

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO PROGRAMA DE  
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA  
CÂMPUS LONDRINA/CORNÉLIO PROCÓPIO  
PPGMAT**

**RODRIGO TAVARES DA SILVA**

**ATIVIDADES PARA ESTUDO DE INTEGRAIS EM UM AMBIENTE DE  
ENSINO HÍBRIDO**

**DISSERTAÇÃO**

**LONDRINA**

**2019**

**RODRIGO TAVARES DA SILVA**

**ATIVIDADES PARA ESTUDO DE INTEGRAIS EM UM AMBIENTE DE  
ENSINO HÍBRIDO**

Dissertação apresentada no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Câmpus Londrina/Cornélio Procópio – PPGMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do título de mestre.

Orientadora: Prof. Dra. Adriana Helena Borssoi

**LONDRINA**

**2019**

## TERMO DE LICENCIAMENTO

Esta Dissertação e o seu respectivo Produto Educacional estão licenciados sob uma Licença Creative Commons *atribuição uso não-comercial/compartilhamento sob a mesma licença 4.0 Brasil*. Para ver uma cópia desta licença, visite o endereço <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> ou envie uma carta para Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, Califórnia 94105, USA.



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Biblioteca UTFPR - Câmpus Londrina

S586a Silva, Rodrigo Tavares da  
Atividades para estudo de integrais em um ambiente de ensino híbrido /  
Rodrigo Tavares da Silva. - Londrina : [s.n.], 2019.  
130 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Profª Drª Adriana Helena Borssoi  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná.  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2019.  
Bibliografia: f. 116-120.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Ensino híbrido. 3. Internet na  
educação. 4. GeoGebra (Programa de computador). 5. Cálculo diferencial.  
6. Cálculo integral. I. Borssoi, Adriana Helena, orient. II. Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná. III. Programa de Pós-Graduação em Ensino  
de Matemática. IV. Título.

CDD: 510.7



Ministério da Educação  
**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
Campus Londrina e Cornélio Procópio  
Pró Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação



**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

---

---

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

**ATIVIDADES PARA O ESTUDO DE INTEGRAIS EM UM AMBIENTE DE ENINO  
HÍBRIDO**

Por

**RODRIGO TAVARES DA SILVA**

Esta dissertação foi apresentada em 26 de abril de 2019 como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em ensino de matemática. O candidato foi arguido pela banca examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a banca examinadora considerou o trabalho aprovado.

---

**PROF(A) Dra. ADRIANA HELENA BORSSOI**

**PROF(A) ORIENTADOR(A)**

---

**PROF(A) Dra. IVANETE ZUCHI SIPLE**

**MEMBRO TITULAR**

---

**PROF(A) Dra CLAUDETE CARGNIN**

**MEMBRO TITULAR**

- A FOLHA DE APROVAÇÃO ASSINADA ENCONTRA-SE NA COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE  
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA-

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente à Deus, por permitir realizar meus sonhos, por me dar forças e sempre estar presente em todos os momentos.

Quero deixar meu agradecimento à minha mãe, Nelci, e minha irmã, Débora que estiveram presentes e foram importantes, dando apoio e incentivando em todos os momentos, e a toda a minha família.

A minha orientadora, professora Dra Adriana Helena Borssoi, pela acolhida como seu orientando e por ter acreditado em meu projeto de pesquisa. Sou grato pelas orientações, que trouxeram, enquanto pesquisador, contribuições e aprendizado, que levarei para o profissional.

Ao trio, formado juntamente pela Adriele C. Waidemam e Dayane M. Coutinho, que foi muito importante para o Mestrado, iniciamos com a expectativa, desde a inscrição para a prova até o resultado após a entrevista, sem contar as viagens, cada uma delas foi uma história, que ficarão todas na memória.

E ao trio, de longa data, formado com a Adriele Bodnar e Rosane Borba, sempre me apoiando, incentivando, torcendo e vibrando em cada conquista.

Aos amigos que fui presenteado desde a graduação, em Matemática (UNESPAR/FECILCAM), e também aos que ganhei na Engenharia Civil (UTFPR).

Aos alunos da disciplina da Matemática Aplicada II pela acolhida. E deixo meus sinceros agradecimentos pela participação nessa pesquisa, pela dedicação e empenho para que a coleta de dados fosse realizada.

Aos professores do departamento de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, com quem tive a oportunidade de trabalhar.

Ao Grupo de Estudos e Pesquisa em Modelagem Matemática, Investigação Matemática e Tecnologias (GEPMIT), em especial às professoras Karina Alessandra Pessoa da Silva e Elaine Cristina Ferruzi, e aos amigos membros do grupo, em especial a Joice, Camila, Talita, Rafael e Kawana.

À professora Dra Claudete Cargnin, por dar a honra de participar da minha banca, pelas contribuições para lapidar a pesquisa.

À professora Dra Ivanete Zuchi, por aceitar em participar da minha banca, e pelas contribuições que trouxe para a pesquisa.

A turma do PPGMAT 2017, que proporcionou momentos inesquecíveis, que levarei boas lembranças e as boas amizades que tive a oportunidade de fazer.

E para todos e todas que contribuíram direta ou indiretamente para que essa pesquisa fosse realizada, meus sinceros agradecimentos.

Se a educação sozinha não  
transforma a sociedade, sem ela  
tampouco a sociedade muda.  
(FREIRE, 2000, p.67)

SILVA, Rodrigo Tavares da. **Atividades para o estudo de Integrais em um Ambiente de Ensino Híbrido**. 2019. Dissertação – Defesa (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2019.

## RESUMO

Nesta pesquisa apresentamos uma reflexão e discussão quanto ao estudo de integrais, visto que seus conceitos estão inseridos em disciplinas do Ensino Superior na área de exatas e engenharias. Nesse viés, por meio da exploração de tarefas, propostas em um ambiente virtual de aprendizagem, buscamos articulá-las com os conceitos e definições estudados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no intuito de proporcionar integração com a sala de aula presencial, e que essas tarefas pudessem compor um Produto Educacional. Em um primeiro momento, foram investigadas, por meio de um questionário, algumas informações sobre o perfil dos estudantes envolvidos na pesquisa, visando ter um primeiro delineamento quanto ao contato e interesse deles em relação ao uso da tecnologia, Para então investigarmos a questão de pesquisa: *“como o uso da tecnologia pode contribuir para o estudo da integral de funções de uma variável real, a partir de tarefas propostas em uma perspectiva de Ensino Híbrido?”*. Posteriormente, no ambiente virtual do GeoGebra, os alunos participaram como integrantes de um grupo, no qual eram propostas algumas tarefas por meio de Folhas de Trabalho. E seguindo os encaminhamentos do Ensino Híbrido, considerado como ensino disruptivo, as tarefas foram elencadas numa abordagem de rotações. E elas foram analisadas quanto às respectivas soluções apresentadas, as quais foram classificadas e organizadas nessa pesquisa, em suficientes e insuficientes, e ainda, foi dado um *feedback* em cada atividade entregue, o que permitiu interagir com cada estudante sobre suas resoluções dadas. São discutidas no texto, três tarefas propostas, as quais foram articuladas e organizadas numa análise qualitativa quanto às respostas apresentadas. Durante a manipulação e desenvolvimento de cada uma das tarefas, os estudantes foram questionados sobre sua experiência com o desenvolvimento da atividade, foi um espaço dado em cada tarefa, onde descreveriam sobre suas primeiras impressões, dificuldades, dúvidas, sugestões e apontamentos sobre a atividade, o que nos permitiu obter dados para verificar quais os impactos que essas tarefas causaram na turma envolvida na pesquisa. Por meio de uma entrevista semiestruturada realizada foi possível investigar quais as percepções dos estudantes em relação ao uso do ambiente virtual do GeoGebra para o estudo da integral, que permitiu observar que foi positiva a abordagem realizada, pois a implementação de da tecnologia de forma direcionada, aproximou o contato do professor com alunos.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Ensino Híbrido. Tecnologia. Ambiente Virtual de Aprendizagem. Cálculo Diferencial e Integral. Produto Educacional.



SILVA, Rodrigo Tavares da. **Activities for the study of Integrals in a Hybrid Education Environment**. 2019. Dissertation (Professional Master's Degree in Mathematics Teaching) - Federal Technology University - Parana. Londrina, 2019.

### ABSTRACT

The research appeared as a critical and continuous analysis for the teaching of integrals, since its programs are inserted in disciplines of Higher Education in the area of exact and engineering. This work is the use of the behavior and methods of virtual integration, we seek to articulate the concepts and settings and studies in the standard of Differential and Integral Calculus in particular to the integration with a classroom of presence, and that tasks could compose an Educational Product. In the first place, a questionnaire was investigated, some information about the profile of those involved in the research, a first outline of the contact and an interest in the use of the technology to investigate a research question. : How can the use of technology contribute to the study of the integral functions of a real variable, from a perspective of a hybrid teaching perspective? Subsequently, there is no virtual environment for GeoGebra, students participate as members of a group, do not fall into the category of work tasks. And, clinical teaching guidelines were considered as interruptions in teaching, as tasks were listed in the rotation approach. They were their verification solutions, as they were classified and organized in the research, in their data and insufficient, and was also given feedback on each activity delivered, which gave an impulse with each student about their given resolutions. Three tasks are discussed in the text, as they were articulated and organized in a qualitative analysis of how the answers are. During the study and development of tasks, students were asked about their experience with the development of the activity, it was a space given in each task, where they described their first impressions, difficulties, doubts, suggestions and notes about an activity, O who yearns for results to see what risks these tasks cause in the search. Through a semi-structured interview it was possible to investigate how the students' perceptions regarding the use of GeoGebra's virtual environment for the study of integrality, which functioned as a realized approach, since an implementation of the technology in a directed way, approached the teacher's contact with students.

**Keywords:** Mathematical Education. Hybrid teaching. Technology. Virtual learning environment. Differential and integral calculus. Educational Product.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Página inicial da plataforma on-line do GeoGebra .....	20
Figura 2 - Interface dos grupos no GeoGebra .....	21
Figura 3 - Gráfico de setores quanto ao acesso à e-mails.....	24
Figura 4 - Definição do Ensino Híbrido .....	43
Figura 5 - Zona híbrida de ensino.....	45
Figura 6 - Primeira atividade proposta .....	62
Figura 7 - Resolução do E4 (a), E13 (b) e E21 (c) para a primeira atividade .....	63
Figura 8 - Resolução feita pelo estudante E7 .....	63
Figura 9 - Resolução feita pelo E14 .....	64
Figura 10 - Resolução dada pelo E9 e E19 (a) e do E24 (b) .....	64
Figura 11 -Resposta dada por E5.....	65
Figura 12 - Resultado enviado pelo E15 .....	66
Figura 13 - Resposta dada pelo E22 .....	67
Figura 14 - Atividade 2 proposta aos alunos .....	67
Figura 15 - Resolução feita pelo E13 e pelo E14 .....	68
Figura 16 - Resolução do E18 .....	68
Figura 17 - Primeira questão proposta na tarefa 2.....	73
Figura 18 - Considerações sobre a tarefa 2 pelo E24 .....	83
Figura 19 - Considerações sobre a tarefa 2 pelo E4 .....	83
Figura 20 - Comentário sobre a tarefa 2 pelo E12.....	84
Figura 21 - Comentário sobre a tarefa 2 pelo E15.....	85
Figura 22 - Terceira atividade proposta.....	87
Figura 23 - Representação das três primeiras questões da tarefa 3 .....	88
Figura 24 - Representação da quarta questão proposta na tarefa 3 .....	90
Figura 25 - Resolução para a tarefa 3 pelo E7.....	96
Figura 26 - Comentário sobre a tarefa 3 pelo E22.....	97
Figura 27 - Análise das entrevistas dos estudantes no software Atlas.TI .....	104
Figura 28 - Mapa conceitual das análises das entrevistas com os estudantes .....	109
Figura 29 - Capa do Produto Educacional.....	110

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Quatro características de uma inovação que indicam que ela está em um estágio híbrido.....	46
Quadro 2 - Momentos que foram dados no estudo de integrais com a inserção das tarefas ....	49
Quadro 3 - Applet da tarefa 1 .....	51
Quadro 4 - Applet da Tarefa 2.....	55
Quadro 5 - Tarefa 3 .....	58
Quadro 6 - Organização quantitativa da Tarefa 1: em suficiente, insuficiente e não respondeu .....	61
Quadro 7 - Respostas não suficientes para a segunda atividade da tarefa 1 .....	69
Quadro 8 - Organização quantitativa da Tarefa 2: em suficiente, insuficiente e não respondeu .....	72
Quadro 9 - Resposta dada pelos estudantes para a primeira questão da tarefa 2 .....	73
Quadro 10 - Solução escrita com polinômio para a primeira questão.....	74
Quadro 11 - Solução apresentada para a segunda questão obtida no recurso e/ou feita no caderno.....	75
Quadro 12 - Solução adequada para a terceira questão da tarefa 2 .....	76
Quadro 13 - Soluções suficientes para a quarta questão da tarefa 2.....	77
Quadro 14 - Solução suficiente para a quinta questão da Tarefa 2 .....	78
Quadro 15 - Solução do E11 para a primeira e segunda questões da tarefa 2.....	79
Quadro 16 - Soluções não adequadas para a terceira questão da tarefa 2 .....	79
Quadro 17 - Soluções não suficientes para a quarta questão.....	80
Quadro 18 - Soluções não suficientes para quinta questão da tarefa 2.....	81
Quadro 19 - Considerações sobre a tarefa 2 .....	84
Quadro 20 - Organização quantitativa da Tarefa 3: em suficiente, insuficiente e não respondeu .....	86
Quadro 21 - Resolução dos estudantes para tarefa 3 .....	89
Quadro 22 - Respostas dadas pelos estudantes para a quarta questão da tarefa 3 .....	90
Quadro 23 - Solução não suficientes para a primeira questão da tarefa 3.....	92
Quadro 24 - Soluções não suficientes para a segunda questão da tarefa 3.....	93
Quadro 25 - Soluções não suficientes para a terceira questão da tarefa 3.....	93
Quadro 26 - Soluções não suficientes para quarta questão da atividade 3 .....	94
Quadro 27 - Códigos obtidos pela análise das entrevistas por meio do software Atlas.TI ....	105

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	12
2. ASPECTOS METODOLÓGICOS .....	18
2.1. Delineamento da Pesquisa .....	18
2.2. Caracterizando o ambiente virtual da pesquisa.....	19
2.3. Configuração das Tarefas para o Produto Educacional .....	21
2.4. Caracterizando a disciplina: Matemática Aplicada II.....	22
2.5. Quem são os estudantes envolvidos na pesquisa? .....	23
2.6. Os dados da Pesquisa e procedimento de análise .....	25
2.6.1. Os dados da pesquisa .....	25
2.6.2. Procedimentos de análise dos dados .....	27
3. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS .....	29
3.1. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral .....	29
3.1.1. Alguns Pressupostos Históricos.....	30
3.1.2. A Disciplina Cálculo Diferencial e Integral .....	31
3.1.3. Estrutura dos Livros Didáticos quanto ao Cálculo Diferencial e Integral .....	31
3.1.4. As dificuldades nos Processos de Ensino e de Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral .....	33
3.1.5. Estudos e Pesquisas em Cálculo no âmbito da Educação.....	35
3.1.6. Pesquisa em Ensino de Cálculo mediado pela Tecnologia.....	37
3.2. Ensino Híbrido .....	39
3.2.1. O papel da tecnologia para o ambiente escolar.....	39
3.2.2. Ensino Híbrido: apontamentos iniciais .....	40
3.2.3. Ensino Híbrido: caracterizando diferentes modelos .....	42
3.2.4. Ensino Híbrido: inserindo no ambiente escolar .....	47
4. TAREFAS QUE COMPÕEM O PRODUTO EDUCACIONAL: VERSÃO APLICADA .....	49
4.1. Tarefa 1: Integral Definida na Distribuição Normal.....	50
4.2. Tarefa 2: Integral por Substituição .....	54
4.3. Tarefa 3: Teorema Fundamental do Cálculo .....	57
5. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO DESENVOLVIMENTO DAS TAREFAS .....	60
5.1. Tarefa 1 – Distribuição normal: função densidade.....	61
5.1.1. Respostas suficientes para a atividade 1 .....	62
5.1.2. Respostas insuficiente para a atividade 1 .....	65

5.1.3. Respostas suficientes para a atividade 2.....	67
5.1.4. Respostas insuficientes dos alunos na atividade 2 .....	69
5.1.5. O que os estudantes comentaram sobre a experiência na realização da Tarefa 1? ....	71
5.2. Tarefa 2 – Integral por Substituição: u e du.....	72
5.2.1. Respostas suficientes para a tarefa 2.....	73
5.2.2. Respostas insuficientes para a tarefa 2 .....	78
5.2.3. O que nos disseram os estudantes sobre a Tarefa 2.....	82
5.3. Tarefa 3 – Teorema Fundamental do Cálculo.....	86
5.3.1 Respostas suficientes para a tarefa 3 .....	86
5.3.2 Respostas insuficientes dos alunos na tarefa 3.....	92
6. PERCEPÇÕES DO PESQUISADOR E DOS ALUNOS QUANTO À ABORDAGEM HÍBRIDA NO ESTUDO DE INTEGRAIS .....	98
6.1. Percepções do pesquisador .....	98
6.2. Percepções dos alunos .....	104
6.3. Produto Educacional a partir das reflexões com o desenvolvimento da pesquisa.....	110
CONSIDERAÇÕES DA PESQUISA .....	112
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	116
APÊNDICES .....	121
APÊNDICE 1 – Levantamento inicial dos alunos para a pesquisa .....	122
APÊNDICE 2 – Termo para uso de áudio e registros do ambiente virtual do GeoGebra..	126
APÊNDICE 3 – Questões para a concluir a coleta de dados.....	128

## 1. INTRODUÇÃO

O Ensino Superior requer dos alunos atitudes proativas, que envolvam empenho, dedicação e, muitas vezes, superação. Na área de exatas e engenharias, algumas disciplinas que integram os primeiros períodos dos cursos são consideradas um desafio para os estudantes, como Cálculo Diferencial e Integral (Cálculo) e Geometria Analítica.

No âmbito da pesquisa, pode-se mencionar que alguns estudos apontam que parte dos alunos têm apresentado baixos índices de rendimento, o que se pode confirmar quando verificamos os dados de evasão e reprovação nas instituições de Ensino Superior. Silva (2017), Bezerra (2015) e Rezende (2003), mencionam que o encaminhamento feito nas aulas ainda segue características de um modelo tradicional de ensino e aprendizagem, considerando as semelhanças, tais como a reprodução de exercícios de fixação, que são realizadas por meio de listas. Embora com diferentes nomes como, por exemplo, Matemática, Matemática Aplicada, Cálculo I, ou ainda, Cálculo Diferencial e Integral, tais disciplinas seguem a mesma ementa, que se resume no estudo da diferenciação e integração de funções reais de uma variável real.

Considerando os apontamentos mencionados anteriormente, que motivaram o interesse pelo estudo do Cálculo, a pesquisa partiu também da experiência do pesquisador enquanto aluno de graduação em um curso de Licenciatura em Matemática, em uma universidade pública, do interior do Estado do Paraná. Na graduação, seu primeiro contato com a disciplina não foi diferente do que foi citado anteriormente (SILVA, 2017; BEZERRA, 2015; REZENDE, 2003). Os conteúdos seguiam de acordo com a ementa já definida, os conceitos eram propostos com base em Guidorizzi (2001), que foi referencial e material de consulta para as aulas, bem como, para as listas de exercícios propostas. Quanto à organização da sala, os alunos eram enfileirados, o professor ficava à frente das carteiras e utilizava o quadro, realizando anotações e representações para conduzir a aula.

O pesquisador, em outro momento, já como docente, se deparou com a ementa a ser seguida e livros (como, por exemplo, GUIDORIZZI, 2001; ANTON, 2007; STEWART, 2013) como referências básicas para as aulas. Os encaminhamentos iniciais para as aulas foram os mesmos caracterizados como tradicionais, propondo listas de exercícios para fixação de conteúdo, para complementar a aula. Os resultados obtidos, no final das avaliações, não eram satisfatórios: alguns alunos, por exemplo, não conseguiam resolver todos os exercícios

propostos, ou não apresentavam um bom desempenho. Ainda, cabe mencionar os casos de evasão, que podem ter sido motivados após o baixo rendimento das primeiras avaliações.

Diante disso, algumas inquietações quanto ao ensino de Cálculo motivaram o pesquisador na busca de alternativas que fornecessem elementos para compreender o que poderia ser melhorado e verificar quais ações poderiam ser implementadas em sala aula.

Por isso, refletir sobre o encaminhamento dado em sala foi o ponto de partida que desencadeou algumas questões que motivaram o interesse dessa pesquisa. Esse mesmo encaminhamento (aula expositiva, resolução de exercícios no caderno e lista de exercícios) é muito frequente nos cursos de Ensino Superior, mas qual o significado, para os alunos, em apenas reproduzir exercícios? Enquanto o professor está explicando, os alunos apenas concordam com o exposto. Mas será que há construção do conhecimento? As atividades propostas em sala, em reproduzir o que já é feito há muito tempo, satisfazem os objetivos de aprendizagem? Será que realmente listas de exercícios são suficientes para compreender os conteúdos?

Embora essas questões sejam complexas para serem respondidas em apenas uma pesquisa de mestrado, elas indicam inquietações e dúvidas quanto ao ensino de Cálculo e deram subsídios para determinar a questão de pesquisa.

Os argumentos já expostos se aproximam dos objetivos do projeto de pesquisa<sup>1</sup> “investigação de um ambiente educacional para o Cálculo Diferencial e Integral em condições reais de ensino”, ao qual nossa pesquisa está vinculada. O projeto teve por objetivo investigar os processos envolvidos na caracterização, na implementação e na avaliação de um ambiente educacional para a disciplina de Cálculo e suas consequências para a aprendizagem (BORSSOI; TREVISAN; ELIAS, 2017).

Os conteúdos e como eles são abordados foram também objeto de estudo da pesquisa. O estudo de integrais, por exemplo, geralmente, é o último conteúdo contemplado na disciplina de Cálculo. Comumente, a integral definida é associada ao cálculo de áreas de regiões curvilíneas, quando essa é apenas uma de suas aplicações. Por vezes, os métodos para resolução, como, por exemplo, da substituição ou da integração por partes acabam ficando apenas para as listas e exercícios. Assim, aliado aos questionamentos colocados, surgiu o interesse em pensar em encaminhamentos que possam contribuir para o estudo de conceitos do Cálculo, mais especificamente, sobre Integrais.

---

<sup>1</sup> Aprovado no Edital Universal 14/2014 do CNPq.

Considerando esses questionamentos, uma primeira experiência foi desenvolvida no segundo semestre de 2017 pelo pesquisador, enquanto docente da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, no curso de Ciências da Computação, em uma universidade federal no interior do Estado do Paraná. Na ocasião, foi implementado o uso da tecnologia nas aulas, com o intuito de analisar quais eram as primeiras percepções do pesquisador, que ainda não tinha vivência com uma metodologia que associasse o ensino de Cálculo com o uso da tecnologia.

Esse contato com a tecnologia, mesmo que ainda pouco aprofundado, foi importante para que o primeiro passo na implementação fosse dado, pois, “para que a personalização aconteça, é preciso que o professor reveja as propostas desenvolvidas em sala de aula, de forma a oportunizar ao aluno a efetiva participação na construção do conhecimento” (BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015, p. 70).

As instituições de ensino, com o passar do tempo, sofreram grande influência da tecnologia. A busca por materiais, que antes ocorria apenas em livros, apostilas e revistas, acabaram inseridos em bibliotecas virtuais, pela facilidade em se encontrar, a qualquer momento e local, as informações, por meio da *internet*, sem precisar se deslocar fisicamente.

Algumas instituições de Ensino Superior têm promovido o uso da *internet* em diferentes momentos do curso, ou mesmo, na sua oferta do curso, seja ele na modalidade presencial, semipresencial ou à distância, por meio do ambiente virtual de aprendizagem (AVA). Em Brasil (2007), AVA é definido como:

Programas que permitem armazenamento, a administração e a disponibilização de conteúdos no formato Web. Dentre esses, destacam-se: aulas virtuais, objetos de aprendizagem, simuladores, fóruns, salas de bate-papo, conexões a materiais externos, atividades interativas, tarefas virtuais (webquest), modeladores, animações, textos colaborativos (wiki) (p.11).

Para Lopes e Scherer (2018), para que um ambiente virtual seja favorável à aprendizagem, ele deve constituir um local de diálogo, de discussão, de modo que todos se comprometam com as ações a serem desenvolvidas no ambiente, independente da tecnologia de comunicação abordada.

Horn e Staker (2015), na obra intitulada “*Blended: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação*”, mencionam que a tecnologia tem se tornado um meio mais prático e rápido para se comunicar, ou mesmo estudar. Os autores propõem que o ensino precisa ser disruptivo, no sentido de mudanças na metodologia em relação ao uso da tecnologia. Na referida obra, promovem uma discussão sobre o uso de ambientes virtuais para aprendizagem, os quais se remetem ao ensino, que é caracterizado como Ensino Híbrido.



O Ensino Híbrido é um programa de educação formal no qual um estudante aprende, pelo menos em parte, por meio de aprendizagem on-line, sobre o qual tem algum tipo de controle em relação ao tempo, o lugar, ao caminho e/ou ao ritmo e, pelo menos em parte, em um local físico, supervisionado, longe de casa (HORN; STAKER, 2015, p. 54).

Pode-se considerar que a tecnologia digital tem proporcionado interação e comunicação entre pessoas, em diferentes momentos, seja numa plataforma *on-line* ou mesmo *off-line*. É, atualmente, o mais rápido meio de comunicação para busca e pesquisa. Permite, ainda, por exemplo, que a qualquer momento e local, seja possível publicar, compartilhar, comentar, interagir, enviar *e-mails*, buscar vídeos e fotos. Nesse sentido, ocorre a facilitação da busca por livros e materiais, de uma forma rápida e prática, o que pode acabar reduzindo a presença dos alunos em uma biblioteca física.

Podemos destacar que a tecnologia tem modificado a forma de acesso dos alunos aos materiais, como se observa nas instituições de Ensino Superior que oferecem tutoriais, videoaulas, disciplinas e/ou cursos parcialmente ou totalmente *on-line*. Essa configuração de ensino tem dado oportunidade de estudar, de onde quiser, e de acordo com a disponibilidade de cada aluno. Nesse modelo de ensino, o professor tem desempenhado o papel de tutor que, além de elaborar, é quem acompanha e dirige as atividades a serem cumpridas (PONTES, 2013; BACICH, TANZI NETO e TREVISAN, 2015; SILVA, 2016).

No entanto, causar grandes mudanças nas aulas, no modo de ministrar e encaminhar uma atividade, por exemplo, requer planejamento e preparação do docente. Ele pode adaptar suas atividades no intuito de explorar mais a capacidade dos alunos durante o processo de aprendizagem, sem deixar de lado os objetivos do conteúdo.

Diante do que foi exposto, buscamos investigar *“Como o uso da tecnologia pode contribuir para o estudo da integral de funções de uma variável real, a partir de tarefas propostas em uma perspectiva de Ensino Híbrido?”*

Com o intuito de responder à questão mencionada, nos dedicamos nessa pesquisa a um estudo teórico sobre o ensino de Cálculo e o uso da tecnologia no âmbito da Educação Matemática, bem como, na elaboração de materiais e sua implementação em condições reais de ensino, buscando dados que permitissem resultados para a pesquisa.

Foram envolvidos em tal estudo acadêmicos do curso de Ciências Econômicas, que cursavam a disciplina de Matemática Aplicada II, a qual contempla, em sua ementa, o estudo de integrais. Para o planejamento e elaboração das tarefas no ambiente virtual foi feito um

estudo da ementa da disciplina, assim como, entrevistas, por meio de questionário e acompanhamentos constantes das atividades.

Nessa pesquisa, assumimos “tarefa” no sentido expresso por Ponte et al. (2015), para os quais “[...] as tarefas são reconhecidas como elemento organizador da atividade dos alunos” (p. 111). Para Ponte (2014), a atividade pode ser física ou mental, diz respeito essencialmente ao aluno e refere-se àquilo que ele faz num dado contexto. Já a tarefa

representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é exterior ao aluno (embora possa ser decidida por ele). Na verdade, as tarefas são usualmente (mas não necessariamente) propostas pelo professor, mas, uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo aluno e podem dar origem a atividades muito diversas (ou a nenhuma atividade). (PONTE, 2014, p. 15).

Portanto, a atividade é uma ação do estudante e a tarefa é exterior a ele. Posto desse modo, as tarefas se apresentam como uma ferramenta importante nos processos de ensino e aprendizagem, possibilitando ao aluno se colocar em atividade (BORSSOI; TREVISAN; ELIAS, 2017).

Isso posto, definimos como objetivo geral: “Investigar as possíveis contribuições da implementação da tecnologia na resolução de tarefas envolvendo conceitos de integrais de funções de uma variável real, no Ensino Superior”.

Para atingir o objetivo geral, objetivos mais específicos foram traçados: elaborar tarefas mediadas pela tecnologia a serem propostas em um ambiente virtual de ensino e de aprendizagem; analisar o desenvolvimento, pelos alunos, de tarefas para o estudo de integrais em condições reais de ensino; investigar os efeitos do uso de tecnologias, de forma direcionada, integradas às tarefas; e, por fim, elaborar um Produto Educacional.

A dissertação está organizada em sete capítulos: no primeiro, intitulado introdução, elencamos as circunstâncias que nos motivaram a essa pesquisa e delineamos o problema de investigação, o objetivo geral e objetivos específicos. Além disto, traçamos alguns apontamentos iniciais norteadores e uma apresentação sucinta de como organizamos os demais capítulos.

Já no segundo capítulo, apresentamos os aspectos metodológicos relacionados à pesquisa, assim como: a metodologia de pesquisa, a caracterização do ambiente educacional, o perfil dos alunos matriculados na disciplina de Matemática Aplicada do curso de Ciências Econômicas, descrevendo como foram realizadas as coletas de dados, o ambiente virtual de aprendizagem, a abordagem híbrida contemplada na pesquisa e algumas considerações sobre as tarefas propostas para o Produto Educacional.

No terceiro capítulo, apresentamos a fundamentação teórica para a realização desta pesquisa. Nessa seção, são feitas algumas discussões em relação ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral, destacando aspectos históricos, que nortearam estudos e pesquisas no âmbito da Educação Matemática, como está organizado nos livros didáticos, bem como, sua relação com a tecnologia. E ainda, são colocados alguns apontamentos sobre o entendimento do Ensino Híbrido, considerando sua relevância para o ambiente educacional e suas modalidades híbridas de ensino. Por fim, tecemos algumas considerações para inserção do Ensino Híbrido.

Já no quarto capítulo é apresentada a versão, na íntegra, de algumas das tarefas que foram propostas no ambiente virtual para que os alunos as desenvolvessem.

No quinto capítulo, passamos à descrição e análise dos dados da pesquisa à luz do referencial teórico apresentado. A análise foi feita a partir das soluções dadas para as tarefas propostas, verificando se as resoluções foram suficientes ou não, para atender os conceitos exigidos.

O sexto capítulo, por sua vez, foi dedicado a descrever a vivência do pesquisador, desde o início da implementação da tecnologia em turmas que antecederam a coleta de dados para pesquisa, bem como a experiência na turma em que participou da coleta de dados (comentando o questionário inicial aplicado na turma, como foram conduzidas as primeiras aulas e a organização do grupo na plataforma virtual do GeoGebra) e algumas considerações sobre cada tarefa proposta. Ainda, são mencionadas algumas conjecturas dos alunos, a partir de uma entrevista, o que permitiu verificar como a tecnologia contribuiu para a aprendizagem de integrais. Também constam relatos quanto à implementação da tecnologia, sobre as tarefas propostas e as mudanças na rotina de estudos dos alunos.

Por fim, são apresentadas as considerações finais da pesquisa, destacando como a experiência em implementar o uso do Ensino Híbrido favoreceu a aprendizagem no estudo de tópicos de integrais.

## 2. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo serão apresentados os aspectos metodológicos da pesquisa que, por ser de natureza qualitativa (MOREIRA, 2011), se mostram relevantes para a proposição e abordagem da questão de pesquisa. O capítulo é estruturado a partir das seguintes seções: Delineamento da pesquisa; Caracterizando o ambiente virtual de pesquisa; Configurações das tarefas para o Produto Educacional; Caracterizando a disciplina: Matemática Aplicada II; Quem são os estudantes envolvidos na pesquisa? Os dados da Pesquisa e procedimento de análise.

### 2.1. Delineamento da Pesquisa

A definição da questão de pesquisa levou em conta um levantamento realizado no banco de dissertações e teses da Capes<sup>2</sup>, com os temas sobre ensino de Cálculo e que indicam o uso de ambientes virtuais de aprendizagem.

Os termos que foram inseridos como palavras-chave, para a busca na plataforma, foram: Ensino de Integrais e Ensino Híbrido; Ensino de Integrais e Ambientes Virtuais. Os resultados obtidos compreendem o período de janeiro de 2008 a março de 2017. Foram divulgados no trabalho intitulado “Um estudo sobre as possibilidades do Ensino Híbrido para o Cálculo Diferencial e Integral” (SILVA, BORSSOI, 2017).

Em relação aos termos Ensino de Integrais e Ensino Híbrido, a pesquisa mostrou ao todo 9 trabalhos, entre dissertações e teses. Para Ensino de Integrais e Ambientes Virtuais, foram encontradas apenas 2 pesquisas de mestrado. Embora os resultados indicassem que houve o uso do termo Ensino Híbrido, no entanto, a leitura deles mostrou que houve o uso de algum *software* para proposição de atividades. Esses resultados permitiram verificar que ainda não tem sido comum o uso do Ensino Híbrido e ainda há poucas pesquisas que discutem seus encaminhamentos para sua implementação.

---

<sup>2</sup> Disponível em: <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#/>

Desta forma, o intuito dessa pesquisa é verificar “*Como o uso da tecnologia pode contribuir para o estudo da integral de funções de uma variável real, a partir de tarefas propostas em uma perspectiva de Ensino Híbrido?*”

Para responder à questão de pesquisa, buscamos investigar as possíveis contribuições de tarefas, envolvendo conceitos de integrais de funções de uma variável real, mediadas pelo uso da tecnologia, que tenham potencial para compor um ambiente virtual de aprendizagem. Assim, foram elaboradas Folhas de Trabalho<sup>3</sup> que pudessem ser propostas no ambiente virtual do GeoGebra e, por meio da análise das respostas dos alunos, buscamos investigar os efeitos do uso da tecnologia, de forma direcionada no ensino de integrais. O ambiente virtual de aprendizagem, composto pelas Folhas de Trabalho em uma abordagem híbrida, compõe o Produto Educacional.

Na seção seguinte é feita a caracterização do ambiente virtual da pesquisa, para os alunos da disciplina de Matemática Aplicada II, proporcionado por meio da plataforma *on-line* do GeoGebra.

## 2.2. Caracterizando o ambiente virtual da pesquisa

O uso de ambientes virtuais de aprendizagem tem se popularizado nos últimos anos, junto com o crescimento do ensino à distância e mesmo do ensino semipresencial. Para Brasil (2007), esses ambientes são caracterizados por plataformas que permitem armazenamento de conteúdo em um formato *on-line*. Um ambiente virtual, segundo Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015), é uma ferramenta que oferece meios para a organização de materiais ou atividades que possam apoiar o processo de ensino e de aprendizagem.

Um ambiente virtual de aprendizagem (AVA) é um espaço *on-line* construído para proporcionar interações entre usuários. Essas interações podem ser variadas, síncronas ou assíncronas, de um-para-todos (uma mensagem compartilhada com todos que estão no ambiente, por exemplo, um aviso enviado pelo tutor aos estudantes), de um-para-um (uma mensagem privada enviada a uma pessoa específica, por exemplo, de um aluno para seu tutor) ou de todos-para-todos (mensagens podem ser enviadas e visualizadas por todos, por exemplo, as discussões via fórum). Dessa forma, há

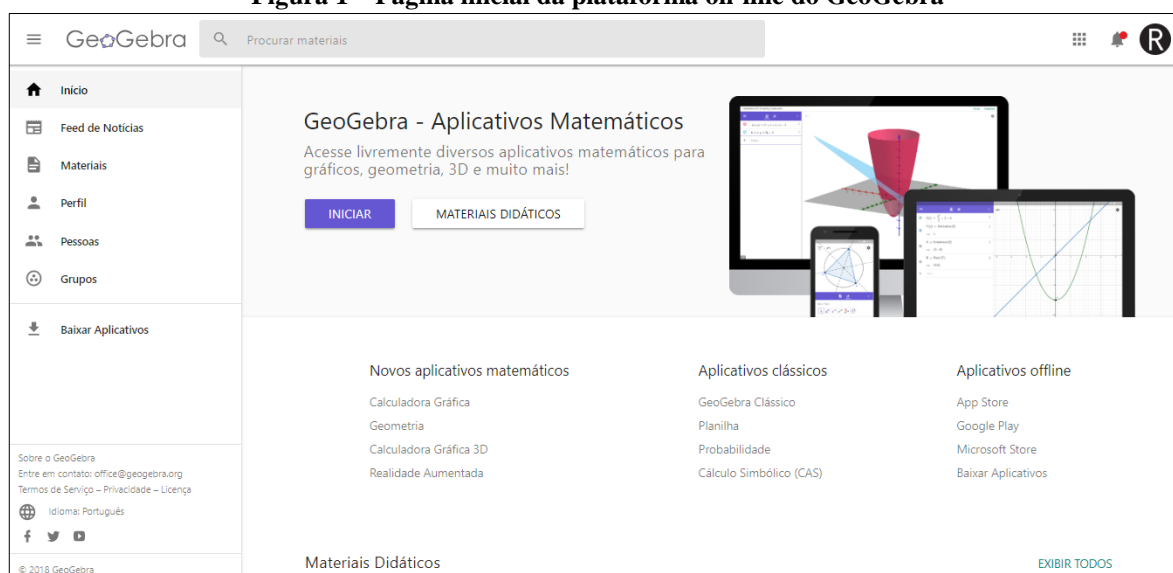
---

<sup>3</sup> No início dessa pesquisa o recurso utilizado para disponibilizar as tarefas no ambiente virtual do GeoGebra era denominado Folha de Trabalho, mas, recentemente esse recurso passou a ser denominado como Atividade. Neste texto optamos por manter a denominação Folha de Trabalho.

semelhanças com a sala de aula presencial (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015, p. 146).

O ambiente virtual de aprendizagem que se configura nessa pesquisa é a plataforma *on-line* do GeoGebra<sup>4</sup>, cuja interface inicial é ilustrada pela Figura 1. Esse ambiente permite inserir materiais construídos na versão *off-line* ou que tenham sido feitos por outras pessoas que os compartilham, publicando na plataforma. É possível, no ambiente *on-line*, realizar construções na própria plataforma ou importar arquivos do *desktop*. A plataforma tem a opção de organizar materiais, seja em pastas ou *e-book*, ou ainda, pesquisar e reutilizar materiais construídos por outras pessoas.

**Figura 1 – Página inicial da plataforma on-line do GeoGebra**



Fonte: <https://www.geogebra.org/>

Ainda é possível, na plataforma, organizar grupos, conforme mostra a Figura 2. No caso da presente pesquisa, foi formado um grupo para os estudantes da disciplina de Matemática Aplicada II. Nesse grupo, são propostas tarefas a serem realizadas dentro de um prazo estipulado, utilizando um dos recursos. Esta é a Folha de Trabalho, a qual permite criar e organizar tarefas, de acordo os propósitos educacionais.

<sup>4</sup> <https://www.geogebra.org/>

**Figura 2 - Interface dos grupos no GeoGebra**



**Fonte: Ambiente virtual no GeoGebra**

Ainda na plataforma, dentre as possibilidades que podem ser exploradas, destacamos a interação entre professor e aluno, e mesmo entre os alunos. Em cada tarefa é possível escrever comentários ou deixar questionamentos na Folha de Trabalho.

Na sequência, apontamentos sobre a configuração das tarefas que compõem o Produto Educacional são apresentados.

### **2.3. Configuração das Tarefas para o Produto Educacional**

As tarefas foram planejadas e organizadas em Folhas de Trabalho, na plataforma do GeoGebra, para atender os conceitos discutidos sobre o ensino de integrais, com o intuito de que os estudantes pudessem rever e se apropriar dos conceitos que foram discutidos em sala.

Inicialmente, foram realizadas buscas na plataforma do GeoGebra para conhecer os materiais disponibilizados por outros membros. À medida que os recursos digitais existentes atendessem às necessidades da pesquisa, poderiam ser reutilizados, como a construção, por exemplo, de um recurso para explorar o Teorema Fundamental do Cálculo, por Lemke e Siple (2017), que passou a integrar uma das tarefas (apresentada no Capítulo 4) propostas no ambiente virtual para a pesquisa.

A calculadora de probabilidades do *software* GeoGebra, por exemplo, motivou a elaboração de uma construção envolvendo a Função Densidade da Distribuição Normal ( $Z$ ), para que fosse possível fazer a exploração da aproximação da probabilidade, por meio da integral definida (SILVA; BORSSOI, 2018).

A Folha de Trabalho permite inserir construções do GeoGebra, bem como, vídeos, fotos e arquivos em extensão PDF. Essas opções foram utilizadas na elaboração das Folhas de Trabalho, no intuito de complementar as tarefas.

Na seção seguinte, é feita a caracterização da disciplina e dos estudantes que participaram da pesquisa.

#### **2.4. Caracterizando a disciplina: Matemática Aplicada II**

A disciplina denominada Matemática Aplicada II, é ofertada no período noturno, para o segundo ano do curso de Ciências Econômicas, em uma universidade estadual no interior do Paraná, com uma carga horária anual de 72 horas-aula, sendo ministrada em 2 horas-aula por semana.

Na ementa da disciplina estão elencados: aplicações de derivadas no estudo de funções (problemas de otimização – teste da derivada primeira e segunda); introdução às matrizes; operações com matrizes; tópicos de álgebra matricial e introdução as integrais.

A disciplina de Matemática Aplicada II, além de contemplar e dar continuidade nos estudos iniciados pela disciplina de Matemática Aplicada I, tem por intuito fornecer aos alunos conceitos da Matemática para aplicações posteriores, dentro do próprio curso, além de possibilitar a construção de conhecimento necessário aos acadêmicos interessados em aprofundar seus estudos para a disciplina de Econometria<sup>5</sup>.

Em particular, para esta pesquisa, serão abordados temas relativos a integrais, de acordo com os conteúdos elencados na ementa da disciplina, sendo eles: integral indefinida; tabela de integração; integração por partes; integração definida e aplicações.

Como metodologia de ensino, esperava-se que, ao longo do curso, diferentes estratégias pedagógicas fossem vivenciadas, como aulas expositivas, atividades de pesquisa, que poderiam ser realizadas em grupos ou individualmente, bem como a resolução de exercícios.

---

<sup>5</sup> Disciplina do terceiro ano do curso de Ciências Econômicas



Para elaborar e planejar as tarefas foi considerado o plano de ensino da disciplina, o qual, além de sugerir que sejam propostos exercícios para o estudo de integrais, também recomenda o uso de *softwares* matemáticos, como o GeoGebra para auxiliar na ilustração dos conteúdos.

Em seguida, são apresentados alguns apontamentos sobre os discentes envolvidos na pesquisa, assim como, elencadas características que foram percebidas por meio de um questionário inicial aplicado.

## 2.5. Quem são os estudantes envolvidos na pesquisa?

A disciplina de Matemática Aplicada II, do curso de Ciências Econômicas, em 2018 era dividida em duas turmas, A e B, com 20 e 12 alunos matriculados, respectivamente. Assim, esses 32 alunos foram os sujeitos participantes da pesquisa, inicialmente.

Com o intuito de conhecer o perfil dos estudantes e alguns de seus aspectos pertinentes para continuidade da pesquisa, um levantamento inicial foi realizado com as turmas, a partir do recurso *Formulários Google*<sup>6</sup>, o qual permite criar questionários e armazenar dados.

As questões tinham diferentes abordagens, entre elas: identificar se os alunos eram integrantes do mesmo curso; sua afinidade com a disciplina; tempo que se dedicavam aos estudos; quais atividades participavam, além da graduação e, ainda, algumas questões, sobre o uso da *internet* e para qual finalidade a utilizavam (ver Apêndice 1).

Dos 32 alunos matriculados e que estavam frequentando as aulas, apenas 16 estudantes responderam o questionário. Desses, todos estavam cursando Ciências Econômicas, e 7 deles cursavam a disciplina pela primeira vez. Alguns destes, concluíram o Ensino Médio há 10 anos e estiveram fora do ambiente escolar por todo esse período, retomando recentemente os estudos.

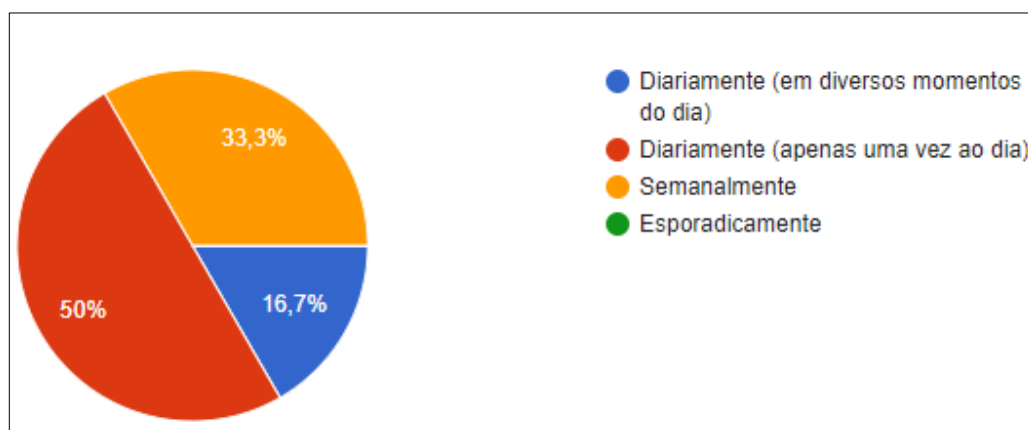
Uma outra questão investigava as atividades que exerciam, além do curso. O levantamento apontou que a maioria dos alunos estavam inseridos em alguma atividade, como por exemplo, iniciação científica, monitoria, ou trabalhavam durante o período vespertino. Esses dados indicaram escasso tempo para estudos, além da sala de aula. Porém, os estudantes mencionaram que se organizavam, seja nos intervalos durante o dia, nos finais de semana, feriados, ou mesmo, em dias de folga e férias, para realizar suas atividades.

---

<sup>6</sup> <https://www.google.com/intl/pt-BR/forms/about/>

Quanto ao uso da *internet*, os estudantes responderam que têm acesso em casa, ou pelo celular, e que faziam uso para diferentes fins. A maioria apontou que usava para ter acesso a redes sociais e verificar *e-mails*. A Figura 3 mostra que 50% dos discentes verificava seus *e-mails* diariamente, pelo menos uma vez ao dia; outros 33,3% o acessavam semanalmente. Alguns conseguiam acessar, diariamente, em diversos momentos do dia (16,7%). Já a opção esporadicamente, que estava no questionário, não foi assinalada por nenhum estudante.

**Figura 3 - Gráfico de setores quanto ao acesso à e-mails**



**Fonte: Google Formulários**

Quando questionados sobre a frequência de participação na monitoria da disciplina, primeiramente responderam que não participavam e, quando questionados sobre o motivo de não participarem, justificaram que não havia monitoria para Matemática Aplicada II. Esta, ocorrida apenas no primeiro ano do curso (Matemática Aplicada I).

Os alunos também foram questionados sobre seus conhecimentos quanto à plataforma do GeoGebra. Algumas respostas dadas mostraram que o *software* já era conhecido e havia sido utilizado em outros momentos do curso, porém, não conheciam seu ambiente virtual.

As respostas a esse questionário contribuíram para planejar as atividades de ensino e sua implementação com a turma, levando em conta o perfil dos alunos em relação aos aspectos levantados.

Na próxima seção, apresentamos os procedimentos para a análise de dados.

## 2.6. Os dados da Pesquisa e procedimento de análise

Essa seção será dividida em duas subseções, para melhor explicar como foram coletados os dados da pesquisa e o procedimento de análise utilizado.

### 2.6.1. Os dados da pesquisa

Nessa pesquisa, são considerados dados a serem analisados: o conjunto de material gerado pelos registros dos alunos, arquivados no AVA do GeoGebra (como, por exemplo, anexos de registros do caderno, as respostas ao levantamento inicial, já mencionado na seção 2.2.3), além de uma entrevista realizada com alguns alunos, ao final do desenvolvimento da pesquisa.

As tarefas analisadas foram inseridas na plataforma do GeoGebra, as quais foram organizadas e propostas de acordo com o tema das aulas, postadas no grupo “Matemática Aplicada II”, na aba Grupos. Embora fossem duas turmas, A e B, como mencionamos, para o desenvolvimento da pesquisa e análise dos dados, os estudantes estavam em um único grupo, sem distinção de turmas, visto que, para ambas as turmas, foi seguido o mesmo planejamento das aulas.

Os alunos assinaram um termo de consentimento, que consta no Apêndice 2, permitindo o uso de dados e áudio realizados para pesquisa. Para não identificar os sujeitos, preservando o anonimato, serão nominados na seção de análise das tarefas como estudantes (E) seguidos de um número, como por exemplo, E1, E2 e E3.

Para a coleta de dados foram propostas na plataforma do GeoGebra, tarefas que foram decorrentes dos conceitos discutidos em aula sobre integrais. Foram, ao todo, três tarefas aplicadas, pensadas na perspectiva do Ensino Híbrido. Em específico, foi contemplado o *laboratório rotacional* (BACICH, TANZI NETO e TREVISANI, 2015), o qual faz uso da sala de aula e laboratório de informática, e a *sala de aula invertida* (BACICH, TANZI NETO e TREVISANI, 2015), na qual os conceitos são estudados antes da aula e na sala de aula são realizadas atividades. Essas e outras abordagens híbridas serão caracterizadas na seção 3.2.3.

Para concluir a coleta de dados, foi organizada uma entrevista semiestruturada, no intuito de investigar como a abordagem híbrida pode ter contribuído para o processo de ensino,

além de obter informações para subsidiar a resposta à questão de pesquisa. Os alunos foram convidados a participar da entrevista, que foi realizada em um momento fora da aula, de acordo com a disponibilidade de cada um. Ao todo, foram entrevistados 11 alunos, sendo que cada entrevista foi registrada por meio de gravação de áudio.

As entrevistas foram organizadas seguindo os encaminhamentos da pesquisa semiestruturada. Biklen e Bogdan (1994, p. 136) apontam que “as boas entrevistas caracterizam-se pelo facto de os sujeitos estarem à vontade e falarem livremente sobre os seus pontos de vista. As boas entrevistas produzem uma riqueza de dados, recheados de palavras que revelam as perspectivas dos respondentes”. Nesse sentido,

Nas entrevistas semiestruturadas fica-se com a certeza de se obter dados comparáveis entre os vários sujeitos, embora se perca a oportunidade de compreender como é que os próprios sujeitos estruturam o tópico em questão. Se bem que este tipo de debates possa animar a comunidade de investigação, a nossa perspectiva é a de que não é preciso optar por um dos partidos. (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p. 135)

Como as entrevistas podem seguir diferentes encaminhamentos em uma investigação, os referidos autores chamam a atenção para a estratégia adotada. O investigador deve evitar questões que remetam a respostas como um simples “sim” ou “não”. O interessante é elaborar questões iniciais para conduzir a entrevista, de modo que o investigador possa obter dados que sustentem sua pesquisa. Segundo os autores, o próximo passo

[...] é o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. A análise envolve o trabalho com dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta de aspectos importantes e do que deve ser apreendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros. (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p. 205)

Para iniciar a entrevista, as questões (ver Apêndice 3) foram pensadas seguindo os encaminhamentos de Bogdan e Biklen (1994), as quais foram propostas e gravadas para facilitar a análise dos dados.

Na subsecção a seguir, são apresentados os procedimentos que foram adotados para realizar a análise desses dados.

## 2.6.2. Procedimentos de análise dos dados

Os procedimentos de análise de dados ocorreram por meio dos registros feitos pelos estudantes. Posteriormente, cada um dos registros foi observado e analisado qualitativamente. Segundo Moreira (2011), pesquisa qualitativa ou pesquisa interpretativa tem o mesmo significado. Segundo o referido autor, o pesquisador interpretativo registra e anota eventos, para usá-los como dados. Assim,

O investigador interpretativo observa participativamente, de dentro do ambiente estudado, imerso no fenômeno de interesse, anotando cuidadosamente tudo o que acontece nesse ambiente, registrando eventos – talvez através de audiotapes ou de videotapes -, coletando documentos tais como trabalhos de alunos, materiais distribuídos pelo professor, ocupa-se não de uma amostra no sentido quantitativo, mas de grupos ou indivíduos em particular, de casos específicos, procurando escrutinar exaustivamente determinada instância tentando descobrir o que há de único nela e o que pode ser generalizado a situações similares (MOREIRA, 2011, p. 50)

Analizamos se a solução continha elementos suficientes para apontar indícios de compreensão de conceitos. A ferramenta de interação da plataforma, que permitiu dar *feedbacks*, contribuiu para a análise.

Como as tarefas seriam analisadas em uma abordagem interpretativa, as resoluções que retornaram dos estudantes foram classificadas como suficientes ou insuficientes, em cada tarefa. Assumimos como suficientes as resoluções que atendiam aos objetivos esperados para cada tarefa, em que o estudante tenha mostrado compreensão do conteúdo. E, como insuficientes, os casos em que houve alguma carência, ou que a resposta apresentada não apontou indícios de que houve compreensão. Assim, a análise é de cunho interpretativo (MOREIRA, 2011) para verificar como a tecnologia contribuiu para o estudo de integrais.

Para apoiar as reflexões e discussões dos dados considerados insuficientes, levamos em conta a observação dos erros e equívocos que foram cometidos pelo aluno na realização da tarefa, com o intuito de trabalhar e explorar essas resoluções para promover a aprendizagem. Para Silva (2013):

O erro pode ser visto como um indicador dos conflitos gerados entre os conhecimentos que o estudante já possui e uma incorporação de novos que vão sendo elaborados à medida que o constrói. Muitas vezes este conflito revela-se na forma de ‘desvios’, de ajustes forçados, transgressões de conceitos estabelecidos, mas sempre revela algo de valioso com respeito à forma de pensar do estudante, merecendo, portanto, atenção e investigação do que produziu. (SILVA, 2013, p. 22)

Para o referido autor é importante usar o erro como uma oportunidade de intervenção na raiz do problema, em tempo adequado, via mediações, no intuito de aproximar sentido e significado para aprendizagem.

Esse encaminhamento para interferir a partir do erro foi realizado, nessa pesquisa, pelo *feedback* no ambiente virtual. Quando necessário, a intervenção sobre os erros se deu em sala de aula, pontuando-os com toda a turma.

Para os procedimentos de análise das entrevistas, lançamos mão do *software* Atlas TI<sup>7</sup>. Esse programa permite analisar vídeos, imagens e áudios, realizando anotações, observações e criando memorandos. A primeira etapa para coletar dados é a codificação, que segundo Charmaz (2009),

A codificação é o elo fundamental entre a coleta dos dados e o desenvolvimento de uma teoria emergente para explicar esses dados. Pela codificação, você *define* o que ocorre nos dados e começa a debater-se com o que isso significa. Os códigos manifestam-se em conjunto, como elementos da teoria nascente que explica esses dados [...]. (p. 72)

O olhar para os dados da entrevista foi uma oportunidade para refletir sobre dois dos objetivos específicos da pesquisa: analisar o desenvolvimento, pelos alunos, de tarefas para o estudo de integrais em condições reais de ensino; e investigar os efeitos do uso de tecnologias, de forma direcionada, integradas às tarefas.

No terceiro capítulo são elencados os pressupostos teóricos, nos quais está fundamentada a pesquisa.

---

<sup>7</sup> Disponível em: <https://atlasti.com/product/v8-windows/>. Licença adquirida pelo programa de pós-graduação.

### **3. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS**

Neste terceiro capítulo são trazidos os referenciais teóricos da pesquisa, no intuito de subsidiar os aspectos já mencionados nas outras seções, para o ensino Cálculo Diferencial e Integral e Ensino Híbrido.

Em relação ao ensino de Cálculo (BEZERRA, 2015; CABRAL, 2015; CARGNIN, 2013; SILVA, 2017; MACHIN, RIVERO e SANTOS-TRIGO, 2005; OLÍMPIO JUNIOR e VILLA-OCHOA, 2013), são abordados alguns aspectos históricos, bem como, sua oferta nos cursos de graduação e como é elencado nos livros didáticos. São ainda mencionadas algumas dificuldades, apontadas por pesquisadores, e o que tem sido feito no âmbito da Educação Matemática para promover o uso da tecnologia no Ensino Superior.

Alguns apontamentos que caracterizam o Ensino Híbrido e sua implementação (HORN, STAKER, 2015; BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015) são os modelos híbridos, elencados no intuito de possibilitar um entendimento dessa modalidade de ensino e as opções feitas para esta pesquisa.

A seguir, serão discutidos alguns apontamentos sobre o ensino de Cálculo Diferencial e Integral.

#### **3.1. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral**

Para discutir sobre o ensino de Cálculo Diferencial e Integral I, foram organizadas subseções, as quais são: Alguns Pressupostos Históricos; A Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral; Estrutura dos Livros Didáticos quanto ao Cálculo Diferencial e Integral; As dificuldades nos Processos de Ensino e de Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral I; Estudos e Pesquisas em Cálculo no Âmbito da Educação; Pesquisa em Ensino de Cálculo mediado pela Tecnologia.

### 3.1.1. Alguns Pressupostos Históricos

A história do Cálculo Integral, segundo Silva (2011) e Garzella (2013), inicia-se com um dos maiores matemáticos da antiguidade, Arquimedes de Siracusa (287-212 a. C.), com a finalidade de calcular a área de figuras e o volume de formas geométricas diversas, incluindo o círculo, a esfera e o cilindro. Os estudos de Arquimedes tiveram influência para que outros matemáticos, que marcaram a história, como, por exemplo, René Descartes (1596-1650 d. C.), Pierre Fermat (1601-1665 d. C.), Isaac Newton (1642-1727 d. C.) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716 d. C.) contribuíssem para a formalização do Cálculo que ensinamos.

Newton e Leibniz, no século XVII, não trabalharam juntos. Porém, mesmo independentes um do outro, tiveram grande relevância por meio das suas pesquisas. Podemos mencionar que ambos foram importantes para o desenvolvimento do Cálculo infinitesimal, que contribuiu para os fundamentos e conceitos do Cálculo que é ensinado atualmente. Newton, por exemplo, em seus estudos, desenvolveu o denominado método dos fluxos, por meio da quantidade de fluentes, que corresponde a determinação da tangente a uma curva de equação  $f(x, y) = 0$ , e da relação inversa à essa equação, originou o Teorema Fundamental do Cálculo (EVES, 2004).

Silva (2011) argumenta que Newton e Leibniz contribuíram para estabelecer a relação entre a determinação das tangentes a uma curva num ponto e o cálculo da área da região limitada por uma curva. Rezende (2003) destaca que a relação oposta entre a derivada e a integral foi, ainda, sustentada desde a formulação do Teorema Fundamental do Cálculo, por Newton e Leibniz.

Entretanto, Cauchy, no século XIX, foi além de combinar os conceitos de função e limite nos fundamentos do Cálculo. Esse período foi denominado ‘século do rigor’, que contou com os seus trabalhos para a formalização de conceitos. Por exemplo, quando Cauchy propôs a teoria da Integral independente da Derivada e Leibniz introduziu os símbolos da integral e da derivada, reformulando, assim, o conceito de função (REZENDE, 2003).

Em suma, os apontamentos em relação aos pressupostos históricos da disciplina permitem vislumbrar como foi pensado e formalizado o Cálculo Diferencial e Integral. Os estudos permitiram contribuir para a formalização da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, cuja caracterização apresentaremos na sequência.



### 3.1.2. A Disciplina Cálculo Diferencial e Integral

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral tem despertado, há algumas décadas, uma preocupação do Ensino Superior. Em geral, as disciplinas que integram as Ciências Exatas e Tecnológicas têm sido as responsáveis por elevados números de reprovação e desistência (CABRAL, 2015; SILVA, 2017; MACHIN, RIVERO e SANTOS-TRIGO, 2004; BEZERRA, 2015; OLÍMPIO JUNIOR e VILLA-OCHOA, 2013).

No primeiro semestre, ou no primeiro ano, em geral, os cursos nas áreas de Ciências Exatas e Engenharias têm, em sua grade de ensino, a disciplina de Cálculo. Tal disciplina contempla uma introdução, por meio do estudo de funções, das definições de limites e continuidade, e das derivadas e integrais para uma variável real (CABRAL e CATAPANI, 2003; CATAPANI, 2001; CABRAL, 1992; AMORIM e REIS, 2013; CABRAL, 2015).

Instituições de Ensino Superior (Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Universidade Estadual de Londrina e a Universidade Estadual de Maringá, por exemplo) apresentam características comuns quanto aos conteúdos contemplados na ementa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I: sistematização dos conjuntos numéricos; sistema cartesiano ortogonal; relações e funções no espaço real bidimensional; limites e continuidade de funções reais de variável real; estudo das derivadas de funções reais de variável real; estudo da variação de funções através dos sinais das derivadas; teoremas fundamentais do cálculo diferencial; estudo das diferenciais e suas aplicações; fórmula de Taylor e de MacLaurin; estudo das integrais indefinidas; estudo das integrais definidas; aplicações das integrais definidas.

Na próxima seção, serão discutidos como esses conteúdos, de Cálculo, mencionados anteriormente, têm sido abordados na bibliografia.

### 3.1.3. Estrutura dos Livros Didáticos quanto ao Cálculo Diferencial e Integral

Nos livros de Cálculo, ao analisarmos algumas bibliografias (STEWART, 2013; ANTON, 2007; GUIDORIZZI, 2001) que têm sido referência para docentes nos cursos de graduação, pode-se observar que tais obras seguem semelhanças quando comparadas no que se refere aos conteúdos e conceitos apresentados.

Esses conceitos seguem a influência das contribuições de Cauchy e Weierstrass, como referências para toda a formalidade da disciplina. BEZERRA (2015) aponta suas considerações ao analisar alguns dos principais autores, destacando o que tinham em comum.

Ao analisarmos os livros didáticos como Leithold, Swokowski, Elon Lages e coleção Schaum destinados em parte aos alunos dos cursos de Matemática no ensino de Cálculo, podemos observar que de maneira geral, estes seguem o mesmo padrão de organização das ideias e de procedimentos de cálculos. Os conteúdos são abordados segundo o processo de sistematização proposto por Cauchy e Weierstrass (Limite, Derivada e Integral). (p. 36)

Diante da análise apresentada pelo referido autor, Silva e Borsoi (2017) explicam que tais comentários remetem à um ensino que segue determinada formalidade na apresentação de conceitos, assim como nas demonstrações seguidas de exemplos e exercícios para verificação do conteúdo.

Rezende (2003), compartilhando os apontamentos feitos por Barufi (1999), no que tange a realização de um estudo nos livros de Cálculo, destacou que as obras analisadas apresentam conceitos a partir da noção de limite e números reais.

Ao analisar os textos didáticos usualmente empregados num curso inicial de Cálculo, Barufi (1999) detectou a predominância da sequência de “Cauchy-Weierstrass” na organização didática dos seus conteúdos programáticos. Esta sequência, consagrada no século XIX como a grande resposta às questões de Berkeley, consiste, basicamente, em fundamentar os conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral nas noções de limite e número real. Assim, primeiro define-se formalmente o conceito de limite, em seguida define-se continuidade, derivada e integral de uma função, nessa ordem, e a partir da noção de limite, “Limite-Continuidade-Derivada-Integral”, a sequência de Cauchy-Weierstrass, é, como muito mais propriedade, a sequência didática da maioria dos textos de Análise. (REZENDE, 2003, p. 8)

É perceptível, segundo Barufi (1999) e Rezende (2003), que o sumário dos livros de Cálculo ainda segue na mesma vertente. Podemos destacar, ainda, em Bezerra (2015), as mesmas características. Ou seja, não houve mudanças no formato dos livros de Cálculo.

Em relação ao ensino, Bezerra (2015) argumenta que primeiro é feita a sistematização. Porém, isso deveria ser o processo a ser realizado após a construção das ideias básicas. O autor comenta que esse encaminhamento deveria seguir como pressuposto a solução de problemas que envolvam a variabilidade e medidas. Assim, para o autor,

[..] para um bom desenvolvimento no ensino de Cálculo devem ser trabalhados duas diretrizes fundamentais: as questões da variabilidade (capacidade de reconhecer as variáveis e relacioná-las) e as questões da medida (problemas que envolvem áreas e volumes). (BEZERRA, 2015, p. 37)

Oportunizar que os conceitos sejam trabalhados na exploração de variáveis e problemas que envolvam áreas e volumes pode promover a interdisciplinaridade no Ensino Superior. Portanto,

[...] o ensino de Matemática deveria ser ministrado em três caminhos (Aritmética, Geometria e Álgebra) o que nos leva a questionar sobre o caminho do Cálculo. Porém o que se propõe não se relaciona à criação de mais um caminho, de mais um compartimento, mas que estes caminhos sejam articulados entre si e com outras disciplinas como a Física. Somente assim nossos estudantes serão contemplados com uma formação mais sólida que além de contribuir para evolução do ensino da Matemática e da Física, reduzirá significativamente os índices de não aprovação. (BEZERRA, 2015, p. 37)

Tais apontamentos deveriam ser considerados nos processos de ensino e aprendizagem, porém, percebe-se, nos livros básicos da disciplina, que ainda não é priorizado. Assim, refletir sobre os objetivos do curso e levar em consideração quais conteúdos devem ser contemplados, poderia contribuir para avaliar e analisar fatores que podem amenizar as dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem.

Se considerarmos o ensino de Cálculo, pautado na sequência proposta nos livros didáticos, e se as tarefas propostas aos estudantes forem tão somente os exemplos e exercícios propostos nos livros, a tendência é perpetuar o formato de Cauchy-Weierstrass, de acordo com Bezerra, 2015. Assim, é crucial repensar a proposição de tarefas que possam articular aritmética, geometria e álgebra de modo que a compreensão dos conceitos seja favorecida. Percebe-se que estudos em relação aos processos de ensino têm sido foco de pesquisas. Nesse viés, na sequência, elencamos as dificuldades apresentadas nos processos de ensino e de aprendizagem dessa disciplina.

#### **3.1.4. As dificuldades nos Processos de Ensino e de Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral**

Segundo Törner, Potari e Zachariades (2014) a pesquisa na área da educação para a disciplina de Cálculo está compreendida na aprendizagem dos alunos, em específico no Ensino Superior, quanto às concepções, intuições, bem como os obstáculos lógicos relacionados a conceitos de Cálculo - como os de função, limite, infinito, continuidade, derivada e integral.

Em relação aos discentes, são notáveis as dificuldades que têm apresentando ao ingressar no Ensino Superior, principalmente nas disciplinas da área de exatas, que têm sido apontadas como as responsáveis pelos índices consideráveis de evasão e reprovação (SILVA, 2017; BEZERRA, 2015). Já Cabral (2015) menciona a dificuldade que o estudante enfrenta, logo no início do curso, pois este momento exige uma nova organização. Ainda complementa que “o ensino superior exige novas maneiras de pensar e agir, pode-se dizer que se trata de uma quebra de paradigmas, impactando o modo como o aluno lida com o conhecimento, exigindo-lhe uma modificação de sua atitude, o que comumente não ocorre.” (p. 210)

Silva (2017) aponta algumas alternativas que podem ser pensadas no intuito de amenizar os rótulos (altos índices de evasão e reprovação, difícil aprendizagem) que a disciplina de Cálculo tem levado durante anos.

Contudo, através da nossa revisão sistemática de literatura nas principais revistas internacionais de pesquisa em matemática, descobrimos que a pesquisa sobre o ensino de cálculo em salas de aula do ensino secundário é bastante rara. Uma subjacente suposição é que a abordagem tradicional de ensino em escola secundária - e até no nível universitário - também é longe do que os estudantes podem entender e que, em geral, aprendizagem e ensino de cálculo é muito complexo (por exemplo, Dennis e Confrey, 1995) (TÖRNER; POTARI e ZACHARIADES, 2014, p. 552, tradução nossa)

Para os referidos autores, ainda têm sido raras as pesquisas sobre o ensino de Cálculo em sala de aula. Entretanto, Bezerra (2015) menciona que, em diferentes países, é comum encontrar dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo. No entanto, vem ganhando importância a discussão na literatura.

Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014) em um estudo sobre o campo de pesquisa de Cálculo, destacaram algumas tendências percebidas no levantamento bibliográfico, entre as quais estão: a identificação de conceitos errôneos para investigação dos processos pelos quais os alunos aprendem conceitos específicos; estudos em sala de aula e estudos sobre conhecimento, crença e prática.

Já Törner, Potari e Zachariades (2014) em um estudo sobre o Cálculo nas salas de aula europeias, analisam o currículo e o ensino em diferentes contextos educacionais e culturais, e apontam a necessidade de rever a abordagem em sala de aula, pois ainda é limitado a pesquisa. Os autores destacam que algumas instituições utilizam ferramentas digitais, enquanto outras, o ensino de Cálculo em sala aula ainda é bastante tradicional. No entanto, destacam que ainda na Europa carece que pesquisas avancem nesse âmbito.

Diante disso, que na sequência é apresentada uma breve explanação de estudos e pesquisas realizadas no âmbito da educação para situar quais encaminhamentos estão sendo dados.

### **3.1.5. Estudos e Pesquisas em Cálculo no âmbito da Educação**

No que se refere aos estudos e pesquisas sobre o Cálculo, atualmente, no cenário nacional, a comunidade da Educação Matemática mantém grupos de estudos sobre o Ensino Superior, que reúnem seus membros periodicamente em eventos como o Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) e Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM), bem como, periódicos Boletim de Educação Matemática (Bolema); Revista Eletrônica de Educação Matemática (Revemat); Portal de Periódicos Eletrônicos Científicos da UNICAMP (Zetetiké), para citar alguns que articulam e disseminam o trabalho que vem sendo realizado.

Embora esses estudos indiquem pesquisadores preocupados com os processos de ensino e de aprendizagem a difundir seus trabalhos, este não é um movimento recente, a saber, em âmbito internacional, por exemplo, destacamos

[...] o “Calculus Reform” deflagrado na década de 80, em virtude de um documento elaborado pelo matemático Peter Lasce que criticava severamente os cursos da época. Os precursores deste movimento defendiam o uso de tecnologia: software computacional e calculadora gráfica no ensino de Cálculo, devendo ser utilizada na aprendizagem de conceitos assim como na resolução de problemas, o objetivo era mostrar a aplicabilidade do Cálculo em situações reais e concretas. Dessa forma os alunos não precisariam desenvolver uma série de cálculos algébricos manualmente podendo fazer o uso dos recursos de computação. (BEZERRA, 2015, p. 32)

Marin (2009) elenca pesquisas realizadas por alguns países, tais como, Reino Unido, Canadá e Estados Unidos. Já no Brasil, Silva (2017) destaca o número crescente de trabalhos, que aborda pesquisas realizadas, embora o cenário do ensino de Cálculo seja insatisfatório.

Na pesquisa de Cabral (2015), a autora coloca em evidência a necessidade de repensar a metodologia de ensino, considerando os processos de aprendizagem que representam os baixos índices de aprendizagem pelos estudantes, de acordo com a proposta das diretrizes curriculares para os cursos de graduação.

As diretrizes curriculares para cursos de graduação, particularmente para os das CET<sup>8</sup>, recomendam que modificações devam ser realizadas não só em termos de conteúdos, grades curriculares ou carga horária total, mas também em relação às metodologias de ensino e aos ditos processos de avaliação de aprendizagem. De outro modo, sinaliza-se que didática e pedagogia devem conversar, estar em sintonia, de modo a concluir que seja considerado o aluno como centralidade de todo e qualquer procedimento metodológico a ser executado em sala de aula. (CABRAL, 2015, p. 218)

Nesse viés, é necessário pautar o ensino de Cálculo, considerando o aluno como o principal envolvido nos processos de ensino e de aprendizagem, sem desconsiderar os conceitos e formalidades que exigem nos conteúdos, e ainda, refletir sobre a metodologia e avaliação. Rezende (2003) argumenta que

[...] precisa-se voltar o ensino de Cálculo para o próprio Cálculo, os seus significados, os seus problemas construtores e suas potencialidades. Tão importante quanto saber usar as regras de derivação e as técnicas de integração, é saber os seus significados, as suas múltiplas interpretações, sua utilidade em outros campos da matemática e em outras áreas do conhecimento. (REZENDE, 2003, p. 334)

Sobretudo, para que haja essa correspondência entre teoria e aprendizagem, na maioria das vezes, são adotadas soluções para que sejam feitos estudos e treinamentos sobre os conceitos estudados durante as aulas. A mais comum seria a realização de listas de exercícios, a qual “é sem dúvida a solução “normal” mais usual em nossas universidades: já faz parte da tradição de um curso de Cálculo a presença de extensas listas de exercícios, com gabarito, para que os alunos possam realizar o seu “treinamento” com segurança” (REZENDE, 2003, p. 15). O autor ainda comenta sobre o uso da lista de exercícios como uma forma de “prenunciar o contexto em que se dará a prova” (p. 15), para se tenha conhecimento do parâmetro que será a avaliação dada.

Outra forma que tem sido adotada para o enfrentamento dos resultados insatisfatórios no ensino de Cálculo são cursos ou disciplinas que preparam o aluno para os conteúdos que serão ministrados nos anos seguintes. Em relação à oferta dos cursos que recebem como nomes, por exemplo, de “Cálculo Zero”, ou “Pré-Cálculo”, ou ainda “Matemática Básica”, são alternativas adotadas por instituições de ensino (UTFPR, UNESPAR, UEM), sobre as quais Rezende (2003) argumenta que

[...] Tais cursos, independentemente do nome que tenham, têm como meta principal resolver o problema da “falta de base” do aluno, ponto aliás que parece consensual entre os professores de Cálculo. Com a finalidade de resolver a tão propalada “falta

---

<sup>8</sup> Ciências Exatas e Tecnológicas

de base”, ensina-se costumeiramente, nesses cursos, toda aquela parte de matemática básica necessária à realização técnica do Cálculo: polinômios, fatoração, relações e identidades trigonométricas, funções reais usuais (modulares, polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas), produtos notáveis, simplificações e cálculos algébricos em geral etc. (REZENDE, 2003, p. 16)

O autor referenciado comenta que tais cursos (Cálculo Zero, Pré-Cálculo, ou ainda, Matemática Básica) não têm colaborado para amenizar os baixos índices de reprovação ou mesmo evasão, pois a falta de base continua. E ainda complementa que a disciplina de Cálculo tem como noções básicas,

[...] tem muito mais a ver com as noções de “infinito”, de “infinitésimos”, de “variáveis”, do que com “fatoração de polinômios”, “relações trigonométricas”, “cálculos algébricos” etc. É bem verdade que o conhecimento destes últimos auxilia na árdua tarefa de calcular limites (derivadas, integrais etc), mas é exatamente aí que se coloca a nossa primeira questão fundamental: Qual é o curso de Cálculo que se quer? Aquele em que prevalece a técnica? Ou aquele em que se busca a construção dos significados? Quando se fala de “falta de base”, de que “base” se está falando? (REZENDE, 2003, p. 17)

Reflexões, estudos e pesquisas têm promovido trocas de vivências em sala de aula, e ainda, permitem pontuar o que pode ser melhorado, ou então, o que se deve ter mais atenção. Isto, visando alternativas para amenizar os baixos índices da disciplina, e, desta forma consiga contribuir para a formação acadêmica.

Nessa perspectiva, as pesquisas têm caminhado para a promoção da tecnologia como possibilidade no estudo de Cálculo. A seguir, pontuamos alguns pesquisadores que têm estudos nesse viés.

### **3.1.6. Pesquisa em Ensino de Cálculo mediado pela Tecnologia**

A tecnologia tem tomado cada vez mais espaços, pois permite que haja integração de tempos e lugares. Não se limita às redes sociais, pois também tem sido, com frequência, utilizada para os processos de ensino e de aprendizagem.

A palavra tecnologia tem origem no grego "tekhne" que significa "técnica, arte, ofício", juntamente com o sufixo "logia" que significa "estudo". Ao longo do tempo a palavra tornou-se um termo com mais de um significado (polissêmico) e seu significado passou a depender do olhar lançado sobre o fenômeno. O interessante é que a palavra tecnologia expandiu seus significados conforme a civilização humana foi se desenvolvendo e criando os mais diversos recursos para atender as suas

necessidades. Atualmente, diz-se que uma sociedade é “tecnológica”, quando prevalece a diversidade de ideias, significados, conceitos e muitas outras manifestações da vida humana. (SILVA, 2017, p. 47)

Quanto ao ensino de Cálculo, nota-se que o uso da tecnologia tem colaborado nas pesquisas, conforme apresentamos na sequência.

Em Silva (2017) é discutida a crescente adesão das instituições com cursos semipresenciais, destacando o uso da tecnologia para o ensino da disciplina de Cálculo, apontando os avanços que os recursos tecnológicos possibilitaram para a educação à distância.

Melo (2002), em sua dissertação, relata a pesquisa realizada acerca do conceito de área via integral, utilizando-se de atividades mediadas pelo *software Maple*, verificando quais as possíveis contribuições que as atividades trouxeram para a aprendizagem. O intuito da pesquisa era propor que o ensino dos conceitos de Cálculo - que usualmente é apresentada de maneira formal, que os mesmos fossem propostos pela utilização de novas tecnologias computacionais.

Em Cargnin (2013), é feito o estudo dos conceitos de integrais por meio de uma sequência de atividades, as quais foram investigando, explorando e formalizando conceitos para a Integral de Riemann, via uso de mapas conceituais com o *software Cmap Tools*, fundamentada na Teoria de Registro de Representação Semiótica e na Teoria da Situação Didática, com apoio computacional dos *softwares GeoGebra e wxMaxima* na resolução das atividades.

Machin, Rivero e Santos-Trigo (2004) apresentam um trabalho em torno da compreensão de área e integral definida por meio de um ambiente computacional. Nesse contexto, é feita uma investigação, no intuito de estabelecer perfis de desempenho na resolução de problemas rotineiros.

Swidan e Yerushalmy (2014) exploram o estudo da integral indefinida, de uma forma dinâmica e interativa, em um ambiente tecnológico. Para isso, o artefato utilizado foi Cálculo da Integral Sketcher, que permite explorar a visualização gráfica e, por meio dela, explorar conceitos da integral indefinida.

Uma discussão sobre as pesquisas nos últimos onze anos quanto ao uso de tecnologias digitais de informação e comunicação para o ensino e/ou aprendizagem do Cálculo em espaço presencial e/ou virtual são apresentados na pesquisa de Lopes e Scherer (2018), que mostram como tem caminhado na área acadêmica, apontando que o uso da tecnologia pode ser um caminho para superação de algumas dificuldades na aprendizagem de Cálculo.

Na próxima seção são apresentados alguns apontamentos sobre o Ensino Híbrido, discutindo inicialmente sobre o uso da tecnologia para o ambiente escolar.



## 3.2. Ensino Híbrido

A seção está organizada no intuito de promover uma compreensão acerca do Ensino Híbrido, para discutir sobre a abordagem híbrida nessa pesquisa. Cada subseção compreende desde apontamentos teóricos, até a implementação em sala aula. As seções são: O papel da tecnologia para o ambiente escolar; Ensino Híbrido: apontamentos iniciais; Ensino Híbrido: caracterizando diferentes tipos de modelos; Ensino Híbrido: inserindo no ambiente escolar.

### 3.2.1. O papel da tecnologia para o ambiente escolar

O ensino, embora tenha passado por períodos de mudanças, avanços e melhorias, ainda carrega traços, ou mesmo características, do século passado. Professores, mesmo sentindo necessidade de modificações, foram ensinados e viveram na época que o docente era o detentor do conhecimento, o qual transmitia tudo que aprendeu e os alunos apenas reproduziam por meio de exercícios. O uso da lousa e das anotações no caderno eram os meios tecnológicos disponíveis, ainda bastante utilizados em sala de aula (SILVA, 2017; PONTES, 2013; SILVA, 2016; SOUZA, ANDRADE, 2016). Assim,

Tradicionalmente, as aulas são expositivas, e os alunos devem voltar para casa com o caderno repleto de conteúdos copiados da lousa, pois acredita-se que essa seja uma forma eficiente de ensino. Porém, com o avanço das tecnologias digitais e a consequente facilidade de acesso à informação, a escola já não é única fonte de conhecimento disponível para as pessoas. Por meio do desenvolvimento dos computadores, *smartphones*, *tablets* e internet, pode-se aprender em qualquer lugar e a qualquer hora. Contudo, o papel da escola não termina, mas se expande, e cabe a ela direcionar e capacitar os alunos a explorar responsavelmente esses novos caminhos. (SANUGA, CARVALHO, 2015, p. 141)

Assim como Sanuga e Carvalho (2015) apontaram, nos estudos de Pontes (2013) fica evidente que a caracterização do ensino ainda carrega semelhanças com o tradicionalismo, em alguns aspectos, um tanto ultrapassado e que já não é eficaz em cumprir com os objetivos de ensino e de aprendizagem. Como menciona Silva (2016), o desenvolvimento da tecnologia trouxe consigo necessidade de mudanças para o cenário escolar.

O uso da tecnologia, mediado pela *internet*, tem tomado espaço cada vez maior da rotina dos jovens, que fazem uso para as mais diversas finalidades, seja para comunicação, pelas redes

sociais ou mensagens, ou ainda, para assistir e se atualizar com notícias e informações (HORN, STAKER, 2015; MORAN, 2015).

Considerando a afinidade com a tecnologia, Prensky (2010) aponta duas gerações distintas: os nativos digitais e os imigrantes digitais. Em relação aos nativos, são aqueles que a afinidade com a tecnologia se dá de forma intuitiva, visto que eles já nasceram numa cultura digital. Quanto aos imigrantes digitais, são caracterizados por fazerem uso da tecnologia, embora não tenham a mesma aptidão quando comparados com os nativos. As diferenças entre estas gerações certamente refletem, de alguma forma, na postura dos docentes e discentes no ambiente educacional.

Bezerra (2015) aponta que, na sociedade, o uso da tecnologia tem modificado a maneira de pensar e viver. Por esse motivo, é imprescindível que pesquisas na área da Educação tragam publicações sobre como lidar com problemas, até mesmo de adaptação. O autor destaca que "não há mais espaço para um ensino desconectado da realidade, pois vivemos a era da informação, as gerações mais novas desde muito cedo já estão em contato com a tecnologia, realizando atividades complexas de maneira muito simples" (p. 12).

Nesse sentido, apresentamos um formato de ensino que contempla o ensino presencial e o virtual, chamado de Ensino Híbrido, sobre o qual trataremos na próxima seção.

### **3.2.2. Ensino Híbrido: apontamentos iniciais**

Silva (2016) menciona, em sua pesquisa, a possibilidade de mesclar a sala de aula e ambientes virtuais, possível por meio da inserção das tecnologias da informação e comunicação. Assim, o acesso à informação é de suma importância para que haja a integração entre as instituições de ensino e o mundo. Uma possibilidade que contempla o uso do ensino virtual com o ensino presencial é o chamado *Blended Learning*, que pode ser definido como

[...] a combinação de momentos em que o aluno estuda sozinho, virtualmente, com outros em que a aprendizagem ocorre de forma presencial, valorizando a interação entre alunos e professores. Apesar de serem momentos diferentes, o objetivo do aprendizado híbrido é que esses dois momentos sejam complementares e promovam uma educação mais eficiente, interessante e personalizada. (PORVIR, 2013)

Nessa perspectiva, que visa a mesclagem no ensino, propondo o uso de ambientes virtuais em paralelo com ensino presencial, o chamado *Blended Learning*, tem sido estudado

por pesquisadores (HORN, STAKER, 2015; BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015) quanto as suas contribuições para o ensino.

Nesse contexto,

Híbrido significa misturado, mesclado, *blended*. A educação sempre foi misturada, híbrida, sempre combinou vários espaços, tempos, atividades, metodologias, públicos. Esse processo, agora, com a mobilidade e a conectividade, é muito mais perceptível, amplo e profundo: é um ecossistema mais aberto e criativo. Podemos ensinar e aprender de inúmeras formas, em todos os momentos, em múltiplos espaços. Híbrido é um conceito rico, apropriado e complicado. Tudo pode ser misturado, combinado, e podemos com os mesmos ingredientes, preparar diversos “pratos”, com sabores muito diferentes. (MORAN, 2015, p. 27)

Para Porvir (2013), em relação ao *Blended Learning*, é fundamental combinar momentos que o aluno estuda de forma virtual com outros instantes que a aprendizagem ocorre presencialmente, de forma que esses dois momentos sejam complementares. O uso da tecnologia proporciona a integração de todos os espaços e tempos (MORAN, 2015) Assim, é possível valorizar a interação entre aluno e professor.

Moran (2015), ao mencionar sobre o ensino ser híbrido, destaca que apenas promover alterações no planejamento não é suficiente. O processo para promover o aprendizado deve ser bem organizado, juntamente com processos abertos e, ainda, informais. A aprendizagem pode ser mediada por um professor, assim como, pelos pais e colegas, ou ainda, numa busca virtual. Há possibilidade de ocorrer de forma intencional e espontânea, seja por resultado de períodos de estudos ou ainda se divertindo; pode ocorrer pelo sucesso e até mesmo pelo fracasso.

Assim, a personalização acontece nos diferentes espaços escolares, entre eles – e talvez em primeiro lugar – a sala de aula. Entretanto, para isso, é preciso reorganizar os saberes, aliando a presença das tecnologias na educação, ou seja, não é suficiente incluir as tecnologias na sala de aula sem, antes, repensar o papel do aluno e do professor. (SCHNEIDER, 2015, p. 70)

Assim, para inserir as tecnologias digitais no ensino é necessário verificar as possibilidades e as oportunidades que podem ser aproveitadas para se ter bons resultados. Nessa perspectiva, é preciso conhecer a escola, alunos, comunidade, visto que a integração de toda comunidade alia o conhecimento à diferentes ambientes, torna possível acontecer o aprendizado em diferentes situações e espaços (BARBOSA, 2016). Dessa forma, Bacich, Tanzi Neto e Trevisan (2015), argumentam que

A integração das tecnologias digitais na educação precisa ser feita de modo criativo e crítico, buscando desenvolver a autonomia e a reflexão dos seus envolvidos, para que eles não sejam apenas receptores de informações. O projeto político-pedagógico da

escola que queria abarcar essas questões precisa ponderar como fazer essa integração das tecnologias digitais para que os alunos possam aprender significativamente em um novo ambiente, que agora contempla o presencial e o digital. (p. 47)

Os principais envolvidos na inserção da tecnologia seriam: o professor e o aluno, porque o contato entre eles é mais próximo. No que se refere à relação professor, aluno e tecnologia, estes elementos compõem o que Coll, Mauri e Onrubia (2010) chamam de triângulo interativo, e ainda mencionam a relação professor-tecnologia, aluno-tecnologia e professor-aluno-tecnologia.

Para esses autores, a relação professor-tecnologia, com intuito de aprendizagem, tenta buscar uma ferramenta pedagógica que possa potencializar o conhecimento pelo aluno, de forma que justifique o uso da tecnologia em suas aulas e assim obter bons resultados para o aluno.

Em aluno-tecnologia, Coll, Mauri e Onrubia (2012) mencionam que pode ocorrer uma interação individual ou mesmo em grupo, e interações constantes com a ferramenta digital podem ser realizadas em diferentes abordagens. Isso propicia a ocorrência de ação-reflexão-ação: o estudante faz primeiro uma ação com o uso da ferramenta, reflete sobre as consequências e age novamente. A relação professor-aluno-tecnologia, é uma mescla dos casos anteriores, onde o professor tende a ser um mediador na relação do estudante com a tecnologia.

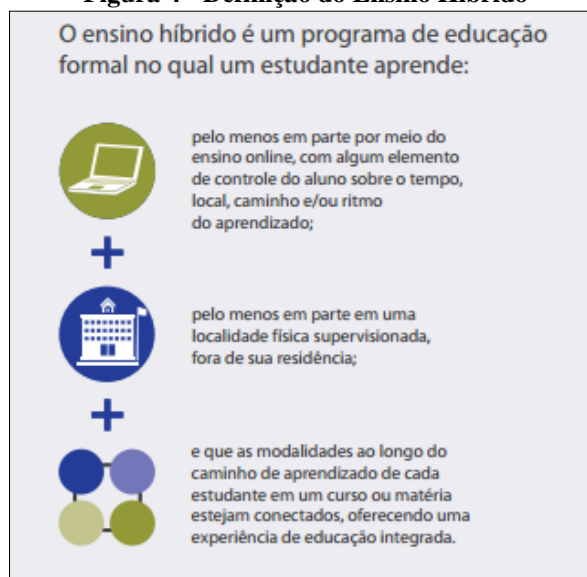
O Ensino Híbrido possui determinadas características que o descrevem e o definem, como o uso da tecnologia para o processo de ensino e pode ser implementado em sala de aula. A seguir são discutidos os modelos: de rotação, *flex*, *à la carte* e o virtual enriquecido.

### **3.2.3. Ensino Híbrido: caracterizando diferentes modelos**

A nossa proposta para o ensino e aprendizagem está diretamente relacionada com as novas propostas educacionais, que sugerem misturar o ensino presencial e ensino *on-line* (SOUZA; ANDRADE, 2016).

A Figura 4 traz uma representação sobre como está organizada, de maneira geral, a proposta do Ensino Híbrido, de acordo com Christensen, Horn e Staker (2013).

**Figura 4 - Definição do Ensino Híbrido**



**Fonte: Christensen, Horn e Staker (2013, p. 8)**

Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015, p. 54) apontam quatro modelos de ensino, caracterizados como híbridos, os quais são: de rotação, *flex*, *à la carte* e virtual enriquecido, discutidos a seguir.

No *Modelo Rotação*, os estudantes podem ser organizados em grupos, tendo ou não a presença e orientação do professor, mas necessariamente devem contemplar, pelo menos, uma atividade *on-line*. A rotação pode ser organizada em *laboratório rotacional*, *laboratório rotacional*, *sala de aula invertida* e rotação individual, as quais são apresentadas na sequência.

A *Rotação* pode ocorrer por *laboratório rotacional*, sendo pelo menos uma delas com atividade *on-line*, no qual os estudantes, organizados em grupos, recebem orientações para realizar uma tarefa ou assunto. Cada grupo recebe informações sobre o que deve ser feito em cada estação; deve-se fazer uma rotação dos alunos em grupo, de forma que todos, ao final, tenham seguido as orientações dadas e percorrido por todas as estações.

Já no *laboratório rotacional*, os alunos trabalham individualmente, revezando entre a sala de aula e o laboratório. Este formato de rotação é similar ao das *laboratório rotacional*, porém, a diferença é que o aprendizado deve ocorrer individualmente.

Na *sala de aula invertida*, a teoria e os conceitos são estudados em casa, no formato *on-line*, sendo o material disponibilizado com antecedência aos alunos. A aula torna-se o lugar de aprendizagem ativa, onde há perguntas, discussões e atividades práticas. Dessa forma, serão discutidos apenas tópicos em que os estudantes tenham ficado com dúvidas e feita resolução de

atividades (EDUCAUSE, 2012). Já na *rotação individual*, um cronograma de atividades é apresentado para cada estudante, que deverá ser seguido.

Um outro formato apresentado pelos autores é o *Modelo flex*, o qual é elaborado de acordo com o ritmo de cada estudante, que deve cumprir uma lista proposta com ênfase no ensino *on-line*. O papel do professor seria passivo, ou seja, ao invés de tomar frente às atividades, ficaria à disposição para sanar possíveis dúvidas. Pode-se dizer que esse modelo tem o mesmo encaminhamento que a rotação individual; a diferença é que no *flex* os alunos podem realizar atividades sem distinção do ano escolar.

Ainda, é necessário mencionar o formato *à la Carte*, que consiste na realização do curso totalmente *on-line*, diferente dos anteriores que fazem momentos presencial e momentos *on-line*. A disciplina do aluno é essencial para que se alcance os objetivos de ensino. Assim, é necessário organizar os horários de estudos e estabelecer uma rotina. Mesmo o estudo sendo realizado de forma *on-line*, não quer dizer que deva ocorrer necessariamente apenas fora do ambiente escolar: deve ter o suporte de um professor, o qual seria um tutor, para sanar as dificuldades.

E, por fim, existe o *modelo virtual enriquecido*, o qual possui semelhanças com o modelo anterior, porém, requer uma maior organização escolar, pois envolve toda a escola. Os estudantes dividem seu tempo de aprendizagem entre *on-line* e presencial.

Na Figura 5 é apresentada uma reorganização, considerando a escola tradicional aliada com o ensino *on-line*, por meio de um esquema idealizado por Christensen, Horn e Staker (2013), que aponta a zona híbrida de ensino, a qual mescla o ensino presencial e virtual.

Figura 5 - Zona híbrida de ensino



Fonte: Christensen, Horn e Staker (2013, p. 28)

Lima e Moura (2015) mencionam que o professor que escolhe inserir o Ensino Híbrido em sua prática docente precisa seguir alguns encaminhamentos, os quais seriam: conhecer, testar, pesquisar, escolher e validar as ferramentas digitais. Por meio do contato com a tecnologia, o docente testa e seleciona alguma ferramenta que possa verificar se a escolha feita tem potencial para atender os objetivos de aprendizagem. E verifica se a abordagem, por meio da ferramenta, causou impacto no processo de aprendizagem, que seria a validação. (LIMA, MOURA, 2015)

um professor que escolhe o Ensino Híbrido precisa conhecer, testar, escolher e validar ferramentas digitais. Testar implica pesquisar e estar em contato constante com o que é desenvolvido em tecnologia, procurando instrumentos cada vez mais simples e concisos. Escolher implica definir que determinada ferramenta será útil para cumprir o objetivo de aprendizagem em questão e, conseqüentemente, deve ser experimentada pelos alunos. A validação é o processo mais complexo, pois exige que o professor verifique se o instrumento causou impacto no processo de aprendizagem (LIMA e MOURA, 2015, p. 95).

Christensen, Horn e Staker (2013) trazem um resumo onde elencam quatro elementos na linha do híbrido que podem contribuir na identificação dos modelos de ensino que seguem características da tecnologia híbrida. O Quadro 1 ilustra as características mencionadas pelos autores em um contexto diferente do âmbito da Educação. Logo, não remetem ao ensino porque, inicialmente, o uso do termo híbrido era comum tão somente para resolver situações em

empresas, ou para melhorar algum processo. Por isso é utilizado pelos autores o termo cliente, apresentando características que remetem à um estágio híbrido para uma empresa.

**Quadro 1 - Quatro características de uma inovação que indicam que ela está em um estágio híbrido**

1) Ela apresenta tanto a nova quanto a antiga tecnologia, enquanto uma inovação puramente disruptiva não oferece a tecnologia anterior em sua forma plena.
2) Ela busca atender aos clientes já existentes, ao invés dos não-consumidores ou daqueles cujas necessidades estão plenamente atendidas pelo produto atual.
3) Ela procura realizar o trabalho da tecnologia pré-existente. Como resultado, a obrigação de se atingir um desempenho que supere as expectativas dos clientes existentes é bastante alta, uma vez que o híbrido precisa realizar o trabalho pelo menos tão bem quando próprio produto anterior e de acordo com a definição original de desempenho. Por outro lado, as empresas bem-sucedidas que não façam a implementação de inovações disruptivas geralmente assumem as capacidades da nova tecnologia como um dado e procuram mercados que os aceitem.
4) Seu uso tende a ser menos simples que o de uma inovação disruptiva. Ela não reduz significativamente o nível de renda e/ou conhecimento necessário para comprá-lo e operá-lo.

**Fonte: Christensen, Horn e Staker (2013, p. 28)**

Em relação aos apontamentos apresentados no quadro anterior, algumas características mencionadas são comuns ao uso do híbrido para o ensino, como, por exemplo, o uso da nova e da antiga tecnologia. Neste caso, não é preciso mudar o que já existia, mas que seja complementado com o que tem sido feito. Ou seja, utilizar o híbrido no intuito de melhorar o processo que já estava em vigor. Nesse viés, para o ensino, a inovação disruptiva passou a ser o termo que melhor descreve a implementação do Ensino Híbrido.

Segundo o dicionário *on-line*, a palavra disruptivo<sup>9</sup> é definida como: “que acaba por interromper o segmento normal de um processo”. Pode-se associá-la com a implementação dos modelos caracterizados como híbridos, que podem ser assimilados como disruptivos. Horn e Staker (2015) mencionam que a inovação disruptiva contribui na solução para implementação do ensino *on-line* e, que a aprendizagem virtual está, cada vez mais, tendo aceitação, por permitir que ensino possa acontecer também fora do espaço escolar.

<sup>99</sup> <https://www.dicio.com.br/disruptivo/>



Mesmo com o uso da tecnologia, para a implementação de um estágio híbrido, alguns pontos precisam ser estudados com antecedência. Por exemplo, o número de alunos por turma é um fator que pode limitar a interatividade. Salas numerosas requerem dinâmicas de atividades que consigam envolver a todos. A organização da sala de aula, considerando os apontamentos mencionados anteriormente, pode ser inserida em um laboratório de informática, de modo que o acesso ao virtual seja possível a qualquer instante que seja necessário, durante a aula. Nessa implementação, os alunos, por exemplo, já não são organizados em filas, mas podem interagir em grupos, e o docente auxilia no desenvolvimento das atividades.

Considerando a possibilidade de implementar o Ensino Híbrido no ambiente escolar, na sequência tratamos sobre as possíveis contribuições para os processos de ensino e aprendizagem.

### **3.2.4. Ensino Híbrido: inserindo no ambiente escolar**

A inserção do Ensino Híbrido em sala de aula deve ser proposta aos poucos. Primeiro, é necessário compreender as possibilidades e quais atividades possam ser caracterizadas como híbridas, desde que elas sejam pensadas com a inserção da tecnologia. Porém,

A mudança não ocorre de um dia para o outro, nem existem receitas ou fórmulas prontas, mas a tendência é que, com o modelo híbrido de ensino e o uso das tecnologias como suporte aos professores, seja possível criar um ambiente ideal de aprendizagem, docentes motivados e alunos participativos, responsáveis e felizes (LIMA, MOURA, 2015, p. 100)

Moran (2015) aponta que o professor que deseja propor tal mistura em sua prática docente, terá dois caminhos. Um primeiro caminho seria mais suave, que propõe alterações progressivas, que mesmo permanecendo o modelo curricular, priorizam o envolvimento maior do aluno com metodologias ativas. Projetos de forma interdisciplinar e *sala de aula invertida*, são algumas alternativas possíveis de se inserir, aos poucos, e verificar os resultados atingidos.

Ainda de acordo com o autor, para um segundo caminho, que seria mais amplo, é preciso que mudanças profundas ocorram, já que não há disciplinas que acompanhem um ensino linear. Em outras palavras, são redesenhados os projetos, os espaços e as metodologias com base nas atividades que serão propostas para que cada aluno aprenda no seu próprio ritmo, de acordo

com sua necessidade, podendo aprender com seus colegas, sob a supervisão de professores orientadores.

Propor atividades isoladas, apenas para ministrar uma aula diferenciada por utilizar a tecnologia para determinada atividade não é suficiente, pois acaba causando expectativas nos alunos. Porém, repensar as disciplinas, analisando o currículo, verificando as possibilidades de colocar o estudo de temas e de conteúdos que possam ser mediados pelo uso da tecnologia, poderá proporcionar autonomia nos alunos, os quais terão maior liberdade de estudar e aprofundar conhecimento. Já o professor fica com o papel de elaborar e coordenar as atividades, ou mesmo, de verificar se os conhecimentos foram assimilados (LIMA, MOURA, 2015; HORN, STAKER, 2015; MORAN, 2004).

Desta maneira, para propor as tarefas que vão compor o ambiente híbrido nessa pesquisa, os apontamentos em relação à implementação no ambiente escolar foram considerados, assim como, a realidade dos estudantes e do ambiente educacional investigado. Por isso, optamos pelo *laboratório rotacional* e a *sala de aula invertida* (BACICH, TANZI NETO e TREVISAN, 2015).

No próximo capítulo são apresentadas as tarefas que foram pensadas no intuito de compor um ambiente híbrido, considerando os referenciais aqui discutidos, em uma primeira versão, a que foi aplicada durante a pesquisa.

#### 4. TAREFAS QUE COMPÕEM O PRODUTO EDUCACIONAL: VERSÃO APLICADA

As tarefas apresentadas nesse capítulo foram propostas aos alunos na disciplina de Matemática Aplicada II, e ocorreram ao longo do desenvolvimento das aulas, no segundo semestre de 2018. A proposição das tarefas se deu por meio do ambiente virtual de aprendizagem do GeoGebra, no grupo “Matemática Aplicada II”, onde foram inscritos os 25 alunos que estavam frequentando as aulas quando foi organizado o ambiente virtual.

As tarefas foram elaboradas seguindo os encaminhamentos teóricos para ensino de Cálculo, numa abordagem híbrida, sendo o *laboratório rotacional* e a *sala de aula invertida* (BACICH, TANZI NETO e TREVISANI, 2015) as modalidades híbridas adotadas.

Para uma melhor compreensão da abordagem feita, o Quadro 2 apresenta, de forma sucinta, como foram organizadas as aulas. Elas foram divididas em diferentes momentos, que compreenderam: definições, discussões sobre os conceitos, resolução de exemplos e exercícios. Em meio a esses momentos foram inseridas as tarefas, por meio do ambiente virtual do GeoGebra.

**Quadro 2 - Momentos que foram dados no estudo de integrais com a inserção das tarefas**

<b>Momento</b>	<b>Tema</b>	<b>Encaminhamento</b>
1º	Integral Indefinida	Na primeira aula: definição, discussão inicial seguindo os conceitos de Anton (2007), e manipulação do recurso do GeoGebra, por meio de exemplos, para discutir a soma de Riemann.
2º		<b>Tarefa 1 – Função Densidade da Distribuição Normal</b> (Proposta após a aula)
3º	Integral de algumas funções usuais	Em sala, definição de conceitos (ANTON, 2007; GUIDORIZZI, 2001). Resolução de exemplos e exercícios.
4º	Integral por Substituição e	Em sala, estudo dos conceitos, definições e uso da tabela (ANTON, 2007; GUIDORIZZI, 2001). Resolução de exemplos em aula.

	tabela de integração	No laboratório, em paralelo com a aula, numa abordagem do <i>laboratório rotacional</i> , foi proposta a <b>Tarefa 2 – Integral por Substituição: u e du</b>
5°	Teorema	<b>Tarefa 3 – Teorema Fundamental do Cálculo</b> (Proposta antes da aula, numa abordagem de <i>sala de aula invertida</i> )
6°	Fundamental do Cálculo	Em sala, retomada da atividade, discussão e definição dos conceitos do Teorema Fundamental do Cálculo. Resolução de exercícios, utilizando o recurso do GeoGebra.

Fonte: o autor

A seguir, na próxima seção, é apresentada a Tarefa 1.

#### 4.1. Tarefa 1: Integral Definida na Distribuição Normal

Num primeiro momento, antes da resolução da Tarefa 1, foram explorados os conceitos envolvendo a integral para o cálculo de área de regiões curvilíneas, e manipulado em aula uma construção do GeoGebra para determinar a função densidade da distribuição Normal.

Considerando que os alunos também cursam a disciplina de Estatística Aplicada II, estavam estudando as distribuições teóricas de probabilidade, viu-se a oportunidade de realizar o estudo da probabilidade da distribuição Normal para a disciplina de Cálculo. Tal distribuição é definida por meio de uma função cuja integral não admite solução analítica. Por isso, foi desenvolvido um *applet* similar a calculadora de probabilidade do *software* GeoGebra, que permitiu observar, por meio da manipulação do recurso digital, a aproximação da área correspondente à probabilidade como um processo de Soma de Riemann. Tal resultado poderia ser comparado com os resultados na tabela Z fornecida. O Quadro 3 mostra na íntegra a Tarefa 1, a qual era composta por três atividades, como foi aplicada aos alunos.

**Quadro 3 - Applet da tarefa 1**  
**INTEGRAÇÃO**

Problema da área:

Dada uma função  $f$  contínua e não-negativa em um intervalo  $[x_1, x_2]$ , encontre a área da região entre o gráfico de  $f$  e o intervalo  $[x_1, x_2]$ .

O método dos retângulos para encontrar áreas:

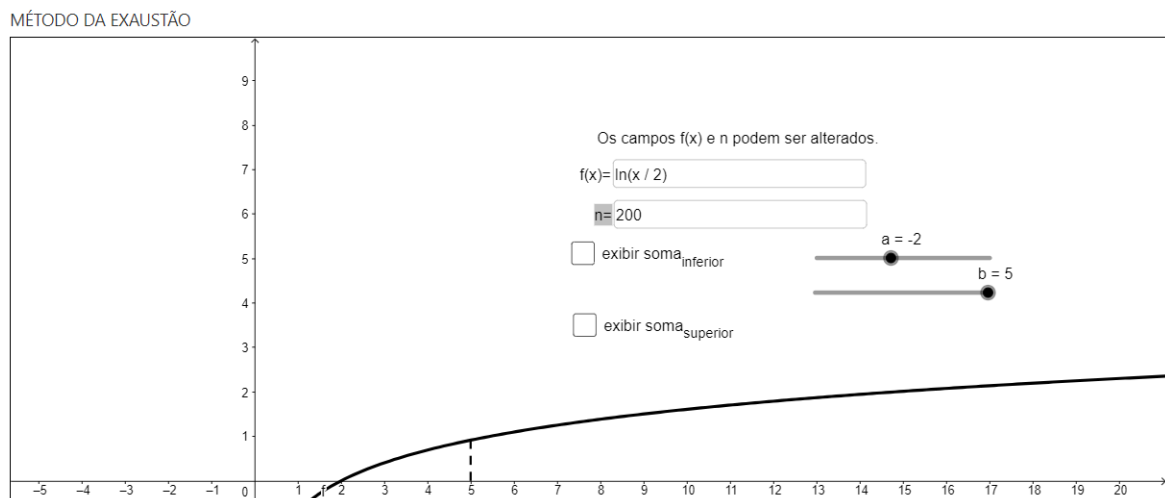
Utilizando o método da exaustão de Arquimedes da seguinte maneira:

- Dividir o intervalo  $[x_1, x_2]$  em  $n$  subintervalos iguais e em cada um deles construir um retângulo que se estende desde o eixo  $x$  até algum ponto da curva  $y = f(x)$  em cada subintervalo.
- Para cada  $n$ , a área total dos retângulos pode ser vista como uma aproximação à área sob a curva acima do intervalo  $[x_1, x_2]$ . Além disso, fica intuitivamente evidente que, quando  $n$  cresce, essas aproximações irão se tornar cada vez melhores e tender à área exata como um limite. Assim, se  $A$  denota a área exata sobre a curva, então  $A_n$  denota a aproximação de  $A$  usando  $n$  retângulos.

Instruções para uso do recurso do GeoGebra:

- Inserir a função, no campo de entrada  $f(x)$ ;
- Ajuste o valor inicial “a” e o final “b”, nos controles deslizantes, para o intervalo  $[x_1, x_2]$ ;
- No botão “exibir soma”, há a opção de exibir a soma superior e a soma inferior para método da exaustão;
- E no campo de entrada “n”, é possível inserir a quantidade de retângulos para aproximar com a área abaixo da função  $f(x)$  e acima do eixo  $x$ .

**Figura 1 – Recurso para a tarefa 1**



Fonte: Disponível em <<https://ggbm.at/g6zybt5a>>

### Distribuição Normal: função densidade

A função densidade da distribuição Normal (Z), definida por  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1}\right)^2}$ , é uma função contínua, a qual é representada, por meio de uma curva simétrica em relação à média, e na qual o ponto máximo de  $f(x)$  é o ponto  $x = \mu$ .

A probabilidade, nessa distribuição, é representada pela área abaixo da curva, com ponto inicial  $x_i = 0$  e o ponto final  $x_f = b$ , sendo b maior que zero. A distribuição normal, como é comumente denominada, é de grande importância na área de Estatística e, normalmente, os livros trazem como anexo uma tabela de probabilidade. No entanto, os valores da tabela podem ser obtidos com a aproximação desejada a partir da soma de Riemann. Na distribuição Normal (Z) é considerado:

- A média ( $\mu$ );
- O desvio padrão ( $\sigma$ );
- E os parâmetros, ou intervalo, que deseja-se conhecer a probabilidade.

**Tabela Z: Figura 2: Tabela de probabilidade da distribuição Normal (Z)**

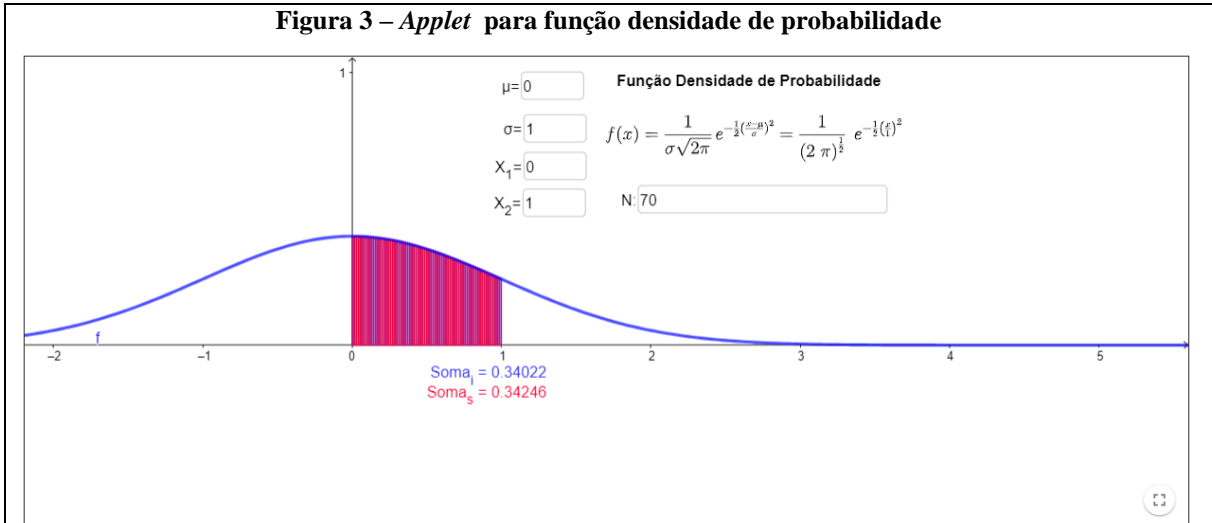
Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Fonte: Estatística Aplicada – Engenharia Alimentar. Disponível em

[http://w3.ualg.pt/~eesteves/docs/TabelasEstatistica\\_08.pdf](http://w3.ualg.pt/~eesteves/docs/TabelasEstatistica_08.pdf)

Acesso em 10 de maio de 2018.

Figura 3 – Applet para função densidade de probabilidade



Fonte: <https://ggbm.at/xmkemkq9>

**ATIVIDADE 1:**

Com média igual a zero e desvio padrão igual a 1, explore cada item no recurso digital (GeoGebra) e compare o resultado obtido com a tabela da distribuição Normal (Z).

- $P(0 \leq x \leq 0,5)$
- $P(0 \leq x \leq 0,6)$
- $P(0 \leq x \leq 3)$
- $P(0 \leq x \leq 4)$
- $P(0 \leq x \leq 0,5)$

Para cada item acima, escreva o resultado obtido no recurso e o número de retângulos (n) que ficou mais próximo do valor fornecido na tabela (aproximação até a 4ª casa decimal)

**ATIVIDADE 2:**

Qual seria o valor de " $\alpha$ ", em  $P(0 \leq x \leq \alpha)$ , de modo que a probabilidade seja igual a 0,5 (meio)? E indique o número "n" de retângulos necessários para obter tal resultado.

**ATIVIDADE 3:**

Comente sobre sua experiência (positiva e/ou negativa) com a realização dessa atividade. Houve dificuldade?

Fonte: o autor

A Tarefa 1 foi idealizada e elaborada pelo pesquisador, a partir da calculadora de probabilidade do *software* GeoGebra, para que fosse possível manipular e explorar os dados de

uma maneira mais dinâmica, onde o aluno pudesse chegar, sozinho, no resultado da probabilidade.

Embora o título remeta ao estudo da função densidade da distribuição Normal ( $Z$ ), da disciplina de Estatística, o que é explorado na Tarefa 1 é a noção da integral definida. Dessa forma, não há necessidade que o aluno tenha a disciplina de Estatística em seu curso, pois para realizar essa tarefa não é preciso compreender conceitos da distribuição Normal ( $Z$ ).

Esse *applet* pode ser implementado em diferentes momentos: seja em uma proposta de *sala de aula invertida*, na aula propriamente dita, ou então, para complementar os conceitos da aula e ser proposta após a aula. As questões podem ser adaptadas de acordo os objetivos do ensino, utilizando, para isso, o mesmo *applet* para compor novas tarefas.

A próxima seção apresenta como foi pensada e proposta a Tarefa 2.

#### **4.2. Tarefa 2: Integral por Substituição**

A segunda tarefa foi proposta em aula, seguindo os encaminhamentos do Ensino Híbrido, para o *laboratório rotacional* (BACICH, TANZI NETO e TREVISANI, 2015). Assim, em um primeiro momento, foram discutidos conceitos referentes ao uso apropriado da substituição em primitivas, no intuito de que fossem mencionados os conceitos, e foram resolvidos exercícios dos livros de Cálculo (ANTON, 2007; GUIDORIZZI, 2001).

A aula foi conduzida no laboratório de informática, de modo que fossem vistos os conceitos na lousa e, quando solicitado, os alunos resolveriam a tarefa proposta no ambiente virtual, revisando os conceitos discutidos.

Nas questões propostas nessa tarefa, o intuito era que os alunos identificassem a função que seria mais adequada alterar por  $u$  e, após inserir no campo de entrada a função a ser encontrada sua primitiva, verificar se o resultado obtido era coerente com o que foi discutido inicialmente.



Quadro 4 - *Applet* da Tarefa 2

## INTEGRAL POR SUBSTITUIÇÃO – u e Du

**Teorema:** Seja  $g$  uma função diferenciável e seja o intervalo  $I$  a imagem de  $g$ . Suponha que  $f$  seja uma função definida em  $I$  e que  $F$  seja uma antiderivada de  $f$  em  $I$ . Então,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c$$

Se  $u = g(x)$  e  $du = g'(x)dx$  então:

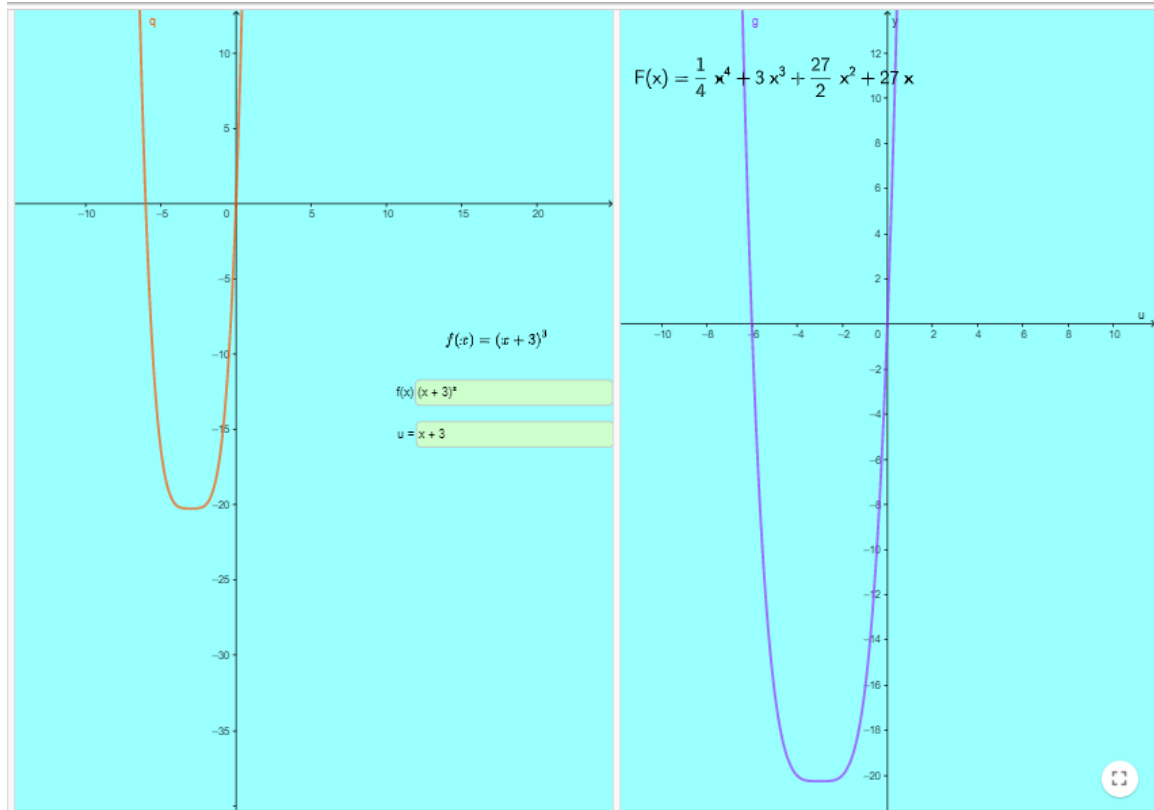
$$\int f(u)du = F(u) + c$$

Vídeo:



Disponível em: <https://youtu.be/Z-KvGPL4W3k>

**Figura 1 – Applet disponível para a Tarefa**



Disponível em: <https://ggbm.at/wcsyh7tv>

Em cada questão a seguir, utilize a janela do GeoGebra acima, inserindo na primeira janela (à esquerda) a função e a partir dela identifique qual termo será chamado de “u”. E obtenha na segunda janela (à direita) a primitiva. E anote o resultado obtido para:

- 1) Calcule  $\int (3x + 5)^4 dx$
- 2) Calcule  $\int (2x - 5)^3 dx$
- 3) Calcule  $\int (\sqrt{3x+1}) dx$
- 4) Determine  $\int \frac{1}{(x+5)^2} dx$
- 5) Calcule  $\int \frac{3}{4+x} dx$

Comente sua impressão, quanto à manipulação do GeoGebra, às questões propostas e quais observações para essa atividade.

Na próxima seção é apresentada a Tarefa 3, caracterizando como foi elaborada e proposta aos estudantes.

### **4.3. Tarefa 3: Teorema Fundamental do Cálculo**

A terceira tarefa foi proposta como uma antecipação da aula, considerando que os estudantes já estavam inseridos no grupo Matemática Aplicada II e, já haviam manipulado outras atividades no ambiente virtual. Logo, não haveria tanta dificuldade em manipular o recurso.

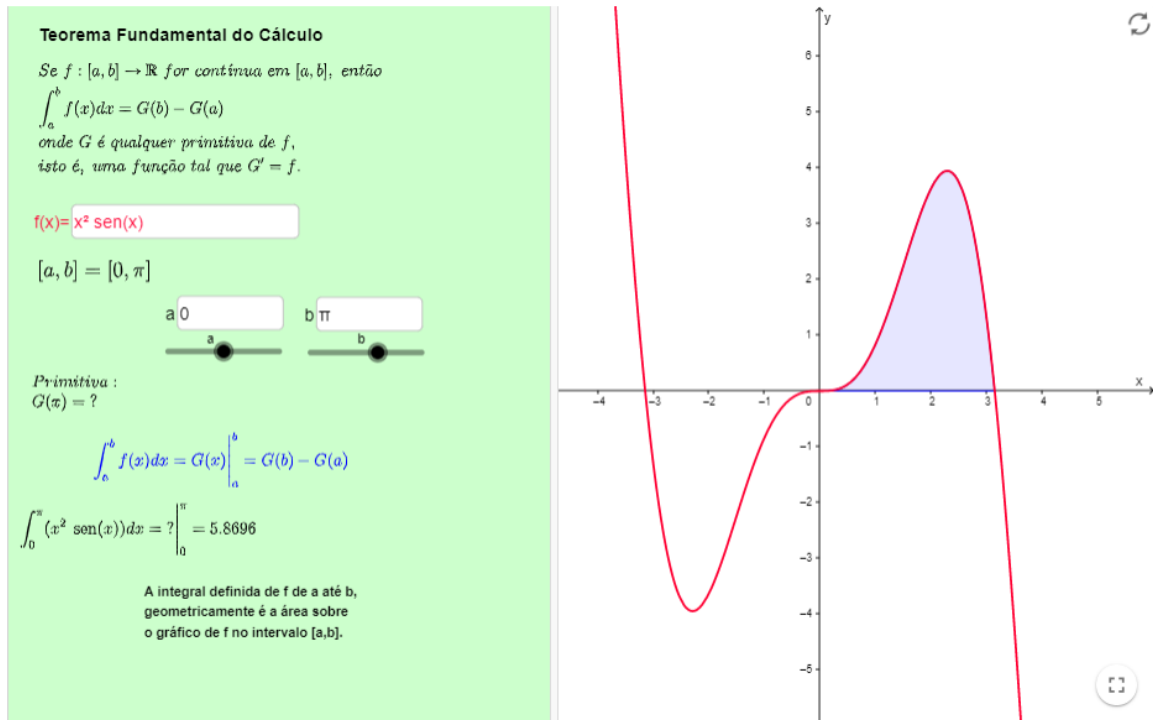
Como alguns elementos foram discutidos durante as aulas, referente a conceitos de integral, em que alguns foram colocados nas tarefas 1 e 2, essa tarefa foi proposta seguindo o encaminhamento da *sala de aula invertida*.

Para tanto, se antecipou uma atividade sobre o Teorema Fundamental do Cálculo, no intuito de que os estudantes buscassem, de um modo autônomo, conceitos para solução da atividade. Posteriormente, seriam discutidos em sala os conceitos envolvidos na atividade e sanadas as possíveis dúvidas.

## Quadro 5 - Tarefa 3

## TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Figura – Applet disponível para a Tarefa 3



Disponível em: <https://ggbm.at/SVNPSS9p>

1) Qual das alternativas abaixo é a solução para  $\int_1^2 x^2 dx$

(    )  $\frac{7}{3}$

(    )  $\frac{3}{7}$

(    ) 3

(    )  $\frac{8}{3}$

2) Qual a opção correta para  $\int_{-1}^3 4 dx$

(    ) 4

(    ) 8

(    ) 12

(    ) 16

3) Marque a alternativa correta para a  $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$

(     )  $\frac{1}{4}$

(     )  $\frac{1}{2}$

(     )  $\frac{3}{4}$

(     ) 1

4) Escreva, com suas palavras, a compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo.

5) Quais suas considerações (positivas e/ou negativas) sobre a atividade?

**Fonte: autor**

As Tarefas 1, 2 e 3 foram implementadas em sala de aula, e serão descritas e analisadas na próxima seção.

## 5. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO DESENVOLVIMENTO DAS TAREFAS

Nesse Capítulo, será apresentada a análise dos dados, os quais foram obtidos por meio das tarefas mostradas no Capítulo 4, da análise das resoluções dadas pelos estudantes, bem como, pelos comentários deixados por eles nas atividades, e o *feedback* dado para a tarefa desenvolvida. Isto para promover uma discussão quanto ao uso do ambiente virtual do GeoGebra e responder à nossa questão de pesquisa: *como o uso da tecnologia pode contribuir para o estudo da integral de funções de uma variável real, a partir de tarefas propostas em uma perspectiva de Ensino Híbrido?*

Nas observações apresentadas, a partir da seção 5.1, foram verificadas e analisadas as respostas quanto aos conceitos de ensino de Cálculo (ANTON, 2007; GUIDORIZZI, 2001), que contemplamos em cada tarefa em relação ao ensino de integrais, e quanto aos encaminhamentos do Ensino Híbrido, conforme Bacich, Tanzi Neto e Trevisan (2015) que foram pensados para a abordagem em cada tarefa.

Para isso, nas resoluções, verificou-se a forma que cada aluno respondeu cada questão, em cada tarefa, considerando se a resposta dada estava coerente com os conceitos da integral, conforme as referências utilizadas, Anton (2007) e Guidorizzi (2001).

Em seguida, após a análise das respostas quanto aos conceitos que foram enunciados, as soluções foram separadas em dois grupos, que elencamos, como “respostas suficientes” e “respostas insuficientes”. Para verificar quais respostas que se encaixavam em cada grupo, seguimos os encaminhamentos da pesquisa qualitativa (MOREIRA, 2011), que demanda observação do pesquisador e a busca por indícios que possam contribuir nas conclusões e resultados. Em virtude disso,

O interesse central dessa pesquisa está em uma interpretação dos significados atribuídos pelos sujeitos à suas ações em uma realidade socialmente construída, através de observação participativa, isto é, o pesquisador fica imerso no fenômeno de interesse. (MOREIRA, 2011, p. 76)

Diante disso, a interpretação dos dados se deu pelo contato com o estudante, por meio das tarefas. Nelas, foram propostos questionamentos e comentários sobre as respostas dadas e na aula, foram revistos e discutidos. Esses momentos foram essenciais para compreender as dificuldades e saná-las, ora individualmente, ora coletivamente, e avaliar o efeito das tarefas propostas por meio de um ambiente virtual de aprendizagem.

Nesse sentido, segundo Luckesi (2009, p. 7), “de fato, a avaliação da aprendizagem deveria servir de suporte para a qualificação daquilo que acontece com o educando, diante dos objetivos que se têm, de tal modo que se pudesse verificar como agir para ajudá-lo a alcançar o que procura.” As intervenções que foram realizadas por meio do *feedback*, *on-line* e/ou presencial, promoveram a interação professor/aluno e possibilitaram auxiliar nas dúvidas que surgiram durante a realização das tarefas.

Assim, a partir da seção 5.1, nominada pelo tema da tarefa, são apresentadas as análises de acordo com as resoluções apresentadas, considerando os encaminhamentos dados em cada uma. Em cada tarefa, foram separadas as soluções de acordo com a resolução apresentada, e foram organizadas em suficientes e insuficientes. São, ainda, destacados os comentários e sugestões dados aos estudantes nas tarefas. Essas informações permitiram ao professor refletir sobre como poderia planejar as próximas aulas e, como pesquisador, o que precisaria ser melhorado visando o Produto Educacional, resultado da pesquisa.

### 5.1. Tarefa 1 – Distribuição normal: função densidade

Conforme apresentada na seção 4.1, a Tarefa 1, composta por três questões, poderia ser explorada por meio do *applet* para auxiliar na resolução das questões. O Quadro 6 mostra como foram analisadas as 25 respostas entregues, as quais estão organizadas quantitativamente, para as atividades 1 e 2, quanto as respostas suficientes ou insuficientes. Já na terceira atividade, foram apenas considerados os alunos que deixaram comentários sobre a tarefa.

**Quadro 6 - Organização quantitativa da Tarefa 1: em suficiente, insuficiente e não respondeu**

	<b>Suficiente</b>	<b>Insuficiente</b>	<b>Não respondeu</b>
<b>ATIVIDADE 1</b>	10	6	9
<b>ATIVIDADE 2</b>	3	10	12
<b>ATIVIDADE 3</b>	13 comentários		

Fonte: o autor

As seções a seguir trazem o que foi considerado como respostas suficientes e respostas insuficientes para as questões 1 e 2 da Tarefa 1.

### 5.1.1. Respostas suficientes para a atividade 1

Após concluir o segundo momento, resolução e a manipulação do recurso, foram analisadas as 18 resoluções que retornaram dos estudantes. Nessa seção 5.1.1, são elencadas algumas respostas dos alunos, as quais foram digitalizadas do ambiente virtual do GeoGebra. A Figura 6 apresenta a primeira atividade.

**Figura 6 - Primeira atividade proposta**

**ATIVIDADE 1**

Com média igual a zero e desvio padrão igual a 1, explore cada item no recurso digital (Geogebra) e compare o resultado obtido com a tabela da distribuição Normal (Z).

$a - P(0 \leq x \leq 0.5)$

$b - P(0 \leq x \leq 0.6)$

$c - P(0 \leq x \leq 3)$

$d - P(0 \leq x \leq 4)$

$e - P(0 \leq x \leq 5)$

Para cada item acima, escreva o resultado obtido no recurso e o número de retângulos (n) que ficou mais próximo do valor fornecido na tabela (aproximação até a 4ª casa decimal)

A Digite sua resposta aqui...  
 $f_x$

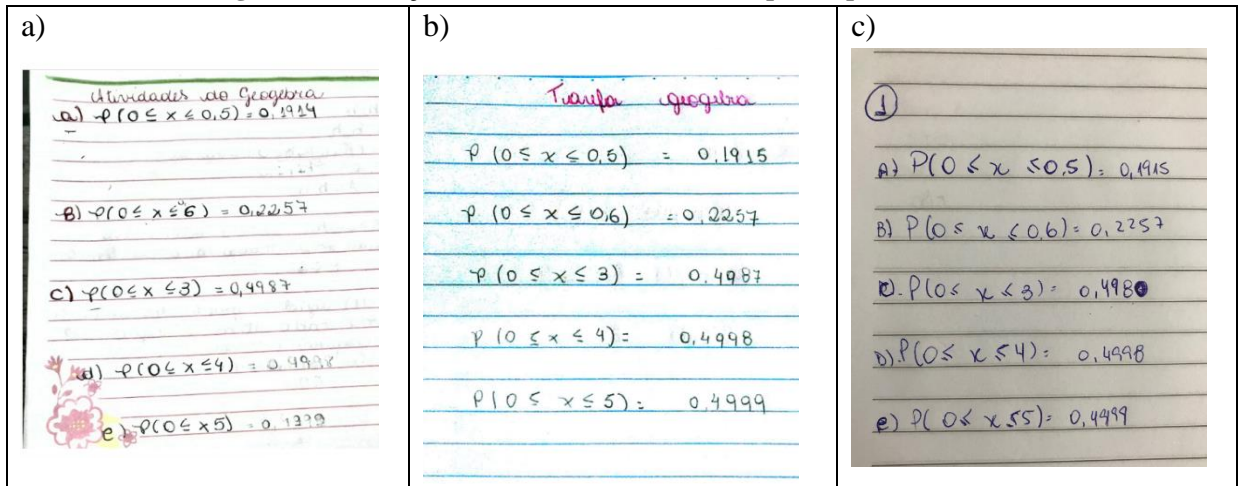
**Fonte: autor**

Em relação a primeira atividade, apresentam-se as resoluções que foram consideradas suficientes para o objetivo da atividade. Ou seja, após a manipulação do recurso e com a anotação dos resultados obtidos, foram confrontados com os valores dados em tabela para verificar se as respostas estavam coerentes.

Embora o registro apresentado por E4, E13 e E21, mostrado na Figura 7, não tenha apontando qual o número de retângulos necessários para seus resultados, os valores estão coerentes quando comparados com valores da tabela Z. Os três alunos conseguiram anexar, no espaço da tarefa, uma imagem da resolução feita.



**Figura 7 - Resolução do E4 (a), E13 (b) e E21 (c) para a primeira atividade**



Fonte: Registros do ambiente virtual

Já o E2 apresentou uma solução similar aos resultados apresentados acima. O que difere é que anotou sua solução no ambiente virtual. Numa outra resolução, o E7 apresenta os resultados obtidos coerentes com a tabela Z dada como parâmetro de resultados. Para o objetivo da atividade, os resultados apresentados na Figura 8 mostram que o estudante E7 manipulou o recurso, porém, garantindo uma melhor aproximação, inseriu o número máximo de retângulos já definido na elaboração do recurso, em todos os itens colocou 10000 (dez mil) retângulos.

**Figura 8 - Resolução feita pelo estudante E7**

a) 0,19146 e com isso chegamos a 10000 retângulos.  
 b) 0,225745 e com isso chegamos a 10000 retângulos.  
 c) 0,49871 e com isso teremos os mesmos resultados.  
 d) 0,50005 mesmo resultado de retângulos.  
 e) 0,5001 conforme os outros

Fonte: Registros do ambiente virtual

Na resolução feita pelo E14, além de garantir uma melhor aproximação do resultado, utilizando o limite (10000) de retângulos, verificou que as somas superior e inferior estavam com o mesmo resultado e, confirmando que estavam coerentes os valores obtidos, anotou o resultado da tabela, conforme mostra a Figura 9.

**Figura 9 - Resolução feita pelo E14**

$A$	a - n = 10.000; resultado = 0,1914; tabela = 0,1915
$f_x$	b - n = 10.000; resultado = 0,2257; tabela = 0,2257
	c - n = 10.000; resultado = 0,4986; tabela = 0,4987
	d - n = 10.000; resultado = 0,5000; tabela = 0,5000
	e - n = 10.000; resultado = 0,5000; tabela = 0,5000

Fonte: Registros do ambiente virtual

É perceptível o cuidado do E14 em deixar claro os resultados. Quando observado as soluções dadas, mostradas na Figura 10, pelo E9 e E19, apresentaram mesma anotação para os resultados, e pelo E24, ao apresentar um número mínimo de retângulos (N) para determinar as probabilidades a serem calculadas. Os resultados apresentados nas soluções estão próximos aos da tabela Z. Ainda, os estudantes levaram em consideração que foram mencionados no primeiro momento em sala de aula, sobre as somas superior e inferior.

**Figura 10 - Resolução dada pelo E9 e E19 (a) e do E24 (b)**

a)		b)	
$A$	A. Soma INF 0,1913 Soma SUP 0,1915 - quando N=90	$A$	A) Soma=0,19306 N=90
$f_x$	B. Soma INF 0,2256 Soma SUP 0,2258 - quando N= 135		B) S=0,22597 N=120
	C. Soma INF 0,4980 Soma SUP 0,4992 - quando N= 1000	$f_x$	C) S=0,49969 N=570
	D. Soma INF 0,4995 Soma SUP 0,5003 - quando N = 2000		D) S=0,50111 N=700
	E. Soma INF 0,4997 Soma SUP 0,5002 - quando N= 4000		E) S=0,50102 N=980

Fonte: Registros do ambiente virtual

Observamos pela solução apresentada pelo E5, na Figura 11, que os conceitos discutidos em aula, sobre a aproximação da soma superior e da soma inferior para a área abaixo da curva, ficaram evidentes em seus comentários para cada item da atividade. Embora E5, com exceção do item (b), tenha utilizado todos os retângulos possíveis na atividade, deixou claro que ainda era possível aumentar o valor de N. Pela conjectura apresentada, pode-se considerar que os conceitos discutidos em aula (ANTON, 2007; GUIDORIZZI, 2001) foram compreendidos.

**Figura 11 -Resposta dada por E5**

$\frac{A}{f_x}$	a) $P(0 \leq x \leq 0.5) =$ O resultado obtido foi 0.19146, com o $N=10.000$ , se aproxima do valor da tabela (0,1915) conforme $N$ tende positivamente ao infinito
	b) $P(0 \leq x \leq 0.6) =$ O resultado obtido foi igual ao da tabela (0,2257) quando $N >= 381$ e $N <= 470$
	c) $P(0 \leq x \leq 0.3) =$ O resultado obtido foi 0.49859, com $N=10.000$ , se aproxima do valor da tabela (0,4987) quando $N$ tende positivamente ao infinito
	d) $P(0 \leq x \leq 4) =$ O resultado obtido foi 0.49989, com $N=10.000$ , se aproxima do valor da tabela (0,5000) quando $N$ tende positivamente ao infinito
	e) $P(0 \leq x \leq 4) =$ O resultado obtido foi 0.4999, com $N=10.000$ , se aproxima do valor da tabela (0,500) quando $N$ tende positivamente ao infinito

**Fonte: Registros do ambiente virtual**

Na próxima seção estão elencadas as soluções insuficientes para essa primeira atividade.

### 5.1.2. Respostas insuficiente para a atividade 1

Embora os alunos que serão aqui mencionados tenham apresentado uma solução para a atividade, destacamos algumas das respostas dadas que não estão de acordo com o esperado como solução, ou seja, a resposta dada não foi considerada coerente por não ter ficado próxima dos valores fornecidos pela tabela Z.

Na solução feita pelo E15, na Figura 12, verifica-se que os resultados registrados não foram suficientes, pois o número de retângulos que foi utilizado não garante um resultado adequado, que fique o mais próximo da tabela Z. Por meio da ferramenta comentário, o aluno foi questionado pelo professor sobre o uso dos valores para  $N$  em cada item, para compreender as circunstâncias que o levaram ao erro e, como sugestão foi encaminhado material sobre o método da exaustão.

**Figura 12 - Resultado enviado pelo E15**

**ATIVIDADE 1**

Com média igual a zero e desvio padrão igual a 1, explore cada item no recurso digital (Geogebra) e compare o resultado obtido com a tabela da distribuição Normal (Z).

a -  $P(0 \leq x \leq 0.5)$

b -  $P(0 \leq x \leq 0.6)$

c -  $P(0 \leq x \leq 3)$

d -  $P(0 \leq x \leq 4)$

e -  $P(0 \leq x \leq 5)$

Para cada item acima, escreva o resultado obtido no recurso e o número de retângulos (n) que ficou mais próximo do valor fornecido na tabela (aproximação até a 4ª casa decimal)

A $f_x$	a - 0,1894 0,1933 n=6
	b - 0,2222 0,2288 n=6
	c - 0,3997 0,5970 n=6
	d - 0,3670 0,6328 n=5
	e - 0,3337 0,6662 n=4

[Esconder \(1\)](#)

**R** Em cada item você utilizou um valor baixo para o número de retângulos, comente sobre sua escolha para N

**R** Escreva um feedback para o membro ...

**Fonte: Registros do ambiente virtual**

Uma outra solução, que também pode ser classificada como insuficiente é do E22, observado na Figura 13. Mesmo tendo anotado os resultados para a soma superior e inferior, juntamente com valor dado na tabela, não foi suficiente - assim como E15 - o número de retângulos que utilizou para a atividade. Era necessário que determinasse o número mínimo de retângulos, de modo que, tanto para a soma inferior quanto para a soma superior a área dos retângulos fosse próxima ao valor correspondente de probabilidade na tabela Z. Porém, o número de retângulos que utilizou não preencheu a região abaixo da curva, a qual compreende a probabilidade em questão.

**Figura 13 - Resposta dada pelo E22**

<p><b>A</b></p> <p><b>f<sub>x</sub></b></p>	<p>a- O resultado obtido na <math>S_i=0,18971</math> e a <math>S_s=0,19306</math>, já o resultado da tabela é igual à <math>0,1915</math> e o total de retângulos é igual à <math>7</math>.</p> <p>b- O resultado obtido na <math>S_i=0,22281</math> e a <math>S_s=0,22844</math>, já o resultado da tabela é igual à <math>0,2257</math> e o total de retângulos é igual à <math>7</math>.</p> <p>c--O resultado obtido na <math>S_i=0,41391</math> e a <math>S_s=0,58299</math>, já o resultado da tabela é igual à <math>0,4987</math> e o total de retângulos é igual à <math>6</math>.</p> <p>d- O resultado obtido na <math>S_i=0,38601</math> e a <math>S_s=0,6139</math>, já o resultado da tabela é igual à <math>\quad</math>, e o total de retângulos é igual à <math>5</math>.</p> <p>e- O resultado obtido na <math>S_i=0,35752</math> e a <math>S_s=0,64248</math>, já o resultado da tabela é igual à <math>\quad</math>, e o total de retângulos é igual à <math>4</math>.</p>
---	--

**Fonte: Registros do ambiente virtual**

Após observados os equívocos na resolução da atividade 1, Figura 13, foi dado a esse aluno o *feedback*, para compreender os motivos que levaram a dar essas respostas. Além disso, foi sugerido um material para estudo, no intuito de favorecer a compreensão dos conceitos. Em seguida, são apresentadas e discutidas as respostas suficientes para a atividade 2.

### 5.1.3. Respostas suficientes para a atividade 2

A segunda atividade que compõe a tarefa 1 requer a investigação do aluno quanto a possibilidade de existir um valor  $\alpha$  tal que a probabilidade entre 0 (zero) e esse número  $\alpha$  fosse equivalente a 0,5 (meio). Utilizando o mesmo *applet* da atividade 1, seria necessário estimar possíveis valores (para  $\alpha$ ) até obter 0,5 e o número de retângulos necessários. A Figura 14 ilustra a atividade proposta aos alunos.

**Figura 14 - Atividade 2 proposta aos alunos**

<p><b>ATIVIDADE 2</b></p> <p>Qual o seria o valor de "<math>\alpha</math>", em <math>P(0 \leq x \leq \alpha)</math>, de modo que a probabilidade seja igual a 0,5 (meio). E indique o número "n" de retângulos necessários para obter tal resultado.</p>	
<p><b>A</b></p> <p><b>f<sub>x</sub></b></p>	<p>Digite sua resposta aqui...</p>

**Fonte: Ambiente virtual no GeoGebra**

A solução apropriada, como mostra a Figura 15, foi apresentada por E13 e E14, em que a resposta apresentada por ambos aponta que o melhor valor seria 3,8 e, utilizando 10000 retângulos para as somas inferior e superior, manipularam o recurso e compararam que, a partir de 3,8, estaria ultrapassando o valor de 0,5 para a probabilidade.

**Figura 15 - Resolução feita pelo E13 e pelo E14**

a)

**ATIVIDADE 2**

Qual o seria o valor de " $\alpha$ ", em  $P(0 \leq x \leq \alpha)$ , de modo que a probabilidade seja igual a 0,5 (meio). E indique o número "n" de retângulos necessários para obter tal resultado.

<b>A</b>	O numero de retângulos usado= 10000, usando o gráfico o valor $x_2 = 3,8$ esta exatamente 0,5 , porem se comparando a tabela seria o 3,9 mas ele esta passado de 0,5 no gráfico
$f_x$	

b)

**ATIVIDADE 2**

Qual o seria o valor de " $\alpha$ ", em  $P(0 \leq x \leq \alpha)$ , de modo que a probabilidade seja igual a 0,5 (meio). E indique o número "n" de retângulos necessários para obter tal resultado.

<b>A</b>	Para que a probabilidade seja = 0,5:
	$\alpha = 3,99$
$f_x$	$\alpha = 4$
	$\alpha = 5$
	Em que o número de retângulos (n) tende a 10.000; ou seja, $n = 10.000$

**Fonte: Registros do ambiente virtual**

Já a resolução apresentada pelo E18, na Figura 16, evidencia que ao manipular o recurso conseguiu obter o resultado esperado a partir de um número mínimo de retângulos. O que pode apontar que soube manipular o recurso e que tenha compreendido a probabilidade como resultado da integral da função densidade da distribuição Normal.

**Figura 16 - Resolução do E18**

**ATIVIDADE 2**

Qual o seria o valor de " $\alpha$ ", em  $P(0 \leq x \leq \alpha)$ , de modo que a probabilidade seja igual a 0,5 (meio). E indique o número "n" de retângulos necessários para obter tal resultado.

<b>A</b>	$x_2 = 3,9$
$f_x$	$n =$ acima de 78 já é possível observar que a soma s chega na casa do 0,50

**Fonte: Registros do ambiente virtual**

Na próxima seção são apontadas e discutidas algumas soluções que foram consideradas insuficientes para a atividade 2.

#### 5.1.4. Respostas insuficientes dos alunos na atividade 2

Como já mencionado, em meio às soluções apresentadas, algumas não puderam ser consideradas suficientes para responder o objetivo da atividade, seja por não encontrar qual o valor  $\alpha$  que sua probabilidade seja 0,5 (meio) ou ainda, por não ter informado o número de retângulos necessários para obter o resultado. O Quadro 3 mostra algumas respostas dadas, por alguns estudantes, para segunda atividade.

**Quadro 7 - Respostas não suficientes para a segunda atividade da tarefa 1**

ESTUDANTE	RESPOSTA DADA				
E2	<table border="1"> <tr> <td><math>A</math></td> <td>= 5 e n= 10000</td> </tr> <tr> <td><math>f_x</math></td> <td></td> </tr> </table>	$A$	= 5 e n= 10000	$f_x$	
$A$	= 5 e n= 10000				
$f_x$					
E4	<table border="1"> <tr> <td><math>A</math></td> <td>3,9 = 0,5000</td> </tr> <tr> <td><math>f_x</math></td> <td></td> </tr> </table>	$A$	3,9 = 0,5000	$f_x$	
$A$	3,9 = 0,5000				
$f_x$					
E5	<table border="1"> <tr> <td><math>A</math></td> <td>Valor de infinito encontrado foi 0.19146 para a probabilidade de 0,5 com N=10.000</td> </tr> <tr> <td><math>f_x</math></td> <td></td> </tr> </table>	$A$	Valor de infinito encontrado foi 0.19146 para a probabilidade de 0,5 com N=10.000	$f_x$	
$A$	Valor de infinito encontrado foi 0.19146 para a probabilidade de 0,5 com N=10.000				
$f_x$					
E7	<table border="1"> <tr> <td><math>A</math></td> <td>10000 RETÂNGULOS</td> </tr> <tr> <td><math>f_x</math></td> <td></td> </tr> </table>	$A$	10000 RETÂNGULOS	$f_x$	
$A$	10000 RETÂNGULOS				
$f_x$					
E8	<table border="1"> <tr> <td><math>A</math></td> <td>P= 0,3413 ; N= 2000</td> </tr> <tr> <td><math>f_x</math></td> <td></td> </tr> </table>	$A$	P= 0,3413 ; N= 2000	$f_x$	
$A$	P= 0,3413 ; N= 2000				
$f_x$					

E11	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>A</math>  <math>f_x</math> </div> <div style="margin-left: 10px;">N=7</div>
E15	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>A</math>  <math>f_x</math> </div> <div style="margin-left: 10px;">0,1174 0,1183 n=6</div>
E21	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>A</math>  <math>f_x</math> </div> <div style="margin-left: 10px;">Para que a probabilidade igual a 5 são necessários aproximadamente 1000 retângulos</div>
E24	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>A</math>  <math>f_x</math> </div> <div style="margin-left: 10px;">S=0,19159 n=90</div>

**Fonte: Registros do ambiente virtual**

Em relação às respostas elencadas no Quadro 7, é possível perceber que houve um equívoco na interpretação da atividade, ou ainda, que não tenha ficado claro a intenção dela para alguns alunos, pois o importante não era apresentar o número de retângulos.

O E24, por exemplo, utilizou o mesmo número N de retângulos que o E18 (ver Figura 16). Contudo, sua soma S indica uma probabilidade igual a 0,19159, o que não representa o esperado de 0,5. Dessa forma, não foi suficiente apenas indicar um número de retângulos, mas determinar o valor de  $\alpha$  mais apropriado.

Em outras soluções, os estudantes entenderam que 0,5 seria um valor de x para determinar sua probabilidade e anotaram o número de retângulos necessários. Os alunos foram questionados, no ambiente virtual, sobre a solução dada, mas alguns comentaram não ter compreendido essa atividade e acabaram respondendo de acordo com o entendimento deles, para que não entregasse em branco a questão.

A atividade 2 foi retomada, em aula, para discutir e verificar quais os equívocos foram cometidos pelos estudantes e avaliar quais as dificuldades encontradas na compreensão da função densidade da distribuição Normal Z.

Na subseção a seguir são apresentados os comentários que os alunos deixaram em relação à realização da Tarefa 1.



### 5.1.5. O que os estudantes comentaram sobre a experiência na realização da Tarefa 1?

Como o *applet* havia sido manipulado em sala para explorar alguns exercícios, para a Tarefa 1 os estudantes já estavam familiarizados com o recurso. Assim, esperava-se que não tivessem dúvidas quanto ao uso do recurso. Entretanto, a terceira questão foi um espaço para que os estudantes pudessem comentar sobre a experiência com a realização da Tarefa 1.

O E22, por exemplo, relatou sobre o uso do ambiente virtual como uma alternativa para verificar os conceitos estudados em aula. O estudante mencionou que “em relação a substituição dos valores no gráfico foi uma experiência positiva, pois não ficamos presos somente ao papel e a calculadora como em sala de aula, dessa maneira descobrimos outro recurso que poderemos usar com mais frequência”.

Já o E14, comentou que “até então, a atividade não apresenta dificuldades. Há de se ter um tempo natural para adaptar-se ao funcionamento das variáveis, mas, não há uma grande dificuldade para tal”. Esse comentário está relacionado com o relato feito pelo E5, que menciona ser necessário propor, em outros momentos, o uso do recurso para melhor compreensão quanto sua manipulação. O E5 cita que “ainda tenho dificuldades em entender a interação dos dados com o GeoGebra, gostaria do uso do aplicativo em sala mais vezes para ajudar a compreender melhor como usá-lo”. Os estudantes E5 e E14 consideraram importante que nas aulas também seja contemplado o uso da tecnologia, para que os mesmos possam explorar e manipular o recurso apresentado pelo professor. O primeiro momento, da Tarefa 1, foi com o professor em sala mostrando como manipular o *applet*, em seguida, após a aula que os estudantes tiveram contato com a tarefa e puderam fazer uso do recurso.

Alguns comentários foram mais específicos, com as dúvidas em relação a atividade 2. O E2, por exemplo, mencionou que “a atividade 2 para mim ficou um pouco confusa, não sei se respondi corretamente”. Já o E4 comentou que “em relação a 1 em jogar os números e conferir com a tabela foi positiva, somente a 2 que não consegui pegar a essência da resolução quando surgiu o alfa”. Percebe-se, aí, que houve uma incompreensão do alfa como uma variável. O E8 comentou que teve dificuldade na atividade 2, no entanto a atividade 1, que foi feita em sala, facilitou a compreensão.

O E13 relatou que faltou a ferramenta zoom no *applet*, pois “a tarefa em si não é tão complexa, mas não estou conseguindo dar zoom no gráfico e nem mover para os lados, então, não sei se  $N=10000$  está totalmente completo ou sobrando algo”.

Dois estudantes comentaram que tiveram dificuldades em compreender a tarefa. O E15, por exemplo, relatou que “tive dificuldade em entender o que o professor pretendia com as questões mas, mesmo assim, tentei resolver”. Cabe ressaltar que esse estudante faltou na aula de introdução à integral e a manipulação do *applet*. O E25 comentou que ainda não tinha familiaridade com a plataforma e ficou com dúvidas para responder a tarefa, disse que “não consegui fazer, tentei algumas vezes, mas não consegui. Achei difícil esse conteúdo. Será que o professor não tem um horário para me explicar?”

Esses comentários deixados pelos estudantes, contribuíram para refletir para planejar e elaborar a próxima tarefa, e qual abordagem híbrida poderia ser pensada para implementar. As diferentes características do Ensino Híbrido permitem promover diferentes abordagens para o uso da tecnologia.

A próxima tarefa, para o estudo da integral por substituição, foi elaborada e intitulada como Tarefa 2 e proposta em uma abordagem de *laboratório rotacional* (BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015), que apresentamos na seção seguinte.

## 5.2. Tarefa 2 – Integral por Substituição: $u$ e $du$

Essa tarefa, apresentada na seção 4.2, é composta por 6 questões, sendo cinco para explorar o recurso e uma questão para comentar sobre a experiência quanto a manipulação no GeoGebra. O Quadro 8 mostra como foram classificadas as 22 respostas que foram encaminhadas pelos alunos.

**Quadro 8 - Organização quantitativa da Tarefa 2: em suficiente, insuficiente e não respondeu**

	Suficiente	Insuficiente	Não respondeu
<b>ATIVIDADE 1</b>	19	1	5
<b>ATIVIDADE 2</b>	21	1	3
<b>ATIVIDADE 3</b>	2	20	3
<b>ATIVIDADE 4</b>	18	3	4
<b>ATIVIDADE 5</b>	9	10	6
<b>ATIVIDADE 6</b>	8 Comentários		

Fonte: o autor

Na seção a seguir são apresentadas as respostas consideradas como suficientes para Tarefa 2.

### 5.2.1. Respostas suficientes para a tarefa 2

A tarefa 2, intitulada ‘Integral por Substituição: u e du’, foi proposta aos alunos. Destes, retornaram 22 resoluções. Quanto a questão 1, proposta na tarefa, é uma função composta, conforme mostra a Figura 17.

**Figura 17 - Primeira questão proposta na tarefa 2**

Em cada questão a seguir, utilize a janela do Geogebra acima, inserindo na primeira janela (à esquerda) a função e a partir dela identifique qual termo será chamado de "u". E obtenha na segunda janela (à direita) a primitiva. E anote o resultado obtido em

1) Calcule  $\int (3x + 5)^4 dx$

**A** Digite sua resposta aqui...

$f_x$

Fonte: Ambiente virtual no GeoGebra

A maior parte dos estudantes que respondeu a primeira questão, inseriu como resposta a função obtida no recurso. O que pode-se considerar como positivo, pois fizeram uso das ferramentas do ambiente virtual, da maneira que cada um conseguiu inserir função. O Quadro 9 mostra que uma mesma resposta foi comum à alguns estudantes.

**Quadro 9 - Resposta dada pelos estudantes para a primeira questão da tarefa 2**

Estudantes	Resposta dada
E2, E3, E5, E9, E22, E23, E20, E24	<p>1) Calcule <math>\int (3x + 5)^4 dx</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p><b>A</b> <math>F(x) = \frac{81}{5}x^5 + 135x^4 + 450x^3 + 750x^2 + 625x</math></p> <p><math>f_x</math></p> </div>

Fonte: Registros do ambiente virtual

Uma segunda escrita da solução para a primeira questão foi, na opinião dos alunos, a mais coerente, seguindo os exemplos resolvidos durante as aulas que antecederam a resolução da tarefa. Assim, para não haver conflitos na escrita da solução, resolveram escrever a solução sem desenvolver o polinômio. O Quadro 10 mostra as soluções apresentadas.

**Quadro 10 - Solução escrita com polinômio para a primeira questão**

Estudante	Solução
E1, E8, E16, E19	1) Calcule $\int (3x + 5)^4 dx$ $\frac{(3x + 5)^5}{15} + C$
E7, E15, E25	1) Calcule $\int (3x + 5)^4 dx$ $u = x + 3$ $f(x) = \frac{81}{5}x^5 + 135x^4 - 450x^3 + 750x^2 + 625x$
E13, E14, E18	1) Calcule $\int (3x + 5)^4 dx$ $\frac{(3x + 5)^5}{5} + c$ $u = 3x + 5$ $du = 3 dx$
E4	1) Calcule $\int (3x + 5)^4 dx$ O resultado obtido de acordo com o geogebra foi $F(x) = \frac{81}{5}x^5 + 135x^4 + 450x^3 + 150x^2 + 625x$ o resultado da minha resolução é: $\frac{(3x + 5)^5}{15} + c$

**Fonte: Registros no ambiente virtual**

Embora as respostas, mesmo escritas de diferentes formas, são a solução para questão. Alguns estudantes mencionaram qual foi sua escolha para substituição  $u$ , o que foi interessante, visto que seguia o encaminhamento dos exemplos anteriores, feitos em sala de aula. O E4 comentou que, mesmo obtendo um resultado manipulando o recurso, fez a resolução em seu caderno e postou na atividade como uma segunda opção de solução. A resposta dada pelo E4

mostra que ele percebeu que no *applet* o polinômio do resultado não era na forma fatorada, e estava diferente do que estava sendo feito anteriormente em aula. Foi a oportunidade de mencionar que essa notação era uma limitação do *applet*, mas que ambas as respostas estavam corretas.

Foram propostas cinco questões para a tarefa 2. O objetivo para cada uma delas foi o mesmo: identificar quem deveria ser substituído por  $u$  e verificar a solução no recurso. Algumas soluções foram dadas de acordo com a fornecida pelo recurso e outros apontaram como resposta o resultado obtido no caderno, conforme segue no Quadro 11.

**Quadro 11 - Solução apresentada para a segunda questão obtida no recurso e/ou feita no caderno**

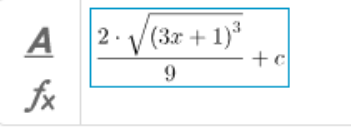
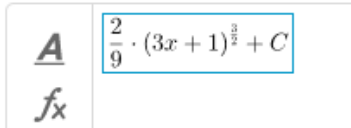
Estudante	Solução
E2, E3, E5, E9, E22, E23, E12, E20, E24	<p>2) Calcule <math>\int (2x - 5)^3 dx</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <p><b>A</b> <math>F(x) = 2x^4 - 20x^3 + 75x^2 - 125x</math></p> <p><b>f<sub>x</sub></b></p> </div>
E1, E8, E16, E19	<p>2) Calcule <math>\int (2x - 5)^3 dx</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <p><b>A</b> <math>\frac{(2x - 5)^4}{8} + C</math></p> <p><b>f<sub>x</sub></b></p> </div>
E7, E13, E14, E15, E18, E25, E21	<p>2) Calcule <math>\int (2x - 5)^3 dx</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <p><b>A</b> <math>\frac{(2x - 5)^4}{4} + c</math></p> <p><b>f<sub>x</sub></b> <math>u=2x+5</math> <math>du=2 dx</math></p> </div>
E4	<p>2) Calcule <math>\int (2x - 5)^3 dx</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <p><b>A</b> Resultado do Geogebra: <math>2x^4 - 20x^3 + 75x^2 + 125x</math></p> <p><b>f<sub>x</sub></b> o meu Resultado : <math>\frac{(2x - 5)^4}{8} + c</math></p> </div>

Fonte: Registros no ambiente virtual

Com essas resoluções, foi dado um *feedback* para a turma na aula, pois mesmo que as respostas dadas fossem suficientes para a solução, havia dúvidas em relação a qual delas seria a correta para a questão. Aproveitando que E4 apresentou as duas escritas como solução, foi mencionado que a diferença entre as respostas dadas era apenas a escolha pelo desenvolvimento ou não do polinômio. Em relação à resposta do E4, tanto para a questão 1 quanto na 2, foi mencionado, em aula, sobre a vantagem em utilizar o método da substituição para que não seja necessário desenvolver o polinômio para então encontrar a primitiva, e que isso seria ainda mais interessante para questões que a função polinomial tivesse grau mais elevado.

Na terceira questão, as soluções suficientes para a questão estão no Quadro 12. As duas resoluções apresentadas são suficientes para satisfazer o objetivo da questão, embora elas tenham escritas diferentes, foi a oportunidade de mencionar, numa aula seguinte, sobre as diferentes formas de notação.

**Quadro 12 - Solução adequada para a terceira questão da tarefa 2**

Estudante	Solução
E1	3) Determine $\int (\sqrt{3x+1}) dx$ 
E20	3) Determine $\int (\sqrt{3x+1}) dx$ 

Fonte: Registros no ambiente virtual

Já na quarta questão, algumas respostas apareceram com detalhes, destacando quem foi chamado de ‘u’ e ‘du’, bem como a notação fornecida pelo GeoGebra. No caso do E4 e E14, destacaram que além de inserir a resposta obtida do *applet*, também anexaram a resolução feita no caderno. Algumas dessas soluções, consideradas como suficientes, estão organizadas no Quadro 13.

Quadro 13 - Soluções suficientes para a quarta questão da tarefa 2

Estudante	Solução
E3, E9, E23, E12, E20, E24	4) Determine $\int \frac{1}{(x+5)^2} dx$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math display="block">f(x) = 0 - \frac{1}{(x+5)}</math> </div>
E8, E19	4) Determine $\int \frac{1}{(x+5)^2} dx$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math display="block">-\frac{1}{x+5} + C</math> </div>
E7, E13, E15, E16, E25	4) Determine $\int \frac{1}{(x+5)^2} dx$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math display="block">\mu = x + 5</math>  <math display="block">du/1 = dx</math>  <math display="block">1/(x+5)^2 = (x+5^{-1})/-1 + C</math> </div>
E1, E21, E22	4) Determine $\int \frac{1}{(x+5)^2} dx$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math display="block">u = x + 5</math>  <math display="block">du = 1</math>            Portanto: <math>\left(\frac{x+5}{-1}\right)^{-1} + c</math> </div>
E4, E14	4) Determine $\int \frac{1}{(x+5)^2} dx$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math display="block">\text{Resultado do Geogebra: } 0 - \frac{1}{(x+5)} \text{ meu resul: } \frac{-1}{-1 \cdot (x+5)^1} + c</math> </div>

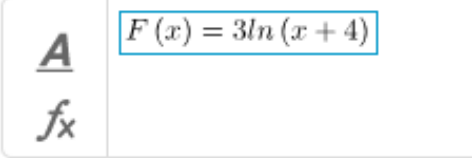
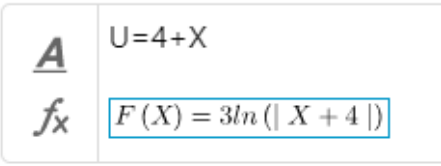
Fonte: Registros no ambiente virtual

Em aula, foi explanado sobre a resposta na forma fatorada e expandida do polinômio, que os estudantes E4 e E14 comentaram. Embora pareçam distintos resultados, representam a mesma solução, que em ambos os casos são equivalentes.

A quinta questão foi interessante, visto que além da substituição ‘u’ e ‘du’, o resultado seria dado por uma função logarítmica (ln). A maioria dos alunos destacou em sua resposta o

uso do módulo, enquanto duas respostas não se atentaram para esse fato. Os conceitos sobre o uso do módulo foram discutidos posteriormente na aula. O Quadro 14 mostra as resoluções feitas na questão.

**Quadro 14 - Solução suficiente para a quinta questão da Tarefa 2**

Estudante	Solução
E2, E1	5) Calcule $\int \frac{3}{4+x} dx$ 
E7, E8, E12, E14, E15, E19, E25	5) Calcule $\int \frac{3}{4+x} dx$ 

Fonte: Registros no ambiente virtual

Estão elencadas na próxima seção algumas soluções que foram consideradas como não suficientes para a segunda tarefa.

### 5.2.2. Respostas insuficientes para a tarefa 2

Embora tenham sido realizados exemplos e discutidos conceitos sobre a integral por substituição, ao manipular o recurso percebeu-se que algumas soluções não foram suficientes para as questões propostas.

Na primeira e segunda questões, por exemplo, nota-se que houve uma incompreensão na resposta que deveria ser dada. O E11 destacou quem foi substituído por 'u' e 'du', mas não colocou qual o resultado encontrado, conforme segue no Quadro 15.



**Quadro 15 - Solução do E11 para a primeira e segunda questões da tarefa 2**

<p>a)</p> <p>1) Calcule <math>\int (3x + 5)^4 dx</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p><b>A</b> <math>u=3x+5 \quad du/3=dx</math></p> <p><b>f<sub>x</sub></b></p> </div>	<p>b)</p> <p>2) Calcule <math>\int (2x - 5)^3 dx</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p><b>A</b> <math>u=2x-5 \quad du/2=dx</math></p> <p><b>f<sub>x</sub></b></p> </div>
---	---

Fonte: Registros no ambiente virtual

Na terceira questão, alguns equívocos foram percebidos em relação às respostas dadas. O hábito de não utilizar recurso ou *software* para escrever equações ou termos matemáticos (editor de equações) pode ter dificultado para responder as questões. Considerando que era necessário inserir no campo de entrada, do recurso, a função e anotar o resultado obtido por meio da manipulação, percebe-se que as respostas, que estão organizadas no Quadro 16, estão divergentes, quando comparadas com as respostas consideradas suficientes. Em um *feedback*, em aula, os estudantes relataram não ter costume de realizar recursos matemáticos, e que tiveram dificuldade por ter sido uma raiz quadrada.

**Quadro 16 - Soluções não adequadas para a terceira questão da tarefa 2**

Estudante	Solução
E2	<p>3) Determine <math>\int (\sqrt{3x+1}) dx</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p><b>A</b> <math>F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x</math></p> <p><b>f<sub>x</sub></b></p> </div>
E3, E5, E7, E9, E15, E16, E22, E23, E12, E25	<p>3) Determine <math>\int (\sqrt{3x+1}) dx</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p><b>A</b> <math>f(x) = \frac{2}{9} \cdot \sqrt{(3x+1)3x+1}</math></p> <p><b>f<sub>x</sub></b></p> </div>
E8, E19	<p>3) Determine <math>\int (\sqrt{3x+1}) dx</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p><b>A</b> <math>5\sqrt{\frac{(3x+1)^3}{3}} + C</math></p> <p><b>f<sub>x</sub></b></p> </div>

E11	<p>3) Determine <math>\int (\sqrt{3x+1}) dx</math></p> <p><b>A</b> <math>u=3x+1 \quad du/3=dx</math></p> <p><b>f<sub>x</sub></b></p>
E13, E14, E18, E21, E24	<p>3) Determine <math>\int (\sqrt{3x+1}) dx</math></p> <p><b>A</b> <math>2 \frac{(3x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c</math></p> <p><b>f<sub>x</sub></b> <math>u=3x+1</math> <math>du= 3 dx</math></p>
E4	<p>3) Determine <math>\int (\sqrt{3x+1}) dx</math></p> <p><b>A</b> <math>\frac{3}{2}x^2 + x</math> Resultado do geogebra</p> <p><b>f<sub>x</sub></b> Meu resultado obtido : <math>2 \frac{\sqrt{(3x+1)^3}}{3} + c</math></p>

Fonte: Registros no ambiente virtual

Considerando que a terceira questão apresentou um número maior de respostas não suficientes, foi preciso retomar os conceitos para verificar o que não estava sendo compreendido pelos estudantes. Por isso, foram feitas atividades em sala que pudessem aprimorar a compreensão de conceitos e dessa técnica de resolução.

Na quarta questão, não houve tantos equívocos dos estudantes, conforme mostra o Quadro 17 com as soluções não suficientes. Neste caso, foi dado um *feedback* em aula, com cada um deles para identificar o que levou ao erro nessa questão.

Quadro 17 - Soluções não suficientes para a quarta questão

Estudantes	Soluções
E2	<p>4) Determine <math>\int \frac{1}{(x+5)^2} dx</math></p> <p><b>A</b> <math>F(x) = 0 - \frac{1}{3(x+5)^3}</math></p> <p><b>f<sub>x</sub></b></p>

E5	<p>4) Determine <math>\int \frac{1}{(x+5)^2} dx</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;"> <p><u>A</u> <math>f(x) = \frac{2}{9} \cdot \sqrt{3x+1} \cdot (3x+1)</math></p> <p><math>f_x</math></p> </div>
E11	<p>4) Determine <math>\int \frac{1}{(x+5)^2} dx</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;"> <p><u>A</u> <math>du=x+5 \quad du=dx</math></p> <p><math>f_x</math></p> </div>

Fonte: Registros no ambiente virtual

Algumas resoluções apresentadas para a quinta questão chamaram atenção, pois não foi possível identificar a incompreensão que levou às soluções apresentadas. Assim, a interação com os estudantes foi necessária para identificação do erro, para que o professor pudesse contribuir para sanar as dificuldades dos estudantes. Podemos mencionar que a aparência da função na questão pode não ter colaborado para identificar a solução correta. Percebe-se pelo Quadro 18, que houve diferentes respostas para questão. Embora tivessem acesso ao caderno, ou ainda, poderiam consultar exemplos em outros *sites*, aparentemente não aproveitaram desses recursos.

Quadro 18 - Soluções não suficientes para quinta questão da tarefa 2

Estudantes	Solução
E3, E9, E23, E4, E24	<p>5) Calcule <math>\int \frac{3}{4+x} dx</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;"> <p><u>A</u> <math>f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{4} x</math></p> <p><math>f_x</math></p> </div>
E5	<p>5) Calcule <math>\int \frac{3}{4+x} dx</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;"> <p><u>A</u> <math>f(x) = \frac{3}{5} \cdot \ln( x )</math></p> <p><math>f_x</math></p> </div>

E13, E21	<p>5) Calcule <math>\int \frac{3}{4+x} dx</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p><b>A</b> <math>u=4+x</math> <math>du=4</math></p> <p><b>f<sub>x</sub></b> <math>\frac{3(4+x)}{1} + c</math></p> </div>
E11	<p>5) Calcule <math>\int \frac{3}{4+x} dx</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p><b>A</b> <math>u=4+x du=dx</math></p> <p><b>f<sub>x</sub></b></p> </div>
E20	<p>5) Calcule <math>\int \frac{3}{4+x} dx</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p><b>A</b> <math>\ln( 4+x ^3) + C</math></p> <p><b>f<sub>x</sub></b></p> </div>

Fonte: Registros no ambiente virtual

Na seção seguinte são apresentados alguns apontamentos feitos pelos estudantes em relação à tarefa realizada.

### 5.2.3. O que nos disseram os estudantes sobre a Tarefa 2

A segunda tarefa tinha por objetivo verificar o conhecimento dos alunos quanto ao uso da substituição para determinar a primitiva de uma função composta e manipular as ferramentas matemáticas disponíveis para inserir resposta.

A última questão da tarefa corresponde a um espaço para os estudantes apontarem o que consideraram como pontos positivos e/ou negativos, bem como, expressar suas dificuldades e limitações quanto às questões, ou ainda, mencionar sobre o uso do recurso para essa atividade em questão.

Alguns estudantes relataram que o ambiente virtual, durante a manipulação do recurso, ficou travando para carregar a atividade. Outros apontaram que, no gráfico, houve demora, tanto para carregar quanto na exibição do mesmo.

O E9, por exemplo, comentou que “foi encontrado um certo nível de dificuldade, devido à falta de conhecimento sobre o programa”. Este argumento foi apontado devido ao fato que na tarefa era necessário escrever a solução, a primitiva, considerando a notação matemática adequada.

Segundo os argumentos apresentados pelo E2, não ficou claro a interpretação gráfica para as questões propostas. Quando questionado, comentou que apenas o resultado algébrico é suficiente para a tarefa. Já o E24 relatou não ter tido dificuldades na compreensão da tarefa, porém, assim como o E2, não compreendeu os gráficos, conforme ilustra a Figura 18.

**Figura 18 - Considerações sobre a tarefa 2 pelo E24**

6) Comente sua impressão, quanto a manipulação do Geogebra, as questões propostas e, quais observações para essa atividade.	
<b>A</b>	Consegui fazer sem muitas dificuldades o que foi proposto
<b>f<sub>x</sub></b>	Não entendi direito os gráficos Tornou mais fácil o entendimento da Integral por substituição

**Fonte: Registros do ambiente virtual**

Uma sugestão apontada pelos estudantes, como, por exemplo, na Figura 19, comentado pelo E4, é quanto ao formato das respostas dadas pelo recurso no *applet*, pois fica difícil comparar com o resultado obtido manualmente. Considerando o apontamento do E4, se houvesse necessidade de ser calculada uma primitiva, de uma função composta com um polinômio com grau alto, seria necessário desenvolver esse polinômio para que pudesse comparar o resultado com o recurso. No entanto, durante as aulas, era apenas necessário compreender o uso adequado da substituição para, assim, determinar sua primitiva.

**Figura 19 - Considerações sobre a tarefa 2 pelo E4**

6) Comente sua impressão, quanto a manipulação do Geogebra, as questões propostas e, quais observações para essa atividade.	
<b>A</b>	Quanto a manipulação do geogebra é novo e com algumas dificuldades mas acho que deu para entender , as observações é que os resultados obtidos por meio da ferramenta não é o mesmo obtido feito manualmente.
<b>f<sub>x</sub></b>	

**Fonte: Registros no ambiente virtual**

Esse apontamento não foi feito apenas por esse estudante, mas apareceram outros apontamentos que descrevem a mesma situação quanto a notação para o resultado, que causou dúvidas sobre a solução correta. Assim, temos dois outros comentários, elencados no Quadro 19.

**Quadro 19 - Considerações sobre a tarefa 2**

Estudante	Comentário
E7	<p>6) Comente sua impressão, quanto a manipulação do Geogebra, as questões propostas e, quais observações para essa atividade.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p><b>A</b> <math>f_x</math> as questões até que foram razoável, porém ainda tenho algumas dificuldades ao manusear, mais fácil resolver no caderno e passar somente o resultado aqui.</p> </div>
E13	<p>6) Comente sua impressão, quanto a manipulação do Geogebra, as questões propostas e, quais observações para essa atividade.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p><b>A</b> <math>f_x</math> Colocando as funções no geogebra , as respostas no outro grafico sao expandidas então não sabemos se acertamos ou não pois chegamos em uma forma mais simplificada e não tao expandida.</p> </div>

**Fonte: Registros do ambiente virtual**

Algumas sugestões também foram mencionadas para repensar nas próximas tarefas. O E19, por exemplo, apontou que “acredito que deva ter a opção copiar e colar os resultados, pois facilitaria muito nossa vida nesse tipo de exercício”. O E12, ilustrado na Figura 20, comentou sobre a ausência de algumas ferramentas para auxiliar no gráfico, assim como, sua incompreensão sobre os campos a serem preenchidos na tarefa e quanto ao resultado obtido em cada questão.

**Figura 20 - Comentário sobre a tarefa 2 pelo E12**

6) Comente sua impressão, quanto a manipulação do Geogebra, as questões propostas e, quais observações para essa atividade.	
<b>A</b> $f_x$	<p>-Quando apareceram, eu não entendi o significado dos gráficos. Não ter a opção de ampliar a imagem dificultou qualquer análise.</p> <p>-Entendi as questões propostas, porém, não entendi o propósito do exercício. Sei que o segundo quadro representa a integral da primeira, mas não entendi o porquê de preencher o campo de (u), pois mesmo preenchendo errado eu chego no mesmo resultado.</p> <p>-A atividade serviu para entender que uma função pode ser resolvida com menos "tamanho".</p>

**Fonte: Registros do ambiente virtual**

O comentário que o E12 deixou para tarefa 2: “entendi as questões propostas, porém, não entendi o propósito do exercício. Sei que o segundo quadro representa a integral da primeira, mas não entendi o porquê de preencher o campo de (u), pois mesmo preenchendo

errado eu chego no mesmo resultado” indicou a necessidade de rever essa tarefa. Houve uma limitação na elaboração do *applet*, pois, inserindo a função no campo de entrada, sua primitiva seria obtida, assim como, o resultado final seria fornecido no *applet*, independente da escolha de  $u$ .

A observação de E12 contribuiu para refletir e repensar novas tarefas, sendo que elas poderiam ser pautadas. Em um mesmo *applet*, diferentes questões poderiam ser propostas, como, por exemplo, solicitar que outros conceitos possam ser explorados nas questões, ou então, utilizar a representação gráfica que por meio da manipulação interpretar os conceitos da primitiva de uma função. Outras combinações dessa mesma tarefa ainda poderiam ser elaboradas.

Já o E15 comentou que a tarefa contribuiu para compreensão dos conceitos, que na sua opinião, o gráfico ajudou na interpretação dos resultados, conforme mostra a Figura 21.

**Figura 21 - Comentário sobre a tarefa 2 pelo E15**

6) Comente sua impressão, quanto a manipulação do Geogebra, as questões propostas e, quais observações para essa atividade.	
$\frac{A}{f_x}$	De início tive dificuldade em encontrar os recursos, mas depois ficou bem tranquilo. A questão proposta foi fácil e podemos observar a movimentação gráfica de acordo com cada resultado da Integral.

**Fonte: Registros do ambiente virtual**

As considerações da sexta questão apresentadas pelos alunos e as resoluções que fizeram para as cinco primeiras questões deixaram indícios de que restrições do próprio *applet* possam configurar obstáculos que dificultaram, ou, ao menos, não facilitaram a interpretação do resultado em diferentes representações. Essa análise nos permitiu observar que a Tarefa 2 carece ser reformulada para que se possa aproveitar o potencial do *applet* no GeoGebra e exploradas diferentes representações: algébrica, geométrica, tabular e a verbal (ANDRADE, SARAIVA, 2012).

A seção 5.3 apresenta a terceira tarefa, que será discutida, bem como a análise das resoluções e o *feedback* dos estudantes em relação à manipulação.

### 5.3. Tarefa 3 – Teorema Fundamental do Cálculo

Conforme apresentada na seção 4.3, a Tarefa 3 era composta por quatro atividades, as quais serão discutidas. A atividade 5 é um espaço para comentários em relação à manipulação e resolução das atividades. Ao todo, foram 21 resoluções, as quais estão organizadas no Quadro 20, de acordo com as soluções, em suficientes e insuficientes, sendo também mencionados quantos não responderam cada atividade.

**Quadro 20 - Organização quantitativa da Tarefa 3: em suficiente, insuficiente e não respondeu**

	SUFICIENTE	INSUFICIENTE	NÃO RESPONDEU
ATIVIDADE 1	15	6	1
ATIVIDADE 2	17	3	2
ATIVIDADE 3	17	2	3
ATIVIDADE 4	7	9	6
ATIVIDADE 5	14 comentários		

Fonte: o autor

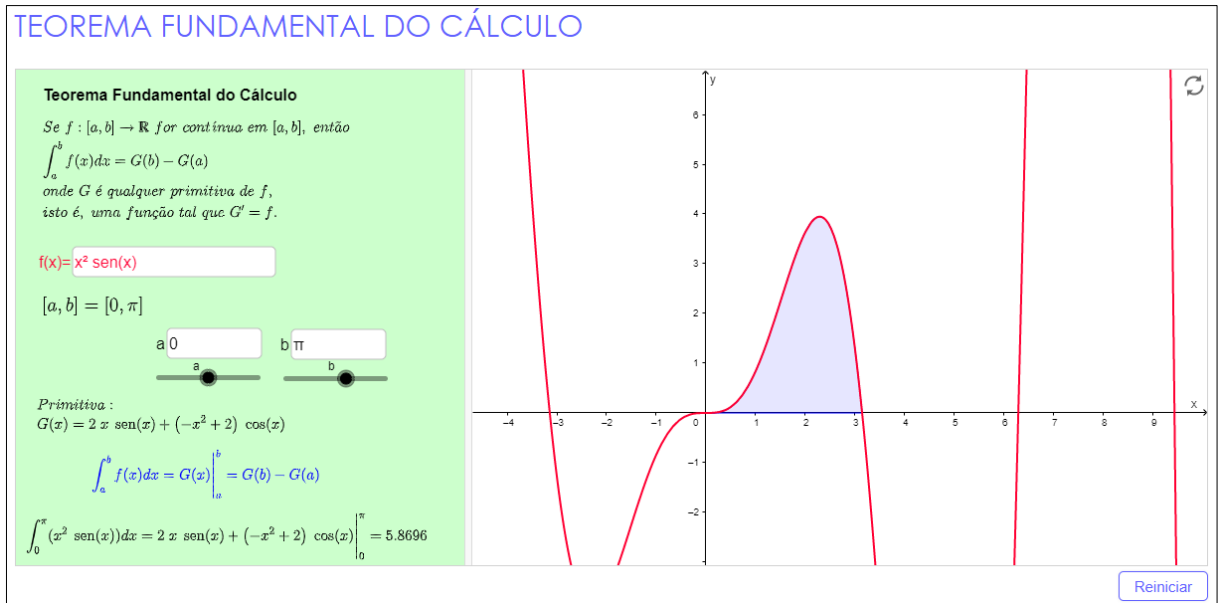
A seguir, são mencionadas as respostas consideradas suficientes para a tarefa, apresentando as soluções dadas pelos estudantes.

#### 5.3.1 Respostas suficientes para a tarefa 3

A terceira tarefa, conforme a Figura 22 - a qual foi encaminhada para que os alunos a desenvolvessem antes de o conceito ter sido discutido em aula - obteve 21 resoluções. As questões propostas para essa tarefa tinham como intuito investigar conceitos do Teorema Fundamental do Cálculo, e, para tanto, seria necessário que os alunos inserissem no recurso do GeoGebra as funções e os extremos de integração “a” e “b” para determinar a integral definida na janela à esquerda e na janela à direita aparece o gráfico e a região abaixo da curva, que representa a integral calculada.



Figura 22 - Terceira atividade proposta



**Fonte: Ambiente virtual no GeoGebra**

As três primeiras questões propostas, tinham por intuito manipular o recurso, sendo necessário inserir os dados correspondentes à questão, e verificar no *applet* qual das alternativas seria a resposta adequada.

Dessa forma, cada uma das três primeiras atividades tinha quatro alternativas e apenas uma delas seria a correta, a Figura 23 ilustra as três primeiras questões respondidas pelos estudantes.

**Figura 23 - Representação das três primeiras questões da tarefa 3**

1) Qual das alternativas abaixo é a solução para  $\int_1^2 x^2 dx$

$\frac{3}{7}$

3

$\frac{7}{3}$

$\frac{8}{3}$

2) Qual a opção correta para  $\int_{-1}^3 4dx$ ?

4

8

16

12

3) Marque a alternativa correta, para a  $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$

$\frac{1}{2}$

1

$\frac{3}{4}$

$\frac{1}{4}$

**Fonte: Ambiente virtual no GeoGebra**

As soluções para essas questões foram encaminhadas pela maioria dos alunos, que tiveram grande número de acertos. Pode-se mencionar que os estudantes tiveram um bom desempenho com o recurso, visto que, para obter a resposta certa, era necessário manipular e inserir os dados corretamente.

O Quadro 21 está sintetizando os estudantes cujas respostas dadas foram classificadas como suficientes.

Quadro 21 - Resolução dos estudantes para tarefa 3

Estudante	Solução apresentada
E5, E8, E11, E22, E1, E4, E7 e E25, E13, E14, E16, E18, E20, E21, E24	1) Qual das alternativas abaixo é a solução para $\int_1^2 x^2 dx$ <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{7}{3}$ <input type="checkbox"/> $\frac{3}{7}$ <input type="checkbox"/> 3 <input type="checkbox"/> $\frac{8}{3}$
E2, E3, E5, E8, E9, E11, E22, E1, E4, E12, E13, E14, E15, E18, E20, E21, E24	2) Qual a opção correta para $\int_{-1}^3 4dx$ ? <input type="checkbox"/> 4 <input type="checkbox"/> 8 <input type="checkbox"/> 12 <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> 16
E3, E5, E8, E9, E11, E22, E1, E4, E7, E12, E13, E14, E15, E18, E20, E21, E24	3) Marque a alternativa correta, para a $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ <input type="checkbox"/> $\frac{1}{4}$ <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{1}{2}$ <input type="checkbox"/> $\frac{3}{4}$ <input type="checkbox"/> 1

Fonte: Registros do ambiente virtual

O E7, por exemplo, além de marcar sua resposta para a terceira questão, inseriu um comentário para reafirmar a alternativa assinalada como sua resposta. O mesmo foi feito pelo E25, na primeira questão proposta. Embora tenham comentado qual das quatro alternativas era a correta, quando a atividade era novamente acessada, as alternativas eram embaralhadas pelo ambiente virtual.

Já para a quarta questão da atividade, era preciso refletir quanto a manipulação do recurso das primeiras atividades. Caso necessário, deveriam ser consultadas algumas referências, como, por exemplo, as sugeridas durante as aulas (ANTON, 2007; GUIDORIZZI,

2001), ou mesmo outros materiais, tais como, vídeos, apostilas e livros que auxiliassem a responder a questão. Para essa referida questão seria necessário que os estudantes refletissem sobre os conceitos do Teorema Fundamental do Cálculo e, com suas palavras, o interpretassem ou o caracterizassem. A Figura 24 mostra a questão proposta.

**Figura 24 - Representação da quarta questão proposta na tarefa 3**

4) Escreva, com suas palavras, sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.

$\underline{A}$   
 $f_x$

Digite sua resposta aqui...

**Fonte: Ambiente virtual no GeoGebra**

Alguns apontamentos feitos pelos estudantes para essa questão, conforme Quadro 22, foram pertinentes para direcionar o encaminhamento a ser realizado na próxima aula, que seria um *feedback* da tarefa 3, e formalizar a definição do Teorema Fundamental do Cálculo.

**Quadro 22 - Respostas dadas pelos estudantes para a quarta questão da tarefa 3**

Estudante	Solução dada
E5	<p>4) Escreva, com suas palavras, sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.</p> <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; margin-top: 5px;"> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border-right: 1px solid gray; padding-right: 5px; margin-right: 5px;"> <math>\underline{A}</math> <math>f_x</math> </div> <div style="flex-grow: 1;"> <p>O Teorema Fundamental do Cálculo estuda duas importantes operações do cálculo, a integração e a diferenciação, essas duas operações são, em resumo, o inverso uma da outra. Se uma função inicial é integrada e depois diferenciada, e vice-versa, ela volta ao seu formato original.</p> <p>Através da diferenciação (derivada), encontramos a reta tangente a um ponto da função, e a través da integração, conseguimos calcular a área abaixo de determinado intervalo da função.</p> </div> </div> </div>
E8	<p>4) Escreva, com suas palavras, sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.</p> <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; margin-top: 5px;"> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border-right: 1px solid gray; padding-right: 5px; margin-right: 5px;"> <math>\underline{A}</math> <math>f_x</math> </div> <div style="flex-grow: 1;"> <p>O teorema fundamental do cálculo é a base das duas operações centrais do cálculo, diferenciação e integração, que são considerados como inversos um do outro.</p> </div> </div> </div>
E7, E25	<p>4) Escreva, com suas palavras, sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.</p> <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; margin-top: 5px;"> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border-right: 1px solid gray; padding-right: 5px; margin-right: 5px;"> <math>\underline{A}</math> <math>f_x</math> </div> <div style="flex-grow: 1;"> <p>é a base das duas operações centrais do cálculo, diferenciação e integração, que são considerados como inversos um do outro. Isto significa que se uma função contínua é primeiramente integrada e depois diferenciada, volta-se na função original.</p> </div> </div> </div>

E3, E18	<p>4) Escreva, com suas palavras, sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <math>\int</math>  <math>f_x</math> </div> <p>entendi que o teorema fundamental do cálculo faz uma conexão entre o cálculo diferencial e o cálculo integral</p>
E24	<p>4) Escreva, com suas palavras, sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <math>\int</math>  <math>f_x</math> </div> <p>A Teorema fundamental do calculo, calcula a integral em um intervalo, ele faz a integral final (b) menos a inicial (a) para calcular a área</p>

**Fonte: Registros do ambiente virtual**

Embora as respostas, mostradas no Quadro 22, não apresentem uma escrita formal para a definição, as conjecturas apresentadas pelos estudantes mostram indícios que tiveram compreensão do conceito do Teorema Fundamental do Cálculo, que evidenciam a relação entre a derivada e a integral, o que pode ser relacionado à realização da antiderivada que foram realizadas nas primeiras duas tarefas.

O E5, por exemplo, aponta de maneira clara, com suas palavras, que existe uma relação entre a derivada e a integral, que percebeu na integral, em sua interpretação gráfica, como uma área abaixo da curva e, que pela derivada dessa função teria a reta tangente em determinado ponto. Esses apontamentos mostram que o estudante fez uma exploração do recurso e que pode ter buscado em referências bibliográficas informações para responder a atividade.

Embora não tenham sido apresentadas expressões matemáticas, as afirmações feitas pelos estudantes indicam que buscaram referenciais para responder a questão. E, a partir dessas respostas, foram pensados e planejados os encaminhamentos para a aula.

Em aula, no laboratório de informática, foi retomado os conceitos sobre o Teorema Fundamental do Cálculo, propondo discussões por meio de resolução de exemplos, os quais foram verificados no *applet*.

São discutidas na próxima seção as respostas não suficientes para terceira tarefa.

### 5.3.2 Respostas insuficientes dos alunos na tarefa 3

Embora a tarefa tenha sido feita com êxito por alguns estudantes, houve alguns que não conseguiram assinalar a alternativa correta para questão. As soluções apresentadas estão organizadas no Quadro 23, que mostra os estudantes que apresentaram soluções semelhantes.

**Quadro 23 - Solução não suficientes para a primeira questão da tarefa 3**

Estudante	Resposta dada
E2, E3, E9, E15	1) Qual das alternativas abaixo é a solução para $\int_1^2 x^2 dx$ <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{7}{3}$ <input type="checkbox"/> $\frac{3}{7}$ <input checked="" type="checkbox"/> 3 <input type="checkbox"/> $\frac{8}{3}$
E19, E12	1) Qual das alternativas abaixo é a solução para $\int_1^2 x^2 dx$ <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{7}{3}$ <input type="checkbox"/> $\frac{3}{7}$ <input type="checkbox"/> 3 <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{8}{3}$

Fonte: Registros do ambiente virtual

Algumas incoerências foram percebidas, por meio das respostas dadas pelos estudantes para a primeira questão. Uma das justificativas que pode ter levado ao erro é a não compreensão da definição do Teorema Fundamental do Cálculo, ou ainda, por não inserir corretamente a função e/ou os extremos do intervalo.

Na segunda questão, o E25, mesmo registrando numa primeira resolução a resposta mostrada no Quadro 24, verificou que cometeu um erro, e inseriu um comentário na questão corrigindo o equívoco feito.

Quadro 24 - Soluções não suficientes para a segunda questão da tarefa 3

Estudante	Solução dada
E7, E25	2) Qual a opção correta para $\int_{-1}^3 4dx$ ? <input type="checkbox"/> 4 <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> 8 <input type="checkbox"/> 12 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 16
E19	2) Qual a opção correta para $\int_{-1}^3 4dx$ ? <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> 4 <input type="checkbox"/> 8 <input type="checkbox"/> 12 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 16

Fonte: Registros do ambiente virtual

A terceira questão não apresentou muitas respostas não suficientes, o que pode-se verificar pelas respostas organizadas no Quadro 25:

Quadro 25 - Soluções não suficientes para a terceira questão da tarefa 3

Estudante	Solução dada
E2, E19	3) Marque a alternativa correta, para a $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ <input type="checkbox"/> $\frac{1}{4}$ <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{1}{2}$ <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{3}{4}$ <input type="checkbox"/> 1

Fonte: Registros do ambiente virtual

Embora a quarta questão fosse uma atividade que anteciparia a aula, esperava-se que os estudantes tivessem autonomia para verificar na literatura uma resposta suficiente para a questão. Algumas das conjecturas apresentadas foram consideradas insuficientes, seja pelos argumentos, ou pelos apontamentos não coerentes com a definição.

O Quadro 26 mostra algumas respostas dadas pelos estudantes. Apesar de o E9 mencionar que o teorema “é a base das operações centrais do cálculo diferencial e integral”, não deixa claro a relação entre elas. E o E15, que destaca que “no GeoGebra o teorema foi de fácil entendimento”, e insere argumentos que justificam o entendimento que foi facilitado. Outras respostas foram elencadas:

**Quadro 26 - Soluções não suficientes para quarta questão da atividade 3**

Estudante	Respostas dadas
E11	<p>4) Escreva, com suas palavras, sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.</p> <div style="border: 1px solid #ccc; padding: 5px;"> <p><b>A</b> <math>f_x</math> O Teorema fundamental do Calculo ao meu entender mostra-nos como calcular a area de uma curva , independe do intervalo.</p> </div>
E4	<p>4) Escreva, com suas palavras, sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.</p> <div style="border: 1px solid #ccc; padding: 5px;"> <p><b>A</b> <math>f_x</math> O teorema fundamental do calculo tem um pouco de integração e derivada para se chegar em um resultado.</p> </div>
E12	<p>4) Escreva, com suas palavras, sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.</p> <div style="border: 1px solid #ccc; padding: 5px;"> <p><b>A</b> <math>f_x</math> A diferenciação e a antidiferenciação agora fazem todo o sentido, porque sem elas não seria possível trabalhar com variações, taxas marginais, etc..</p> </div>
E13	<p>4) Escreva, com suas palavras, sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.</p> <div style="border: 1px solid #ccc; padding: 5px;"> <p><b>A</b> <math>f_x</math> Encontrar os valores dado os intervalos na função integral os intervalos b - a ou seja apenas o espaço que desejamos saber naquele intervalo.</p> </div>
E14	<p>4) Escreva, com suas palavras, sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.</p> <div style="border: 1px solid #ccc; padding: 5px;"> <p><b>A</b> <math>f_x</math> Semelhante à descoberta da derivada em um determinado ponto "a", por isso, o cálculo do Teorema fora facilitado, haja em vista que o processo é dado pela substituição dos valores do intervalo na primitiva encontrada.</p> </div>
E21	<p>4) Escreva, com suas palavras, sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.</p> <div style="border: 1px solid #ccc; padding: 5px;"> <p><b>A</b> <math>f_x</math> É a base das duas operações centrais do calculo e diferenciação que são considerados como inversos um do outro.</p> </div>
E20	<p>4) Escreva, com suas palavras, sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.</p> <div style="border: 1px solid #ccc; padding: 5px;"> <p><b>A</b> <math>f_x</math> o teorema facilita o cálculo de áreas sem a necessidade da soma da área de vários retângulos</p> </div>

**Fonte: Registros do ambiente virtual**

O E11, em relação à compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo, mencionou “...ao meu entender mostra-nos como calcular a área de uma curva ...” Isso demonstra que houve um equívoco, que foi parecido com a resposta do E20, quanto a compreensão dos



conceitos. Em uma aula seguinte, foram discutidas essas respostas apresentadas pelos estudantes, no intuito de sanar as incompreensões, nessa atividade.

Como foi uma atividade proposta seguindo os encaminhamentos da *sala de aula invertida* (BACICH, TANZI NETO e TREVISAN, 2015), a intenção era que os alunos tivessem autonomia para buscar materiais para ajudar na resolução da tarefa. E a aula propriamente dita seria para sanar as dúvidas e propor novas atividades. Porém, poucos alunos haviam respondido antecipadamente. Então, a solução encontrada pelo docente foi proporcionar um momento em aula para que quem ainda não havia respondido, pudesse entregar a tarefa. Após esse momento, foi dada a continuidade na aula, retomando os conceitos sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.

Na sequência são discutidos, por meio dos apontamentos dos estudantes, quais as considerações quanto a manipulação da atividade 3.

### **5.3.3 Quais as considerações dos estudantes para a terceira atividade?**

A terceira atividade, intitulada ‘Teorema Fundamental do Cálculo’, foi uma proposta de antecipação, seguindo os encaminhamentos da *sala de aula invertida* (BACICH, TANZI NETO e TREVISAN, 2015). Esta tarefa teve uma abordagem diferente, comparando-a com as duas primeiras. O intuito da terceira atividade era contribuir com a autonomia dos estudantes, propondo um conteúdo ainda não abordado em sala, que cada um buscasse por materiais que ajudassem compreender e resolver as atividades.

Para investigar quais as limitações que tiveram, as dúvidas que ficaram a ser sanadas, quais os pontos positivos e negativos, foi proposta a quinta atividade para que os estudantes pudessem fazer apontamentos sobre a tarefa.

A questão proposta aos alunos foi “Quais suas considerações (positivas e/ou negativas) sobre a atividade”.

Alguns comentários deixados pelos estudantes serviram para avaliar a opinião em relação a abordagem da tarefa e como ela contribuiu para a aprendizagem.

Considerando as dificuldades de alguns estudantes, por não disponibilizarem de tempo para responder as atividades, seja por trabalhar em período integral, ou ainda, por limitações de acesso à *internet*, a aula seguinte foi realizada no laboratório de informática, para quem ainda

não tinha enviado a resolução ou quem não havia terminado as questões, tivessem uma nova oportunidade de concluí-la.

Os apontamentos, feitos pelo E8, mencionam que “foi muito boa a realização da atividade, exceto por travar a atividade várias vezes”, foi reafirmado pelo E13 que comentou “não funcionou o gráfico quando era pra entregar a atividade, deu um pouco de trabalho”, e ainda complementa seu comentário que o cálculo feito “não era tão complexo” quanto pensou.

Embora os alunos não tivessem o hábito de realizar tarefas nesse formato, com um encaminhamento diferente das aulas anteriores, o E7 respondeu a tarefa e buscou materiais complementares que auxiliassem na resolução. Porém, não deixou referenciais na postagem, como mostra a Figura 25.

**Figura 25 - Resolução para a tarefa 3 pelo E7**

5) Quais suas considerações (positivas e/ou negativas) sobre a atividade	
<b>A</b> $f_x$	achei a atividade um pouco difícil mas vendo alguns videos me ajudou um pouco na resolução do trabalho, e aos poucos estou entendendo mais o conteúdo.

**Fonte: Registros do ambiente virtual**

Já o E25, mesmo entregando a tarefa antes da aula presencial, relatou que o conteúdo é difícil, que seriam necessárias as próximas aulas para que houvesse outras explicações e ficasse mais fácil de entender. O E3, em seu relato, cita que “achei um pouco confusa a forma de como jogar as funções no GeoGebra, da matéria eu até que estou entendendo bem, porém tenho bastante dificuldade na relação com o programa/aplicativo GeoGebra”. Isso se justifica pela ausência de outras disciplinas proporem atividades num ambiente virtual.

Como já mencionado, essa tarefa foi proposta no ambiente virtual, seguindo os encaminhamentos da *sala de aula invertida*. Porém, alguns estudantes não conseguiram concluir a atividade, por diferentes motivos. Assim, na aula seguinte foi dada a oportunidade para os que ainda não haviam concluído, ou para os que já haviam entregue a resolução pudessem verê-la

e, caso necessário, complementassem-na.

Porém, as máquinas do laboratório não estavam em seu pleno funcionamento, o que acabou causando lentidão para carregar a tarefa e para enviar as respostas. Esse imprevisto ficou evidente no comentário do E22, que está representado na Figura 26.

**Figura 26 - Comentário sobre a tarefa 3 pelo E22**

5) Quais suas considerações (positivas e/ou negativas) sobre a atividade	
$A$ $f_x$	São positivas, porem como as atividades foram feitas no computador da universidade apresentou alguns probleminhas como ficar travando muito.

**Fonte: Registros do ambiente virtual**

Embora esse empecilho tenha dificultado no desenvolvimento da aula, o recurso e as questões podem ter contribuído para a aprendizagem, analisando as conjecturas dos estudantes. O E5 escreveu que “os recursos ajudam bastante a entender o que se busca encontrar ao realizar o cálculo”. Segundo o E18, “acredito que com a introdução dos intervalos a noção de integral ficou mais completa, principalmente para observar o gráfico”.

Para esses estudantes, o gráfico teve significado, visto que os extremos do intervalo de integração permitem uma melhor visualização da região de interesse em determinar a integral. Para o E15, por exemplo, o recurso foi “legal, de fácil manuseio”. Quanto às questões propostas, para o E21, “a atividade está com intenções mais claras”.

Com as análises das três tarefas, apresentamos, no capítulo seguinte, algumas considerações e a continuidade da pesquisa.

## **6. PERCEPÇÕES DO PESQUISADOR E DOS ALUNOS QUANTO À ABORDAGEM HÍBRIDA NO ESTUDO DE INTEGRAIS**

Nesta seção são apresentadas algumas percepções do pesquisador em relação à pesquisa, descrevendo sobre a vivência com a tecnologia e a familiarização com a implementação do Ensino Híbrido. Como as primeiras experiências do pesquisador com a implementação da tecnologia em suas aulas ocorreram durante o mestrado, mas antes de se iniciar a coleta de dados, estas representaram oportunidades de aprendizagem e influenciaram no delineamento da pesquisa. Assim, dada a importância dessas primeiras experiências, elas são consideradas nas reflexões que seguem.

Ainda nesse capítulo, será comentado como foram as primeiras aulas nas duas turmas que participaram da pesquisa, uma primeira percepção dos alunos, sendo essa análise feita por meio de um questionário, aplicado inicialmente. A partir da análise do questionário, destacamos como foram pensados os encaminhamentos das aulas até a coleta de dados. Além disso, será feita a descrição sobre a elaboração e aplicação das tarefas que compõem o Produto Educacional.

Por fim, são elencadas algumas impressões após concluir a pesquisa, destacando como o uso da tecnologia permitiu explorar tópicos do estudo de integrais e as contribuições que os comentários e resoluções dos estudantes, por meio das tarefas aplicadas, desencadearam novas tarefas. Tais tarefas foram replanejadas, seja aprimorando o recurso da tarefa inicial, seja reutilizando um mesmo recurso do GeoGebra.

Nesse capítulo, na seção 6.2, é também mencionada a percepção dos alunos, por meio da análise do conteúdo de uma entrevista semiestruturada, sobre o desenvolvimento da pesquisa. Na oportunidade, os alunos entrevistados comentaram acerca de como foram conduzidas as aulas sobre integrais, a vivência quanto a implementação da tecnologia em sala de aula, e como o uso da tecnologia influenciou na sua aprendizagem.

### **6.1. Percepções do pesquisador**

Como foi mencionado na introdução, uma primeira vivência do pesquisador com esse tipo de tecnologia ocorrera em uma turma de Cálculo Diferencial e Integral I, com 37 alunos,

com a qual o pesquisador implementou tarefas. Ainda que tenha sido algo pouco complexo, isto permitiu uma visão inicial de como poderia ser pensado o ensino de Cálculo, promovendo a implementação da tecnologia nas aulas, na perspectiva do Ensino Híbrido.

Essa primeira implementação da tecnologia se deu após uma revisão bibliográfica inicial do pesquisador em relação ao Ensino Híbrido (BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015; HORN, STAKER, 2015) enquanto cursava a disciplina ‘Recursos Educacionais e Objetos de Aprendizagem para o Ensino e Aprendizagem de Matemática’ no Mestrado. Essa leitura inicial sobre o Ensino Híbrido o motivou nas primeiras experiências com o uso da tecnologia para ensino, as quais foram desenvolvidas no sentido proposto por Moran (2015), que sugere um caminho para o professor que deseja inserir o Ensino Híbrido em sua prática docente, propondo alterações progressivas.

Como se tratava de um curso de Ciência da Computação, viu-se a oportunidade de experimentar o uso da tecnologia com esses alunos. Para isso, foi organizado um ambiente virtual, no Google Drive em uma pasta que foi compartilhada com os alunos. Nessa pasta, estavam anexadas apostilas e livros da disciplina na versão eletrônica (em PDF), com o intuito de facilitar no estudo da disciplina, caso tivessem dúvidas, e, ao mesmo tempo, permitir o seu acesso a qualquer momento, fora da aula. A mesma pasta compartilhada foi também utilizada pelos alunos para enviarem algumas tarefas proposta em aula e desenvolvidas no *software* GeoGebra como, por exemplo, determinação de uma função, o domínio, imagem e as assíntotas da função; representação gráfica, verificando as raízes, pontos de máximos e mínimo; e o cálculo da área de uma folha de árvore, sendo nesse caso determinado a área entre curvas a partir da representação gráfica da folha.

Em uma turma do segundo ano, do curso Técnico em Informática, em nível médio, assim como na turma de Cálculo I, foi organizada uma pasta compartilhada com a turma no Google Drive para que, semanalmente, os alunos enviassem as tarefas. Elas eram postadas a partir de imagens digitalizadas das resoluções. As tarefas eram propostas de acordo com o conteúdo das aulas, como forma de incentivo aos alunos para que continuassem estudando fora da sala de aula.

A experiência nessas duas turmas proporcionou ao pesquisador uma primeira avaliação quanto a condução e implementação do ensino mediado pela tecnologia. As tarefas e os materiais da disciplina eram inseridos no Google Drive, mas os recados e informações eram disponibilizados apenas via e-mail. Embora esse ambiente virtual permitisse que os alunos tivessem acesso as tarefas postadas pelos colegas, não permitia interação professor/aluno e aluno/aluno.

O Google Drive foi o primeiro ambiente virtual utilizado pelo pesquisador, que o conheceu e o utilizou no mestrado. Dada a pertinência do ambiente virtual, viu a oportunidade de experimentar com seus alunos a experiência de disponibilizar arquivos, assim como, propor e receber tarefas. Em suma, o ambiente contribuiu para uma primeira experiência do pesquisador, entretanto, as limitações não atendiam os objetivos que se pretendia para a coleta de dados.

Embora, como indicam Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015), um ambiente virtual de aprendizagem seja uma ferramenta que oferece meios para a organização de materiais ou tarefas que possam apoiar o processo de ensino e aprendizagem, eles são caracterizados por ser um espaço que permite a construção coletiva do conhecimento e o desenvolvimento da aprendizagem.

Como a intenção era continuar com a implementação da tecnologia no processo de ensino e aprendizagem e, levando em conta que o vínculo profissional do pesquisador com a universidade já mencionada se encerrou, a pesquisa foi direcionada a tópicos do estudo de integrais, na disciplina de Matemática Aplicada II, para o curso de Economia, na universidade estadual onde o pesquisador iniciou novo vínculo profissional como professor contratado. Os alunos da disciplina participaram da pesquisa, sendo que, inicialmente, foi aplicado um questionário, mencionado no capítulo 2, que permitiu obter algumas informações iniciais, como, por exemplo, o uso, a familiaridade e o acesso da *internet* pelos alunos.

O ambiente virtual de aprendizagem utilizado na pesquisa foi a plataforma *on-line* do GeoGebra. O contato com essa plataforma se deu por meio da dissertação de Lemke (2017). No intuito de explorar o ambiente virtual e conhecer suas potencialidades em relação ao Ensino Híbrido, o pesquisador elaborou e propôs algumas tarefas, para que tanto ele quanto os estudantes, tivessem um primeiro contato e conhecessem as opções oferecidas. Entre as opções, a Folha de Trabalho foi a mais explorada, pois a plataforma *on-line* permite organizar grupos, propor tarefas e armazenar arquivos, bem como as resoluções das tarefas postadas pelos estudantes. Ainda, é possível interagir com os alunos, a qualquer momento.

Levando em conta as condições reais de ensino, no que se refere a infraestrutura, a plataforma do GeoGebra foi escolhida pelo fato de que, na instituição de ensino, só era possível ter acesso à *internet* em um laboratório, o qual é destinado ao uso de todos os cursos da instituição. Devido a isto, foi necessário reservá-lo com antecedência. É preciso salientar que algumas máquinas desse laboratório não estavam em funcionamento. Por esses motivos, foi importante que as tarefas fossem propostas em uma plataforma que poderia ser acessada pelos participantes em qualquer lugar, e em qualquer momento. Ao passo que os alunos

desenvolvessem as tarefas, seria possível ao pesquisador dar *feedbacks*, no intuito de acompanhar o desenvolvimento de cada estudante. O acesso ao ambiente virtual de aprendizagem, a qualquer momento, dentro das possibilidades da instituição e que atenda aos alunos são características do Ensino Híbrido (HORN e STAKER, 2015).

Nesse sentido, a implementação da plataforma *on-line* do GeoGebra com os estudantes da disciplina de Matemática Aplicada II, ocorreu no estudo de derivadas. Ou seja, antes do início da coleta de dados propriamente dita, para que eles pudessem já ter conhecimento e familiaridade com a plataforma. Por *e-mail*, foram encaminhados os convites e o código para participar do grupo “Matemática Aplicada”. Alguns estudantes relataram não ter recebido o convite; como solução, foi encaminhado novamente um novo convite, solicitando outra conta de *e-mail*. Outros alunos relataram ter dificuldades de acesso, por não terem familiaridade com a plataforma.

As primeiras tarefas propostas para familiarização com a plataforma foram sobre derivadas. Nessas primeiras aulas, alguns estudantes ainda não estavam com acesso ao grupo. Então, solicitaram que a entrega com as resoluções fossem em papel. Diante de tal situação, aceitá-las desta maneira foi a solução que o pesquisador encontrou para o momento.

Esse primeiro momento, conforme foram sendo resolvidas as tarefas, as dúvidas foram encaminhadas pelos estudantes por *e-mail*, ou então, eram feitas em aula.

Algumas inquietações surgiram nesse primeiro momento, pois alguns alunos não estavam com acesso à plataforma, e, por esta razão, estavam entregando em papel as resoluções das tarefas: será que esses alunos seriam inseridos na plataforma até a coleta da pesquisa?

O que pode ter contribuído para mobilizar os alunos a vencer os desafios com a tecnologia foi o caráter inovador da proposta. Por exemplo, alguns requeriam manipular um *applet*; alguns, atividades para assinalar a opção correta; outros traziam vídeos como sugestão de apoio. Esses diversos formatos de Folha de Trabalho podem ter motivado os alunos a acessarem ao grupo virtual e, aos poucos, passaram a desenvolver as tarefas propostas. Mesmo que alguns ainda tivessem com dúvidas, foram manipulando e experimentando o ambiente virtual em cada atividade, conhecendo essa nova ferramenta de estudo, buscando sanar suas dúvidas com pesquisador.

De fato, como colocam Borssoi e Silva (2017), o êxito em uma proposta híbrida está muito associada ao aceite dos alunos ao convite a interagir também no ambiente virtual. Só assim, esse espaço pode configurar-se com potencial para promover a facilitação da aprendizagem e proporcionar oportunidade de aproximação do professor com cada aluno, e dos alunos entre si.

Em relação as tarefas que iriam compor a coleta de dados, elas foram propostas com um prazo para entrega, que é possível ser configurado na plataforma do GeoGebra, com o intuito de que os alunos se programassem, que é uma das características do Ensino Híbrido. Em algumas tarefas foi necessário que o prazo fosse prorrogado, por compromissos pessoais dos estudantes ou por terem atividades de outras disciplinas para realizar, no mesmo período.

A primeira tarefa proposta foi sobre a função densidade da distribuição Normal Z. Inicialmente, foi explorado em sala de aula como manipular o *applet*. Isso foi positivo para que os alunos já tivessem conhecimento de como seria a tarefa após a aula. Na Tarefa 1, as dúvidas foram em relação a interpretação da Atividade 2 (ver seção 4.1): os alunos não demonstraram dificuldades na manipulação ou sobre o *applet*, porém, para alguns, não ficou claro o objetivo da questão da Folha de Trabalho. Essa primeira tarefa ajudou a refletir quanto aos enunciados das questões para as próximas tarefas, de modo a facilitar a interpretação do que era para ser feito.

Já a tarefa 2, sobre integral por substituição  $u$  e  $du$ , foi realizada durante a aula. Para isso, foi preciso fazer a reserva, com antecedência, do laboratório de informática, com uma abordagem de *laboratório rotacional* (BACICH, TANZI NETO e TREVISANI, 2015). A intenção era ter um contato mais próximo com os alunos para atender e sanar as dúvidas, e ainda, ajudar com o uso das ferramentas da plataforma. Esse momento foi importante para que os alunos pudessem interagir entre eles ou com o professor, no momento que as dúvidas aparecessem (PORVIR, 2013).

Durante a resolução da Tarefa 2, os alunos perceberam que a solução obtida no *applet* era diferente do que foi feito nas questões do caderno. Isso se deve ao fato de que, no GeoGebra, aparecia a solução com polinômios estendidos, o que não permitia perceber se as soluções eram equivalentes. Analisando as respostas enviadas, houve a necessidade de discutir em aula sobre a importância de inserir corretamente as funções no *applet*, destacando que equívocos cometidos na estrutura do *applet* acarretaram respostas incoerentes para as questões. Esse momento que o professor faz uso da aula para discutir sobre dúvidas e/ou incoerências é uma característica do Ensino Híbrido. Tal procedimento é, também, uma forma de *feedback*, proporcionando a interação entre professor, aluno e tecnologia (COLL, MAURI e ONRUBIA, 2012).

Já a Tarefa 3 foi uma proposta diferente das outras. Como já havia familiaridade dos alunos com a plataforma e um conhecimento considerável de integrais, os conceitos iniciais do Teorema Fundamental do Cálculo foram propostos em uma abordagem de *sala de aula invertida* (BACICH, TANZI NETO e TREVISANI, 2015), no intuito de verificar a autonomia



dos alunos em estudar um conceito antes que fosse explorado em sala de aula. Na aula, seriam discutidas as dúvidas e realizadas outras atividades, porém poucos alunos responderam a tarefa, que correspondia ao momento não presencial, o que foi percebido pelas poucas tarefas enviadas. Para contornar a situação, a aula foi realizada no laboratório de informática. Os alunos que não responderam com antecedência a Tarefa 3, justificaram que não tiveram tempo, ou que não compreenderam a tarefa, porque ainda não tinham estudado tal conteúdo. Mas, na aula, foi possível sanar as dúvidas e explorar outras atividades no caderno, mas utilizando o *applet*.

Dificuldades em implementar a *sala de aula invertida*, como, por exemplo, a falta de autonomia dos alunos e não realização das tarefas propostas para o momento não presencial, foram relatados, inclusive, no trabalho de Souza e Andrade (2016), e que indicaram a necessidade de reorganizar a aula.

Das tarefas que foram propostas com encaminhamentos diferentes, foi possível perceber que alguns fatores não contribuíram durante o desenvolvimento, como, por exemplo, a falta de tempo dos alunos para dedicar-se aos estudos, seja pelas atividades de outras disciplinas e/ou pelo fato de trabalhar em paralelo com o curso; a dificuldade em ter acesso a *internet*; ou mesmo, não ter familiaridade com tarefas propostas em um ambiente virtual, que requer autonomia e dedicação do aluno. Essas dificuldades costumam aparecer na implementação do Ensino Híbrido, por isso, é necessário pensar em alternativas para sanar esses obstáculos.

Durante o desenvolvimento da pesquisa, as estratégias iam sendo revistas e repensadas a todo momento. Pensar qual seria a melhor maneira de propor as tarefas, optando, por exemplo, por menor quantidade de exercícios, ou que elas ficassem disponíveis em um prazo maior para entrega. Ou ainda, que fossem realizadas durante a aula, em um formato de *laboratório rotacional*. Essas foram algumas soluções encontradas para resolver as dificuldades enfrentadas com essa turma.

Na seção a seguir, assim como a visão do pesquisador foi apresentada em relação as aulas, quanto a implementação da tecnologia por meio de tarefas propostas em um ambiente virtual de aprendizagem, são elencadas algumas conjecturas dos alunos, que foram coletadas por meio uma entrevista semiestruturada.

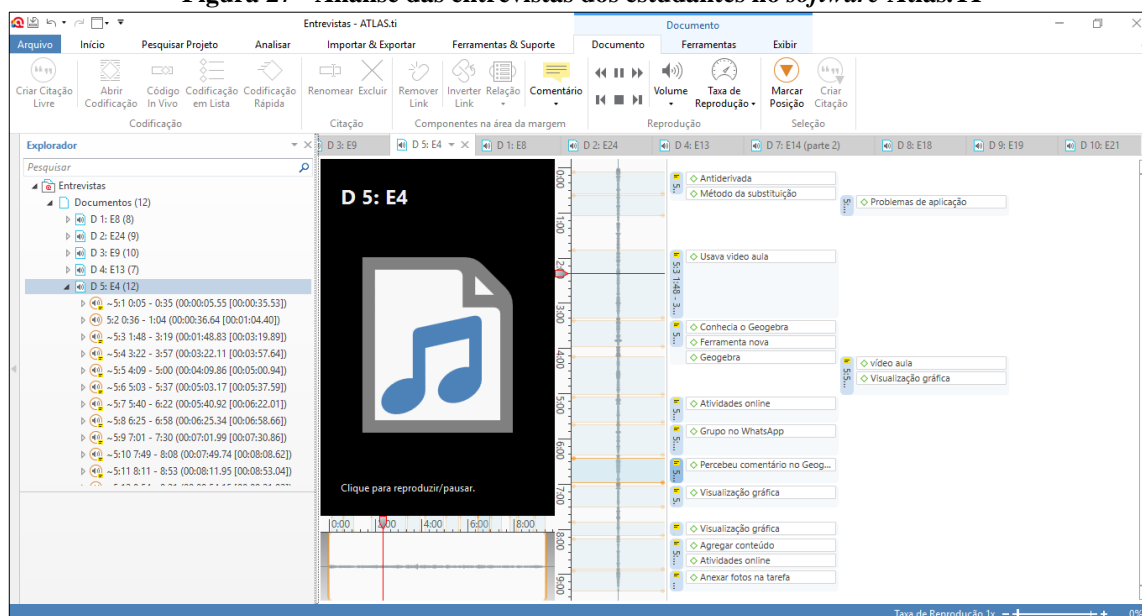
## 6.2. Percepções dos alunos

Para avaliar como foi a experiência dos acadêmicos com a implementação das tarefas no modelo do Ensino Híbrido e, por consequência, da tecnologia nas aulas foi realizada uma entrevista com 11 alunos, participantes da pesquisa (E4, E7, E8, E9, E13, E14, E18, E19, E21, E24, E25). Tais estudantes assinaram o termo de livre consentimento para uso de gravação de áudio, preservando suas identidades. Não foi possível entrevistar um número maior de participantes, pois a conversa foi realizada em momentos em que não teria aula de Matemática Aplicada e conforme disponibilidade dos acadêmicos.

A conversa seguiu os encaminhamentos de uma entrevista semiestruturada (discutida na seção 2.6.1.), em que as questões vão sendo feitas a partir da fala do entrevistado. As questões que direcionaram a entrevista constam no Apêndice 3. Para interpretar e analisar as entrevistas foi utilizado o *software* Atlas.TI, seguindo os encaminhamentos de Charmaz (2009) para codificação dos dados e elaboração de memorandos para auxiliar a análise.

Com o auxílio do referido *software*, como mostra a Figura 27, todas 11 entrevistas foram anexadas e nomeadas com o código do respectivo estudante.

**Figura 27 - Análise das entrevistas dos estudantes no *software* Atlas.TI**



Fonte: Registros do *software*

O *software* Atlas.TI permitiu identificar que nas entrevistas foram feitas 37 citações quanto ao uso do ambiente virtual, mencionando sobre as primeiras limitações e as

contribuições para aprendizagem; foram mencionadas 64 vezes o uso do GeoGebra, tanto em relação ao *software*, que alguns comentaram já ter conhecido, ou ainda, quanto ao ambiente virtual, que foi uma novidade, comentada na entrevista 11 vezes pelo fato dos estudantes não terem utilizado algo semelhante.

Entre os códigos fornecidos pelo Atlas TI, os estudantes mencionaram 19 vezes sobre a visualização gráfica, que é fornecida no GeoGebra. Citaram também, 11 vezes, sobre a possibilidade de agregar conteúdo por meio de tarefas *on-line*.

Os códigos foram percebidos por meio do quadro que foi exportado do *software* (Quadro 27), no qual é possível perceber como foram mencionados cada um dos códigos pelos estudantes.

**Quadro 27 - Códigos obtidos pela análise das entrevistas por meio do *software* Atlas.TI**

	D1: E8	D2: E24	D3: E9	D4: E13	D5: E4	D6: E14	D7: E14	D8: E18	D9: E19	D10: E21	D11: E7	D12: E25	Totais
<b>Agregar conteúdo</b>	1	0	1	1	1	0	2	2	2	1	0	0	11
<b>Anexar fotos na tarefa</b>	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	3	1	6
<b>Antiderivada</b>	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
<b>Aprende anotando</b>	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	3
<b>Aprende visualmente</b>	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2
<b>Área abaixo da curva</b>	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2
<b>Atividades <i>on-line</i></b>	1	1	0	0	2	0	1	3	0	2	1	0	11
<b>Compreendeu integral</b>	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2
<b>Convívio em sala</b>	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<b>Dedicação do professor</b>	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	4
<b>E-book</b>	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<b>Estuda o conteúdo da aula</b>	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	3
<b>Estudo colaborativo, com os colegas</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
<b>Falta de tempo para as atividades</b>	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	5
<b>Ferramenta nova</b>	1	0	0	0	1	0	1	2	0	2	2	2	11
<b>Geogebra</b>	2	4	0	4	2	3	1	4	3	1	0	0	24
<b>Grupo no WhatsApp</b>	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	3

<b>Lembrete por comentário</b>	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
<b>Lista de exercícios</b>	0	0	1	1	0	0	2	2	1	1	2	3	13
<b>Drive</b>	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
<b>Método da Exaustão</b>	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2
<b>Método da substituição</b>	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
<b>Não substitui a sala de aula</b>	0	0	2	0	0	0	0	1	0	1	1	0	5
<b>Comentário no Geogebra</b>	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	2	2	13
<b>Photo Match</b>	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
<b>Primeiro contato difícil</b>	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2
<b>Problemas de aplicação</b>	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
<b>Resolução de exercícios</b>	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	4
<b>Symbolab</b>	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2
<b>Tarefa 1 - Função densidade da distribuição Normal</b>	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	4
<b>E-book</b>	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2
<b>Vídeo aula</b>	0	0	2	1	2	0	0	1	2	3	2	1	14
<b>Visualização gráfica</b>	0	4	0	1	3	1	1	4	2	2	0	1	19
<b>Ambiente virtual</b>	2	5	4	2	5	1	2	5	4	2	2	3	37
<b>Conceitos da Integral</b>	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	3
<b>Geogebra</b>	7	7	3	4	7	2	5	9	5	5	5	5	64
<b>Pontos importantes para aprendizagem</b>	1	4	6	3	5	1	2	5	5	5	3	3	43
<b>Totais</b>	20	28	30	27	35	11	20	42	31	31	26	25	326

Fonte: Registro exportado do *software* Atlas.TI

A questão inicial era para que comentassem qual a percepção a respeito de como foram conduzidas as aulas sobre ensino de integrais.

Os comentários seguiram maneiras diferentes de mencionar sobre o estudo da integral. Por exemplo, para o aluno E24 “a ... eu gostei, integral achei melhor que derivada para fazer. Não sei é porque eu já tinha uma base da derivada, e suei muito para fazer ... aí na integral já achei que ficou uma pouco mais fácil”. Ele justificou que ficou fácil aprender por ser melhor visualizar o resultado do que determiná-lo, pois é um número para encontrar; o mesmo ocorreu na exploração do Método da Exaustão que a “função quadrática ou que nem foi na distribuição

Normal”. Ele ainda comentou que o uso do GeoGebra ajudou, pois é “mais fácil olhar no gráfico do que fazer os cálculos”. O estudante comentou que tinha o *software* GeoGebra instalado, e já “tinha feito uso ano passado ... não em aula, nós usávamos para ver os gráficos da função”. Em relação ao uso de listas de exercícios para entregar e a plataforma, mencionou “a lista também é importante, é trabalhosa, mas ajuda no cálculo ali puro, mas para entendimento é bem melhor o GeoGebra”.

O E7, por exemplo, comentou que achou a metodologia mais fácil, comparando com a de outro professor que ministrou a disciplina. Destacou que no início “apanhou” para usar o GeoGebra, porque nunca o tinha usado antes e era, portanto, uma ferramenta nova. Quando questionado sobre as dúvidas iniciais, segundo ele “o mais difícil no começo foi responder, não sabia como fazia com as dicas do professor falando que poderia tirar até foto e enviar, que acabou ajudando e nas últimas tarefas foi até mais rápido”. Ao ser questionado se havia percebido que tinha a opção de enviar comentários, até mesmo para sanar as dúvidas, E7 respondeu que havia percebido que tinha espaço para comentário, porém não sabia se era ali que enviaria as respostas, que em uma tarefa enviou nos dois campos (para resposta e para comentário) por garantia. Quanto à experiência com a plataforma, disse que “vai acostumando, mexendo um pouco mais, esses últimos agora estava entendendo um pouco melhor”. Embora tenha comentado que aprendeu a fazer uso do grupo, disse que ainda prefere “dentro da sala de aula, que nem os últimos agora que começamos em sala e terminamos até na aula”. Falou também sobre a preferência pela lista de exercícios, porque o GeoGebra tem que estar conectado para resolver, o que dificulta, pelo trabalho que tem, onde não é possível ter acesso a *internet*.

O aluno E19 comentou sobre o uso do GeoGebra durante as aulas e a visualização gráfica no início do conteúdo, que permitiu compreender o cálculo da área da região abaixo da curva, limitada pelo eixo  $x$  no intervalo dado: “eu acredito que o GeoGebra veio a calhar, pois, nos finais de semana, era uma aula extra, e nas possíveis dúvidas poderia já enviar ao professor. Mesmo o laboratório da faculdade, sendo um tanto obsoleto, pode contribuir na resolução das tarefas”. Cita ainda que quando apareciam as dúvidas “às vezes, se reunia com os colegas nos finais de semana para um ajudar o outro. Quando não era possível essa ajuda dos colegas, usava o ‘Me Salva’<sup>10</sup> para estudar”. Destacou que já tinha o hábito de utilizar vídeos e outros materiais para estudar, pois “essa prática de estudos já havia sido dita por uma professora, que mencionou

---

<sup>10</sup> Plataforma de ensino *on-line* com conteúdo para o Ensino Médio, Superior e cursos preparatórios para o ENEM e Vestibulares.

Disponível em: <https://www.mesalva.com/>

que os alunos, às vezes, precisam ‘andar com as próprias pernas’”. Considera pertinente o uso de postar as tarefas, pois não corre riscos de perder trabalho, que tudo fica armazenado e que a tecnologia deva ser ainda mais praticada, pois tudo que souber de tecnologia é importante, pois será cobrado no mercado de trabalho.

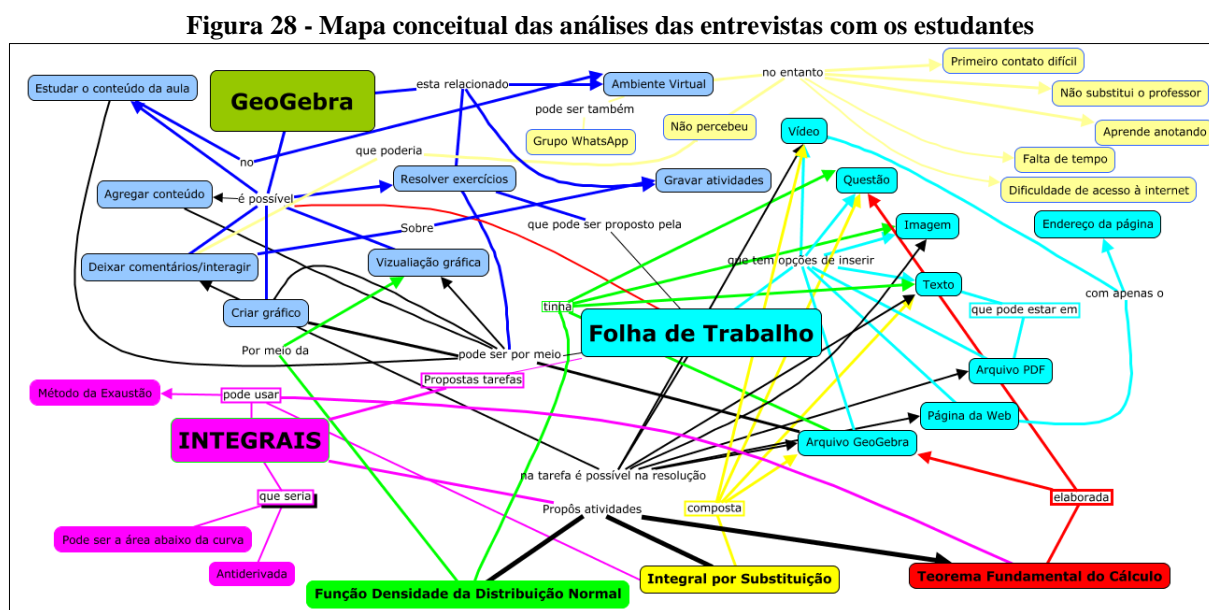
O E18 mencionou que “já tinha aprendido a fundamentação da derivada, a integral não ficou difícil”. Ainda complementou que “na integral, o importante foi o gráfico, que não ficou apenas no cálculo”. Em relação ao *software* GeoGebra, já havia utilizado como sugestão de uma professora, que mostrou que poderia ser útil nos exercícios. Ainda, notou que poderia usar o *applet* não apenas para a disciplina, que “em nossa área, é preciso usar muito gráfico na Economia, você precisa do gráfico para saber o que está acontecendo, como, por exemplo, em Macroeconomia. Só que o foco nela é ver no gráfico o que está acontecendo, até mesmo para analisar um projeto na área”. Quando questionado se houve dúvidas, comentou que fez vários exercícios para conseguir aprender, até mesmo exercícios de aplicação na Economia. O uso do GeoGebra, segundo tal estudante, vem a complementar, pois “primeiro deve vir exercícios e depois o GeoGebra”. “As tarefas propostas tinham um prazo legal para cumprir, quando tinha dúvidas perguntava para os colegas, ou ainda, para o professor”. A consulta com os colegas acontecia por meio de um grupo no *WhatsApp*, com apenas 6 integrantes, que compartilhavam dúvidas e soluções das tarefas e das listas propostas em sala. Além disso, já tinha o hábito de procurar vídeo aulas e outros materiais para estudar.

Na visão do E25, “foi bom professor, mas no GeoGebra foi muito difícil para mim ... porque foi muito complicado de mexer, primeiro que tinha função densidade, foi o mais difícil para mim, porque não entendia os valores, eram muito parecidos e não sabia se estava certo”. E complementou “mas as listas foi bem legal, porque foi muito parecido com a prova”, ao ser questionado o motivo da preferência pela lista, falou que “eu achei complicado, pra entender, nunca tinha ouvido falar do GeoGebra ... fui pedindo ajuda para os colegas, vendo alguma coisa na *internet*, procurando algo parecido para ajudar”. Justificou, ainda, que comparando a plataforma do GeoGebra com as listas, disse que foi “bom a plataforma ... foi bom, mas prefiro as listas ... as listas vai escrevendo mais, e grava mais na cabeça”. Apesar da sugestão do recurso de enviar foto da resolução na tarefa na plataforma - que chegou a realizar em algumas das tarefas -, ainda prefere a lista de exercícios para entregar, porque está mais acostumado.

Pelas considerações mencionadas, o difícil acesso à *internet* para responder às tarefas e/ou ainda não ter familiaridade com o uso de ambientes virtuais de aprendizagem podem ter contribuído para não optar em deixar de entregar a lista de exercícios em papel.

Os alunos que têm hábito de ver vídeo aulas, procuram materiais na *internet* ou que já conheciam o GeoGebra sentiram menor dificuldade nas tarefas, e perceberam que houve contribuições para a aprendizagem.

A Figura 28 traz um mapa conceitual que busca sintetizar os elementos apresentados nas análises sobre as percepções dos alunos a partir das entrevistas.



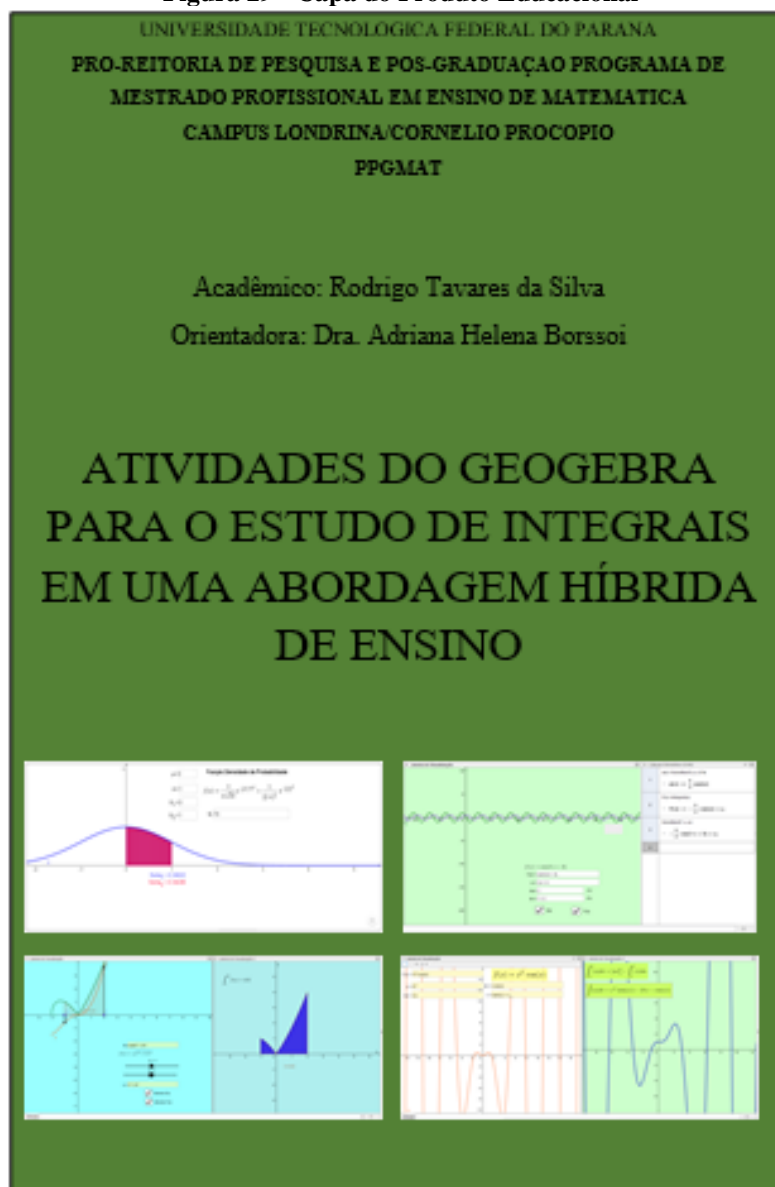
Fonte: os autores

Essa experiência de implementar a tecnologia em uma proposta híbrida foi importante para o pesquisador, pois antes de ingressar no mestrado, havia a preocupação de iniciar mudanças na metodologia de ensino. Porém, não tinha conhecimento de como fazer o uso correto da tecnologia, ou seja, de como abordar, em quais momentos e como faria isso em suas aulas. Conhecendo o Ensino Híbrido, viu que essas inquietações poderiam ser resolvidas, se fossem seguidos os encaminhamentos híbridos como metodologia de ensino. Com essa vivência, por meio da pesquisa, o pesquisador pretende dar continuidade no uso dos ambientes virtuais de aprendizagem, pois existem inúmeras possibilidades para ser bem exploradas nos processos de ensino e de aprendizagem.

### 6.3. Produto Educacional a partir das reflexões com o desenvolvimento da pesquisa

Considerando os apontamentos e reflexões quanto à aplicação das Tarefas na seção 6.1, foram pensadas e elaboradas novas tarefas para integrar um ambiente híbrido. Estas tarefas compõem o Produto Educacional: Folhas de Trabalho no GeoGebra em uma Abordagem Híbrida para o Ensino de Integrais, cuja capa é ilustrada na Figura 29.

**Figura 29 - Capa do Produto Educacional**



Fonte: o autor



O Produto Educacional está organizado em quatro capítulos, os quais serão apresentados, brevemente, a seguir:

No primeiro capítulo, intitulado “Apresentação” é feita uma breve explanação para que o professor que queira conhecer o material possa compreender como foram pensadas e elaboradas as Tarefas, além de situá-lo quanto a questões de pesquisa à qual está vinculado o Produto Educacional.

No segundo capítulo, nomeado “Ensino Híbrido” são apresentados os apontamentos teóricos sobre o Ensino Híbrido, que contribuirão para as Tarefas.

O terceiro capítulo, “A Organização de um Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem”, contempla a apresentação de como foi a organização do ambiente virtual de ensino e aprendizagem, na qual descrevemos sobre a plataforma do GeoGebra, mostrando como criar grupo, adicionar membros e como utilizar a Folha de Trabalho para propor tarefas.

E o quarto capítulo, intitulado “Tarefas sobre tópicos de integrais para compor uma proposta híbrida de ensino”, dedica-se em apresentar as tarefas referentes a tópicos de integrais para compor uma proposta híbrida de ensino que, além das três primeiras Tarefas que foram apresentadas no capítulo quatro da dissertação, contempla as reflexões a partir das discussões apresentadas no capítulo cinco da dissertação.

Na seção a seguir são apresentadas as considerações da pesquisa, comentando como a implementação da tecnologia, em um ambiente híbrido, pode contribuir para o Ensino de Matemática.

## CONSIDERAÇÕES DA PESQUISA

O estudo do Cálculo configura-se como uma das disciplinas essenciais para os cursos nas áreas de exatas e engenharias, visto que os conceitos que são elencados na disciplina promovem o desenvolvimento do estudante em relação à aprendizagem dos seus conteúdos, que servirão para outras disciplinas do curso. Porém, a mesma disciplina que é tão essencial e promovida logo nos primeiros períodos dos cursos de graduação, tem sido responsável por índices preocupantes quanto ao desempenho, evasão e reprovação dos alunos.

Tão preocupantes esses dados que têm sido estudados, no âmbito da Educação Matemática, alternativas para sanar a defasagem e amenizar esses resultados. Entre as alternativas, consideramos investigar o uso de tecnologias, aliando seu uso e implementação em sala de aula.

Nosso interesse enquanto pesquisador, como mencionado no início do texto, com a experiência como aluno e enquanto professor, desencadeou a busca por materiais e pesquisas realizadas no banco de dissertações e teses da Capes, quanto a implementação da tecnologia no âmbito da Educação Matemática. A preocupação era proporcionar o uso da tecnologia para complementar as aulas, que pudesse mostrar novas possibilidades para o processo de ensino e aprendizagem.

Por isso, decidimos investigar como questão de pesquisa, *como o uso da tecnologia pode contribuir para o estudo da integral de funções de uma variável real, a partir de tarefas propostas em uma perspectiva de Ensino Híbrido?*

O ambiente virtual proposto foi de acesso gratuito - a plataforma do GeoGebra -, de modo que permitisse aos alunos ter o acesso às Tarefas solicitadas a qualquer momento e local. Além disso, permitiu que tivessem autonomia para organizar uma rotina de estudos, sem a necessidade do professor estar fisicamente ao seu lado, mas que pudessem consultá-lo quando necessário, por meio de comentários no próprio ambiente virtual de aprendizagem.

Inicialmente, foram necessários alguns ajustes quanto aos prazos determinados para cada tarefa, pois foi levado em consideração a disponibilidade de tempo para manipular e responder às tarefas, e mesmo o acesso à *internet*, que se tornou um obstáculo para alguns.

O contato imediato com os estudantes assim que publicavam as respostas, já permitia planejar quais seriam os próximos encaminhamentos a serem realizados para as próximas aulas, e como seriam as demais tarefas propostas no ambiente virtual. Além disto, permitia ao docente

visualizar o que poderia ser ajustado para uma próxima versão da tarefa, ou mesmo, o que não ficou claro na atividade solicitada.

Uma abordagem híbrida que apresentou resultados positivos dos estudantes foi conduzir as tarefas por meio do *laboratório rotacional*, pois permitiu que os conceitos discutidos em aula fossem verificados por uma tarefa proposta. E também pelos resultados imediatos da Folha de Trabalho, já que era dado um *feedback* na aula, discutindo conceitos e sanando as dúvidas.

Tal encaminhamento foi significativo para rendimento dos exercícios, feitos em sala, e ainda oportunizou aos estudantes responderem a tarefa na aula, pois alguns deles não tinham acesso com frequência a *internet*, ou em virtude de seus empregos exigirem longos períodos de expediente.

Por isso, o Produto Educacional, além de apresentar as três tarefas aplicadas, foi também estruturado com sugestões de novas tarefas, as quais foram planejadas e elaboradas a partir de um mesmo *applet*. O intuito é mostrar que um mesmo recurso pode desencadear diferentes tarefas. Dessa forma, o professor tem a liberdade em utilizar e reutilizar das Folhas de Trabalho de acordo com a sua realidade. A Folha de Trabalho, inserida na plataforma do GeoGebra, permite que as tarefas possam ser acessadas, compartilhadas e utilizadas por outros educadores.

Implementar as tarefas em um ambiente híbrido permitiu aproximar os alunos da vivência com a tecnologia, pois, como relataram na entrevista, não tinham feito nenhuma abordagem semelhante ao que foi realizado. Apesar disto, houve contratempos, como a dificuldade de acesso a *internet* na instituição de ensino, o laboratório não tinha uma estrutura suficiente para receber um número considerável de alunos, ou ainda, a falta de tempo pelo compromisso dos alunos que trabalhavam em paralelo com o curso. Por isso, promover diferentes abordagens nas tarefas ajudou a aproximar os alunos que tinham dificuldades com a plataforma a terem uma nova experiência, e sanar suas dúvidas. Desta maneira, o *laboratório rotacional*, na medida do possível, foi proporcionado. Esses momentos também contribuíram para coletar dados para a pesquisa e até mesmo avaliar o que precisaria ser alterado e melhorado para as próximas aulas e tarefas.

O objetivo da pesquisa - investigar as possíveis contribuições de tarefas envolvendo conceitos de integral, mais especificamente, referente à funções de uma variável real, mediadas pelo uso da tecnologia para o Ensino Superior -, foi atingido, levando em conta a percepção dos alunos, expressa por meio da entrevista. Na ocasião, os alunos puderam descrever os pontos mais pertinentes das aulas. Mencionaram a importância da visualização gráfica, não apenas para a disciplina de Matemática Aplicada, mas comentaram ser válido para o curso como um todo, pois, em outros momentos seria necessário o uso de gráficos. Além disso, reconheceram a

relevância dos recursos tecnológicos usados nas aulas e como estes se aplicariam ao mercado de trabalho, no exercício da profissão.

Alguns dos impactos mencionados durante as entrevistas foram: o uso de vídeo aulas, de *softwares* para auxiliar na aprendizagem, ou quando usaram a tecnologia, por meio do grupo do *WhatsApp*, para solicitar auxílio em suas dúvidas ou compartilhar materiais de apoio.

Embora durante a disciplina não tenha sido possível propor outras tarefas, devido a disciplina ser oferecida semanalmente, com apenas 2 horas-aula, foi possível desenvolver um trabalho exitoso. Nesse sentido, Borssoi, Silva e Ferruzzi (2016) destacam a importância de se conhecer características do contexto educacional e as condições reais de ensino, o que compreendem “aspectos estruturais (estrutura da instituição de ensino, a natureza dos cursos de graduação oferecidos por ela, o perfil do egresso que se almeja e o perfil dos alunos matriculados na disciplina de Cálculo, entre outros) e aspectos pedagógicos e procedimentais” (BORSSOI; SILVA; FERRUZZI, 2016, p. 4).

Podemos mencionar que a pesquisa, para o âmbito da Educação Matemática, mostrou que o ensino de Cálculo ainda carece de mais estudos que abordem o uso da tecnologia. No entanto, o uso da plataforma do GeoGebra como um ambiente virtual de aprendizagem permitiu explorar o estudo de tópicos de integral, por meio de Folhas de Trabalho, contribuindo como uma alternativa que mesclou o modelo de aula expositiva com a implementação de um ambiente virtual de aprendizagem.

A implementação do ambiente virtual de aprendizagem de forma direcionada permite que os conceitos em aula possam ser discutidos e verificados. O docente pode acompanhar e interagir com os estudantes, seja no ambiente virtual ou mesmo na aula, discutindo e sanando as dúvidas percebidas nas tarefas.

Por outro lado, o uso do ambiente virtual pode ser desafiador, tanto por razões estruturais (como o difícil acesso dos estudantes à *internet*), quanto pelo que diz respeito aos hábitos de estudo (quando não percebem o *feedback*, por meio de comentários, deixados pelo professor nas tarefas; ou então, a não familiaridade com a Folha de Trabalho) podem ser alguns pontos a serem considerados.

Em pesquisas futuras, pretende-se propor algumas das tarefas do Produto Educacional e, por meio das respostas e adoção de referenciais teóricos voltados para avaliação e a análise da aprendizagem dos alunos, investigar a aprendizagem dos alunos envolvidos em um ambiente virtual de aprendizagem, na perspectiva do Ensino Híbrido, pois este não foi foco dessa pesquisa. Uma outra possibilidade é implementar o ambiente virtual do GeoGebra para a disciplina de Cálculo – a partir dos encaminhamentos do Ensino Híbrido - e avaliar

qualitativamente, por meio de referenciais, como a abordagem contribuiu para o ensino da disciplina e amadurecimento cognitivo dos alunos.

É uma satisfação perceber que a pesquisa está alinhada com o que manifesta o Parecer CNE/CES nº 01/2019, homologado dia 22 de abril de 2019. O parecer orienta que a implementação da tecnologia tem como intuito adotar metodologias de ensino mais modernas e mais adequadas à nova realidade global. Além de abrir espaço para uma maior adoção de tecnologias digitais, são ainda mencionados o uso da *sala de aula invertida*, *laboratório rotacional* e rotação individual. Nesse viés, espero que este trabalho traga contribuições para o ensino de graduação.

## RERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMORIM, L. I. F.; REIS, F. da S. A (re)construção do conceito de limite do cálculo para a análise. In FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A. M. F. T. (Orgs.) **Marcas da educação matemática no ensino superior**. Campinas (SP): Papirus, 2013.

ANDRADE, J. M.; SARAIVA, M. J. Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, v. 15, n. 2, p. 137-169, 2012.

ANTON, H; BIVENS, I; DAVIS, S. **Cálculo: volume 1**. Tradução Claus Ivo Doering. – 8. ed. - Porto Alegre: Bookman, 2007.

BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. M. Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação. BACICH, TANZINETO e TREVISANI, L.; A.; F. M. (Org.). **Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação**. Porto Alegre: Penso, 2015.

BARBOSA, D. P. **O USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DA MATEMÁTICA**. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de São João Del-Rei2016. Disponível em: [http://dspace.nead.ufsj.edu.br/trabalhospublicos/bitstream/handle/123456789/65/DANILO%20PORTO%20BARBOSA\\_12227\\_assignsubmission\\_file\\_TCC-%20Danilo-%20FINALIZADO.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://dspace.nead.ufsj.edu.br/trabalhospublicos/bitstream/handle/123456789/65/DANILO%20PORTO%20BARBOSA_12227_assignsubmission_file_TCC-%20Danilo-%20FINALIZADO.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese (Doutorado). São Paulo: FE – USP, 1999.

BEZERRA, W. L. **O Uso de Ferramentas Pedagógicas para o Ensino de Cálculo de uma Variável em Cursos Semipresenciais: o caso do Instituto Federal do Ceará**. Profissionalizante em ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ, FORTALEZA Biblioteca Depositária: Matemática, 2015

BIKLEN, S.; BOGDAN, R. C. Investigação qualitativa em educação. **Porto: Porto Editora**, p. 134-301, 1994.

BORSSOI, A. H.; TREVISAN, A. L.; ELIAS, H. R. Percursos de Aprendizagem de alunos ao resolverem uma Tarefa de Cálculo Diferencial e Integral. **VIDYA** (Santa Maria. Online), v. 37, p. 459-477, 2017.

BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P. Mídias Educacionais em um Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem: ampliando possibilidades para o Trabalho Colaborativo. **Contexto & Educação**, v. 32, p. 248-274, 2017.

BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P.; FERRUZZI, E. C. Tarefas desencadeadas em aulas com modelagem matemática. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. **Anais do XII ENEM**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. p. 1-12.

BRASIL. **Ministério da Educação. Referenciais para elaboração de material didático para EaD no Ensino Profissional e Tecnológico**. 2007. Disponível em: <http://www.etcbrasil.mec.gov.br/>

CABRAL, T. C. B. **Metodologias Alternativas e suas Vicissitudes: ensino de matemática para engenharias**. Revista: Perspectiva da Educação Matemática – UFMS – v. 8, n. 17 – 2015.

CABRAL, T. C. B. Vicissitudes da aprendizagem em um curso de cálculo. 1992. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro (SP).

CABRAL, T. C. B.; CATAPANI, E. Imagens e olhares em uma disciplina de Cálculo em serviço. **Zetetiké**, Campinas, v. 11, n. 19, 2003, p. 101-116.

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior; 2013.

Documento de área 2013. Disponível em

[https://www.capes.gov.br/images/stories/download/avaliacaotrienal/Docs\\_de\\_area/Administra%C3%A7%C3%A3o\\_doc\\_area\\_e\\_comiss%C3%A3o\\_16out.pdf](https://www.capes.gov.br/images/stories/download/avaliacaotrienal/Docs_de_area/Administra%C3%A7%C3%A3o_doc_area_e_comiss%C3%A3o_16out.pdf)

Acessado em: 08/10/2018

CARGNIN, Claudete. **Ensino e aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real: possibilidades de articulação da utilização de mapas conceituais com a teoria dos registros de representações semióticas**. Tese (Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática). Universidade Estadual de Maringá, 2013.

CATAPANI, E. C. Alunos e professores em um curso de Cálculo em serviço: o que querem? 2001. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

CHARMAZ, K. **A construção da teoria fundamentada: guia prático para análise qualitativa**. Bookman Editora, 2009.

CHRISTENSEN, C.; HORN, M. B.; STAKER, H. Ensino híbrido: uma inovação disruptiva. **Uma introdução à teoria dos híbridos**, 2013.

COLL, C.; MAURI, T.; ONRUBIA, J. A incorporação das tecnologias da informação e da comunicação na educação: do projeto técnico-pedagógico às práticas de uso. **COLL, C.; EDUCAUSE: Things you should know about flipped classrooms**. 2012. Disponível em: <http://net.educause.edu/ir/library/pdf/eli7081.pdf>

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

FREIRE, P. **Pedagogia da indignação: carta pedagógica e outros escritos**. São Paulo: Unesp, 2000.

HORN, M. B; STAKER, H. **Blended: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação**. Porto Alegre: Penso, 2015.

GARZELLA, F. A. C. **A disciplina de Cálculo I: análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos**. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Campiinas, SP, 2013.

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de Cálculo-Volume 1. **Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição**, 2001.

LEMKE, R.; SIPLE, I. Z. Funções reais de duas variáveis e GeoGebra: um livro dinâmico para o Ensino de Cálculo. **Dissertação (Mestrado): UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA**. Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias, Joinville, 2017

LIMA, L. H. F.; MOURA, F. R. O professor no ensino híbrido. BACICH, TANZINETO e TREVISANI, L.; A.; F. M. (Orgs.). **Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação**. Porto Alegre: Penso, 2015.

LUCKESI, C. C. **Prática escolar: do erro como fonte de castigo ao erro como fonte de virtude.** Disponível em:

[http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias\\_08\\_p133-140\\_c.pdf](http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_08_p133-140_c.pdf)

Acesso em: 10 de janeiro de 2019.

LOPES, V. R.; SCHERER, S. Cálculo Diferencial e Integral e o Uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação: uma Discussão de Pesquisas nos Últimos Onze Anos. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 11, n. 2, p. 145-159, 2018.

MACHIN, M. C.; RIVERO, R. D.; SANTOS-TRIGO, M. La comprensión del concepto de área e integral definida en un entorno computacional. Perfiles de actuación. **Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática**, v. 6, p. 21 citation\_lastpage= 46, 2005.

MARIN, D. **Professores de matemática que usam a tecnologia de informação e comunicação no ensino superior.** São Paulo, 2009. 164 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista. Campus de Rio Claro, São Paulo, 2009.

MELO, J. M. R. **Conceito de Integral: uma proposta computacional para seu ensino e aprendizagem.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontífca Universidade Católica de São Paulo, 2002. Disponível em:

MORAN, J. M. Educação Híbrida: um conceito-chave para a educação hoje. In: BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. M. (Org.). **Ensino Híbrido: personalização e tecnologia na educação.** Porto Alegre: Penso, 2015.

\_\_\_\_\_. **Propostas de mudança nos cursos presenciais com a educação online.** Salvador, 2004. Disponível em:

<http://www.abed.org.br/congresso2004/por/htm/153-TC-D2.htm>

Acessado em 02 de abril de 2017

MOREIRA, M. A. Metodologias de pesquisa em ensino. **São Paulo: Editora Livraria da Física**, v. 83, n. 3322.3222, 2011.

OLIMPIO JUNIOR, A.; VILLA-OCHOA, J. A. Coletivos Pensantes e Compreensão Conceitual no Cálculo Diferencial e Integral: Uma Composição de Olhares. In: BORBA, M. C.; CHIARI, A. (Orgs.). **Tecnologias Digitais e Educação Matemática.** 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013, v. 1, p. 141-174.

PONTE, J. P. da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. PONTE, J. P. da (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática.** Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p.13 – 30.

PONTE, J. P. et al. Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. **Quadrante**, v. 24, n. 2, 2015.

PONTES, T. B. **Planejamento de aula no ensino superior na modalidade blended learning: requisitos para uma rede social educativa.** Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Pernambuco. CIn, Ciência da Computação, 2013.

PORVIR. **Ensino Híbrido ou Blended Learning.** 2013. Disponível em: <http://porvir.org/ensino-hibrido-ou-blended-learning/>

Acesso em 20 de maio de 2018.



PRENSKY, M. O papel da tecnologia no ensino e na sala de aula. **CONJECTURA: filosofia e educação**, v. 15, n. 2, 2010.

RASMUSSEN, C.; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go?. **ZDM**, v. 46, n. 4, p. 507-515, 2014.

REZENDE, W. M. **Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SANUGA, A.; CARVALHO, C. S. As tecnologias digitais no ensino híbrido. In: BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. M. (Org.). **Ensino Híbrido: personalização e tecnologia na educação**. Porto Alegre: Penso, 2015.

SILVA, A. G. O. **Aprendizagem consciente: o relatório de reflexão dos erros (RRE) como alternativa pedagógica**. 2013. 141 f. Tese (Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SILVA, A. P. **A modalidade EaD semipresencial e a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Faculdade de Ciências, Bauru/SP, 2017.

SILVA, B. A. Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 13, n. 3, p. 393-413, 2011.

SILVA, M. R. C. **Ensino Híbrido em Cursos Presenciais de Graduação das Universidades Federais: Uma Análise da Regulamentação**. Mestrado em EDUCAÇÃO Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO, Cuiabá Biblioteca Depositária: Biblioteca Setorial do Instituto de Educação e Biblioteca Central / IE / UFMT, 2016.

SILVA, R. T.; BORSSOI, A. H. **Um Estudo sobre as possibilidades do ensino híbrido para o cálculo diferencial e integral**. In: XIV Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2017, Cascavel: UNIOESTE. Diversidade e Educação Matemática: desafios e perspectivas, 2017. v. 1. p. 1-13

\_\_\_\_\_. **Função densidade da distribuição normal em uma abordagem híbrida**. In: I ENCONTRO PARANAENSE DE TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2018, APUCARANA. ANAIS, 2018.

SILVA, A. G. O. **Aprendizagem consciente: o relatório da reflexão dos erros (RRE) como alternativa pedagógica**. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2013.

SCHNEIDER, F. Otimização do espaço escolar por meio do modelo de ensino híbrido. In: BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. M. (Org.). **Ensino Híbrido: personalização e tecnologia na educação**. Porto Alegre: Penso, 2015.

SOUZA, P. R.; ANDRADE, M. C. F. Modelos de rotação do ensino híbrido: estações de trabalho e sala de aula invertida. **Revista E-Tech: Tecnologias para Competitividade Industrial – ISSN – 1983 - 1838**, v. 9, n. 1, p. 03-16, 2016

STEWART, James. Cálculo, volume I/James Stewart; [tradução EZ2 Translate]. **São Paulo: Cengage Learning**, 2013.

SWIDAN, O.; YERUSHALMY, M. Learning the indefinite integral in a dynamic and interactive technological environment. **ZDM**, v. 46, n. 4, p. 517-531, 2014.

TÖRNER, G.; POTARI, D.; ZACHARIADES, T. Calculus in European classrooms: curriculum and teaching in different educational and cultural contexts. **ZDM Mathematics Education**, v. 46, n. 4, p. 549-560, 2014.

**APÊNDICES**

**APÊNDICE 1 – Levantamento inicial dos alunos para a pesquisa****Levantamento Inicial - perfil do aluno da disciplina de Matemática Aplicada II - turma A**

A finalidade desse formulário é conhecer os alunos matriculados na disciplina de Matemática Aplicada II de 2018. Peço que respondam francamente às questões, visto que as respostas não serão divulgadas nominalmente.

**\*Obrigatório**

1. Endereço de e-mail \*

---

2. Nome \*

---

3. Data de nascimento: \*

---

*Exemplo: 15 de dezembro de 2012*

4. Qual seu curso? \* *Marcar apenas uma oval.*

Ciências Econômicas

Outro:

5. Há quanto tempo concluiu o Ensino Médio? \*

---

6. Você está cursando a disciplina de Matemática Aplicada II pela: \* *Marcar apenas uma oval.*

1<sup>a</sup> vez

2<sup>a</sup> vez

3<sup>a</sup> vez

4<sup>a</sup> vez

5<sup>a</sup> vez

6<sup>a</sup> vez

Outro:

7. Atualmente, além de estudar, você: \* *Marcar apenas uma oval.*

- No momento, dedica-se apenas ao curso.
- Faz estágio.
- Trabalha.
- Participa de projetos (Iniciação Científica, Monitoria, Extensão)
- Outro:

8. Você tem acesso à internet por: (pode marcar mais de uma opção) \* *Marque todas que se aplicam.*

- Celular
- Casa
- Universidade
- Trabalho
- Outro:

9. Costuma checar seus e-mails com que frequência? \* *Marcar apenas uma oval.*

- Diariamente (em diversos momentos do dia)
- Diariamente (apenas uma vez ao dia)
- Semanalmente
- Esporadicamente
- Outro:

10. Qual momento, fora de aula, você dedica-se aos estudos? Como você se organiza? \*

---

---

---

---

---

11. Você frequenta a monitoria? \* *Marcar apenas uma oval.*

- Sim
- Não

12. Caso sua resposta tenha sido "não" na questão anterior, poderia mencionar o motivo de não frequentar a monitoria? (caso não se importe em comentar)

---

---

---

---

---

13. Você participa de redes sociais? \* *Marcar apenas uma oval.*

Sim

Não

14. Em caso afirmativo à questão anterior, poderia citar quais redes sociais que mais usa (caso não se importe em mencionar)

---

---

---

---

---

15. Você faz uso de recursos tecnológicos para auxiliar nos estudos? \* *Marcar apenas uma oval.*

Sim

Não

16. Em caso afirmativo à questão anterior, pode mencionar quais recursos tecnológicos que feito uso?

---

---

---

---

---

17. Você conhece o Geogebra? \* *Marcar apenas uma oval.*

Sim

Não

18. Caso sua resposta tenha sido afirmativa na questão anterior, poderia descrever como utiliza/ou o Geogebra? Para qual finalidade? (Acrescente comentários que considere pertinente)

---

---

---

---

---

19. Você conhece alguma linguagem de programação? Em caso afirmativo, aponte qual sua familiaridade e com qual finalidade tem utilizado. \*

---

---

---

---

---

20. Você conhece o site do GeoGebraTube? Caso já tenha conhecimento, poderia mencionar para qual finalidade utilizou \* *Marcar apenas uma oval.*

---

---

---

---

---

21. Caso tenha dúvidas ou mesmo questionamentos, poderá colocar aqui:

---

---

---

---

---

Envie para mim uma cópia das minhas respostas.

---

Powered by








De acordo,

---

Prof. Rodrigo Tavares da Silva  
Professor Responsável pela Disciplina

---

Prof. Dra. Adriana Helena Borsoi  
Professora Orientadora

### APÊNDICE 3 – Questões para a concluir a coleta de dados



Ministério da Educação  
**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
Campus Londrina e Cornélio Procópio  
Pró Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação



**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

#### QUESTÕES PÓS PESQUISA

1. Fale um pouco sobre sua percepção a respeito de como foram conduzidas as aulas, sobre o ensino de integrais.
2. Você já conhecia o software Geogebra? Comente.
3. Em caso afirmativo, com que finalidade utilizou? Comente.
4. Você tem esse software instalado? Comente.
5. Qual sua opinião sobre o uso do recurso grupos para atividades no ambiente virtual do Geogebra?
6. Comente sobre os *applet's* disponíveis em cada tarefa (mostrar ao entrevistado cada tarefa que ele fez), você pode mencionar o que considera mais pertinente, ou seja, pontuar sobre as questões propostas, se as mesmas foram claras e objetivas.
7. Comente sobre sua experiência, mencione quais suas dificuldades ou o que contribuiu por meio da manipulação dos *applet's*. Você percebeu que foi dado um feedback? Você deu retorno?
8. Você percebeu mudanças no seu hábito para estudos? Comente.
9. Levando em consideração as tarefas já realizadas, bem como, os encaminhamentos dados à elas, você poderia comentar sobre sua impressão sobre elas?
10. Você percebe diferença em resolver lista de exercícios e atividades em um formato *on-line*? Comente.