

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CÂMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO
DIRETORIA DE GRADUAÇÃO E EDUCAÇÃO PROFISSIONAL
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DA ELÉTRICA
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

THIAGO MURILO GROSSI

**CONTROLE ROBUSTO DE ROBÔ PARALELO BASEADO EM
COMPENSAÇÃO PARALELA DISTRIBUÍDA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016

THIAGO MURILO GROSSI

**CONTROLE ROBUSTO DE ROBÔ PARALELO BASEADO EM
COMPENSAÇÃO PARALELA DISTRIBUÍDA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento Acadêmico da Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação

Orientador: Fabian Andres Lara Molina

Co-orientador: Cristiano Marcos Agulhari

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016



Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Cornélio Procópio
Departamento Acadêmico de Elétrica
Curso de Engenharia de Controle e Automação



FOLHA DE APROVAÇÃO

Thiago Murilo Grossi

Controle Robusto de Robô Paralelo Baseado em Compensação Paralela Distribuída

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 18:30hs do dia 16/11/2016 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação no programa de Graduação em Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

Prof(a). Dr(a). Fabian Andres Lara Molina - Presidente (Orientador)

Prof(a). Dr(a). Cristiano Marcos Agulhari - (Coorientador)

Prof(a). Dr(a). Rodrigo Rodrigues Sumar - (Membro)

Prof(a). Dr(a). Marcio Aurelio Furtado Montezuma - (Membro)

À minha família, em especial aos meus pais, pelo incentivo, apoio, amor e compreensão, em todos os momentos desta e de outras caminhadas, dedico.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família,

por todo o incentivo e empenho em me ajudar quando necessário durante os cinco anos de graduação, em especial aos meus pais Salvador e Helena, pois sem o apoio deles me tornar engenheiro não seria possível.

Agradeço também aos meus amigos e colegas de curso,

que durante este período estiveram sempre ao meu lado, passamos por bons e maus momentos juntos, mas sabemos que tudo contribuiu com a nossa formação como pessoas e também como engenheiros. Agradeço em especial aos meus grandes amigos, Amanda Spagolla, Marco Antonio Leite Beteto, Pedro Victor Leme, Thiago Gabriel de Almeida Honorato Duarte, Vinícius Henrique Dias de Paula e Wagner de Souza Chaves, com os quais passei grande parte da graduação, seja esse tempo estudando e/ou nos divertindo, afinal estudar também acabava algumas vezes se tornando divertido. Destaco também, Hellen Cristina Ancelmo, Daniel Izumi Katagiri, Tayane Soares Vidal, Thainara de Araújo e Thamiris Lima Costa, pelos trabalhos realizados juntos e pelas risadas.

Por último, mas não menos importante, agradeço aos meus professores,

que sempre estiveram dispostos a ajudar e com toda certeza contribuiram muito para a minha formação e deixaram ensinamentos que levarei para a vida toda. Claro que todos os professores foram importantes para a minha formação, mas cito aqui os que foram mais marcantes durante este percurso, que acabaram se tornando amigos e os agradeço em especial por isso. Prof. Dr. Fabian Andres Lara Molina, por aceitar desde muito cedo me orientar na iniciação científica, a qual evoluiu para o TCC, possibilitando que adquirisse conhecimentos mais aprofundados na área de robótica. Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari, por sempre estar disposto a ajudar todos que o procuram e aceitar a posição de coorientador neste trabalho. Prof. Dr. Fabio Renan Durand, que sempre nos parava no corredor para perguntar como estavam as disciplinas e estágio, agradeço por está preocupação com todos. Prof. Dr. Alessandro Goedel, que logo cedo nos mostrou que trabalho em equipe nem sempre é fácil, agradeço pelos conselhos sobre nossos projetos, estágio e mestrado.

“O maior inimigo do conhecimento não é ignorância, mas a ilusão do conhecimento.”

(Stephen Hawking)

RESUMO

GROSSI, Thiago Murilo. CONTROLE ROBUSTO DE ROBÔ PARALELO BASEADO EM COMPENSAÇÃO PARALELA DISTRIBUÍDA. 50 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2016.

Neste trabalho, é proposta uma metodologia de controle robusto, baseada em compensação paralela distribuída (CPD) e modelos *Fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S), para um manipulador paralelo planar com dois graus de liberdade para rastreamento de trajetória no espaço das juntas, além da modelagem dinâmica deste manipulador, útil para a formulação da lei de controle e simulações computacionais do mesmo. A modelagem dinâmica completa do manipulador paralelo é realizada utilizando o equacionamento de Lagrange, e simulada no software Matlab/Simulink juntamente com a técnica de controle proposta. Adicionalmente, o Controle por Torque Computado (CTC) será utilizado para avaliação da técnica de controle proposta. É importante ressaltar que a CTC é amplamente utilizada para o controle de manipuladores robóticos, enquanto a CPD é apresentada como uma alternativa, uma vez que o CTC implica no cálculo da dinâmica inversa do sistema a todo instante de tempo. Ao final foi realizada uma análise para a verificação da eficiência das técnicas utilizadas. Sendo assim possível avaliar a qualidade do controle, resultando em um pequeno erro de posição no rastreamento de trajetórias, além disso o *Fuzzy* apresenta um torque equivalente para a realização das trajetórias. Observa-se também que o controle *Fuzzy* se mostrou mais robusto em relação ao CTC, quando sujeitos a forças externas ao sistema.

Palavras-chave: Manipulador Paralelo, Modelagem Dinâmica, Controle Robusto, Compensação Paralela Distribuída, Controle *Fuzzy*.

ABSTRACT

GROSSI, Thiago Murilo. ROBUST CONTROL OF A PARALLEL MANIPULATOR BASED ON PARALLEL DISTRIBUTED COMPENSATION. 50 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2016.

In this paper, are presented a robust control methodology based on distributed parallel compensation and models *Fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) for a planar parallel manipulator with two degrees of freedom for trajectory tracking in the space of the joints, are presente too the modeling the dynamics of the manipulator, useful for the formulation of the control law and computational simulations of the same. The modeling was performed using the equation of Lagrange, and simulated in the software Matlab/Simulink along with the two control techniques proposed. Additionally Parallel Compensation Distributed (PCD) based on Fuzzy models Takagi-Sugeno and Control Torque Computed (CTC), used for evaluation of the purposed technique. It is important noteworthy that the CTC is widely used for the control robotic manipulators, while the PCD is proposed as an alternative that requires less computing power to perform the control, since the CTC involves the calculation of the inverse dynamics of the system at every instant of time. At the end an analysis was performed to verify the efficiency of techniques used. Thus possible to observe the quality of both controllers, resulting in a small error in addition both presented the equivalent torque for performing the trajectory. It is also observed that the fuzzy control was more robust in relation to the CTC, when subjected to external forces to the system.

Keywords: Parallel Manipulator, Dynamic Modeling, Robust Control, Parallel Distributed Compensation, Fuzzy Control.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Esquemático do manipulador paralelo 2 GdL estudado.	17
FIGURA 2	– Esquemático de uma das pernas do Manipulador Paralelo.	20
FIGURA 3	– Esquemático do controlador baseado em compensação paralela distribuída e <i>Fuzzy</i> Takagi-Sugeno.	27
FIGURA 4	– Modelo representado com parâmetros incertos.	28
FIGURA 5	– Diagrama de blocos representando a realimentação de estados com seguidor de referência.	29
FIGURA 6	– Esquemático da malha de controle com <i>PID</i> com torque computado. ...	30
FIGURA 7	– Diagrama de blocos representando a simulação do modelo dinâmico no software Matlab/Simulink.	31
FIGURA 8	– Limites do espaço de trabalho das juntas do manipulador destacando os pontos escolhidos.	32
FIGURA 9	– Funções de pertinência do sistema fuzzy para θ_1	34
FIGURA 10	– Funções de pertinência do sistema fuzzy para θ_2	34
FIGURA 11	– Exemplo de trajetória retilínea computada pelo gerador.	36
FIGURA 12	– Posição angular das juntas para a trajetória retilínea.	37
FIGURA 13	– Velocidade angular das juntas para a trajetória retilínea.	37
FIGURA 14	– Aceleração angular das juntas para a trajetória retilínea.	37
FIGURA 15	– Exemplo de trajetória circular computada pelo gerador.	38
FIGURA 16	– Posição angular das juntas para a trajetória circular.	38
FIGURA 17	– Velocidade angular das juntas para a trajetória circular.	39
FIGURA 18	– Aceleração angular das juntas para a trajetória circular.	39
FIGURA 19	– Erro de posição das juntas do manipulador com relação a trajetória retilínea para cada uma das técnicas de controle utilizadas.	40
FIGURA 20	– Erro de posição das juntas do manipulador com relação a trajetória circular para cada uma das técnicas de controle utilizadas.	40
FIGURA 21	– Erro de posicionamento, referente ao rastreamento da trajetória retilínea, do efetuador final no eixo coordenado x para as duas técnicas de controle.	41
FIGURA 22	– Erro de posicionamento, referente ao rastreamento da trajetória retilínea, do efetuador final no eixo coordenado y para as duas técnicas de controle.	41
FIGURA 23	– Erro de posicionamento, referente ao rastreamento da trajetória circular, do efetuador final no eixo coordenado x para as duas técnicas de controle.	42
FIGURA 24	– Erro de posicionamento, referente ao rastreamento da trajetória circular, do efetuador final no eixo coordenado y para as duas técnicas de controle.	42
FIGURA 25	– Torque utilizado para o rastreamento da trajetória retilínea para as duas técnicas de controle utilizadas.	43
FIGURA 26	– Torque utilizado para o rastreamento da trajetória circular para as duas técnicas de controle utilizadas.	43
FIGURA 27	– Comparação da trajetória retilínea desejada com a realizada pelo CTC. .	44
FIGURA 28	– Comparação da trajetória retilínea desejada com a realizada pelo controle <i>Fuzzy</i>	44
FIGURA 29	– Comparação da trajetória circular desejada com a realizada pelo CTC. .	45

FIGURA 30 – Comparação da trajetória circular desejada com a realizada pelo controle <i>Fuzzy</i>	45
FIGURA 31 – Erro de posicionamento de cada uma das juntas, quando sujeitas a uma força externa em 1s, para as duas técnicas de controle.	46
FIGURA 32 – Erro de posicionamento do efetuador final no eixo coordenado x, com aplicação de uma força externa em 1s, para as duas técnicas de controle. . .	46
FIGURA 33 – Erro de posicionamento do efetuador final no eixo coordenado y, com aplicação de uma força externa em 1s, para as duas técnicas de controle. . .	47
FIGURA 34 – Torque utilizado para um ponto fixo, com aplicação de uma força externa em 1s, para as duas técnicas de controle utilizadas.	47

LISTA DE SIGLAS

T-S	Takagi-Sugeno
GdL	Graus de Liberdade
<i>PID</i>	Proporcional, integral e derivativo
CTC	Controle por Torque Computado
CPD	Compensação Paralela Distribuída
MDI	Modelo Dinâmico Inverso
MDD	Modelo Dinâmico Direto

LISTA DE SÍMBOLOS

z	eixo coordenado z
A_i	junta ativa da perna i do manipulador
B_i	junta passiva da perna i do manipulador
P	posição do efetuador final
l_i	comprimento do elo i do manipulador
θ_{A_i}	ângulo da junta ativa pertencente à perna i do manipulador
θ_{B_i}	ângulo da junta passiva pertencente à perna i do manipulador
x_A	posição da junta ativa do manipulador no eixo x
$ PB_i $	Distância entre B_i e o ponto P
L	Lagrangiano
τ	vetor de forças aplicadas em cada uma das juntas
\mathbf{f}	vetor de forças de atrito em cada uma das juntas
q	vetor de variáveis das juntas
\dot{q}	vetor de velocidades das juntas
K	energia cinética
P	energia potencial
K_1	energia cinética do elo 1
K_2	energia cinética do elo 2
I_i	momento de inércia do elo i em relação a sua origem
m_i	massa do elo i
(x_{ci}, y_{ci})	coordenadas cartesianas do centro de massa do elo i
$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$	Matriz de inércia
$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$	Matriz de Coriolis
c_{ABi}	$\cos(\theta_{A_i} - \theta_{B_i})$
s_{ABi}	$\sin(\theta_{A_i} - \theta_{B_i})$
τ_A	vetor dos torques das juntas ativas
τ_B	vetor dos torques das juntas passivas
Ψ	Matriz Jacobiana de todas as juntas em relação as ativas
$\mathbf{I}_{2 \times 2}$	Matriz identidade de dimensão dois
\mathcal{M}_j^i	conjunto <i>Fuzzy</i> j da regra i
$\mathbf{K}_{\mathcal{H}\infty}$	Ganho de realimentação para o controle $\mathcal{H}\infty$
ξ	Coefficiente de amortecimento do sistema
ω_n	Frequência natural do sistema
\mathbf{f}_{ext}	Vetor de força externa ao sistema

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.1 PROBLEMA ESTUDADO	14
1.2 JUSTIFICATIVA	15
1.3 OBJETIVOS	15
1.3.1 Objetivos Gerais	15
1.3.2 Objetivos Específicos	15
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1 MODELAGEM DO MANIPULADOR PARALELO	17
2.1.1 Modelo Cinemático	18
2.1.2 Modelo Dinâmico	19
2.1.2.1 Modelagem de uma Cadeia Cinemática	20
2.1.2.2 Modelo Dinâmico das Duas Cadeias Cinemáticas	21
2.1.2.3 Acoplamento das Duas Cadeias Cinemáticas	22
2.1.2.4 Representação em Espaço de Estados	23
2.1.3 Geração de Trajetórias	24
2.2 MODELO <i>FUZZY</i> TAKAGI-SUGENO	25
2.3 COMPENSAÇÃO PARALELA DISTRIBUÍDA	26
2.4 CONTROLE H_∞	27
2.5 CONTROLE <i>PID</i> COM TORQUE COMPUTADO	29
3 MATERIAIS E MÉTODOS	31
3.1 SIMULAÇÃO DO MODELO	31
3.2 PROJETO DO CONTROLADOR	31
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES	36
4.1 TRAJETÓRIAS GERADAS	36
4.2 COMPARAÇÃO DO DESEMPENHO DOS CONTROLADORES	39
4.2.1 Rastreamento de trajetórias	39
4.2.2 Robustez do controle	45
5 CONCLUSÃO	48
REFERÊNCIAS	49

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas o uso de robôs industriais vem aumentando significativamente, sendo a redução dos custos uma das principais razões para o crescimento do seu uso. Além disso os manipuladores industriais têm se tornado mais eficientes, rápidos, precisos e flexíveis, devido aos programas implementados para o controle destes, ampliando assim a abrangência das áreas em que estes são aplicados de maneira eficiente dentro da indústria (CRAIG, 2005).

Nas diversas aplicações dos manipuladores robóticos, faz-se necessária a alta repetitividade de movimentos e elevada precisão. Adicionalmente, os manipuladores paralelos têm se destacado por apresentarem vantagens potenciais uma vez que sua estrutura apresenta melhor desempenho dinâmico, maior rigidez e relação carga/peso, quando comparado aos manipuladores robóticos de cinemática serial, (MOLINA et al., 2012).

Na maioria das áreas de atuação dos manipuladores robóticos, a execução de uma tarefa requer um movimento específico planejado para o efetuador final (AGUIRRE, 2007). Para realizar esta tarefa com maior precisão faz-se necessária a aplicação de técnicas para controle das juntas do manipulador, que visam melhorar o desempenho no rastreamento destas trajetórias no espaço de trabalho.

Diversos métodos de controle têm sido estudados com a finalidade de controlar o movimento dos manipuladores paralelos no rastreamento de uma trajetória no espaço de trabalho (PACCOT et al., 2009). Dentre as principais técnicas aplicadas no controle de posição para o rastreamento das trajetórias dos manipuladores paralelos podem-se enumerar: controle preditivo (LARA-MOLINA et al., 2014), técnicas de controle robusto (TERRA MARCEL BERGERMAN, 2001) e controle multivariável (AYALA VIVIANE DAL MOLIN DE SOUZA, 2009). Porém, quando se trata de manipuladores seriais, uma das técnicas que tem apresentado bons resultados é a baseada em sistemas *Fuzzy* (LARA-MOLINA et al., 2015).

Neste trabalho, será verificada a eficiência de um controle baseado em sistemas *Fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) e compensação paralela utilizada para controlar um manipulador paralelo planar de dois graus de liberdade (GdL). Para isto, o modelo completo será equacionado por

meio do princípio de Lagrange. O controle *Fuzzy* será baseado na dinâmica do manipulador. Adicionalmente, será realizada uma análise sobre o desempenho global do controle proposto.

A técnica de controle proposta será simulada no software Matlab/Simulink, juntamente com a dinâmica do manipulador. Ao final será realizada uma análise sobre a eficiência do controle proposto para o rastreamento de trajetórias e do torque utilizado para realizar o movimento.

1.1 PROBLEMA ESTUDADO

Fatores que podem prejudicar o desempenho dos manipuladores quanto à precisão da execução de determinada tarefa estão geralmente relacionados com as não linearidades e parâmetros não modelados do sistema. Estes fatores podem fazer com que controladores clássicos e lineares como por exemplo *PID* não apresentem o desempenho desejado para o robô.

Desta maneira a implementação de um controle capaz de tratar as não linearidades e também as incertezas presentes no modelo do robô utilizado tornam-se importantes para poder tornar o movimento do manipulador mais preciso.

Porém para o projeto do controlador, geralmente se utiliza um modelo reduzido para que seja possível a extração de determinadas características do sistema, para que assim o controle projetado possa atender a determinadas especificações do projeto. A modelagem também se faz importante para a verificação previa da eficiência do controle que posteriormente poderá ser implementado no protótipo experimental.

Dentro deste contexto já se tem alguns trabalhos desenvolvidos na área, sendo que dentro destes se inserem o controle de manipuladores seriais e também paralelos.

Podem ser citados trabalhos desenvolvidos para controle de manipuladores paralelos os realizados por (PACCOT et al., 2009) o qual desenvolve um controlador utilizando Controle por Torque Computado (CTC), obtendo bons resultados no rastreamento de trajetórias no espaço das juntas, e o realizado por (LE, 2012) que utiliza um controle baseado em redes neurais e Sliding Mode para um manipulador 2 GdL, apresentando a eficácia do controle para o rastreamento de trajetórias.

Dentro dos trabalho realizados para os manipuladores do tipo serial, são citados os trabalhos elaborados por (TAKANO, 2016) o qual utiliza controle de regulação baseado em Compensação Paralela Distribuída (CPD) e lógica *Fuzzy* T-S para um robô com flexibilidade estrutural, obtendo resultados um erro praticamente nulo quando o manipulador se encontra em uma configuração estática. O controle *Fuzzy* também já foi utilizado em robôs móveis, com o

intuito de seguir uma trajetória, assim como pode ser observado em (RESENDE et al., 2011), que obteve erros pequenos para vários tipos de trajetórias. No trabalho de (REIS et al., 2013) é apresentado um controlador Fuzzy para o controle do posicionamento de uma manipulador serial com dois graus de liberdade, apresentando bons resultados, com erros pequenos no posicionamento do manipulador e um tempo inferior a 1s para se atingir a referência.

Sendo assim neste trabalho o controle CPD baseado em *Fuzzy*, o qual já mostrou bons resultados em aplicações em robótica, será utilizado para o rastreamento de trajetórias de um manipulador paralelo 2 GdL, visando a robustez do controle, sendo a contribuição deste trabalho inserida neste contexto.

1.2 JUSTIFICATIVA

A contribuição deste trabalho se insere no desenvolvimento de uma metodologia para controle baseada em CPD e modelos *Fuzzy* T-S para um manipulador paralelo que consiga de tal forma que esta seja capaz de tratar as não linearidades e incertezas presentes no robô. A vantagem desta técnica esta no fato de que não será necessário ter o modelo dinâmico completo para o manipulador.

Ao final do trabalho será possível verificar a eficiência do controle proposto para o rastreamento de trajetórias. Também será possível verificar o comportamento do manipulador quando submetido a alguma força externa ao sistema. Além disso também será verificado se o torque necessário para a utilização do controle proposto, não ultrapassa os limites estabelecidos.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVOS GERAIS

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver uma metodologia de controle baseada em sistemas *Fuzzy* e aplicada em um manipulador planar paralelo. Esta metodologia de controle visa melhorar o rastreamento de trajetórias e o desempenho dinâmico do manipulador robótico.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Equacionar o modelo Dinâmico e Cinemático do manipulador;
- Definir um gerador de trajetórias por meio do modelo Cinemático do manipulador;

- Projetar controladores robustificados considerando modelos lineares do manipulador paralelo;
- Projetar o controle de movimento do manipulador utilizando compensação paralela distribuída baseada nos modelos *Fuzzy T-S*;
- Analisar o desempenho dinâmico do manipulador mediante simulações computacionais no software Matlab/Simulink.

O restante deste documento está organizado conforme descrito a seguir. Na seção 2, apresenta-se uma breve fundamentação teórica. Na seção 3, é apresentada a metodologia utilizada para o controle. Na seção 4 são apresentados os resultados e realizadas algumas considerações. E finalmente na seção 5 apresenta-se uma breve conclusão do trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 MODELAGEM DO MANIPULADOR PARALELO

O manipulador paralelo de dois GdL é composto por uma cadeia cinemática que possui duas juntas passivas rotacionais, ou seja, juntas que não possuem motores ou sensores e duas juntas ativas, as quais possuem motores e sensores. As juntas ativas são fixas na base do manipulador, e são atribuídos a elas os graus de liberdade do sistema.

Na Figura 1 é apresentado um esquemático do manipulador, onde é possível observar seu modelo geométrico simétrico. Especificamente para o caso estudado a gravidade é perpendicular ao plano de trabalho, ou seja, a gravidade atua na direção $-z$.

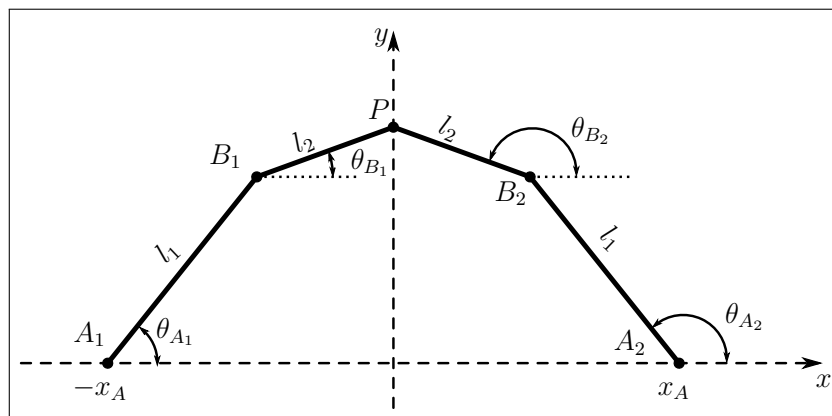


Figura 1: Esquemático do manipulador paralelo 2 GdL estudado.
Fonte: Autoria Própria

Sendo:

A_i - junta ativa da perna i do manipulador;

B_i - junta passiva da perna i do manipulador;

P - posição do efetuador final;

l_i - comprimento do elo i do manipulador;

θ_{A_i} - ângulo da junta ativa pertencente à perna i do manipulador;

θ_{B_i} - ângulo da junta passiva pertencente à perna i do manipulador;

x_A - posição da junta ativa do manipulador no eixo x ;

$i = 1, 2$.

2.1.1 MODELO CINEMÁTICO

Seja dado um ponto $P = (x, y)$, o modelo cinemático inverso permite calcular as variáveis das juntas ativas do manipulador para uma determinada posição do efetuador final no espaço de trabalho (LIU et al., 2005). Para isso primeiramente tem-se que calcular a posição no plano cartesiano de cada uma das juntas passivas em relação as ativas. Considerando o comprimento do elo e o ângulo da junta ativa tem-se que:

$$B_1 = (l_1 \cos \theta_{A_1} - x_A, \quad l_1 \sin \theta_{A_1}) \quad (1)$$

$$B_2 = (l_1 \cos \theta_{A_2} + x_A, \quad l_1 \sin \theta_{A_2}) \quad (2)$$

Em seguida analisa-se a restrição $|PB_i|$ do modelo, dada por:

$$|PB_i| = l_2, \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

Reescrevendo a Eq. (3) em termos de l_1, x_A, θ_{A_1} e θ_{A_2}

$$(x - l_1 \cos \theta_{A_1} + x_A)^2 + (y - l_1 \sin \theta_{A_1})^2 = l_2^2 \quad (4)$$

$$(x - l_1 \cos \theta_{A_2} - x_A)^2 + (y - l_1 \sin \theta_{A_2})^2 = l_2^2 \quad (5)$$

Quando P é conhecido pode-se obter as variáveis de junta por meio da seguinte expressão:

$$\theta_{A_i} = 2 \tan^{-1} y_i, \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

onde

$$y_i = \frac{-b_i \pm \sqrt{b_i^2 - 4a_i c_i}}{2a_i}, \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

sendo

$$a_1 = l_1^2 + y^2 + (x + x_A)^2 - l_2^2 + 2(x + x_A)l_1$$

$$b_1 = -4yl_1$$

$$c_1 = l_1^2 + y^2 + (x + x_A)^2 - l_2^2 + 2(x + x_A)l_1$$

$$a_2 = l_1^2 + y^2 + (x - x_A)^2 - l_2^2 + 2(x - x_A)l_1$$

$$b_2 = b_1 = -4yl_1$$

$$c_2 = l_1^2 + y^2 + (x - x_A)^2 - l_2^2 - 2(x - x_A)l_1$$

Na equação (7) observa-se que existem 4 soluções para a cinemática inversa do manipulador. Na Figura 1 é apresentada a configuração obtida utilizando a equação com “+” para $i = 1$ e “-” para $i = 2$, as outras combinações não são abordadas neste trabalho.

2.1.2 MODELO DINÂMICO

O modelo Dinâmico do manipulador foi obtido por meio da formulação de Lagrange, dada pela equação (8), que leva em consideração a energia cinética e potencial do mecanismo para a obtenção do modelo, (LE, 2012).

$$\boldsymbol{\tau} - \mathbf{f} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \quad (8)$$

Sendo:

L - Lagrangiano, definido por:

$$L = K - P \quad (9)$$

$\boldsymbol{\tau}$ - vetor de forças aplicadas em cada uma das juntas;

\mathbf{f} - vetor de forças do atrito em cada uma das juntas;

q - vetor de variáveis das juntas;

\dot{q} - vetor de velocidades das juntas.

Na equação (9), K e P são as energias cinética e potencial total do manipulador, respectivamente. Como a gravidade é perpendicular ao plano de trabalho da cadeia cinemática, a energia potencial é nula.

Para simplificar a análise do mecanismo, primeiramente é realizada a modelagem de uma das pernas do manipulador, sendo esta uma modelagem de um mecanismo serial.

2.1.2.1 MODELAGEM DE UMA CADEIA CINEMÁTICA

Considerando somente uma das pernas do manipulador, temos a cadeia cinemática apresentada na Figura 2.

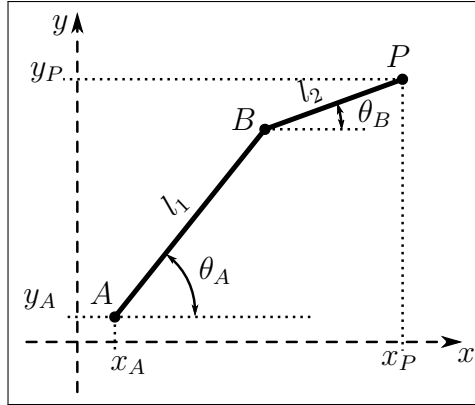


Figura 2: Esquemático de uma das pernas do Manipulador Paralelo.
Fonte: Autorial Própria

Fazendo $K = K_1 + K_2$, onde K_1 e K_2 representam a energia cinética do elo 1 e do elo 2 respectivamente.

Da energia cinética de cada elo, tem-se então que:

$$K_1 = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_A^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_{c1}^2 + \dot{y}_{c1}^2)$$

$$K_2 = \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_B^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_{c2}^2 + \dot{y}_{c2}^2)$$

Sendo:

I_i - o momento de inércia do elo i em relação a sua origem;

m_i - massa do elo i ;

(x_{ci}, y_{ci}) - as coordenadas cartesianas do centro de massa do elo i .

Após realizar as devidas operações e substituições da energia cinética dos elos da cadeia cinemática, K_1 e K_2 , na Eq. (9), chega-se à equação (10)

$$L = K = \frac{1}{2}\dot{\theta}_A^2\alpha + \frac{1}{2}\dot{\theta}_B^2\beta + \gamma\dot{\theta}_A\dot{\theta}_B\cos(\theta_A - \theta_B) \quad (10)$$

Onde:

$$\alpha = I_1 + m_1r_1^2 + m_2l_1^2$$

$$\beta = I_2 + m_2r_2^2$$

$$\gamma = m_2 l_1 r_2$$

Para a cadeia cinemática da Figura 2 considera-se: $q = [\theta_A \ \theta_B]^T$, $\dot{q} = [\dot{\theta}_A \ \dot{\theta}_B]^T$, $\tau = [\eta_1 \ \eta_2]^T$ e $f = [f_1 \ f_2]^T$, sendo f o vetor de atritos nas juntas.

Assim tem-se que a equação de Lagrange para cadeia cinemática é definida por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_A} \right) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_B} \right) \right]^T$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \left[\frac{\partial L}{\partial \theta_A} \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_B} \right]^T$$

Desenvolvendo a equação de Lagrange, equação (8), obtêm-se as equações 11 e 12 que descrevem o movimento.

$$\eta_1 - f_1 = \alpha \ddot{\theta}_A + \gamma \dot{\theta}_B^2 \text{sen}(\theta_A - \theta_B) + \gamma \cos(\theta_A - \theta_B) \ddot{\theta}_B \quad (11)$$

$$\eta_2 - f_2 = \beta \ddot{\theta}_B - \gamma \dot{\theta}_A^2 \text{sen}(\theta_A - \theta_B) + \gamma \cos(\theta_A - \theta_B) \ddot{\theta}_A \quad (12)$$

Reescrevendo as equações (11) e (12) na forma matricial apresentada na Eq. (13).

$$\tau - \mathbf{f} = \mathbf{M}(\theta) \ddot{\theta} + \mathbf{C}(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} \quad (13)$$

Obtemos:

$$\mathbf{M}(\theta) = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \cos(\theta_A - \theta_B) \\ \gamma \cos(\theta_A - \theta_B) & \beta \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{C}(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \dot{\theta}_B \text{sen}(\theta_A - \theta_B) \\ -\gamma \dot{\theta}_A \text{sen}(\theta_A - \theta_B) & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Sendo as matrizes $\mathbf{M}(\theta)$ e $\mathbf{C}(\theta, \dot{\theta})$ as matrizes de inércia e das forças de Coriolis, respectivamente

2.1.2.2 MODELO DINÂMICO DAS DUAS CADEIAS CINEMÁTICAS

Partindo do modelo de uma cadeia cinemática serial da equação (13), pode-se ampliar o modelo para obter a dinâmica de duas cadeias cinemáticas, presentes no manipulador paralelo.

As matrizes, do modelo considerando as duas cadeias cinemáticas, referentes à inércia

do manipulador, apresentada na equação (16), e às forças centrífugas e de Coriolis, na Eq. (17).

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \gamma_1 c_{AB1} & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \gamma_2 c_{AB2} \\ \gamma_1 c_{AB1} & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 c_{AB2} & 0 & \beta_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_1 \dot{\theta}_{B1} s_{AB1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 \dot{\theta}_{B2} s_{AB2} \\ -\gamma_1 \dot{\theta}_{A1} s_{AB1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_2 \dot{\theta}_{A2} s_{AB2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Onde os símbolos c_{ABi} e s_{ABi} representam o $\cos(\theta_{Ai} - \theta_{Bi})$ e o $\sin(\theta_{Ai} - \theta_{Bi})$, respectivamente. Sendo $i = 1, 2$.

Considerando as duas cadeias cinemáticas tem que $\boldsymbol{\tau}$ é definido como $\boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{\tau}_A \ \boldsymbol{\tau}_B]^T$, onde $\boldsymbol{\tau}_A$ é o vetor dos torques das juntas ativas e $\boldsymbol{\tau}_B$ é o vetor dos torques das juntas passivas.

2.1.2.3 ACOPLAMENTO DAS DUAS CADEIAS CINEMÁTICAS

Para obter modelo total do manipulador paralelo é necessário considerar o acoplamento existente na junta passiva do efetuador final. As restrições são obtidas por meio do cálculo da matriz Jacobiana de todas as juntas em relação as ativas, representando por $\boldsymbol{\Psi}$. Do princípio de D'Alembert e do trabalho virtual os torques das juntas ativas $\boldsymbol{\tau}_a$ e os torques generalizados $\boldsymbol{\tau}$ satisfazem a equação (18), (LE, 2012).

$$\boldsymbol{\tau}_a = \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\tau} \quad (18)$$

Temos que $\boldsymbol{\Psi} = [\mathbf{I}_{2 \times 2}, \mathbf{J}]^T$, onde $\mathbf{I}_{2 \times 2}$ é identidade de dimensão dois e $\mathbf{J} = \partial \boldsymbol{\theta}_B / \partial \boldsymbol{\theta}_A$, calculado por meio da equação (19).

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_B}{\partial \boldsymbol{\theta}_A} = - \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\theta}_B} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\theta}_A} \right] \quad (19)$$

Onde:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} l_{11}C_{A1} + l_{12}C_{B1} + X_{A1} - l_{21}C_{A2} - l_{22}C_{B2} - X_{A2} \\ l_{11}S_{A1} + l_{12}S_{B1} - l_{21}S_{A2} - l_{22}S_{B2} \end{bmatrix}$$

Considerando as restrições e realizando as devidas manipulações matemáticas, obtêm-

se o modelo completo do manipulador paralelo. Dado pela equação (20)

$$\mathbf{M}_A \ddot{\theta}_A + \mathbf{C}_A \dot{\theta}_A + \mathbf{f}_A = \tau_A \quad (20)$$

Onde $\mathbf{M}_A = \Psi^T \mathbf{M} \Psi$ e $\mathbf{C}_A = \Psi^T \mathbf{M} \dot{\Psi} + \Psi^T \mathbf{C} \Psi$, são as matrizes de inércia e das forças centrífugas e de Coriolis respectivamente.

2.1.2.4 REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS

Para a obtenção dos modelos dinâmicos locais em espaço de estados foram desconsiderados os atritos presentes nas juntas do sistema, além disso considerou-se o modelo parado sobre o ponto em que se projetaria o controle, ou seja $\mathbf{f}_A = 0$ e $\mathbf{C}_A = 0$ na equação (20).

Assim tem-se a equação (21),

$$\mathbf{M}_A \ddot{\theta}_A = \tau_A \quad (21)$$

fazendo $[x_1 \ x_2]^T = [\theta_{A1} \ \theta_{A2}]^T$ e $[x_3 \ x_4]^T = [\dot{\theta}_{A1} \ \dot{\theta}_{A2}]^T$, tem-se que $[\dot{x}_1 \ \dot{x}_2]^T = [x_3 \ x_4]^T$ e $[\ddot{x}_3 \ \ddot{x}_4]^T = [\ddot{\theta}_{A1} \ \ddot{\theta}_{A2}]^T = \mathbf{M}_A^{-1} \tau_A$, onde $\tau_A = u(t)$ é um vetor com as entradas de torques das juntas ativas, resultando na equação (22) em espaço de estados para o modelo local do manipulador.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{M}_A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Ou seja, para esta abordagem

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \text{ para todo } i,$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{M}_A^{-1} \end{bmatrix} \text{ depende da dinâmica local e}$$

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \text{ para todo } i.$$

2.1.3 GERAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

A geração de trajetória é feita por meio de um algoritmo baseado no modelo cinemático inverso do manipulador, sendo assim, as trajetórias são planejadas no espaço de trabalho do manipulador e posteriormente traduzidas para o as juntas ativas, para que se possa realizar o controle da posição de cada uma das juntas com o intuito de que o efetuator final realize a trajetória desejada.

Para garantir uma movimentação suave do mecanismo, faz-se necessária a interpolação da posição por meio de um polinômio com ordem cinco, garantindo assim que a ordem do polinômio para o calculo da aceleração será de terceira ordem, não ocorrendo assim descontinuidades durante o tempo de movimentação do robô. Os polinômios para o calculo da posição, velocidade e aceleração são apresentados nas equações (23), (24) e (25), respectivamente.

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \quad (23)$$

$$\dot{p}(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4 \quad (24)$$

$$\ddot{p}(t) = 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3 \quad (25)$$

Após o calculo dos índices a_i dos polinômios de interpolação no espaço cartesiano tem-se a posição, velocidade e aceleração. Para traduzi-las para o espaço das juntas utiliza-se a cinemática inversa, para obter o angulo de cada uma das juntas, a matriz Jacobiana para obter a velocidade angular e a derivada primeira da matriz Jacobiana para se obter a aceleração angular para as juntas. As equações mostradas a seguir representam como são determinadas as trajetórias no espaço das juntas.

$$\theta_a(t) = f^{-1}(p(t))$$

$$\dot{\theta}_a(t) = J\dot{p}(t)$$

$$\ddot{\theta}_a(t) = \dot{J}\dot{p}(t) + J\ddot{p}(t)$$

Onde f^{-1} é a função da cinemática inversa, apresentada anteriormente. Sendo assim o gerador de trajetórias calcula primeiramente a trajetória no espaço de trabalho do manipulador e o transforma para as variáveis de junta, a partir dos pontos iniciais dados e do tempo para a execução da tarefa.

2.2 MODELO FUZZY TAKAGI-SUGENO

Esta técnica de modelagem *Fuzzy* é simples e natural, pois consiste em capturar a dinâmica do sistema por meio de um conjunto de implicações *Fuzzy* que caracterizem relações locais no espaço de estados. Sendo assim a principal característica de um modelo T-S é a descrição das dinâmicas locais para cada implicação *Fuzzy* por um modelo linear. O modelo global do sistema é obtido pela combinação *Fuzzy* dos modelos do sistema linear (TEIXEIRA et al., 2000).

O sistema *Fuzzy* T-S é descrito por regras, que representam relações lineares locais entre entradas e saídas de um sistema, do tipo SE-ENTÃO.

A descrição linear da dinâmica do sistema a ser controlado está disponível em termos dos modelos lineares locais, representados por espaço de estados, conforme a equação (26):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}_i x(t) + \mathbf{B}_i u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}_i x(t),\end{aligned}\tag{26}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados do sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ o vetor de saída, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de estados, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de entradas, $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ a matriz de saída, com $i = 1, 2, \dots, r$. Tais informações são então fundidas com as regras *Fuzzy* projetadas, onde a i -ésima regra é expressa conforme a equação (27) (AGUIRRE, 2007).

$$\begin{aligned}\text{Regra } i: \quad & \text{SE } z_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_n(t) \text{ é } \mathcal{M}_n^i \\ & \text{ENTÃO } \begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}_i x(t) + \mathbf{B}_i u(t), \\ y(t) = \mathbf{C}_i x(t), \end{cases}\end{aligned}\tag{27}$$

sendo $i = 1, 2, \dots, r$ e $j = 1, 2, \dots, n$, em que r é o número de regras SE-ENTÃO, tem-se que $x_j(t)$ são as variáveis de estado e entradas das regras, $u_j(t)$ são as variáveis de entradas do modelo local, \mathcal{M}_j^i é o conjunto *Fuzzy* j da regra i e $z_1(t), \dots, z_p(t)$ as variáveis premissas conhecidas, que podem ser função de x ou de outros sinais externos do sistema (AGUIRRE, 2007).

Desta forma, o modelo *Fuzzy*, dado um par $(x(t), u(t))$, é calculado como a média ponderada dos modelos locais individuais de cada implicação e é dada pela equação (28).

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i(\theta_{A1}, \theta_{A2}) u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}\tag{28}$$

E saída do sistema é dada pela equação (29).

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (29)$$

onde:

$$w_i(t) = \prod_{j=1}^n \mathcal{M}_n^i(x_j(t));$$

Sendo que $\mathcal{M}_n^i(x_j(t))$ é o grau de pertinência de $x_j(t)$ em \mathcal{M}_j^i .

Uma escolha comum na literatura para a obtenção de um modelo *Fuzzy* T-S para um sistema não linear é fazer $z(t) = x(t)$, sendo $x(t)$ o vetor de estados do sistema não linear.

2.3 COMPENSAÇÃO PARALELA DISTRIBUÍDA

Utilizando os conceitos de *Fuzzy* T-S será realizada uma ponderação pelo valor de $w_i(t)$, apresentado acima, sobre os ganhos encontrados para cada um dos modelos locais, por meio de uma Compensação Paralela Distribuída.

O conceito de CPD consiste na construção de vários controladores locais para o sistema, e utilizar regras para “chavear” entre os controladores lineares, podendo-se assim operar em pontos diferentes de onde o controle foi projetado.

Esta técnica combinada com a utilização de modelos *Fuzzy* T-S permite a obtenção de um controlador não linear para o sistema, sendo que as regras *Fuzzy* irão ponderar a ação de cada um dos controles lineares locais, obtendo assim um controlador global não-linear.

Unindo os conceitos do modelo *Fuzzy* T-S e CPD, tem-se uma metodologia para desenvolver um controlador para o modelo *Fuzzy* T-S. Este processo consiste em projetar um controlador para cada regra correspondente ao modelo local, indicado anteriormente pela equação (28) na sequência o método é ilustrado pela Figura. 3 (TAKANO, 2016).

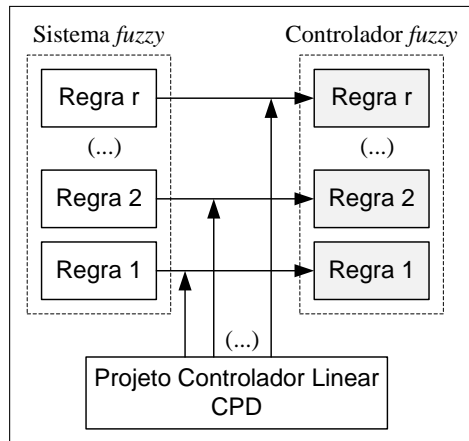


Figura 3: Esquemático do controlador baseado em compensação paralela distribuída e *Fuzzy Takagi-Sugeno*.
Fonte: Takano (2016)

2.4 CONTROLE \mathcal{H}_∞

Um dos principais objetivos no estudo de sistemas de controle é projetar controladores que atenuam os efeitos de distúrbios externos. Um dos mais populares procedimentos para obter este objetivo é o controle \mathcal{H}_∞ .

O controle \mathcal{H}_∞ tem como um de seus objetivos levar em consideração erros presentes na modelagem do sistema, sendo que o princípio básico é tratar o cenário que obtiver o pior caso. O controle \mathcal{H}_∞ deve seguir algumas características (GREEN; LIMBEER, 2012).

- Capaz de eliminar os erros na modelagem da planta e distúrbios desconhecidos;
- Representar uma extensão natural para a existência da teoria de realimentação;
- Deve apresentar uma otimização significativa;
- Deve ser capaz de resolver problemas multivariáveis.

Para utilizar o controle \mathcal{H}_∞ é necessário modelar o sistema segundo a Figura 4.

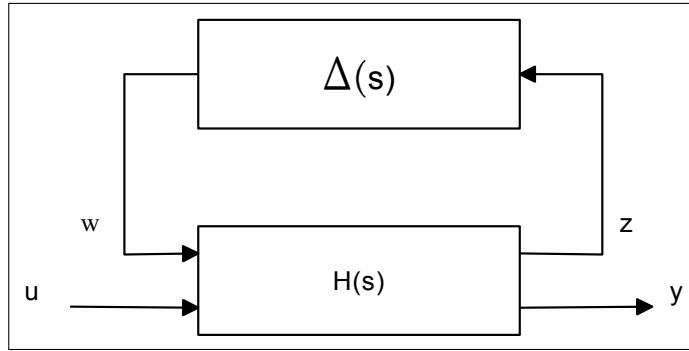


Figura 4: Modelo representado com parâmetros incertos.
Fonte: Ogata (2010)

Sendo que $\Delta(s)$ define como as incertezas se comportam de acordo com a saída de sistema e $H(s)$ definido de acordo com a equação 30.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{B}_1w(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) + \mathbf{D}_1w(t), \\ z(t) &= \mathbf{C}_zx(t) + \mathbf{D}_{zw}w(t) + \mathbf{D}_{zu}u(t).\end{aligned}\tag{30}$$

Após a obtenção deste modelo é necessário encontrar um ganho de realimentação que satisfaça as condições estabelecidas pelo controle \mathcal{H}_∞ , estas condições estão demonstradas pelas equações (31) e (32).

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i' > 0 \tag{31}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{G} + \mathbf{G}'\mathbf{A}' + \mathbf{B}\mathbf{Z} + \mathbf{Z}'\mathbf{B}' & * & * & * \\ \mathbf{P}_i - \mathbf{G} + \xi_i(\mathbf{A}\mathbf{G} + \mathbf{B}\mathbf{Z})' & -\xi_i(\mathbf{G} + \mathbf{G}') & * & * \\ \mathbf{C}_{zi}\mathbf{G} + \mathbf{D}_{zui}\mathbf{Z} & \xi_i(\mathbf{C}_{zi}\mathbf{G} + \mathbf{D}_{zui}\mathbf{Z}) & -\mu\mathbf{I}_{2 \times 2} & * \\ -\mathbf{H}_i'\mathbf{B}_i\mathbf{1}_i' & \mathbf{0} & -\mathbf{H}_i'\mathbf{D}'_{zwi} & \mathbf{I}_2 + \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_i' \end{bmatrix} < 0 \tag{32}$$

Sendo $\mu = \zeta^2$, onde minimizando ζ aumenta-se a robustez do sistema de controle (KHALIL, 2002).

Se for possível calcular matrizes \mathbf{G} , \mathbf{Z} e \mathbf{H}_i e um escalar ξ_i que satisfaçam as condições (31) e (32) é possível encontrar um ganho $\mathbf{K}_{\mathcal{H}_\infty}$ que garanta a estabilidade do sistema, sendo que $\mathbf{K}_{\mathcal{H}_\infty} = \mathbf{Z}\mathbf{G}^{-1}$.

Para realizar o rastreamento de trajetórias é adicionado um integrador ao sistema de controle, conforme apresentado na Figura 5.

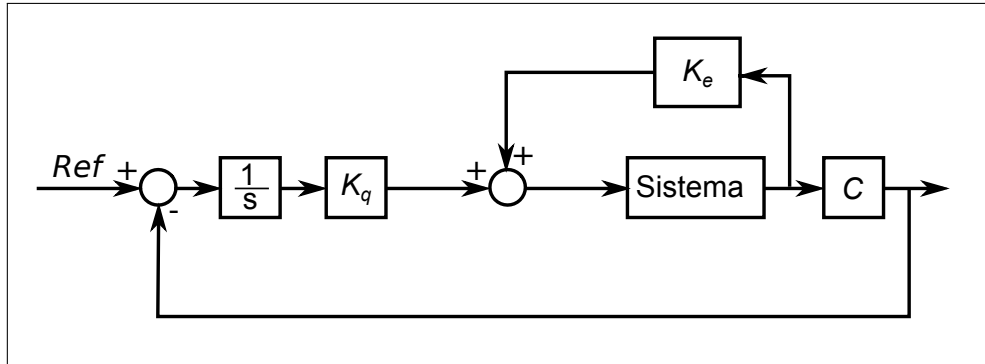


Figura 5: Diagrama de blocos representando a realimentação de estados com seguidor de referência.

Fonte: Autoria Própria

Assim o ganho $\mathbf{K}_{\mathcal{H}\infty}$ encontrado é composto pelos dois ganhos apresentados na Figura 5 da forma apresentada pela equação 33.

$$\mathbf{K}_{\mathcal{H}\infty} = [\mathbf{K}_e \quad \mathbf{K}_q] \quad (33)$$

2.5 CONTROLE *PID* COM TORQUE COMPUTADO

Devido às não linearidades apresentadas no modelo da equação (20), observa-se um aumento na complexidade do controle para rastreamento de trajetórias, uma vez que um controlador *PID* convencional resultaria em um bom controle somente para a região onde foi sintonizado. Uma solução para este problema é baseada na linearização por realimentação, conhecido na literatura de robótica como controle com torque computado (CTC), (AGUIRRE, 2007).

Para esta técnica é utilizado o Modelo Dinâmico Inverso (MDI) do manipulador, dado pela equação (20), aplicando o torque no Modelo Dinâmico Direto (MDD), o qual representa a dinâmica do manipulador, tem-se a anulação das não linearidades, resultando em modelo linear e desacoplado para junta equivalente a um integrador duplo. Com isto é possível aplicar técnicas de controle linear, como por exemplo o *PID*, para controlar a posição. A Figura 6 apresenta o esquemático do CTC com *PID* aplicado no manipulador.

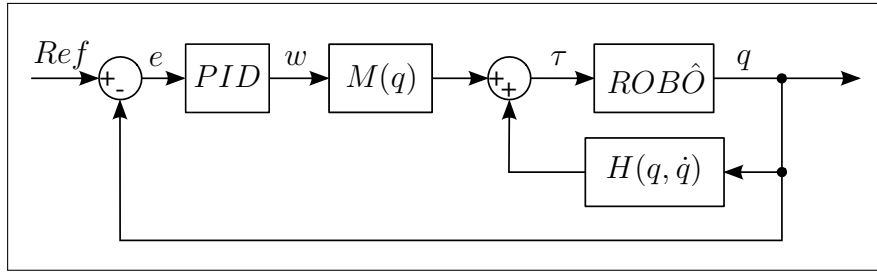


Figura 6: Esquemático da malha de controle com *PID* com torque computado.
Fonte: Autoria Própria

Em que $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, para o caso estudado, em que a gravidade é perpendicular ao plano de trabalho do manipulador.

Sendo a nova entrada de controle do manipulador igual a τ , sua relação com a ação de controle sem o torque computado é expressa pela equação (34).

$$\tau = \mathbf{M}_A \cdot w + \mathbf{C}_A \cdot \dot{\theta}_A + \mathbf{f}_A \quad (34)$$

Em que

$$w = K_p e + K_i \int_0^\infty e dt + K_d \dot{e}$$

$$e = Ref - q$$

Para sintonia do controlador *PID* foi utilizada a equação característica do sistema em malha fechada. Assim tem-se a equação (35).

$$s^3 + K_d s^2 + K_p s + K_i = s^3 + 3\xi \omega_n s^2 + 3\xi \omega_n^2 s + \omega_n^3 \quad (35)$$

Considerando $\xi = 1$ para se obter um sistema superamortecido tem-se que os ganhos do *PID* serão encontrados por meio da equação (36) dependentes somente de ω_n .

$$\begin{aligned} K_p &= 3 \cdot \omega_n^2 \\ K_i &= \omega_n^3 \\ K_d &= 3 \cdot \omega_n \end{aligned} \quad (36)$$

Uma desvantagem desta técnica é o fato de que é preciso conhecer muito bem o modelo do seu sistema, o que nem sempre é possível devido a incertezas presentes na modelagem do sistema, sendo assim neste trabalho é proposto a utilização de controladores locais robustificados.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Este capítulo apresenta os passos a serem seguidos para o desenvolvimento deste trabalho. Portanto, as seguintes etapas são propostas na metodologia: Simulação do Modelo dinâmico do manipulador para posteriormente desenvolver o Projeto do Controlador e finalmente realizar a validação dos resultados.

3.1 SIMULAÇÃO DO MODELO

Como parte da validação, é realizada uma simulação computacional do MDD apresentado utilizando o software Matlab/Simulink. Esta simulação é importante para o projeto de controle do manipulador e posteriormente simular o comportamento do robô mediante as ações de controle (CRAIG, 2005).

O principal objetivo dessa etapa é integrar a equação dinâmica 20 e considerando a entrada do sistema como sendo τ e os sinais de saída como sendo θ e $\dot{\theta}$.

O diagrama apresentado na Figura 7, representa como será implementada a simulação.

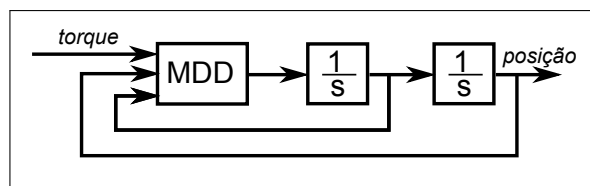


Figura 7: Diagrama de blocos representando a simulação do modelo dinâmico no software Matlab/Simulink.

Fonte: Autoria Própria

3.2 PROJETO DO CONTROLADOR

O projeto do controlador será realizado com base no modelo dinâmico obtido e atendendo algumas restrições de projeto, como por exemplo torque máximo utilizado para a realização das tarefas e faixas de variações para alguns parâmetros do manipulador robótico, onde o con-

trole ainda ira conseguir atuar de maneira eficiente. Para isto será utiliza a CPD juntamente com os modelos *Fuzzy* T-S.

Para o sistema de controle CPD baseado em modelos *Fuzzy* T-S, as representações em espaço de estados das dinâmicas locais do sistema são apresentadas nas equações (37), (38), (39) e (40), os quais foram obtidos por meio da equação (22), escolhendo os pontos apresentados na Figura 8, estes foram escolhidos por serem simétricos no espaço de trabalho do manipulador e gerarem um maior abrangência do espaço de trabalho total. A escolha simétrica dos pontos se deve ao fato de que o manipulador abordado é simétrico.

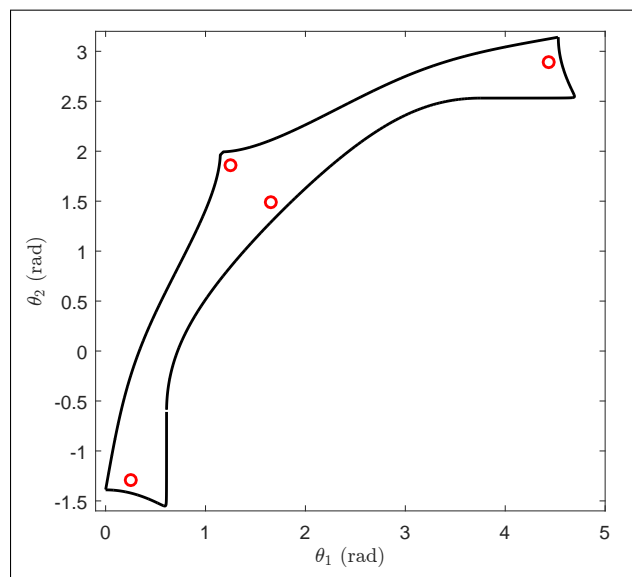


Figura 8: Limites do espaço de trabalho das juntas do manipulador destacando os pontos escolhidos.
Fonte: Autoria Própria

Regra 1 : SE $x_1(t) = 4.4311$ rad E $x_2(t) = 2.8914$ rad

$$\text{ENTÃO} \begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}_1 u(t), \\ y(t) = \mathbf{C}x(t), \end{cases}$$

ONDE:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 10.8481 & 0.1984 \\ 0.1984 & 23.8928 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Regra 2 : SE $x_1(t) = 1.2479$ rad E $x_2(t) = 1.8631$ rad

$$\text{ENTÃO} \begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}_2u(t), \\ y(t) = \mathbf{C}x(t), \end{cases}$$

ONDE:

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 11.2974 & -0.5173 \\ -0.5173 & 24.0237 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Regra 3 : SE $x_1(t) = 0.2506$ rad E $x_2(t) = -1.2860$ rad

$$\text{ENTÃO} \begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}_3u(t), \\ y(t) = \mathbf{C}x(t), \end{cases}$$

ONDE:

$$\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 11.1865 & -0.2136 \\ -0.2136 & 23.5530 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Regra 4 : SE $x_1(t) = 1.6574$ rad E $x_2(t) = 1.4948$ rad

$$\text{ENTÃO} \begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}_4u(t), \\ y(t) = \mathbf{C}x(t), \end{cases}$$

ONDE:

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 10.7906 & -0.1325 \\ -0.1325 & 23.4886 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Os efeitos dos atritos e da velocidade são considerados como dinâmicas não modeladas do sistema e serão tratados por técnicas de controle robusto para encontrar os ganhos de cada controlador local.

As funções de pertinência para cada modelo local são apresentadas nas Figura 9 e 10, sendo dependentes de θ_1 e θ_2 respectivamente, nota-se que as regras são simétricas em relação a outra, isso devido ao fato da escolha simétrica dos pontos.

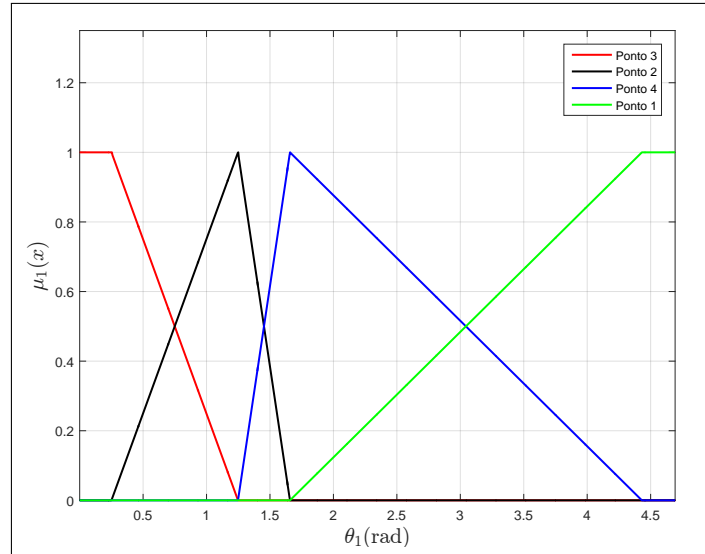


Figura 9: Funções de pertinência do sistema fuzzy para θ_1 .
Fonte: Autorial Própria

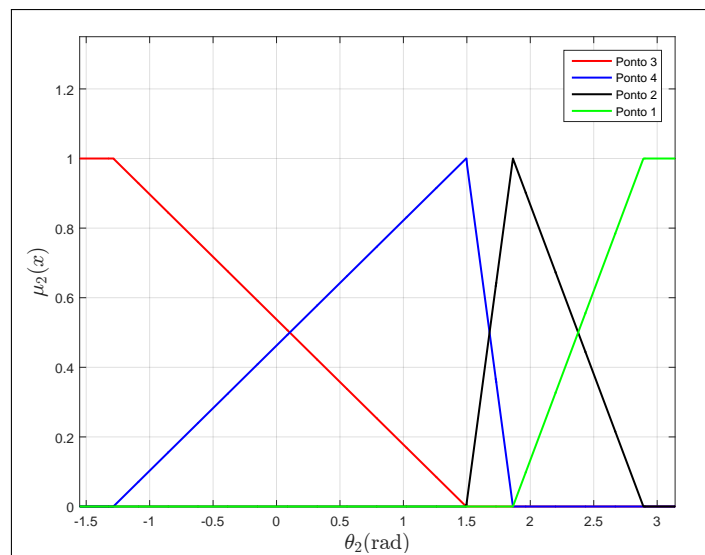


Figura 10: Funções de pertinência do sistema fuzzy para θ_2 .
Fonte: Autorial Própria

Tais funções serão responsáveis por ponderar cada um dos controladores obtidos para os modelos locais, para obter o controlador global para o sistema, esta ponderação será realizada de acordo com a equação (41).

$$\mathbf{K} = \frac{\sum_{i=1}^4 w_i(x(t)) \mathbf{K}_i}{\sum_{i=1}^4 w_i(x(t))} \quad (41)$$

Onde, \mathbf{K}_i é o controlador local da regra i , tal que este satisfaça as equações (31) e (32),

encontrados pelo solver SeDuMi, dados pelas matrizes apresentadas na equação 42.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_1 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0.2691 & 0.0018 & -0.0080 & 0.0001 & 2.9513 & -0.0150 \\ 0.0021 & -0.1222 & 0.0001 & -0.0036 & -0.0210 & 1.3403 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_2 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0.2527 & -0.0047 & -0.0076 & -0.0001 & 2.7676 & 0.0354 \\ -0.0050 & -0.1194 & -0.0001 & -0.0036 & 0.0485 & 1.3208 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_3 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0.2610 & -0.0028 & -0.0078 & -0.0001 & 2.8625 & 0.0349 \\ -0.0025 & -0.1240 & -0.0001 & -0.0037 & 0.0294 & 1.3600 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_4 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0.2642 & -0.0008 & -0.0079 & -0.0000 & 2.8949 & -0.0071 \\ -0.0011 & -0.1220 & -0.0000 & -0.0037 & 0.0063 & 1.3502 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{42}$$

Para a técnica de CTC, considerando $\omega_n = 10rad/s$, para que ambos os controladores possuem um valor máximo de torque semelhante, e substituindo na equação 36 é possível encontrar os ganhos do controlador com sendo $K_p = 300$, $K_i = 1000$ e $K_d = 30$.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 TRAJETÓRIAS GERADAS

Foram projetados essencialmente duas trajetórias diferentes, a serem rastreadas pelo efetuador final do manipulador, ponto P , possibilitando assim a geração de retas e circunferências no espaço de trabalho do manipulador. Na Figura 11 é apresentado um exemplo de uma trajetória retilínea, onde o ponto de partida, o ponto de chegada e o tempo para a execução da trajetória são iguais a $(-0, 1; 0, 35)m$, $(0, 1; 0, 35)m$ e $3s$, respectivamente.

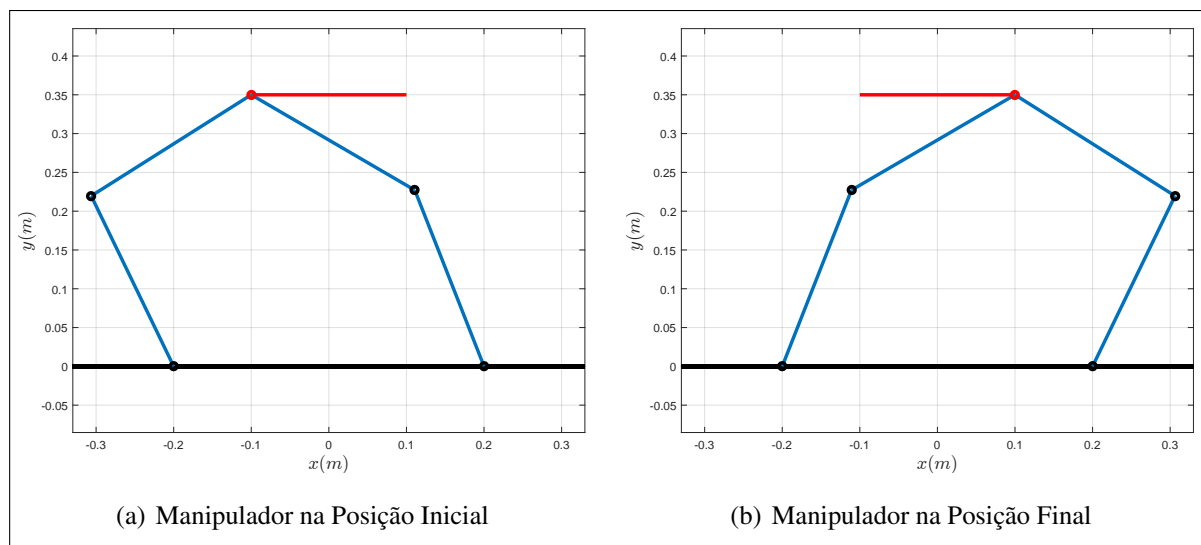


Figura 11: Exemplo de trajetória retilínea computada pelo gerador.
Fonte: Autoria Própria

As Figuras 12, 13 e 14 apresentam as posições, velocidade e acelerações angulares das juntas ativas, nota-se suavidade nos gráficos, o que é de extrema importância, uma vez que a ocorrência de uma descontinuidade pode vir a danificar o mecanismo.

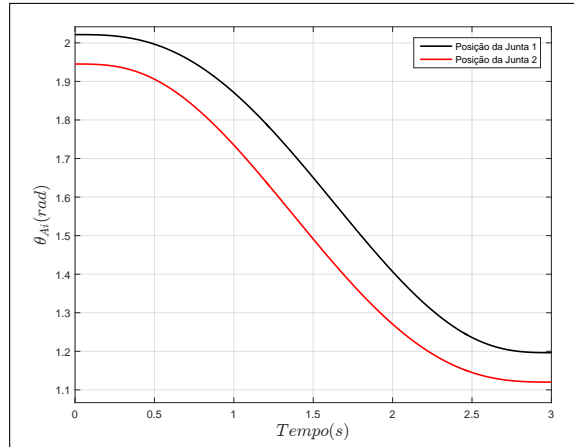


Figura 12: Posição angular das juntas para a trajetória retilínea.
Fonte: Autoria Própria

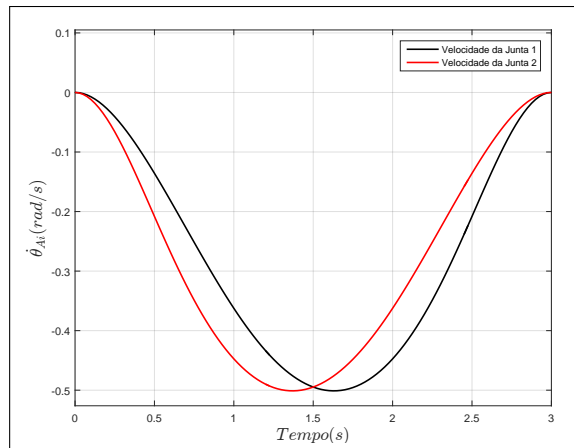


Figura 13: Velocidade angular das juntas para a trajetória retilínea.
Fonte: Autoria Própria

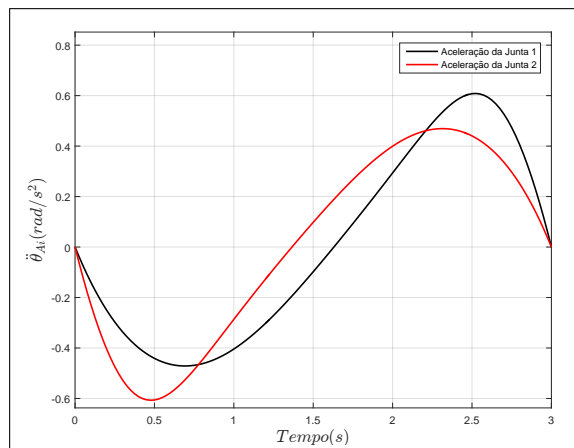


Figura 14: Aceleração angular das juntas para a trajetória retilínea.
Fonte: Autoria Própria

Enquanto na Figura 15 é mostrada uma trajetória circular onde tem-se como ponto inicial e final iguais a $(0,075; 0,35)m$, raio da circunferência igual a $0,075m$ e tempo para a execução da trajetória de $3s$.

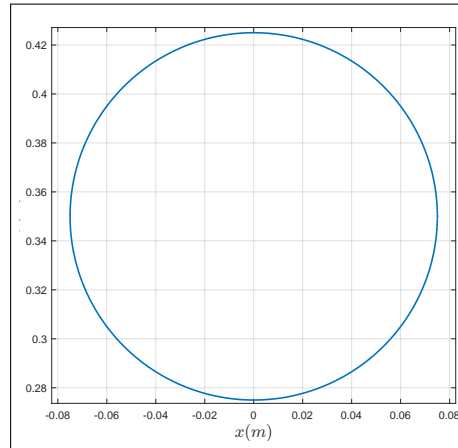


Figura 15: Exemplo de trajetória circular computada pelo gerador.
Fonte: Autoria Própria

As posições, velocidade e acelerações angulares das juntas ativas para o exemplo de trajetória circular são apresentadas nas Figuras 16, 17 e 18, nota-se assim como no caso da trajetória retilínea a suavidade nos gráficos.

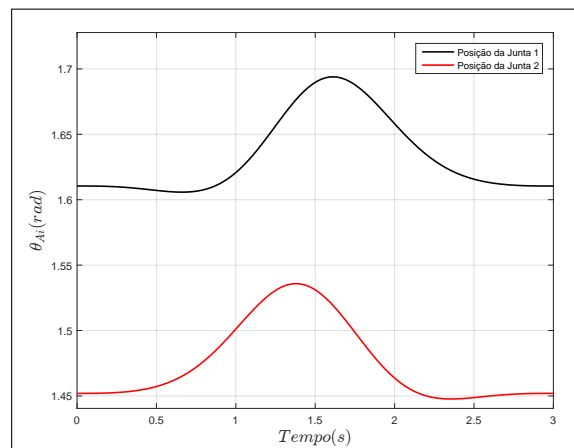


Figura 16: Posição angular das juntas para a trajetória circular.
Fonte: Autoria Própria

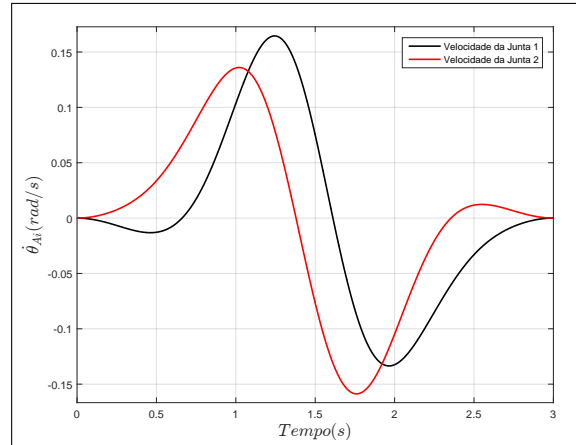


Figura 17: Velocidade angular das juntas para a trajetória circular.
Fonte: Autoria Própria

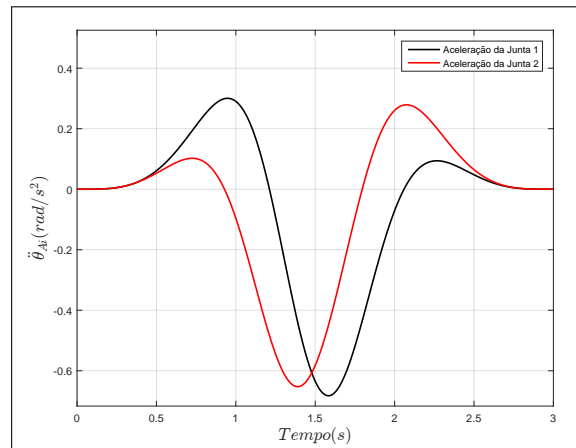


Figura 18: Aceleração angular das juntas para a trajetória circular.
Fonte: Autoria Própria

4.2 COMPARAÇÃO DO DESEMPENHO DOS CONTROLADORES

Nesta seção serão apresentadas duas análises referentes aos controladores projetados, sendo a primeira referente ao desempenho de ambos no rastreamento de trajetórias e a segunda análise será referente a robustez do controle quando sujeito a ações de forças externas ao sistema.

4.2.1 RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIAS

As Figuras (19) (20), apresenta uma comparação entre os erro de posição das juntas em relação às trajetórias, retilínea e circular respectivamente, para cada um dos controladores, nota-se que o erro foi muito pequeno ficando na escala de $10^{-3} rad$, para ambos os controladores.

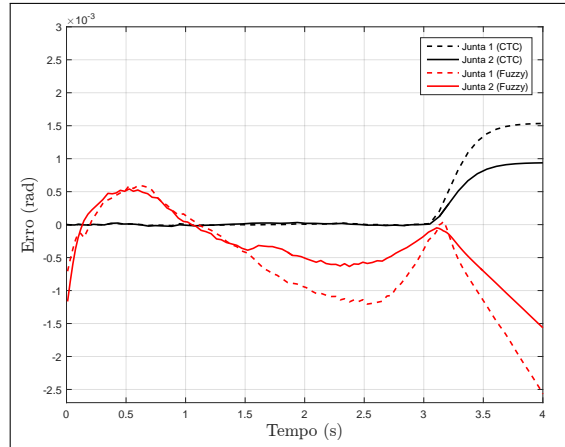


Figura 19: Erro de posição das juntas do manipulador com relação a trajetória retilínea para cada uma das técnicas de controle utilizadas.

Fonte: Autoria Própria

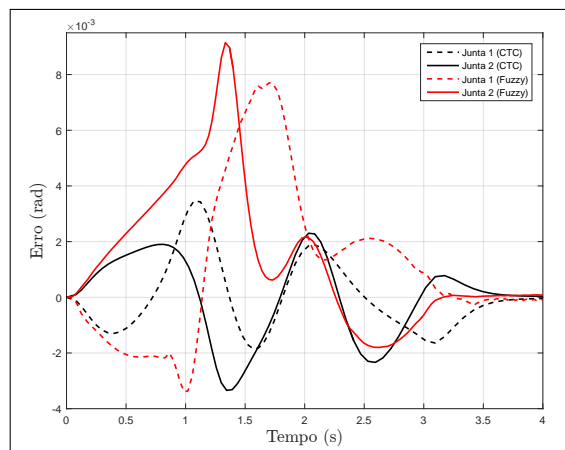


Figura 20: Erro de posição das juntas do manipulador com relação a trajetória circular para cada uma das técnicas de controle utilizadas.

Fonte: Autoria Própria

Também foi analisado o erro do posicionamento referente ao efetuador final no plano cartesiano, para assim poder constatar a eficiência dos controladores no rastreamento de trajetórias no espaço de trabalho do manipulador. As Figuras 21 e 22, apresentam os erros para a trajetória retilínea relacionados aos eixos coordenados x e y , respectivamente. E as Figuras 23 e 24, apresentam os erros para a trajetória circular relacionados aos eixos coordenados x e y , respectivamente.

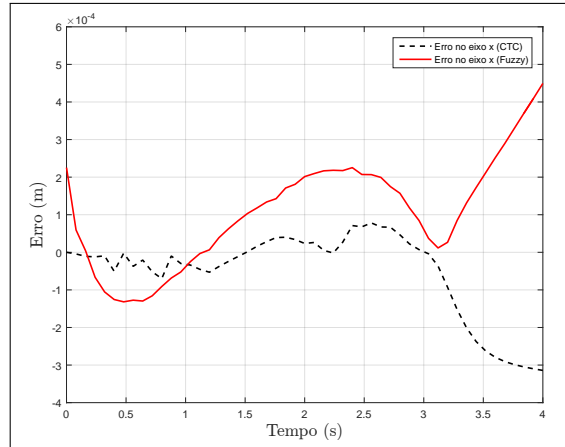


Figura 21: Erro de posicionamento, referente ao rastreamento da trajetória retilínea, do efetuador final no eixo coordenado x para as duas técnicas de controle.

Fonte: Autoria Própria

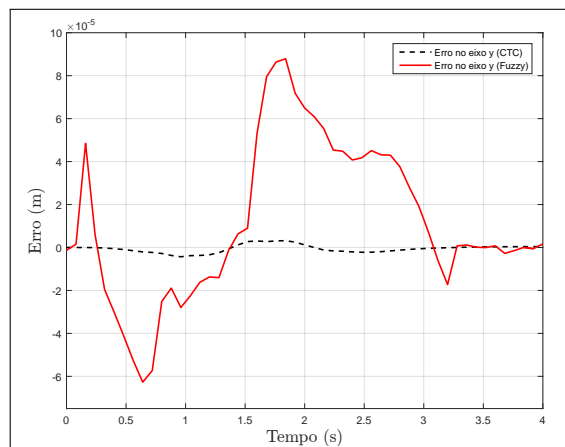


Figura 22: Erro de posicionamento, referente ao rastreamento da trajetória retilínea, do efetuador final no eixo coordenado y para as duas técnicas de controle.

Fonte: Autoria Própria

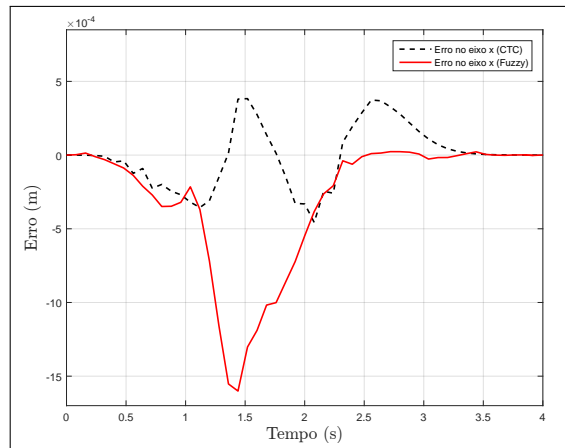


Figura 23: Erro de posicionamento, referente ao rastreamento da trajetória circular, do efetuador final no eixo coordenado x para as duas técnicas de controle.

Fonte: Autoria Própria

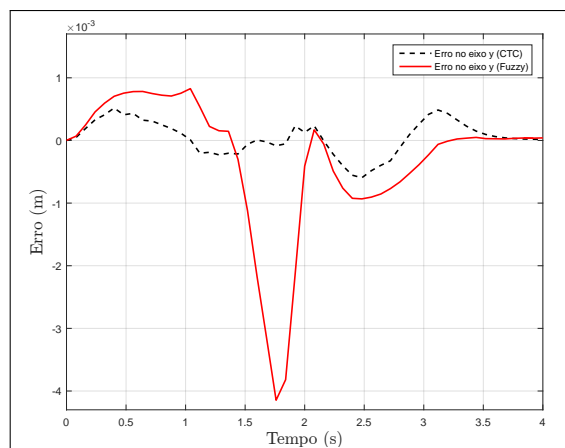


Figura 24: Erro de posicionamento, referente ao rastreamento da trajetória circular, do efetuador final no eixo coordenado y para as duas técnicas de controle.

Fonte: Autoria Própria

Analisando as Figuras 21, 22, 23 e 24, nota-se novamente a eficiência dos controladores em seguir uma trajetória, obtendo um erro na escala de *mm*, como era esperado uma vez que o erro de rastreamento no espaço das juntas influencia diretamente no posicionamento do efetuador final.

Nas Figuras 25 e 26 pode-se observar o torque necessário para o rastreamento das trajetórias, onde é possível notar, que assim como era desejado, ambos os controles apresentam um valor máximo de torque bem próximos, fator importante para se realizar a comparação entre as duas técnicas, garantindo que não seja utilizada uma energia maior para a realização do controle.

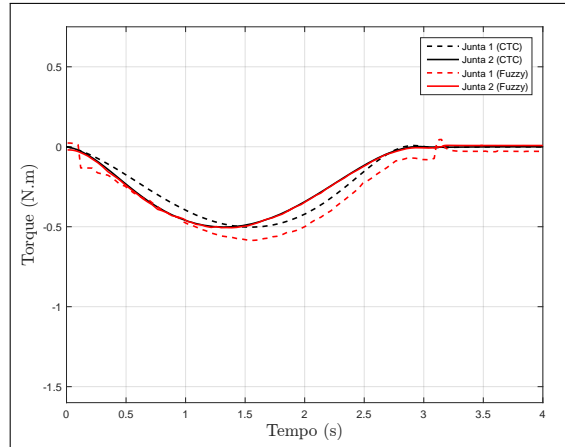


Figura 25: Torque utilizado para o rastreamento da trajetória retilínea para as duas técnicas de controle utilizadas.

Fonte: Aatoria Própria

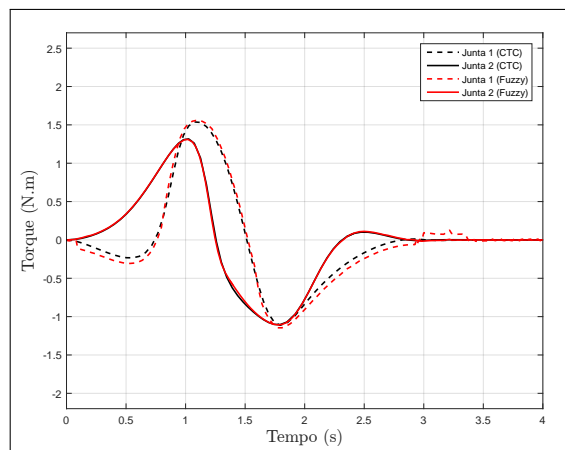


Figura 26: Torque utilizado para o rastreamento da trajetória circular para as duas técnicas de controle utilizadas.

Fonte: Aatoria Própria

As Figuras 27 e 28, apresentam a trajetória retilínea desejada e a realizada com o CTC e com o controle *Fuzzy* respectivamente. Com isso é possível verificar o erro referente ao posicionamento do efetuador final deste manipulador no espaço cartesiano, sendo mais uma vez possível notar a eficiência dos controladores.

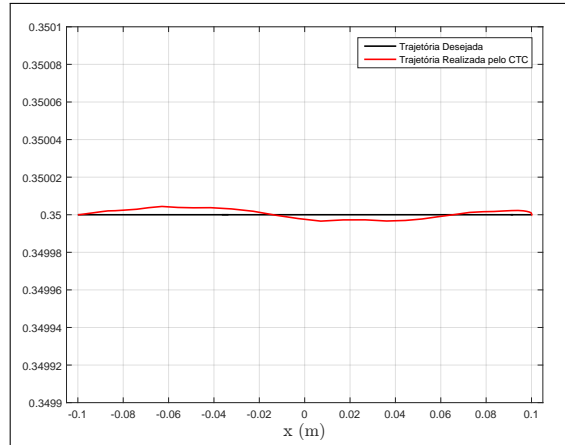


Figura 27: Comparação da trajetória retilínea desejada com a realizada pelo CTC.
Fonte: Autoria Própria

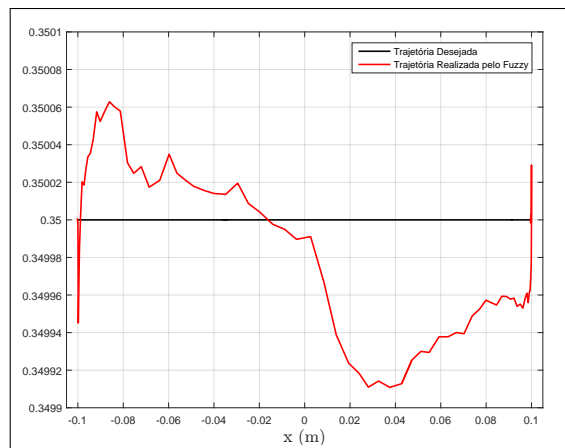


Figura 28: Comparação da trajetória retilínea desejada com a realizada pelo controle *Fuzzy*.
Fonte: Autoria Própria

As Figuras 29 e 30, apresentam a trajetória circular desejada e a realizada com o CTC e com o controle *Fuzzy* respectivamente. A trajetória realizada por cada um dos controladores e verifica-se que para o início e para o final da trajetória o controle *Fuzzy* obteve um melhor desempenho quando comparado com outros trechos da trajetória, isso devido ao fato dele trabalhar melhor em baixas velocidades.

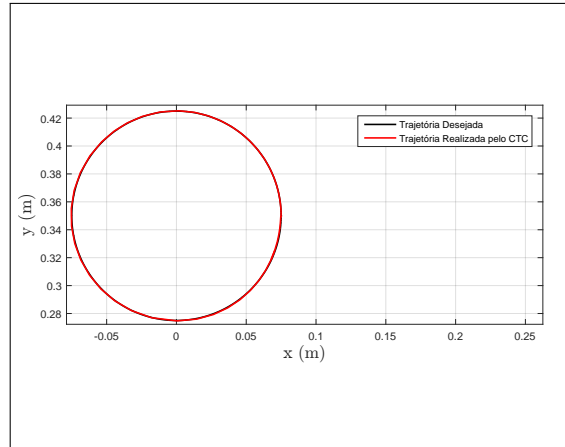


Figura 29: Comparação da trajetória circular desejada com a realizada pelo CTC.
Fonte: Autoria Própria

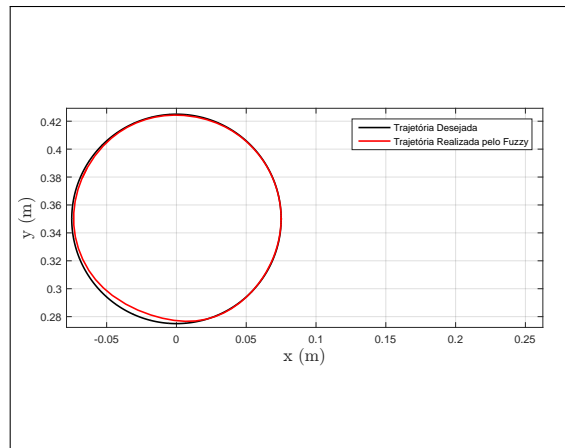


Figura 30: Comparação da trajetória circular desejada com a realizada pelo controle Fuzzy.
Fonte: Autoria Própria

4.2.2 ROBUSTEZ DO CONTROLE

Os testes de robustez dos controladores foram realizados aplicando-se uma força externa ao sistema, com o intuito de que este volte a posição de referência. O ponto de referência escolhido foi $P = (0; 0,4)m$, sendo o mesmo para os dois controladores. A força externa aplicada em cada uma das juntas ativas foi um degrau com valor $\mathbf{f}_{\text{ext}} = 1 \text{ N.m}$ no instante de tempo $t = 1s$.

A Figura 31 apresenta o erro no posicionamento das juntas do manipulador para a referência fixa e aplicação da força \mathbf{f}_{ext} nas juntas

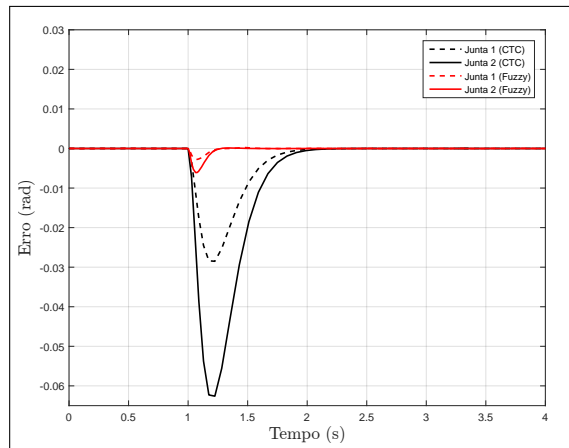


Figura 31: Erro de posicionamento de cada uma das juntas, quando sujeitas a uma força externa em 1s, para as duas técnicas de controle.

Fonte: Autoria Própria

É possível notar na Figura 31 que o controlador *Fuzzy* apresentou maior robustez à força externa aplicada, quando comparado com a técnica de CTC, apresentando um menor pico no valor do erro. o tempo de acomodação do sistema foi de 0,25s para o controle *Fuzzy*, enquanto o CTC levou cerca de 1s.

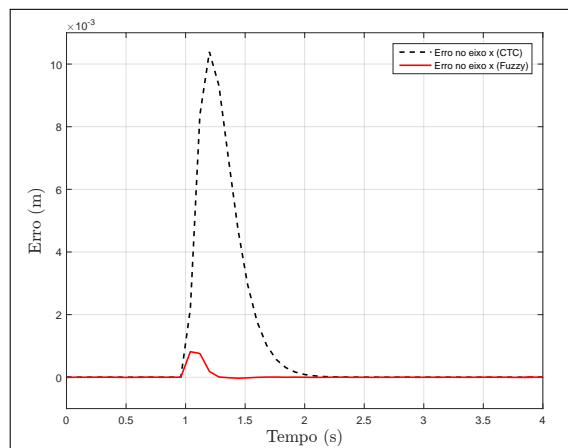


Figura 32: Erro de posicionamento do efetuador final no eixo coordenado x, com aplicação de uma força externa em 1s, para as duas técnicas de controle.

Fonte: Autoria Própria

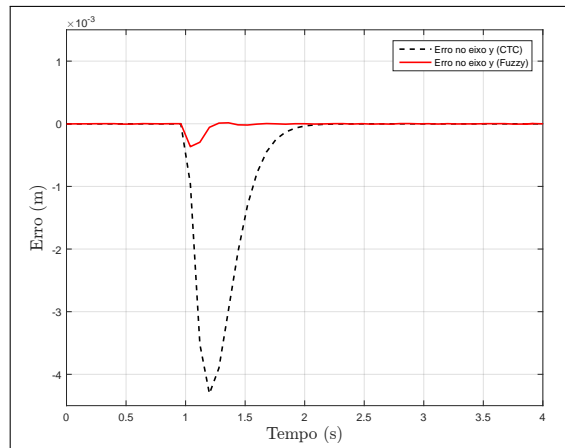


Figura 33: Erro de posicionamento do efetuador final no eixo coordenado y, com aplicação de uma força externa em 1s, para as duas técnicas de controle.

Fonte: Autorial Própria

As Figuras 32 e 33 apresentam o erro no posicionamento referente ao efetuador final do manipulador nos eixos coordenados x e y, respectivamente, quando sujeito à uma força externa em cada uma das juntas. Conforme era esperado o erro de posicionamento no plano de trabalho do manipulador apresentou o mesmo comportamento do erro de posicionamento das juntas.

Na Figura 34 é possível observar o torque utilizado por cada uma das técnicas de controle, sendo possível notar novamente que o valor máximo do torque utilizado pelo controle *Fuzzy* é aproximadamente o mesmo do usado pelo CTC. Além disso, observa-se que o controle do *Fuzzy* possui uma ação mais rápida, justificando assim o menor pico apresentado nos gráficos de erro 31, 32 e 33.

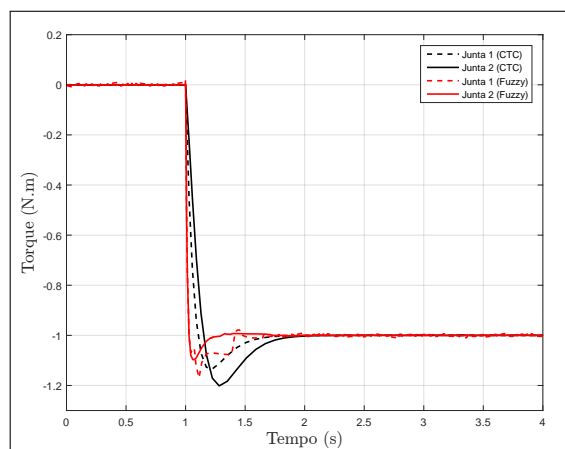


Figura 34: Torque utilizado para um ponto fixo, com aplicação de uma força externa em 1s, para as duas técnicas de controle utilizadas.

Fonte: Autorial Própria

5 CONCLUSÃO

De acordo com os resultados apresentados, conclui-se que o controlador *Fuzzy* possui vantagens e desvantagens em relação ao CTC.

Outra vantagem do controle *Fuzzy* foi apresentado no teste de robustez do controle, o qual apresentou menor tempo para retornar à posição desejada após a aplicação de uma força externa.

Com relação ao rastreamento de trajetórias o CTC obteve melhor desempenho, porém o controle *Fuzzy* também se mostrou eficiente, não apresentando erros muito elevados e utilizando um torque menor para realizar a trajetória desejada.

A abordagem apresentada neste trabalho se observou que o controle funciona melhor para velocidades mais baixas. Sendo assim para trabalhos futuros tem-se a proposta de se obter os modelos locais considerando velocidades diferentes, gerando assim matrizes A distintas para o espaço de estados, adicionalmente pretende-se testar os controladores quanto ao seu custo computacional e espera-se que o controle baseado em *Fuzzy* apresente um menor custo computacional quando implementado, uma vez que o CTC necessita realizar inúmeras vezes o cálculo do modelo inverso, fazendo com que possivelmente necessite de um processamento mais elevado.

REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. **Enciclopédia de automática: Controle e automação**. [S.l.]: Blucher, 2007. ISBN 9788521204091.
- AYALA VIVIANE DAL MOLIN DE SOUZA, L. d. S. C. H. V. H. Otimização multiobjetivo usando enxame de partículas de controladores multivariáveis para uma aplicação em robótica. **Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente**, 2009.
- CRAIG, J. **Introduction to Robotics: Mechanics and Control**. [S.l.]: Pearson/Prentice Hall, 2005. (Addison-Wesley series in electrical and computer engineering: control engineering). ISBN 9780201543612.
- GREEN, M.; LIMEBEER, D. J. **Linear robust control**. 1^a.ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Courier Corporation, 2012.
- KHALIL, H. k. **Nonlinear Systems**. 3^a.ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- LARA-MOLINA, F.; TAKANO, K.; KOROISHI, E. Set-point regulation of a robot manipulator with flexible joints using fuzzy control. In: IEEE. **2015 12th Latin American Robotics Symposium and 2015 3rd Brazilian Symposium on Robotics (LARS-SBR)**. [S.l.], 2015. p. 103–108.
- LARA-MOLINA, F. A. et al. Robust generalized predictive control of the orthoglide robot. **Industrial Robot: An International Journal**, Emerald Group Publishing Limited, v. 41, n. 3, p. 275–285, 2014.
- LE, T. D. Chattering-free neuro-sliding mode control of 2-dof planar parallel manipulators. **International Journal of Advanced Robotic Systems**, 2012.
- LIU, X.-J.; WANG, J.; ZHENG, H.-J. Optimum design of the 5r symmetrical parallel manipulator with a surrounded and good-condition workspace. **Robotics and Autonomous Systems**, Elsevier B.V., v. 54, p. 221–233, 2005.
- MOLINA, F. A. L. et al. Simulação e implementação experimental de um controlador preditivo generalizado para um robô orthoglide baseado na modelagem dinâmica. Campinas, SP:[, 2012.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5^a.ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall, 2010.
- PACCOT, F.; ANDREFF, N.; MARTINET, P. A review on the dynamic control of parallel kinematic machines: Theory and experiments. **The International Journal of Robotics Research**, SAGE Publications, v. 28, n. 3, p. 395–416, 2009.
- REIS, G. L.; SOUZA, L. F. F.; CARVALHO, F. C. T. Identificação e controle fuzzy de posição de um manipulador robótico com dois graus de liberdade. **Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente**, 2013.

RESENDE, C. Z.; ESPINOSA, F.; SARCINELLI-FILHO, M. Controlador de seguimento de trajetória para robôs móveis com ganhos dinâmicos. **Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente**, 2011.

TAKANO, K. A. **CONTROLADOR FUZZY TAKAGI-SUGENO APLICADO A UM MANIPULADOR COM JUNTAS FLEXÍVEIS**. 76 p. Tese (Doutorado), UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ, Cornélio Procópio, Paraná, 2016.

TEIXEIRA, M. C. M.; PIETROBOM, H. C.; ASSUNÇÃO, E. Novos resultados sobre a estabilidade e controle de sistemas não-lineares utilizando modelos fuzzy e lmi. **Revista Controle & Automação**, v. 11, n. 01, p. 37–48, 2000.

TERRA MARCEL BERGERMAN, R. T. A. A. G. S. M. H. Controle tolerante a falhas de robôs manipuladores. **SBA Controle & Automação Vol. 12 no. 02**, 2001.