UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ALAN GOMES DE OLIVEIRA

FUNÇÕES E GEOMETRIA: O USO DE AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA COMO SUBSÍDIO PARA A CARACTERIZAÇÃO DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2013

ALAN GOMES DE OLIVEIRA

FUNÇÕES E GEOMETRIA: O USO DE AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA COMO SUBSÍDIO PARA A CARACTERIZAÇÃO DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientador: Fabio Antonio Dorini, Dr.

CURITIBA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

O48 Oliveira, Alan Gomes de
Funções e geometria: o uso de ambiente de geometria dinâmica como subsídio para a caracterização das funções quadráticas / Alan Gomes de Oliveira. – 2013.
35 f. : il. ; 30 cm

Orientador: Fabio Antonio Dorini.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Curitiba, 2013.
Bibliografia: f. 33-34.

1. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. 2. Geometria. 3. Funções (Matemática). 4. Matemática – Ensino auxiliado por computador. 5. Tecnologia educacional. 6. Professores de ensino médio – Formação. 7. Matemática – Dissertações. I. Dorini, Fabio Antonio, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba

Título da Dissertação No. 001

"Funções e Geometria: o uso de ambiente de geometria dinâmica como subsídio para caracterização das funções quadráticas"

por

Alan Gomes de Oliveira

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h do dia 15 de março de 2013. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Fabio Antonio Dorini, Dr.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Profa. Deise Maria Bertholdi Costa, Dra.
(UFPR)

Prof. Rubens Robles Ortega Junior, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Luiz Claudio Pereira, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

Aos meus filhos Bruno, Lucas e Fernando certo de estar perpetuando em suas vidas a minha convicção de que o conhecimento é um dos pilares do crescimento do ser humano.

AGRADECIMENTOS

- À Deus pelo fortalecimento da minha fé na busca diária por ações de retidão.
- A minha esposa Andréa e aos meus filhos Bruno, Lucas e Fernando que enquanto família me suportaram em todos os momentos dessa jornada.
- Aos meus pais Adamor e Rosimar e aos meus irmãos Alexandre, André e Andréa que reconhecendo a determinação do filho caçula sempre me incentivaram a continuar e não esmorecer diante das dificuldades.
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.
- Ao Colégio Militar de Curitiba que, licenciando-me de minhas atividades, tornou possível a realização desse trabalho. Em especial aos professores Laércio e Márcio pelas valiosas sugestões.
- Ao meu orientador professor Dr. Fábio Antonio Dorini pela oportunidade que me concedeu de vivenciar um relacionamento pautado em atributos de uma pessoa nobre de alma.
- Aos professores do PROFMAT pelos ensinamentos.
- Aos amigos da Turma 2011, em especial Robson e Jairo, que dividiram comigo as alegrias e as angústias.

RESUMO

OLIVEIRA, Alan Gomes de. FUNÇÕES E GEOMETRIA: O USO DE AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA COMO SUBSÍDIO PARA A CARACTERIZAÇÃO DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS. 35 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

Este trabalho apresenta uma proposta de abordagem que permite ao professor do ensino médio tratar do conceito de função quadrática. Propõe a construção do conhecimento através de atividades desenvolvidas em ambiente de geometria dinâmica (GeoGebra), explorando as ideias intuitivas de variação e dependência construídas entre objetos geométricos sem a mediação das representações algébricas e gráficas, comumente empregadas na sala de aula do ensino médio.

Palavras-chave: Ensino de matemática, Função quadrática, GeoGebra.

ABSTRACT

OLIVEIRA, Alan Gomes de. FUNCTIONS AND GEOMETRY: THE USE OF DYNAMIC GEOMETRY AMBIENT AS SUBSIDY FOR CHARACTERIZATION OF QUADRATIC FUNCTIONS. 35 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

This work presents a proposal of approach which allows the school teachers deal with the concept of quadratic function. It proposes the construction of knowledge through activities in dynamic geometry environment (GeoGebra), exploring the intuitive ideas of variation and dependence built between geometric objects without the mediation of algebraic and graphical representations, commonly used in the classroom of high school.

Keywords: Teaching math, Quadratic function, GeoGebra

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino de matemática praticado atualmente sob a perspectiva da formalização matemática tem-se constituído obstáculo de difícil transposição para assimilação de conteúdos. Essa prática pedagógica constitui-se em uma falha grave no ensino, pois atrapalha o amadurecimento do aluno já que inibe o desenvolvimento do principal alicerce do raciocínio matemático: as ideias. Essa é a prática mais comum realizada pelos professores do ensino médio que, apoiados em livros didáticos e nas experiências vividas em sua formação, estabelecem uma matemática alijada completamente do contexto do aluno enquanto indivíduo dotado de conhecimentos pré-concebidos, níveis de cognição e imaginação.

1.1 MOTIVAÇÃO

Ensinar matemática não é tarefa fácil. Em particular no ensino médio (LIMA, 2003). Sabe-se que os conceitos matemáticos básicos como conjuntos numéricos, introdução à álgebra, construção de gráficos, ideias intuitivas de probabilidades, introdução ao estudo das funções, figuras e formas geométricas, com os quais os alunos tiveram contato no ensino fundamental, são retomados e revistos no ensino médio no sentido de aprofundar tais conhecimentos, exigindo-se maior raciocínio na busca por soluções a problemas que apresentam maior nível de complexidade. Nesse sentido, o ensino de matemática para o aluno do ensino médio deve gerar estruturas de raciocínio que lhe permita generalizar, abstrair, analisar e interpretar, fazendo uso de um modelo instrumental que lhe proporcione correlacionar ideias matemáticas com outras áreas de conhecimento específico, vislumbrando aplicá-las em situações cotidianas. Não obstante, deve ter um caráter formativo que auxilie na construção do pensamento matemático, do raciocínio lógico-dedutivo.

Desta forma, inegavelmente, a comunicação em linguagem matemática aparece como fator preponderante. Aqui, como em quase tudo na vida, o bom senso deve prevalecer. Muitos alunos não gostam de Matemática (e até mesmo julgam-se incapazes de aprendê-la) porque são submetidos a uma comunicação excessivamente simbólica, carregada de manipulações algébricas e fórmulas. Nesse contexto, o professor do ensino médio vive diariamente a busca pela resposta à seguinte pergunta: como trabalhar os conteúdos matemáticos de tal forma que o processo de aprendizagem valorize as aplicações e interpretações relevantes daqueles tópicos nas outras ciências e no dia-a-dia em que vive o jovem de hoje e, ao mesmo tempo, estabeleça o hábito e o gosto pelo raciocínio lógico-dedutivo?

O entrave se dá na medida em que o professor se permite ter como base de orientação para seu trabalho os livros-texto disponíveis no mercado e adotados pelas escolas onde vai lecionar. Nessa situação o livro didático é o instrumento principal utilizado pelo professor como base para a fundamentação da sua prática pedagógica. É nele que estão as definições, os exemplos, as observações, as demonstrações e a linguagem a ser usada na comunicação com seus alunos. Daí decorre a dificuldade de se trabalhar os conteúdos de maneira que se agregue um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático pois, de forma geral, nos livros didáticos brasileiros, predominam fórmulas e aspectos manipulativos que são apresentadas de modo formal, com poucas aplicações à realidade e com um número considerável de exercícios pouco atraentes, sem dar a ideia de por que se estuda matemática.

Visando um aprendizado mais significativo, isto é, que valorize os vários recursos do pensamento matemático como a imaginação, a intuição, o raciocínio indutivo e lógico-dedutivo, a validação matemática e a validação empírica, subsidiados pela apresentação de propriedades matemáticas justificadas e de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para aplicações na resolução de problemas interessantes, relevantes e atuais, pesquisas em Educação Matemática indicam que é fundamental trabalhar as ideias, os conceitos matemáticos intuitivamente, antes da linguagem, da simbologia.

Indubitavelmente, o conceito de função é um dos mais importantes da Matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 2000b) destacam a importância desse conceito para a Matemática e para outras áreas do conhecimento: "*O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática*" (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 2000a, p. 121). Os modelos matemáticos descrevem, em termos matemáticos, um fenômeno ou uma situação que se pretenda representar. Quando se modela algebricamente um fenômeno, através de relações generalizadas, dá-se um passo importante em direção à abstração e à construção de modelos matemáticos. No entanto, para ser possível modelar algebricamente um fenômeno é importante que se conheçam as características de cada tipo de função. Ainda que pese o fato de que o estudo das funções no ensino médio seja tratado sem o uso do *cálculo infinitesimal*, são praticamente inesgotáveis as possibilidades de enriquecer as aulas com uma variedade de situações que efetivamente possam ocorrer e que requerem, para serem analisadas eficazmente, o emprego das características e propriedades das funções.

Corroborando com essa ideia, os ambientes de geometria dinâmica têm-se popularizado muito no ensino de matemática. Em especial, quanto ao estudo das funções quadráticas, é possível desenvolver atividades que permitam investigar relações de dependência funcional entre grandezas geométricas, sem a mediação de representações algébricas e gráficas e, por conseguinte, à luz da análise da variação dos valores, identificar as premissas de caracterização daquele tipo de função. Destarte, procede-se uma abordagem diferente para o estudo de funções quadráticas: a aprendizagem do novo conceito dar-se-á pela percepção intuitiva da variação dos valores associados aos objetos geométricos, ficando a formalização por meio de representações algébricas e gráficas como a última etapa do processo. Com efeito. Nos livros didáticos, em geral, a abordagem do estudo de funções quadráticas tem início com a apresentação de uma situação-problema na qual a modelagem algébrica nos remete a uma função polinomial expressa por um polinômio de grau dois e, em seguida, recorrendo ao uso da linguagem formal, define-se a função quadrática como uma relação abstrata entre dois conjuntos quaisquer (IEZZI *et al*., 2010; SMOLE; DINIZ, 2010).

Um software livre muito utilizado atualmente é o GeoGebra (http://www.geogebra.org), pois associa ferramentas algébricas e geométricas possibilitando, em um mesmo ambiente, construir figuras em geometria dinâmica que representam, segundo (GIRALDO, 2012), [...] "*uma classe de objetos geométricos definida por propriedades e relações comuns que se preservam quando arrastados na tela, permitindo ao ususário investigar um grande número de exemplos e explorar conjecturas, constituindo uma preparação para o exercício de argumentação matemática*". Além disso, o Geogebra permite traçar gráficos, em um sistema cartesiano de coordenadas, das principais funções reais elementares estudadas no ensino médio. Apresenta uma *interface* bastante interativa e de fácil compreensão como se pode constatar na atividade "Números comandando pontos", explicitada em (GRAVINA; DIAS, 2013).

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GERAL

Estabelecer uma forma de abordagem que permita tratar do conceito de função quadrática e que promova um ensino preponderantemente formativo que auxilie na estruturação do pensamento e do raciocínio lógico.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Compreender o teorema da caracterização das funções quadráticas.
- Identificar nas relações entre objetos geométricos características das funções quadráticas.
- Incorporar os recursos específicos do ambiente de geometria dinâmica GeoGebra na análise das relações de dependência funcional entre grandezas geométricas.

Tendo em vista o exposto acima, no próximo capítulo é apresentado o desenvolvimento das ideias em torno do conceito de função quadrática, estabelecido o teorema de caracterização desse tipo de função e discutido o processo de aprendizagem desse conteúdo no ensino médio. Além disso, na Seção Computador na Sala de Aula, é analisada a necessidade atual do uso das tecnologias na educação como apoio para prática pedagógica do professor do ensino médio, em especial, como subsídio para se explorar as ideias intuitivas de variação e dependência. Na Seção GeoGebra, são abordadas as principais características do GeoGebra e, em seguida, na Seção Atividades, são propostas três atividades onde se faz uso dos recursos computacionais do software para promover conjecturas e, à luz do teorema de caracterização das funções quadráticas, estabelecer o conceito de função quadrática.

2 DESENVOLVIMENTO

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 2006), o estudo de funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas diferentes: idade e altura, área do círculo e raio, tempo e distância percorrida, tempo e crescimento populacional, tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. Além disso, ao aluno devem ser apresentados os diferentes modelos tomados em diferentes áreas do conhecimento.

Quanto ao estudo das funções quadráticas, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio acenam para uma abordagem na qual a situação-problema motivadora seja subsidiada por meio de problemas de aplicação, em que é preciso, por exemplo, encontrar um certo ponto máximo (clássicos problemas de determinação de área máxima). Além disso, o estudo do comportamento dessa função - posição do gráfico, coordenadas do máximo/mínimo, zeros da função - deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o "aspecto" do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras. Indica, inclusive, que para ajudar nessa compreensão a forma canônica

$$f(x) = a(x-m)^2 + n$$

é a mais adequada.

Nota-se que a maioria dos livros didáticos brasileiros seguem, de alguma forma, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Segundo (DANTE, 2004), o estudo da função quadrática é motivado pela seguinte situação-problema:

> "Os diretores de um centro esportivo desejam cercar uma quadra de basquete retangular e o espaço em volta com tela de alambrado. Tendo recebido 200 metros de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com tela para que a área seja a maior possível."

Em seguida, o autor apresenta o modelo matemático associado ao problema:

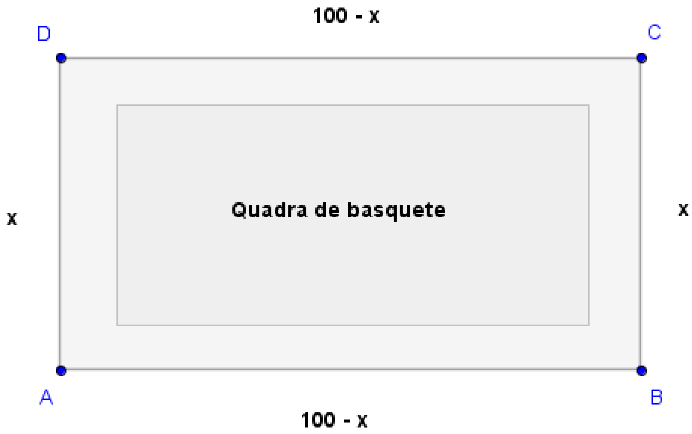


Figura 1: Ilustração da situação-problema proposta por (DANTE, 2004).

> “Podemos ilustrar o problema com o retângulo ABCD, com dimensões x e $100-x$, pois o perímetro é de 200 metros. Observe que a área do terreno a cercar é dada em função de x, ou seja, $f(x) = (100-x)x = -x^2+100x$.”

Em seguida, o autor cita que essa função é um caso particular de função quadrática e propõe a solução do problema motivador para mais adiante. Nesse momento é apresentada, portanto, a definição de função quadrática: “*Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *chama-se quadrática quando existem números reais a, b e c, com* $a \neq 0$*, tais que* $f(x) = ax^2+bx+c, \quad$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Nota-se que, ainda que pese a abordagem na qual a aprendizagem de um novo conceito (função quadrática, no caso) se dê pela apresentação de uma situação-problema, é importante salientar que se faz mister promover ao aluno aprendiz um processo no qual ele seja colocado, diante das suas concepções, como construtor do conceito. Desta forma, cabe ao professor o papel de elemento gerador de situações que propiciem esse confronto de concepções, cabendo ao aluno o papel de construtor do conhecimento matemático.

Examinando com mais cuidado a situação proposta pelo autor para motivar o estudo das funções quadráticas, observa-se que a construção do conhecimento está embasada na representação algébrica pré-concebida pelo aluno aprendiz quanto ao que diz respeito à definição de um polinômio de grau dois, ou seja, inicialmente ele está entendendo que a relação de dependência funcional entre as grandezas geométricas (área e comprimento) representada pela expressão $f(x) = -x^2+100x$ é uma função quadrática porque o polinômio f, definido na variável x, tem grau dois. É importante salientar que nessa construção, muito provavelmente, o aluno não esteja percebendo a diferença entre o conceito de função polinomial e o conceito de polinômio. Com efeito. Um polinômio do segundo grau é uma expressão formal do tipo $p(X) = aX^2+bX+c$, com a, b e c números reais, $a \neq 0$, e X sendo um símbolo tal que X^2 é uma abreviatura para o produto de X por X. Além disso, por definição, os polinômios $p(X) = aX^2 + bX + c$ e $q(X) = a'X^2 + b'X + c'$ são idênticos quando $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$. Desta forma, é possível afirmar que a cada polinômio $p(X) = aX^2 + bX + c$ faz-se corresponder a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo x real. Nota-se, portanto, que a biunivocidade dessa correspondência é verificada à luz da definição de função quadrática, que por sua vez, no momento da análise da situação-problema, ainda não havia sido concebida.

Se por um lado a ideia de permitir que o aluno construa o conhecimento relativo ao conceito de função quadrática por meio da apresentação de uma situação-problema pode parecer paradoxal (pois como o aluno pode resolver um problema se ele não aprendeu o conteúdo relativo à sua solução?), por outro lado a construção desse conhecimento pode se dar mediante a investigação da relação de dependência entre as grandezas buscando, intuitivamente, por meio da análise dos valores, caracterizar esse tipo de função. Deste modo, somente depois dessa exploração inicial é que o professor procederá um estudo mediante o uso das representações algébricas.

O teorema que segue apresenta as condições suficientes e necessárias para que um problema possa ser modelado por uma função quadrática. O enunciado, bem como a demonstração, foram estabelecidos tomando-se por base os encaminhamentos constantes em (LIMA *et al.*, 1996). Todas as atividades, propostas neste trabalho, suscitam conjecturas cuja validade ou não é fundamentada nas condições explicitadas no teorema.

Observações iniciais:

1. Para a demonstração do teorema que segue, admite-se conhecido que uma função quadrática é contínua em todo o seu domínio. Além disso, se duas funções contínuas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são tais que $f(r) = g(r)$, para todo racional r, então $f(x) = g(x)$, para todo x real.

2. Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência y_1, y_2, y_3, y_4, ... tal que as diferenças sucessivas $d_1 = y_2 - y_1$, $d_2 = y_3 - y_2$, $d_3 = y_4 - y_3$, ... formam uma progressão aritmética usual.

3. Uma progressão aritmética de segunda ordem pode reduzir-se a uma progressão aritmética ordinária quando a razão $d_k = y_{k+1} - y_k$, para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$, for igual a zero. Nesse caso, chamaremo-na de progressão aritmética de segunda ordem degenerada.

Teorema 2.1 (Caracterização das funções quadráticas)**.** *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é quadrática se, e somente se, toda progressão aritmética não constante x_1, x_2, ..., x_n, ... pode ser transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada, y_1, y_2, ..., y_n, ..., tal que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ..., $y_n = f(x_n)$, ...*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Deve ser mostrado que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função quadrática qualquer e $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ ...$ é uma progressão aritmética não constante, então os números y_1, y_2, ..., y_n, ..., tais que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ..., $y_n = f(x_n)$, ..., formam uma progressão aritmética de segunda ordem. De fato. Se y_1, y_2, ..., y_n, ... é uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada, então as diferenças sucessivas

$$d_1 = y_2 - y_1,\ d_2 = y_3 - y_2,\ d_3 = y_4 - y_3,\ ,...,\ d_n = y_{n+1} - y_n,\ ...$$

formam uma progressão aritmética ordinária cujo primeiro termo é $d = y_2 - y_1$ e cuja razão é $r \neq 0$. Assim sendo, o seu n-ésimo termo é igual a $y_{n+1} - y_n = d + (n-1)r$, para todo $n = 1,2,3,\dots$. Isto posto, segue que:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (y_{n+1} - y_n) + (y_n - y_{n-1}) + ... + (y_3 - y_2) + (y_2 - y_1) + y_1 = \\ &= [d + (n-1)r] + [d + (n-2)r] + ... + [d + r] + d + y_1 = \\ &= nd + \frac{n(n-1)r}{2} + y_1, \end{aligned}$$

para todo $n = 1,2,3,\dots$. Como a igualdade é válida para $n = 0$, pode-se reescrevê-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y_n &= (n-1)d + \frac{(n-1)(n-2)r}{2} + y_1 = \\ &= dn - d + \frac{(n^2)r - 3nr + 2r}{2} + y_1 = \\ &= \left(\frac{r}{2}\right)n^2 + \left(d - \frac{3r}{2}\right)n + (r - d + y_1). \end{aligned}$$

Fazendo $a = r/2$, $b = d - (3r)/2$ e $c = r - d + y_1$, segue que $y_n = an^2 + bn + c$, para todo número natural. Assim, considerando a função f tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais, segue que $y_n = f(n)$, para todo natural, e, por conseguinte, é possível concluir que a restrição da função f aos números naturais fornece os termos da progressão aritmética de segunda ordem dada.

($\Leftarrow$) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que goza da propriedade de transformar toda progressão aritmética não-constante numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada. Deve-se mostrar que f é uma função quadrática. Com efeito. Substituindo $f(x)$ por $g(x) = f(x) - f(0)$, observa-se que a função g tem as mesmas propriedades da função f e mais a propriedade adicional de que $g(0) = 0$.

Considerando a progressão aritmética 1, 2, 3, ..., n, ..., tem-se que os valores $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$,..., $g(n)$, ... formam uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada.

Logo, existem constantes $a \neq 0$, b e c tais que $g(n) = an^2 + bn + c$. Como $g(0) = 0$, segue que $g(n) = an^2 + bn$, para todo n natural.

Fixe, arbitrariamente, um número p natural e considere a progressão aritmética

$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, \ldots, \frac{n}{p}, \ldots.$$

De modo análogo, concluí-se que existem $a' \neq 0$ e b' tais que $g(n/p)$ = $a'n^2$+$b'n$, para todo n natural.

Assim, para n natural, tem-se:

$$\begin{aligned} an^2 + bn = g(n) = g\left(\frac{n}{p}p\right) = \\ = a'(np)^2 + b'(np) = (a'p^2)n^2 + (b'p)n. \end{aligned}$$

Portanto, as funções quadráticas $ax^2 + bx$ e $(a'p^2)x^2 + (b'p)x$ coincidem para todo x natural. Daí, decorre que $a = a'p^2$ e $b = b'p$ (esse resultado pode ser verificado em (LIMA *et al.*, 1996, p. 114)), ou seja, $a' = a/(p^2)$ e $b' = b/p$. Deste modo, pode-se concluir que, para quaiquer naturais n e p, é válido que:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n = \frac{a}{p^2}n^2 + \frac{b}{p}n = \\ = a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\left(\frac{n}{p}\right). \end{aligned}$$

Assim sendo, as funções contínuas g e $ax^2 + bx$ são tais que $g(r) = ar^2 + br$, para todo número racional positivo $r = n/p$. Donde pode-se concluir, segundo as observações inicialmente consideradas, que $g(x) = ax^2 + bx$, para todo número real positivo x. De modo análogo, considerando a progressão aritmética -1, -2, -3, ..., conclui-se que $g(x) = ax^2 + bx$, para todo número real negativo x. Logo, considerando $f(0) = c$, tem-se que $f(x) = g(x) + c$, ou seja, f é tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$\square$

2.1 COMPUTADOR NA SALA DE AULA

Visando estabelecer um novo processo de ensino-aprendizagem, cuja prática pedagógica seja subsidiada em metodologias distintas das tradicionais, o uso de computador no ensino de Matemática vem se difundindo consideravelmente nos últimos anos. Os software matemáticos atualmente ocupam um lugar relevante nos currículos de Matemática. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, as tecnologias em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas. A informática caracteriza o aprendizado como um processo de investigação, o que torna uma grande mudança de paradigma para a educação, com novos conceitos e estruturas a serem pensadas e trabalhadas.

> "Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento."(MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 2000c, p. 41)

Nessa seara dos software matemáticos, os chamados *ambientes de geometria dinâmica* tem-se destacado muito no ensino de Matemática. A sua relevância está embasada no aspecto dinâmico do ambiente que permite realizar alterações em um elemento de uma construção geométrica reproduzida na tela do computador e observar as consequências nos demais elementos. Isto permite ao aluno investigar um grande número de situações e explorar conjecturas, constituindo uma preparação para o exercício de argumentação matemática com o objetivo de validar (ou não) a matemática das construções. Além disso, esses ambientes permitem a abordagem do conceito de função através da exploração das relações de dependência funcional entre objetos de natureza geométrica (em geral área e comprimento). De acordo com (GIRALDO, 2012), essas relações de dependência oferecem possibilidades de exploração pedagógica que podem ser muito enriquecedoras:

> "É possível estudar comportamentos de funções diretamente por meio da dinâmica do ambiente, sem a mediação das representações usuais em sala de aula, especialmente a representação gráfica. Isto é, o comportamento da função pode ser analisado ao se alterar um objeto no ambiente, e observar as consequentes alterações nos objetos que são dependentes deste. Assim, a própria dinâmica do ambiente converte-se em uma forma não convencional de representação. Além disso, pode-se ampliar o universo de funções familiares aos alunos, uma vez que são apresentados exemplos de funções cujos domínios ou contradomínios não são números, e sim conjuntos de objetos geométricos. Nos livros didáticos, em geral, a abordagem de funções tem início com a definição de função em contexto abstrato, como relação entre dois conjuntos genéricos. Entretanto, quase todos os exemplos que se seguem são de funções entre conjuntos numéricos. Desta forma, verifica-se uma lacuna brusca na abordagem - e a apresentação de exemplos de funções de outra natureza é importante para preenchê-la. Finalmente, como são construídas funções entre objetos geométricos, essas situações estabelecem uma articulação entre geometria e funções, campos da Matemática que quase sempre são abordados de forma dissociada no ensino básico."

2.2 GEOGEBRA

O GeoGebra (http://www.geogebra.org) é um software livre de geometria dinâmica, criado em 2001 por Markus Hohenwarter, desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis escolares (do básico ao universitário). Em um único ambiente, é possível desenvolver atividades em geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos aritméticos elementares. A principal característica do GeoGebra, segundo o seu idealizador, consiste na percepção dupla dos objetos: cada expressão na janela de álgebra corresponde a um objeto na janela de visualização gráfica e vice-versa. Por um lado, o GeoGebra possui todas as ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas, circunferências, etc. Por outro lado, equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica oferecendo, portanto, diversas possibilidades para a exploração pedagógica.

Importante ressaltar que em algumas construções geométricas ocorrem naturalmente relações de dependência entre objetos. Por exemplo, se construírmos um retângulo cujo comprimento da altura é fixado, pode-se observar as variações da área em função do comprimento da base do retângulo (GIRALDO, 2012). Ou se construírmos um quadrado inscrito em um círculo, então o lado e a área do quadrado são funções do raio do círculo. Assim, à luz da análise dessas variações, é possível caracterizar que tipo de função relaciona essas grandezas geométricas, sem deduzir a expressão algébrica ou construir o gráfico associados. Desta forma, com o uso do GeoGebra, cujos recursos disponibilizados facilitam a exploração algébrica, gráfica e a utilização de uma planilha de cálculos, de forma simultânea, pode-se estabelecer uma abordagem pouco ou quase não explorada do conceito de função em situações nas quais se caracterizam uma relação de dependência funcional entre objetos geométricos.

2.3 ATIVIDADES

Até aqui, pode-se constatar que ensinar matemática vai muito mais além do que desenvolver nos estudantes o domínio de técnicas, fórmulas ou procedimentos de resolução de problemas. Constitui em desenvolver uma disposição e forma de pensar onde os alunos possam constantemente buscar e examinar diferentes tipos de relações, conjecturar, utilizar diferentes sistemas de representação, estabelecer conexões, empregar vários argumentos. Isto implica na necessidade de se pensar em uma prática pedagógica onde se possibilite a articulação das características acima mencionadas. Nesse contexto, detacam-se as possibilidades viabilizadas por ambientes computacionais, em especial o GeoGebra, de integrar à abordagem tradicional outras formas de representação, diferentes das usuais. Nesse sentido, nas atividades que se seguem, propõe-se a exploração dinâmica das variações funcionais - expressas por grandezas geométricas - como subsídio para a caracterização de funções quadráticas, antes mesmo de traçar seus gráficos, e o traçado de gráficos a partir das construções geométricas, sem a mediação das “leis de formação” ou tabelas.

Importante ressaltar que não consiste objetivo deste trabalho o aprofundamento nas instruções para as construções geométricas no GeoGebra. Para os leitores interessados na reprodução das atividades, segue no Anexo A os endereços eletrônicos para acesso/download das atividades propostas. Além disso, convém destacar que as Atividades 1 e 2 foram adaptadas dos concursos de seleção para o ingresso ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (http://www.mat.ufrgs.br/ ppgem/) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Exames 2012 (questão 2) e 2010 (questão 2), respectivamente, com objetivos claramente diversos dos deste trabalho.

2.3.1 ATIVIDADE 1

Considere um círculo C_1 cujo raio mede 2 unidades de comprimento. Seja AP um diâmetro qualquer de C_1 (conforme Figura 2). Marque um ponto livre O no segmento AP tal que OP seja o raio de um círculo C_2, tangente internamente ao círculo C_1 no ponto P. *Como varia a área compreendida entre os dois círculos em função do raio OP*?

Para explorar as ideias intuitivas da relação de dependência da área A, compreendida entre os dois círculos, em função da medida do raio $r = |OP|$ do círculo C_2, pode-se usar os recursos disponíveis do GeoGebra para construir os dois círculos - considerando satifeitas as condições dadas - e, numa planilha de cálculo do próprio software, registrar essa variação tomando-se um Δr fixo qualquer. Seja, por exemplo, Δr igual a 0.5, como na Figura 2.

Buscando caracterizar uma função quadrática associada ao comportamento dessa variação, é importante observar que o Δr fixo escolhido representa a razão de uma progressão aritmética ordinária. Sendo assim, deve-se verificar se a sequência numérica cujos termos representam os valores relativos às áreas obtidas em função das medidas do raio, r (coluna B da planilha), representa uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada (conforme Teorema 2.1). Desta forma, aproveitando-se a mesma planilha de cálculos, registram-se, portanto, as diferenças d_k's dos termos consecutivos da sequência numérica estabelecida na coluna C da planilha, conforme mostrado na Figura 2.

Convém destacar que as limitações técnicas do computador/software, em especial no que tange ao cálculo aproximado do número π, podem produzir resultados inesperados. Observe que os d_k's, que determinam a razão da progressão aritmética de segunda ordem não degenerada, não são exatamente iguais. Cabe ressaltar que os resultados apresentados pelo

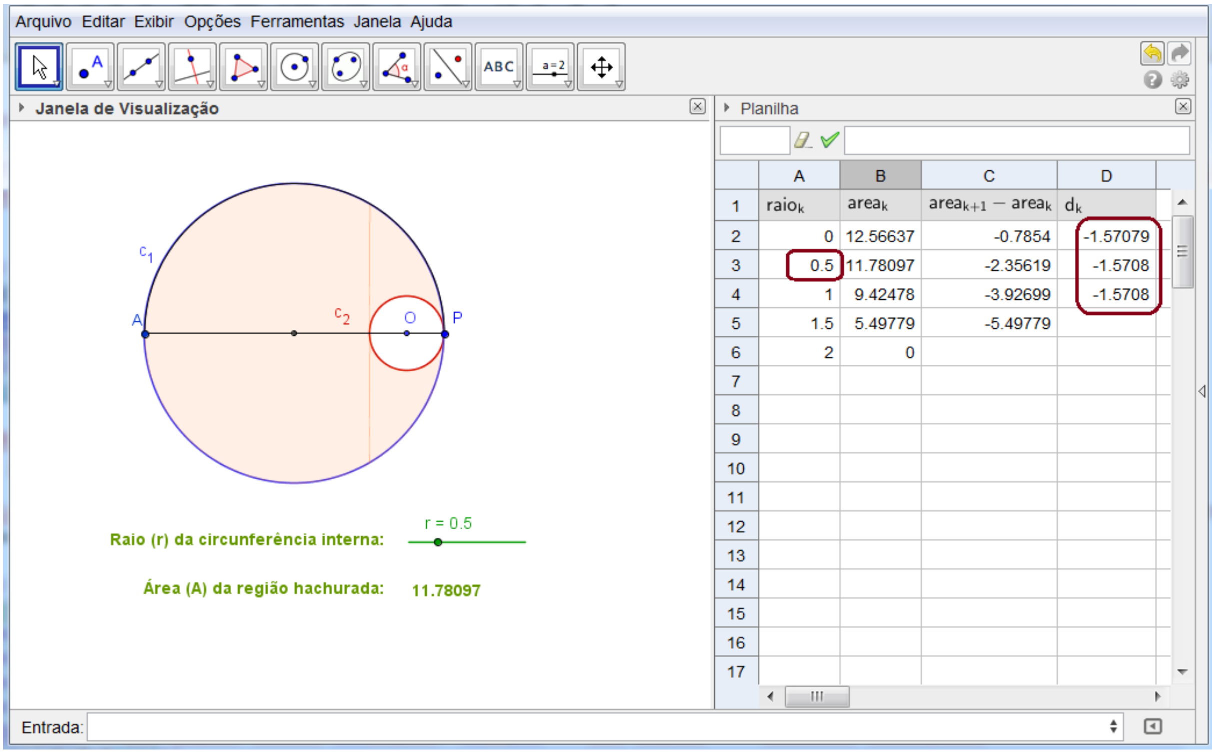


Figura 2: Ilustração da variação da área A em função do raio de C_2; $\Delta r = 0.5$.

computador não podem servir como critério de verdade matemática, mas, sim, como subsídio para se estabelecer conjecturas sobre o modelo que se está estudando. Portanto, há uma necessidade imperiosa da comprovação dos resultados embasada em argumentação formal. No caso dessa atividade, um argumento razoável consiste no fato de que todo número real pode ser bem aproximado por números racionais e que a sua representação decimal real fornece pois uma sequência de aproximações por racionais cujos denominadores são potências de base 10. As demonstrações desses resultados podem ser encontradas em (MOREIRA, 1998). Considerando que os valores apresentados nas planilhas foram determinados com uma aproximação de cinco casas decimais, pode-se observar que diante dessa escolha o número racional -1.570 representa a melhor aproximação para os d_k's.

Note que para garantir que seja satisfeita a condição de tangência entre os círculos, a medida do raio r do círculo C_2 deve variar entre 0 e 2. Recorrendo aos recursos computacionais do GeoGebra, é possível proceder uma alteração no valor do Δr fixado com o intuito de validar (ou não) a conjectura de que essa relação funcional caracteriza uma função quadrática. Para isso, usa-se a opção "*controle deslizante*" associada à medida do raio r, do círculo C_2, e altera-se o valor do incremento (Figura 3).

Fixando-se um novo Δr, por exemplo 0.25, tem-se uma nova planilha na qual se pode observar que as diferenças d_k também são constantes, indicando, portanto, que a sequência dos

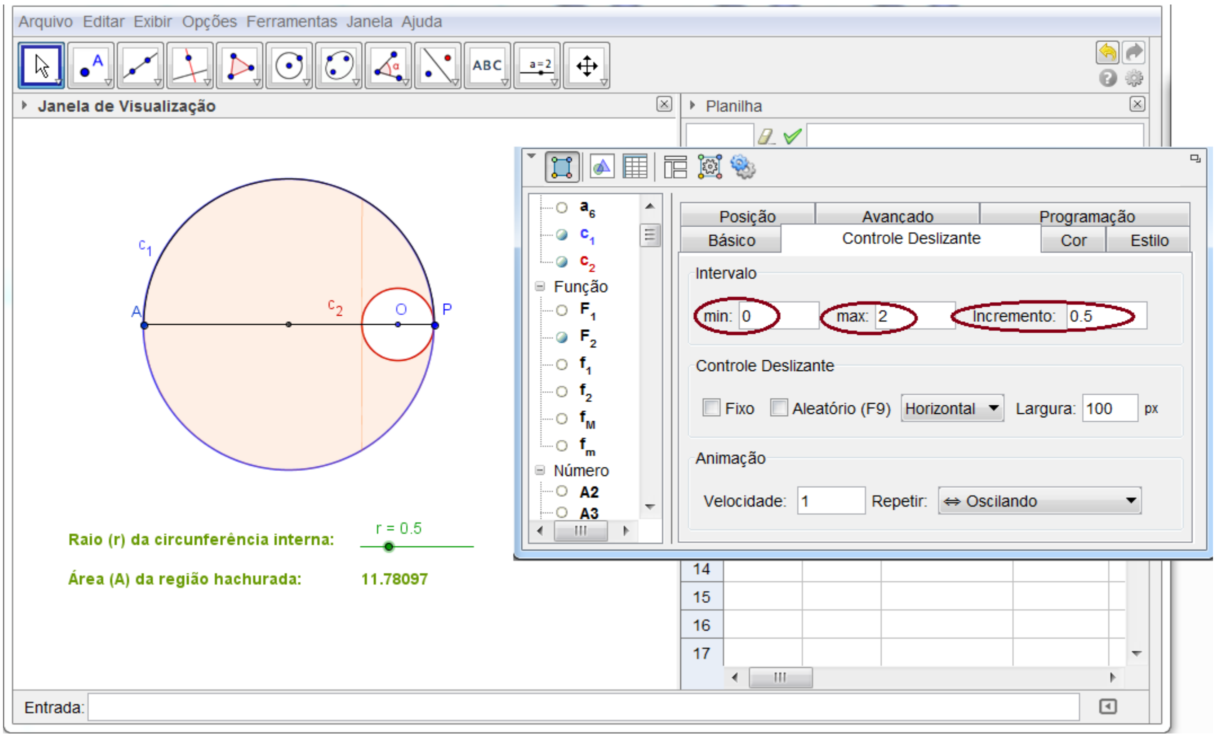


Figura 3: Ilustração da janela do GeoGebra com $\Delta r = 0.5$.

valores associados às areas, nessa nova situação, também constituem termos de uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada. Observa-se que nessa situação o número racional -0.392 é a melhor aproximação para o número d_k (Figura 4).

A geometria do problema nos garante que para uma variação Δr fixa, quanto maior for o valor de r, menor será o valor da variação da área ΔA, caracterizando, portanto, uma função monótona decrescente. Também, da geometria do problema, segue, intuitivamente, que essa função é contínua em todo o seu domínio. Agora, observando a variação dos valores que constituem a relação de dependência funcional, explicitada nas planilhas, é possível conjecturar que a função transforma uma progressão aritmética ordinária não constante (de razão Δr) em uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada. Isso significaria que, segundo o teorema da caracterização das funções quadráticas (Teorema 2.1), a função que a cada raio r associa o valor da área A correspondente é *quadrática*.

Para verificarmos a validade dessa conjectura pode-se recorrer à expressão polinomial associada à função quadrática, pois, pelo teorema de caracterização das funções quadráticas (Teorema 2.1), é suficiente para que uma função transforme uma progressão aritmética ordinária em uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada que ela seja quadrática. Desta forma, considere a área A e seja r um raio qualquer escolhido no intervalo $[0,2]$. Sabendo que a fórmula πr^2 define a área de um círculo cujo raio mede r e que o círculo C_1 tem raio fixo

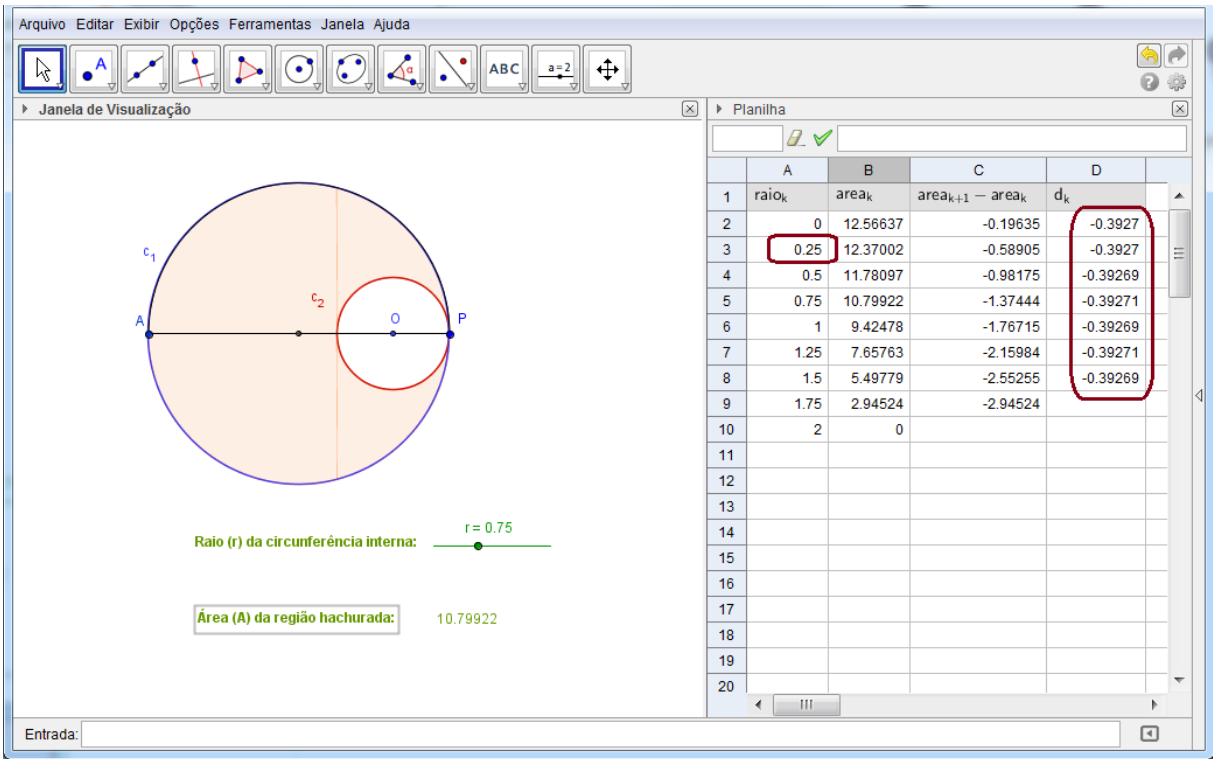


Figura 4: Ilustração da variação da área A em função do raio de C_2; $\Delta r = 0.25$.

medindo 2 unidades de comprimento, pode-se, sem dificuldade, deduzir a expressão da função área, A:

$$\begin{aligned} A : [0,2] &\to \mathbb{R} \\ r &\mapsto \pi(4 - r^2). \end{aligned}$$

Portanto, segue que a função que a cada raio r associa o valor da área A correspondente é, realmente, *quadrática*.

As características intrínsecas do GeoGebra no que diz respeito à sua condição de conector dinâmico de múltiplas representações, permitem observar a variação da função área graficamente, construindo o gráfico dessa função usando a opção "*lugar geométrico*", possibilitando realizar um estudo mais geral dessa função (Figura 5).

2.3.2 ATIVIDADE 2

Considere um quadrado $ABCD$ cuja diagonal mede 6 unidades de comprimento. Marque um ponto livre H no segmento AC e, em seguida, construa um segmento de reta paralelo à diagonal BD que contenha o ponto H e cujas extremidades estejam sobre os lados do quadrado. Seja P o polígono convexo, inscrito ao quadrado (conforme Figura 6), cujos vértices são as

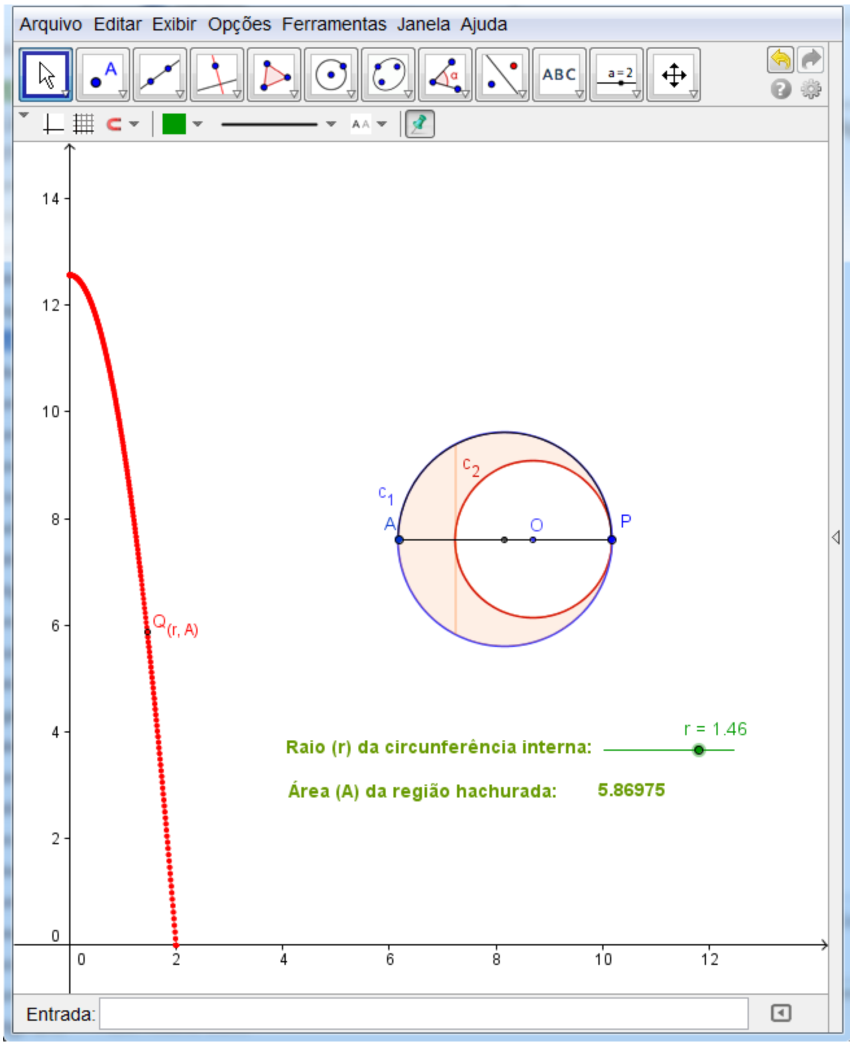
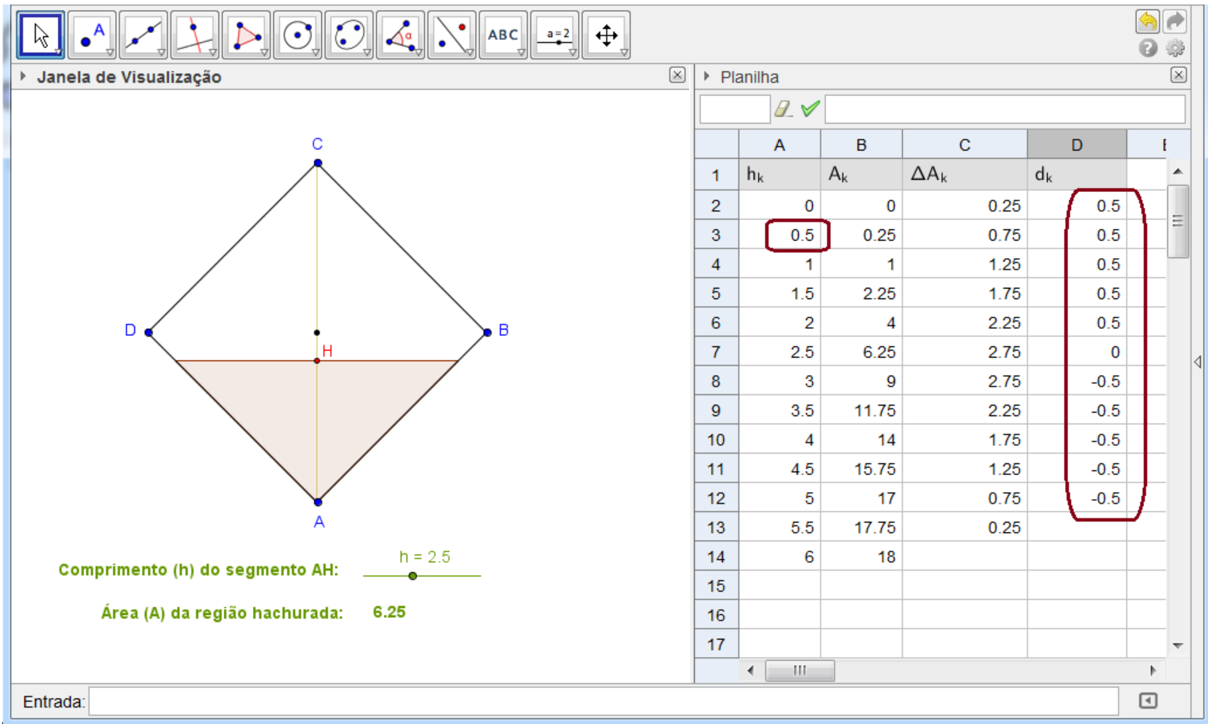


Figura 5: Ilustração do gráfico da área, A, em função do raio, $r = |OP|$.

extremidades desse segmento de reta e o vértice A do quadrado. Considerando $h = |AH|$, *como varia a área do polígono P em função de h*?

Seja A a medida da área do polígono convexo P. Para explorar as ideias intuitivas da relação de dependência da área A em função da medida h, usando-se os recursos disponíveis do GeoGebra, deve-se, em primeiro lugar, construir o quadrado $ABCD$ e, em seguida, o polígono P - considerando satifeitas as condições dadas - e, na planilha de cálculo, registrar essa variação tomando-se um Δh fixo qualquer. Considere, por exemplo, Δh igual a 0.5 (como ilustrado na Figura 6).

Da geometria do problema é possível inferir que para $h \leq 3$ o polígono P assume o formato de um triângulo retângulo. Por outro lado, para $h \in]3,6[$ o polígono P assume o formato de um pentágono (Figura 7). É fato que se $h = 6$ então o polígono P coincide com o quadrado $ABCD$. Desta forma, é razoável afirmar que a função área, A, é definida por duas sentenças



	A	B	C	D
1	h_k	A_k	ΔA_k	d_k
2	0	0	0.25	0.5
3	0.5	0.25	0.75	0.5
4	1	1	1.25	0.5
5	1.5	2.25	1.75	0.5
6	2	4	2.25	0.5
7	2.5	6.25	2.75	0
8	3	9	2.75	-0.5
9	3.5	11.75	2.25	-0.5
10	4	14	1.75	-0.5
11	4.5	15.75	1.25	-0.5
12	5	17	0.75	-0.5
13	5.5	17.75	0.25	
14	6	18		
15				
16				
17				

Figura 6: Ilustração da variação da área A em função de $h = |AH|$; $\Delta h = 0.5$.

(funções de h). Deseja-se verificar se o estudo do comportamento da variação dessa relação funcional satisfaz as premissas do teorema de caracterização de funções quadráticas (Teorema 2.1). Assim sendo, sejam A_1 a área do polígono P quando o mesmo assume o formato de triângulo retângulo, e A_2 a área do polígono quando este assume o formato de um pentágono. Analisando os valores das funções, observa-se que ambas são monótonas crescentes em todo o seu domínio, pois tanto os valores de A_1 quanto os de A_2 aumentam quando h aumenta. Também, segue da geometria do problema a continuidade da função área. Além disso, analisando os valores das funções explicitados nas planilhas constantes nas Figuras 6–7, pode-se conjecturar que, para Δh fixado, as funções definidas nesses intervalos transformam uma progressão aritmética ordinária de razão Δh em uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada. Assim, é possível afirmar que, segundo o teorema de caracterização das funções quadráticas, a variação da área A, do polígono P, em função de h é uma função definida por duas sentenças que são funções quadráticas.

Importante salientar que para cada Δh fixado, nota-se que com o aumento dos valores de h tem-se que ΔA_1 cresce e ΔA_2 decresce. Isso indica que a função A_1 cresce, com concavidade para cima, e a função A_2 cresce, com concavidade para baixo. Pode-se verificar esse comportamento construindo-se o gráfico da função A com o uso dos recursos do GeoGebra (veja Figura 8). Note que para $h = 3$, tem-se um ponto de inflexão e, por conseguinte, há uma mudança na concavidade da função A.

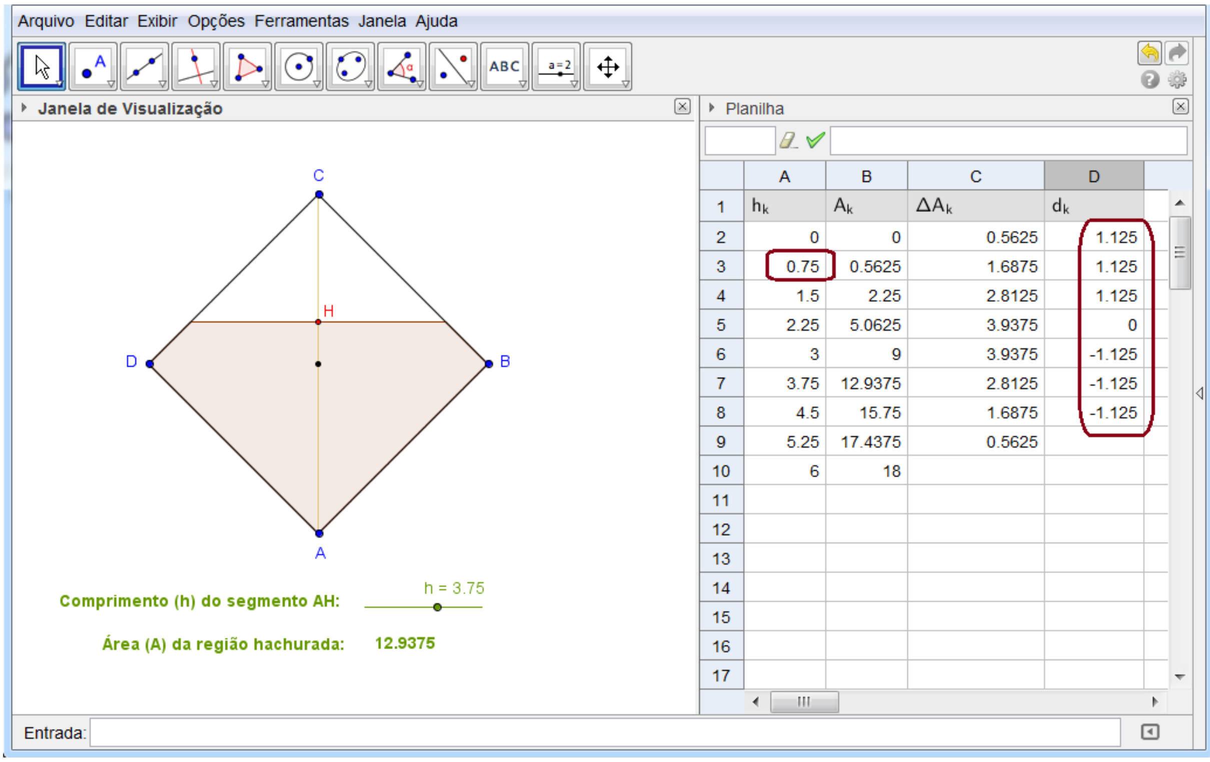


Figura 7: Ilustração da variação da área A em função de $h = |AH|$; $\Delta h = 0.75$.

É fato que a representação algébrica também pode ser usada para estudar o comportamento da variação da área do polígono P em função do valor de h. Com efeito. Como a função área A é definida por duas sentenças, pode-se proceder a análise em duas situações:

- Determinação da "lei de formação" da função A_1. Observe que o triângulo retângulo em questão é isósceles, pois é semelhante ao triângulo ABD. Deste modo, considerando que $A_\triangle$ é a medida da área do triângulo de vértices ABD, segue, da semelhança, que:

$$\frac{A_1(h)}{A_\triangle} = \left(\frac{2h}{6}\right)^2, \quad \text{ou seja,} \quad A(h) = h^2.$$

- Determinação da "lei de formação" da função A_2. Note que a área do pentágono A_2 é igual a área do quadrado subtraindo-se $A_1(6-h)$. Deste modo, segue que:

$$\begin{aligned} A_2(h) &= 18 - (6-h)^2 = \\ &= \left(18 - (36 - 12h + h^2)\right) = -h^2 + 12h - 18. \end{aligned}$$

Pode-se, então, concluir que a função $A : [0,6] \to \mathbb{R}$, que representa a área do polígono

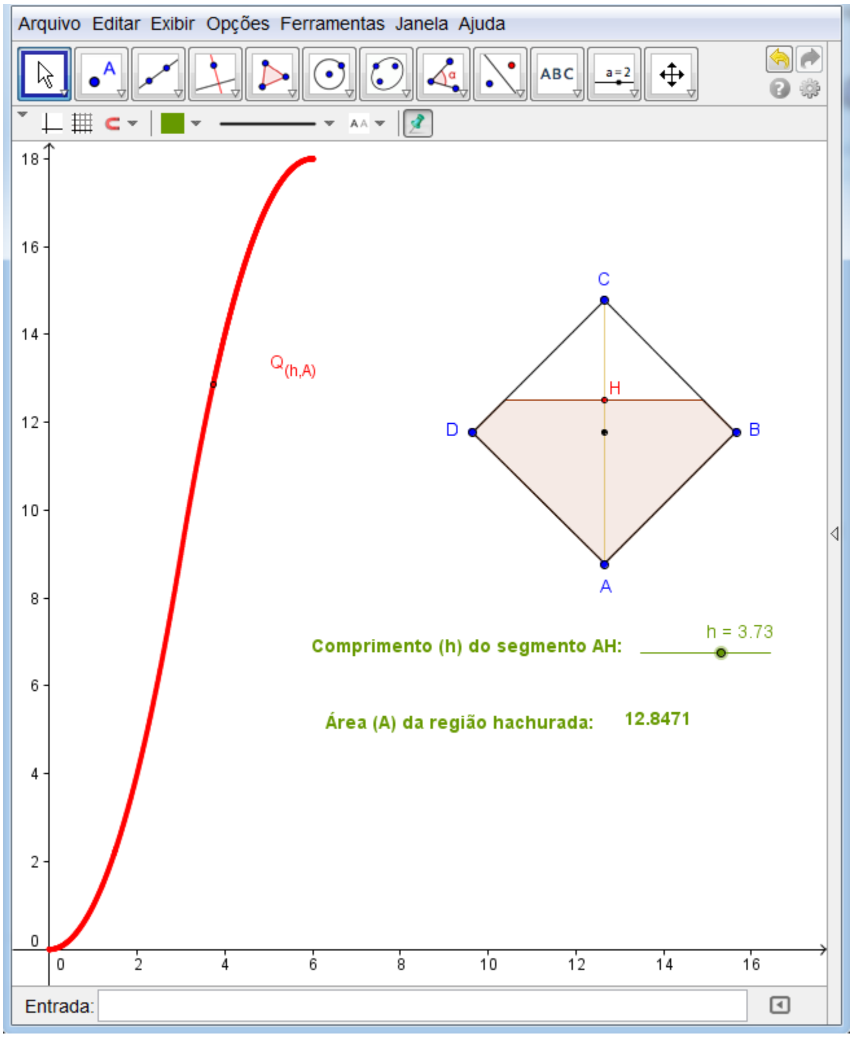


Figura 8: Ilustração do gráfico da área, A, em função de $h = |AH|$.

P em função do valor da medida h, é definida por

$$A(h) = \begin{cases} h^2, & \text{se} \quad 0 \leq h \leq 3, \\ -h^2 + 12h - 18, & \text{se} \quad 3 < h \leq 6, \end{cases}$$

uma função quadrática por partes.

2.3.3 ATIVIDADE 3

Considere um setor circular de ângulo central reto e cujo raio OA mede 5 unidades de comprimento. Marque um ponto livre H no segmento OA de modo que o segmento OH seja a base de um retângulo inscrito no setor (conforme Figura 9). *Como varia a área desse retângulo em função da medida da sua base*?

Seja A a medida da área do retângulo de base OH, inscrito no setor, e $h = |OH|$, a medida de sua base. Nesse caso, observe que para uma variação Δh fixa, quanto maior for o valor de h menor será a variação ΔA. Além disso, a função não apresenta um comportamento monótono em todo o seu domínio. De maneira análoga as Atividades 1 e 2, anteriores, é possível explorar as ideias intuitivas da relação de dependência da área A, em função da medida h, usando-se os recursos disponíveis do GeoGebra. Para isso, deve-se, em primeiro lugar, construir o setor circular e, em seguida, o retângulo de base OH. Em seguida, na planilha de cálculo registram-se os valores relativos à essa variação considerando-se um Δh fixo qualquer. Seja Δh igual a 0.5, por exemplo (conforme Figura 9).

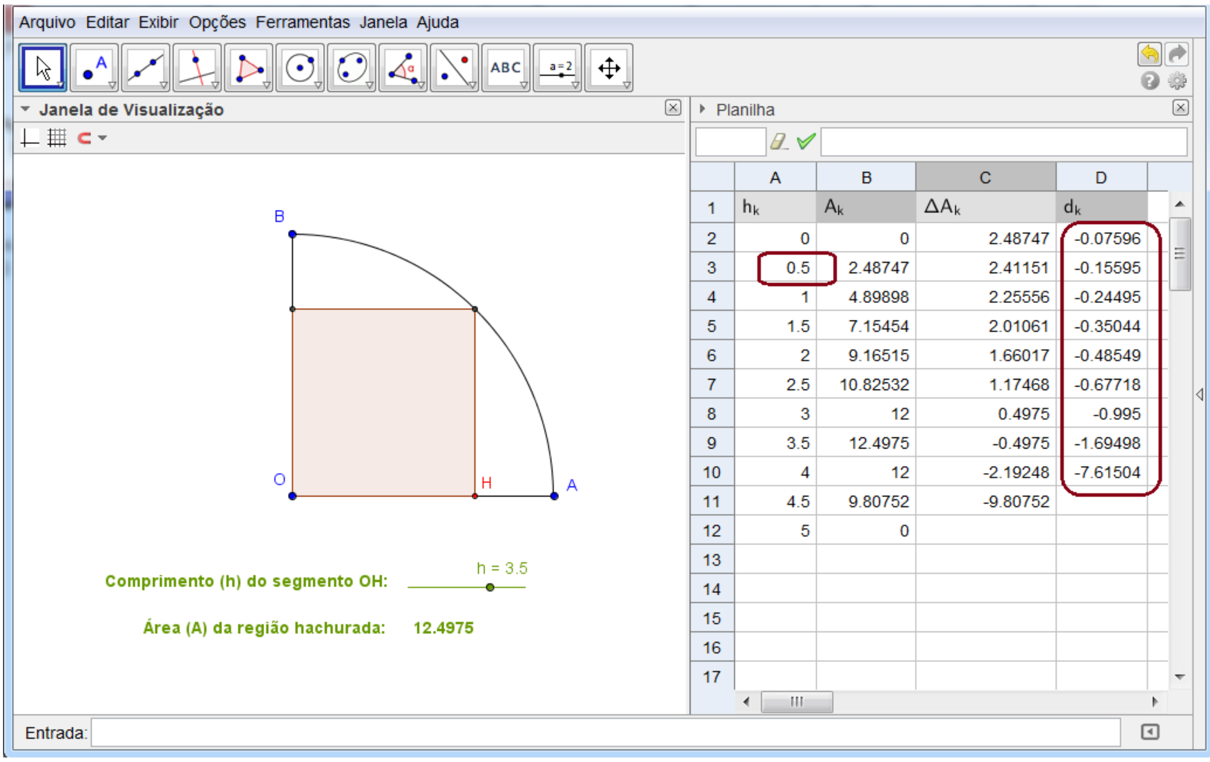


Figura 9: Ilustração da variação da área A em função de $h = |OH|$; $\Delta h = 0.5$.

É interessante notar que os recursos computacionais podem, e devem, ser usados como subsídio para a argumentação matemática no sentido de constatar que a relação de dependência funcional tratada nesse modelo *não* caracteriza uma função quadrática. Sabe-se, pelo teorema de caracterização das funções quadráticas (Teorema 2.1), que a condição necessária para que uma função contínua seja quadrática é que toda progressão aritmética ordinária possa ser transformada pela função em uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada. De fato. Analisando os valores da função explicitados na planilha, pode-se verificar que a função A não é uma função quadrática, pois a progressão aritmética de razão $\Delta h = 0.5$ não foi transformada numa progressão aritmética de segunda ordem, uma vez que os d_k's não são constantes, conforme observado na coluna D da planilha na Figura 9.

Além disso, no sentido de se estabelecer uma argumentação matemática mais fundamentada, pode-se ratificar a conclusão anteriormente estabelecida fazendo-se uso dos recursos computacionais do GeoGebra, que em sua condição de conector dinâmico, oportunizam integrar os diversos registros do conhecimento. Destarte, construindo o gráfico dessa função como lugar geométrico, percebe-se que a curva descrita (Figura 10) não é simétrica, indicando, portanto, que o gráfico não é uma parábola. Desta forma, pode-se afirmar que a variação da área do retângulo em função da medida da sua base não caracteriza uma função quadrática.

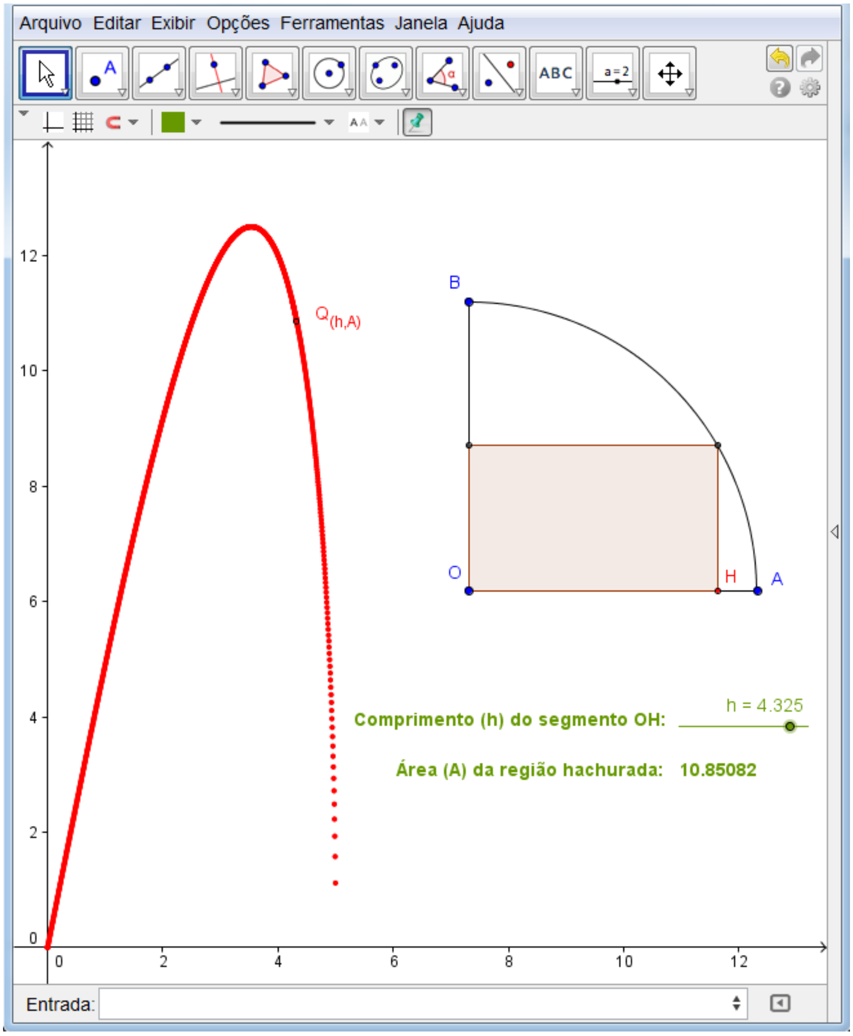


Figura 10: Ilustração do gráfico da área, A, em função de $h = |OH|$.

Construindo-se esse modelo em um sistema de coordenadas cartesianas, pode-se representar algebricamente a relação entre a área do retângulo em função da medida da sua base. Com efeito. Tome o vértice do setor circular coincidindo com a origem do sistema de coordenadas de tal forma que a base do retângulo esteja sobre o eixo das abscissas. Desta forma, segue que a equação do arco de circunferência $\overset{\frown}{AB}$ é dada por

$$(\lambda): \; y^2 + x^2 = 25, \qquad 0 \leq x \leq 5.$$

Daí segue que para todo $P(x,y)$ em (λ), $y = \sqrt{25 - x^2}$, $\; 0 \leq x \leq 5$.

Assim sendo, pode-se observar que para cada valor h da base tem-se um retângulo de altura $\sqrt{25 - h^2}$ e, por conseguinte, a sua área é dada por:

$$A(h) = h\sqrt{25 - h^2}.$$

Portanto, como já notado anteriormente, conclui-se que a variação da área do retângulo em função da medida da sua base, consideradas as condições dadas, não pode ser modelada por uma função quadrática.

Indubitavelmente, o conceito de função quadrática é por si só bastante complexo para o estudante, pois envolve outros conceitos igualmente abstratos como domínio, contradomínio, imagem. Ao final dessas atividades, pode-se constatar a importância do uso do GeoGebra como recurso didático de apoio para se trabalhar a percepção intuitiva das funções reais, como no caso a função quadrática, antes de analisá-las através das representações algébricas e gráficas. Além disso, reunindo recursos de geometria dinâmica, álgebra e cálculo num mesmo programa, e com o mesmo grau de importância, o Geogebra promove a integração dos diversos registros que permitem ao estudante ratificar as suas conjecturas. Segundo (BIFANO; LUPINACCI, 2012),

> "As características intrísecas do GeoGebra em sua condição de conector dinâmico de múltiplas representações, a partir das potencialidades do tabalho simultâneo com a Zona Gráfica, a Planilha de Cálculo e a Janela Algébrica, possibilitam a sua implementação como integrador de registros, permitindo criar laços entre essas diferentes estruturas e, a partir deles, a criação e a justificativa de novas técnicas de resolução e da possibilidade de novas análises que permitam um estudo mais abrangente do problema modelizado."

3 CONCLUSÃO

A dificuldade inerente ao processo de aprendizagem da Matemática no ensino médio está associada, em parte, ao despreparo do professor no que diz respeito a sua formação. Por um lado, os cursos de Licenciatura são considerados sem atrativos; por outro lado, a formação continuada do professor - profissional que de forma geral convive com baixos salários - não é por ele priorizada. Como consequência desse contexto constata-se um ensino totalmente desprovido de atrativos e desafios interessantes, alijado completamente da realidade do aluno além de seccionado em setores geralmente desconectados.

A fim de modificar essa realidade, o Governo Federal têm feito fortes investimentos na formação dos professores da educação básica dentre os quais consiste na implementação de programas de reciclagem de longa duração. Nesse sentido, o PROFMAT foi criado com o objetivo de atender professores de Matemática em exercício no ensino básico, especialmente na escola pública, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua atuação docente.

Buscando qualificar o professor da educação básica, destaca-se no PROFMAT a ênfase no domínio aprofundado do conteúdo a ser lecionado. De fato, não se pode conceber a ideia de se pensar em ensinar matemática à luz da ignorância do conteúdo a ser ensinado. Não obstante, considerando que o processo de aprendizagem é tão complexo quanto aquele de dominar aprofundadamente os conteúdos, registra-se que a participação no PROFMAT na condição de aluno que está aprofundando os conhecimentos relativos aos conteúdos que concomitantemente estão sendo lecionados no dia a dia da sua atividade laboral, é a característica do programa que mais contribui para a melhoria do ensino de matemática.

É nesse prisma que este trabalho foi desenvolvido. O conhecimento do teorema de caracterização das funções quadráticas representa um aprofundamento desse conteúdo que fundamentou a ideia de se discutir uma abordagem diferente, embasada nas noções intuitivas de variação e dependência, geralmente não realizada em sala de aula. Coadunando com a ideia, as atividades propostas desenvolvidas em ambiente de geometria dinâmica (GeoGebra), permitiram realizar uma reflexão a respeito de um processo de ensino no qual o estudante é levado a estabelecer conjecturas e validá-las mediante um raciocínio estruturado logicamente.

Inicialmente, as atividades foram desenvolvidas para o público-alvo docente no sentido de refletir quanto ao tratamento do conceito das funções quadráticas. No entanto, são perfeitamente possíveis de serem aplicadas aos discentes e, nesse caso, as planilhas de cálculo simultaneamente trabalhadas com as janelas gráficas permitem desenvolver um processo interativo, a fim de que se estabeleçam hipóteses sobre o comportamento das variações associadas aos problemas modelados.

Este trabalho pretende ser uma contribuição aos professores que acreditam que muito mais importante do que fazer de seus alunos hábeis resolvedores de problemas por meio de manipulações algébricas associadas a conceitos abstratos, sem significados, é incutir neles o hábito e o gosto por uma Matemática que lhes permita exercer de forma objetiva o senso crítico, adquirir hábitos de organização e encontrar respostas para problemas reais.

Segundo (GARBI, 2010),

> "O êxito de um professor de Matemática deve ser medido pela quantidade de alunos que, ao longo da vida, ele ensinou a pensar por si mesmos e não pelo volume de fórmulas que os fez memorizar. Porque as fórmulas decoradas podem ser esquecidas ou empregadas erroneamente mas uma pessoa que tenha entrado pelo caminho do pensamento lógico-dedutivo jamais o abandonará ou sentir-se-á perplexa diante de uma situação nova. Uma das maiores recompensas com que a Matemática premia as pessoas que sabem pensar logicamente é a confiança que adquirem em sua capacidade de descobrir e aprender cada vez mais, estudando e pesquisando por conta própria um ilimitado número de temas da ciência e da vida prática, sem a obrigatoriedade de um professor para auxiliá-las."

Como sugestão para futuras dissertações as atividades propostas nesse trabalho podem servir como alicerce para se refletir sobre a continuidade das funções reais elementares trabalhadas no ensino médio (assunto pouco ou não dicutido) como, por exemplo, as funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

REFERÊNCIAS

BIFANO, F. J.; LUPINACCI, L. J. Um binômio dinámico: geometría y funciones. In: DEPARTAMENTO DE MATEMáTICA DEL CONSEJO DE FORMACIóN EN EDUCACIóN. **Actas de La Conferencia Latinoamericana de GeoGebra**. Montevideo: Instituto GeoGebra Uruguay, 2012. p. 94–101. ISBN 2301-0185. Disponível em: <http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/20.pdf>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2013.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações**. São Paulo: Ática, 2004.

GARBI, G. G. **CQD:explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria**. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GIRALDO, V. Integrando geometria e funções: gráficos dinâmicos. **Revista do Professor de Matemática**, v. 79, n. 3, p. 39–46, 2012.

GRAVINA, M. A.; DIAS, M. T. Álgebra e geometria: números comandando pontos. **Revista do Professor de Matemática**, v. 80, n. 1, p. 34–41, 2013.

IEZZI, G. *et al*. **Matemática: ciência e aplicações**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

LIMA, E. L. **Matemática e Ensino**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003. (Coleção do Professor de Matemática, CPM16, v. 1).

LIMA, E. L. *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996. (Coleção do Professor de Matemática, CPM13, v. 1).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. **Orientações curriculares para o ensino médio: linguagens, códigos e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_01_internet.pdf>. Acesso em: 26 de fevereiro de 2013.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. **Parâmetros curriculares nacionais + (ensino médio): ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 26 de fevereiro de 2013.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. **Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio): bases legais**. Brasília: MEC/SEB, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 26 de fevereiro de 2013.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. **Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio): ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 26 de fevereiro de 2013.

MOREIRA, C. G. Frações contínuas, representações de números e aproximações. **Revista Eureka!**, v. 3, p. 44–55, 1998.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática: ensino médio**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

ANEXO A – LINKS DE ACESSO ÀS ATIVIDADES

Segue o link para acesso (ou download) à coleção das Atividades 1, 2 e 3, elaboradas em GeoGebra, apresentadas no desenvolvimento da Seção 2.3:

http://www.geogebratube.org/collection/show/id/3056 .

Individualmente, tais atividades podem ser acessadas em:

Atividade 1(a): http://www.geogebratube.org/material/show/id/31133;

Atividade 1(b): http://www.geogebratube.org/material/show/id/31132;

Atividade 2(a): http://www.geogebratube.org/material/show/id/31131;

Atividade 2(b): http://www.geogebratube.org/material/show/id/31130;

Atividade 3(a): http://www.geogebratube.org/material/show/id/31127;

Atividade 3(b): http://www.geogebratube.org/material/show/id/31082.