTAS DANINHAS

Seja x_t o banco de sementes e y_t a densidade de plantas que germinaram no ciclo de produção t . O modelo populacional de plantas daninhas é dado por Jones e Cacho (2000):

$$y_t = x_t^g \delta x_t, \quad x_{t_0} = x_0 \quad (3.1)$$

$$y_t^a = (1 - \rho(u_t)) y_t \quad (3.2)$$

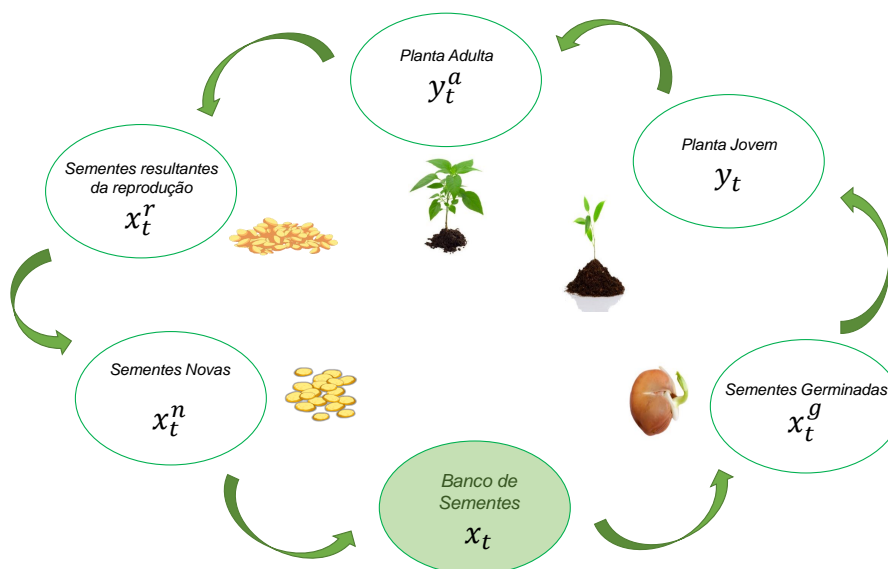
$$x_t^r = \exp[\gamma \ln y_t^a / (\mu + \varepsilon \ln y_t^a)] \quad (3.3)$$

$$x_t^n = \kappa x_t^r - \eta + \xi \quad (3.4)$$

$$x_{t+1} = x_t^n + (1 - \Psi)(1 - \delta)x_t, \quad (3.5)$$

com x_t densidade do banco de sementes no início do ciclo t (m^{-2}), y_t plantas jovens no ciclo t (m^{-2}), y_t^a densidade de plantas que chegaram a fase adulta (m^{-2}), x_t^r sementes resultantes da reprodução das plantas daninhas (m^{-2}), x_t^n novas sementes adicionadas ao banco de sementes (m^{-2}), x_t^g porcentagem de sementes germinadas que emergiram, δ taxa anual de germinação das sementes, u_t dose de herbicida aplicado (litros ha^{-1}), ρ taxa de mortalidade induzida pelo herbicida, γ, μ, ε coeficientes de regressão do modelo, κ taxa de sobrevivência de novas sementes, η retirada de sementes na colheita (m^{-2}), ξ taxa de importação de sementes (m^{-2}) e Ψ taxa de mortalidade das sementes dormentes.

Figura 6 – Fluxograma que representa o ciclo de plantas daninhas



Fonte: Autoria própria

A estrutura do modelo (3.1)-(3.5) é baseado no ciclo de vida das plantas daninhas. Neste modelo não será considerado a competição das plantas daninhas com a cultura e a variável de controle, u_t , será determinada pela estratégia de manejo empregada.

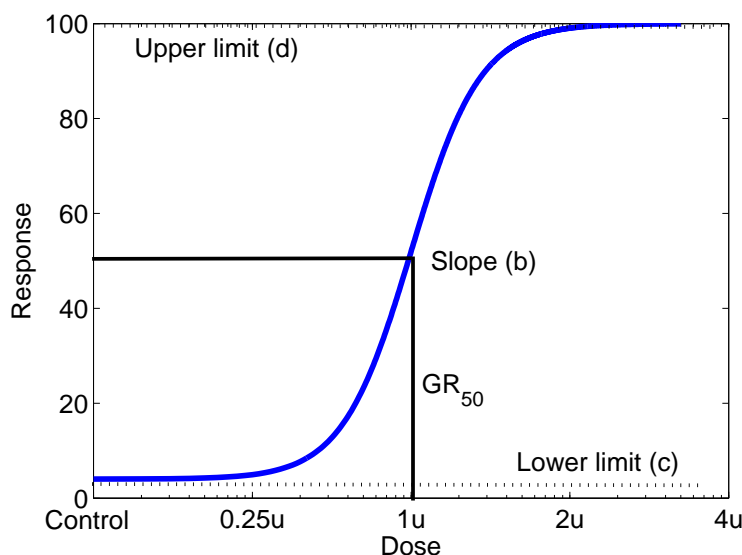
3.2 FUNÇÃO DOSE-RESPOSTA

O modelo dose-resposta usado para quantificar a sensibilidade da planta daninha ao herbicida é dada por Seefeldt, Jensen e Fuerst (1995):

$$\rho(u) = c + \frac{d - c}{1 + \exp[b(\ln(u) - \ln(GR_{50}))]}, \quad (3.6)$$

em que c é o limite inferior da curva que corresponde às respostas médias com doses altas de herbicidas, d é o limite superior da curva que corresponde à resposta média da planta testemunha, b é a declividade da curva em torno de GR_{50} e GR_{50} representa a dose do herbicida necessária para reduzir 50% do crescimento de uma população de plantas.

Figura 7 – Função dose-resposta proposta por Seefeldt, Jensen e Fuerst (1995).



Fonte: Autoria própria.

A Figura 7 ilustra o comportamento da função dose-resposta proposta por Seefeldt, Jensen e Fuerst (1995).

A fim de analisar a influência desta função como forma de controle de uma população de plantas daninhas presente na cultura da soja, buscou-se na literatura os dados necessários para as simulações. Os parâmetros foram obtidos a partir de experimentos realizados em casa de vegetação e após submetidos a testes estatísticos apresentados no artigo de Vargas et al. (2011), onde pode ser encontrado resultados mais detalhados. O biótipo utilizado será o 105, correspondente ao município de Sananduva, em Três Porteiras, após 28 dias de tratamento.

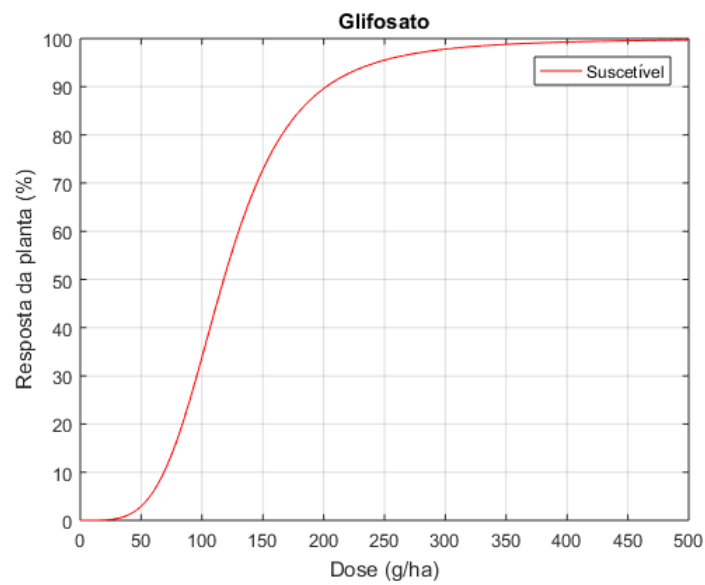
A Tabela 1 apresenta os dados utilizados nas simulações numéricas para a espécie *Euphorbia heterophylla* com controle através da aplicação do herbicida *Glifosato*.

A Figura 8 ilustra a função dose resposta para o controle da planta daninha *Euphorbia heterophylla* com aplicação do herbicida *Glifosato*.

Tabela 1 – Parâmetros da função de dose-resposta (VARGAS et al., 2011)

Herbicide	b	c	d	GR_{50}
Glifosato	-4,08	0,001917	99,9581	117,82

Figura 8 – Taxa de mortalidade induzida pelo herbicida para a população de plantas daninhas.



Fonte: Autoria própria.

4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E PONTO DE EQUILÍBRIO

Neste capítulo serão apresentadas as análises numéricas referente ao decaimento do banco de sementes, com variação no número de sementes, dose de herbicida e taxa de germinação. As simulações foram realizadas através do software MATLAB.

4.1 CENÁRIO 1

As simulações numéricas a seguir tem por objetivo verificar a influência da taxa de germinação das plantas daninhas e da dose de herbicida aplicado na dinâmica populacional das plantas daninhas.

A condição inicial do banco de sementes é dada por $x_0 = 4900$, uma vez que cada planta produz em média 490 sementes/ m^2 e na área foram consideradas 10 plantas por m^2 .

O herbicida utilizado nas simulações numéricas é o Glifosato NORTOX, formulado por NORTOX S.A e fabricante do produto técnico: MONSANTO DO BRASIL LTDA, com base na dose mínima $u = 2(l/ha)$ e máxima $u = 4(l/ha)$ indicada na bula (ADAPAR, 2017).

Os parâmetros utilizados para as simulações são descritos na Tabela 2.

Tabela 2 – Parâmetros do modelo populacional

Parâmetros populacionais	Valor
κ	0,35
η	0
ξ	0
ψ	0,3
γ	6,8
ϵ	0,67
μ	2,00
x_g	0,5
GR	117,82
b	-4,08
c	0,001917
d	99,9581

A Figura 9 ilustra a dinâmica do banco de sementes considerando a dose fixa de $u = 100(g/ha)$ e variando a taxa de germinação ($\delta = 0,3$), média ($\delta = 0,5$) e alta ($\delta = 0,8$).

Na Figura 10, 11 e 12 apresenta-se a dinâmica do banco de sementes variando a dose em $u = 1000(g/ha)$, $u = 2000(g/ha)$ e $u = 4000(g/ha)$, respectivamente.

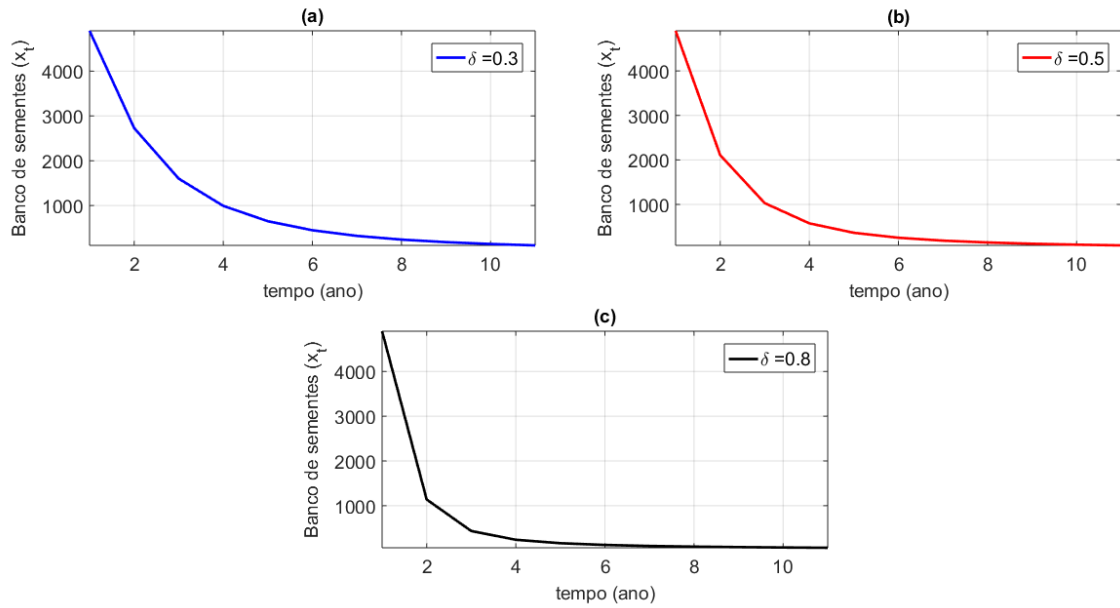
A partir das simulações numéricas apresentadas, nota-se que o banco de sementes foi controlado, ou seja, se aproxima de zero, independente da dose de herbicida utilizada.

4.2 CENÁRIO 2

Similar ao Cenário 1, as simulações numéricas a seguir tem por objetivo verificar a influência da taxa de germinação e da dose de herbicida aplicado na dinâmica populacional das plantas daninhas.

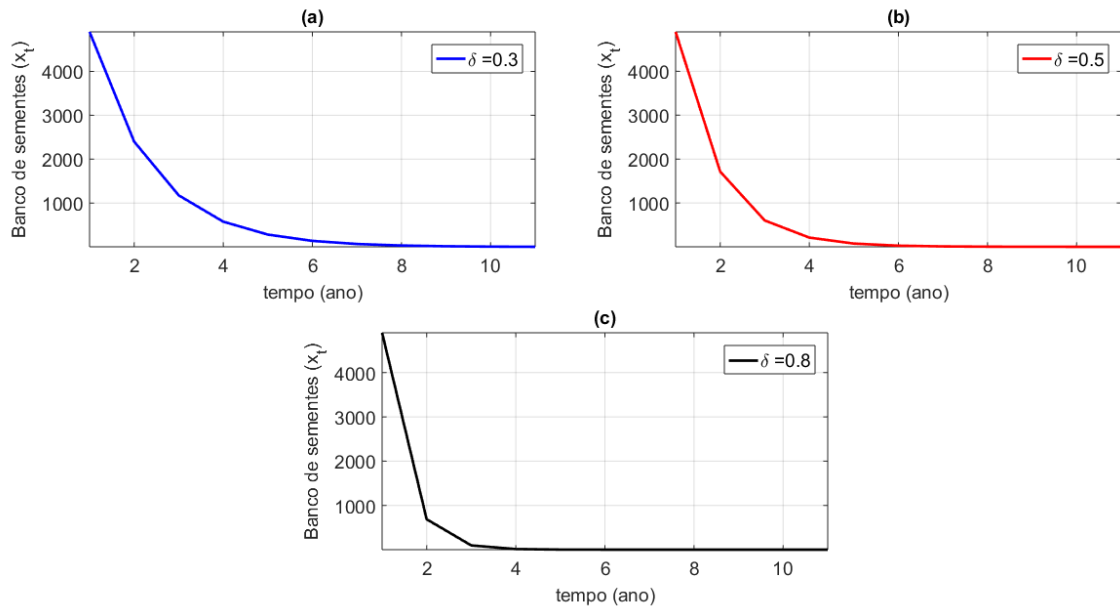
Para este cenário, a condição inicial do banco de sementes é dada por $x_0 = 34300$, uma vez que cada planta produz em média 490 sementes/ m^2 e na área foram consideradas 70

Figura 9 – Decaimento do banco de sementes com $u = 100$ onde em (a) $\delta = 0,3$, em (b) $\delta = 0,5$ e em (c) $\delta = 0,8$



Fonte: autoria própria

Figura 10 – Decaimento do banco de sementes com $u = 1000$ onde em (a) $\delta = 0,3$, em (b) $\delta = 0,5$ e em (c) $\delta = 0,8$



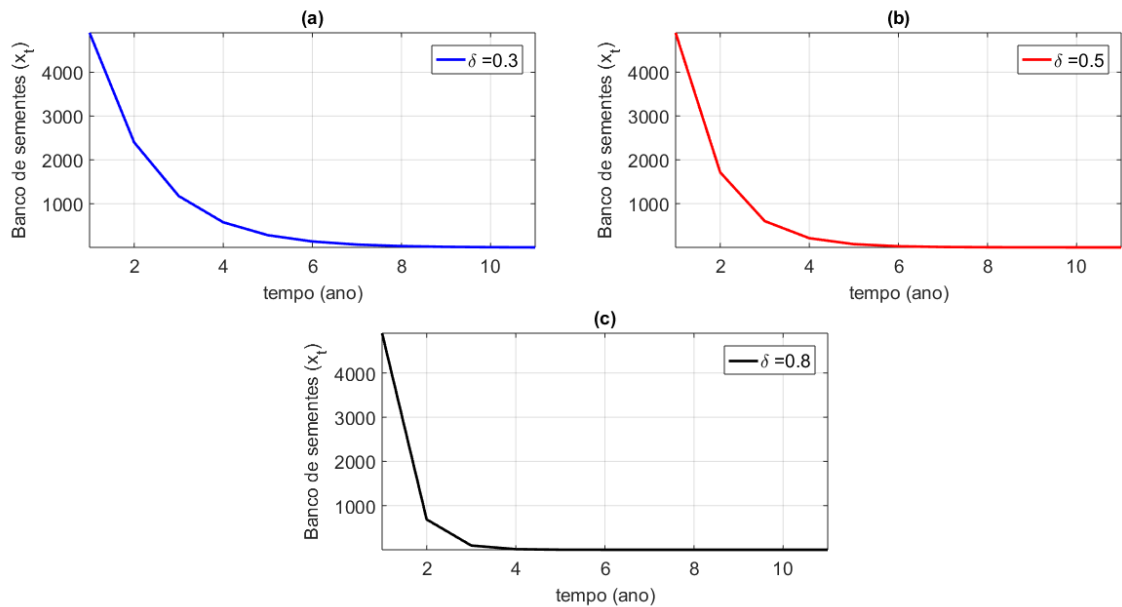
Fonte: autoria própria

plantas por m^2 . As simulações apresentadas aqui foram realizadas com o mesmo herbicida e doses mínima e máxima citadas anteriormente.

A Figura 13 ilustra a dinâmica do banco de sementes considerando a dose fixa de $u = 100(g/ha)$ e variando a taxa de germinação ($\delta = 0,3$), média ($\delta = 0,5$) e alta ($\delta = 0,8$)

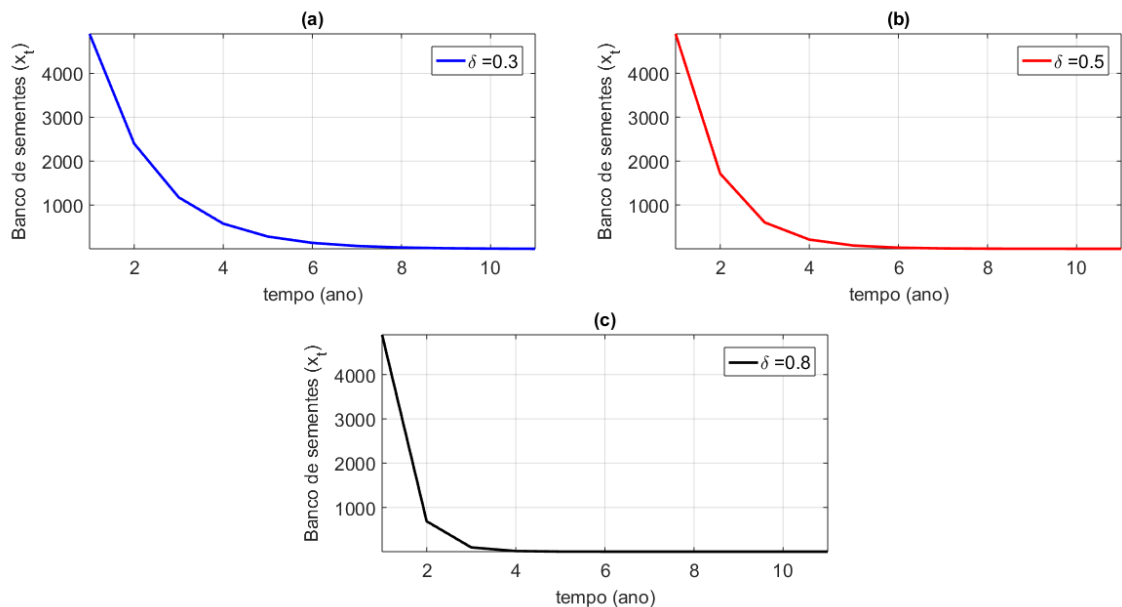
Na Figura 14, 15 e 16 apresenta-se a dinâmica do banco de sementes variando a dose

Figura 11 – Decaimento do banco de sementes com $u = 2000$ onde em (a) $\delta = 0,3$, em (b) $\delta = 0,5$ e em (c) $\delta = 0,8$



Fonte: autoria própria

Figura 12 – Decaimento do banco de sementes com $u = 4000$ onde em (a) $\delta = 0,3$, em (b) $\delta = 0,5$ e em (c) $\delta = 0,8$

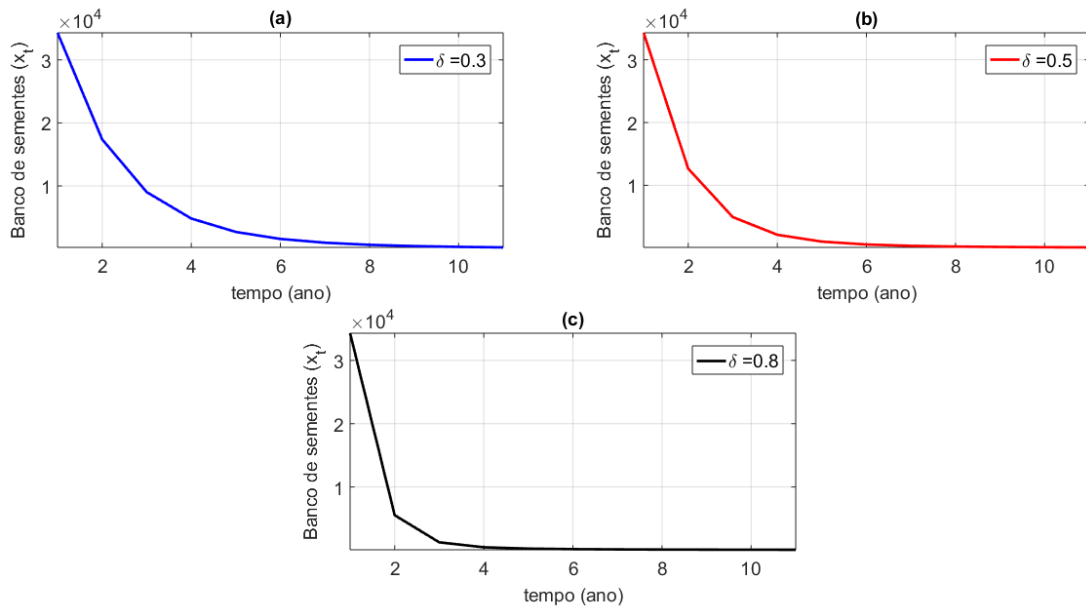


Fonte: autoria própria

em $u = 1000(g/ha)$, $u = 2000(g/ha)$ e $u = 4000(g/ha)$, respectivamente.

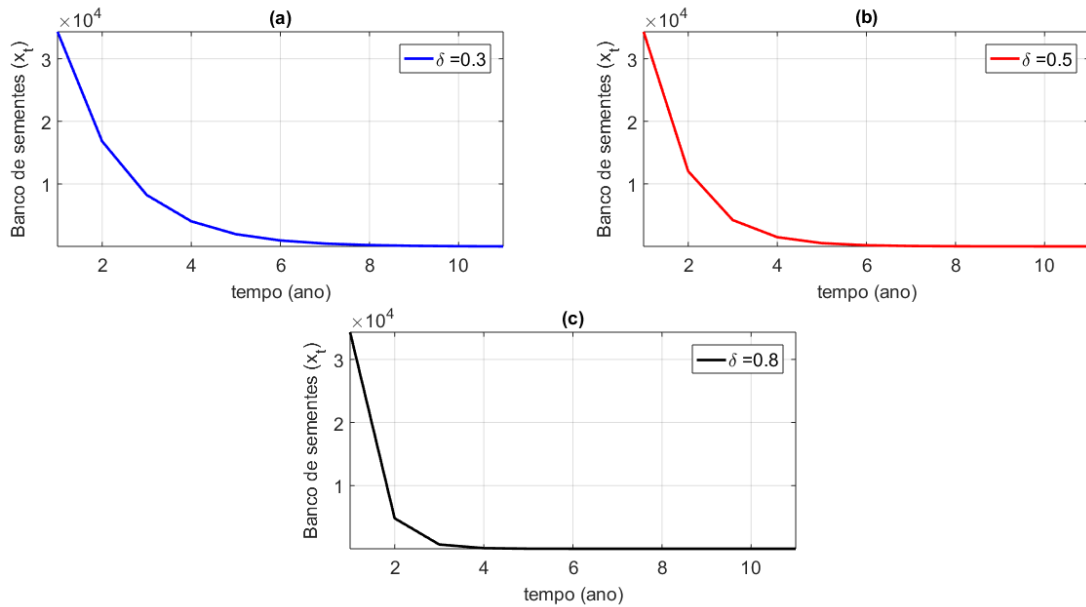
A partir das simulações numéricas é possível observar que em ambos os casos apresentados no Cenário 1 e 2, o banco de sementes foi controlado, aproximando-se de zero, independente da dose de herbicida utilizada. Portanto, recomenda-se utilizar uma dose baixa, uma vez que o custo de produção será menor e os impactos ambientais são minimizados.

Figura 13 – Decaimento do banco de sementes com $u = 100$ onde em (a) $\delta = 0,3$, em (b) $\delta = 0,5$ e em (c) $\delta = 0,8$



Fonte: autoria própria

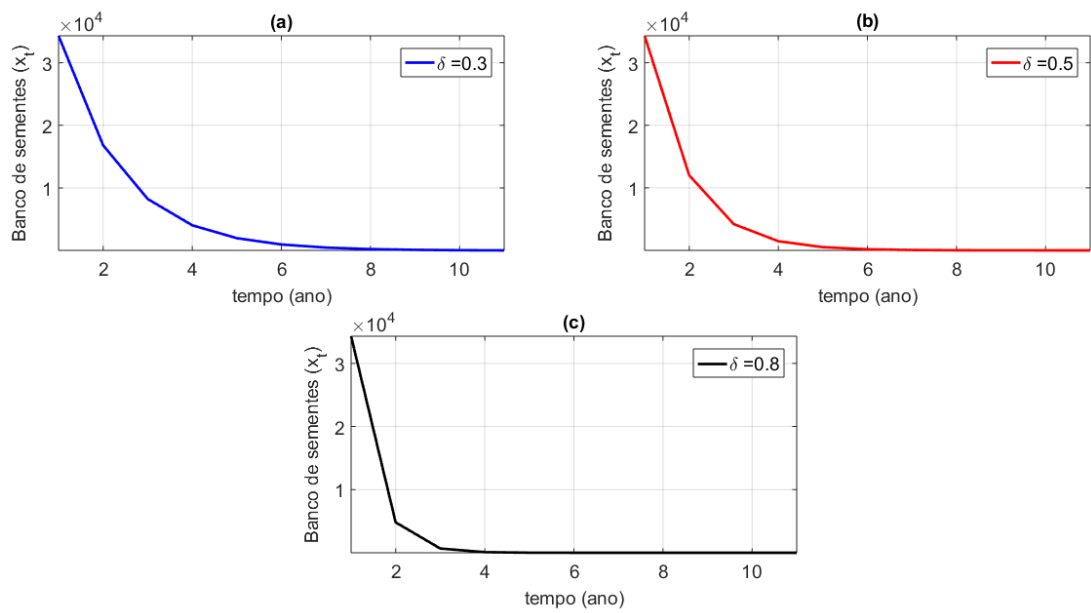
Figura 14 – Decaimento do banco de sementes com $u = 1000$ onde em (a) $\delta = 0,3$, em (b) $\delta = 0,5$ e em (c) $\delta = 0,8$



Fonte: autoria própria

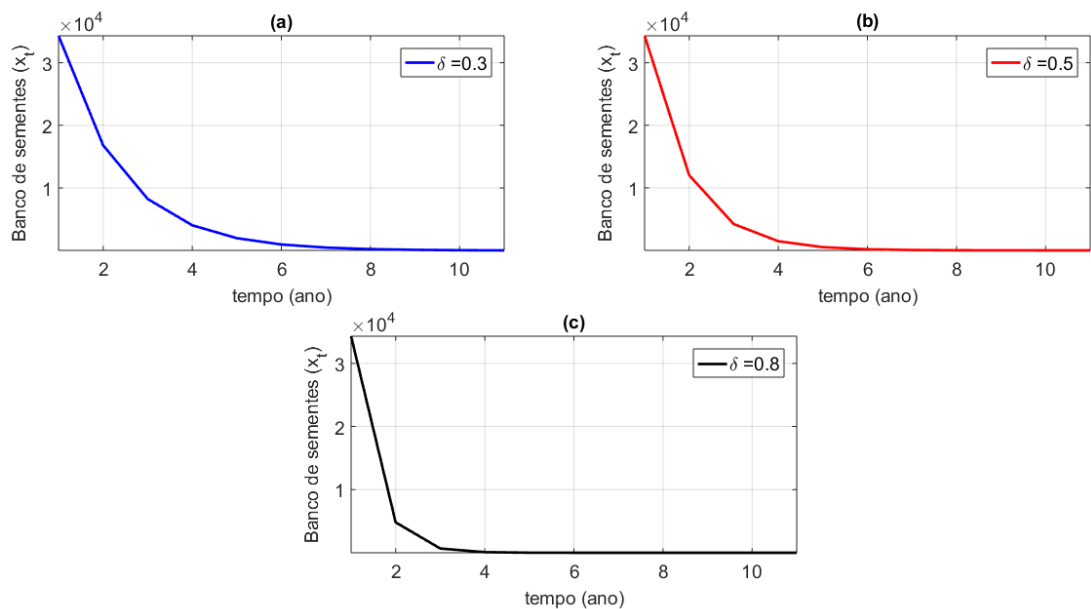
4.3 PONTO DE EQUILÍBRIO

Figura 15 – Decaimento do banco de sementes com $u = 2000$ onde em (a) $\delta = 0,3$, em (b) $\delta = 0,5$ e em (c) $\delta = 0,8$



Fonte: autoria própria

Figura 16 – Decaimento do banco de sementes com $u = 4000$ onde em (a) $\delta = 0,3$, em (b) $\delta = 0,5$ e em (c) $\delta = 0,8$



Fonte: autoria própria

Considere o modelo dinâmico (3.1)-(3.5) da densidade do banco de sementes. Fixando a dose inicial, os pontos de equilíbrio são os pontos x^* tal que satisfaz

$$x_{t+1} = x_t \quad (4.1)$$

Considerando $y_t^a < 0,5$ (plantas por m^2) e tomando-se $x^r = 0$. O modelo (3.1)-(3.5), com $\eta = 0$ e $\xi = 0$, torna-se o seguinte modelo linear:

$$x_{t+1} = (1 - \Psi)(1 - \delta)x_t \quad (4.2)$$

Como os autovalores são $\lambda = (1 - \Psi)(1 - \delta) < 1$, portanto, conforme o Teorema 2, o modelo linear (4.2) é considerado estável.

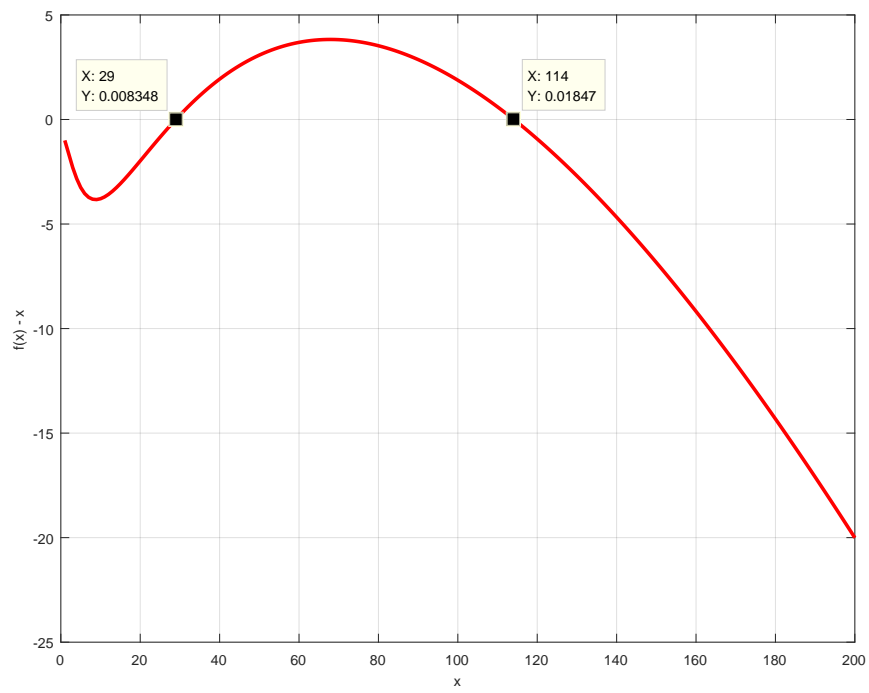
Na Figura 17 apresenta-se os pontos de equilíbrios, obtidos numericamente, considerando a dose fixa $u = 0$. Note que o modelo apresenta dois pontos de equilíbrio $x_1^* = 29$ e $x_2^* = 114$. Graficamente o ponto de equilíbrio é a coordenada x do ponto onde o gráfico de $f(x) - x$ intersepta o eixo x .

Os parâmetros utilizados nas simulações numéricas encontram-se na Tabela 3.

Tabela 3 – Parâmetros populacionais para ponto de equilíbrio

Parâmetros populacionais	Valor
δ	0,5
κ	0,35
η	0
ξ	0
ψ	0,3
γ	6,8
ϵ	0,67
μ	2,00
u	0,1
x_g	0,5
GR	117,82
b	-4,08
c	0,001917
d	99,9581

Figura 17 – Equilíbrio da população de plantas daninhas sem dose



Fonte: Autoria própria

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram abordados alguns conceitos da teoria de equações diferenciais lineares, bem como, um breve estudo dos modelos populacionais clássicos, como o modelo de Malthus e o modelo de Verhulst. As equações de diferenças também foram apresentadas e para exemplificar seu uso, apresentou-se como exemplo um modelo de propagação de plantas.

O modelo populacional de planta daninha abordado foi baseado em Jones e Cacho (2000) e, como forma de controle foi utilizado a função dose resposta proposta por Seefeldt, Jensen e Fuerst (1995). Simulações numéricas foram realizadas, a fim de analisar um estudo de caso considerando a planta daninha *Euphorbia heterophylla* com controle através do herbicida Glifosato. Estas simulações, apresentadas nos Cenários 1 e 2 mostraram que uma dose menor que a indicada na bula também proporciona um controle satisfatório das plantas daninhas. Desta forma, a redução da dose durante a aplicação de herbicidas em determinada lavoura, contribui para a lucratividade do produtor.

Observa-se que, com o uso de doses menores, o produtor também auxilia na diminuição dos riscos ambientais. A bula do herbicida Glifosato NORTOX classifica-o como Classe III - Perigoso ao meio ambiente. O risco para o ser humano também é destacado na bula, alertando para formas de manuseamento e preparação da solução, bem como possíveis efeitos de danos renais e hepáticos se ingerido em altas doses (ADAPAR, 2017). Em Karam, Silva e Foloni (2009), os efeitos ecotoxicológicos do Glifosato observados em relação ao peixe de água doce *Leporinus macrocephalus* foram semelhantes aos alertados na bula.

Em suma, os estudos aqui apresentados auxiliam na tomada de decisão consciente do agricultor quanto ao herbicida e sua eficácia de controle com doses menores, considerando a segurança e a preservação do meio ambiente.

REFERÊNCIAS

- ADAPAR. **Agrotóxicos no Paraná**. 2017. Disponível em: <http://www.adapar.pr.gov.br/arquivos/File/defis/DFI/Bulas/Herbicidas/GLIFOSATO_NORTOX.pdf>. Acesso em: 10 Mar. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 47.
- AGROLINK. **Problemas - Amendoim Bravo**. 2017. Disponível em: <https://www.agrolink.com.br/problemas/amendoim-bravo_2.html>. Acesso em: 23 Ago. 2018. Citado na página 20.
- BASSANEZI, Rodney Carlos; JÚNIOR, Wilson Castro Ferreira. **Equações diferenciais com aplicações**, editora habra ltda. **São Paulo**, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**, 9a edição. **Rio de Janeiro**, 2002. Citado na página 26.
- CIPOLLI, Valéria Guedes. **Sistemas dinâmicos discretos - análise de estabilidade**. 2012. Dissertação (Mestrado) — Universidade Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. UNESP - Rio Claro/SP, 2012. Citado na página 30.
- COUSENS, R. An empirical model relating crop yield to weed crop density and a statistical comparison with other models. **Journal of Agricultural Science**, v. 105, n. 3, p. 513–521, 1985. Citado na página 21.
- DIAS, N. M. **Tolerância de espécie de capim-colchão a herbicidas na cultura de cana-de-açúcar**. Piracicaba, SP: [s.n.], 2004. Citado na página 20.
- DIGGLE, A. J.; NEVE, P. B.; SMITH, F. P. Herbicides used in combination can reduce the probability of herbicide resistance in finite weed populations. **Weed Research**, v. 43, n. 5, p. 371–382, 2003. Citado na página 21.
- DINIZ, Geraldo L. **Equações de diferença e sistemas com aplicações biológicas**. São Carlos, SP, Brasil: SBMAC, 2011. Notas de Matemática Aplicada; v. 54. Citado na página 28.
- EMPRAPA SOJA. **Soja em números (safra 2017/2018)**. 2018. Disponível em: <<https://www.embrapa.br/soja/cultivos/soja1/dados-economicos>>. Acesso em: 20 Nov. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- FERNANDES, Alcione Lucinda. **Um modelo matemático da dinâmica de propagação de plantas anuais**. 2015. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São João del Rei, UFSJ, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 32.
- FONTES, JRA; MORAIS, RR. Extração de nutrientes pelo leiteiro (*euphorbia heterophylla*) em sistemas de plantio direto e convencional em manaus, am. **Embrapa Amazônia Ocidental-Circular Técnica (INFOTECA-E)**, Manaus: Embrapa Amazônia Ocidental, 2015. Citado na página 20.
- GAZZIERO, Dionísio Luiz Pisa et al. **Manual de identificação de plantas daninhas da cultura da soja**. [S.l.]: Embrapa soja., 2006. Citado na página 20.
- JONES, R.; CACHO, O. J. A dynamic optimisation model of weed control. In: **44th Annual Conference of the Australian Agricultural and Resource Economics**. Sydney, Australia: [s.n.], 2000. p. 1–17. Citado 3 vezes nas páginas 21, 35 e 47.

KARAM, Décio; SILVA, Jéssica Aline Alves; FOLONI, Luiz Lonardoni. Potencial de contaminação ambiental de herbicidas utilizados. **Revista Brasileira de Milho e Sorgo**, v. 8, n. 03, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 47.

KOVACH, Joseph et al. A method to measure the environmental impact of pesticides. Cornell University, 1992. Citado na página 21.

LORENZI, H. **Manual de Identificação e de Controle de Plantas Daninhas: Plantio Direto e Convencional**. Nova Odessa, SP: Instituto Plantarum de Estudos da Flora Ltda, 2000. Citado na página 20.

MAXWELL, B. D.; ROUSH, M. L.; RADOSEVICH, S. R. Predicting the evolution and dynamics of herbicide resistance in weed populations. **Weed Technology**, v. 4, n. 1, p. 2–13, 1990. Citado na página 21.

PARK, S. E.; BENJAMIN, L. R.; WATKINSON, A. R. The theory an application of plant competition models: an agronomic perspective. **Annals of Botany**, v. 92, n. 6, p. 741–748, 2003. Citado na página 20.

SEEFELDT, S. S.; JENSEN, J. E.; FUERST, E. P. Log-logistic analysis of herbicide dose-response relationships. **Weed Technology**, v. 9, n. 1, p. 218–227, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 13, 36 e 47.

SINDMILHO. **Soja e suas riquezas - História**. 2018. Disponível em: <<http://www.fiesp.com.br/sindmilho/sobre-o-sindmilho/curiosidades/soja-e-suas-riquezas-historia/>>. Acesso em: 20 Nov. 2018. Citado na página 19.

VARGAS, L et al. Response of euphorbia heterophylla biotypes to glyphosate rates. **Planta Daninha**, SciELO Brasil, v. 29, n. SPE, p. 1121–1128, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 15, 36 e 37.

YAMADA, Tsuioshi; CASTRO, PR de C. Efeitos do glifosato nas plantas: implicações fisiológicas e agronômicas. **Informações Agronômicas**, v. 119, p. 1–32, 2007. Citado na página 21.

ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. [S.l.]: Cengage Learning Editores, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 23, 27 e 32.

ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais. V. 1. Tradução Antonio Zumpano, revisão técnica: Antonio Pertence Junior**. [S.l.]: São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 23, 25 e 26.