UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

LUÍS HENRIQUE PEREIRA

A DERIVADA SEGUNDO SILVANUS THOMPSON

CURITIBA

2018

LUÍS HENRIQUE PEREIRA

A DERIVADA SEGUNDO SILVANUS THOMPSON

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-UTCT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.
Orientador: Prof. Dr. Mateus Bernardes

CURITIBA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

510 Pereira, Luís Henrique
2018 A derivada segundo Silvanus Thompson / Luís Henrique Pereira . – 2018.
68 f.: il.

Disponível via World Wide Web.
Texto em português com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2018.
Bibliografia: f. 67-68.

1. Thompson, Silvanus P. (Silvanus Phillips), 1851-1916. Calculus made easy. 2. Categorias derivadas (Matemática). 3. Cálculo. 4. Geometria. 5. Funções (Matemática). 6. Aprendizagem. 7. Prática de ensino. 8. Matemática - Estudo e ensino (Ensino médio). 9. Matemática - Dissertações. I. Bernardes, Mateus, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 23 – 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba – UTFPR
Bibliotecária: Luiza Aquemi Matsumoto CRB-9/794

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação

CAMPUS CURITIBA

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 59

A Dissertação de Mestrado intitulada A Derivada Segundo Silvanus Thompson, defendida em sessão pública pelo candidato Luís Henrique Pereira, no dia 23 de novembro de 2018, foi julgada para a obtenção do título de Mestre em matemática, área de concentração Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Mateus Bernardes - Presidente – UTFPR
Profa. Dra. Paula Rogéria Lima Couto - UFPR
Prof. Dr. Roy Wilhelm Probst - UTFPR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 23 de novembro de 2018.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a Deus pelo dom da vida e também da sabedoria. Aos meus pais, Alcynir e Octávio, pela dedicação na eduacação de seus filhos. Aos demais familiares que sempre me incetivaram nessa jornada acadêmica. Aos professores, que ao longo desse período se mostraram sempre dispostos a compartilhar seus conhecimentos. Aos colegas de turma que sempre em momentos de desânimo me incentivaram e hoje vejo a importância desse auxílio. Ao professor orientador , Dr. Mateus Bernardes pela dedicação, postura e paciência nessa jornada. Agradeço também a SBM e UTFPR instituições responsáveis pela efetivação desse projeto, tão importante para valorização dos professores.

RESUMO

PEREIRA, Luís Henrique. **A Derivada Segundo Silvanus Thompson.** 68 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

Este trabalho tem por finalidade mostrar uma possibilidade de abordagem das derivadas para estudantes do Ensino Médio, utilizando um relato histórico de como desenvolveu-se o estudo do Cálculo, mais especificamente, da derivada ao longo do tempo, bem como problemas motivadores que impulsionaram tal conteúdo. São apresentadas definições que envolvem derivadas com aplicações, seja no processo geométrico-algébrico, como no caso da reta tangente, ou ainda, no campo da Física, através da velocidade e aceleração, todos associados ao conceito de taxa de variação. Ao definir a empregabilidade da derivada, se faz um elo entre a derivada e sua aplicação com conteúdos do Ensino Médio, no qual podem ser explorados tópicos relativos ao estudo de funções como: crescimento e decrescimento, pontos de máximo e mínimo, e também, investigar por intermédio da análise visual, parâmetros pertinentes à função. Analisado, também a maneira como Silvanus Thompson desenvolvia o raciocínio da resolução de algumas derivadas, tais como as de polinômios, seno, cosseno e tangente, sendo que esse estudo diferencia-se da maneira tradicional para obter a derivada uma vez que não emprega o uso de limites para sua obtenção. Finalmente, apresenta-se demonstrações efetuadas por Silvanus Thompson de como diferenciar soma, produto, quociente e a regra da cadeia. Aponta-se no Projeto Gutemberg, de domínio público, o livro *Calculus Made Easy*.

Palavras-chave: Derivada. Coeficiente Angular. Taxa de Variação. Infinitésimos. Incremento. Quaciente Diferencial.

ABSTRACT

PEREIRA, Luís Henrique. **The Derivative According to Silvanus Thompson.** a teaching proposal. 68 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

The purpose of this project is to show a possibility of approach of the derivatives to the high school students, using a historical report by how the study of the Calculus was developed, more specifically, of the derivative over time, as well as motivating problems that have boosted such content. Definitions are presented involving derived with applications in the geometric-algebraic process as in the case of tangent line, or at physics area, through the speed and acceleration, all of them associated with the rate of change concept. When defining the derivative employability, it makes a link between the derivative and its application with the high school contents, in which they can be explored relative topics with the studies of functions: as growth and decrease, maximum and minimum points, and also, investigate through visual analysis, parameters relevant to the function. Also analyzed how Silvanus Thompson developed the reasoning of the resolution of some derivatives, such as of polynomials, sine, cosine and tangent, being that this study differs from the traditional way to obtain the derivative, once it does not use the limits for its achievement. Finally, is presented demonstrations realized by Silvanus Thompson, of how to understand addition, product, quotient and the chain rule. Is showing at Gutemberg Project, from public domain, Calculus Made Easy book.

Keywords: Derivative. Angular Coefficient. Variation Rate. Infinitesimal. Increments. Differential Quotient.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A revista *Cálculo* começou a apresentar, a partir da edição de número 31 (THOMPSON, 2013b), a tradução de um livro bastante curioso publicado no começo do século XX, cujo conteúdo referia-se ao estudo do Cálculo para estudantes de Ensino Técnico na Inglaterra, e fez bastante sucesso no decorrer deste século, mas que foi julgado pela comunidade acadêmica como uma fonte sem confiabilidade, pois não tratava o assunto com o rigor matemático que a academia cobrava.

Esse livro, *Calculus Made Easy* de Silvanus Thompson (THOMPSON; GARDNER, 1998), foi apresentado em capítulos ao longo das edições mensais aos leitores dessa revista. Esta obra apresenta tópicos de Matemática de uma forma não tão rigorosa, onde as demonstrações são realizadas por aproximações e conjecturas, dando ênfase a uma abordagem mais intuitiva do que a formal.

É, sobre essa apresentação mais intuitiva, que será retratado o estudo sobre o ensino do Cálculo no Ensino Médio, mais particularmente, a derivada.

Ao longo do trabalho será relatado a trajetória histórica do Cálculo, suas concepções, bem como seus idealizadores, a definição clássica de derivada, e também, como ela pode ser apresentada, seja através da taxa de variação, como coeficiente angular da reta tangente à um ponto de uma função, ou ainda, como velocidade instantânea de um ponto material. Algumas aplicações onde a derivada aparece serão expostos ao longo do trabalho, e a definição de derivada segundo Silvanus Thompson, onde o autor mostra através de exemplos de algumas funções as estratégias utilizadas. Além disso, será apresentada a derivada da soma, do produto, do quociente e também a regra da cadeia de acordo com a resolução de Silvanus Thompson.

Um dos objetivos deste trabalho é mostrar a possibilidade de abordar o uso da derivada nos conteúdos do Ensino Médio, segundo a versão de Silvanus Thompson.

Outro objetivo é expor as ideias do Professor Geraldo Ávila, de que a derivada pode ser inserida no currículo do Ensino Médio no que diz respeito ao estudo de funções.

Outra situação, é utilizar a aplicabilidade da derivada na Física como por exemplo, na definição de velocidade média e instantânea.

Visando uma aprendizagem mais significativa que evidencie respostas para inquietações dos alunos em relação aos conteúdos, suas aplicações, suas contribuições para o aprendizado significativo.

De acordo com (AVILA, 2007), não se trata de uma inicialização ao estudo do Cálculo, como se faz dentro da academia, mais uma apresentação sucinta, sem aprofundamento de definições rigorosas, reforçando mais a maneira intutiva do que a formal. Dentro dessa análise expõe-se as argumentações de Silvanus Phillips Thompson apresentadas na obra *Calculus Made Easy* de 1910.

Segundo (LARSON; HOSTETLER; EDWARDS, 1998), Cálculo é a Matemática da variação:

> Quando Isaac Newton e outros matemáticos do século XVII criaram o Cálculo, tinham por objetivo descrever variações em objetos em movimentos, como os planetas. Na medida que suas pesquisas se aprofundavam, suas questões não resolvidas passaram a abranger quatro problemas: o problema da tangente, o problema da velocidade e aceleração, o problema de máximos e mínimos e o problema da área. No que veio a ser a mais famosa descoberta Matemática da história, Newton verificou que todos esses quatro problemas estavam intimamente ligados e podiam ser resolvidos mediante o cálculo de $derivadas$ e $antiderivadas$.

O coeficiente angular, inclinação, da reta tangente em um ponto do gráfico de uma função, ou ainda, a velocidade de um objeto em um movimento retilíneo são exemplos de aplicações distintas, mas que remetem ao conceito de derivada.

Segundo (SWOKOWSKI, 1994), o conceito de derivada pode ser empregado a qualquer grandeza que possa ser representada por uma função. Essas grandezas aparecem nas diferentes áreas do conhecimento, sendo que as aplicações das derivadas estão sempre envolvidas com questões referentes à taxa de variação.

Segundo (AVILA, 2007), derivada e integral deveriam fazer parte do currículo do Ensino Médio, pois são de fundamental importância dentro da ciência moderna.

Entretanto, ainda segundo o mesmo autor, a apresentação destes conceitos no Ensino Médio deve ser fundamentalmente diferente do que é ensinado nos cursos universitários. A sugestão para introdução de derivada no Ensino Médio é de que seja de forma simples o suficiente para que o estudante perceba suas aplicações e reconheça sua importância dentro do ensino em Matemática.

De acordo com (AVILA, 2007), essa explanação simples e concisa pode ser feita no contexto do ensino das funções, que costuma ser apresentada no primeiro ano do Ensino Médio, de forma totalmente desassociada da geometria analítica, que só aparecerá no terceiro ano do Ensino Médio. Atualmente, esses conceitos ainda são ensinados separadamente, carregados de terminologias e notações, de maneiras artificiais e descontextualizadas, tomando bastante tempo e apresentando poucas chances de apreensões significativas.

Outra sugestão do autor, é introduzir, já no ensino fundamental, o conteúdo referente a equação da reta, através de gráficos, nos quais o estudante iniciará suas primeiras percepções, construindo vínculos, como por exemplo, retas que passam pela origem do sistema cartesiano, com proporcionalidade e regra de três,ou ainda, o coeficiente angular, que tem relação direta com a inclinação da reta. Fundamentado-se assim na visualização geométrica.

De acordo com (AVILA, 2007), proporcionalidade e regra de três deveriam ser retomados na primeira série do Ensino Médio, afim de mostrar a relação existente de grandezas proporcionais com duas variáveis, uma dependente e outra independente, cujo gráfico é uma reta que passa pela origem, de equação $y = m \cdot x$. Pode-se enfatizar uma possível translação da reta de equação $y = m \cdot x$, para reta de equação $y = m \cdot x + n$, a qual sofreu uma variação de magnitude na direção vertical.

Outra observação do autor é de que, para a implementação do estudo da derivada no Ensino Médio é de suma importância a inserção de termos referentes aos acréscimos ou decréscimos, (também chamados de incrementos), como Δx e Δy, cuja razão $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ têm a ver com a inclinação da reta que passa por dois pontos quaisquer.

Quando for acrescentar o incremento Δx à variável independente x, haverá como consequência, uma variação Δy à variável dependente y. O que se procura é a razão incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, que quando, o valor de Δx tender a zero, essa relação entre os incrementos será designada como coeficiente angular da reta tangente no ponto $(x, f(x))$, ou ainda, a derivada da função nesse ponto.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DO CÁLCULO

Para uma melhor compreensão das dificuldades enfrentadas na abordagem do ensino do Cálculo no Ensino Médio, é interessante um apanhado histórico da sua evolução, bem como, uma visão panorâmica de como se desenvolveu seu significado e sua ideia.

Segundo (MACHADO, 1990), o objeto de estudo do cálculo é abordado abaixo:

> O Cálculo Diferencial e Integral trata de questões relacionadas com a medida de rapidez com que as grandezas aumentam ou diminuem, os objetos se movem ou as coisas se transformam. Trata também de questões envolvendo a interpretação de grandezas que variam continuamente como se variassem através de pequenos patamares onde se manteriam constantes, conduzindo a somas com número cada vez maior de parcelas cada vez menores. A medida de rapidez de variação conduz a noção de Derivada; o estudo das somas com muitas pequenas parcelas conduz a noção de Integral. Ambas as noções têm que ver, em suma, com aproximação de curvas por retas, ou de fenômenos não-lineares por descrições lineares, recurso fundamental em múltiplas e distintas situações. O processo através do qual uma curva é aproximada por uma reta que lhe é tangente é diferenciação ou derivação; aproximação de curvas por retas com a que tem lugar, por exemplo, no cálculo de áreas, dá origem ao processo de integração.

Segundo (MOL, 2013), o grego Eudoxo (408 - 355 a.C.) contribuiu para o desenvolvimento da Matemática quando formalizou técnicas rigorosas para calcular comprimentos, áreas e volumes de figuras com contornos curvilíneos utilizando o *Método de Exaustão*.

Conforme (PEDROSO, 2009), Arquimedes (287 – 212 a.C.) deu continuidade aos trabalhos de Eudoxo aprimorando o *Método de Exaustão* para calcular áreas e volumes. Contribuiu também com fundamentos da mecânica e introduziu avanços na Álgebra.

De acordo com (PEDROSO, 2009), Pierre de Fermat (1601 – 1665) descobriu o princípio fundamental da geometria analítica. Foi com o advento das coordenadas cartesianas, que se tornou possível transformar problemas geométricos em problemas algébricos.

Segundo (MOL, 2013), foi atribuído a Fermat descobertas significativas descritas no seu tratado, *Método para achar máximos e mínimos*. Foram estudadas por Fermat, curvas do tipo $y = x^n$, com $n \in \mathbb{Z}$, conhecidas hoje como "parábolas de Fermat", quando n é positivo, ou ,"hipérboles de Fermat", quando n é negativo. Desenvolveu também um método para encontrar os pontos de máximo e mínimo para curvas polinomiais da forma $y = f(x)$. É imputado a

Fermat, que em certas funções, cujo gráfico é uma curva, existam certos pontos que assumem valores extremos, sendo que a tangente nesses pontos será uma reta horizontal.

Fermat desenvolveu um método para determinar máximos e mínimos. Segundo (MOL, 2013):

> O método utilizado por Fermat para encontrar máximos e mínimos de uma função polinomial f parte do pressuposto que, em um ponto de máximo ou de mínimo, os valores de $f(x)$ e $f(x+e)$ são muitos próximos para um e muito pequeno. Fermat, então, fez $f(x) = f(x+e)$, para em seguida dividir o resultado por e e fazer $e = 0$.
>
> $$g(x) = \frac{f(x+e) - f(x)}{e}\bigg|_{e=0}.$$
>
> Essa expressão é, de fato, igual a derivada da função $f(x)$, ou seja
>
> $$g(x) = \lim_{e \to 0} \frac{f(x+e) - f(x)}{e} = f'(x).$$

Segundo (PEDROSO, 2009), Fermat e outros estudiosos da época não perceberam a relação entre a diferenciação e a integração.

Já Isaac Barrow (1630 – 1677), conforme (PEDROSO, 2009), publicou *Lectiones: Ópticas* de 1669 e *Lectiones: Geometriae* de 1670, já com a colaboração de seu aluno Isaac Newton. Esses dois trabalhos apresentavam um método para encontrar tangentes e que ele cunhou como triângulo diferencial similar ao que é usado hoje no Cálculo. Barrow reconheceu a relação inversa entre os problemas das tangentes e das quadraturas, porém seu forte vínculo com métodos geométricos, impossibilitou-o da utilização dessa relação e seus trabalhos tornaram-se difíceis de serem compreendidos e suas regras não eram tão plenas.

De acordo com (PEDROSO, 2009) Isaac Newton (1642 – 1727), escreveu em 1671 $Methodus\, fluxionum\, et\, serierum\, infinitorum$ (O método de fluxões e séries infinitas), que só seria publicada em 1742. Newton representou as quantidades fluentes por v, x, y, z; as fluxões ou fluxos por $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ e os fluxos dos fluxos por $\ddot{v}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$.

A descoberta das “fluxões”estava vinculada aos seus estudos sobre séries infinitas na *Arithmética dos Infinitos* de Wallis. Isso acarretou a estender o teorema binomial aos expoentes negativos e fracionários e, assim, à descoberta das séries binomiais. Esse episódio favoreceu a constitução de sua teoria para todas as funções algébricas ou transcendentes.

Segundo (MOL, 2013), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) entre o período de 1673 e 1676, desenvolveu o seu Cálculo, influenciado por Huygens e pelos estudos de Pascal e Descartes. Leibniz obteve resultados em cálculo infinitesimal equivalente aos que Newton obtivera alguns anos antes, tendo escrito de forma segmentada, em uma série de artigos. A noção do diferencial era o alicerce do Cálculo de Leibniz, cuja operação principal, cálculo de diferenças – derivada – e sendo a soma - integral - sua operação inversa. As notações dy e $\int$ foram estabelecidas por Leibniz e indicavam respectivamente diferencial e soma.

Newton foi quem primeiro apresentou as ideias que hoje é chamado de Cálculo, mas foi Leibniz quem primeiro publicou esses estudos.

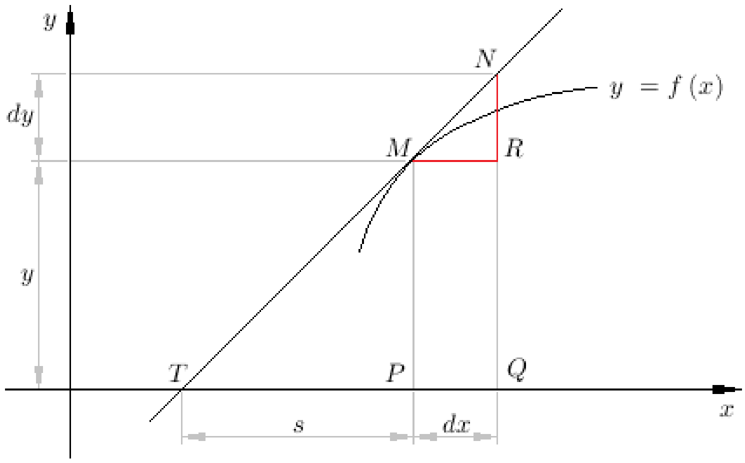
Segundo (PEDROSO, 2009), a abordagem efetuada por Newton foi a cinemática, a de Leibniz foi geométrica, fundamentada em cima do triângulo característico conforme Figura 1, um recurso que não era novidade, – já aparecera em outros escritos como os de Pascal e Barrow – sendo que esse método não apresentava restrições para funções irracionais e transcendentes.

Conforme (MOL, 2013), que relata:

> O primeiro artigo de Leibniz sobre o cálculo diferencial foi publicado em 1684 com o sugestivo título de *Um Novo Método para Máximos e Mínimos, e Também para Tangentes, que não é Obstruído por Quantidades Irracionais*. Leibniz percebeu que a busca da tangente a uma curva dependia das relações entre as ordenadas e as abscissas quando elas se tornam infinitesimalmente pequenas e que a quadratura dependia da soma de retângulos de bases infinitesimalmente pequenas apoiadas sobre o eixo das abscissas. O ponto de partida de Leibniz para o estudo do cálculo diferencial foi, mais uma vez, o triângulo característico.

De acordo com (MOL, 2013), Leibniz representou o triângulo ΔMRN como infinitesimalmente pequeno, sendo característico da curva que representa uma determinada função, conforme Figura 1. Pela semelhança existente entre os triângulos ΔTPM e ΔMRN, seus lados infinitesimalmente são determinados.

Figura 1 – Triângulo característico.



Fonte – (MOL, 2013)

Apesar de que dx e dy sejam quantidades infinitesimalmente pequenas, a relação $\frac{dy}{dx}$ será um valor determinado e finito, idêntico à razão $\frac{PM}{TP}$, permitindo assim, obter uma relação entre os diferenciais

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s}$$

onde, y e s são, respectivamente o valor da ordenada e da subtangente.

Segundo (MOL, 2013) o método exposto acima, falhava pela falta de uma definição rigorosa de tangente, pois considerava de forma imprecisa, uma reta que liga pontos infinitesimalmente próximos.

Conforme (PEDROSO, 2009) Fermat, para muitos, foi considerado o verdadeiro criador do Cálculo, mas, outros como Descartes, Pascal, Cavalieri, Barrow, Wallis, colaboraram tanto para o Cálculo Integral (quadraturas), como para o Cálculo Diferencial (encontrar tangentes à curvas).

Então, por que são considerados, Newton e Leibniz, os inventores do Cálculo? Segundo (PEDROSO, 2009) a defesa dessa ideia se baseia em três argumentos:

1º. Os métodos infinitesimais utilizados pelos antecessores de Newton e Leibniz eram reduzidos para uma classe especial de curvas. Newton e Leibniz elaboraram um sistema de métodos mais amplos e coerentes, que não dependiam da natureza das curvas.

2º. Com o advento do Teorema do Cálculo, relação inversa entre diferenciação e integração, conseguiu-se a coerência dos sitemas de Newton e Leibniz.

3º. Os sitemas de notações criados por Newton e Leibniz possibilitaram a aplicação analítica de seus métodos e revelaram-se na forma de algoritmos mais evidentes e por um conjunto de fórmulas para as regras do Cálculo.

Conforme (MACHADO, 1990), que faz um relato do início do Cálculo Diferencial e Integral:

> Inicialmente, as idéias básicas do Cálculo não eram muito claras, nem pareciam bem fudamentadas, sendo recebidas com profunda desconfiança pelos matemáticos em geral. Newton lidava com entidades como *fluentes* e *fluxões*, noções que só bem mais tarde, já no século XVIII, seriam convenientemente depuradas, conduzindo às noções de função e derivada. Leibniz chamava de infinitésimos as pequenas parcelas a serem somadas no processo de integração, ao mesmo tempo que imaginava as curvas sendo constituídas de partes infinitesimais, como se fossem pequenos segmentos de reta. Tais infinitésimos, em alguns cálculos, eram considerados relevantes, enquanto em outros eram desprezados, sem que as razões de tais procedimentos fossem bem explicadas. Embora a eficácia do Cálculo enquanto técnica fosse reconhecida e devidamente comprovada desde os primórdios, a falta de coerência nas justificativas

apresentadas para os diversos procedimentos revelava-se desconfortável para todos os que dele faziam uso.

De acordo com (REIS, 2001), após a publicações de seus trabalhos, Newton em 1671 e Leibniz em 1686, receberam críticas por não apresentarem uma formulação rigorosa para suas interpretações e aplicações do Cálculo.

Conforme (MACHADO, 1990), os processos de derivação e integração foram explanados de maneira mais rigorosa mediante os estudos de D'Alembert (1717 – 1783) e Cauchy (1789 – 1857), especialmente através do conceito de limite.

O conceito de limite foi definido de modo mais rigoroso com o uso de ϵ (épsilons) e δ (deltas), por Weierstrass (1815 – 1897), possibilitando assim, seu emprego na definição da derivada e integral.

Segundo (AVILA, 1999 apud REIS, 2001), no prefácio do livro *Introdução à Análise Matemática*, seu autor, o professor Geraldo Ávila, diz acreditar que durante evolução do Cálculo, desde Leibniz e Newton no século XVII, matemáticos como os irmãos Bernoulli, D'Alembert, Euler e Lagrange batalharam em apresentar uma formulação conceitual e procedimental rigorosa para o Cálculo, que só foi atingida no início do século XX com Dedekind e Peano, após trabalhos imprescindíveis de Cauchy e Weierstrass.

Conforme (AVILA, 1999 apud REIS, 2001), o professor Ávila acredita que essa evolução de importantes resultados foi obtida em decorrência da concepção intuitiva adotada por esses estudiosos, e reafirma, que deve haver um equilíbrio entre o rigor, essencial à análise e a intuição, tão relevante as concepções matemáticas.

2.2 CÁLCULO NOS DIAS ATUAIS

De acordo com (ÁVILA, 1991), no final da década de 50 e começo da década de 60, houve uma mudança relevante – movimento da Matemática Moderna – no ensino da Matemática no Brasil. Segundo seus adeptos, era necessário uma mudança dando uma maior ênfase ao rigor e no formalismo das apresentações em que foram incorporados o ensino da teoria dos conjuntos e vários detalhamentos axiomáticos, que acarretou a supressão de alguns tópicos, como a Geometria e o Cálculo, uma vez que demandavam tempo e, no caso da Geometria, suas apresentações eram pautadas no rigor matemático.

Ainda segundo Ávila (1991), a reforma realizada nos anos 60, contribuiu para o inchaço dos programas, pelo excessivo formalismo, como por exemplo, no ensino das funções, em que gastava -se um tempo excessivo na apresentação da terminologia, contradomínio, funções inversa, composta, injetiva, sobrejetiva, de poucos resultados, pois tais conceitos não serão utilizados por um bom tempo e gerando pouco interesse dos alunos.

Conforme (ÁVILA, 1991), que relata:

> Portanto, para podermos mostrar ao aluno a importância do conceito de função, temos de ensinar-lhe os conceitos de derivada e integral e para que servem esses conceitos. A medida que vamos avançando com a apresentação de ideias, com o desenvolvimento de métodos relevantes no tratamento de problemas significativos, aí sim, vão surgindo, a cada passo, gradativamente, a necessidade de definições novas, e dessa maneira o ensino pode tornar-se interessante, o aluno se sentirá estimulado porque entende a razão de ser do que está aprendendo. Seria muito mais proveitoso que todo o tempo que hoje se gasta, no 2^o grau, ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com o ensino das noções básicas do cálculo e suas aplicações. Então, ao longo desse desenvolvimento, o ensino das funções seria feito no contexto apropriado, de maneira espontânea, progressiva e proveitosa. Como se vê, o problema não é encontrar mais espaço nos atuais programas trata-se, isto sim, de bem utilizar o espaço já disponível, com uma melhor distribuição e apresentação dos diferentes tópicos.

De acordo com (ÁVILA, 1991), na evolução científica-tecnológica o Cálculo apresentou enorme relevância. Suprimir esse importante tópico do ensino é procupante, porque trata-se de um componente fundamental para o desenvolvimento do aluno num ambiente de ensino moderno e atual. A inserção do ensino do Cálculo no Ensino Médio pode ser efetivada desde que se faça um reordenamento dos programas de forma adequada. Quando apresentada de forma conveniente, será bastante gratificante, pois oferece novas ideias e seus métodos possibilitam um poder de alcance maior. É possível uma introdução do estudo das derivadas ainda no Ensino Médio partindo-se de noções como as grandezas constantes, variáveis, proporcionalidades, velocidades, retas tangentes e taxas de variação.

É importante, que no estudo das derivadas sejam apresentadas algumas de suas aplicações como na cinemática. O emprego da noção de derivada, quando se estuda o movimento uniformemente variado, facilitaria, em muito, a apresentação de tal conteúdo, já que a derivada, nesse caso, é interpretada como a velocidade instantânea.

De acordo (MACHADO, 1990), desde muito cedo são apresentadas algumas ideias básicas presentes no cotidiano das pessoas.

> O conceito de derivada é uma generalização da noção de velocidade, com a qual familiarizamo-nos desde muito cedo. Embora não seja fácil definir velocidade de maneira geral e precisa, todos parecem capazes de entender e utilizar intuitivamente informações envolvendo tal noção, pouco ou nada contribuindo para isso afirmações que a caracterizam como o limite de $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ quando Δt tende a zero. Para uma compreensão mais efetiva, a referência natural é o significado cristalino da velocidade nos movimentos uniformes. Nesses movimentos, onde o móvel percorre distâncias

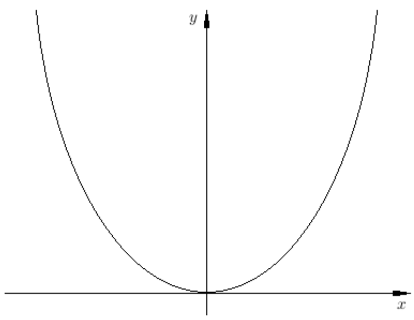
> iguais sempre em tempo iguais, a velocidade representa a distância percorrida na unidade de tempo.

Conforme (ÁVILA, 1991), a utilização da derivada em Física tem significativa relevância na introdução de outros conceitos, como pressão, densidade de massa, densidade de carga elétrica, entre outros, sendo que, esse saber – derivada – deve preceder ou então realizar-se simultaneamente com o estudo desses conteúdos na Física.

Uma forma de estimular a curiosidade dos alunos é a apresentação das aplicações da derivada em problemas, envolvendo máximos e mínimos, crescimento de populações e taxas de decaimento radioativos, entre outros.

Um exemplo apresentado por (AVILA, 2007) é o da função $f(x) = x^2$. Nesse exemplo pode ser abordado, durante a construção do gráfico, conforme Figura 2, a simetria existente em relação ao eixos das ordenadas, ou seja, elucidando, nesse caso, o conceito de função par. Outros conceitos relevantes que podem ser explorados são: o crescimento e decrescimento da função, ponto crítico e também a concavidade.

Figura 2 – Gráfico da função $f(x) = x^2$.



Fonte – (AVILA, 2007)

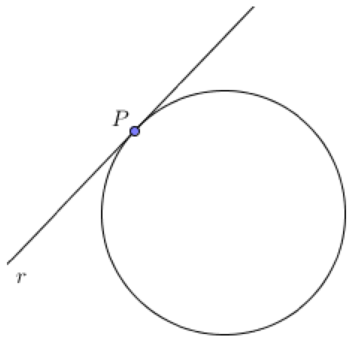
Uma função pode ou não apresentar simetria em relação ao eixo das ordenadas. Essa simetria vai ocorrer de fato quando forem escolhidos valores simétricos para a variável independente x, e o resultado encontrado for igual para a variável dependente y, ou seja, valores simétricos quando substituídos em x apresentar a mesma imagem. Quando tal fato ocorrer, esta função é classificada como função par.

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow f \text{ é função par.}$$

Para responder o questionamento da concavidade, recorre-se a inclinação da reta tangente. Falar que a concavidade está voltada para cima, quer dizer que a inclinação da reta tangente cresce à medida que crescem os valores conferidos a $x \geq 0$.

Na Geometria, a reta tangente r, em um ponto P de um círculo, pode ser interpretada como aquela que intercepta o círculo em apenas um ponto, conforme Figura 3.

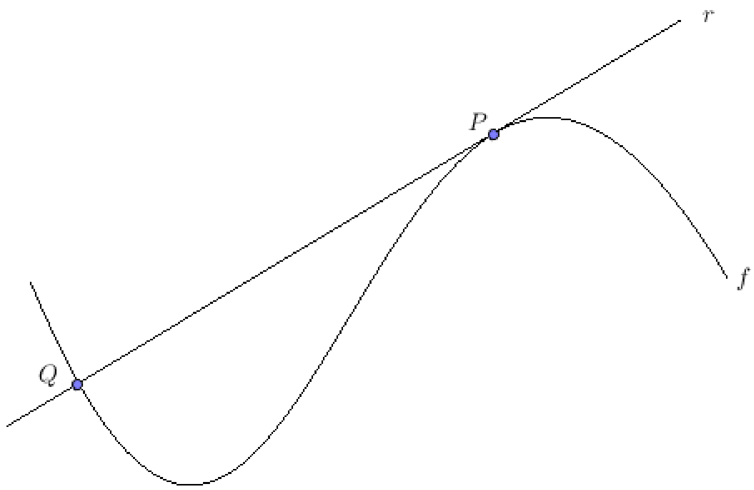
Figura 3 – Reta tangente.



Fonte – Adaptado de (STEWART, 2013)

Segundo (AVILA, 2007), não se pode estender essa interpretação de reta tangente ao gráfico de uma função f qualquer, pois as retas tangentes, aos gráficos não circulares, podem interceptar o gráfico em mais de um ponto, ou seja, a reta r pode tangenciar o gráfico de f em um determinado ponto P e interceptá-lo em um outro ponto Q, conforme é mostrado na Figura 4. Para definir reta tangente, a uma curva qualquer, cuja função seja $y = f(x)$, o ponto

Figura 4 – Reta secante no ponto Q e tangente no ponto P.

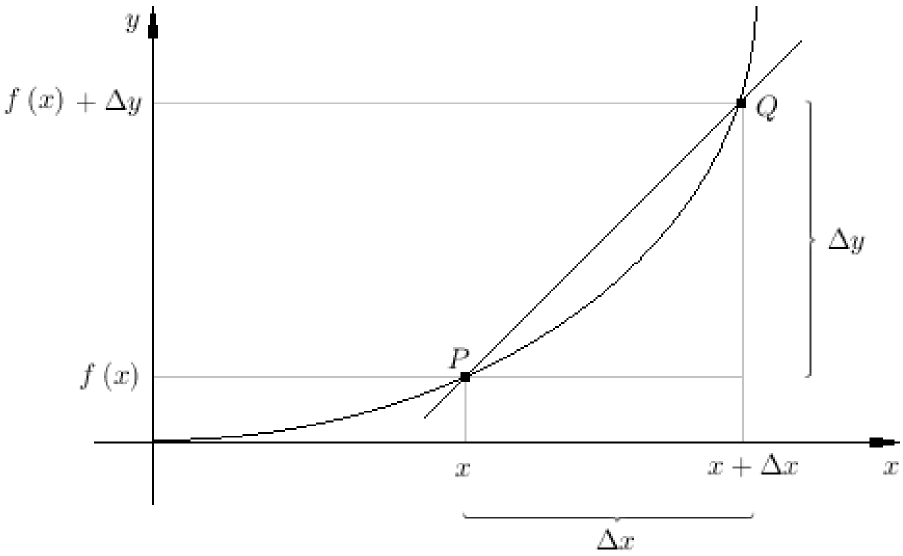


Fonte – Adaptado de (STEWART, 2013)

$P(x, f(x))$, será identificado, como sendo aquele onde se pretende traçar a reta tangente, que ainda não foi definida. Atribuindo um incremento Δx à variável independente x, à variável dependente y sofrerá um incremento correspondente, igual a Δy, e obtendo assim o ponto Q, cujas coordenadas $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$, são apresentadas conforme Figura 5. É importante salientar que o acréscimo atribuído a $f(x)$ é dado por $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Traçando uma reta que passa pelos ponto P e Q, essa referida reta será chamada de reta secante.

Tomando-se ainda como exemplo a função $f(x) = x^2$, e aplicando um pouco de álgebra

Figura 5 – Gráfico da função $f(x) = x^2$.



Fonte – (AVILA, 2007)

sobre essa função, é esperado chegar à expressão $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, conforme a equação 2.1 :

$$y = x^2 = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\Rightarrow \quad y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

$$\Rightarrow \quad y + \Delta y = x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - y$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = 2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = \Delta x \cdot (2 \cdot x + \Delta x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cdot x + \Delta x. \tag{2.1}$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ é a inclinação da reta secante que passa pelos pontos P e Q, sendo que, esse quociente é conhecido como razão incremental e está esboçado na ilustração da Figura 5. Fazendo com que o ponto Q desloque-se até P sobre a curva, ou seja, o incremento Δx vai tendendo a zero, a reta secante passa por várias posições, e aproxima-se de uma posição limite, que é identificada como reta tangente à curva no ponto P . A inclinação dessa reta é o limite do declive, $2x + \Delta x$

quando Δx tende a zero. Esse valor limite é chamado de derivada da função no valor x, cuja notação é indicada por y' ou $f'(x)$, que neste caso é $2x$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x. \tag{2.2}$$

Uma observação importante: o incremento Δx nunca assume o valor zero, pois a razão incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ não faria sentido. A razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ vai tender ao quociente diferencial $\frac{dy}{dx}$ quando Δx tende a zero, se tal limite existir.

A interpretação geométrica para derivada é a inclinação da reta tangente e o fato da função ser crecente ou decrescente está condicionado a essa derivada.

Generalizando-se $f'(x) > 0$ para todo x, pertencente ao intervalo]a,b[, então a função será estritamente crescente no intervalo]a,b[. Uma função estritamente crescente implica em uma razão incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ positiva. Se $f'(x) < 0$ para todo x, pertencente ao intervalo]a,b[, então a função será estritamente decrescente no intervalo]a,b[. Uma função estritamente decrescente implica em uma razão incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ negativa.

No caso da função $f(x) = x^2$, a derivada se anula quando $x = 0$, ou seja, a inclinação da reta tangente é zero, resultando em uma reta horizontal.

Conforme (AVILA, 2007), para o aluno da 1ª série do ensino médio, o professor deverá fazer uma iniciação sobre funções, por exemplo, como achar $f(x)$, quando são atribuídos determinados valores para x, ou, como encontrar x, quando são conferidos valores para $f(x)$. Ainda segundo o mesmo autor, na apresentação da derivada, deve-se priorizar o estudo da inclinação da reta e ignorar o conteúdo referente ao estudo da reta, pois tal conteúdo será abordado em sistemas de equações lineares.

Outro objetivo é buscar subsídios para um melhor aprendizado da cinemática na disciplina de Física. Por isso é de fundamental relevância o planejamento mútuo das disciplinas de Matemática e Física. Essa interação é um modo de promover a interdisciplinaridade tão almejada por muitos educadores.

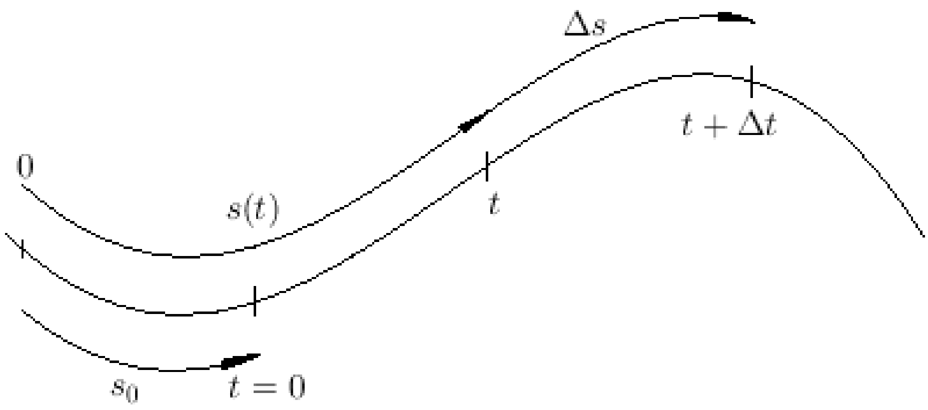
O autor discorre sobre o movimento de um ponto material, massa desprezível, sobre uma trajetória qualquer, como mostra a Figura 6. O espaço percorrido pelo móvel durante o intervalo de tempo, que vai do instante t ao instante $t + \Delta t$.

Nesse intervalo de tempo a velocidade média v_m é definida como a razão incremental:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \tag{2.3}$$

Quando a velocidade média apresentar o mesmo valor durante todo o tempo o movimento será dito uniforme. Pode-se descrever a velocidade média como sendo o incremento espacial $\Delta s = s(t) - s_0$, correspondente ao incremento de tempo $\Delta t = t - 0 = t$, isto é, $v_m = \frac{s(t) - s_0}{t}$,

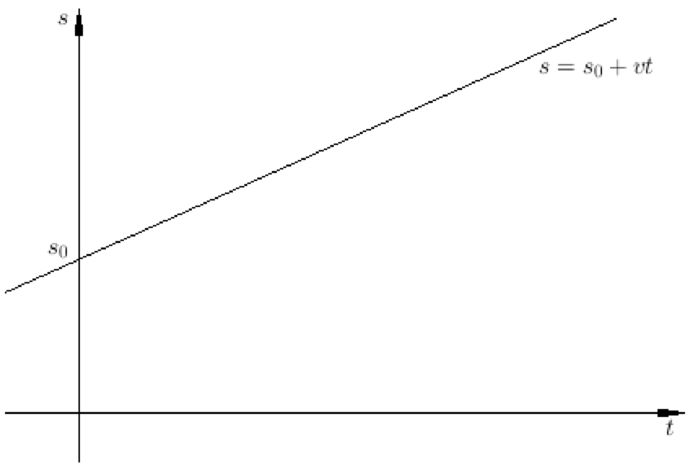
Figura 6 – Trajetória de um ponto material.



Fonte – (AVILA, 2007)

chegando à equação $s = s_0 + vt$, designada como equação horária do movimento uniforme, onde s_0 é denotado como o valor do espaço inicial (que é o espaço já percorrido quando se começa a contar o tempo). Esta equação horária está representada pelo gráfico da Figura 7.

Figura 7 – Gráfico da função horária do movimento uniforme.



Fonte – (AVILA, 2007)

A velocidade média será utilizada quando o movimento for uniforme. Segundo (AVILA, 2007), quando fala-se em velocidade média é preciso reparar o movimento e este só faz sentido em intervalos de tempo. Fazendo esses intervalos de tempo, cada vez menores, tem-se uma melhor leitura de quanto pode ser a velocidade instantânea. Fazendo Δt tender a zero, tem-se como resultado o valor limite da velocidade média, a qual chama-se de velocidade instantânea no instante t, e dada por:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \tag{2.4}$$

A velocidade instantânea, do ponto material no instante t, é a derivada da função deslocamento em relação ao tempo.

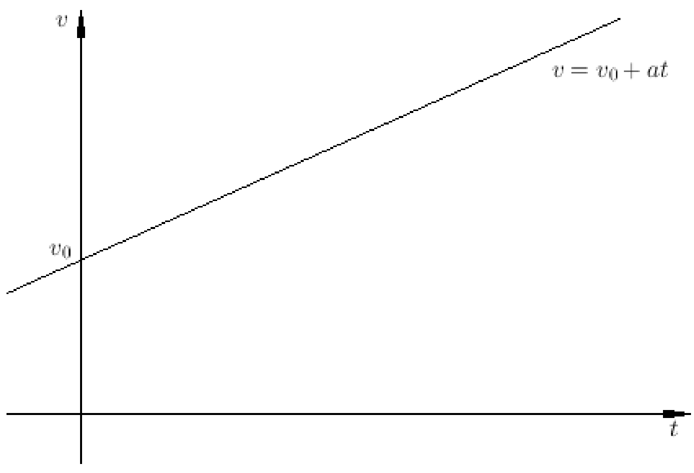
Uma situação distinta, mas similar, ocorre quando há variação da velocidade. Neste caso, o ponto material possui aceleração, e se esse valor for constante e diferente de zero, o movimento será chamado de movimento uniformemente variado.

A aceleração média, nesse intervalo de tempo, é definida como razão incremental:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}. \tag{2.5}$$

Diz-se que o movimento é uniformemente variado quando a aceleração média apresenta o mesmo valor durante todo o movimento. Pode-se escrever que a aceleração média a_m, como sendo o incremento de velocidade $\Delta v = v(t) - v_0$, correspondente ao incremento de tempo $\Delta t = t - 0 = t$, isto é, $a_m = \dfrac{v(t) - v_0}{t}$, chegando à equação $v = v_0 + at$, conhecida como equação horária da velocidade do movimento uniformemente variado, onde v_0 é denotado como o valor da velocidade inicial (que é a velocidade do ponto material, quando se começa a contar o tempo). Esta equação horária está representada pelo gráfico da Figura 8.

Figura 8 – Gráfico da função horária do movimento uniformemente variado



Fonte – (AVILA, 2007)

Fazendo Δt tender a zero, tem-se como resultado o valor limite da aceleração média, a qual chama-se de aceleração instantânea no instante t, e dada por:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}. \tag{2.6}$$

Uma observação importante é a de que no movimento uniforme, como a velocidade é constante, sua aceleração é igual a zero.

As funções horárias do movimento uniformemente variado e do movimento uniforme apresentam uma certa similiaridade algébrica, por se tratarem de funções afins. No movimento uniformemente variado, a aceleração é para a função velocidade $v(t)$, o mesmo que a velocidade é para a função deslocamento $s(t)$ no movimento uniforme, sendo essa relação entre as grandezas nos dois tipos de movimentos, nada mais que a derivada.

Do mesmo modo, os gráficos das Figuras 7 e 8 apresentam grandezas que variam com o tempo, que são respectivamente a posição e velocidade. Em ambas as situações, essas grandezas que variam com o passar do tempo, apresentam com esse, uma proporcionalidade, sendo que, o valor dessa constante, é igual a velocidade no caso da Figura 7 (movimento uniforme) ou a aceleração no caso da Figura 8 (movimento uniformemente variado). Essa similaridade existente ocorre em razão das características dos gráficos, que nesses casos são uma reta, devido a proporcionalidade existente entre as grandezas envolvidas.

Existe uma familiaridade entre as definições apresentadas até o presente momento: coeficiente de inclinação da reta tangente, velocidade e aceleração. Independentemente da razão incremental que define tal grandeza acima citada, fazendo a variável independente tender a zero, tem-se como resultado o valor limite de tal grandeza, que é definida como derivada.

Por exemplo, o conceito de derivada é uma generalização da noção de velocidade com a qual, desde cedo, é apresentada fazendo parte do cotidiano. Embora o conceito de velocidade não esteja elaborado no pensamento das pessoas, todos parecem capazes de entender e utilizar intuitivamente, informações envolvendo tal grandeza.

De acordo com (AVILA, 2007), existe certa reserva por parte de muitos professores em apresentar o conteúdo de derivadas no Ensino Médio, por ter sido criado o hábito de que esse conteúdo deva ser precedido pelo estudo de limites, o que, não necessariamente, deva ser. O ensino de derivadas auxilia em várias particularidades das funções e deveria ser abordado já na 1ª série do ensino médio, quando pode ser, consonantemente, incluído com o estudo dos movimentos em Física.

Uma observação bastante pertinente é citada por (AVILA, 2007):

> Os reformadores do ensino da matemática da década dos anos sessenta criticavam o fato de que a matemática ensinada na escola básica não ia além do que se havia desenvolvido até 1700. Mas vejam que ironia: a derivada, que é anterior a 1700, essa eles deixaram de fora do ensino!...

De acordo com (AVILA, 2007), as aulas expositivas não devem ser prolongadas, no máximo trinta minutos, seguidas de atividades propostas pelo professor e executadas pelos alunos de forma individual ou coletiva, a fim de estimular o interesse pelo conteúdo apresentado.

2.3 DERIVADA

Antes mesmo de definir o que é uma derivada de uma função, se faz necessário apresentar situações em que tal conceito ocorre.

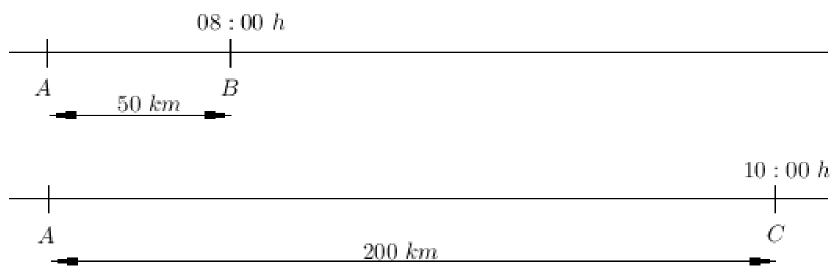
2.3.1 TAXA DE VARIAÇÃO

As taxas de variação ocorrem em vários ramos da ciência. Segundo (STEWART, 2013), pode ocorrer na geologia, onde se pretende determinar a taxa de resfriamento de uma rocha devido a condução de calor, na engenharia, para determinar a taxa de escoamento de um determinado líquido dentro de um reservatório, ou ainda, saber qual a taxa de variação da pressão hidrostática em relação a altura, ou, a taxa de variação em relação ao tempo. São formas de taxas de variação presentes nas ciências da natureza. Outros exemplos de taxas de variação ocorrem nas ciências humanas, como o estudo de um geógrafo, preocupado em descobrir a taxa de variação da densidade populacional, a medida que se distancia do centro da cidade, ou ainda, nas ciências econômicas, como por exemplo, descobrir a taxa de variação do débito em relação ao tempo

Então, antes de definir taxa de varição, apresentamos uma noção intuitiva desse fenômeno, conforme (AQUINO, 2011).

Considere que certo móvel deslocando-se do ponto B para um ponto C, ilustrado na Figura 9. Qual será o valor da velocidade média nesse trajeto?

Figura 9 – Deslocamento de um ponto material sobre uma trajetória.



Fonte – (AQUINO, 2011)

De acordo com a equação 2.3 tem-se que:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{200 - 50}{10 - 8} = 75 \text{ km/h}.$$

Conforme (HUGHES-HALLETT, 2005), um outro exemplo de taxa de variação é relatado a seguir:

A tabela 1, mostra as marcas obtidas pelos vencedores do salto com vara, nas olimpíadas durante as décadas de 1960 e 1980. Qual será a taxa de variação de altura entre 1960 e 1968 e, também, entre 1980 e 1988?

Tabela 1 – Altura (aproximada) obtida pelos vencedores do salto com vara.

Ano	1960	1964	1968	...	1980	1984	1988
Altura (em polegadas)	185	201	212	...	227,5	226	237

Fonte – (HUGHES-HALLETT, 2005)

A taxa de variação da altura obtida na modalidade de salto com vara, entre os anos de 1960 e 1968, será dada por:

taxa de variação = $\dfrac{\text{variação na altura}}{\text{variação no tempo}} = \dfrac{212 - 185}{1968 - 1960} = 3,375 \text{ polegadas/ano.}$

Já a taxa de variação da altura obtida na modalidade de salto com vara, entre os anos de 1980 e 1988, será dada por:

taxa de variação = $\dfrac{\text{variação na altura}}{\text{variação no tempo}} = \dfrac{237 - 227,5}{1988 - 1980} = 1,1875 \text{ polegadas/ano.}$

Para o cálculo da taxa de variação, duas são as variáveis envolvidas: altura e tempo. Comparando as duas taxas de variação da altura em relação ao tempo, observa-se que a primeira taxa, referente ao período 1960 – 1968 é maior que a segunda taxa referente ao período 1980 – 1988. O período de observação foi o mesmo, diferença de oito anos, usado para calcular as duas taxas, então a variável responsável por essa diferença foi a altura obtida pelos atletas.

(MANOEL, 2013) relata o advento de um novo estilo de salto, flop. Nessa época, responsável pelos melhores resultados dos saltadores. Essa técnica que foi utilizada na década de 60 e perdura até nossos dias, sendo que a maior diferença de comparação dos resultados, aconteceu naquele período próximo ao advento desse estilo de salto.

Um outro exemplo que explora o conceito de taxa de variação é apresentado abaixo segundo (HUGHES-HALLETT, 2005).

A quantidade em mg de um medicamento na corrente sanguínea no instante t, em minutos, é dada por $Q = 25 \cdot (0,8)^t$. Estimar a taxa de variação desta quantidade em $t = 3$ e o que representa essa resposta.

Para estimar a taxa de variação em $t = 3$, deve-se calcular a taxa de variação média, no intervalo $3 \leq t \leq 3,01$.

taxa de variação = $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{25 \cdot (0,8)^{3,01} - 25 \cdot (0,8)^3}{3,01 - 3} \approx -\,2,85 \text{ mg/min.}$

O valor encontrado para a taxa de variação foi negativo, o que significa dizer que a quantidade de medicamento no corpo após 3 minutos está diminuindo segundo uma taxa média de 2,85 mg por minuto.

No cálculo da taxa de variação referente a quantidade de certo medicamento em mg na corrente sanguínea em $t = 3$ minutos foi utilizado um valor de tempo posterior a $t = 3$

minutos, ou seja, $t = 3,01$ minutos. O valor utilizado poderia ser anterior a $t = 3$ minutos, ou seja, $t = 2,99$ minutos.

Assim, para estimar a taxa de variação em $t = 3$ deve-se calcular a taxa de variação média, no intervalo $2,99 \leq t \leq 3$.

taxa de variação = $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{25 \cdot (0,8)^3 - 25 \cdot (0,8)^{2,99}}{3 - 2,99} \approx -\,2,85$ mg/min.

Constatou-se que independentemente dos valores escolhidos de intervalo tempo, $3 \leq t \leq 3,01$ ou $2,99 \leq t \leq 3$, o resultado obtido para a taxa de variação foi o mesmo.

Conforme (MACHADO, 2008), sempre que se investiga grandezas que variam com o passar do tempo, podendo ser ou não na mesma proporção, debate-se um conteúdo muito intrigante no cálculo, que é a ideia de derivada. Considerando o estudo de uma grandeza variável, perguntas como, se ela cresce ou decresce, de maneira lenta ou rápida são inevitáveis. A ideia elementar de crescimento ou decrescimento, remete à proporcionalidade entre as variações de grandezas envolvidas, assunto que é discutido lá no ensino fundamental.

Imaginando a seguinte situação ocorrendo, conforme apresentado na Tabela 2 por (MACHADO, 2008).

Tabela 2 – Relação ocorrida entre as grandezas x e y.

x	1	2	3	...	101	102	...	1203	1204	...	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}+1$	...
y	5	10	15	...	505	510	...	6015	6020	...	$5\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}+5$	...

Fonte – (MACHADO, 2008)

De acordo com (MACHADO, 2008), quando proporção é apresentada no ensino fundamental, a essência é na razão $\dfrac{y}{x} = 5$ ou ainda $y = 5x$.

Observando os valores da Tabela 2, verifica-se, que quando x varia de 1, y varia de 5. Essa é a característica da proporcionalidade: (mais 1 em x) $\Rightarrow$ (mais tanto em y).

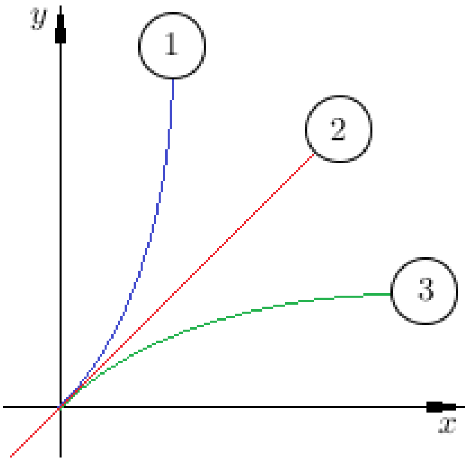
Segundo o autor, o termo declarado como esse "tanto" é o que se chama de taxa de variação de y em relação a x. Quando este for uma constante, o gráfico de $y = f(x)$ será uma reta. O que é fundamental nesse caso, é a relação entre a variação de x e a de y.

A relação entre as grandezas x e y pode e deve ser representada no plano cartesiano, escolhendo a variável independente sobre o eixo x e a variável dependente sobre o eixo y.

Conforme (MACHADO, 2008), na Figura 10, tem-se três configurações referentes ao crescimento das variações que ocorrem entre as grandezas envolvidas.

Na situação 1, ocorre uma taxa de crescimento da grandeza y em relação a grandeza x de

Figura 10 – Relação entre as grandezas x e y.



Fonte – (MACHADO, 2008)

maneira rápida, taxa crescente, ou seja, para uma unidade em x, a variação em y é superior a 1.

Na situação 3, ocorre uma taxa de crescimento da grandeza y em relação a grandeza x de maneira lenta, ou seja, cresce a uma taxa decrescente, para uma unidade em x, a variação em y é um valor entre 0 e 1.

Já na situação 2, a taxa de variação da grandeza y em relação a x cresce a uma taxa constante.

Por comparação com a situação 2, fica evidente que, neste caso, quando a curva estiver localizada na região superior, trata-se de uma taxa de crescimento rápida. Quando ocorrer da curva estiver localizada na região inferior, trata-se de uma taxa de crescimento lenta.

Considerando uma grandeza y dependente de outra x. Supondo que, quando a grandeza x varie de x_0 para x_1, a variável y variará de y_0 para y_1, a taxa de variação de y em relação a x será dada por:

$$\text{taxa de variação} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

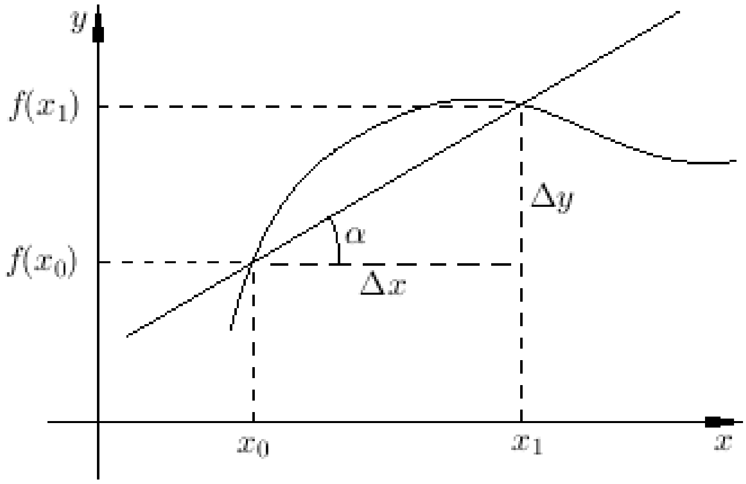
Apresenta-se para tal fenômeno descrito acima uma interpretação geométrica, conforme Figura 11 apresentado por (AQUINO, 2011). Considerando que y é uma função de x, ou seja, $y = f(x)$, a taxa de variação de y em relação a x será:

$$\text{taxa de variação} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = tg\ \alpha.$$

A taxa de variação corresponde à tangente do ângulo α, representado na Figura 11, isto é, determinar a taxa de variação, é equivalente a calcular coeficiente angular da reta secante ao gráfico de uma função nos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. Para determinação da equação dessa reta tem-se:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0). \tag{2.7}$$

Figura 11 – Gráfico referente a tangente do ângulo.



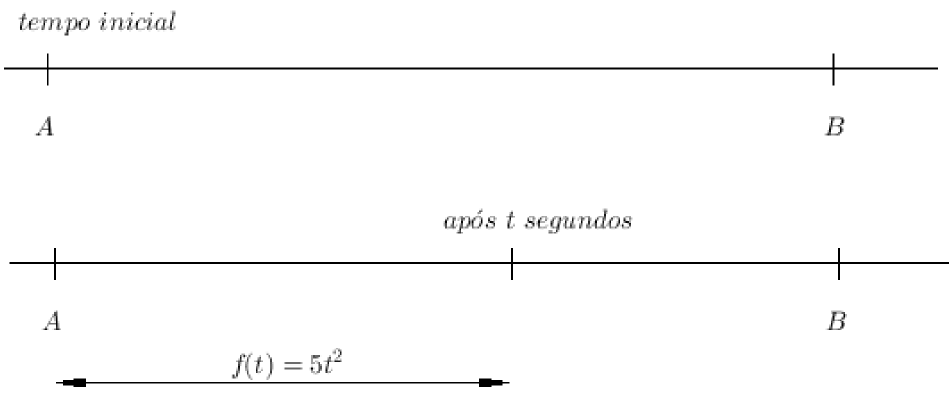
Fonte – (AQUINO, 2011)

onde m é o coeficiente angular da reta secante, e (x_0, y_0) as coordenadas do ponto onde a reta intersecta a função.

As informações dadas pela taxa de variação média não retratam com fidelidade o comportamento de uma função. Com o desejo de atingir esse objetivo, muitas vezes se faz necessário conhecer a taxa de variação em intervalos cada vez menores. O ideal é conhecer a taxa de variação em cada ponto, ou seja, a taxa de variação instantânea, que será apresentada, no exemplo abaixo, de acordo com (AQUINO, 2011).

Considere que um móvel, inicialmente em repouso no ponto A, desloca-se para o ponto B, de modo que, t segundos após deixar o ponto A, ele tenha percorrido $f(t) = 5t^2$ metros, conforme a Figura 12. Qual será a velocidade do móvel após 4 segundos?

Figura 12 – Deslocamento de um ponto material sobre uma trajetória.



Fonte – (AQUINO, 2011)

Aplicando a equação 2.3 para calcular a velocidade média, tem-se que:

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \\ &= \frac{80 - 76,05}{4 - 3,9} \\ &= 39,5 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \\ &= \frac{84,05 - 80}{4,1 - 4} \\ &= 40,5 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Pelos cálculos efetuados acima, parece coerente afirmar, que a velocidade no instante 4 s, seja igual a 40 m/s, mas não é suficiente essa conjectura. Ainda segundo (AQUINO, 2011), tem-se que:

A velocidade média no intervalo [t,4] será dada por:

$$v'_m = \frac{f(4) - f(t)}{4 - t}.$$

Já a velocidade média no intervalo [4,t] será dada por:

$$v''_m = \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}.$$

Observa-se que essas expressões são equivalentes:

$$v'_m = \frac{f(4) - f(t)}{4 - t} = -\frac{f(t) - f(4)}{-(t - 4)} = \frac{f(t) - f(4)}{t - 4} = v''_m.$$

Quando o valor de t estiver bem próximo de 4, a velocidade será dada pelo limite:

$$\begin{aligned} v &= \lim_{t \to 4} \frac{f(t) - f(4)}{t - 4} \\ &= \lim_{t \to 4} \frac{5t^2 - 5 \cdot 4^2}{t - 4} \\ &= \lim_{t \to 4} \frac{5t^2 - 80}{t - 4} \\ &= \lim_{t \to 4} \frac{5(t^2 - 16)}{t - 4} \\ &= \lim_{t \to 4} \frac{5(t - 4)(t + 4)}{t - 4} \\ &= \lim_{t \to 4} 5(t + 4) \\ &= 5 \lim_{t \to 4} (t + 4) \\ &= 5(4 + 4) \\ &= 40 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

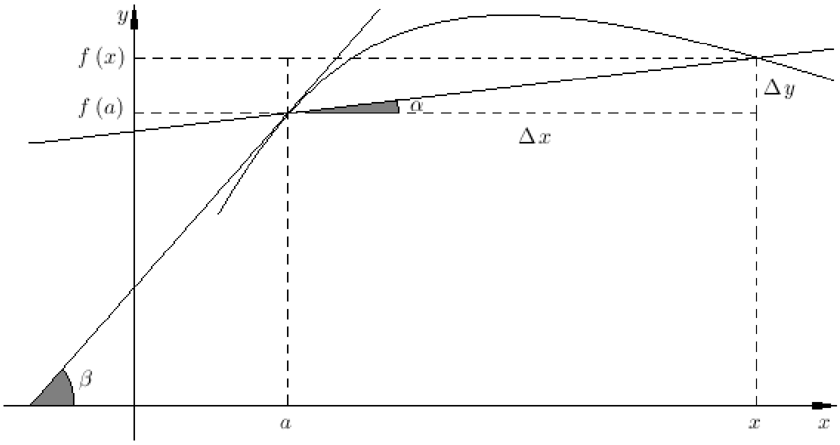
Considerando que uma grandeza y é uma função da grandeza x, ou seja, $y = f(x)$, tem-se que a taxa de variação instantânea de y no ponto $(a, f(a))$ será:

$$T_i(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{2.8}$$

Sabendo que $\Delta x = x - a$, e $\Delta y = f(x) - f(a)$ tem-se:

$$T_i(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\ \beta. \tag{2.9}$$

Figura 13 – Gráfico referente a tangente do ângulo.



Fonte – (AQUINO, 2011)

De acordo com (AQUINO, 2011), quando Δx tender a zero, haverá um deslocamento do ponto $(x\,,\ f(x))$ para o ponto $(a\,,\ f(a))$, ou seja, a reta secante que passa por esses dois pontos, aproxima-se de uma posição limite, que será caracterizado como a reta tangente no ponto $(a\,,\ f(a))$. Tudo isso ocorrendo, haverá uma aproximação do ângulo α para o ângulo β. O valor da taxa de variação instantânea, será equivalente ao coeficiente angular da reta tangente ao ponto $(a\,,\ f(a))$, conforme equação 2.9 e apresentada na Figura 13.

Uma vez determinado o coeficiente angular da reta tangente à função $y = f(x)$ em $(a\,,\ f(a))$, a equação da reta tangente será a mesma da equação 2.7, onde $(x_0\,,\ y_0)$ são as coordenadas do ponto, e m o coeficiente angular da reta tangente.

Um exemplo mais geométrico, seria determinar a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4x$, no ponto $(1\,,\ f(1))$, conforme é apresentado por (AQUINO, 2011).

Substituindo na função $f(x) = -x^2 + 4x$ a coordenada $x = 1$ do ponto, tem-se: $(x_0\,,\ y_0) = (1\,,\ 3)$.

Utilizando a equação 2.8, para descobrir o coeficiente angular, tem-se:

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(-x^2+4x)-((-1)^2+4\cdot(-1))}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(-x^2+4x)-3}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(-x^2+4x-3)}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-(x^2-4x+3)}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)(x-3)}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1}(-x+3)\\
&= 2.
\end{aligned}
$$

Substituindo os valores de $m = 2$ e $(x_0\,,\, y_0) = (1\,,\, 3)$ na equação 2.7, tem-se:

$$y - 3 = 2\cdot(x-1)$$

$$\Rightarrow \quad y = 2x+1.$$

A equação acima é a da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4x$, no ponto cuja abscissa é igual a 1.

Em uma outra situação, como no exemplo de (MUNEM; FOULIS, 1982), é apresentada a noção de taxa de variação média e instantânea.

O exemplo consiste no aquecimento de um cubo de metal que sofre uma expansão uniforme. Supondo a dimensão da aresta, passando de 2 cm para 2,01 cm, para calcular a taxa de variação média do seu volume V em relação a sua aresta x, se faz, necessário o seguinte desenvolvimento:

taxa de variação $=\dfrac{\Delta V}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \dfrac{2,01^3-2^3}{2,01-2} \approx 12,06\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{cm}.$

Para encontrar a taxa de variação instantânea do volume em relação a sua aresta, se faz necessária uma menor variação das medidas da arestas. A variação sofrida será igual a Δx, ou seja, de 2 para $2+\Delta x$ cm. A taxa de variação instantânea será dada por:

$$
\begin{aligned}
\text{taxa de variação instantânea} &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(2+\Delta x)^3-2^3}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{8+12\cdot\Delta x+6\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-8}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

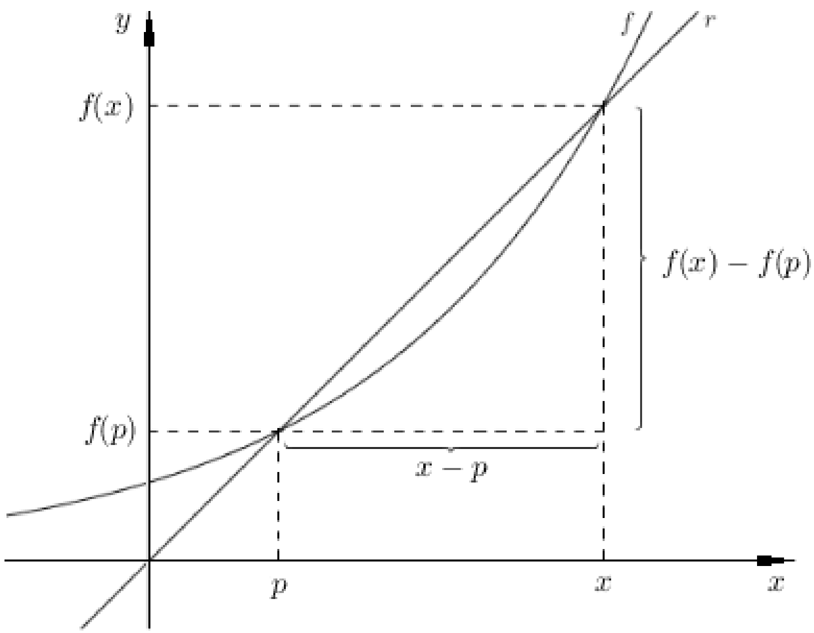
$$
\begin{aligned}
\text{taxa de variação instantânea} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12 \cdot \Delta x + 6 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} [12 + 6 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] \\
&= 12\text{cm}^3/\text{cm}.
\end{aligned}
$$

No Cálculo esse tipo de limite é bastante comum, e recebe o nome de derivada.

2.3.2 NOÇÃO PRELIMINAR DE DERIVADA

Considere o problema de definir reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p\,,\,f(p))$. Conhecido o coeficiente angular dessa reta tangente, sua determinação fica definida. Verificando, então, a reta r, secante ao gráfico de $f(x)$, que passa pelos pontos $(p\,,\,f(p))$ e $(x\,,\,f(x))$, conforme a Figura 14, no qual o coeficiente angular da reta r é dado por $\dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$.

Figura 14 – Coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f em $(p\,,\,f(p))$ e $(x\,,\,f(x))$.



Fonte – (GUIDORIZZI, 2000)

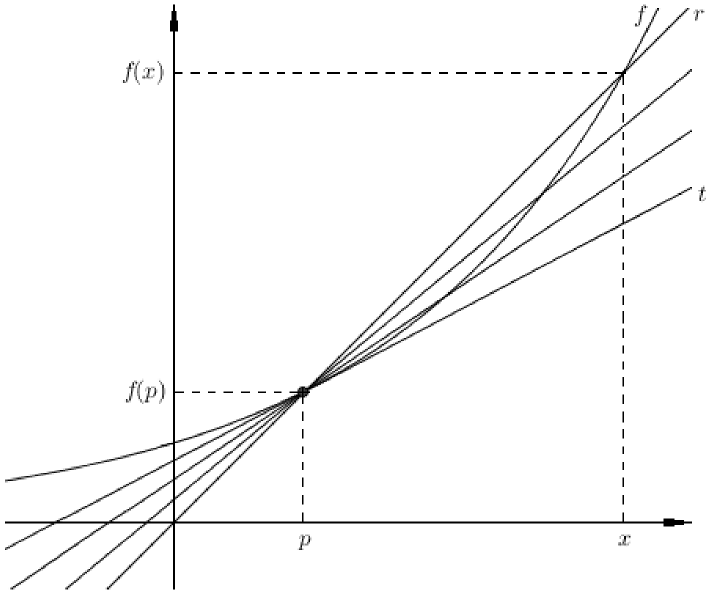
Segundo (GUIDORIZZI, 2000), quando x tende a p, o coeficiente angular da reta r tende $f'(p)$, onde

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}. \tag{2.10}$$

Esse tipo de limite da equação 2.10, sendo $f(x)$ uma função e p a abscissa do ponto pertencente ao seu domínio, ocorrem de modo natural tanto na geometria como na física, sendo que, $f'(p)$ é somente uma notação para indicar o valor do limite. Conforme x vai se aproximando de p, a reta secante r vai assumindo determinadas direções, até atingir um valor limite, que será a reta t, tangente a função $f(x)$ no ponto $(p\,,\ f(p))$ de equação 2.11, conforme a Figura 15.

$$y - f(p) = f'(p)(x - p). \tag{2.11}$$

Figura 15 – Reta tangente no ponto $(p\ , f(p))$.



Fonte – (GUIDORIZZI, 2000)

2.3.3 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

Segundo (GUIDORIZZI, 2000), o limite da expressão 2.10, quando existe, e é finito, é conhecido como derivada de f em p e indicado por $f'(p)$ (leia: f linha de p).

Se a função admite derivada em p, então diz-se que f é derivável ou diferenciável em p. Diz-se que f é derivável ou diferenciável, se em cada ponto do domínio dessa função a derivada existir.

Uma outra maneira da equação 2.10 ser escrita é apresentada logo abaixo.

Fazendo $h = x - p$, tem-se que, quando x tende a p, então, h tende a zero, resultando em:

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}. \tag{2.12}$$

As equações 2.10 e 2.12 são equivalentes para definição da derivada de f em p.

2.3.4 NOTAÇÕES PARA A DERIVADA

A derivada foi introduzida praticamente na mesma época por Newton e Leibniz. Segundo (MUNEM; FOULIS, 1982)

A derivada foi criada independentemente por Isaac Newton e Gottfried Leibniz no século XVII. Newton usou a notação $\dot{s}$ para denotar a taxa de variação no tempo $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ de uma quantidade variável s, onde $s = f(t)$. Assim, Newton escreveu $\dot{s}$ para o que se escreve hoje como $f'(t)$, o valor da derivada f' no tempo t.

Já Leibniz, idealizando que o valor numérico da derivada é o limite de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, escrito como $\dfrac{dy}{dx}$, isto é, $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

A notação f' para derivada da função f, foi introduzida pelo matemático italiano Joseph Louis Lagrange no século XVIII.

Além de f', $\dfrac{dy}{dx}$, as derivadas podem outras representações, tais como, y', $\dfrac{d}{dx}f$, ou ainda, $D_x y$.

A derivada da função $y = f(x)$ em relação a x segundo Leibniz é dada por $\dfrac{dy}{dx}$ (leia: derivada de y em relação a x). É bom salientar que a notação $\dfrac{dy}{dx}$ não deve ser vista como uma fração em que numerador dy e denominador dx são dados com significados independentes como vai ser visto em seguida.

2.3.5 QUOCIENTE DIFERENCIAL

Foi abordado anteriormente $\dfrac{dy}{dx}$ como uma simples notação para a derivada de $y = f(x)$, ou seja, *dx* e *dy* não tem significado independente. O que se prentende a seguir é interpretar $\dfrac{dy}{dx}$ como um quociente entre dois incrementos.

De acordo com (GUIDORIZZI, 2000), *dx* será designado como um incremento em *x*, para então, encontar uma interpretação para o incremento *dy*.

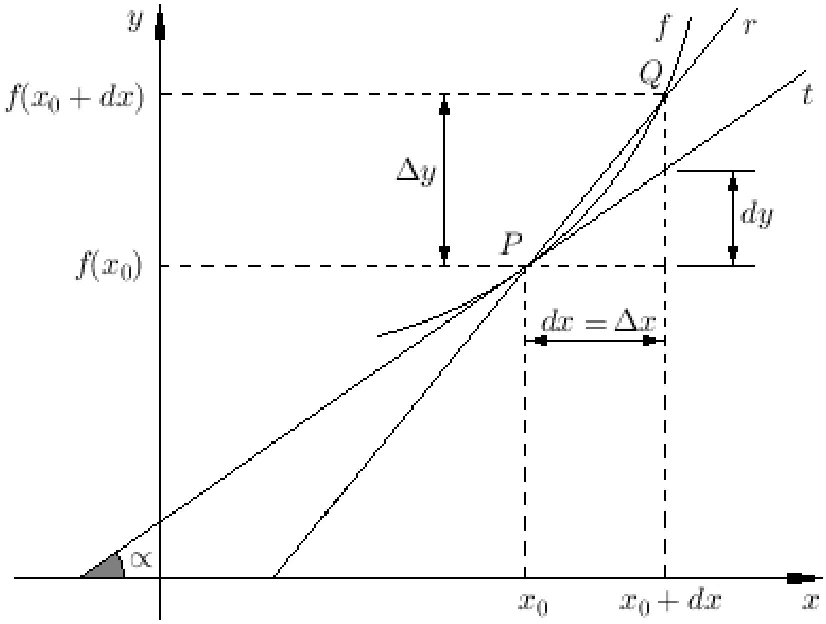
Sabe-se que o coeficiente angular da reta tangente t no ponto $P(x_0\,,\ f(x_0))$ é $f'(x_0)$, ou que $f'(x_0) = tg\,\alpha$, resultando $f'(x_0) = \dfrac{dy}{dx}$. Como dy está sendo considerado um acréscimo na ordenada da tangente t, então dx corresponde ao acréscimo em x, resultando em $dy = f'(x_0)\,dx$, conforme ilustrado na Figura 16.

Verifica-se que $\Delta y = f(x_0 + dx) - f(x_0)$ é o acréscimo causado pela função quando x_0 passou para $x_0 + dx$. Observa-se na Figura 16, que $dx = \Delta x$, e que $dy \neq \Delta y$.

Conforme (GUIDORIZZI, 2000), o acréscimo dy é um valor aproximado para Δy. O erro existente, $\Delta y - dy$, ocorre devido aproximação de Δy por dy será tanto menor quanto menor for dx.

Fixado ponto $P(x_0\,,\ f(x_0))$, a curva fica muito próxima da reta tangente t nas proximidades do ponto de tangência, ou seja, para x, muito próximo de x_0, o valor de $f(x)$ estará próximo do valor da ordenada do ponto de mesma abscissa x, mas que se encontra na reta tangente t.

Figura 16 – Deslocamento de um ponto material sobre uma trajetória.



Fonte – (GUIDORIZZI, 2000)

Assim, quando dx é bastante pequeno, obtém-se uma aproximação razoável por falta ou por excesso para o valor de:

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + dy$$

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0)\, dx$$

$$f(x_0 + dx) - f(x_0) \approx f'(x_0)\, dx \tag{2.13}$$

De acordo com (GUIDORIZZI, 2000), definido x, pode-se olhar o gráfico e dizer que a função que representa a reta t é uma função afim, e que a cada $dx \in \mathbb{R}$, associa $dy \in \mathbb{R}$, onde $dy = f'(x)\, dx$. Essa função é denominada de diferencial de f em x, ou ainda, de diferencial de $y = f(x)$.

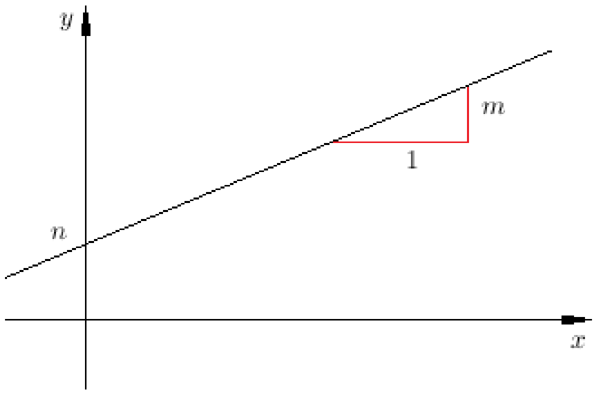
O valor aproximado da derivada de qualquer função, pode ser determinado com o uso de uma simples calculadora. Mas, mesmo geometricamente é possível ter uma noção. Se a variação entre as grandezas envolvidas for constante, tem-se o gráfico de uma uma função afim, $f(x) = mx + n$, conforme apresentado na Figura 17:

Se a variação entre as grandezas envolvidas não for constante, tem-se o gráfico de uma função diferentemente de uma função afim, que está representado na Figura 18.

De acordo com (MACHADO, 2008), a derivada da função $f(x)$ no ponto de abscissa x_0 pode ser estimada pela expressão:

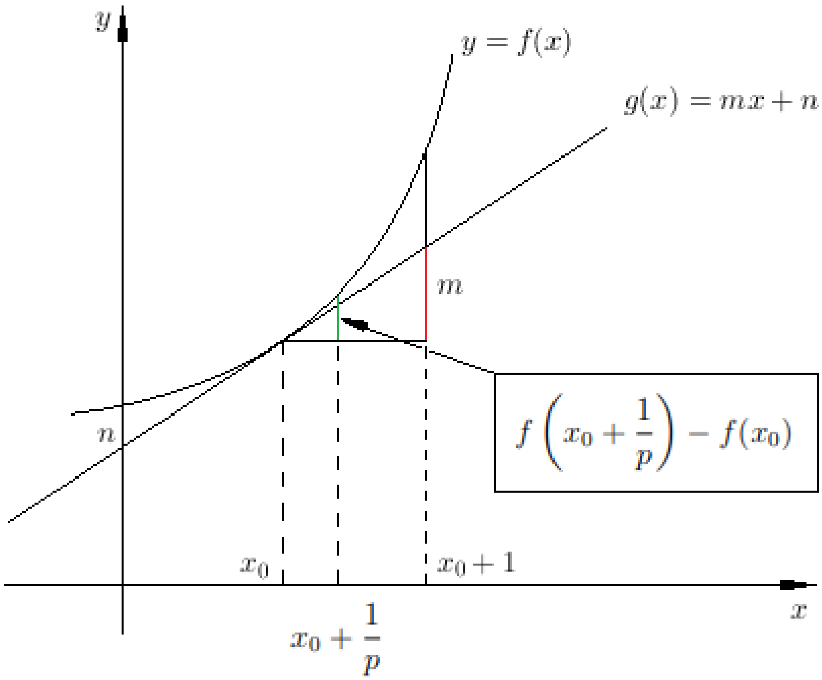
$$m \approx \left[f\left(x_0 + \frac{1}{p} \right) - f(x_0) \right] \cdot p\,. \tag{2.14}$$

Figura 17 – Gráfico de uma função afim.



Fonte – (MACHADO, 2008)

Figura 18 – Gráfico de uma função diferente da afim.



Fonte – (MACHADO, 2008)

Esta expressão pode ser obtida aplicando semelhança entre triângulos apresentados na Figura 18:

$$\frac{\frac{1}{p}}{f\left(x_0 + \frac{1}{p}\right) - f(x_0)} \approx \frac{1}{m}$$

$$m \cdot \frac{1}{p} \approx f\left(x_0 + \frac{1}{p}\right) - f(x_0)$$

$$m \approx \left[f\left(x_0 + \frac{1}{p}\right) - f(x_0) \right] \cdot p\,.$$

O resultado encontrado é o mesmo da equação 2.14.

Um exemplo de como achar a derivada com o uso da calculadora é apresentado por (MACHADO, 2008). Consiste em determinar qual o valor de $f'(3)$ quando $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$.

A resolução convencional é derivar a função $f(x)$, obtendo assim $f'(x)$, para depois calcular $f'(3)$.

Com o uso da calculadora, pode-se determinar diretamente o valor $f'(3)$. Considerando o valor de p igual a 1000, calcula-se primeiro $f\left(x_0 + \frac{1}{p}\right)$:

$$\begin{aligned} f\left(x_0 + \frac{1}{p}\right) &= f\left(3 + \frac{1}{1000}\right) \\ &= f(3,001) \\ &= \sqrt{3,001^3 + 3 \cdot 3,001^2 + 2 \cdot 3,001 + 1} \\ &\approx 7,81326. \end{aligned}$$

Agora calcula-se $f(3)$:

$$\begin{aligned} f(3) &= \sqrt{3^3 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1} \\ &\approx 7,81025. \end{aligned}$$

Para finalizar calcula-se:

$$\begin{aligned} f'(3) &\approx \left[f\left(3 + \frac{1}{1000}\right) - f(3) \right] \cdot 1000 \\ &\approx (7,81326 - 7,81025) \cdot 1000 \\ &\approx 3,01. \end{aligned}$$

O valor encontrado anteriormente representa uma aproximação da derivada da função $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$, no ponto de abscissa 3, ou ainda a taxa de variação da função f em relação a variável x no ponto de abscissa 3. Nesse ponto, cuja as coordenadas são $(3\,;\,7,81)$ aproximadamente, o coeficiente angular da reta tangente vale aproximadamente $3,01$, ou seja, para cada unidade na direção x a varião na direção y é de aproximadamente $3,01$.

2.4 VÉRTICE DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Quando se estuda os elementos de uma função quadrática no primeiro ano do ensino médio, como por exemplo, as coordenadas do vértice, se faz a demonstração por processos algébricos fundamentados na fórmula de Bháskara, ou ainda por processos algébricos concomitantes com a geometria analítica.

A função quadrática, na sua forma geral, é escrita como $f(x) = ax^2 + bx + c$. Para obter as raízes reais, se existir, dessa função, pode-se aplicar a fórmula de Bháskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

As raízes resultantes serão:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A coordenada do vértice na direção x é o ponto médio dessas duas raízes, cujo valor é apresentado na equação 2.15.

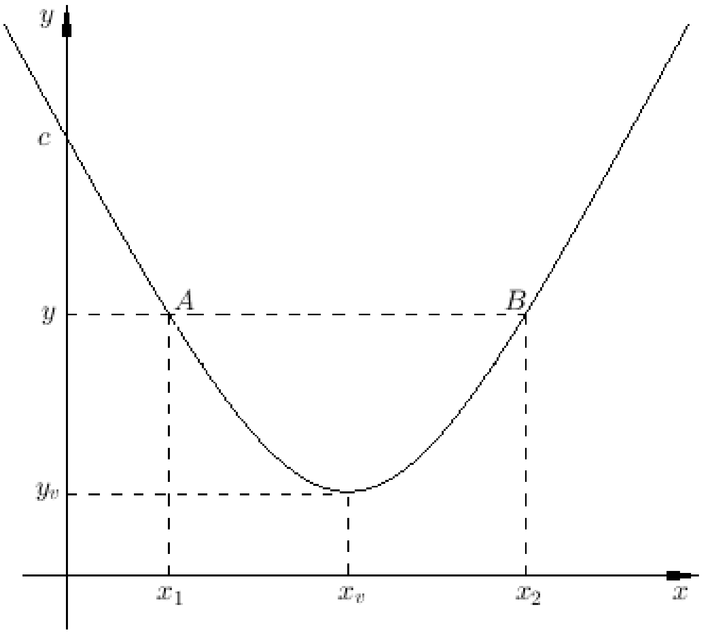
$$\begin{aligned}
& x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \\
\Rightarrow \quad & x_v = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2) \\
\Rightarrow \quad & x_v = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \\
\Rightarrow \quad & x_v = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-2b}{2a} \right) \\
\Rightarrow \quad & x_v = -\frac{b}{2a}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Substituindo o valor de x_v na função $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtém-se a coordenada de y do vértice, cujo valor é apresentado na equação 2.16:

$$\begin{aligned}
& y_v = a \cdot \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a} \right) + c \\
\Rightarrow \quad & y_v = a \cdot \left(\frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{2a} + c \\
\Rightarrow \quad & y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\
\Rightarrow \quad & y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \\
\Rightarrow \quad & y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\
\Rightarrow \quad & y_v = \frac{-\left(b^2 - 4ac\right)}{4a} \\
\Rightarrow \quad & y_v = -\frac{\Delta}{4a}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Obtém-se assim, as coordenadas do vértice nas direções x e y, utilizando processos algébricos e também a fórmula de Bháskara.

Figura 19 – Gráfico de uma função quadrática.



Fonte – Adaptado de (SOUSA et al., 2013)

Uma outra maneira de se obter as coordendas do vértice é relacionando processos algébricos com a geometria analítica.

O gráfico de uma função quadrática é apresentado na Figura 19.

As coordenadas dos pontos A e B são respectivamente $(x_1\,,\,y)$ e $(x_2\,,\,y)$. Pelo vértice, cuja as coordenadas são $(x_v\,,\,y_v)$, passa um reta paralela ao eixo y, a qual é chamada eixo de simetria da parábola. Como os pontos A e B possuem a mesma coordenada na direção y, e que em relação ao eixo de simetria, a distância do ponto *A* ao vértice na direção x é igual a distância do ponto *B* ao vértice também na direção x.

$$x_v - x_1 = x_2 - x_v$$

$$\Rightarrow \quad x_v + x_v = x_1 + x_2$$

$$\Rightarrow \quad 2x_v = x_1 + x_2\,. \tag{2.17}$$

Sabe-se que:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad ax_1^2 + bx_1 + c = ax_2^2 + bx_2 + c$$

$$\Leftrightarrow \quad ax_1^2 - ax_2^2 + bx_1 - bx_2 + c - c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a\left(x_1^2 - x_2^2\right) + b\,(x_1 - x_2) = 0\,. \tag{2.18}$$

Visualizando a Figura 19, verifica-se que $x_1 \neq x_2$, então $(x_1 - x_2) \neq 0$, logo, a equação 2.18 pode ser dividida por $(x_1 - x_2)$.

Assim, tem-se:

$$\frac{a\,(x_1 - x_2)\,(x_1 + x_2) + b\,(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a\,(x_1 + x_2) + b = 0\,. \tag{2.19}$$

Substituindo a equação 2.17 na equação 2.19, chega-se ao resultado da equação 2.15:

$$a \cdot 2x_v + b = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2x_v = -\frac{b}{a}$$
$$\Rightarrow \quad x_v = -\frac{b}{2a}.$$

O valor de y_v poderá ser encontrado substituindo o valor de x_v na função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Um outro processo para obtenção das coordenadas do vértice é a utilização da primeira derivada da função. Segundo (SOUSA et al., 2013), a abscissa x_0 será classificada como um ponto crítico da função $f(x)$, se $f'(x_0) = 0$ ou se $f'(x_0)$ não existir. Considerando que $f'(x_0)$ exista, e, se a reta tangente à função $f(x)$ no ponto de abscissa x_0 tiver inclinação nula, então, essa reta será horizontal. Assim, esse ponto será o vértice da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, cuja abscissa será denotada por x_v e obtida por $f'(x) = 0$.

Em uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$, o seu vértice será chamado de ponto crítico, podendo ser um ponto de máximo ou um ponto de mínimo.

A derivada da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ será:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\,(x + \Delta x)^2 + b\,(x + \Delta x) + c - (ax^2 + bx + c)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\,(x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x) + bx + b\Delta x + c - ax^2 - bx - c}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax^2 + 2ax\Delta x + a\Delta^2 x + bx + b\Delta x + c - ax^2 - bx - c}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2ax\Delta x + a\Delta^2 x + b\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 2ax + a\Delta x + b$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 2ax + b.$$

Fazendo $f'(x) = 0$ obtem-se o valor conforme equação 2.15, que se refere à coordenada na direção x do vértice.

$$
\begin{aligned}
& 2ax + b = 0 \\
\Rightarrow \quad & 2ax = -b \\
\Rightarrow \quad & x = -\frac{b}{2a}.
\end{aligned}
$$

O valor de y_v poderá ser encontrado substituindo o valor de x_v na função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

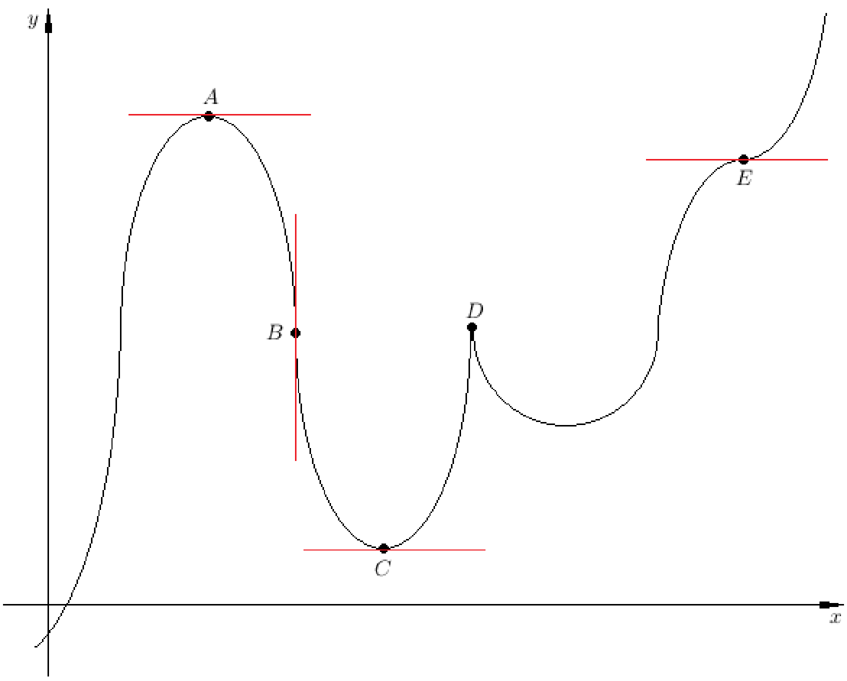
É sempre bom frisar que o vértice de uma função quadrática é um ponto crítico, onde a função muda seu comportamento com relação ao seu crescimento e decrescimento.

Generalizando, esse ponto crítico pertencerá ao domínio da função onde a primeira derivada é nula ou não está definida.

Esses pontos críticos podem ser de máximo ou mínimo relativos, ponto de inflexão mediante análise da segunda derivada, ou ainda, pontos onde a primeira derivada não existe.

Analisando a ilustração da Figura 20, são apresentados alguns pontos críticos. O ponto A é um ponto de máximo relativo, o ponto C será de mínimo relativo, enquanto o ponto E é um ponto de inflexão, onde ocorre a mudança de concavidade. Nesses três pontos tem-se que $f'(x) = 0$, ou seja, por esses pontos a reta tangente é horizontal. Já os pontos B e D não apresentam derivada.

Figura 20 – Pontos críticos.



Fonte – Adaptado de (STEWART, 2013)

Para a avaliação do vértice, é fundamental saber o sinal da primeira derivada da função. O valor de x do ponto crítico é obtido, quando se faz a primeira derivada da função igual a zero, ou seja, $f'(x) = 0$.

Uma vez obtido esse valor crítico na direção x, denotado por x_v convém analisar o sinal de $f'(x)$, e as seguintes situações podem ocorrer. Se para $x < x_c$ ocorrer $f'(x) < 0$ e para $x > x_c$ ocorrer $f'(x) > 0$, então, o ponto crítico será um ponto de mínimo relativo. Se para $x < x_c$ ocorrer $f'(x) > 0$ e para $x > x_c$ ocorrer $f'(x) < 0$, então, o ponto crítico será um ponto de máximo relativo.

3 CALCULUS MADE EASY (CÁLCULO TORNADO FÁCIL)

Segundo (MIRANDA, 2004), durante o século XIX, discussões da forma como conteúdos matemáticos deveriam ser repassados influenciavam a maneira de como esses seriam apresentados em livros didáticos. É, justamente nessa época, que Silvanus Thompson, um estudioso graduado em engenharia elétrica, apresenta o livro *Calculus Made Easy*, em 1910. Thompson utilizava uma abordagem intuitiva e direta, com a ideia de desmistificar algumas barreiras que os alunos encontravam no aprendizado do Cálculo. Esse livro acabou não sendo reconhecido pela comunidade matemática, pois a obra abdicava do rigor e formalismo no ensino do Cálculo. Apesar disso, o livro teve bastante seguidores, tendo sido reeditado em 1914, 1919, 1945 e em 1998.

Conforme (MIRANDA, 2004), o inglês Silvanus Thompson, nasceu na cidade de York em 1851, engenheiro eletricista de formação, exerceu a presidência da instituição de engenheiros eletricistas da Inglaterra, tornou-se, em 1891, membro da *Royal Society*. Também foi diretor e professor do *Finsbury Technical College*. A obra acadêmica de Thompson está mais voltada à manuais de eletricidade, ótica e magnetismo, além de livros técnicos.

Segundo (MIRANDA, 2004), a grande preocupação de Thompson era com o ensino técnico, pois acreditava que os trabalhadores deveriam ter princípios científicos para trabalhar de forma eficaz e inteligente e assim conseguiriam competir com trabalhadores de outras nações, já que se vivia na época a efervescência das consequências da revolução industrial.

Ainda segundo (MIRANDA, 2004), Thompson era profícuo palestrante e excelente professor, que empregava uma linguagem clara, intuitiva e divertida, fazendo-se compreender e se tornando bastante popular. *Calculus Made Easy*, cujo subtĩtulo em inglës é *Being a very-simplest introduction to those beautiful methods of reckoning which are generally called by the terrifying names of the differential and the integral calculus* [1], despertou a interesse dos alunos no aprendizado do Cálculo e também críticas e desprezo de muitos matemáticos na época. Apesar disso, a obra foi reeditada várias vezes, sendo que, revisões foram feitas para adequações de expressões utilizadas no livro original as realidades da reedição. Mesmo com todo o sucesso de aprovação entre os estudantes, a obra não foi declarada como um texto de Matemática, e sim um intruso no assunto. Segundo (D'AMBRÓSIO, 2013), o próprio Thompson no epílogo do livro afirma que:

> Pode-se ter certeza que quando esse tratado $Calculus\ Made\ Easy$ [Cálculo Tornando Fácil] cair nas mãos de matemáticos profissionais, eles (se não forem muito preguiçosos) se levantarão como um só homem, e dirão que o livro é péssimo. ...Uma

[1] Em tradução livre: Sendo uma introdução muito simples aos belos métodos de avaliação que geralmente são chamados pelos apavorantes nomes de Cálculo Diferencial e Cálculo Integral

> outra coisa aqueles que se dizem matemáticos dirão sobre esse livro inteiramente ruim e pernicioso: a razão pelo qual ele é tão fácil é porque o autor deixou de lado todas as coisas que realmente são difíceis. E o fato chocante sobre essa acusação é que – é verdade! Essa de fato é a razão por que esse livro foi escrito – escrito para uma legião de inocentes que já foram desencorajados de adquirir os elementos do Cálculo pela maneira estúpida como seu ensino é quase sempre apresentado. Qualquer assunto pode se tornar repulsivo se for apresentado destacando as suas dificuldades.

Conforme (MIRANDA, 2004), o estilo informal e intuitivo em que o livro se apresentava era um indício que essa obra não seria bem aceita pela comunidade Matemática na época. Nesse período, a Matemática passava por uma tensão no que diz respeito aos seus fundamentos: o cuidado com os métodos, o formalismo, a indagação dos matemáticos sobre as bases de sua ciência, sendo que alguns pretendiam a eliminação dos poderes da intuição.

Segundo (MIRANDA, 2004), pouquísimos registros existem sobre as críticas feitas à obra de Silvanus Thompson, o que leva a crer que o livro foi ignorado pela comunidade Matemática, já que Silvanus Thompson não era matemático, e seu livro diferenciava-se muito em relação aos outros autores.

De acordo com (MIRANDA, 2004), muitos anos mais tarde, estudiosos e pesquisadores demostraram interesse na obra de Silvanus Thompson, pois perceberam que o livro se mostrava interessante para os iniciantes no Cálculo. Esse é o caso de Martin Gardner, entusiasta, estudioso e personalidade do culto da Matemática recreativa, o qual fez um comparativo da obra de Thompson e os demais livros indicados ao ensino do Cálculo.

Segundo (MIRANDA, 2004):

> Muitos esforços similares foram feitos, tais como os livros: *Calculus for the Pratical Man, The ABC of Calculus, What is Calculus, About?, Calculus the Easy Way e Simplifield Calculus*. Eles são ou muito elementares, ou muito avançados. Thompson assume um feliz meio termo. É verdade que seu livro está fora de uso, é intuitivo e tradicionalmente orientado. Porém, nenhum autor jamais escreveu sobre o Cálculo com tanta clareza e humor.

Segundo (MIRANDA, 2004), Silvanus Thompson tinha em mente propósitos peculiares e que não foram percebidos em sua época. Pretendia atender aos alunos principiantes, desejava oferecer um curso de Cálculo em que está inserido a pedagogia da desmistificação e conceitos elementares do assunto. Segundo (D'AMBRÓSIO, 2013), a estratégia era a de familiarização do estudante com as ideias ilustradas por exemplos simples.

Como já foi abordado anteriormente, o pensamento de Thompson era desmistificar as ideias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral, e para tanto, ele utilizava uma linguagem informal e até descontraída para apresentação dos conteúdos do Cálculo. Essa forma era um contraponto de como o Cálculo era ensinado, uma crítica, um questionamento de como era ofertado, o formalismo, o rigor com os métodos matemáticos e o ensino do Cálculo na época.

3.1 NOÇÕES DO CÁCULO DIFERENCIAL SEGUNDO THOMPSON

A revista Cálculo (THOMPSON, 2013b) traz a partir da edição 31, traduções dos capítulos da obra *Calculus Made Easy* de Silvanus Thompson. O autor, primeiramente, aborda o significado dos principais símbolos do Cálculo de maneira bastante informal, que são d atribuído à derivada e $\int$ atribuído à integral.

O autor cita que d significa "um pouquinho de". Assim dx significa "um pouquinho de x", o que difere do significado "um elemento de" que muitos matemáticos utilizam. Já, para $\int$, o autor cita como "a soma de", então, $\int dx$ significa "a soma de todos os pouquinhos de x", contrastando com o termo "a integral".

Neste trabalho será dada ênfase à abordagem feita por Silvanus Thompson sobre derivada.

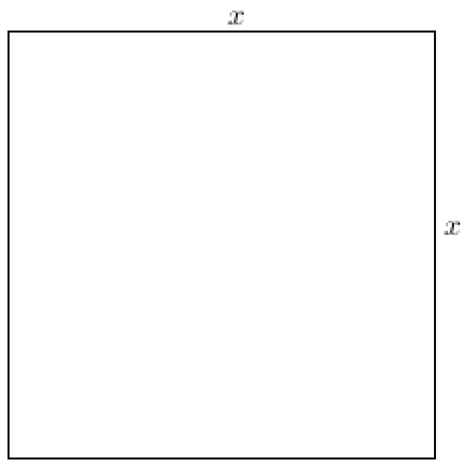
O autor se refere a graus distintos de pequenez, que aparecerão no processo do Cálculo, ou seja, quantidades pequenas de vários graus de pequenez. Segundo (THOMPSON, 2013b), um caso familiar é a comparação do minuto em relação à hora. Sabe-se que 1 minuto equivale $\frac{1}{60}$ da hora. Agora, se for comparado o segundo em relação à hora, tem-se que 1 segundo equivale $\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60}$ da hora, ou seja, $\frac{1}{3600}$ da hora. Essa segunda comparação, do segundo em relação à hora, o autor cita como "segunda ordem de pequenez", "segunda ordem de magnitude" ou ainda como "segunda ordem de grandeza". A comparação entre o minuto e o dia é bastante pequena e menor ainda será a comparação entre o segundo e o dia, ou seja, será insignificante. Em situações como essas, Silvanus Thompson despreza as quantidades insignificantes perante aos demais valores. Essas quantidades desprezadas são aquelas que foram rotuladas pelo autor como "segunda ordem de pequenez", ou ainda, "terceira ordem de pequenez" e assim por diante...

De acordo com (THOMPSON, 2013b), é importante salientar que as pequenas quantidades que aparecem multiplicadas por outros fatores, não tão pequenas em uma expressão matemática, resultam em valores que, talvez, não possam ser desprezadas, devido às suas magnitudes. Pode-se dizer que dx é uma pequena porção de x, e relativamente pequena, mas que seria incorreto afirmar que $x \cdot dx$ ou $x^3 \cdot dx$, ou ainda, $k^x \cdot dx$ como sendo desprezíveis.

Como exemplo apresentado por (THOMPSON, 2013b), de uma quantidade x qualquer, que sofre um pequeno incremento dx, passando a ser $x + dx$. O quadrado deste valor, $(x + dx)^2$, passará a ser $x^2 + 2x \cdot dx + (dx)^2$. Estaria incorreto desprezar o segundo termo dessa expressão, pois na realidade esse valor é uma quantidade de primeira ordem, enquanto, o terceiro termo dessa expressão é de segunda ordem de pequenez. Assim, considerando dx como sendo $\frac{1}{60}$ de x, então, o segundo termo da expressão seria $\frac{2}{60}$ de x^2, enquanto o terceiro termo dessa expressão seria $\frac{1}{3600}$ de x^2. Observando os valores encontrados na expressão verifica-se que a magnitude do segundo termo é mais relevante que a do terceiro termo. Se fosse fixado um outro valor para dx, de menor magnitude, por exemplo, $\frac{1}{1000}$ de x, o segundo termo resultaria em $\frac{2}{1000}$ de x^2, enquanto o terceiro termo teria a minúscula magnitude de $\frac{1}{1000000}$ de x^2. Nos dois exemplos citados, se tivesse que desprezar um determinado valor, este seria o terceiro termo.

Uma outra situação é apresentada por (THOMPSON, 2013b). A função $f(x) = x^2$, que geometricamente equivale à área da superfície de um quadrado, cuja medida do lado é igual a x é apresentada na Figura 21. Essa função é contínua e crescente para $x \geq 0$. Quando se adiciona dx à medida do lado do quadrado, haverá um crescimento em y de magnitude dy, conforme Figura 22, lembrando que dx será um valor muito pequeno.

Figura 21 – Quadrado com medida do lado igual a x.



Fonte – (THOMPSON, 2013b)

$$y + dy = (x + dx)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad y + dy = x^2 + 2x \cdot dx + (dx)^2$$

$$\Rightarrow \quad dy = 2x \cdot dx + (dx)^2.$$

Nesta passagem Silvanus Thompson desconsidera $(dx)^2$, pois se trata de uma quantidade de segunda ordem de magnitude, resultando na expressão:

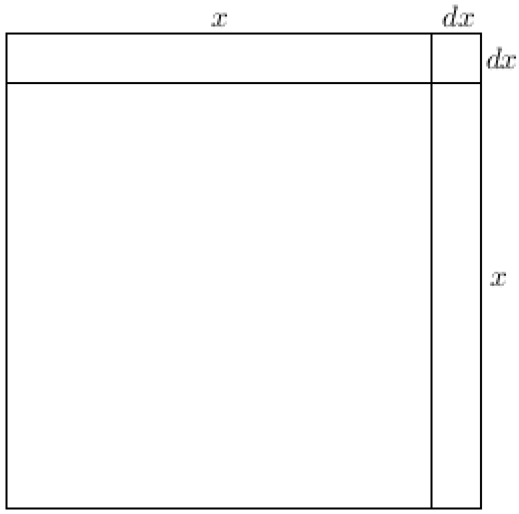
$$dy = 2x \cdot dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x.$$

O valor acima obtido por Silvanus Thompson é o mesmo encontrado na equação 2.2 de Geraldo Ávila.

A área do quadrado da Figura 21 era de x^2 e a área da Figura 22 passou a ser $(x + dx)^2$. Esse valor encontrado é referente a soma da área do quadrado original, x^2, com as áreas de dois retângulos, $2x \cdot dx$ e também com a área do pequeno quadrado, $(dx)^2$.

Figura 22 – Quadrado com medida do lado igual a $x + dx$.



Fonte – (THOMPSON, 2013b)

Na tabela 3 são apresentados valores referentes à medida do lado do quadrado que, nesse caso considera-se igual a 4; o acréscimo sofrido da medida desse lado, dx; os elementos do trinômio quadrado perfeito que são: x^2, $2x \cdot dx$ e $(dx)^2$; o resultado $(x + dx)^2$; o acréscimo sofrido da área dy, bem como a razão incremental $\dfrac{dy}{dx}$.

Observa-se que na medida em que o valor de dx se torna cada vez menor, o valor atribuído a $(dx)^2$ também diminui de forma vertiginosa, valor esse denominado por Silvanus Thompson como “segunda ordem de pequenez”. Se for comparado os valores de dx e $(dx)^2$, percebe-se uma grande variação, pois são termos de “ordem de pequenez” distintos, ou seja, segundo Silvanus Thompsom o valor de $(dx)^2$ poderia ser desprezado.

Então, a equação $y + dy = x^2 + 2x \cdot dx + (dx)^2$ ficou como $dy = 2x \cdot dx$, resultando em $\dfrac{dy}{dx} = 2x$. Convém lembrar que o resultado encontrado $\dfrac{dy}{dx}$ é igual ao semiperímetro do quadrado, ou seja, igual a $2 \cdot 4 = 8$. Na tabela, observa-se que a coluna referente a $\dfrac{dy}{dx}$ vai se aproximando de 8, na medida que dx tende a zero.

Convém salientar que a notação para incremento adotado por Thompson em sua época, dx, difere da notação de incremento adotado pelos matemáticos atualmente, Δx.

Segundo (THOMPSON, 2013b), atualmente os matemáticos chamam de *infinitésimos* uma variável cujo limite é zero, sendo que esse geralmente é encontrado por meio de acréscimos em funções.

Tabela 3 – Razão $\dfrac{dy}{dx}$

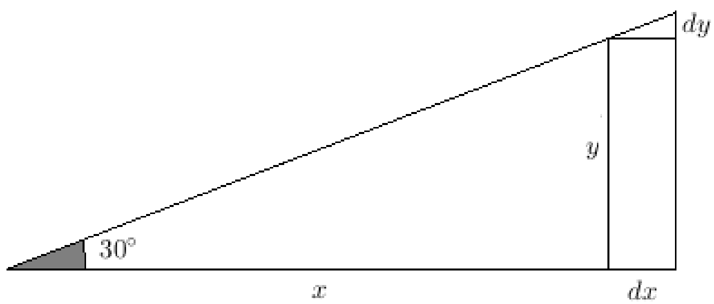
x	dx	x^2	$2x \cdot dx$	$(dx)^2$	$(x+dx)^2$	$dy = (x+dx)^2 - x^2$	$\dfrac{dy}{dx}$
4	0,1	16	0,8	0,01	16,81	0,81	8,1
4	0,01	16	0,08	0,0001	16,0801	0,0801	8,01
4	0,001	16	0,008	0,000001	16,008001	0,008001	8,001
4	0,0001	16	0,0008	0,00000001	16,00080001	0,00080001	8,0001

Fonte – Adaptado de (THOMPSON, 2013a)

O autor mostra, através de exemplos corriqueiros, a relação de dependência, que pode ocorrer entre as variáveis envolvidas.

Um desses exemplos apresentado por (THOMPSON, 2013c) se refere a um triângulo retângulo, cuja medida da hipotenusa sendo c, da base sendo x e a altura sendo y, de modo que, o ângulo entre a base e a hipotenusa corresponde a 30° por exemplo. Havendo uma expansão nas medidas da base e da altura desse triângulo, mas mantendo-se os ângulos internos inalterados, a medida da base passará para $x + dx$ e a altura se transforma em $y + dy$. O crescimento de x causou o crescimento de y, mostrada na Figura 23.

Figura 23 – Triângulo de altura y e base x que sobreu expansão na altura e na base



Fonte – (THOMPSON, 2013c)

Pela semelhança existente entre os dois triângulos tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c \cdot \operatorname{sen} 30^\circ}{c \cdot \cos 30^\circ}$$

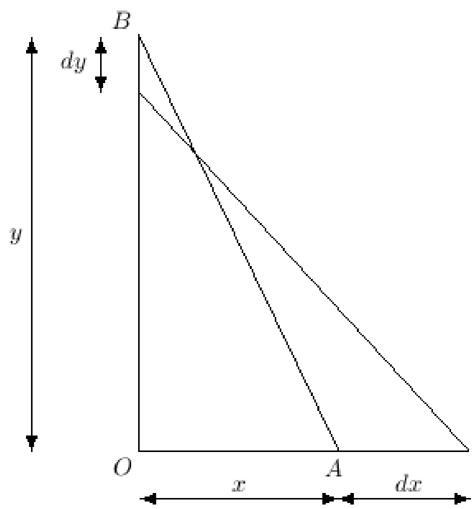
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen}\, 30\,^\circ}{\cos\, 30\,^\circ}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{1}{1,73}$$
$$\frac{dy}{dx} \approx 0,58.$$

O que acontece com as medidas desse triângulo é que quando for adicionado um incremento de $1\,cm$ na medida de sua base (direção x), acarretará em um incremento de $0,58\,cm$, na medida de sua altura (direção y).

Uma outra situação apresentada por (THOMPSON, 2013c) é o da Figura 24, onde x é a distância entre o pé da escada AB e a parede OB e y é a distância entre o topo da escada AB e a base da parede OB. A medida que o pé da escada se afasta da parede, o topo da escada se aproxima da base da parede, ou seja, se x aumenta de x para $x + dx$, então, y decresce de y para $y - dy$.

Como exemplo, (THOMPSON, 2013c) supõe que o pé da escada (A) esteja a $21\,cm$ da parede, o topo da escada (B) esteja a $2\,m$ e $20\,cm$ de altura. Fazendo com que o pé da escada se afaste da parede em $1\,cm$, qual será o afastamento do topo da escada em relação a posição original.

Figura 24 – Escada apoiada na parede e que sofreu um deslocamento.



Fonte – (THOMPSON, 2013c)

Sendo as medidas em centímetros, tem-se que $x = 21$, $y = 220$, $dx = 1$, e dy o valor que se pretende descobrir.

O comprimento da escada será dado por:

$$\begin{aligned} c^2 &= 21^2 + 220^2 \\ \Rightarrow \quad c &= \sqrt{21^2 + 220^2} \\ &= \sqrt{441 + 48400} \\ &= \sqrt{48841} \\ &= 221. \end{aligned}$$

O comprimento da escada é de $221\,cm$. Para determinar o afastamento vertical do topo da escada, tem-se que:

$$221^2 = 22^2 + (y - dy)^2$$
$$\Rightarrow \quad (y - dy)^2 = 221^2 - 22^2$$
$$\Rightarrow \quad (220 - dy) = \sqrt{221^2 - 22^2}$$
$$\Rightarrow \quad 220 - dy = \sqrt{48841 - 484}$$
$$\Rightarrow \quad 220 - dy = \sqrt{48357}$$
$$\Rightarrow \quad 220 - dy \approx 219,9$$
$$\Rightarrow \quad -dy \approx -220 + 219,9$$
$$\Rightarrow \quad -dy \approx -0,1$$
$$\Rightarrow \quad dy \approx 0,1\,cm.$$

Observa-se que, para cada $1\,cm$ de deslocamento na direção horizontal, o deslocamento na direção vertical será de $-0,1\,cm$.

Logo, a razão entre dy e dx será dada por:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{0,1}{1}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -0,1.$$

Nos dois exemplos apresentados, tanto do triângulo retângulo, como o da escada, existe uma relação entre x e y, o que permite encontrar a razão $\dfrac{dy}{dx}$.

É importante frisar, novamente, que Silvanus Thompson se refere a $\dfrac{dy}{dx}$ como um quociente entre incrementos, ou seja, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, e não como diferencial de y em relação a x.

De acordo (THOMPSON, 2013c), as duas expressões relacionadas aos exemplos apresentados, $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg} 30^\circ$ e $x^2 + y^2 = c^2$, contém, implicitamente, os métodos pelos quais pode-se designar tanto x em função de y, quanto y em função de x.

$$y = x \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \quad \text{ou} \quad x = \frac{y}{\operatorname{tg} 30^\circ}$$

e

$$y = \sqrt{c^2 - x^2} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{c^2 - y^2}.$$

A apresentação de uma função na sua forma explícita, como por exemplo, $y = x \cdot \operatorname{tg} 30\,°$, destaca quem é a variável dependente e a independente, que nesse caso são y e x, respectivamente.

Silvanus Thompson cita que matemáticos de sua época se referem à razão $\frac{dy}{dx}$ como coeficiente diferencial de y em relação a x, ou ainda como função derivada de y em relação a x, ou, derivada de y no ponto x.

Conforme (THOMPSON, 2013c), no Ensino Básico, a álgebra está envolvida na procura de grandezas desconhecidas, que em geral, são designadas por x ou y. O objetivo agora é encontrar a razão $\frac{dy}{dx}$ que é chamada de derivação e que só vai fazer sentido se dx e dy forem infinitamente pequenos, ou seja, o real valor do coeficiente diferencial será aquele que vai se aproximando de um valor limite quando se atribui valores cada vez menores para dx e dy.

Outra preocupação relatada pelo autor é a desmistificação que a simbologia ensinada para representar as derivadas seja complicada. O autor usa uma linguagem bastante simplória, mas significativa para o entendimento. Expressões como dx têm um significado de "um elemento de" x ou ainda "um pedacinho de" x. Quando do estudo de derivadas de ordem superior ou igual a 2, o autor, diz que $\frac{d^2y}{dx^2}$ é operação de derivar y em relação a x duas vezes, ou seja, achar a derivada de y em relação a x e depois achar a derivada da derivada de y em relação a x.

Silvanus Thompson começa a derivação de algumas expressões algébricas mais simples, como no caso da função $y = x^2$, que já foi apresentada quando do estudo da área da superfície de um quadrado.

Posteriormente o autor sugere determinar a derivada da função $y = x^3$. De acordo com (THOMPSON, 2013c), a noção de crescimento é a primordial dentro do Cálculo. Sabendo que y e x^3 são correspondentes e, havendo um crescimento para x, y também crescerá. A preocupação é encontrar a razão entre dy e dx. Desta forma tem-se:

$$y + dy = (x + dx)^3$$
$$\Rightarrow \quad y + dy = x^3 + 3x^2 \cdot dx + 3x \cdot (dx)^2 + (dx)^3.$$

Como já foi comentado anteriormente, os valores $(dx)^2$ e $(dx)^3$ serão desconsiderados por serem insignificantes quando comparados com outros elementos da equação, resultando em:

$$y + dy = x^3 + 3x^2 \cdot dx$$
$$\Rightarrow \quad dy = 3x^2 \cdot dx$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

Convém lembrar que a derivada da função $y = x^3$ foi obtida sem o emprego de limites.

Segundo (THOMPSON, 2013c), para a derivação da função $y = x^4$ repete-se a mesma metodologia. Um incremento x é adicionado à variável x, passando a ser $x + dx$ e y também cresce, passando a ser $y + dy$. Tem-se então:

$$y + dy = (x + dx)^4$$
$$\Rightarrow \quad y + dy = x^4 + 4x^3 \cdot dx + 6x^2 \cdot (dx)^2 + 4x \cdot (dx)^3 + (dx)^4$$
$$\Rightarrow \quad dy = 4x^3 \cdot dx + 6x^2 \cdot (dx)^2 + 4x \cdot (dx)^3 + (dx)^4.$$

Lembrando que valores como $(dx)^2$, $(dx)^3$ e $(dx)^4$ podem ser desconsiderados, pois quando comparados a outros elementos da expressão, são insignificantes. Logo a expressão fica:

$$dy = 4x^3 \cdot dx$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 4x^3.$$

Conforme (THOMPSON, 2013c), que observou o resultado das funções e suas respectivas derivadas, identificando assim um padrão e concluiu que se a função for $y = x^n$, sua derivada será dada por:

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}. \tag{3.1}$$

Caso o expoente fosse negativo, como por exemplo $y = x^{-2}$, Silvanus Thompson acrescentou a x o incremento dx e a y o incremento dy resultando em:

$$y + dy = (x + dx)^{-2}$$
$$\Rightarrow \quad y + dy = \left[x \cdot \left(1 + \frac{dx}{x}\right)\right]^{-2}$$
$$\Rightarrow \quad y + dy = x^{-2} \cdot \left(1 + \frac{dx}{x}\right)^{-2}.$$

De acordo com (THOMPSON, 2013c), foi necessário o emprego do Teorema Binomial para expandir o binômio $\left(1 + \frac{dx}{x}\right)^{-2}$, obtendo-se:

$$y+dy = x^{-2} \cdot \left[(1)^{-2} - 2 \cdot (1)^{-3} \cdot \left(\frac{dx}{x}\right) + \frac{2 \cdot 3}{2!} \cdot (1)^{-4} \cdot \left(\frac{dx}{x}\right)^2 - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3!} \cdot (1)^{-5} \cdot \left(\frac{dx}{x}\right)^3 + ...\right]$$

$$\Rightarrow \quad y + dy = x^{-2} \cdot \left[1 - 2 \cdot \left(\frac{dx}{x}\right) + 3 \cdot \left(\frac{dx}{x}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{dx}{x}\right)^3 + ...\right]$$

$$\Rightarrow \quad y + dy = x^{-2} - 2x^{-3} \cdot dx + 3x^{-4} \cdot (dx)^2 - 4x^{-5} \cdot (dx)^3 + ...$$

Desprezando $(dx)^2$, $(dx)^3$ e todos os possíveis incrementos de ordem maiores de magnitude, pois apresentam valores insignificantes quando comparados aos demais termos da expressão e sabendo que $y = x^{-2}$, tem-se que:

$$dy = -2x^{-3} \cdot dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -2x^{-3}.$$

E se o expoente for uma fração? Segundo (THOMPSON, 2013c), que apresenta o exemplo da função $y = \sqrt{x}$, podendo ser escrita como $y = x^{\frac{1}{2}}$. Adiciona-se as variáveis y e x os incrementos dy e dx, respectivamente.

$$y = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad y + dy = (x + dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad y + dy = \left[x \cdot \left(1 + \frac{dx}{x}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Aplicando o Teorema Binomial para o desenvolvendo do binônio $\left(1 + \frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, obtém-se:

$$y + dy = x^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 1^{\frac{1-2}{2}} \cdot \left(\frac{dx}{x}\right) + \frac{1-2}{2^2 \cdot (2!)} \cdot 1^{\frac{1-2\cdot 2}{2}} \cdot \left(\frac{dx}{x}\right)^2 + ...\right]$$

$$\Rightarrow \quad y + dy = x^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{x} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{dx}{x}\right)^2 + ...\right]$$

$$\Rightarrow \quad x^{\frac{1}{2}} + dy = x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \frac{dx}{x} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{8} \cdot \left(\frac{dx}{x}\right)^2 + ...$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x} + dy = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \frac{dx}{x} - \frac{\sqrt{x}}{8} \cdot \frac{(dx)^2}{x^2} + ...$$

$$\Rightarrow \quad dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{(dx)^2}{x\sqrt{x}} + ...$$

Desprezando os termos de maior grau de magnitude a expressão fica:

$$dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{ou ainda} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}.$$

Silvanus Thompson mostra conjecturas que a derivada da função $y = x^n$ será obtida através da equação 3.1, podendo o expoente dessa função ser positivo, negativo ou fracionário. Para o caso de função possuir expoente irracional, Silvanus Thompson não apresentou resolução.

Agora, será determinada a derivação de constantes dentro de uma expressão. Segundo (THOMPSON, 2013a), tal comportamento é mostrado como no exemplo da função $y = x^3 + 5$, em que a constante 5 foi adicionada ao fator x^3. Havendo um crescimento em x passando de x para $x + dx$, acarretará um crescimento em y, passando de y para $y + dy$. Assim tem-se:

$$y = x^3 + 5$$

$$y + dy = (x + dx)^3 + 5$$
$$y + dy = x^3 + 3x^2 \cdot dx + 3x \cdot (dx)^2 + (dx)^3 + 5$$

Desprezando as quantidades de maior ordem de magnitude, tem-se:

$$y + dy = x^3 + 3x^2 \cdot dx + 5$$

$$y + dy = (x^3 + 5) + 3x^2 \cdot dx$$
$$dy = 3x^2 \cdot dx$$
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Independente do valor da constante, que neste caso foi igual a 5, quando for efetuado o processo de diferenciação o valor da constante desaparecerá. Logo, a derivada de uma contante será igual a zero.

Thompson analisa qual será o comportamento de uma constante multiplicada por um fator em que aparece a variável x, como a função $y = 7x^2$. Assim tem-se:

$$y = 7x^2$$

$$\Rightarrow \quad y + dy = 7(x + dx)^2$$
$$\Rightarrow \quad y + dy = 7[x^2 + 2x \cdot dx + (dx)^2]$$
$$\Rightarrow \quad y + dy = 7x^2 + 14x \cdot dx + 7 \cdot (dx)^2$$

Desprezando as quantidades de maior ordem de magnitude, tem-se:

$$dy = 14x \cdot dx.$$

Sendo assim, Thompson observa que o processo de direnciação da função $y = a \cdot x^n$ se assemelha ao processo $y = x^n$. Então, a derivada da função $y = a \cdot x^n$, será:

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot n \cdot x^{n-1}.$$

Outros exemplos, são apresentados por (THOMPSON, 2013a) como a diferenciação da função $y = a\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{a}$. O termo $\frac{1}{2}\sqrt{a}$, por ser uma constante tem derivada igual a zero. Com relação ao termo $a\sqrt{x}$, que pode ser escrito como $a \cdot x^{\frac{1}{2}}$ e realizando o processo de diferenciação tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= a \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{a}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{a}{2\sqrt{x}.}\end{aligned}$$

Em outro capítulo de sua obra, Thompson aborda a soma de duas ou mais funções, como no caso da função $y = u + v$, em que u e v são funções de x. De acordo com (THOMPSON, 2013a), permitindo que x cresça para tornar-se $x + dx$, influenciando em u, que aumentará para $u + du$, assim como v ampliará para se transformar em $v + dv$, e por fim y, que crescerá para virar $y + dy$. Então, tem-se $y + dy = u + du + v + dv$.

Sabendo que $y = u + v$, então pode ser suprimido do lado esquerdo o valor de y, assim como do lado direito o valor de $u + v$, ficando a equação como $dy = du + dv$. Dividindo-se os dois lados da equação por dx, tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Logo, a estratégia para diferenciar a soma de duas ou mais funções se dá pela diferenciação de uma função de cada vez e depois efetua-se a soma dos resultados.

Para a subtração o processo é muito parecido com a da soma:

$$y = u - v$$

$$y + dy = (u + du) - (v + dv)$$

$$y + dy = u + du - v - dv$$

$$dy = du - dv$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{du}.$$

Houve até a preocupação de enunciar uma regra para a diferenciação de duas ou mais funções. Conforme (THOMPSON, 2013a) relata: "A derivada de uma soma de funções é a soma da derivada de cada função ou o coeficiente diferencial de uma soma de funções é a soma do coeficiente diferencial de cada uma das funções".

Quando a questão é diferenciar um produto de funções, como a equação $y = u \cdot v$, onde, u e v são funções de x, faz-se, então x aumentar para $x + dx$, influindo para que u altere para $u + du$, v amplie para $v + dv$ e também y cresça para se tornar $y + dy$, ficando a equação desta forma:

$$y + dy = (u + du) \cdot (v + dv)$$

$$\Rightarrow \quad y + dy = u \cdot v + u \cdot dv + v \cdot du + du \cdot dv.$$

Suprimindo y do lado esquerdo da equação e $u \cdot v$ do lado direito, pelo fato que $y = u \cdot v$, tem-se:

$$dy = u \cdot dv + v \cdot du + du \cdot dv.$$

Aqui Thompson recorre a eliminação do termo $du \cdot dv$ pois trata-se de um termo de segunda ordem de pequenez, ficando $dy = u \cdot dv + v \cdot du$. Por fim, efetua-se a divisão de toda a equação por dx.

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}.$$

(THOMPSON, 2013a) enunciou essa regra como:

> Para diferenciar o produto de duas funções, multiplique cada função pelo coeficiente diferencial da outra, e daí some os dois produtos, ou então, para diferenciar o produto de duas funções, multiplique a primeira função pela derivada da segunda, daí multiplique a segunda função pela derivada da primeira, e por fim some os dois produtos.

Falta ainda ver como diferenciar quocientes de funções do tipo $y = \frac{u}{v}$. De acordo com (THOMPSON, 2013a), ao permitir o crescimento de x para virar $x + dx$, tem-se, então o crescimento em u para virar $u + du$, assim como o crescimento em v para virar $v + dv$, conforme equação 3.2:

$$y + dy = \frac{u + du}{v + dv}. \tag{3.2}$$

O que vai ser realizado é a divisão de $u + du$ por $v + dv$ pelo algoritmo da chave até onde se consiga uma expressão que propicie tirar y do lado esquerdo da igualdade com o seu correspondente $\frac{u}{v}$ do lado direito dessa igualdade. Aplicando o método da chave tem-se:

Rescrevendo na forma $D = d \cdot Q + r$, onde D é o dividendo, d o divisor, Q o quociente e r o resto, tem-se:

$$u + du = (v + dv)\left(\frac{u}{v} + \frac{du}{v} - \frac{u \cdot dv}{v^2}\right) + \left(-\frac{du \cdot dv}{v} + \frac{u \cdot (dv)^2}{v^2}\right).$$

Nessa equação podem ser desprezados os termos de segunda ordem de magnitude, como aqueles que fazem parte do resto, ficando então:

$$u + du = (v + dv)\left(\frac{u}{v} + \frac{du}{v} - \frac{u \cdot dv}{v^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u + du}{v + dv} = \frac{u}{v} + \frac{du}{v} - \frac{u \cdot dv}{v^2}.$$

$$
\begin{array}{l|l}
u + du & v + dv \\ \cline{2-2}
-u \qquad -\dfrac{u}{v}\,dv & \dfrac{u}{v} + \dfrac{du}{v} - \dfrac{u \cdot dv}{v^2} \\ \cline{1-1}
\qquad du - \dfrac{u}{v}\,dv & \\
\quad -du \qquad\qquad -\dfrac{du \cdot dv}{v} & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -\dfrac{u}{v} \cdot dv - \dfrac{du \cdot dv}{v} & \\
\qquad\quad +\dfrac{u}{v} \cdot dv \qquad\quad + \dfrac{u \cdot (dv)^2}{v^2} & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad -\dfrac{du \cdot dv}{v} + \dfrac{u \cdot (dv)^2}{v^2} &
\end{array}
$$

Substituindo o valor acima na equação 3.2, tem-se:

$$y + dy = \frac{u}{v} + \frac{du}{v} - \frac{u \cdot dv}{v^2}.$$

O valor de y do lado esquerdo da equação deve ser desprezado, assim como o valor de $\dfrac{u}{v}$ do lado direito, ficando:

$$dy = \frac{du}{v} - \frac{u \cdot dv}{v^2}.$$

Dividindo tudo por dx e aplicando um pouco de álgebra, tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2} \right) \cdot \frac{1}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \dfrac{du}{dx} - u \cdot \dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

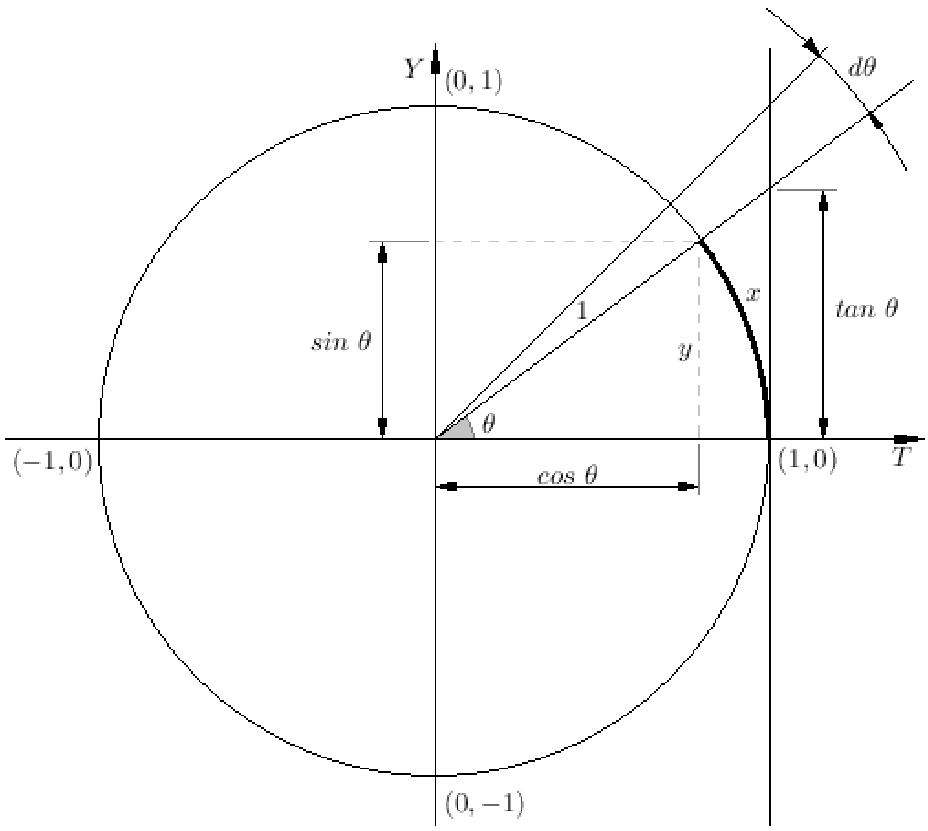
Para diferenciar função composta, Silvanus Thompson utiliza exemplos para apresentar a regra da cadeia. Segundo (MIRANDA, 2004), Thompson utiliza "um truque útil" para diferenciar expressões "muito complicadas". Como exemplo é apresentada a função $y = (x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}$, que aos olhos de Thompson seria impossível sua resolução para quem está inciando o estudo do Cálculo. O referido "truque" é fazer uma substituição de variáveis, ou seja, substituir $(x^2 + a^2)$ por u, resultando em $y = (u)^{\frac{3}{2}}$. A próxima etapa é fazer a derivada desse polinômio resultando em: $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{3}{2}\,(u)^{\frac{1}{2}}$. Voltando para equação $u = x^2 + a^2$ e diferenciando-a em relação a x, tem-se como resultado: $\dfrac{du}{dx} = 2x$. Fazendo as devidas substituições na expressão, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$, isto é, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}} \cdot 2x$, resultando em: $\dfrac{dy}{dx} = 3x \cdot (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}$.

Usando esse artifício de substituição de variáveis e derivando as duas as funções em relação à variável x, Thompson aplica a regra da cadeia.

Em seu livro, Silvanus Thompson discorre também sobre derivadas trigonométricas. Sua preocupação inicial é investigar o que acontece com y quando θ varia, ou seja, qual a relação entre esses dois incrementos quando esses forem muito pequenos, tendendo a zero.

Considerando a função $y = \operatorname{sen}\theta$, o que se quer averiguar é o significado da expressão, $\dfrac{d(\operatorname{sen}\theta)}{d\theta}$:

Figura 25 – Círculo trigonométrico.



Fonte – Adaptado de (THOMPSON, 2014)

Observando a Figura 25, na qual está representado o círculo trigonométrico cujo raio é igual a 1, onde y representa a projeção do arco x sobre o eixo vertical, ou simplesmente, o valor do seno desse arco, que é igual a $\operatorname{sen}\theta$, e θ sendo o ângulo central que limita o arco x no círculo trigonométrico, e de acordo com (THOMPSON, 2014), havendo um aumento muito pequeno do ângulo θ, cujo valor é $d\theta$ (que é um infinitésimo do ângulo), irá acarretar também um aumento na direção y, cujo valor será dy. Com isso ocorrendo, a nova altura será $y + dy$, equivalente ao seno do novo ângulo $\theta + d\theta$. Então, tem-se que:

$$y = \operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \quad y + dy = \operatorname{sen}(\theta + d\theta)$$

$$\Rightarrow \quad dy = \operatorname{sen}(\theta + d\theta) - \operatorname{sen}\theta.$$

A expressão $\operatorname{sen}(\theta + d\theta) - \operatorname{sen}\theta$ é a diferença entre dois senos que será substituída por uma outra expressão trigonométrica.

Note que as transformações de soma e diferença de senos são expressas por:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cdot\cos(a) \tag{3.3}$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cdot\cos(a) \tag{3.4}$$

Somando as equações 3.3 e 3.4 obtém-se:

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cdot\cos(a) + \operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cdot\cos(a)$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2\cdot\operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) \tag{3.5}$$

Subtraindo as equações 3.3 e 3.4 gera-se:

$$\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cdot\cos(a) - \operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cdot\cos(a)$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2\cdot\operatorname{sen}(b)\cdot\cos(a) \tag{3.6}$$

Fazendo $a+b=p$ e $a-b=q$ e somando essas duas equações, tem-se:

$$a+b+a-b = p+q$$

$$\Rightarrow \quad 2\cdot a = p+q$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{p+q}{2}. \tag{3.7}$$

Agora subtraindo $a+b=p$ de $a-b=q$, tem-se:

$$a+b-a+b = p-q$$

$$\Rightarrow \quad 2\cdot b = p-q$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{p-q}{2}. \tag{3.8}$$

Substituindo os valores de a e b das equações 3.7 e 3.8, na equação 3.5, tem-se:

$$\operatorname{sen}(p) + \operatorname{sen}(q) = 2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right). \tag{3.9}$$

Substituindo os valores de a e b das equações 3.7 e 3.8, na equação 3.6, tem-se:

$$\operatorname{sen}(p) - \operatorname{sen}(q) = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right). \tag{3.10}$$

Voltando a expressão $dy = \operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q$ e utilizando a equação 3.10, com $p = \theta + d\,\theta$ e $q = \theta$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
dy &= 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + d\,\theta - \theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta + d\,\theta + \theta}{2}\right) \\
\Rightarrow \quad dy &= 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \theta + d\theta}{2}\right) \\
\Rightarrow \quad dy &= 2 \cdot \cos\left(\theta + \frac{1}{2} \cdot d\theta\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} \cdot d\theta\right).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Segundo (THOMPSON, 2014), $d\theta$ é uma variável que tende a zero, sem jamais ser zero. Sendo assim, o primeiro termo da equação 3.11 tende a $2 \cdot \cos \theta$, já que a parcela $d\theta$ do argumento será desprezada devido sua insignificância. No segundo termo, conforme $\left(\frac{d\theta}{2}\right)$ fica cada vez menor $\operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right)$, também fica, de sorte que, no limite, a função $\operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right)$ e o argumento $\left(\frac{d\theta}{2}\right)$ ficam cada vez mais próximos, então o autor trocou $\operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right)$ por $\left(\frac{d\theta}{2}\right)$ o que permite escrever a equação 3.11 como:

$$\begin{aligned}
dy &= 2 \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{1}{2} \cdot d\theta \\
\Rightarrow \quad \frac{dy}{d\theta} &= \cos \theta.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Considerando uma outra função, a função $y = \cos \theta$. Conforme relata (THOMPSON, 2014), sabe-se que $\cos \theta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, ou seja, $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$. Aplicando a Regra da Cadeia, $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{d\theta} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot (-1) \\
\Rightarrow \quad \frac{dy}{d\theta} &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\
\Rightarrow \quad \frac{dy}{d\theta} &= -\operatorname{sen} \theta.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Agora, considerando a função $y = \operatorname{tg} \theta$. De acordo com (THOMPSON, 2014), se houver um pequeno crescimento y na direção y, passando a ser $y + dy$, trará como efeito um pequeno aumento do ângulo θ, passando esse para $\theta + d\,\theta$, conforme mostrado na Figura 25. Trabalhando um pouco com a equação $y = \operatorname{tg} \theta$, tem-se:

$$y + dy = \operatorname{tg}(\theta + d\,\theta)$$

$$\Rightarrow \quad dy = \operatorname{tg}(\theta + d\,\theta) - \operatorname{tg}\theta.$$

Consultando tabelas de identidades trigonométricas, sabe-se que:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b}, \qquad \text{ou ainda,} \qquad tan(\theta + d\theta) = \frac{tan\,\theta + \operatorname{tg}d\theta}{1 - \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}d\theta}.$$

Fazendo as devidas substituições na expressão $y + dy = \operatorname{tg}(\theta + d\,\theta)$ tem-se:

$$dy = \frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}d\theta}{1 - \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}d\theta} - \operatorname{tg}\theta$$

$$\Rightarrow \quad dy = \frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}d\theta}{1 - tan\,\theta \cdot \operatorname{tg}d\theta} - \frac{\operatorname{tg}\theta \cdot (1 - \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}d\theta)}{1 - \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}d\theta}$$

$$\Rightarrow \quad dy = \frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}d\theta - \operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}^2\theta \cdot \operatorname{tg}d\theta}{1 - \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}d\theta}$$

$$\Rightarrow \quad dy = \frac{\operatorname{tg}d\theta + \operatorname{tg}^2\theta \cdot \operatorname{tg}d\theta}{1 - \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}d\theta}$$

$$\Rightarrow \quad dy = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\theta) \cdot \operatorname{tg}d\theta}{1 - \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}d\theta}. \tag{3.14}$$

De acordo com (THOMPSON, 2014), se $d\theta$ tende a zero, o valor de $\operatorname{tg}d\theta$ tende a ficar igual a $d\theta$ e o valor da $\operatorname{tg}\theta \cdot d\theta$ vai se tornando insignificante quando comparado a 1 possibilitando assim, uma simplificação da expressão 3.14, obtendo-se:

$$dy = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\theta) \cdot d\theta}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{d\theta} = 1 + \operatorname{tg}^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{d\theta} = \sec^2\theta. \tag{3.15}$$

Silvanus Thompson emprega sempre a mesma metodologia, não usando limites, para obter naturalmente a derivada de uma função trigonométrica. Apesar da supressão do emprego de limites para obtenção das derivadas trigonométricas, se paga um preço alto, o uso extensivo de identidades trigonométricas.

Thompson ainda desenvolve o estudo de outras derivadas em sua obra como a de funções exponenciais, logarítmicas e outras trigonométricas, que não foram relatados neste trabalho. A ideia era mostrar a essência da derivação de algumas funções, cujo cerne é o não emprego de limites para cálculo de derivadas de funções.

Atualmente, o livro *Calculus Made Easy* já está em domínio público por meio do Projeto Gutemberg (HART, 2018). O Projeto disponibiliza livros, *ebooks* e trabalhos antigos que podem ser acessados e baixados de forma gratuíta sem nenhum custo, já que expiraram os prazos de direitos autorais. Apesar da gratuidade, o Projeto Gutemberg aceita doações, pois gera-se um custo para se manter *on-line*, para digitalização de livros e o aprimoramento de programas para se manter atualizado.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observa-se cada vez mais um desinteresse dos estudantes em aprender Matemática seja pela dificuldade de entendimento, por questões pessoais, por não encontrar aplicabilidade.

Alguns programas estão desvinculados da realidade desse aluno, pois sua aplicabilidade é muito restrita, não gerando no aluno uma aprendizagem significativa, sendo que alguns conteúdos poderiam ser abordados de maneiras diferentes, fazendo despertar no aluno o interesse pelo significado do conteúdo.

Uma possibilidade para uma eventual modificação seria a introdução de outros conteúdos como o Cálculo, que poderia facilitar essa mudança comportamental no estudante.

O trabalho desenvolvido teve como objeto de estudo a possibilidade de inserção do estudo da derivada no Ensino Médio norteado pelas ideias de Geraldo Ávila e Silvanus Thompson.

Como já foi relatado, o ensino do Cálculo, mais especificamente, o da derivada, que já fez parte do currículo do Ensino Médio, não passava de uma inicialização, um conjunto de exercícios sobre as técnicas de derivação, que muito provavelmente esse aluno teria na universidade.

Trabalhar esse conteúdo no Ensino Médio é oportunizar o estudante a conhecer essa ferramenta tão importante na Matemática, pois aí se concentra uma ótima ocasião de ampliar os conhecimentos dos alunos e de mostrar as aplicações dos conceitos matemáticos.

O ensino da derivada pautada em aplicações pode ser realizado no Ensino Médio fazendo contraponto com conteúdos de outras disciplinas. As possibilidades de situações criadas com ensino das derivadas, juntamente com softwares geométricos, são ferramentas de auxílio na apropriação destes conhecimentos, pois a visualização facilita, em muito, esse aprendizado, uma vez que a apresentação virtual faz parte da rotina de muito desses jovens.

Pode-se achar que os programas que fazem parte do ensino da Matemática no Ensino Médio não comportariam inserção do estudo das derivadas. Então, que se faça outra estruturação dos programas uma vez que esse assunto é tão relevante na construção do saber matemático. Essa estruturação pode ser adaptada com a inclusão de atividades que mostrem aplicações desses conteúdos, ou ainda, com a supressão dos que são notabilizados pelo excesso de rigor e formalismo. A exploração dos conceitos estudados deve ser pautada na intuição, na visualização e também na experimentação.

O excessivo rigor empregado em determinadas demonstrações corroboram para falta de interesse e motivação. O estudo das funções ficaria mais interessante para o aprendizado dos alunos se combinado com o estudo das derivadas, que deve ser explorado, principalmente, em aplicações, onde o conceito de função apareceria naturalmente, pois na história da matemática, o conceito de função foi obtido após um longo período de evolução do Cálculo, onde as funções iam surgindo na medida em que os problemas iam sendo dissecados e formulados.

As definições de limites e derivadas podem ser mostradas de modo mais informal, através de exemplos numéricos ou gráficos. Isso não impede que o conceito de derivada seja apresentado antes da definição de limite, pois a definição clássica de derivada é fundamentada em cima de um limite particular.

Conforme (MACHADO, 1990) que relata a seguinte crítica:

> Mesmo nas tentativas de ensinar as noções de cálculo na escola básica, em nível de segundo grau, a abordagem dominante coincide com a anteriormente descrita, com a circunstância agravante de que quase sempre as noções tratadas deixam de incluir o conceito de integral, portanto limitando-se a uma visão pré-histórica do assunto. Como já vimos, o nascimento do Cálculo dá-se precisamente no momento em que são reconhecidas as relações de interdependência entre os processos de derivação e de integração. Neste nível de ensino, os livros didáticos que tratam do assunto costumam dedicar a maior parte de suas páginas as atividades preparatórias e ao conceito de limite, apresentando a derivada como um particular limite, concentrando as atenções nas regras de derivação e culminando com algumas aplicações, geométricas ou físicas, nas derivadas. Poucas vezes eles enveredam, e se o fazem é sempre em poucas páginas, nos caminhos que conduzem ao conceito de integral.

A apresentação de ideias básicas que retratam o Cálculo, sem a formalidade, tão constantemente empregada, como no caso da definição de limite, é possível e, talvez até, desejável. Essas ideias tão presentes no cotidiano, que são abordadas de maneira intuitiva e natural, muitas vezes não associadas ao processo do Cálculo.

No estudo da função quadrática, a aplicação da derivada não só se restringe na obtenção das coordenadas do vértice. Pode ser estudada também a questão do crescimento, da concavidade, das raízes, da paridade, do coeficiente angular e da equação da reta tangente em um determinado ponto.

Hoje em dia as respostas são imediatas, a interação digital não dá espaço para uma estagnação de ideias, tudo é muito rápido, e infelizmente, isso reflete também em sala de aula. Tentar minimizar isso, talvez, seja o maior desafio do professor. Por isso é imprescindível um bom planejamento, cujo conteúdo a ser repassado esteja sempre carregado de aplicações. É de suma importância que os professores tenham sabedoria e prática para apontar onde esse conhecimento pode ser aplicado, sua utilidade, pois isso é um fator motivador para a curiosidade e interesse dos alunos. A formação continuada dos professores é um fator preponderante para a melhoria na qualidade do ensino na Educação Básica.

Como reforça o professor Geraldo Ávila, o estudo derivada seria de uma forma discreta mais incisiva, repleta de aplicações, de preferência em sintonia com outras disciplinas, como por exemplo, a Física. A ideia da aplicação da derivada no estudo da Física, principalmente no estudo da cinemática é fundamental, seja pela clareza de entendimento dos alunos, seja pela facilidade em expor os conteúdos. Esses assuntos fazem parte do conteúdo programático do 1°Ano do Ensino Médio, então, para ser aplicado, o aluno necessitaria de ter noções de derivada nesse perído. O uso da derivada seria empregado para a obtenção da velocidade e aceleração de um móvel, a partir da função horária e contribuiria, em muito, para a assimilação dos fundamentos físicos estudados.

Há que se salientar o que Thompson fez, como a apresentação da nomenclatura para derivada e integral, por mais elementar que possa ser. Uma de suas preocupações foi desmistificar a barreira que existe para o aprendizado do Cálculo. Sua linguagem baseada em infinitésimos, é bastante informal, e uma proposta diferente é seu diálogo com o leitor.

Sua proposta de apresentar o estudo da derivada sem utilização de limites é a marca de sua obra. Thompson, muitas vezes, desconsidera valores infinitesimais muito pequenos quando comparados a outros. E essa simplificação, que foge totalmente da formalidade como é obtida a derivada, sem o rigor que a academia cobra, é ponto nevrálgico de muitos questionamentos.

Apesar de formalmente diferente do Cálculo usual, esta abordagem menos rigorosa conduz exatemente aos mesmos resultados clássicos do Cálculo Diferencial.

Esta metodologia (ou similar, isto é, menos rigorosa e mais intuitiva, porém correta) se adotada no estudo de derivadas no Ensino Médio pode render dividendos. O que se procura é que o estudo da derivada dê suporte ao estudo de funções e essa estratégia empregada por Thompson, em que ele abdica o emprego de limites, é um ganho substancial. Ainda que em alguns casos, por exemplo, para as funções trigonométricas, esse recurso para obtenção da derivada tenha se tornado bastante trabalhoso, pois, em várias situações se emprega o uso de identidades trigonométricas.

O trabalho aqui apresentado buscou demonstrar a resolução de derivadas sem a utilização de limites, conforme metodologia utilizada por Silvanus Thompson. Foram apresentadas algumas demonstrações de algumas funções polinomiais e trigonométricas, ficando como sugestão para trabalhos futuros, a resolução de funções como as exponenciais, logarítmicas entre outras. Uma outra proposta de trabalhos futuros seria o estudo de integrais, tão fundamental na resolução de questões pertinentes ao comprimento de curvas, áreas e volumes, entre outros.

Por fim, quero aqui agradecer a oportunidade de poder cursar o programa PROFMAT, oferecido pela UTFPR, em conjunto com a SBM e o IMPA. Acredito que a atuação do docente em sala de aula, depende em muito, da capacitação desse prossional e foi isso que ocorreu quando da possibilidade de cursar esse Mestrado em Matemática em Rede Nacional. Espero que esse programa continue sendo oferecido pelas instituições envolvidas, pois é de suma importância para o profissional da rede regular de ensino em Matemática cursar esse programa.

REFERÊNCIAS

AQUINO, L. C. M. **09. Taxa de Variação. | Cálculo I.** 2011. Disponível em: <https://youtu.be/12PVg-m_8ls>. Acesso em: 30/05/2018. 25, 28, 29, 30, 31

ÁVILA, G. O ensino do cálculo no segundo grau. **Revista do Professor de Matemática**, n. 18, p. 1–9, 1991. 16, 17, 18

AVILA, G. S. de S. **Introdução à análise matemática**. [S.l.]: Edgard Blucher, 1999. 16

AVILA, G. S. de S. **Várias faces da Matemática**. [S.l.]: Blucher, 2007. 9, 10, 11, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24

D'AMBRÓSIO, U. Por que se ensina matemática. **Disciplina a distância oferecida pela SBEM**, 2013. 44, 45

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo, vol. 1 .** [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000. 33, 34, 35, 36

HART, M. **Project Gutenberg**. 2018. Disponível em: <https://www.gutenberg.org/wiki/PT_Principal>. Acesso em: 19/12/2018. 63

HUGHES-HALLETT, D. Cálculo aplicado. 2ª. **Ed. LTC. Rio de Janeiro**, 2005. 25, 26

LARSON, R. E.; HOSTETLER, R. P.; EDWARDS, B. H. Cálculo com aplicações. **São Paulo: Livros Técnicos e Científicos-LTC**, 1998. 10

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna: Análise de uma impregnação mútua**. [S.l.]: Cortez: Autores Associados, 1990. 12, 15, 16, 17, 65

MACHADO, N. J. **Cálculo Diferencial e Integral na Escola Básica: Possível e Necessário**. FEUSP: [s.n.], 2008. Seminãrios de Ensino de Matemãtica. 27, 28, 36, 37, 38

MANOEL, E. de J. Guia didático modalidades esportivas individuais terrestres (versão preliminar). 2013. 26

MIRANDA, G. A. d. **Silvanus Phillips Thompson e a desmistificação do cálculo: resgatando uma história esquecida**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2004. 44, 45, 58

MOL, R. S. Introdução à história da matemática. **Belo Horizonte: CAEDUFMG**, 2013. 12, 13, 14, 15

MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J. Cálculo, vol. 1. **Guanabara Dois**, 1982. 32, 34

PEDROSO, H. A. **História da matemática**. IBILCE-UNESP, S. J. Rio Preto, 2009. Notas de Aula. 12, 13, 14, 15

REIS, F. d. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. Tese (Doutorado) — UNICAMP, 2001. 16

SOUSA, F. A. L. et al. Funções quadráticas-estudo do gráfico das funções quadráticas. Universidade Federal de Goiás, 2013. 40, 41

STEWART, J. **Cálculo Volume 1-Tradução da 7ª edição norteamericana. Versão métrica internacional**. [S.l.]: Cengage learning, São Paulo, 2013. 19, 25, 42

SWOKOWSKI, E. **Cálculo com Geometria Analítica-Volume 1, Tradução: Alfredo A. de Farias, com a colaboração de Vera RL Flores e Marcio Q. Moreno**. [S.l.]: Makron Books. São Paulo, 1994. 10

THOMPSON, S. P. Física é fácil. **Cálculo: Matemática para todos**, n. 33, p. 20–33, 10 2013. 49, 55, 56, 57

THOMPSON, S. P. Um pouquinho de um pouquinho. **Cálculo: Matemática para todos**, n. 31, p. 22–27, 8 2013. 9, 46, 47, 48

THOMPSON, S. P. A velha escada contra a parede. **Cálculo: Matemática para todos**, n. 32, p. 36–46, 09 2013. 49, 50, 51, 52, 53, 54

THOMPSON, S. P. As equações dos pêndulos. **Cálculo: Matemática para todos**, n. 42, p. 30–39, 7 2014. 59, 61, 62

THOMPSON, S. P.; GARDNER, M. **Calculus made easy**. [S.l.]: Macmillan, 1998. 9