

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MECÂNICA  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

LEANDRO AUGUSTO MARTINS

**ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DE UM SISTEMA MASSA-MOLA-  
AMORTECEDOR DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO  
2016

LEANDRO AUGUSTO MARTINS

**ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DE UM SISTEMA MASSA-MOLA-  
AMORTECEDOR DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso, do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR.

Orientador: Prof. Dr. Fabian Andres Lara-Molina

CORNÉLIO PROCÓPIO  
2016



**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
**Campus Cornélio Procópio**  
**Departamento Acadêmico de Mecânica**  
**Curso de Engenharia Mecânica**



## **FOLHA DE APROVAÇÃO**

**Leandro Augusto Martins**

### **Análise de sensibilidade de um sistema massa-mola-amortecedor de dois GdL**

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 15:30hs do dia 24/10/2016 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico no programa de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

---

Prof(a). Dr(a). Fabian Andres Lara Molina - Presidente (Orientador)

---

Prof(a). Dr(a). Edson Hideki Koroishi - (Membro)

---

Prof(a). Me(a). Fernando Henrique de Oliveira Camara - (Membro)

Dedico este trabalho à minha família, parentes, amigos, professores e pessoas queridas que sempre me incentivaram apesar de toda dificuldade me dando forças para continuar.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Fabian Andres Lara-Molina, que sempre me ajudou e orientou, compartilhando seus conhecimentos. Agradeço-o também pelo companheirismo e pela confiança depositada.

Aos meus colegas de sala pelos momentos compartilhados que acabaram se tornando minha família durante a graduação e sempre serão muito queridos e lembrados.

Aos professores da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR-CP) pelos conhecimentos e conselhos compartilhados ao longo desses anos, e que nunca deixaram de acreditar em seus alunos, sempre os incentivando a chegar mais longe.

Gostaria de deixar registrado também, o meu reconhecimento à minha família, pois acredito que sem o apoio deles seria muito difícil vencer esse desafio.

Enfim, a todos os que por algum motivo, direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta pesquisa.

“Eu acredito demais na sorte. E tenho constatado que, quanto mais duro eu trabalho, mais sorte eu tenho”.

(Coleman Cox)

## RESUMO

MARTINS, L. M. **Análise de sensibilidade de um sistema massa-mola-amortecedor de dois graus de liberdade.** 2016. 43 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2016.

Este trabalho, propõe-se apresentar a análise de sensibilidade de sistemas de um e dois graus de liberdade com incertezas nos parâmetros. As incertezas paramétricas normalmente são modeladas utilizando uma abordagem probabilística. Segundo esta abordagem, os parâmetros são modelados mediante variáveis aleatórias que seguem uma função de densidade de probabilidade. Para simular a resposta dinâmica, o método aplicado é a simulação de Monte-Carlo, que envolve a geração de um grande número de amostras randômicas de cada parâmetro incerto modelado mediante uma variável aleatória. A análise de sensibilidade permitirá determinar a influência individual de cada parâmetro incerto na resposta incerta do sistema mediante uma abordagem estatística baseada na análise de variância global. Os resultados mostram como a presença de incertezas podem influenciar de forma determinante na variabilidade da resposta dinâmica dos sistemas estudados, a análise de sensibilidade comprovou que para os mesmos o parâmetro de maior influência na dita variabilidade da resposta é de fato a rigidez, comprovada nas discussões dos resultados.

**Palavras-chave:** Variáveis aleatórias. Simulação de Monte-Carlo. Incertezas paramétricas. Análise de Sensibilidade.

## ABSTRACT

MARTINS, L. M. **Analysis of sensitivity of a system mass-spring-damper two degrees of freedom.** 2016. 43 p. End-of-Course work (Bachelor of Mechanical Engineering) – Federal Technological University of Parana. Cornélio Procópio, 2016.

This work proposes to introduce the system sensitivity analysis one and two degrees of freedom with uncertainties in the parameters. The parametric uncertainties are usually modeled using a probabilistic approach. Under this approach, the concentrated parameters are modeled by random variables that follow a probability density function. To simulate the dynamic response, the applied method is the Monte Carlo simulation, which involves generating a large number of random samples of each uncertain parameter modeled by a random variable. The sensitivity analysis will determine the individual influence of each uncertain parameter in the uncertain response of the system using a statistical approach based on global analysis of variance. The results show the presence of uncertainty can influence deterministically in the variability of the dynamic response of the systems studied. the sensitivity analysis demonstrated that for them the most influential parameter in said variability of response is indeed rigidity, proven in the discussions of the results.

**Keywords:** Random variables. Monte-Carlo Simulation. Parametric uncertainties. Sensitivity Analysis.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade .....	14
Figura 2 - Análise de DCL para um gdl.....	15
Figura 3 - Sistema massa-mola-amortecedor de dois graus de liberdade .....	17
Figura 4 - Análise de DCL de dois gdl.....	18
Figura 5 - Algoritmo do Método de Monte-Carlo .....	24
Figura 6 - Sistema de um grau de liberdade sujeito a incertezas.....	27
Figura 7 - Análise de convergência .....	28
Figura 8 - FRF do sistema de um gdl.....	29
Figura 9 - Posição de x com incertezas em m,c e k .....	29
Figura 10 - Intervalo de Respostas.....	30
Figura 11 - Análise de Sensibilidade 1 gdl.....	31
Figura 12 - Sistema de dois graus de liberdade sujeitos a incertezas.....	32
Figura 13 - Análise de Convergência 2gdl .....	33
Figura 14 - FRF do sistema de 2 gdl.....	34
Figura 15 - Deslocamento de $m_1$ em relação ao tempo.....	35
Figura 16 - Deslocamento de $m_2$ em relação ao tempo.....	36
Figura 17 - Análise de sensibilidade do sistema de 2gdl.....	37
Figura 18 - Incertezas somente em $m_1$ .....	38
Figura 19 - Incertezas somente em $k_2$ .....	39
Figura 20 - Incertezas somente em $c_2$ .....	39

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
1.2 OBJETIVOS .....	12
1.2.1 Objetivos específicos .....	12
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	12
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>14</b>
2.1 SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE .....	14
2.1.1 Função de Resposta em Frequência .....	16
2.2 SISTEMA DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE .....	17
2.2.1 Modelagem em espaço de estados .....	19
2.2.2 Função de Resposta em Frequência .....	21
2.3 INCERTEZAS PARAMÉTRICAS .....	21
2.3.1 Variáveis aleatórias .....	22
2.4 MÉTODO DE MONTE-CARLO .....	22
2.4.1 Implementação Computacional .....	23
2.5 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE .....	24
<b>3 RESULTADOS .....</b>	<b>27</b>
3.1 SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE .....	27
3.2 SISTEMA DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE .....	31
3.3 DISCUSSÃO DE RESULTADOS .....	37
<b>4 CONCLUSÕES .....</b>	<b>41</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>42</b>
<b>APÊNDICE A – Publicações realizadas referentes ao tema .....</b>	<b>44</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Com o avanço da tecnologia, o mercado demanda cada vez mais eficiência e confiabilidade, isso também se reflete em projetos na área de engenharia. Em qualquer projeto real desenvolvido existe a presença de variabilidade nos parâmetros, sejam elas, condições de trabalho (temperatura, umidade) ou manuseio (erros humanos) (VUOLO, 1996).

Em relação aos sistemas mecânicos, por exemplo, já na sua fase inicial é necessário considerar essas possíveis incertezas que possam vir a ocorrer durante a operação (MACHADO, 2012), faz-se necessário então desenvolver modelos numéricos mais realistas, isto é, que buscam a aproximação do modelo às reais condições do sistema. Diante disso, o estudo de incertezas tornou-se essencial para desenvolver modelos numéricos de sistemas mecânicos que considerem as variações nos parâmetros.

As incertezas paramétricas normalmente são modeladas utilizando uma abordagem probabilística. Segundo essa abordagem, os parâmetros concentrados são modelados através de variáveis aleatórias que seguem uma função de densidade de probabilidade. (LARA-MOLINA et al., 2014).

O método computacional escolhido para gerar as amostras de resposta dinâmica do sistema com incertezas paramétricas foi o de Monte-Carlo, pois este método é baseado no uso de variáveis aleatórias para resolver problemas, ou seja, envolve a geração de um grande número de amostras randômicas de cada parâmetro incerto modelado (MULLER, 2008).

A análise de sensibilidade é de extrema importância para “conhecer” um sistema porque esta permite determinar a influência individual de cada parâmetro incerto na resposta incerta do sistema mediante uma abordagem estatística baseada na simulação de Monte-Carlo. Dessa forma, é possível determinar os parâmetros de maior relevância no sistema em estudo (SILVEIRA-ZILDA, 2003).

Devido sua importância, a pesquisa na área de incertezas paramétricas vem crescendo, ganhando excelentes trabalhos na área que foram inclusive utilizados como base para o desenvolvimento desse trabalho.

Lara-Molina, Koroishi & Steffen (2014) apresentaram em seu trabalho diversas análises (modelagem e simulação da resposta dinâmica) em sistemas

mecânicos sujeitos a incertezas em seus parâmetros utilizando uma abordagem baseada na lógica fuzzy. Os autores apresentam essa abordagem como um método alternativo para modelar a incerteza de uma forma não probabilística.

Samezina (2015) apresenta em seu trabalho um estudo sobre incertezas paramétricas baseados no método de Monte-Carlo para um sistema massa-mola-amortecedor de um e dois graus de liberdade, avaliando como eles atuam na resposta dinâmica do sistema. No estudo foram utilizadas variáveis aleatórias ou randômicas para realizar a simulação de Monte-Carlo.

Machado (2012) apresenta em seu trabalho um estudo sobre a quantificação de incertezas ou aleatoriedade existentes em sistemas mecânicos. No estudo, três problemas mecânicos diferentes foram abordados, o primeiro aborda um problema dinâmico em sistema de um grau de liberdade, o segundo uma propagação de trinca em uma estrutura e o terceiro um problema de detecção de falhas utilizando o método do elemento espectral em uma viga.

Silveira (2003) propôs em seu trabalho um procedimento para obter a sensibilidade dos parâmetros de projetos de componentes mecânicos. O procedimento adotado para o estudo e otimização numérica, foi integrar a teoria de planejamento experimental, a metodologia da superfície de resposta e otimização sem restrição. Os dados para estudo vieram de mancais hidrodinâmicos, excitados por um rotor, o objetivo foi minimizar as amplitudes nas direções x ou y, identificar os fatores de maior influência sobre as respostas e, posteriormente otimizá-las.

O estudo de análise de incertezas gera um leque de possibilidades de aplicações, um exemplo disso é apresentado por Simões Filho (2006), em sua pesquisa ele aplica o conceito de incerteza nos eventos básicos para análise de uma árvore de falhas. O autor propõe essa metodologia como um pós-processador que seria independente dos programas de árvore de falhas existentes no mercado. Essa técnica é apresentada como um poderoso instrumento para a tomada de decisões gerenciais, auxiliando no gerenciamento das atividades relativas ao ciclo de vida do projeto.

## 1.2 OBJETIVOS

Neste trabalho, propõe-se apresentar a modelagem, simulação numérica e análise de sensibilidade da resposta dinâmica às incertezas nos parâmetros utilizando um método probabilístico.

### 1.2.1 Objetivos específicos

- Formular a modelagem dos sistemas mecânicos;
- Implementar a simulação computacional dos sistemas mecânicos no software (Matlab/Simulink)<sup>®</sup>;
- Aplicar as incertezas de sistemas mecânicos modeladas mediante variáveis aleatórias;
- Aplicar a simulação de Monte-Carlo para análise de incertezas;
- Aplicar a análise de sensibilidade para determinar os parâmetros incertos que mais influenciam na resposta estrutural dos sistemas mecânicos.

## 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Diante do que foi apresentado, esse trabalho tem como propósito apresentar a resposta dinâmica e análise de sensibilidade de dois sistemas mecânicos com incertezas em seus parâmetros. Dessa forma, o trabalho foi organizado de maneira a apresentar os conceitos necessários para que a compreensão dos conceitos presentes no trabalho ocorra de forma simples e objetiva.

Primeiramente é apresentada a seção de fundamentação teórica, na qual é demonstrada a modelagem dos dois sistemas estudados (massa-mola-amortecedor de um e dois graus de liberdade), apresentando suas respectivas equações e a metodologia utilizada para realizar as implementações e simulações

computacionais. Após modelados, é descrito como as incertezas que posteriormente foram inseridas nos parâmetros são modeladas. A partir daí apresenta-se o método probabilístico (Monte-Carlo) utilizado para realizar o estudo e análise do comportamento da resposta dinâmica dos sistemas mecânicos estudados. Agora é apresentada a análise de sensibilidade, seu objetivo, sua importância, e a metodologia aplicada na realização.

Finalmente, são apresentados os resultados obtidos para os problemas propostos, incluindo inclusive um tópico de discussão de resultados afim de validar os resultados encontrados.

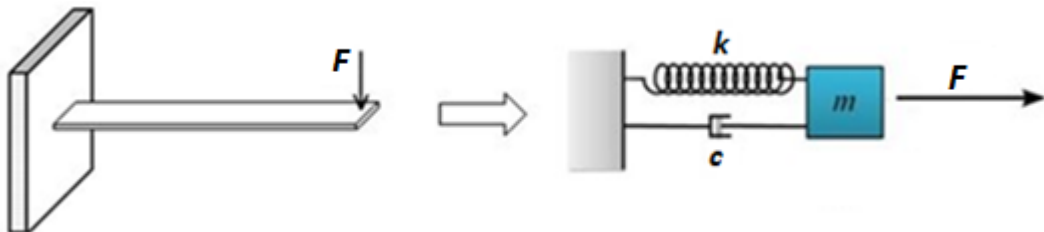
Por fim, a última seção traz as conclusões quanto a metodologia e procedimentos aplicados, os resultados encontrados e ainda sobre premissas de trabalhos futuros.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo é apresentada a fundamentação teórica, isto é, os conceitos e metodologias utilizados para elaboração e desenvolvimento da proposta. Dessa forma, essa seção foi organizada de forma a apresentar os conceitos necessários de forma progressiva visando uma compressão objetiva.

### 2.1 SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE

Sistemas de um grau de liberdade são mais comuns do que se imagina, sem perceber já deparamos com pelo menos um em algum momento de nossas vidas, por exemplo, como uma viga engastada. É possível aproximar esse tipo de sistema como sendo um sistema massa-mola-amortecedor apresentando apenas um deslocamento, isto é, um grau de liberdade.



**Figura 1 - Sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade**  
**Fonte: Autoria Própria.**

Note que o sistema massa-mola-amortecedor consegue representar o sistema com perfeição, apresentado na Fig. 1, onde  $k$  representa a rigidez do material e é colocado como sendo a rigidez da mola,  $c$  representa um coeficiente de amortecimento, nesse caso, pode ser entendido como a resistência do ar e  $m$  é a massa da viga. Há também uma força agindo em nosso sistema. O objetivo é analisar como o sistema responde a essa força, para isso, é necessário encontrar a equação do movimento, pois ele representa a dinâmica do sistema, para tal, será utilizada a segunda lei de Newton. Analisando o diagrama de corpo livre (DCL).

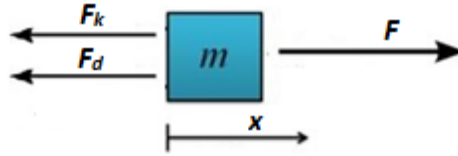


Figura 2 - Análise de DCL para um gdl  
Fonte: Autoria Própria.

Onde,  $F_k$  representa a força da mola e  $F_d$  representa as forças do atrito viscoso do amortecedor. A direção  $x$  pode descrever o movimento realizado pelo sistema.

Aplicando a segunda lei de Newton, tem-se:

$$\begin{aligned}\Sigma F &= m\ddot{x} \\ \Sigma F &= F - F_d - F_k\end{aligned}\quad (1)$$

A qual seguites forças:

$$F_d = -c\dot{x} \quad (2)$$

$$F_k = -kx \quad (3)$$

Pode-se obter a equação que representa o movimento do sistema:

$$F = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx \quad (4)$$

Vale ressaltar que o sistema analisado se trata de um sistema subamortecido, e sua solução geral é apresentado pela equação (5).

$$x(t) = C_1 e^{\left\{-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} + C_2 e^{\left\{-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} \quad (5)$$



Onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias a serem determinadas através das condições iniciais do sistema.

Para implementação e simulação computacional do comportamento dinâmico do sistema foi utilizado a teoria de função de transferência (RAO, 2009).

### 2.1.1 Função de Resposta em Frequência

Buscando determinar a função de transferência, utiliza-se o método da transformada de Laplace, o qual é usado para resolução de modo eficiente de equações diferenciais lineares, permitindo a transformação de equações diferenciais em equações algébricas que são mais fáceis de se trabalhar.

Partindo da equação de movimento, equação (4):

$$F = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx$$

Aplicando Laplace, tem-se:

$$\mathcal{L}\{F\} = \mathcal{L}\{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx\} \quad (6)$$

$$F(s) = ms^2X(s) + csX(s) + kX(s) \quad (7)$$

Onde  $s$  é uma variável subsidiária.

A função de resposta em frequência do sistema,  $Y(s)$ , caracteriza a relação entre a saída  $X(s)$  e a entrada  $F(s)$ . Essa relação também é conhecida como impedância generalizada do sistema.

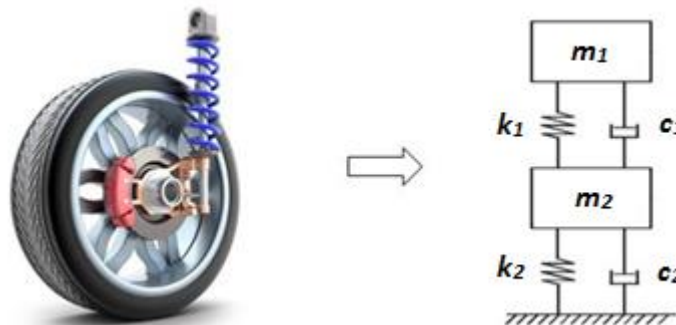
$$Y(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (8)$$

Substituindo  $s$  por  $i\omega$ , tem-se a Função de Resposta em Frequência:

$$Y(s) = \frac{1}{-m\omega^2 + ci\omega + k} \quad (9)$$

## 2.2 SISTEMA DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Um sistema massa-mola-amortecedor de dois de graus de liberdade pode ser facilmente aproximado a uma representação simplificada de uma suspensão automotiva, conforme representado pela Figura 3.



**Figura 3 - Sistema massa-mola-amortecedor de dois graus de liberdade**  
**Fonte: Autoria Própria.**

É possível aproximar com perfeição a suspensão automotiva como um sistema massa-mola-amortecedor de dois graus de liberdade, onde a massa  $m_1$  representa um quarto da massa do carro,  $k_1$  representa a rigidez do amortecedor,  $c_1$  representa o amortecedor viscoso,  $m_2$  representa a massa do pneu,  $k_2$  representa a rigidez do pneu e  $c_2$  representa a dissipação de energia, por exemplo, com a presença de atrito no chão.

Análogo ao sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade é aplicada a segunda lei de Newton em ambos os blocos de forma separada, conforme representado pela Fig. 4, obtendo assim a equação do movimento que é apresentada pela equação (10) de forma matricial.

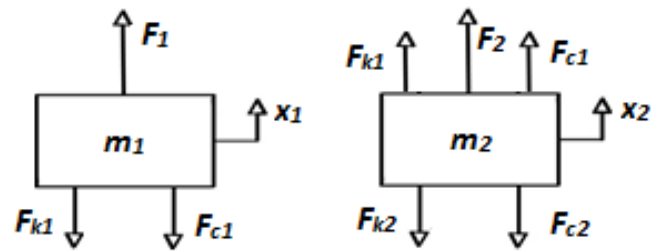


Figura 4 - Análise de DCL de dois gdl  
Fonte: Autoria Própria

$$\{F\} = [M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} \quad (10)$$

Onde as matrizes e vetores possuem a seguinte forma:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Onde:

$[M]$  : matriz de massa.

$[C]$  : matriz de amortecimento.

$[K]$  : matriz de rigidez.

$\{F\}$ : vetor de força.

$\{x\}$ : vetor de deslocamento.

Para efetuar as implementações computacionais do sistema foi utilizado a teoria de representação em espaço de estado conforme apresentado por Ogata (2010).

### 2.2.1 Modelagem em espaço de estados

Um sistema moderno complexo pode ter muitas entradas e muitas saídas, e estas podem estar inter-relacionadas de uma maneira complicada. Para analisar tal sistema, é essencial reduzir a complexidade nas expressões matemáticas, bem como utilizar computadores para a maioria dos cálculos maçantes necessários para análise. A abordagem de espaço de estados para a análise de sistemas é mais adequada sob esse ponto de vista. (OGATA, 2010).

A equação do movimento, representada pela equação (10), pode ser representada através da modelagem por espaços de estados. O método possibilita a simplificação de EDO de segunda ordem em EDO de primeira ordem.

Como se tratam de duas equações de segunda ordem, existem quatro condições iniciais, portanto, quatro variáveis de estado:

$$x_1 = x_1 \quad x_2 = x_2 \quad x_3 = \dot{x}_1 \quad x_4 = \dot{x}_2 \quad (16)$$

Derivando as variáveis de estado (16) e usando as equações diferenciais do modelo, obtemos na forma matricial, após manipulações algébricas.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{(k_1+k_2)}{m_2} & \frac{c_1}{m_2} & -\frac{(c_1+c_2)}{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

A equação (17) toma a forma de:

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{F\} \quad (18)$$

Onde,

$$\{\dot{x}\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{(k_1+k_2)}{m_2} & \frac{c_1}{m_2} & -\frac{(c_1+c_2)}{m_2} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Ainda sobre equação (17) é fácil identificar algumas matrizes já conhecidas, representadas na forma a seguir

$$\{\dot{x}\} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \{x\} + \begin{bmatrix} [0] \\ [M]^{-1} \end{bmatrix} \{F\} \quad (24)$$

As saídas tomam a forma de:

$$\{y\} = [C]\{x\} \quad (25)$$

Onde a matriz  $[C]$  representa a matriz de saídas, dado por:

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

### 2.2.2 Função de Resposta em Frequência

Análogo ao sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade, a determinação da resposta em frequência foi realizada mediante as funções transferência do sistema. Tomando a seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} X_1(j\omega) \\ X_2(j\omega) \end{Bmatrix} = G(j\omega) \begin{Bmatrix} F_1(j\omega) \\ F_2(j\omega) \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Onde,

$$G(j\omega) = \begin{bmatrix} G_{11}(j\omega) & G_{12}(j\omega) \\ G_{21}(j\omega) & G_{22}(j\omega) \end{bmatrix} \quad (28)$$

Portanto, para o sistema estudado de dois graus de liberdade serão apresentados 4 gráficos de resposta em frequência.

### 2.3 INCERTEZAS PARAMÉTRICAS

Uma grandeza física experimental deve ser determinada a partir de medição e o resultado é sempre uma aproximação para o valor verdadeiro da grandeza (VUOLO, 1996). Desta forma, projetos de engenharias também estão sujeitos a incertezas. Quando existe incerteza nos parâmetros de entrada de um sistema de engenharia, esta incerteza se propaga para a resposta. Portanto, a resposta de sistemas de engenharia também é afetada pelas incertezas, e não há

como garantir, de forma determinista, que a resposta do sistema será sempre a resposta desejada, gerando o risco. O risco é uma das principais consequências das incertezas. Para viabilizar a operação de sistemas de engenharia, o risco deve ser controlado. (BECK, 2012).

### 2.3.1 Variáveis aleatórias

Uma forma de representar as incertezas é através de variáveis aleatórias. Uma variável aleatória é uma função que confere um número real a cada resultado no espaço amostral de um experimento aleatório (MONTGOMERY, 2012). Assim, quando essa incerteza, ou “imprecisão” é representada através de uma variável aleatória, ela é modelada através de um intervalo de números reais onde a aleatoriedade da variável é caracterizada por sua média ( $\mu$ ), seu desvio padrão ( $\sigma$ ) e sua função de densidade de probabilidade. As incertezas podem ser representadas conforme a seguinte expressão.

$$a_o(\theta) = a_o + a_o \delta_a \xi(\theta) \quad (29)$$

Onde  $a_o$  representa a média (valor nominal) da variável,  $\delta_a$  é o nível de dispersão e  $\xi(\theta)$  é chamada de variável aleatória unitária com  $\theta$  representando que se trata de um processo randômico.

As incertezas podem estar presentes em qualquer característica do sistema, podem estar relacionadas ao nosso conhecimento do problema ou podem simplesmente estar relacionadas aos processos envolvidos, se tornando irreduzível. Outro tipo de incerteza que deve ser considerada é o erro humano.

## 2.4 MÉTODO DE MONTE-CARLO

O método de Monte Carlo tem seu nome associado à cidade de Monte Carlo devido ao jogo de roleta, o qual é um gerador simples para números

aleatórios. O método possui fácil compreensão, apresentando boa precisão, e fácil implementação computacional, fazendo-o amplamente utilizado na engenharia. (MARTINS, 2015).

Trata-se de um método probabilístico, dessa forma, para se obter resultados confiáveis, é necessário conhecer a distribuição da estatística (média, variância, etc) em estudo.

A simulação envolve a geração de um grande número de valores randômicos para cada variável aleatória. A ideia a partir disso, é observar o comportamento do sistema a essas aleatoriedades, gerando assim, uma espécie de envelope de resposta. Portanto, as simulações de Monte Carlo são um caminho fácil e expressivo para compreender o fenômeno de interesse.

É interessante ressaltar que a simulação de Monte Carlo é responsável por gerar as possíveis combinações de valores considerados incertos, sendo assim o foco da simulação, entretanto, cabe ao usuário analisar e tomar as decisões quanto ao risco de um projeto ou produto (MULLER, 2008).

#### 2.4.1 Implementação Computacional

A seguir é apresentado o algoritmo utilizado para implementação do Método de Monte-Carlo mediante a linguagem de um pseudocódigo

As variáveis  $N$ ,  $N\_MAX$ ,  $X$ ,  $Y$  representam o número de amostras, o número máximo de amostras, o vetor posição do sistema e a resposta do sistema respectivamente. A letra  $f$  representa as funções no domínio do tempo e de resposta em frequência descritas anteriormente.

Note que após o cálculo das respostas do sistema é calculado o máximo, a média e o mínimo encontrado a fim de representar com mais clareza o envelope de resposta obtido.



```
INÍCIO
VARIÁVEIS
N, N_MAX, X, Y;

PARA N de 1 ATÉ N_MAX FAÇA
    Y (N) ← f (X(N));
FIM PARA;

Y_MAX=max (Y);
Y_MIN=min (Y);
Y_MED=mean (Y);

FIM
```

**Figura 5 - Algoritmo do Método de Monte-Carlo**  
**Fonte: Autoria Própria**

## 2.5 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Quando se trabalha com sistemas sujeitos a incertezas originadas em função de parâmetros incertos, não está interessado exclusivamente na variabilidade da resposta como descrito anteriormente, e sim conhecer e quantificar como cada parâmetro incerto consegue influenciar nessa variabilidade. Esse tipo de informação pode, de fato, ser considerada como uma das mais valiosas no estudo de sistemas mecânicos sujeitos a incertezas, pois, a partir dela pode-se realizar um “retrabalho” em seu modelo, agora, com foco nas variáveis mais influentes, refinando sua resposta para aquela esperada.

A análise de sensibilidade visa quantificar o efeito de cada parâmetro incerto na variabilidade da resposta dinâmica incerta de um sistema (SALTELLI et al, 2010). Diversas metodologias têm sido aplicadas na análise de sensibilidade, tais como: métodos analíticos, semianalíticos e numéricos.

Diante disso, foi utilizado um método estatístico (numérico), baseado na variância para realizar a análise de sensibilidade no presente trabalho. A análise de sensibilidade é um método utilizado para determinar os fatores mais influentes em

um sistema e como eles podem afetá-lo. De modo geral, a análise de sensibilidade é usada como um experimento exploratório, isto é, utilizado para determinar quais variáveis são mais importantes, para que experimentos subsequentes sejam usados para refinar essas informações e realizar ajustes se necessários sobre as variáveis críticas de modo a melhorar o processo.

Portanto, o objetivo da análise de sensibilidade no presente trabalho é determinar quais parâmetros possui maior influência no sistema e quantificar tal influência. A análise foi realizada pelo método baseado na variância. (SALTELLI et al, 2010).

Dado um modelo da forma  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , onde  $Y$  é um escalar e representa a saída do sistema, e  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_n$  representam os parâmetros (fatores) que o definem. A variância de  $X_1$  pode ser representada da seguinte forma:

$$V_{X_i}(E_{X_{-i}}(Y|X_i)) \quad (30)$$

O termo  $X_{-i}$  denota a matriz contendo todos os fatores,  $E$  representa a esperança, o objetivo da equação interior (dentro dos parênteses) é ver como ela se comporta tomando todos os valores possíveis de  $X_{-i}$  mantendo  $X_i$  fixo. Já o cálculo da variância é feito sobre todos os valores de  $X_i$ . A medida de sensibilidade associado (coeficiente de sensibilidade de primeira ordem) é escrito como:

$$S_i = [V_{X_i}(E_{X_{-i}}(Y|X_i))] / V(Y) \quad (31)$$

Devido à identidade conhecida:

$$V_{X_i}(E_{X_{-i}}(Y|X_i)) + E_{X_{-i}}(V_{X_i}(Y|X_i)) = V(Y) \quad (32)$$

$S_i$  é um índice normalizado,  $V_{X_i}(E_{X_{-i}}(Y|X_i))$  pode variar entre zero e  $V(Y)$ .  $V_{X_i}(E_{X_{-i}}(Y|X_i))$  mede a primeira ordem do efeito de  $X_i$  na saída do modelo, enquanto  $E_{X_{-i}}(V_{X_i}(Y|X_i))$  é habitualmente chamado de residual.

Outra medida popular com base na variância é o índice de efeito total.

$$S_{Ti} = \frac{E_{x_{\sim i}}(V_{xi}(Y|X_{\sim i}))}{V(Y)} = 1 - \frac{V_{x_{\sim i}}(E_{xi}(Y|X_{\sim i}))}{V(Y)} \quad (33)$$

$S_{Ti}$  mede o efeito total, isto é, primeira e efeitos de ordem mais elevada (através de interações) do fator  $X_i$ . Uma forma de visualizar isso é considerar que  $V_{x_{\sim i}}(E_{xi}(Y|X_{\sim i}))$  é o efeito de primeira ordem de  $X_{\sim i}$ , de modo que  $V(Y)$  menos  $V_{x_{\sim i}}(E_{xi}(Y|X_{\sim i}))$  deve resultar na contribuição de todos os termos na decomposição da variância, que não incluem  $X_i$ .

No presente trabalho foi calculado o efeito total, de tal forma que foi possível isolar a contribuição que cada parâmetro individualmente apresenta na variação total do sistema, podendo compará-las e encontrando assim o termo de maior influência em nosso sistema.

### 3 RESULTADOS

Para realizar as simulações presentes nessa seção foram utilizados os softwares Matlab/Simulink®. O objetivo é analisar a resposta dinâmica dos sistemas quando introduzidos incertezas em seus parâmetros.

#### 3.1 SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE

Para o sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade os valores nominais ( $\mu$ ) e desvios padrões ( $\sigma$ ) dos parâmetros do sistema foram adotados como sendo  $m=(0.5 \pm 0.025)$  kg ,  $k=(50 \pm 2.5)$  N/m e  $c=(0.7\pm 0.035)$  Ns/m (LARA-MOLINA, 2014). Portanto, os três parâmetros possuem incertezas, conforme representado por  $\theta$  na Figura 6.

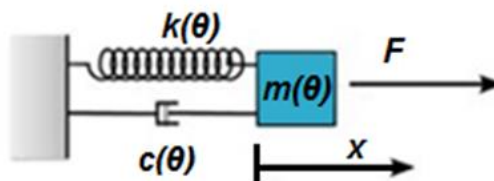


Figura 6 - Sistema de um grau de liberdade sujeito a incertezas  
Fonte: Autoria Própria

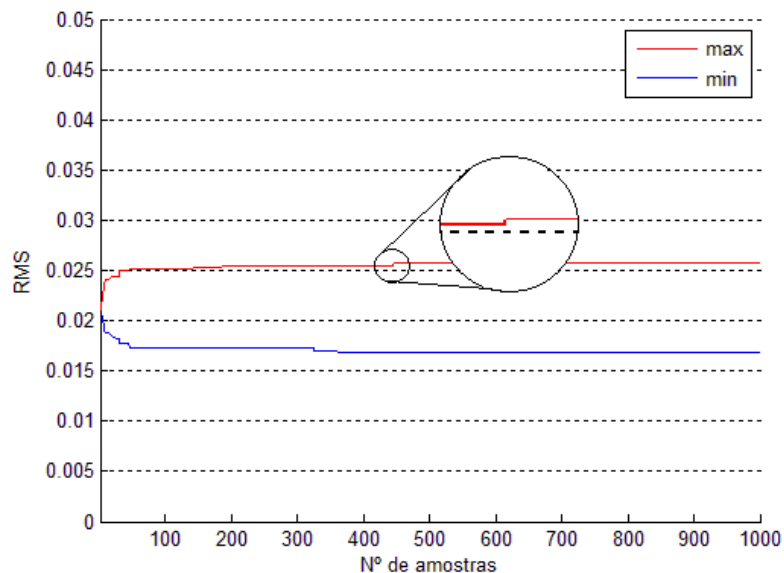
Antes de entrar na simulação propriamente dita, é necessário verificar a convergência da variabilidade da resposta do modelo estocástico em relação ao número de amostras usado na simulação de Monte Carlo, sendo adotadas 1000 amostras.

Para as simulações numéricas foi realizada uma análise de convergência média quadrática (RMS) dos valores máximo e mínimo da resposta em frequência (KOROISHI *et al*, 2012). A análise de convergência foi realizada de acordo com a seguinte expressão:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\hat{H}_j(\omega, x) - \hat{H}_j(\omega, x, \theta)|^2} \quad (34)$$

Onde  $n$  representa o número de amostras usadas na simulação de Monte Carlo e  $\hat{H}_j(\omega, x)$  a resposta em frequência obtida, por fim,  $x$  representa um vetor contendo os parâmetros incertos do sistema  $x = \{m, c, k\}$ .

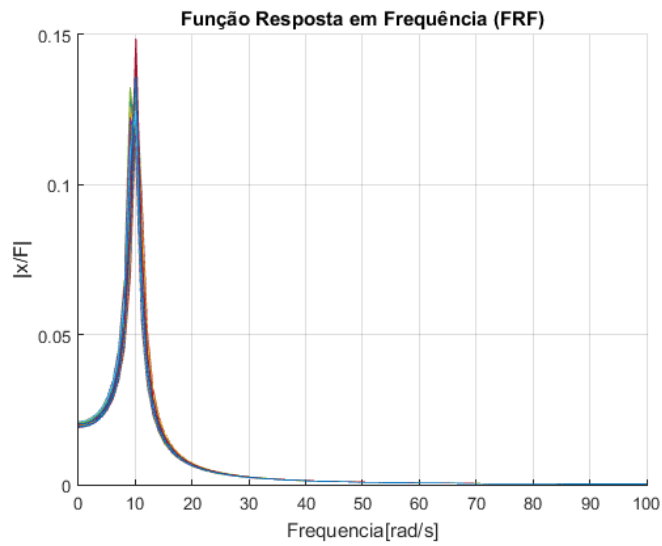
A Figura 7 apresenta a análise de convergência, nela é plotada o valor RMS em função do número de amostras. Quando o valor do RMS convergir, isto é, se tornar constante significa que o número mínimo necessário de amostras para validar a simulação é atingido, nesse caso foram 442 amostras.



**Figura 7 - Análise de convergência**  
**Fonte: Autoria Própria**

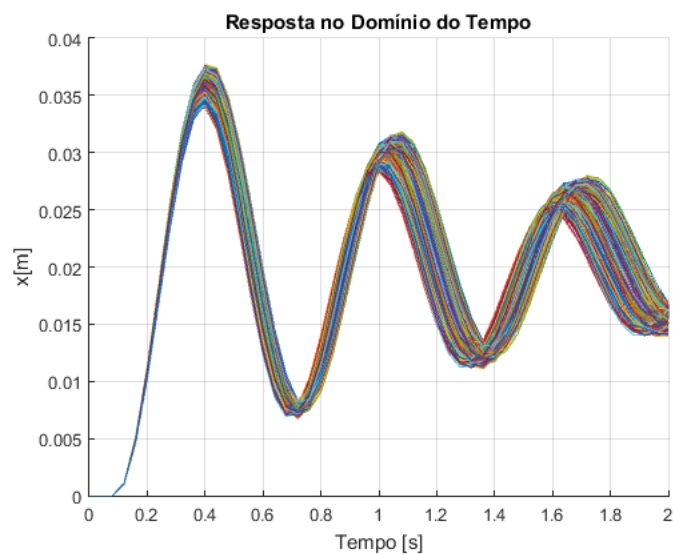
A entrada do sistema é a força aplicada (Figura 1 e 6) foi definida como um tipo degrau unitário. Dessa forma, foram obtidos os resultados que são apresentados a seguir.

A Figura 8 apresenta o comportamento em função da resposta em frequência (FRF), na qual é possível analisar onde o sistema apresenta sua maior variabilidade de resposta, caracterizada na sua frequência natural (aproximadamente 10 rad/s). É possível notar ainda como a FRF sofre uma variabilidade expressiva devido às incertezas presentes nos parâmetros.



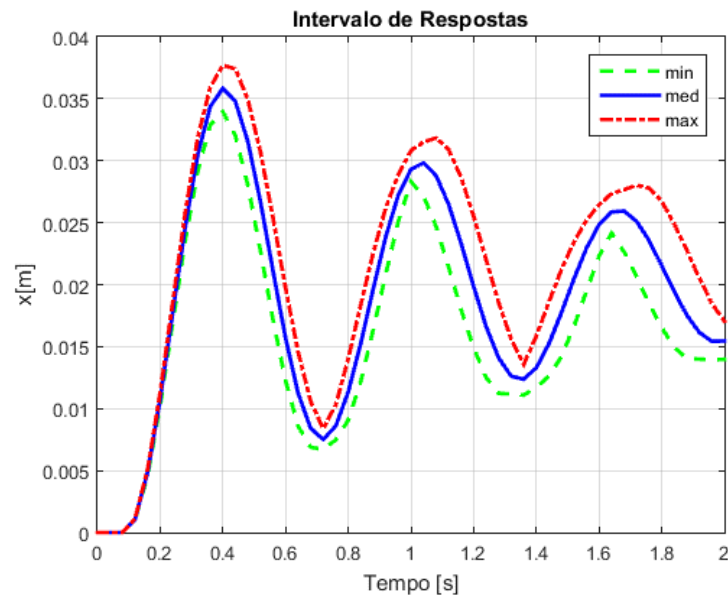
**Figura 8 - FRF do sistema de um gdl**  
**Fonte: Autoria Própria**

Na Figura 9 é apresentado o deslocamento do sistema em relação ao tempo. É possível identificar, de fato, o comportamento do sistema como sendo de um subamortecido. Note ainda como as incertezas influenciam em nosso sistema, fazendo com que a variação da resposta dinâmica aumente com o passar do tempo. É possível realizar uma análise de intervalo de resposta com o intuito de possibilitar uma visualização melhor dos limites do envelope de resposta.



**Figura 9 - Posição de x com incertezas em m,c e k**  
**Fonte: Autoria Própria**

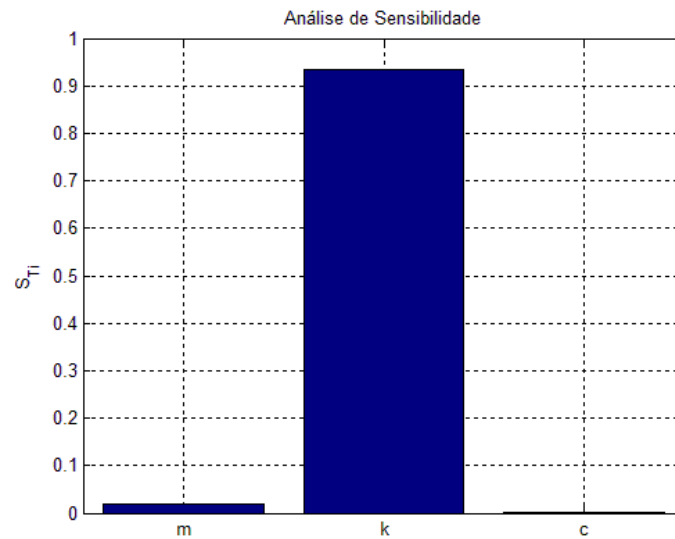
Nos resultados apresentados na Figura 10 é possível visualizar com mais clareza como nosso sistema se comportou em relação às incertezas presentes nos seus parâmetros. Notam-se três curvas, uma verde, outra azul e uma última vermelha, onde representam a variação mínima, a média e a máxima, respectivamente, criando assim um envelope de respostas.



**Figura 10 - Intervalo de Respostas**  
**Fonte: Autoria Própria**

Para o sistema de um grau de liberdade, foi realizada a análise de sensibilidade baseada no deslocamento em relação ao tempo ( $RMS(x(t))$ ), os resultados estão representados pela Figura 11. Como resultado dessa análise é apresentado um gráfico de barras, onde são apresentados os parâmetros com seus respectivos  $S_{T_i}$ , conforme a Equação (33).

Ao analisar o gráfico, é fácil notar como a rigidez é responsável pela maior influência na variação da resposta do nosso sistema, seguido da massa e do amortecimento. Portanto, para o sistema, o parâmetro que necessita de maior atenção é justamente a rigidez, pois, como se pode comprovar, qualquer mudança em seu valor nominal pode causar uma grande variação na resposta.



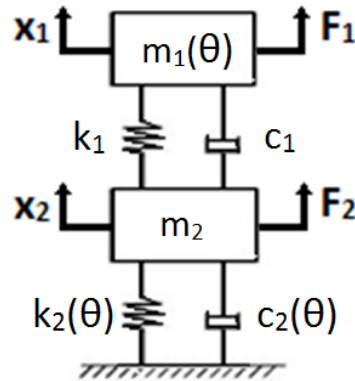
**Figura 11 - Análise de Sensibilidade 1 gdl**  
**Fonte: Autoria Própria**

### 3.2 SISTEMA DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Para o sistema de dois graus de liberdade, julgou-se necessário adicionar incertezas em 3 parâmetros do sistema, são eles,  $m_1$  que representa 1/4 da massa do carro, que pode sofrer constantes variações de acordo com o número de passageiros,  $k_2$  representando a rigidez no pneu, sofrendo alterações de acordo com a pressão interna do mesmo e por último,  $c_2$  que representa a dissipação de energia através do solo, mudando constantemente em função do terreno em que o sistema é submetido.

Conforme descrito anteriormente para o sistema de dois graus de liberdade foram inseridas incertezas em apenas 3 parâmetros, são eles:  $m_1$ ,  $k_2$  e  $c_2$ , conforme representado por  $\theta$  na Figura 12.





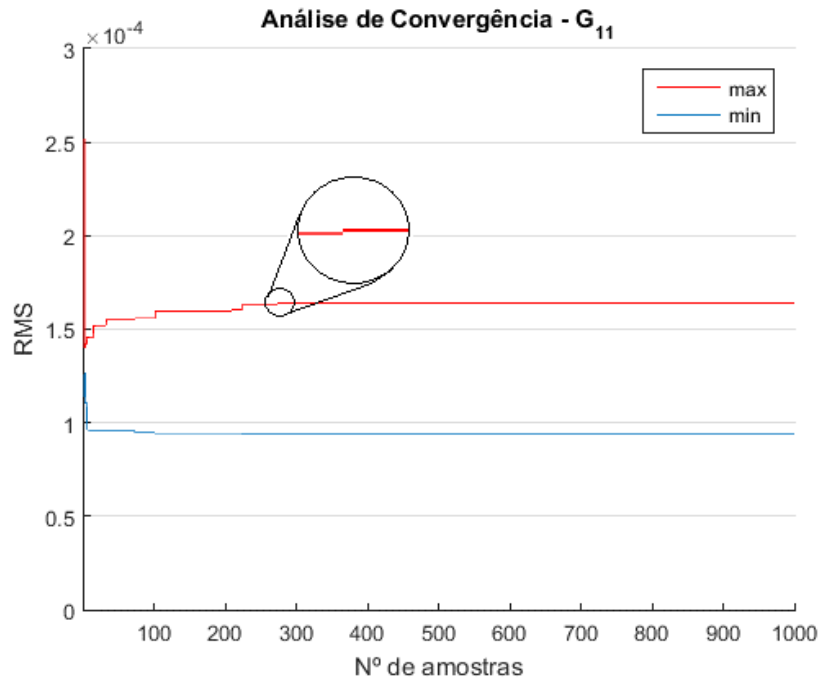
**Figura 12 - Sistema de dois graus de liberdade sujeitos a incertezas**  
**Fonte: Autoria Própria**

Dessa forma, os valores nominais ( $\mu$ ) e desvios padrões ( $\sigma$ ) dos parâmetros do sistema foram adotados como sendo:  $m_1=(350 \pm 17.5)$  kg,  $k_1=7800$  N/m,  $c_1=35$  Ns/m,  $m_2=100$  Kg,  $k_2=(50000 \pm 2500)$  N/m,  $c_2=(30 \pm 1.5)$  Ns/m e duas entradas  $F_1$  e  $F_2$  conforme demonstrado pelas Figuras 4 e 12, onde a primeira corresponde a uma força nula e a segunda como sendo uma força impulso.

Como se trata de um sistema de dois graus de liberdade, representado pela Figura 4, semelhante a uma suspensão automotiva, o foco do nosso trabalho será voltado para o comportamento da  $m_1$ , visando assim desenvolver um maior conforto para os passageiros.

Análogo ao sistema de um grau de liberdade foi realizada uma análise de convergência média quadrática (RMS) dos valores máximo e mínimo da resposta em frequência, entretanto para esse sistema foi analisada com base na  $m_1$  devido sua importância descrita acima. A análise foi realizada conforme a equação (34), onde  $x = \{m_1, k_2, c_2\}$ , representando os parâmetros incertos. Foram adotadas 1000 amostras a fim de determinar o número mínimo de amostras necessários, e é apresentada a seguir.

A Figura 13 apresenta a análise de convergência similar ao sistema de um grau de liberdade, porém, para esse segundo caso o número de amostras que o valor RMS se estabilizou, isto é, o número mínimo necessário de amostras para validar a simulação foi de 278. Na figura 13 é apresentado inclusive uma aproximação local para melhor visualização. Portanto, as demais respostas apresentadas foram obtidas utilizando 278 amostras no método de Monte Carlo.

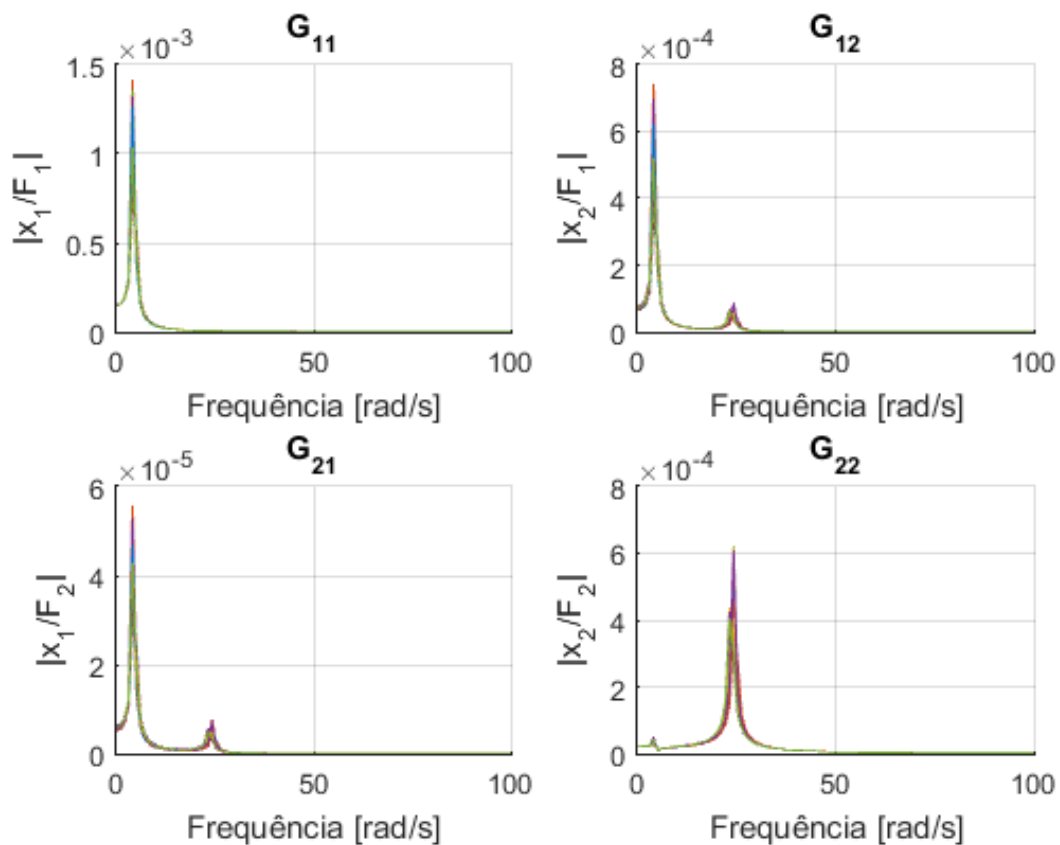


**Figura 13 - Análise de Convergência 2gdl**  
**Fonte: Autoria Própria**

A resposta no domínio da frequência é realizada com as entradas harmônicas do sistema, onde é analisada a frequência natural, sendo realizada pela razão entre a saída  $X_{(j\omega)}$  pela entrada  $F_{(j\omega)}$  (Equação 27 e 28).

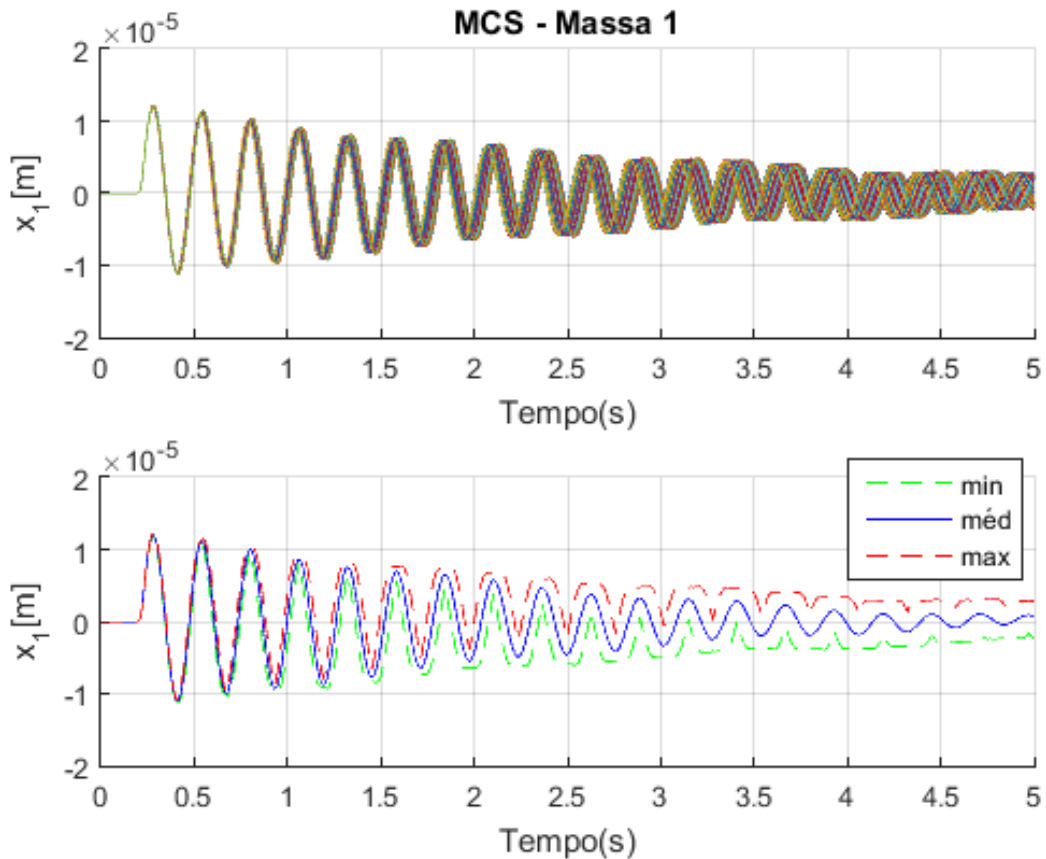
A Figura 14 apresenta a função resposta em frequência (FRF) do sistema. Note que a frequência natural que caracteriza o primeiro modo de vibração (aproximadamente 4.33 rad/s) representado pelo pico no gráfico  $G_{11}$  é relativamente menor que a frequência natural que caracteriza o segundo modo de vibração (aproximadamente 24,4 rad/s) representado pelo segundo pico no gráfico  $G_{22}$ .

É interessante ainda ressaltar que o gráfico  $G_{12}$  é exatamente igual ao gráfico  $G_{21}$  devido aos parâmetros que o relacionam serem os mesmos ( $k_1$  e  $c_1$ ), observar Figuras 3 e 4.



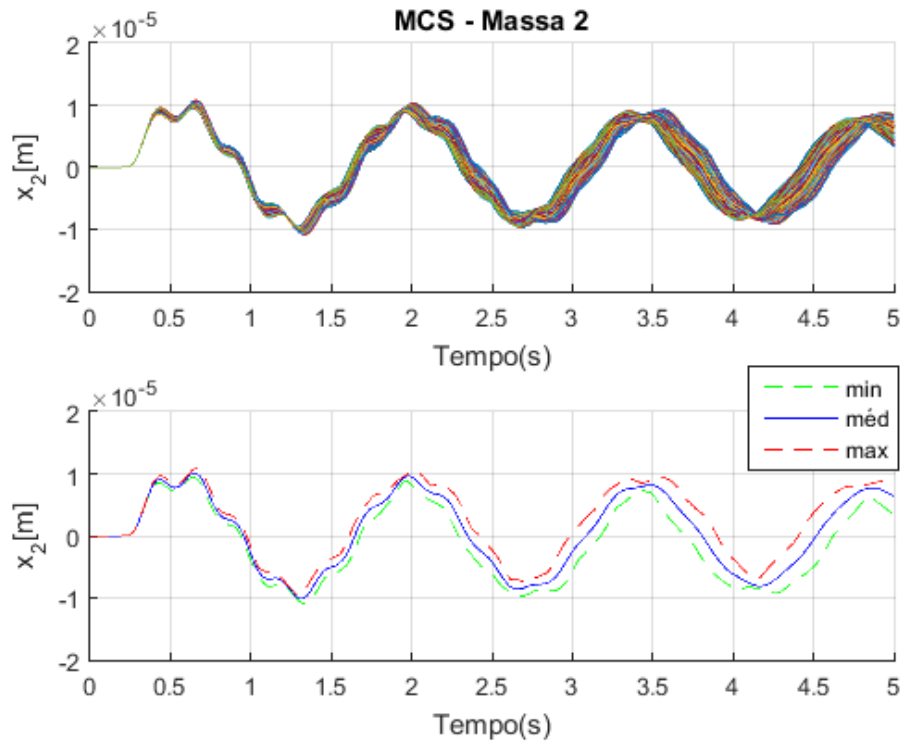
**Figura 14 - FRF do sistema de 2 gdl**  
**Fonte: Autoria Própria**

Na Figura 15 é apresentado o deslocamento de  $m_1$  em relação ao tempo. Nota-se como a variabilidade da resposta aumentou proporcionalmente ao tempo de simulação. Devido a quantidade elevada de curvas e da alta variabilidade da resposta foi plotado também um gráfico mostrando de maneira mais clara os extremos do envelope de resposta, isto é, seu máximo, mínimo, bem como sua média.



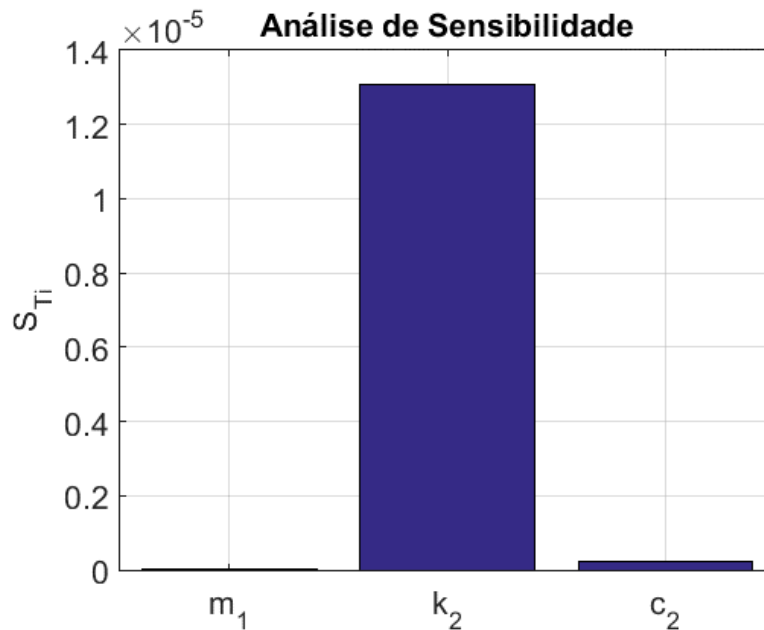
**Figura 15 - Deslocamento de  $m_1$  em relação ao tempo**  
**Fonte: Autoria Própria**

Apesar do objetivo do estudo do sistema de dois graus de liberdade ser analisar, principalmente o comportamento de  $m_1$ , é trivial realizar o estudo para  $m_2$ . Dessa forma a Figura 16 apresenta o deslocamento de  $m_2$  em relação ao tempo. Nota-se que há presença de ruídos gerados por  $m_1$ . Análogo à  $m_1$  é possível notar como a variabilidade da resposta aumenta proporcionalmente com o tempo de simulação, comprometendo uma análise limpa do comportamento. Diante disso, julgou-se necessário também a plotagem de um segundo gráfico que demonstrasse com clareza os limites de resposta, isto é, os extremos do envelope de resposta, plotando-se assim, as curvas máximo, mínima e média.



**Figura 16 - Deslocamento de  $m_2$  em relação ao tempo**  
**Fonte: Autoria Própria**

Para o sistema de dois graus de liberdade, também é realizada uma análise de sensibilidade, utilizando inclusive a mesma metodologia, porém, dessa vez baseada no deslocamento de  $m_1$  em relação ao tempo ( $RMS(x(t))$ ). O resultado dessa análise é apresentado na figura 17. Como de costume, é apresentado um gráfico de barras, onde são apresentados os parâmetros com seus respectivos  $S_{T_i}$ , conforme a Equação (33).



**Figura 17 - Análise de sensibilidade do sistema de 2gdl**  
**Fonte: Autoria Própria**

Análogo ao primeiro sistema estudado, a rigidez escolhida para receber as incertezas,  $k_2$ , é o fator de maior influência na variação da resposta do sistema massa-mola-amortecedor de dois graus de liberdade, mas dessa vez o amortecedor  $c_2$  influencia mais na variabilidade da resposta que  $m_1$ . Portanto, a rigidez ( $k_2$ ) é novamente o parâmetro que requer maior atenção, sendo o parâmetro mais sensível, seguidos de  $c_2$  e  $m_1$ .

### 3.3 DISCUSSÃO DE RESULTADOS

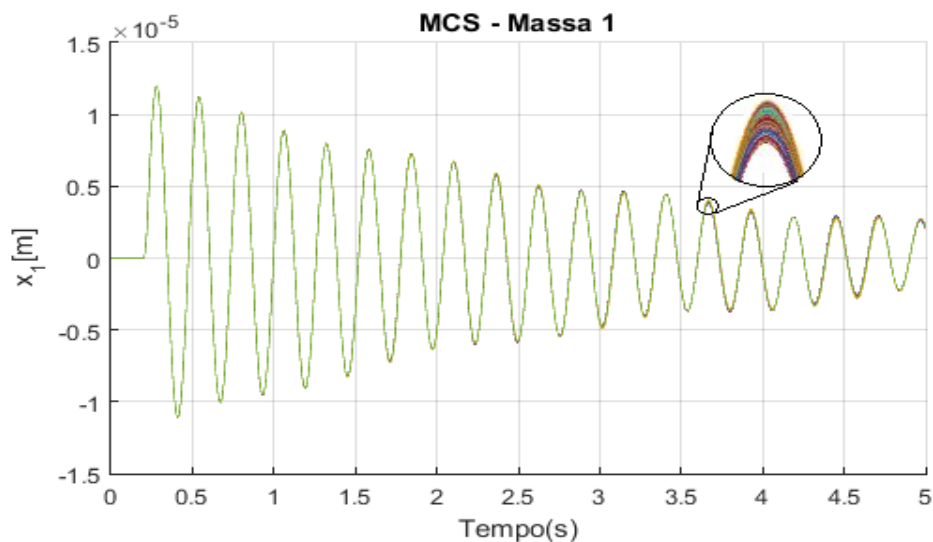
Como visto, após as análises de sensibilidade dos sistemas massa-mola-amortecedor de um e dois graus de liberdade foi constatado que a rigidez é o fator de maior influência na variabilidade da resposta dinâmica. Diante disso, essa subseção dos resultados foi preparada com o objetivo de verificar, de fato, a veracidade das simulações realizadas anteriormente.

Conforme descrito, a metodologia utilizada para realização das análises de sensibilidade foi feita com base na variância da resposta dinâmica no domínio do tempo. Nessa linha de pensamento, se as simulações forem realizadas criando

diversos cenários nos quais serão introduzidas incertezas nos parâmetros de forma individual, será possível visualizar se, de fato, se análise de sensibilidade se faz correta.

Diante disso, foi analisado a análise de sensibilidade para o segundo sistema estudado, massa-mola-amortecedor de dois graus de liberdade. Como resultado dessa discussão, são apresentados 3 gráficos para o deslocamento em relação ao tempo de  $m_1$ , que são apresentados a seguir.

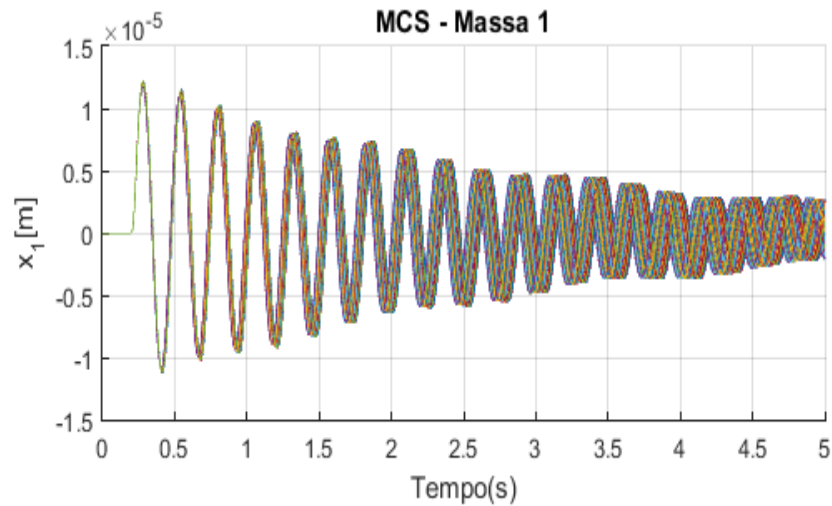
No gráfico representado pela Figura 18 é apresentado a resposta dinâmica do sistema com somente incertezas introduzidas em  $m_1$ , é fácil notar que a variabilidade na resposta é quase irrelevante, sendo um parâmetro pouco sensível, sendo coerente com a análise realizada, apresentada anteriormente pela Figura 17.



**Figura 18 - Incertezas somente em  $m_1$**

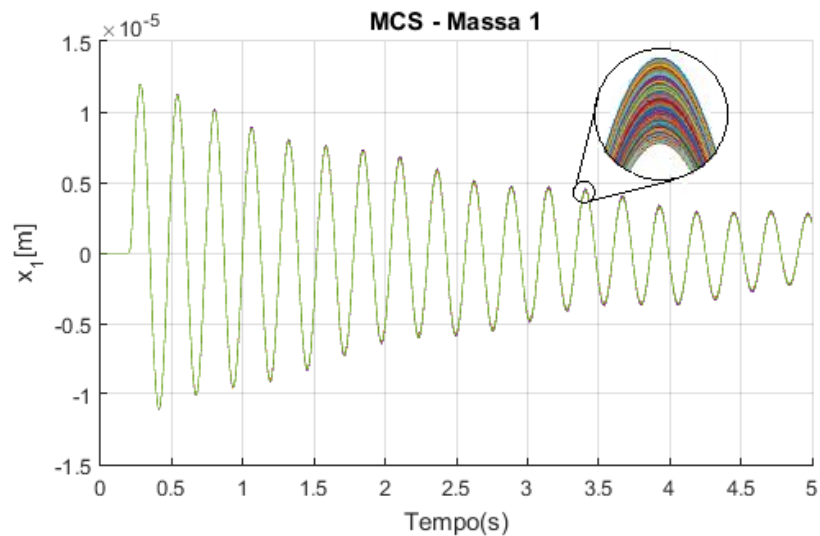
**Fonte: Autoria Própria**

A Figura 19 apresenta como o deslocamento de  $m_1$  se comportou com incertezas em  $k_2$ , nota-se como a variabilidade da resposta é expressiva, confirmando novamente a análise de sensibilidade realizada, apresentada na Figura 17.



**Figura 19 - Incertezas somente em  $k_2$**   
**Fonte: Autoria Própria**

Por fim, a Figura 20 apresenta a resposta com incertezas no parâmetro  $c_2$ , análogo ao cenário de incertezas somente em  $m_1$ , a variabilidade da resposta é baixa, se concentrando nas extremidades, conforme demonstrado por uma aproximação local.



**Figura 20 - Incertezas somente em  $c_2$**   
**Fonte: Autoria Própria**



Portanto, conforme analisado e discutido anteriormente, foi comprovado e validado a análise de sensibilidade, visto que para o sistema massa-mola-amortecedor de dois graus de liberdade o parâmetro de maior influência é, de fato,  $k_2$ , conforme apresentado na Figura 19. Ainda foi possível notar uma diferença na variabilidade da resposta presentes nas Figuras 18 e 20, sendo a variabilidade associada a  $c_2$  maior que associada a  $m_1$ , respectivamente.

## 4 CONCLUSÕES

Esse trabalho foi voltado para o estudo de incertezas, suas características, como elas podem estar presentes e influenciar a respostas de sistemas mecânicos. É apresentada uma metodologia para modelar e analisar essas incertezas paramétricas através do método de Monte Carlo em sistemas mecânicos de um e dois graus de liberdade. Mediante as simulações no software Matlab/Simulink® foi caracterizada a resposta no domínio do tempo e da frequência na presença de incertezas desses sistemas. Para ambos os sistemas também foram realizados uma análise de sensibilidade com o propósito de determinar os parâmetros de maior influência.

Os procedimentos de uma forma geral provaram ser uma ferramenta útil para o projeto e análise de sistemas. As aplicações numéricas mostram que os envelopes das respostas conduzem a informações valiosas em termos do grau de influência das variáveis no comportamento dinâmico dos sistemas.

A metodologia utilizada neste trabalho se demonstrou adequada fornecendo resultados satisfatórios. Como descrito na introdução o estudo de incertezas é abrangente, gerando um grande leque de oportunidades em diversas áreas de estudos, desde manutenção e confiabilidade ao estudo e controle de sistemas mecânicos.

A partir do trabalho realizado é possível criar algumas perspectivas em relação a trabalhos futuros gerando assim uma continuidade para o estudo proposto. Dessa forma, poderia ser desenvolvida e confeccionada um protótipo a fim de analisa-lo experimentalmente visando um estudo comparativo em relação aos resultados obtidos no presente trabalho.

Como descrito anteriormente a análise de sensibilidade muitas vezes é utilizada como um experimento exploratório fornecendo espaço para que estudos subsequentes sejam realizados. Portanto, para os sistemas mecânicos estudados, após identificar as variáveis críticas é possível realizar um estudo de otimização em relação a esses parâmetros, gerando uma melhoria do sistema não apenas computacionalmente, mas também gerando uma maior confiabilidade do sistema como um todo.

## REFERÊNCIAS

BECK, A.T. **Apostila do Curso De Confiabilidade Estrutural**. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2012. 231 p.

DREHMER, L.R.C. **Otimização de Parâmetros Concentrados de Suspensão para conforto e Segurança veicular**. 2012. 98 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

HIBBELER, R. C. **Dinâmica: mecânica para engenharia**. 12. ed. São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall, c2011. xvi, 591 p.

KOROISHI, E. H.; CAVALINI JR., A. A.; LIMA, A. M. G. de; STEFFEN JR, V. Stochastic modeling of flexible rotors. J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng., Rio de Janeiro , v. 34, n. spe2, p. 574-583, 2012 . Available from <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1678-58782012000600006&lng=en&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-58782012000600006&lng=en&nrm=iso)>. Acesso em: 02 Maio 2016. <http://dx.doi.org/10.1590/S1678-58782012000600006>.

LARA-MOLINA, F. A.; KOROISHI, E. H. ; STEFFEN JUNIOR., V. . **Análise Estrutural Considerando Incertezas Paramétricas Fuzzy**. In: Fran Sergio Lobato; Valder Steffen Jr; Antônio José da Silva Neto. (Org.). Técnicas de Inteligência Computacional com Aplicações em Problemas Inversos de Engenharia. 5.1ed.Curitiba: Omnipax, 2014, v., p. 133-144.

MACHADO, M.R. **Quantificação de Incertezas e Análise de Confiabilidade em Problemas Mecânicos**. 2012. Tese (Mestrado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2012. 95p.

MARTINS, V.L.M.; WERNER, L.; PINTO, F.T. **Uso Da Simulação De Monte Carlo Para Avaliação Da Confiabilidade De Um Produto**. Disponível em: <[http://www.simpoi.fgvsp.br/arquivo/2010/artigos/E2010\\_T00480\\_PCN16162.pdf](http://www.simpoi.fgvsp.br/arquivo/2010/artigos/E2010_T00480_PCN16162.pdf)> Acesso em: 23 set. 2015

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. 5. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2012. xvi, 523 p.

MULLER, A. **Simulação Estocástica: O Método de Monte-Carlo**. 2008. 75 f. TCC. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

OGATA, K.. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall, c2010. x, 809 p.

RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas**. 4. ed. São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall, 2009. xv, 424 p.

SALTELLI, A.; ANNONI, P.; AZZINI, I.; CAMPOLONGO, F.; RATTO M.; TARANTOLA S. **Variance based sensitivity analysis of model output. Design and estimator for the total sensitivity index**. Computer Physics Communications, Volume 181, Issue 2, February 2010, Pages 259-270.

SAMEZINA, V. **Análise de incertezas paramétricas em sistemas mecânicos**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2016.

SILVA R.M., **Considerações sobre Análise de Sensibilidade em Análise de Decisão**. Relatório de Iniciação Científica, CNPq, 2004, 44p.

SILVEIRA, Z. de C. **Análise estatística e otimização de parâmetros de projeto em componentes de sistemas mecânicos**. 2003. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003. 160p.

SIMÕES FILHO, S. **Análise de Árvore de Falhas Considerando Incertezas na Definição do Eventos Básicos**. 2006. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2006. 277 p.

VUOLO, J. H.. **Fundamentos da teoria de erros**. 2 ed. revista e ampliada. São Paulo, SP: E. Blucher, 1996. 249 p.

## **APÊNDICE A – Publicações realizadas referentes ao tema**

Aqui são listadas as publicações aceitas ao longo do período de pesquisa referentes ao tema estudado e apresentado.

**V SMNC** - Simpósio de Métodos Numéricos Computacionais da Universidade Federal do Paraná, Curitiba – PR, 2015.

**Título:** Análise de Incertezas de um sistema massa-mola-amortecedor.

**Autores:** Leandro Augusto Martins, Vinicius Samezina, Fabian Andres Lara-Molina.

**XXIII CREEM** - Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica, Teresina – PI, 2016.

**Título:** Análise de Sensibilidade de sistemas mecânicos com parâmetros incertos.

**Autores:** Leandro Augusto Martins, Victor Renan Bolzon, Edson Hideki Koroishi, Fabian Andres Lara-Molina.

**V SIPEM** – Simpósio Paranaense de Engenharia Mecânica, Cornélio Procópio - PR, 2016;

**Título:** Análise de Sensibilidade de um sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade.

**Autores:** Leandro Augusto Martins, Victor Renan Bolzon, Fabian Andres Lara-Molina.

**18° SICT** – Simpósio de Iniciação Científica e Tecnológica, São Paulo – SP, 2016;

**Título:** Análise de Incertezas de um sistema massa-mola-amortecedor.

**Autores:** Leandro Augusto Martins, Victor Renan Bolzon, Fabian Andres Lara-Molina.

**Título:** Análise de Sensibilidade de um sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade.

**Autores:** Leandro Augusto Martins, Victor Renan Bolzon, Fabian Andres Lara-Molina.

**SICITE** - Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica, Francisco Beltrão, 2016.

**Título:** Análise de sensibilidade de sistemas mecânicos com parâmetros incertos.

**Autores:** Leandro Augusto Martins, Fabian Andres Lara-Molina.