

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

GIANE FERNANDA SCHNEIDER GROSS

**RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E AS OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM
PROFISSIONAL DO PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA: O PAPEL E AS
AÇÕES DO FORMADOR**

PONTA GROSSA

2026

versão 11.0 (abr.25)

GIANE FERNANDA SCHNEIDER GROSS

**RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E AS OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM
PROFISSIONAL DO PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA: O PAPEL E AS
AÇÕES DO FORMADOR**

REASONING AND PROFESSIONAL DEVELOPMENT OPPORTUNITIES FOR
MATHEMATICS TEACHERS: THE ROLE AND ACTIONS OF THE FACILITATOR

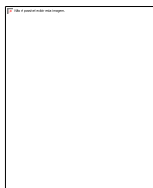
Tese apresentada como requisito para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciência e Tecnologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan.
Coorientadora: Prof^ª. Dr^ª. Eliane Maria de Oliveira Araman.

PONTA GROSSA

2026



Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es) e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Ponta Grossa



GIANE FERNANDA SCHNEIDER GROSS

**RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E AS OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM
PROFISSIONAL DO PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA: O PAPEL E AS
AÇÕES DO FORMADOR**

Trabalho de pesquisa de doutorado apresentado como requisito para obtenção do título de Doutor Em Ensino De Ciência E Tecnologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ciência, Tecnologia E Ensino.

Data de aprovação: 20 de Fevereiro de 2026

Dr. Andre Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Alessandro Jacques Ribeiro, Doutorado - Fundação Universidade Federal do Abc (Ufabc)

Dra. Andresa Maria Justulin, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Anna Flavia Magnoni Vieira, Doutorado - Universidade Estadual do Paraná (Unespar)

Dra. Nilceia Aparecida Maciel Pinheiro, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

À minha família, por cada renúncia que se tornou
conquista.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida, a Nossa Senhora pelo cuidado constante e por me sustentar nos momentos em que pensei não conseguir. A fé durante todo o percurso, foi elemento principal de força para seguir.

Aos meus pais, Almir e Rosicler, por todo amor, por cada ensinamento e por nunca medirem esforços para que eu chegasse até aqui. Esta conquista também é de vocês!

À minha irmã, Jaíne, pela presença, pelo apoio e por estar ao meu lado em todos os momentos dessa caminhada.

Ao meu marido Nilson, por ser meu companheiro de vida, por compreender minhas ausências, acolher minhas angústias e celebrar comigo cada pequena vitória. Seu apoio foi essencial para que eu não desistisse.

Aos meus filhos, Arthur e Thamiris, meus maiores amores, por serem minha motivação diária. Por cada abraço, cada sorriso e até pelas ausências que este percurso exigiu. Tudo isso é por vocês e para vocês!

Aos meus amigos e colegas de pesquisa, pela partilha, pelas conversas, pelo apoio nos momentos difíceis e pelas trocas que enriqueceram não apenas este trabalho, mas também minha formação e trajetória.

Ao meu orientador Prof. Dr. André e à minha coorientadora Prof.^a Dr.^a Eliane, pela escuta sensível, pela orientação firme e pelo compromisso com minha formação. Gratidão por acreditarem em mim e por contribuírem de forma tão significativa para este trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, pelo apoio financeiro, que possibilitou a realização desta pesquisa.

A todos que, de alguma forma, caminharam comigo, apoiaram, incentivaram ou simplesmente estiveram presentes, minha sincera e profunda gratidão.

RESUMO

A pesquisa surgiu de motivações profissionais e pessoais vinculadas à atuação do formador de professores que ensinam Matemática, especialmente diante da necessidade de compreender como o raciocínio matemático (RM) se desenvolve em interações formativas e como o papel, as ações e as práticas do formador podem potencializar esse processo. Com base nessa preocupação prática e investigativa, o objetivo central do estudo foi compreender como as ações do formador de professores que ensinam Matemática contribuem para gerar oportunidades de aprendizagem profissional no que diz respeito aos entendimentos essenciais do RM. A abordagem da investigação é qualitativa e interpretativa, fundamentado na análise de episódios discursivos produzidos nos quatro encontros analisados de um processo formativo. O cenário consistiu em reuniões colaborativas nas quais professores da Educação Básica resolveram Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP), discutiram estratégias de resolução identificando processos do RM, a partir de registros de prática dos estudantes. Os participantes eram docentes da Educação Básica paranaense, mediados pelos formadores, cuja atuação constitui parte central do fenômeno estudado. A coleta de dados envolveu gravações em áudio e vídeo, transcrições integrais das discussões, registros escritos dos professores e anotações dos formadores. A análise foi orientada por categorias derivadas das ações e práticas do formador proposta na literatura, articuladas aos processos de RM. Os resultados revelaram que o papel e as ações se relacionam com o conhecimento profissional do formador a contar dos seus conhecimentos matemáticos, didáticos, pedagógicos, da Educação Matemática e experiências formativas. As ações identificadas convidar, esclarecer, retomar, ampliar, parafrasear, contrapor e questionar funcionaram como movimentos formativos capazes de converter interações espontâneas dos professores em evidências de conjectura, generalização, investigação do porquê e início as justificações. Essas ações estruturaram o discurso, explicitaram critérios de validade e criaram OAP diretamente relacionadas ao desenvolvimento do RM. Como complemento aos resultados e conclusões, destacadas nas análises da pesquisa, o produto educacional apresenta um plano de formação para formadores composto de um guia teórico-prático para o desenvolvimento do RM nos professores que ensinam Matemática.

Palavras-chave: ensino de matemática; oportunidades de aprendizagem profissional; raciocínio matemático; formador; conhecimento profissional.

ABSTRACT

This research arose from professional and personal motivations related to the role of the trainer of mathematics teachers, particularly in light of the need to understand how mathematical reasoning (MR) develops in training interactions and how the trainer's role, actions, and practices can enhance this process. Based on this practical and investigative concern, the central objective of the study was to understand how the actions of mathematics teacher educators contribute to creating opportunities for professional learning regarding the essential understandings of MR. The research approach is qualitative and interpretive, grounded in the analysis of discursive episodes produced during the four meetings analyzed as part of a training process. The setting consisted of collaborative meetings in which Basic Education teachers solved Professional Learning Tasks (PLTs) and discussed problem-solving strategies, identifying RM processes based on records of students' practice. The participants were Basic Education teachers from Paraná, facilitated by the trainers, whose role constitutes a central part of the phenomenon under study. Data collection involved audio and video recordings, full transcripts of the discussions, written records by the teachers, and notes taken by the trainers. The analysis was guided by categories derived from the trainer's actions and practices as proposed in the literature, linked to RM processes. The results revealed that the trainer's role and actions are related to their professional knowledge, including their mathematical, didactic, and pedagogical knowledge, as well as their knowledge of mathematics education and training experiences. The identified actions—inviting, clarifying, revisiting, expanding, paraphrasing, contrasting, and questioning—functioned as formative interventions capable of transforming teachers' spontaneous interactions into evidence of conjecture, generalization, inquiry into “why,” and the beginning of justifications. These actions structured the discourse, made validity criteria explicit, and created OAPs directly related to the development of RM. As a complement to the results and conclusions highlighted in the research analyses, this educational product presents a training plan for instructors consisting of a theoretical-practical guide for developing MR in teachers who teach mathematics.

Keywords: mathematics education; professional learning opportunities; mathematical reasoning; instructor; professional knowledge.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|-----|
| Figura 1: Modelo PLOT | 31 |
| Figura 2: OAP e o Conhecimento do RM para o Ensino | 37 |
| Figura 3: Modelo MTESK..... | 42 |
| Figura 4: Entendimentos essenciais do RM propostos por Lannin, Ellis e Elliott (2011) | 50 |
| Figura 5: Modelo conceitual para o RM proposto por Jeannotte e Kieran (2017)..... | 54 |
| Figura 6: Percurso metodológico da IBD | 63 |
| Figura 7: Registros de prática Grupo 2: TAP assíncrona 2 | 85 |
| Figura 8: Resolução enviada pela professora Serena referente a TAP conjectura de Maria.... | 99 |
| Figura 9: Resolução enviada pela professora Fernanda referente a TAP conjectura de Maria | 101 |
| Figura 10: Conhecimento profissional do formador de professores para o desenvolvimento do RM..... | 125 |

LISTA DE QUADROS

| | |
|---|-----|
| Quadro 1: Categorias que caracterizam o conhecimento profissional docente | 24 |
| Quadro 2: Domínios e subdomínios propostos por ball, thames e phelps (2008)..... | 24 |
| Quadro 3: Modelo conhecimento especializado do professor de matemática (mtsk) | 28 |
| Quadro 4: Dimensões, componentes e características do modelo plot nos três domínios | 34 |
| Quadro 5: Quadro de análise das ações do professor que apoiam o rm | 41 |
| Quadro 6: Classificação das práticas e ações do formador durante discussões coletivas | 44 |
| Quadro 7: Cronograma e ações realizadas no processo do processo formativo – ciclo 1 | 66 |
| Quadro 8: Caracterização dos participantes | 68 |
| Quadro 9: Cronograma e ações realizadas no processo do processo formativo – ciclo 2 | 71 |
| Quadro 10: Tarefa matemática – cálculo de área e perímetro | 73 |
| Quadro 11: Tarefa matemática azulejos brancos e cinzentos..... | 74 |
| Quadro 12: Tarefa matemática envolvendo cálculo de área e perímetro | 75 |
| Quadro 13: Conjectura de Maria | 75 |
| Quadro 14: Como identificar as ações do formador que geram oportunidades de aprendizagem referente ao desenvolvimento do rm dos professores? | 77 |
| Quadro 15: Práticas e ações do formador e oap identificadas no encontro 1 | 89 |
| Quadro 16: Práticas e ações do formador e oap identificadas no encontro 2..... | 95 |
| Quadro 17: Práticas e ações do formador e oap identificadas no encontro 3 | 103 |
| Quadro 18: Práticas e ações do formador e oap identificadas no encontro 4..... | 108 |
| Quadro 19: Ações do formador e as oap geradas durante os quatro encontros do processo formativo | 112 |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|------------|
| 1 | INTRODUÇÃO: DAS MOTIVAÇÕES PESSOAIS ÀS QUESTÕES DE PESQUISA | 13 |
| 2 | A BASE DO CONHECIMENTO DOCENTE | 22 |
| 2.1 | Estudos e Pesquisas de Lee Shulman | 22 |
| 2.2 | Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) | 23 |
| 2.3 | Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK) | 26 |
| 3 | OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL DOCENTE | 31 |
| 3.1 | Papel e Ações do Formador de Professores que Ensinam Matemática | 38 |
| 4 | RACIOCÍNIO MATEMÁTICO | 47 |
| 4.1 | Entendimentos Essenciais do RM | 49 |
| 4.2 | Modelo conceitual do RM para a matemática escolar | 53 |
| 5 | PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS | 61 |
| 5.1 | Tipo e abordagem da pesquisa | 61 |
| 5.2 | Contexto investigativo e participantes envolvidos | 65 |
| 5.3 | Etapas de realização da pesquisa e instrumentos de coleta de dados | 69 |
| 5.4 | Procedimentos de estudo e análise dos dados | 75 |
| 6 | ANÁLISE DOS DADOS | 82 |
| 6.1 | Encontro 1 | 82 |
| 6.2 | Encontro 2 | 92 |
| 6.3 | Encontro 3 | 98 |
| 6.4 | Encontro 4 | 106 |
| 7 | DISCUSSÃO DOS RESULTADOS | 111 |
| 7.1 | Estabelecer uma comunidade de aprendizagem | 113 |
| 7.1.1 | Convidar para engajar os professores em uma participação ativa e reflexiva | 114 |
| 7.2 | Interpretar as interações com e entre os participantes | 115 |
| 7.2.1 | Validar para articular registros de representação e compreender significados matemáticos | 115 |
| 7.2.2 | Esclarecer/Explicar para institucionalizar critérios e modelar explicações | 116 |
| 7.2.3 | Estender/ampliar para explorar novos domínios e limites da generalização | 116 |
| 7.2.4 | Parafrasear (revoicing) para organizar raciocínios e estabilizar significados | 117 |
| 7.2.5 | Solicitar esclarecimentos para explicitar condições, invariantes e critérios de validade para sustentar o RM | 117 |
| 7.3 | Estabelecer conexões | 118 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 7.3.1 | Retomar para estruturar significados | 118 |
| 7.4 | Desafiar os professores a avançarem em seus conhecimentos..... | 119 |
| 7.4.1 | Contrapor para promover discussões coletivas e válidas | 120 |
| 7.4.2 | Questionar para articular conjecturas, generalizações e provas na investigação coletiva | 121 |
| 7.5 | Sistematizar aprendizagens: síntese, integração e reflexão a respeito dos processos do RM..... | 122 |
| 7.5.1 | Resumir os tópicos principais da discussão para que os professores organizem e sintetizem as ideias construídas coletivamente | 122 |
| 7.5.2 | Recuperar os conhecimentos prévios para que os professores relacionem aprendizagens | 123 |
| 7.6 | O desenvolvimento do RM em processos formativos: o conhecimento profissional do formador..... | 123 |
| 8 | CONSIDERAÇÕES FINAIS..... | 127 |
| 8.1 | Conclusão: do objetivo aos resultados revelados de acordo com o referencial teórico | 127 |
| 8.2 | Conclusão: respostas às questões de pesquisa..... | 129 |
| 8.3 | O produto educacional e suas contribuições | 130 |
| 8.4 | Limitações da pesquisa..... | 131 |
| 8.5 | Recomendações para trabalhos futuros..... | 132 |
| 8.6 | Reflexões pessoais | 133 |
| | REFERÊNCIAS | 134 |
| | APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO DE CARACTERIZAÇÃO DO PARTICIPANTE..... | 146 |
| | APÊNDICE B – EXPLICAÇÃO DETALHADA DOS ENCONTROS..... | 153 |
| | APÊNDICE C – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 1 – PRIMEIRAS IMPRESSÕES | 164 |
| | APÊNDICE D – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 2 – RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E AS TAREFAS..... | 166 |
| | APÊNDICE E – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL ASSÍNCRONA 2 – TAREFA MATEMÁTICA | 169 |
| | APÊNDICE F – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 3 – ANÁLISE DE REGISTROS DE PRÁTICA..... | 171 |
| | APÊNDICE G – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 4 – ANÁLISE DE REGISTROS DE PRÁTICA | 173 |
| | APÊNDICE H – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL ASSÍNCRONA 3 – CONJECTURA DE MARIA E JUSTIFICATIVAS DE AMANDA, BIANCA E CARLA (LANNIN; ELLIS; ELLIOTT, 2011) | 177 |
| | APÊNDICE I – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 5 – ENTENDIMENTO ESSENCIAL 5 | 180 |

| | |
|--|-----|
| APÊNDICE J – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL ASSÍNCRONA 4 – ENTENDIMENTO ESSENCIAL 6..... | 182 |
| APÊNDICE K – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL ASSÍNCRONA 5 – PROPOSTA DE TAREFA MATEMÁTICA QUE CONTEMPE OS ENTENDIMENTOS ESSENCIAIS DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO | 185 |
| APÊNDICE L – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 6 – JUSTIFICATIVAS | 187 |
| APÊNDICE M – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 7 – ENTENDIMENTOS ESSENCIAIS 6, 7, 8 E 9..... | 189 |
| APÊNDICE N - TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL ASSÍNCRONA 6 – ELABORAÇÃO DA TAREFA MATEMÁTICA..... | 192 |
| APÊNDICE O – KAHOOT – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 8 - FINALIZAÇÃO DOS PRESSUPOSTOS TEÓRICOS DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO..... | 195 |
| APÊNDICE P – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 9 – REFLEXÃO SOBRE AS TAREFAS APLICADAS PELOS PARTICIPANTES..... | 197 |
| APÊNDICE Q – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 10 – REFLEXÃO SOBRE AS TAREFAS APLICADAS PELOS PARTICIPANTES..... | 203 |

1 INTRODUÇÃO: DAS MOTIVAÇÕES PESSOAIS ÀS QUESTÕES DE PESQUISA

O caminho de construção dessa pesquisa perpassou por diferentes episódios pessoais que iniciaram no sonho de construção da família, de passar pelo doutoramento até os impasses que surgiram durante a vida. Acredito que uma pesquisa não inicia no momento de matrícula na Pós-Graduação; em particular, na minha história, esse pensamento em fazer parte da construção da ciência esteve presente e me fez buscar e lutar para chegar nesse momento.

Nasci e cresci na região dos Campos Gerais¹ do estado do Paraná, e constantemente observava a necessidade de aprofundar os estudos, pois minha família passou por muitas dificuldades financeiras. Para mim, o caminho que resplandecia sempre foi o conhecimento; mesmo sendo de origem humilde, sonhava em chegar até a Pós-Graduação. Minha família, em todo momento, motivou-me a buscar por meus objetivos, ensinando o caminho certo e a nunca desistir.

O trecho da música² de Charlie Brown Jr. expõe essa inspiração e motivação “*A vida me ensinou a nunca desistir. Nem ganhar, nem perder mas procurar evoluir*”. Compreendo que aquilo que conquistei muitas vezes não me fez ganhar ou perder, mas sim amadurecer. Diante disso, posso afirmar que fui e sou uma pessoa determinada, sonho, luto e procuro conquistar meus desejos.

Desde os 16 anos trabalhei e conciliei meus estudos, iniciando na graduação em Licenciatura em Matemática no ano 2009. Como meus sonhos rodeavam-se na construção da família e de ser uma profissional, fui procurando atingir meus objetivos simultaneamente. Assim, no ano de 2012 selei o matrimônio e em 2014 meu filho Arthur nasceu.

Em tempo, entre os anos de 2013 e 2017 cursei três especializações e no ano de 2019 ingressei no mestrado no Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET) pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Curitiba. A dissertação intitulada *Cultura Digital frente às demandas das Escolas do Campo: a Robótica Educacional como Possibilidade para o Ensino de Matemática* (Gross, 2020), teve como objetivo “investigar as possíveis relações entre a robótica educacional e as escolas do campo e sua aplicação para o ensino de Matemática”.

¹ Região com 19 municípios (Ponta Grossa, Castro, Tibagi, Palmeira, Lapa, Arapoti, Campo do Tenente, Cândido de Abreu, Ipiranga, Jaguariaíva, Ortigueira, Piraí do Sul, Porto Amazonas, Reserva, Telêmaco Borba, Tibagi, Balsa Nova, Campo Largo, Carambeí e Curiúva) do centro-leste paranaense. Disponível em: <https://www.amcg.com.br/municipios>. Acesso em ago. 2023.

² Música: Dias de luta, dias de glória de Charlie Brown Jr.

Finalizado o mestrado no ano de 2020, em 2021 nasce minha filha Thamiris e nesse mesmo ano prestei a seleção para o doutorado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia (PPGECT) na UTFPR – campus Ponta Grossa. Aprovada na seleção, iniciei os estudos e o trabalho com a pesquisa no ano de 2022 sob a orientação do professor André Luis Trevisan e coorientação da professora Eliane Maria de Oliveira Araman.

Desde 2006 até o mês de maio de 2022, trabalhei, constitui família e estudei. Foi no PPGECT no início do ano de 2022 que tive a oportunidade em participar da seleção interna de Bolsas de Demanda Social da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e fui contemplada. Fiquei muito feliz, pela primeira vez tive a oportunidade de dedicação exclusiva aos estudos, a construção da ciência, o qual era meu sonho.

Após o trabalho com a pesquisa de mestrado avistou-se a preocupação em investigar a formação de professores, em especial os formadores de professores, o qual é meu interesse particular e vai ao encontro da perspectiva de pesquisa com os orientadores trilhar caminhos para construção deste estudo, especialmente no que tange à integração entre as temáticas de aprendizagem profissional do professor e raciocínio matemático (RM). Em especial, o RM vem sendo investigado há alguns anos no âmbito do grupo de pesquisa *Raciocínio matemático e formação de professores*³.

Diante disso, nasce a inquietação quanto às possibilidades de articulação dessa temática no âmbito da formação de professores, especialmente os que ensinam Matemática na Educação Básica. Estudos a respeito da formação de professores e aprendizagem profissional, apresentam-se por diferentes autores (Corrêa, 2025; Neves, *et al.* 2025; Anjos, *et al.* 2025; Oliveira, 2024; Campos, 2024; Silva, Pazuch, 2024; Corrêa, Araman, Serrazina, 2024; Almeida, 2023; Dörr, Neves, Ribeiro, 2023a, 2023b; Ferreira, 2022; Pires, Maciel, 2023; Silva, Ribeiro, Aguiar, 2023a; Trevisan, *et al.* 2023).

Almeida (2023) se propôs a pesquisar em sua tese discussões históricas acerca das formações de professores, o que direcionou e o que poderá direcionar processos formativos voltados para o Ensino de Matemática. Nesse mesmo caminho, Ferreira (2022) observou historicamente os saberes envolvidos nas formações de professores, defende a tese de que na cultura escolar em tempos de pedagogia científica produziu-se uma graduação própria do ensino de aritmética, que se configura como elemento constituinte da matemática do ensino.

Na pesquisa de Pires e Maciel (2023) é evidenciada a formação continuada de professores que ensinam Matemática também nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Esses

³ Grupo de pesquisa credenciado no CNPq Disponível em: <<http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/781023>>. Acesso em set. 2023.

autores analisaram a relação entre a formação continuada e o uso pedagógico das evidências fornecidas pelas avaliações externas de desempenho estudantil.

Envolvendo os anos iniciais do Ensino Fundamental Silva, Ribeiro e Aguiar (2023a) procuraram identificar e explicar de que maneira oportunidades de aprendizagem profissional (OAP), idealizadas por uma formadora de professores em um processo formativo referente ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico, foram percebidas como aprendizagens profissionais pelas participantes. Nessa pesquisa, esses autores encontraram como resultados a mobilização de conhecimentos matemáticos e didáticos acerca do desenvolvimento do Pensamento Algébrico, a garantia de espaços de comunicação matemática envolvendo os estudantes a incorporação de alguns elementos da Abordagem de Ensino Exploratório nas práticas letivas das professoras.

Silva, Ribeiro e Aguiar (2023b) em outro estudo procuraram entender como os professores percebem sua aprendizagem profissional em um processo de formação de professores em serviço, a forma como relacionam essa aprendizagem com suas práticas de ensino sobre o pensamento algébrico nos primeiros anos da educação básica.

Trevisan *et al.* (2023) voltaram a pesquisa para os professores que ensinam Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, com objetivo de compreender como interações discursivas entre professores participantes de um processo de formação continuada promovem oportunidades para eles aprenderem sobre o ensino de padrões e regularidades. Como plano de fundo para a pesquisa os autores fizeram uso do modelo *Professional Learning Opportunities for Teachers* (PLOT) elaborado por Ribeiro e Ponte (2020) com intuito de apresentar um modelo teórico metodológico para o design de processos formativos que visam efetivar oportunidade de aprendizagem profissional (OAP) docentes.

Ribeiro e Ponte (2020) destacam que as OAP podem ser compreendidas como situações formativas intencionalmente organizadas, nas quais, por meio da articulação entre as ações do formador, tarefa matemática propostas e as interações discursivas entre os participantes, os professores têm condições de desenvolver, mobilizar e (re)construir conhecimentos matemáticos, didáticos e pedagógicos necessários ao ensino.

Com foco diferente Dörr, Neves e Ribeiro (2023) investigaram a construção e o desenvolvimento de uma tarefa matemática em sala de aula, tendo como resultados que a formação continuada possibilitou aos professores, que ensinavam matemática, vivenciarem uma prática de tarefas matemáticas exploratórias, como alternativas metodológicas promotoras de maior engajamento dos estudantes, ampliando as OAP dos participantes ao discutir e analisar de maneira coletiva.

As pesquisas destacaram resultados evidenciando as OAP que podem ser geradas a partir de processos formativos que envolvam o trabalho colaborativo entre os professores, com possibilidade de destaque para aspectos relacionados ao currículo, as questões didáticas e pedagógicas bem como o conhecimento matemático do professor.

A aprendizagem docente é uma preocupação para pesquisadores na área de Ensino. Nesse sentido, desenvolver pesquisas que contribuam para esse processo alinha-se à perspectiva de promover OAP, possibilitando que os professores aprofundem diferentes dimensões de seu conhecimento para o ensino. Em especial, destacamos o trabalho de Anjos (2023), desenvolvido no âmbito do nosso grupo de pesquisa, que teve como objetivo principal compreender como o desenvolvimento de um processo de formação continuada pode contribuir na compreensão dos Entendimentos Essenciais de RM para o ensino de Matemática, em especial, nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Em busca de ampliar as possibilidades de aprendizagem dos professores, processos formativos podem contribuir no aprofundamento de conhecimentos do professor (Ball; Thames; Phelps, 2008; Carrillo-Yañes *et al.* 2018; Shulmann, 1986; 1987) contribuindo assim com seu desenvolvimento profissional. Consequentemente espera-se que isso repercuta na aprendizagem dos estudantes; assim, preocupações em promover processos formativos e momentos de discussões entre professores que oportunizem a eles ressignificar seus conhecimentos têm relação com o modo como os estudantes aprendem (Crecci; Fiorentini, 2018; Gonçalves; Ribeiro; Aguiar, 2022).

Por muitas décadas, o conceito de formação de professores resumiu-se a oferecer “treinamentos” para “suprir” possíveis déficits de seu conhecimento (Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2022), sem articulação com sua prática ou relação com a aprendizagem dos estudantes. Mais recentemente, pesquisas têm apontado que a formação de professores deve compreender a ressignificação de diferentes domínios do conhecimento especializado para o ensino (Carrillo-Yañez *et al.* 2018), em articulação com a sua prática (Vitalino; Teixeira, 2022), por meio do trabalho com tarefas formativas – ou, mais especificamente, Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) (Ribeiro; Ponte, 2020).

Nessa direção, pensar a aprendizagem profissional do professor implica gerar oportunidades para que discutam, interajam e socializem suas dúvidas, compartilhem sugestões e inquietações sobre práticas de sala de aula, oportunizando que os docentes aprendam com outros profissionais e compartilhem resultados sobre seu trabalho, desenvolvendo assim “paradigma colaborativo entre os professores” (Justulin; Onuchic, 2021, p. 440). Even e Ball (2009) descrevem três razões para realizar estudos e pesquisas sobre a aprendizagem

profissional dos professores, sendo: (I) compreender o papel central que o professor possui perante o aprendizado dos estudantes; (II) nenhum esforço para melhorar as oportunidades dos estudantes, para aprender matemática, pode ter sucesso sem atenção paralela às oportunidades de aprendizagem de seus professores; (III) a formação de professores é um empreendimento novo, porém vem se expandindo rapidamente.

O conceito de OAP adotado neste estudo tem como um dos elementos fundamentais os formadores (Ribeiro; Ponte, 2020; Aguiar *et al.*, 2021), que estabelecem um complexo elo de articulação entre aspectos de ensino como os professores, a sala de aula, os estudantes e os conteúdos (Prediger; Roesken-Winter; Leuders, 2019). Ao considerar esses aspectos, mostra-se fundamental compreender como o papel e as ações do formador podem potencializar OAP aos professores, em especial quando discutem a respeito do RM, nosso foco de interesse.

Não há consenso, na literatura, sobre o que é o RM e o que significa raciocinar matematicamente (Mata-Pereira; Ponte, 2018). A palavra raciocínio segundo dicionário⁴ corresponde a ação ou maneira de raciocinar, de pensar, de fazer uso da razão para estabelecer relações, também de acordo com o dicionário o significado da palavra envolve a concatenação de proposições deduzidas umas das outras para chegar a uma demonstração e, por fim, a prática da razão através da qual é possível entender as ações, os eventos, os fatos, as ideias, fazer deduções, elaborar juízos e opiniões. Yackel e Hanna (2003, p. 228) destacam que “escrever sobre raciocínio em matemática é complicado pelo fato de o termo raciocínio, e o seu entendimento, serem amplamente utilizados como a suposição implícita de que há um acordo universal sobre o seu significado”.

Para Russel (1999) o raciocínio refere-se ao que usamos para pensar sobre as propriedades de um determinado objeto matemático e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de objetos sendo ferramenta central para compreender a abstração. Mata-Pereira e Ponte (2016, p. 38) consideram a definição do autor e pontuam que o RM “inclui uma diversidade de processos de raciocínio, nomeadamente, a formulação de questões, a formulação e teste de conjecturas, a definição e aplicação de estratégias de resolução e a justificação”. Na mesma direção, para Jeannotte e Kieran (2017), o RM é um processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos. As autoras analisam o RM tanto em termos do seu aspecto estrutural (dedutivo, indutivo e abdução) quanto de seus processos, que envolvem a busca por semelhanças e diferenças (generalizar, conjecturar, identificar um padrão, comparar

⁴ Disponível em: <https://www.dicio.com.br/raciocinio/>. Acesso em: abr. 2026.

e classificar), validação (justificação e prova/demonstração) e exemplificação (Jeannotte; Kieran, 2017).

O RM não se limita à solução de problemas numéricos, envolve a capacidade de analisar, interpretar e estruturar informações de forma lógica e necessária para tomada de decisões, resolução de desafios complexos e inovação em diversas áreas, como engenharia, economia, tecnologia e educação. Dada essa relevância, gerar OAP que promovam aprendizagem docente e contínua do RM pode ampliar possibilidades de atuação e de práticas que fortaleçam a capacidade crítica e analítica profissional. Sejam essas práticas relacionadas ao trabalho realizado em sala de aula, à preparação e planejamento de tarefas matemáticas ou as formas de atuação no ambiente escolar, que estimulem os estudantes a desenvolver o pensamento matemático.

No grupo de pesquisa, que participam pesquisadora e orientadores, os estudos voltados ao desenvolvimento do RM acontecem há algum tempo. No ano de 2021, o estudo de Trevisan e Araman (2021) investigou os processos de RM mobilizados por estudantes de Cálculo em tarefas envolvendo representações gráficas. Os resultados evidenciaram dificuldades na articulação entre diferentes registros de representação e na construção de justificativas, destacando a complexidade do RM em contextos de ensino superior.

Em 2022, observa-se um avanço na diversidade de contextos e abordagens. Morais, Araman e Trevisan (2022) articularam RM e argumentação em tarefas de geometria nos anos iniciais, enfatizando critérios de validade e a construção de justificativas. No âmbito do ensino superior, Trevisan (2022) analisou o RM em aulas de Cálculo a partir de tarefas exploratórias, evidenciando seu potencial para promover generalizações e explicações matemáticas. Ainda nessa perspectiva, Araman, Trevisan e Paula (2022) discutiram o RM apoiado por tarefas exploratórias, destacando o papel das ações do professor na mediação do pensamento matemático. Complementarmente, Oliveira, Araman e Trevisan (2022) analisaram processos de RM em uma tarefa exploratória, evidenciando como os estudantes constroem conjecturas, justificativas e validações.

No ano de 2023, as investigações passam a incorporar análises mais amplas sobre práticas pedagógicas e produções científicas. Martens e Trevisan (2023) mapearam pesquisas sobre ensino de Cálculo e RM, identificando tendências e lacunas na relação entre ensino superior e desenvolvimento do raciocínio. Trevisan *et al.* (2023) direcionaram a análise para as ações do professor que promovem o RM em aulas de Cálculo, destacando a relevância das práticas discursivas e da mediação pedagógica. Por sua vez, Gross, Souza e Trevisan (2023)

analisaram o RM em documentos curriculares, evidenciando como a literatura e as políticas educacionais têm tratado esse conceito.

Em 2024, os estudos avançam na articulação entre RM e formação docente. Gross, Trevisan e Araman (2024) relacionaram o RM às OAP, com ênfase nas ações do formador em processos formativos. Já Negrini, Trevisan e Araman (2024) investigaram os processos de RM de estudantes ingressantes no ensino superior em tarefas exploratórias, destacando dificuldades conceituais iniciais.

No ano de 2025, observa-se um movimento de sistematização teórica e ampliação dos contextos de investigação. Martens e Trevisan (2025) relacionaram a modelagem matemática ao desenvolvimento do RM na formação inicial de professores. Oliveira *et al.* (2025) articularam o RM com o conhecimento docente e os entendimentos essenciais, no contexto da formação continuada. Trevisan *et al.* (2025) apresentaram uma meta-análise narrativa sobre tarefas exploratórias e RM, sistematizando práticas e contribuições formativas. Trevisolli *et al.* (2025) propuseram um modelo de categorização das OAP relacionadas ao RM. Por fim, Anjos *et al.* (2025) analisaram as compreensões de professores ao resolver tarefas com potencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático, evidenciando os conhecimentos mobilizados nesse processo.

Já em 2026, Gross, Trevisan e Araman (2026) avançam na consolidação do campo ao discutir perspectivas teóricas, conhecimentos profissionais e o papel do formador em processos formativos, evidenciando a centralidade da formação docente para o desenvolvimento do RM.

A partir das pesquisas, afirma-se que as OAP relacionadas ao desenvolvimento do RM podem ser geradas em processos de formação continuada por meio de ações implementadas pelo formador de professores de Matemática, quando essas estão ligadas às experiências pedagógicas, didáticas e disciplinares compartilhadas pelos professores e/ou formador a partir dos diferentes contextos escolares.

Diante do exposto, elenca-se o objetivo desta pesquisa de *compreender como as ações do formador de professores que ensinam Matemática contribuem para gerar oportunidades de aprendizagem profissional no que diz respeito aos entendimentos essenciais do raciocínio matemático*. Especificamente, pretendemos responder às seguintes questões de pesquisa:

- Quais foram as ações do formador, em um processo formativo que trata do RM e seus entendimentos essenciais, que proporcionam oportunidades de aprendizagem aos professores envolvidos?
- De que forma essas oportunidades de aprendizagem profissional contribuem para que os professores aprimorem seus entendimentos essenciais do RM?

No intuito de responder ao objetivo e às questões, optamos pela realização de uma pesquisa qualitativa intervencionista a partir da realização de um processo formativo voltado para professores de Matemática da Educação Básica. Os encontros ocorreram de maneira remota contando com participantes de diferentes regiões do estado do Paraná. O contexto de coleta de dados foi organizado e estruturado por três integrantes do grupo de pesquisa RM e formação de professores, sendo: a pesquisadora (autora desta tese), o orientador e uma mestranda.

Nesse sentido, essa pesquisa assume como hipótese que o desenvolvimento do RM dos professores é (re) significado mediante ações condutoras nos processos formativos que contemplem discussões colaborativas, elaboração, desenvolvimento e reflexões sobre tarefas matemáticas, resultando positivamente na prática profissional do professor que ensina Matemática.

Perante o exposto, a tese foi estruturada iniciando com esta introdução a partir da trajetória da pesquisadora e contexto de origem da pesquisa, bem como os caminhos delimitados e a organização. Os capítulos 2, 3 e 4 foram dedicados para a apresentação do referencial teórico.

O conhecimento docente tem atenção especial no capítulo 2, a partir dos desdobramentos do trabalho de Shulman (1986, 1987), o conhecimento Matemático para o Ensino a partir de Ball, Thames e Phelps (2008) e o conhecimento Especializado do Professor de Matemática de acordo com os estudos de Carrillo-Yañez *et al.* (2018).

Já no capítulo 3 é discutida a aprendizagem profissional do professor, iniciando com a apresentação do modelo PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020); em seguida, o papel e as ações do professor formador de professores, destacando o modelo Conhecimento Especializado do Formador de Professores de Matemática de Ferreti, Martignone e Rodriguez-Muñiz (2021), as ações do professor para promoção do RM propostas por Araman, Serrazina e Ponte (2019).

O RM e seus pressupostos teóricos são destacados no capítulo 4, contando com as contribuições de estudo e pesquisa de Lannin, Ellis e Elliott (2011) e Jeannotte e Kieran (2017), gerando assim uma relação entre os entendimentos essenciais e os processos do RM apresentados por esses autores.

Finalizado o referencial teórico, o capítulo 5 traz a metodologia utilizada para trilhar a pesquisa e os caminhos condutores do estudo a partir de detalhamento dos ciclos do processo formativo. No capítulo 6 apresentam-se as análises dos excertos considerados promissores para o desenvolvimento do RM docente a partir das ações realizadas pelos formadores e as OAP.

No capítulo 7 são organizados os resultados elencados a partir das análises, as categorizações das ações promissoras e as OAP geradas a partir das ações e das IDP (Ribeiro e Ponte, 2020). Logo após, o capítulo 8 finaliza com as considerações finais de acordo com o objetivo proposto e os resultados revelados no estudo, a composição do produto educacional⁵, além de destacar limitações e propostas futuras de investigação que podem ser exploradas.

⁵ Plano de Formação para o desenvolvimento do RM para formadores de professores que ensinam Matemática. Disponível em: <https://sites.google.com/alunos.utfpr.edu.br/planodeformacaorm/>. Acesso em abr. 2026.

2 A BASE DO CONHECIMENTO DOCENTE

Este capítulo apresenta na primeira seção estudos e pesquisas que refletem sobre o conhecimento docente, tendo como base os trabalhos de Shulman (1986, 1987). Esse autor foi escolhido por ser considerado um precursor nessa temática, cujas ideias implicaram em diferentes desdobramentos no que tange às discussões sobre o conhecimento do professor. Na segunda seção destaca-se o Conhecimento Matemático para o Ensino (Ball; Thames; Phelps, 2008), e na terceira e última, o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática, segundo Carrillo-Yañez *et al.* (2018).

2.1 Estudos e Pesquisas de Lee Shulman

Em meio a diversos questionamentos sobre como o professor aprende e ensina que ocorriam nas décadas de 1970 e 1980, Shulman (1986) destaca a importância de proporcionar ao professor aprendizagem para o ensino. O autor considera que muitos professores apresentam dificuldade de articular o que sabem, como sabem e como ensinam (Shulman, 1987).

Como direcionamento para compreensão do que o professor precisa aprender para ensinar, Shulman (1986) propõe um modelo a partir de três domínios diferentes do conhecimento: Conhecimento Específico do Conteúdo (*Subject Matter Knowledge*), Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge*) e Conhecimento Curricular (*Curricular Knowledge*) (Shulman, 1986).

O Conhecimento Específico do Conteúdo, segundo o autor, vai além do domínio dos fatos ou conceitos, sendo necessário compreender as estruturas do conteúdo comum, que envolvam conceitos e princípios básicos das disciplinas. Para Shulman (1986) os professores precisam saber explicar, justificar, conhecer e relacionar ideias matemáticas, com uso de ações e de diferentes práticas, envolvendo situações do conteúdo, da disciplina, da vida, da sociedade, da profissão, entre outros.

O segundo domínio, Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, enfatiza que, além do conhecimento disciplinar, o professor precisa articular diferentes ideias, explicações, ilustrações, demonstrações e formulações, decorrendo do que foi aprendido e da experiência vivida. Shulman (1986) destaca que é oportuno compreender diferentes tópicos e estratégias para elaboração e concepções de tarefas que mais se encaixam ao planejamento realizado.

O terceiro e último domínio, conhecimento curricular, destaca a importância de conhecer os documentos curriculares como ferramentas que direcionam e organizam o ensino; com eles os professores podem ter o conhecimento de quais caminhos podem ser percorridos.

A construção de categorias para o conhecimento docente propostos por Shulman (1986) continuam a serem (re) construídas em outra pesquisa do autor no ano de 1987, ao considerar o total de sete domínios, sendo: 1) conhecimento do conteúdo; 2) conhecimento pedagógico geral, com referência especial àqueles princípios e estratégias gerais e estratégias de gerenciamento e organização da sala de aula que parecem transcender a matéria; 3) conhecimento do currículo, com compreensão especial dos materiais e programas que servem como “ferramentas de trabalho” para os professores; 4) conhecimento do conteúdo pedagógico, aquele amálgama especial de conteúdo e pedagogia que é exclusivamente da competência dos professores; 5) conhecimento dos estudantes e suas características; 6) conhecimento dos contextos educacionais, que vão desde o funcionamento do grupo ou da sala de aula, a governança e o financiamento dos distritos escolares, até o caráter das comunidades e culturas; e 7) conhecimento dos fins, propósitos e valores educacionais e suas bases filosóficas filosóficas e históricos.

Para Shulman (1987) o domínio conhecimento pedagógico do conteúdo é de especial interesse porque identifica os corpos distintos de conhecimento para o ensino. Ele representa a combinação de conteúdo e pedagogia em uma compreensão de como determinados tópicos, problemas ou questões são organizados, representados e adaptados aos diversos interesses e habilidades dos estudantes. O conhecimento pedagógico do conteúdo é a categoria com maior probabilidade de distinguir o entendimento do especialista em conteúdo e do pedagogo.

A partir dos estudos de Shulman (1986, 1987) outras pesquisas sobre o conhecimento docente foram surgindo. Em especial, no âmbito da disciplina de Matemática, apresentamos nas próximas seções alguns desses modelos de conhecimento.

2.2 Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT)

Especialmente para a Matemática, baseando-se no modelo proposto por Shulman (1986, 1987), Ball, Thames e Phelps (2008) apresentam o modelo de Conhecimento Matemático para o Ensino (*Mathematical Knowledge for Teaching* - MKT), considerando a especificidade dessa disciplina.

O Quadro 1 apresenta as categorias pontuadas por Ball, Thames e Phelps (2008) com relação ao trabalho de Shulman (1987), bem como as descrições do que envolvem.

Quadro 1: Categorias que caracterizam o conhecimento profissional docente

| Dimensões | Categorias |
|-------------------------|---|
| Gerais do conhecimento | Conhecimentos pedagógicos gerais, com especial referência a esses princípios e estratégias de gestão e organização de salas de aula. |
| | Conhecimento dos estudantes e suas características. |
| | Conhecimento de contextos educacionais, desde o funcionamento do grupo ou sala de aula, a governança e o financiamento dos distritos escolares, para a caráter de comunidades e culturas. |
| | Conhecimento dos fins, propósitos e valores educacionais, e seus fundamentos filosóficos e históricos. |
| Específicas do conteúdo | Conhecimento do conteúdo. |
| | Conhecimento curricular, com especial domínio dos materiais e programas que servem como "ferramentas do ofício" para os professores. |
| | Conhecimento de conteúdo pedagógico, essa amálgama especial de conteúdo e pedagogia. |

Fonte: Adaptado de Ball, Thames e Phelps (2008)

A primeira dimensão não era o foco principal de Shulman (1986) porém destacava a importância do conhecimento pedagógico como base para o conhecimento do conteúdo. Já a segunda, sobre os conhecimentos específicos do conteúdo, é o enlace entre o conhecimento pedagógico e o conhecimento do conteúdo (Ball; Thames; Phelps, 2008). Os autores sugerem então uma subdivisão dos conhecimentos docentes, da seguinte forma: o conhecimento do conteúdo de Shulman (1986) foi subdividido em conhecimento comum do conteúdo, conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento do conteúdo no horizonte, e o conhecimento pedagógico do conteúdo subdividido em conhecimento do conteúdo e do ensino, conhecimento do conteúdo e dos estudantes e conhecimento do conteúdo e do currículo.

No Quadro 2 estão descritos os subdomínios propostos por Ball, Thames e Phelps (2008) bem como o que cada um envolve e como pode ser observado em relação à atuação do professor.

Quadro 2: Domínios e subdomínios propostos por Ball, Thames e Phelps (2008).

| Domínio | Subdomínio | Descrição | Atuação do professor |
|----------------|-------------------|------------------|-----------------------------|
| | | | |

| | | | |
|-------------------------------------|---|---|---|
| Conhecimento Específico do Conteúdo | Conhecimento Comum do Conteúdo | Conhecimentos e habilidades matemáticas comuns, utilizados em ambientes que estejam além do ensino | <p>Precisam conhecer o material que utilizam, e devem reconhecer quando seus estudantes dão respostas erradas ou, então, quando o livro didático apresenta uma definição imprecisa. A familiaridade com erros comuns e decisão de quais erros são mais propensos, são exemplos de conhecimento margem de conteúdo e estudantes.</p> <p>Entender que a resposta errada do estudante enquanto o dimensionamento da natureza de um erro, especialmente de um erro desconhecido, normalmente requer agilidade de raciocínio sobre números, atenção aos padrões, e pensamento flexível sobre o significado de maneiras que se distinguem da especialização conhecimento de conteúdo.</p> |
| | Conhecimento especializado do conteúdo | O conhecimento matemático e a habilidade única para o ensino, não tipicamente necessário para outros propósitos além do ensino, porém busca de padrões em erros de estudantes ou no dimensionamento de abordagens não padronizadas que podem surgir nas resoluções dos estudantes. | Neste aspecto os professores têm que fazer uma espécie de trabalhos que outros não fazem, com propósito de envolver um tipo de desmembramento da matemática não utilizando tarefas cotidianas de ensino. Como descrito anteriormente, essas tarefas apresentam características diferentes para o envolvimento dos estudantes, tendo como intuito o desenvolvimento do raciocínio, a partir de diferentes interpretações das operações. |
| | Conhecimento do conteúdo no horizonte | Consciência de como os tópicos matemáticos estão relacionados a abrangência da disciplina que está incluída no currículo. | Saber como a matemática está relacionada com a matemática que os estudantes aprenderão nos anos escolares, para poder definir os fundamentos matemáticos que virão depois, também, inclui a visão útil em ver conexões a ideias matemáticas posteriores. Ter este tipo de conhecimento do horizonte matemático pode ajudar na tomada de decisões sobre como, por exemplo, falar sobre a linha de números. |
| Conhecimento Pedagógico do Conteúdo | Conhecimento do conteúdo e do ensino | Combina conhecimento sobre ensino e conhecimento sobre matemática. Sendo assim, as tarefas matemáticas de ensino exigem um conhecimento matemático do projeto de instrução em que os professores organizam o conteúdo específico para instrução e verificam os exemplos para começar com e quais exemplos usar para levar os estudantes mais a o conteúdo | Os professores avaliam a instrução utilizada e, bem como as vantagens e desvantagens das representações para ensinar uma ideia específica e identificam quais os diferentes métodos e procedimentos de instrução mais de adequam a determinada situação. Cada tarefa requer uma interação entre a matemática específica, a compreensão e o entendimento pedagógico que podem afetar o aprendizado dos estudantes, um exemplo para este domínio seria conhecer modelos instrucionais, saber o que pode ser utilizado e como poderá ser implementado, a partir do intuito do desenvolvimento do conhecimento do estudante. |
| | Conhecimento do conteúdo e dos estudantes | Conhecimento que combina conhecimento sobre estudantes e conhecimentos sobre a Matemática. | Antecipar o que os estudantes devem pensar e o que eles não compreendem, procurando prever o que os estudantes vão encontrar de interessante e motivador. Ao designar uma tarefa, os professores precisam antecipar o que os estudantes provavelmente poderão apresentar de resolução e compreensões, sendo capazes de ouvir e interpretar os estudantes. Cada uma das tarefas a serem propostas requerem a interação entre o entendimento matemático específico e a familiaridade com os estudantes e seu pensamento matemático. |

| | | |
|---|---|--|
| Conhecimento do conteúdo e do currículo | Desempenha um papel fundamental no planejamento e na execução da instrução. | Conhecer o currículo para preparação do conteúdo que seja baseado à prática profissional e no conhecimento e habilidade do trabalho docente. |
|---|---|--|

Fonte: Adaptado de Ball, Thames e Phelps (2008).

Na próxima seção destaca-se a pesquisa de Carrillo-Yañez *et al.* (2018) tal qual aprofunda suas pesquisas no MKT de Ball e colaboradores (2008) destacando a importância para as crenças dos professores no processo de ensino.

2.3 Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK)

Com o intuito de ampliar as discussões sobre o conhecimento profissional do professor de Matemática, Carrillo-Yañez *et al.* (2018) reconhecem Shulman (1986, 1987) como precursor da teoria sobre o conhecimento docente e destacam que o modelo de Ball, Thames e Phelps (2008) apresenta grandes contribuições para o avanço de pesquisas que envolvem a aprendizagem do professor, ressaltando que os autores direcionam para a avaliação do conhecimento matemático do professor necessário para colocar em prática diferentes possibilidades de ensino.

Entretanto, Carrillo-Yañez *et al.* (2018) pontuam problemas de delimitação entre os subdomínios desses modelos, que geram sobreposições difíceis de operacionalizar na pesquisa empírica, além de considerar controverso decidir se certo conhecimento é realmente exclusivo do professor de Matemática, o que dificulta separar o especializado do “comum”. Os autores propõem então o modelo Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (*Mathematics Teacher’s Specialized Knowledge - MTSK*) com intuito de estender a ideia de especialização a todos os domínios e subdomínios, incorporando ainda as crenças/concepções como componente estruturante do conhecimento profissional do professor de Matemática.

Os autores destacam que os professores são influenciados por crenças e concepções, corroborando com as ideias de Thompson (1992), que podem ser ocasionadas pela maneira como o professor aprendeu, como realizou suas primeiras experiências, e muitas vezes, pela falta de oportunidades em discutir sobre esses aprendizados, gerando assim uma rotina de ensino associada ao que já é conhecido.

Carrillo-Yañez *et al.* (2018) consideram que isso influencia o dia a dia de trabalho docente e apresentam um novo modelo que pontua essas discussões. As divisões e subdivisões estão destacadas no Quadro 3.

Quadro 3: Modelo Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK)

| Domínios | Subdomínios | Descrição | Atuação do professor |
|-------------------------|--------------------------------------|---|--|
| Conhecimento Matemático | Conhecimento de Tópicos | Compreende um conhecimento profundo dos tópicos matemáticos, reunindo o conhecimento de procedimentos, definições e propriedades, representações e modelos, bem como contextos, problemas e significados, e nesta medida, reconhece a complexidade dos objetos matemáticos que podem surgir na sala de aula. | Como fazer? (Por exemplo, algoritmos, tanto convencionais quanto alternativos); Quando fazer? (As condições suficientes e necessárias para aplicar um algoritmo); Por que será feito? (Os princípios subjacentes aos algoritmos); Em quais registros um tópico pode ser representado? (Por exemplo, gráfico, algébrico, aritmético, pictográfico, linguagem natural). |
| | Conhecimento da Estrutura Matemática | Conhecimento do professor sobre as conexões entre os campos matemáticos. Há duas considerações diferentes que dão origem a conexões: considerações temporais, que respondem a questões (não curriculares, mas relacionadas a matemática) de sequenciamento, e produzem conexões associadas a um aumento de complexidade ou com simplificação; e considerações de demarcação de objetos matemáticos, que produzem conexões conceituais. | Realização de ligações temporais que sublinham o papel gerador dos itens matemáticos na construção de outros campos e/ou dimensões, que ultrapassam a sequência curricular linear. Aumento da complexidade ou a uma simplificação. Em termos de aumento de complexidade, relacionar conteúdos estudados anteriormente com o que está sendo trabalhado e com os que ainda serão estudados; Reconhecer conexões associadas à simplificação as ligações do material em questão com conteúdo já estudados. Contextualizar a Matemática no conteúdo mais elementar sobre o qual se baseia. |
| | Conhecimento da Prática Matemática | Conhecimento sobre como a matemática é desenvolvida além de qualquer conceito particular (por exemplo, conhecer o significado de condições necessárias e suficientes), sabendo demonstrar, justificar, definir, fazer deduções e induções, dar exemplos e compreender o papel dos contraexemplos. Inclui também, a compreensão da lógica subjacente a cada uma destas práticas, explorando e gerando novos conhecimentos em matemática. | Ações que ocorrem no processo de ensino-aprendizagem, expressões (matemática) prática de ensino, enfatizando o papel do professor, e (matemática) prática em sala de aula, englobando tanto o professor quanto os estudantes, individualmente e em interação. O foco é o funcionamento da matemática e não o processo de ensiná-la, ou seja, ações que vislumbrem a execução de tarefas matemáticas gerais, por exemplo, o tipo de prova para testar o valor verdadeiro de uma proposta, juntamente com o conhecimento de como tal demonstração pode ser aplicada, e as diferentes características das definições. |

| | | | |
|-----------------------------------|--|---|---|
| Conhecimento Didático do Conteúdo | Conhecimento do Ensino de Matemática | Conhecimento intrinsecamente ligado ao conteúdo, com exclusão dos aspectos do conhecimento pedagógico geral. Em comum com os outros subdomínios do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, este conhecimento pode estar baseado em teorias extraídas da literatura de pesquisa em educação matemática, ou na experiência pessoal dos professores e na reflexão sobre sua prática. | Os conhecimentos teóricos específicos do ensino da Matemática são considerados para o envolvimento da consciência do potencial das atividades, estratégias e técnicas de ensino de conteúdo matemático específico, juntamente com quaisquer limitações e obstáculos potenciais que possam surgir. Também está incluído o conhecimento de recursos e materiais didáticos, incluindo livros didáticos, manipulativos, recursos tecnológicos, quadros interativos e assim por diante. Deve-se observar que este conhecimento vai além do mero conhecimento destes recursos e como eles são utilizados, para englobar a avaliação crítica de como eles podem melhorar o ensino de um determinado item, e as limitações envolvidas. |
| | Conhecimento das normas da Aprendizagem Matemática | Conhecimento associado às características inerentes ao aprendizado da matemática, colocando o foco no conteúdo matemático (como objeto de aprendizado) e não no estudante. As principais fontes de conhecimento dos professores dentro deste subdomínio tendem a ser suas próprias experiências construídas ao longo do tempo, juntamente com os resultados de pesquisas em Educação Matemática | Necessidade de o professor estar ciente de como os estudantes pensam e constroem o conhecimento ao abordar atividades e tarefas matemáticas. Isso inclui a compreensão do processo pelo qual os estudantes devem passar para lidar com diferentes tópicos de conteúdo, e as características peculiares a cada item que podem oferecer vantagens de aprendizado ou, inversamente, apresentar dificuldades. Como tal, o subdomínio leva em conta o conhecimento do professor sobre a maneira de raciocinar e proceder de seus estudantes em matemática (em particular, seus erros, áreas de dificuldade e equívocos), o que informa a interpretação de sua produção. |
| | Conhecimento das características de Aprendizagem de Matemática | Conhecimento dos conteúdos matemáticos a serem ensinados em qualquer nível. Este conhecimento é adquirido pelo professor a partir das especificações curriculares relevantes ou abstraindo as habilidades que precisam ser trabalhadas em qualquer momento em particular. | Conhecimento do professor sobre o que o estudante deve ou é capaz de alcançar em um determinado nível, em combinação com o que o estudante estudou anteriormente e as especificações para os níveis subsequentes. As exigências impostas aos estudantes em termos de conhecimentos e habilidades necessárias para qualquer tarefa em particular levam o professor a localizar tópicos tanto retrospectivamente, em termos de conhecimentos previamente adquiridos, quanto prospectivamente, de acordo com os conhecimentos que precisarão ser adquiridos para tratar de tópicos posteriores. |

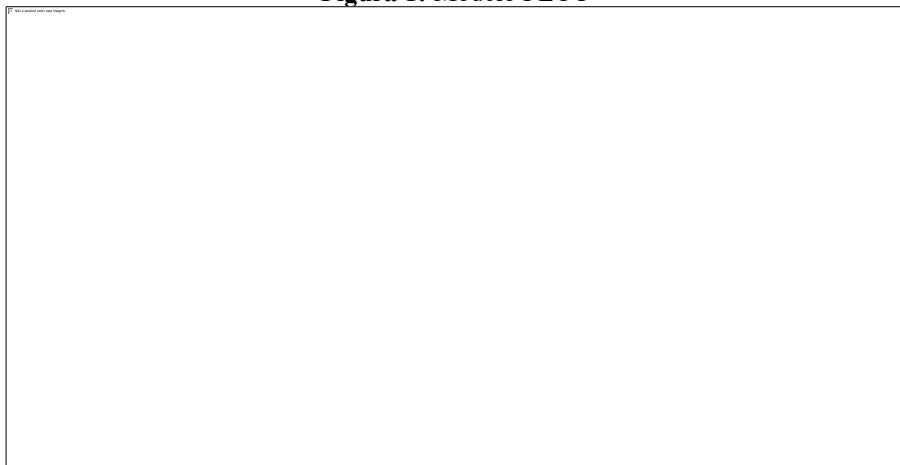
Fonte: Carrillo-Yañez *et al.* (2018).

A base do conhecimento docente destacada nesse capítulo a partir dos estudos de Shulman (1986; 1987), Ball, Thames e Phelps (2008) e Carrillo-Yañez *et al.* (2018) traz elementos que são utilizados como embasamento teórico para a concepção do processo formativo a ser analisado nesta pesquisa, pois orientam tanto as ações do formador quanto as OAP vivenciadas pelos professores.

3 OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL DOCENTE

Na direção de pensar processos formativos que ampliem os conhecimentos docentes, gerando oportunidades de aprendizagem em articulação com sua própria prática diária de sala de aula, Ribeiro e Ponte (2020) propõem o modelo *Professional Learning Opportunities for Teachers* (PLOT) – Oportunidades de Aprendizagem Profissional para Professores. Esse modelo teórico e metodológico tem por intenção subsidiar a organização de processos formativos e reconhecer oportunidades de aprendizagem por eles geradas. O modelo PLOT (Figura 1) é organizado a partir de três domínios: 1) Papel e Ações do Formador (PAF), 2) Tarefas de Aprendizagem Profissionais (TAP), e 3) Interações Discursivas entre os Participantes (IDP).

Figura 1: Modelo PLOT



Fonte: Ribeiro e Ponte (2020).

As ligações entre os domínios são representadas com linhas contínuas, pontilhadas e tracejadas. Ribeiro e Ponte (2020) destacam que as contínuas mostram a organização inicial do formador, incluindo o planejamento das TAP e a antecipação das IDP. As linhas pontilhadas representam os movimentos da segunda fase, da execução, em que os participantes (professores e formadores) começam a interagir entre si, mediados pelo uso das TAP. E, por último, a linha tracejada evidencia os movimentos realizados no processo formativo que potencializam as OAP. Como fechamento da Figura 1, o retângulo na cor verde engloba os outros componentes envolvidos no processo formativo – o contexto – representando a perspectiva de aprendizagem situada que teoricamente suporta o modelo.

No âmbito da presente pesquisa, a identificação de OAP fundamenta-se na compreensão de que tais oportunidades não se configuram como eventos diretamente observáveis, mas como unidades analíticas inferidas a partir de evidências presentes nas

interações discursivas estabelecidas em contextos formativos. Nessa perspectiva, as OAP não se confundem com as interações em si, mas emergem delas quando determinadas condições são satisfeitas, indicando potencial de desenvolvimento do conhecimento profissional docente.

Para que uma OAP seja caracterizada, torna-se necessário identificar um conjunto de evidências articuladas. Primeiramente, é imprescindível a mobilização de conhecimentos profissionais, o que se manifesta quando os participantes articulam ideias relacionadas ao conteúdo matemático, ao ensino ou à aprendizagem dos estudantes. Tal mobilização pode envolver, por exemplo, a problematização de conceitos, a análise de condições de validade ou a reflexão sobre estratégias de ensino.

Além disso, a identificação de uma OAP requer a presença de transformação ou refinamento do pensamento, evidenciada por processos de transformações e reorganização no discurso dos participantes. Um exemplo é a passagem de respostas imediatas para justificativas, de exemplos particulares para generalizações, ou ainda de interpretações intuitivas para argumentos mais estruturados. Sem a ocorrência de algum tipo de transformação, não se configura uma oportunidade de aprendizagem, mas apenas uma interação pontual.

Outro aspecto fundamental refere-se à explicitação discursiva dessas transformações. As OAP tornam-se identificáveis na medida em que os participantes externalizam seu raciocínio por meio de explicações, justificativas, contraexemplos ou comparações, permitindo ao pesquisador analisar os processos de construção de significado. Assim, o discurso assume papel central, não apenas como meio de comunicação, mas como espaço de produção e reconstrução do conhecimento.

Adicionalmente, as OAP devem ser compreendidas à luz da articulação entre as dimensões que estruturam o processo formativo, nomeadamente: as ações do formador (PAF), as tarefas de aprendizagem profissional (TAP) e as interações discursivas entre os participantes (IDP) (Ribeiro; Ponte, 2020). A integração dessas dimensões possibilita a constituição de oportunidades de aprendizagem, sendo necessário, portanto, explicitar, na análise, quais ações do formador desencadearam determinados movimentos discursivos, em que contexto de tarefa e com quais efeitos sobre o pensamento dos participantes.

Por fim, a caracterização de uma OAP implica reconhecer seu potencial formativo, ou seja, a capacidade de contribuir para o desenvolvimento do conhecimento profissional docente, no que se refere ao conteúdo matemático, ao ensino desse conteúdo ou à compreensão dos processos de aprendizagem dos estudantes. Trata-se, portanto, de uma análise que evidencia não apenas a ocorrência de interação, mas a produção de oportunidades de aprendizagem no e pelo processo formativo.

Nesse sentido, é importante distinguir OAP de interações discursivas. As interações correspondem às trocas comunicativas entre os participantes, como: perguntas, respostas, comentários ou intervenções, constituem a base empírica da análise. Entretanto, nem toda interação resulta em oportunidade de aprendizagem. As OAP, por sua vez, são identificadas quando, no interior das interações, há evidências de mobilização, transformação e desenvolvimento do conhecimento profissional.

Assim, enquanto a interação pode ser compreendida como uma unidade descritiva do discurso, a OAP constitui uma unidade teórica que emerge da análise desse discurso, exigindo a identificação de processos de mudança, aprofundamento ou reorganização do pensamento. Desse modo, destaca-se que toda OAP se materializa em interações discursivas, mas nem toda interação configura uma OAP.

No que se refere a dimensão PAF, foco de interesse dessa pesquisa, compreendemos o formador como um profissional encarregado de “ensinar professores”, que podem ser iniciantes ou com mais tempo de experiência na profissão (Martignone; Ferretti; Rodríguez-Muñiz, 2022), que faça uso de diferentes metodologias de ensino, que considere o conhecimento oriundo das experiências em articulação com pesquisas e discussões no âmbito da Educação Matemática.

Para Belo e Gonçalves (2012), o formador, no exercício de sua prática, mobiliza um conjunto de saberes que abrange não apenas o conhecimento do conteúdo a ser ensinado, mas também dimensões subjetivas, tais como crenças pessoais e experiências profissionais, que orientam suas decisões pedagógicas. Nessa mesma direção, Dario Fiorentini (2005) enfatiza que os formadores de professores devem estar preparados de modo implícito e explícito para formar docentes capazes de promover aprendizagens significativas e diversificadas, respondendo às demandas complexas do ensino e às necessidades dos estudantes. Além disso, necessitam se envolver em estudos e pesquisas tanto sobre os processos didáticos do ensino quanto em relação à ampliação do conhecimento da Matemática em seus aspectos culturais, epistemológicos e históricos, que envolvam os conteúdos e a disciplina curricular como um todo.

Assim, as ações conduzidas pelos formadores podem proporcionar OAP aos docentes, que visam tanto melhorar a compreensão dos conceitos matemáticos quanto a compreensão a respeito das dificuldades que os estudantes enfrentam, bem como discutir estratégias de ensino e recursos didáticos para superar desafios ocorridos na sala de aula (Ribeiro; Ponte, 2019).

Assim, discussões mobilizadas pelas ações do formador, relacionadas à compreensão dos conceitos matemáticos e desafios em sala de aula, podem ampliar e aprofundar os

conhecimentos profissionais quando são oportunizadas em meio a um processo formativo que contemple o envolvimento de diferentes experiências e conhecimentos docentes (Ribeiro; Aguiar; Trevisan, 2020).

As ações podem ser direcionadas por meio das TAP, elaboradas pelo formador, entendidas como instrumentos ou materiais planejados pelo docente para possibilitar discussões e reflexões sobre os saberes matemáticos e didáticos dos professores (Barboza; Pazuch; Ribeiro, 2021). Devem considerar os conhecimentos prévios e as experiências docentes com objetivos determinados pelo formador durante o processo formativo, possibilitando a ampliação dos conhecimentos dos professores (Ball; Cohen, 1999).

Para Smith (2001) é importante que as TAP permitam refletir sobre a prática da sala de aula, a fim de proporcionar momentos de discussões acerca da maneira como os professores aplicam e discutem uma tarefa matemática, como realizam intervenções, como envolvem os estudantes no objetivo da aula e como ampliam seu raciocínio matemático nas discussões em plenária, pontuando e destacando diferentes maneiras de pensar matematicamente. Deste modo, as TAP podem possibilitar, quando inseridas num processo formativo, espaços para crítica, questionamentos e investigação, possibilitando a (re) estruturação do conhecimento para o ensino e sobre os estudantes, bem como do conhecimento matemático (Barboza; Pazuch; Ribeiro, 2021).

Sobre as IDP, em um processo formativo devem ser realizadas discussões matemáticas e didáticas que oportunizem a argumentação e a justificação, bem como a mobilização da linguagem matemática, por exemplo “a partir das discussões acerca das tarefas matemáticas ofertadas aos estudantes” (Silva; Ribeiro; Aguiar, 2023, p. 80). Como apontado por Trevisan *et al.* (2023), ao pensar o *design* do processo formativo, deve-se favorecer discussões matemáticas e didáticas facilitadoras da elaboração de boas argumentações e articulação sobre o conhecimento abordado.

Ribeiro e Ponte (2020) apresentam as dimensões e os componentes de cada um dos três domínios do modelo PLOT, evidenciando as estruturas, as bases teóricas e as orientações para organizar o processo de formação de professores e/ou identificar e compreender se e como surgem OAP para os professores (Quadro 4).

Quadro 4: Dimensões, componentes e características do modelo PLOT nos três domínios

| | Dimensão Conceitual | | Dimensão Operacional | |
|--------------|---------------------|--|----------------------|---|
| | Componente | Característica | Componente | Característica |
| Papel e Ação | Aproximação | Favorecer a aproximação entre a matemática | Gestão | Seguindo um ambiente de ensino-aprendizagem exploratório baseado na |

| | | | | |
|------------------------|------------------------------------|---|-----------------------|---|
| | | acadêmica e a matemática escolar e vice-versa. | | investigação, nas suas diferentes fases. |
| | Articulação | Estimular a articulação entre as dimensões matemática e didática a partir do conhecimento profissional para a docência. | Orquestração | Preparar e desenvolver a orquestração de discussões matemáticas e didáticas entre todos os participantes. |
| TAP | Conhecimento Profissional | Explorar os conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores relacionados com as tarefas. | Tarefa Matemática | Propor tarefas matemáticas de elevado nível cognitivo. |
| | Ensino Exploratório | Utilizar uma estrutura que proporcione um ambiente de ensino-aprendizagem baseado na investigação. | Registros de Prática | Envolvendo diferentes tipos de registos de prática, organizados sob a forma de vinhetas. |
| Interações Discursivas | Discussões matemáticas e didáticas | Articular questões matemáticas e didáticas relacionadas com as tarefas. | Linguagem mobilizada | Utilizar uma linguagem matemática e didática adequada ao nível dos estudantes. |
| | Argumentação e Justificação | Envolvendo argumentos e justificações matemáticas e didáticas válidas. | Comunicação dialógica | Promover a comunicação dialógica e integradora entre todos os participantes. |

Fonte: Ribeiro e Ponte (2020, p. 7).

O Quadro 4 apresenta, detalhadamente, cada um dos domínios, dimensões, componentes e características destacadas pelos autores. Neste modelo, é possível compreender como o formador pode organizar um processo formativo, desde o planejamento até o reconhecimento das OAP que podem ser geradas a partir da realização das TAP e das IDP, potencializadas com o PAF. Neste estudo, o foco está no papel e nas ações do formador e, de acordo com o proposto por Ribeiro e Ponte (2020) no Quadro 4, essas ações são organizadas conceitualmente (aproximação e articulação) e operacionalmente (gestão e orquestração).

O componente de aproximação é importante no campo da Educação Matemática, pois busca estreitar a ligação entre o que é ensinado nas escolas e o que é pesquisado e praticado nas instituições acadêmicas, proporcionando uma experiência mais integrada e significativa de aprendizagem em matemática. Já a articulação combina as dimensões matemática e didática do conhecimento profissional (Ribeiro; Ponte, 2020), auxiliando professores a compreenderem não apenas os conceitos matemáticos, mas também como ensiná-los de maneira acessível e envolvente para seus estudantes.

A gestão estimula os professores/futuros professores a explorarem ativamente conceitos e temas por meio de experiências práticas, pesquisas e resolução de problemas. Essa abordagem pode ser dividida em diferentes fases para garantir uma implementação eficaz, desde a organização do ambiente de aprendizagem, da tarefa matemática, das discussões e

avaliações. Por último, a orquestração de discussões matemáticas e didáticas entre todos os participantes em um ambiente de aprendizagem é uma estratégia para promover a compreensão e o engajamento dos estudantes. Essa abordagem incentiva a colaboração, a troca de ideias e a construção coletiva do conhecimento.

O modelo PLOT foi o recurso metodológico utilizado para trilhar os caminhos do processo formativo, o qual é analisado nesta pesquisa. Diante disso, dedicamos a próxima seção a aprofundar discussões sobre o papel e as ações do formador na perspectiva de algumas pesquisas, visto que a temática é pouco explorada na literatura no que tange as maneiras como os formadores facilitam ambientes de aprendizagem docente (Gibbons *et al.*, 2021).

Nessa direção, a pesquisa de Trevisoli (2024) contribui à esse debate ao analisar as OAP relacionadas ao RM, seus processos e entendimentos, vivenciadas por uma professora ao longo das etapas de planejamento, desenvolvimento e reflexão de uma aula, no âmbito do Ciclo PDR. Essas OAP foram segmentadas em dois grupos: Conhecimento Especializado do RM e Conhecimento Pedagógico do RM, que foi organizado em duas categorias: Conhecimento do RM e do ensino e Conhecimento do RM e dos estudantes.

Figura 2: OAP e o Conhecimento do RM para o Ensino



Fonte: Trevisolli (2024)

Na pesquisa de Trevisolli (2024) o conhecimento docente considerado para as análises e resultados apresentados foi categorizado em duas principais vertentes, conforme discutido no contexto do conhecimento matemático para o ensino (Ball; Thames; Phelps, 2008). O conhecimento especializado do conteúdo, envolveu aspectos teóricos e práticos relacionados ao conteúdo matemático, a partir das OAP: 1) diferenciar uma conjectura de uma generalização; 2) reconhecer a importância do uso de contraexemplos; 3) usar diferentes representações de um mesmo conceito matemático; e 4) compreender a possibilidade de generalizar por meio da identificação de semelhanças entre casos.

Já o conhecimento pedagógico do conteúdo refere-se na análise da autora à forma como o professor organiza e apresenta o conteúdo em sala de aula, envolvendo práticas pedagógicas. A autora dividiu esses grupos nos conhecimentos do RM e do RM e dos estudantes.

As OAP geradas que se referem ao conhecimento do RM estão: 5) reconhecer que a aplicação da tarefa matemática requer questionamentos aos estudantes; 6) planejar a tarefa de maneira que permita que os alunos conjecturem, generalizem e justifiquem; 7) continuar aprimorando a prática docente por meio de formação continuada que integre teoria e prática real, permitindo a aprendizagem entre pares. As OAP relacionados ao conhecimento do RM e dos estudantes envolvem: 8) reconhecer, discutir e refletir sobre os conteúdos que são essenciais para auxiliar o estudante durante o processo de aprendizagem; 9) antecipar o que pensam os estudantes, quais suas dificuldades e como interpretam as tarefas matemáticas, prevendo acertos e erros; 10) estimular os estudantes a entrarem nos processos de conjecturar, generalizar e justificar; e 11) reconhecer que as resoluções (corretas ou incorretas) dos estudantes podem apresentar argumentos que necessitam ser investigados.

As OAP reconhecidas por Trevisolli (2024) ajudaram a entender como a professora articulou seu conhecimento sobre matemática, didático e pedagógico durante o processo formativo.

3.1 Papel e Ações do Formador de Professores que Ensinam Matemática

Embora a caracterização dos profissionais responsáveis por conduzir processos formativos envolva diferentes termos, como *facilitator*, *teacher educator* e *training* (Gross; Trevisan; Araman, 2026) neste trabalho adotamos a expressão “formador” (presente no modelo PLOT) como contemplando características comuns a todos eles.

Coura e Passos (2017, p. 9) propõem uma caracterização do formador, no contexto da formação inicial (mas que pode ser expandida também para a formação continuada – nosso foco de interesse), como

um elemento importante na formação docente, na medida em que, durante suas aulas, realiza um trabalho muito parecido com o que o licenciando presenciou quando estudante na Educação Básica e com o que pode realizar quando for lecionar. Por outro lado, o formador é, ele próprio, um professor que também se forma no exercício da profissão, pois precisa mobilizar seus conhecimentos para empreender práticas que atendam às demandas do seu contexto profissional. Desse modo, mantém uma dupla relação com a formação de professores: como agente em sua própria formação e na formação de seus estudantes, futuros professores. (Coura; Passos, 2017, p. 9).

Para Borko *et al.* (2014), esse profissional seleciona materiais, organiza-os e promove momentos com conversas produtivas, de acordo com o contexto da formação, incentivando os participantes a analisar e estudar tarefas matemáticas, registros de prática e raciocínios envolvidos nas resoluções dos estudantes. Nesta mesma perspectiva, Boston (2013) pontua que os formadores realizam movimentos que podem promover conexões entre as estratégias didáticas e matemáticas a partir de discussões com o trabalho envolvendo tarefas matemáticas, enquanto Stockero e Van Zoest (2013) descrevem que os eles apoiam a decisão e a percepção dos professores concentrando-se nos episódios que registrem raciocínios dos estudantes.

Em termos gerais, “os formadores são responsáveis pela elaboração de tarefas de alto nível cognitivo e da orientação e organização de materiais e movimentos de facilitação” (Gross; Trevisan; Araman, 2026, p. 14). Compreende-se o formador como um profissional que articula, de maneira integrada, conhecimentos relativos ao conteúdo específico e às dimensões didáticas e pedagógicas do ensino, mobilizando tais saberes na condução de processos formativos contínuos junto a professores com experiência ou sem experiência docente.

A partir da necessidade de organizar processos formativos que proporcionem aos professores, iniciantes ou não, momentos em que sejam geradas OAP esta pesquisa destaca a importância do conhecimento do formador. Faz-se necessário que esse profissional contemple estudos e pesquisas relacionados à Educação Matemática incluindo o conhecimento da sala de aula, das ações realizadas pelos professores e, também, como os estudantes estão aprendendo a partir delas. Sendo assim, o formador precisa envolver-se em um processo formativo conhecimentos didáticos, da Matemática como disciplina e da Educação Matemática.

No que se refere aos conhecimentos didáticos, uma possibilidade de prática que pode ser utilizada pelo formador é destacada por Stein *et al.* (2008) quando refletem sobre a promoção de ricas discussões em aulas que envolvam tarefas matemáticas, e que podem ser utilizadas em um processo formativo. São elas: antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar e fazer conexões entre as ideias e raciocínios apresentados pelos estudantes. De acordo com os autores as práticas são pensadas quando os professores planejam suas tarefas matemáticas a serem aplicadas em suas turmas, possibilitando pensar sobre a importância da realização de um bom planejamento e uso de diferentes estratégias.

Como apontado por Elliott *et al.* (2009), no caso do formador, essas práticas podem ser utilizadas como direcionadoras no trabalho com os professores, para que ao anteciparem possíveis soluções de uma tarefa ampliem seus conhecimentos e repensem suas práticas em sala de aula, que compreendam como monitorar e sequenciar as respostas que podem surgir a partir da tarefa. É fundamental que professor experiencie essas práticas em um processo formativo,

compreendendo a relevância e os resultados que podem surgir quando são transpostas para trabalho com tarefas matemáticas com seus próprios estudantes.

Sobre o conhecimento dos conteúdos, as ideias de Mishra e Koehler (2006) corroboram com Shulman (1986) quando descrevem que o professor precisa compreender conceitos, assuntos, contextos, teorias, métodos, provas que sejam relacionados às diferentes práticas realizadas e que, ainda, ampliem o conhecimento do estudante para outros meios que utilizem os conteúdos matemáticos.

É importante, ainda, que o formador tenha conhecimento de pesquisa em Educação Matemática, conforme destacado por Ferreti, Martignone e Rodriguez-Muñiz (2021), estabelecendo conexões entre conhecimentos de pesquisas em desenvolvimento e pesquisadores da área, englobando conhecimento conceituais, teóricos e práticos diretamente relacionados ao ensino de Matemática. Desse modo, o formador, que além de lecionar e atuar em processos de formação para professores, também é um pesquisador, expande as OAP, sendo capaz de planejar um espaço de formação contendo diferentes metodologias, tecnologias e estratégias de ensino e de aprendizagem. Nesse caso, quando o formador aprofunda seus conhecimentos sobre a Educação Matemática, também motiva e propicia que os professores participantes do processo formativo aprimorem seus conhecimentos no que diz respeito as novidades que circundam o ensino e a aprendizagem da Matemática.

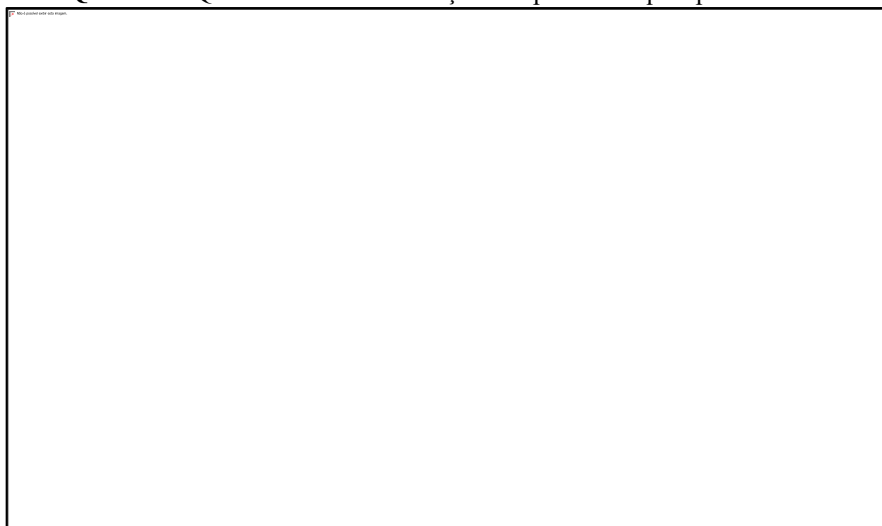
Os processos formativos que contam com formadores que estejam preparados para organizar, gerenciar e conduzir formações, contribuem para que os professores mobilizem diferentes dimensões do seu conhecimento profissional (Ponte, 1999). A organização e orientação direcionada pelo formador, que contemple elementos da sala de aula, discussões matemáticas e didáticas, é essencial para gerar OAP (Ponte; Quaresma, 2016). No que diz respeito ao preparo do formador, é importante que ele utilize diferentes estratégias metodológicas. É oportuno constituir um ambiente na perspectiva do ensino exploratório, em que o formador estimula o uso de linguagem matemática correta e adequada ao nível de ensino que os professores estão trabalhando, oportunizando que reconheçam a importância da comunicação dialógica no desenvolvimento de suas aulas (Silva; Ribeiro; Aguiar, 2023).

Nesse sentido, o formador, a partir de seus conhecimentos, promove situações que podem ser geradoras de diferentes OAP, e estas, por sua vez podem implicar na mudança das práticas em sala de aula de professores envolvidos. Mais especificamente, neste trabalho, assume que podem-se gerar OAP especificamente acerca do RM por meio de ações orientadas e conduzidas pelos formadores. Embora os trabalhos discutidos a seguir tratem de ações do professor para a promoção do RM dos estudantes, entendemos que podem ser transpostas para

o contexto de um processo formativo em que esses sujeitos são professores, e as ações são mediadas por um formador. Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) destacam que é preciso criar um ambiente de ensino e de aprendizagem que envolva discussões matemáticas entre os professores e os estudantes. Ellis, Özgür e Reiten (2019), por sua vez, desenvolvem um modelo de ações do professor especificamente para a promoção do RM. Para as autoras, “as discussões em sala de aula devem concentrar-se tanto em ideias matemáticas importantes quanto no desenvolvimento de significados matemáticos por meio de processos comunicativos” (Ellis; Özgür; Reiten, 2019, p. 2).

Como forma de sintetizar resultados destes dois modelos, Araman, Serrazina e Ponte (2019) propõem um quadro teórico (Quadro 5) destacando as ações docentes junto aos estudantes, considerando que o professor quando participa de um processo formativo objetiva aprender. Compreendemos que as ações listadas por Araman, Serrazina e Ponte (2019) também podem ser realizadas pelo formador. Considerando esse foco, destacamos que a ação de convidar solicita informações, seja por meio de questões diretas ou explicações dos professores sobre o pensamento ou a resolução realizada, objetivando observar como eles estão raciocinando e qual as compreensões a respeito do conteúdo ou da tarefa proposta.

Quadro 5: Quadro de análise das ações do professor que apoiam o RM



Fonte: Araman, Serrazina e Ponte (2019, p. 476)

A respeito das ações de apoiar/guiar o formador pode promover a participação e a condução do pensamento por meio de perguntas ou intervenções (Ponte; Mata-Pereira; Quaresma, 2013, p. 59), guiando os professores a continuarem pensando sobre uma resolução de uma tarefa já iniciada (Trevisan *et al.* 2023).

Ao informar/sugerir as ações dos formadores são voltadas para a validação das respostas dos professores. Nesse momento, o formador assume o papel de introduzir informação e proporcionar argumentos (Ponte; Mata-Pereira; Quaresma, 2013). Como última ação, o

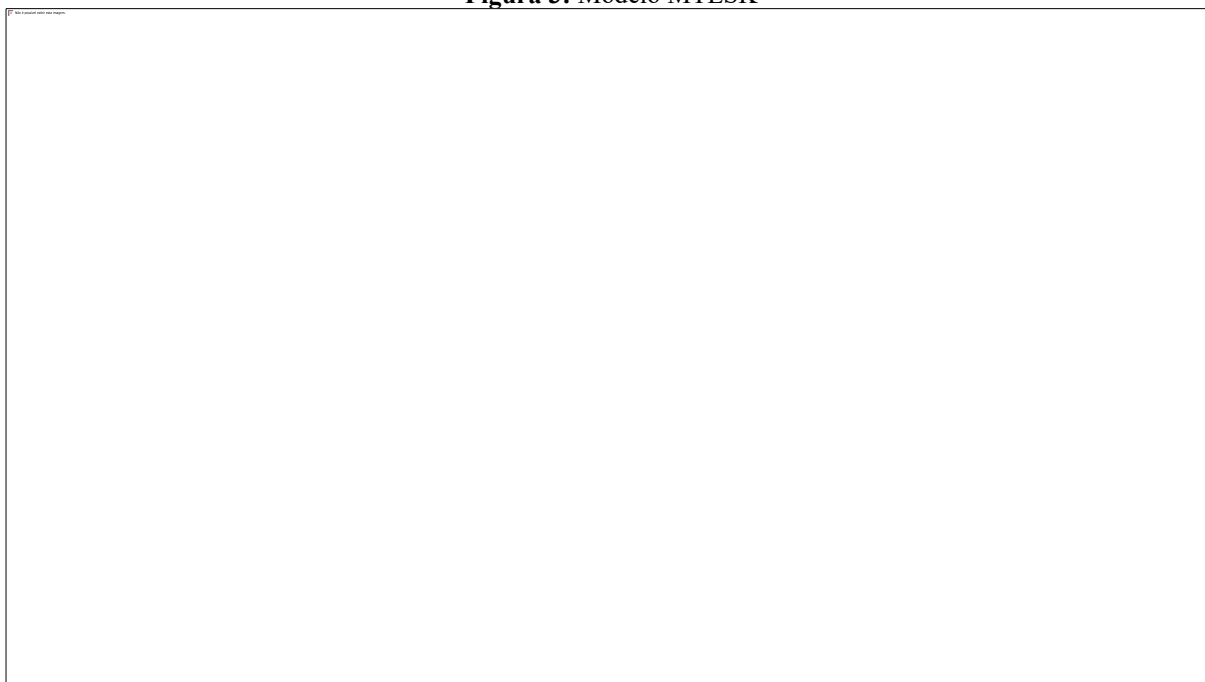
formador precisa desafiar os professores a justificarem o porquê, proporcionando o avançar em algo novo, “seja em termos de representações, da interpretação de enunciados, do estabelecimento de conexões, ou de raciocinar, argumentar ou avaliar” (Ponte; Mata-Pereira; Quaresma, p. 59).

Mediante tais ações no contexto de processos formativos, os formadores podem promover OAP envolvendo diferentes “instâncias” do contexto escolar, como conhecimentos curriculares, do ensino, das práticas realizadas em sala de aula, dos estudantes e dos recursos.

Ferreti, Martignone e Rodriguez-Muñiz (2021) concentram pesquisas no conhecimento especializado dos formadores de professores de Matemática considerando o modelo destacado por Carrillo-Yañez *et al.* (2018).

O modelo proposto é designado como Conhecimento Especializado do Formador de Professores de Matemática (*Mathematics Teacher Educator Specialized Knowledge - MTESK Model*) apresentado na Figura 3. Foi organizado com base no MTSK, porém com foco no conhecimento dos formadores de professores de Matemática, destacando as características do conhecimento dos formadores, identificando domínios a serem acrescentados ou refinados. Como o MTSK se refere aos professores, o modelo MTESK busca trazer uma perspectiva e uma ferramenta para analisar o conhecimento que o formador demonstra, declara ou possui (Ferreti; Martignone; Rodriguez-Muñiz, 2021) e que pode gerar OAP aos professores.

Figura 3: Modelo MTESK



Fonte: Ferreti, Martignone e Rodriguez-Muñiz (2021)

O MTESK parte da mesma estrutura apresentada por Carrillo-Yañez *et al.* (2018) com foco no Conhecimento Matemático e no Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, destacando

como diferença que em cada subdomínio a própria especificidade o distingue do respectivo subdomínio no modelo MTSK. Sendo assim, os subdomínios do MTESK são direcionados para o professor que está em formação, seja ela inicial ou continuada, sob a orientação do formador combinando duas perspectivas: como estudante e como professor, uma vez que está a ser formado sobre a sua experiência de ensino (Ferreti; Martignone; Rodriguez-Muñiz, 2021).

No que se refere ao Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, o MTESK apresenta um subdomínio específico chamado de Conhecimento de Pesquisa em Educação Matemática (*Knowledge of Research in Mathematics Education - KOMER*) estando diretamente ligado ao Conhecimento dos Recursos para Aprender Matemática e ao Conhecimento de Ensino de Matemática proposto por Carrillo-Yañez *et al.* (2018).

O Conhecimento de Pesquisa em Educação Matemática refere-se a ir além do conhecimento básico disciplinar, uma vez que um formador de professores que ensinam matemática precisa conhecer os principais fundamentos e princípios da pesquisa em Educação Matemática, que abrange aspectos conceituais, teóricos e práticos do ensino da Matemática bem como as características do processo de aprendizagem.

No modelo MTESK, compreende-se que os professores em formação fazem papel de professor e de estudante. No entanto Ferreti, Martignone e Rodriguez-Muñiz (2021) consideram que para o Conhecimento dos Recursos para Aprender Matemática (KFLM) e ao Conhecimento de Ensino de Matemática (KMT) se faz necessário distinguir os processos de ensino e aprendizagem dos estudantes ou dos professores. Devido a isso, propõem uma redivisão no domínio Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, abrangendo: o Conhecimento de Ensino de Matemática (KMT) dos professores, Conhecimento de Ensino de Matemática (KMT) dos estudantes, Conhecimento dos Recursos para Aprender Matemática (KFLM) dos professores, Conhecimento dos Recursos para Aprender Matemática (KFLM) dos estudantes e o Conhecimento de Pesquisa em Educação Matemática (KOMER).

Os autores destacam que os formadores, a partir das suas experiências, pontuam necessidades de estudo como: ambiente para ensinar professores, dúvidas de como ensinar professores, criar oportunidades com momentos que propiciem discussões entre professores acerca das suas experiências envolvendo diferentes métodos, instrumentos, tarefas a serem compartilhadas e ampliadas.

Ferreira, Ribeiro e Ponte (2023) investigam ações e práticas realizadas por uma formadora de professores que ensinam matemática, a partir de discussões coletivas referente ao ensino de Álgebra. Com o estudo esses autores conseguiram identificar as ações e as práticas desenvolvidas pela formadora construindo um quadro de referência que pode contribuir tanto

para a condução de processos formativos quanto para a construção de conhecimentos e habilidades necessárias direcionadas para formadores que busquem gerar OAP.

O Quadro 6 apresenta as ações e práticas apresentados por Ferreira, Ribeiro e Ponte (2023) inspirado no modelo PLOT de Ribeiro e Ponte (2020). As práticas e ações evidenciadas a seguir serão utilizadas como base para as análises a serem realizadas nesta tese.

Quadro 6: Classificação das práticas e ações do formador durante discussões coletivas

| Práticas do formador | Descrição | Ações do formador |
|---|--|--|
| Estabelecer uma comunidade de aprendizagem | Proporcionar um ambiente em que os professores se sintam seguros e encorajados a compartilhar suas ideias e Práticas | Elogiar e incentivar |
| | | Brincar |
| | | Apoiar |
| | | Compartilhar experiências pessoais |
| | | Convidar |
| Interpretar as interações com os professores e entre os professores | Atribuir significado e sentido às diferentes interações | Validar |
| | | Parafrasear (<i>revoicing</i>) |
| | | Estender/Ampliar |
| | | Solicitar esclarecimentos |
| | | Ouvir |
| Estabelecer conexões | Estabelecer relações com elementos internos e externos ao processo formativo | Esclarecer/Explicar |
| | | Relacionar |
| Desafiar os professores a avançar em seus conhecimentos | Lançar questões desafiando os professores a avançar em seus conhecimentos | Retomar |
| | | Contrapor |
| Sistematizar aprendizagens | Fazer uma síntese das discussões e conhecimentos relacionando com os objetivos da formação | Questionar |
| | | Resumir os tópicos principais da discussão |
| | | Recuperar os conhecimentos prévios |

Fonte: Adaptado de Ferreira, Ribeiro e Ponte (2023).

As práticas do formador propostas por Ferreira, Ribeiro e Ponte (2023) são organizadas em cinco categorias: estabelecer uma comunidade de aprendizagem; interpretar as interações com os professores e entre os professores; estabelecer conexões; desafiar os professores a avançar em seus conhecimentos; e sistematizar aprendizagens.

Para os autores “estabelecer uma comunidade de aprendizagem” se refere ao envolvimento e participação ativa dos professores durante o processo formativo, especialmente nas discussões coletivas, que são vistas como propulsoras da aprendizagem. Nessa prática, o formador realiza ações de elogiar e incentivar, brincar, apoiar, compartilhar experiências pessoais e convidar. Essas ações possibilitam que os participantes a compartilhem suas observações e experiências, promovendo um ambiente seguro e receptivo. Essa prática aumenta o envolvimento dos professores, facilita a construção de conhecimento coletivo e a troca de ideias, contribuindo para um aprendizado mais contextualizado na prática docente.

A prática de “interpretar as interações com os professores e entre os professores” refere-se à habilidade do formador em ouvir, compreender e analisar as IDP (Ribeiro; Ponte, 2020) que ocorrem durante os momentos de discussão coletiva. Essa prática permite que o formador, a partir das ações de validar, parafrasear, estender/ampliar, solicitar esclarecimentos, ouvir e esclarecer/explicar, reconheça os pontos principais do que está sendo debatido e tome decisões informadas sobre como orientar a discussão, com intenção de oportunizar aos participantes OAP.

A prática de "estabelecer conexões" refere-se à habilidade do formador em criar ligações entre diferentes elementos do conteúdo matemático e do ensino, promovendo a relação do que está sendo discutido com outros aspectos da prática dos professores e com conhecimentos prévios. Essa prática é fundamental para enriquecer o processo formativo e facilitar a aprendizagem docente a partir da criação de diferentes OAP, e pode-se realizar por meio de ações como relacionar e retomar.

A prática de "desafiar os professores a avançar em seus conhecimentos" refere-se à estratégia que o formador utiliza para incentivar os professores a refletirem criticamente sobre suas próprias concepções, abordagens e práticas pedagógicas. Essa prática pode promover um ambiente de aprendizagem ativo e estimulante, onde os professores são encorajados a gerar OAP. Para isso o formador, a partir de ações, precisa contrapor e questionar os debates e discussões realizadas.

A prática de "sistematizar aprendizagens" refere-se ao processo de organizar e consolidar o conhecimento adquirido durante as discussões e as TAP, visando a estruturação e a reflexão sobre as aprendizagens dos participantes. Esta prática é fundamental para a efetivação do processo formativo, pois permite que os professores organizem, integrem e reflitam sobre o conhecimento adquirido, tornando-o mais acessível e aplicável em suas práticas pedagógicas. É uma etapa que assegura a continuidade do aprendizado e fortalece a formação profissional dos educadores, em que o formador a partir de suas ações pode resumir os tópicos principais da discussão e recuperar os conhecimentos prévios docentes.

Mediante tais práticas, no contexto de processos formativos, os formadores podem promover OAP envolvendo diferentes “instâncias” do contexto escolar, como conhecimentos curriculares, do ensino, das práticas realizadas em sala de aula, dos estudantes e dos recursos.

A organização, os conhecimentos e as ações desempenhadas pelo formador para realização de um processo formativo podem ser orientadas pela teoria (de acordo com a temática a ser trabalhada). Também, pelas mobilizações dos professores em práticas que

possibilitem discutir episódios que ocorrem em sala de aula, a partir de diferentes momentos de trabalho e reflexão individual e especialmente coletiva.

Trevisan, Ribeiro e Ponte (2020) refletem sobre três segmentos de atividades de prática docente, o planejamento, o desenvolvimento e a reflexão de uma aula, que denominam de Ciclo PDR. Para os autores, os segmentos são realizados em processos formativos que contemplem a participação de professores que estudem e analisem tarefas matemáticas, considerando o modelo pedagógico de cinco práticas (antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar e fazer conexões entre as respostas dos estudantes) proposto por Stein *et al.* (2008).

No segmento de planejamento Trevisan, Ribeiro e Ponte (2020), propõem que este pode ser realizado em pequenos grupos, em que os professores organizam uma proposta de aula sobre um determinado conceito matemático, seguida de uma apresentação e discussão coletiva e como planejam aplicá-la. Para o desenvolvimento, um (ou mais) professor (es) aplica (m) o plano de aula em sala de aula, com o acompanhamento do formador e de outros professores participantes do processo formativo. E no último segmento, é o momento de refletir sobre a aplicação da aula, a partir da organização do material pelo formador, preparando episódios a partir dos registros da prática gerados na aula (ou aulas) desenvolvida. Neste momento, os professores realizam uma análise detalhada dos episódios de aula, a contar dos vídeos, áudios e registros escritos, e os discutem na sessão final de maneira coletiva.

A implantação do ciclo PDR é uma opção para organização do processo formativo, sendo cada uma das etapas P, D e R consideradas como uma TAP organizada a partir da própria realidade dos professores participantes (Ribeiro; Ponte, 2020).

A experiência vivenciada em processos formativos pode auxiliar os professores pensarem na promoção do RM dos estudantes, principalmente quando refletem sobre suas aulas. Proporcionar ao professor que estude a análise registros de práticas (escrito, áudio, vídeo ou transcrições) pode ser uma boa oportunidade para refletir sobre a aprendizagem, refletindo se a tarefa foi bem elaborada e se apresenta potencial para a promoção do RM. As reflexões oriundas desse tipo de experiência, organizada pelo formador, possibilita aprofundamentos em diversos domínios do conhecimento profissional.

Neste capítulo, foram discutidas as oportunidades de aprendizagem a partir do papel e das ações do formador, levando em conta seus conhecimentos didáticos, pedagógicos, disciplinares e de pesquisa, bem como possibilidades de organização de processos formativos que possibilitem gerar OAP. Nossa intenção é, por um lado, organizar um processo formativo a partir desses pressupostos. Por outro, utilizá-los também para refletir teoricamente sobre as OAP geradas nesse processo.

4 RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Para Henriques e Ponte (2014), o desenvolvimento do RM é base para o sucesso dos estudantes. Segundo Oliveira (2008), o RM caracteriza-se pela mobilização de processos mentais complexos, cujo desenvolvimento não pode ser compreendido por meio de trajetórias lineares ou etapas rigidamente sequenciadas, mas sim como um processo dinâmico, que se constrói a partir das interações, das práticas discursivas e das experiências dos sujeitos em contextos de aprendizagem matemática. Nesse pressuposto, o envolvimento dos estudantes é um dos pontos cruciais para que esse desenvolvimento ocorra. Momentos de discussão envolvendo argumentos, análise, interação em grupos de trabalhos quando resolvem tarefas matemáticas, podem proporcionar condições favoráveis ao desenvolvimento do RM.

Desse modo, a falta de compreensão dos estudantes aparece como algo preocupante, pois muitas vezes fazem uso apenas da memorização de propriedades, resolução de exercícios de forma mecânica e padronizada (Steen, 1999) não participando de momentos que possibilitem pensar, raciocinar, inferir resoluções, discutir com os colegas, por exemplo.

Para que possam possibilitar o desenvolvimento do RM dos estudantes, é fundamental que antes, esses momentos sejam vivenciados pelos professores, pois eles precisam conhecer como isso pode ser realizado, as oportunidades e dificuldades que podem ser geradas, e como implementar essa prática em sala de aula. Uma maneira que se apresenta oportuna é promover um ambiente para os professores aprenderem a trabalhar com aspectos relacionados ao entendimento do RM dos estudantes procurando conhecer como raciocinam quando resolvem tarefas na disciplina de Matemática (Mata-Pereira; Ponte, 2013).

Neste sentido, buscar possibilidades que oportunizem aos professores planejar, desenvolver e refletir alternativas que possam aprofundar o entendimento, acerca do RM próprio e conseqüentemente dos estudantes, avista-se como uma possível lacuna na formação de professores que ensinam matemática.

Pesquisas apontam a importância de os professores aprenderem sobre como promover práticas em sala de aula que contemplem o desenvolvimento do RM, desde o planejamento até as discussões coletivas da implementação da tarefa realizada em sala de aula (Brocardo *et al.* 2022; Gregório; Oliveira, 2018; Herbert; Bragg, 2020; Morais *et al.* 2022; Trevisan; Araman, 2021).

Para Jeannotte e Kieran (2017) a compreensão sobre o que é o RM ainda é polissêmica, apresentando diferentes visões. Para Pólya (2006), por exemplo, o raciocínio tem papel importante destacando a criação de conjecturas por meio do raciocínio plausível, sustentando-

se em argumentos, procurando diferenciar uma conjectura de outra a partir de estratégias que podem ser relacionadas.

Questionamentos realizados pelo professor podem possibilitar a formulação de conjecturas perante a tarefa matemática proposta considerando experiências dos estudantes, conhecimentos prévios, pensamentos, entre outros, formulando hipóteses (conjecturas). Caso a validação da conjectura não ocorra, o estudante pode repensar suas hipóteses procurando encontrar outras conjecturas, se for válida, poderá pensar em argumentos que validem essa afirmação, e por fim conseguir convencer a si mesmo e aos outros que esse argumento é válido para a situação de estudo.

Para Brodie (2010), raciocinar matematicamente envolve conectar-se com o algum tipo de conhecimento atual, ou mesmo experiências já vivenciadas. O estudante carrega muitos conhecimentos, sejam eles sociais, históricos ou culturais, logo não realiza tarefas em sala de aula sem considerar o que já conhece, na grande maioria das vezes, o conhecimento parte de momentos já experimentados, para que diante disso procure raciocinar sobre o novo aprendizado.

É importante que o professor proporcione conexões sobre os conhecimentos prévios e os novos, possibilitando que o estudante os transforme em formas de como raciocinar a partir da nova experiência. Brodie (2010) destaca, também, que o RM ocorre quando são desenvolvidos pensamentos e/ou argumentações que podem servir para vários domínios diferentes, e esse processo envolve o (re) conhecimento e convencimento sobre as estratégias utilizadas e posteriormente a afirmação concluída. Isso implica promover momentos de discussão, que visem ouvir, analisar e criticar as decisões em grupo. Os professores precisam ouvir os estudantes, desde seus pensamentos sobre a compreensão matemática até as afirmações que são realizadas de maneira mais convincente. Conhecer o estudante, a forma como ele pensa, é ponto crucial para que o professor consiga analisar se este está raciocinando, procurando, através disso, promover discussões a partir de questionamentos sobre seus erros e suas estratégias, favorecendo a argumentação matemática.

Brodie (2010) discute, ainda, que o ensino precisa contemplar tipos de tarefas que os estudantes se envolvem, as resoluções dessas tarefas, o que pensam, como refletem, os tipos de interações que podem ser realizadas. Nesse caso, as tarefas, precisam ser (re) pensadas e estudadas para que promovam o RM, possibilitando que o estudante realize os seguintes questionamentos: O que é verdade? Como posso ter certeza disso? Por que isso é verdade? (Open University, 1997).

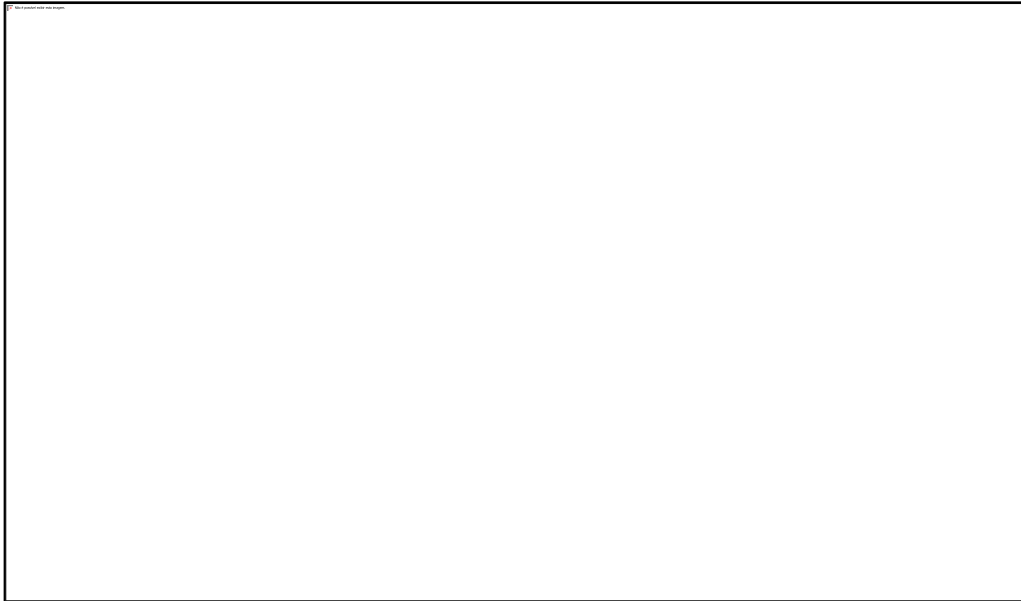
Para Mata-Pereira e Ponte (2013, p. 1), “raciocinar, mais do que reproduzir conceitos memorizados e efetuar procedimentos rotineiros, é formular inferências (não imediatas) a partir da informação disponível”. Para esses autores, a capacidade de raciocinar matematicamente inclui diversos processos, como formular e testar conjecturas, justificar e validar argumentos matemáticos.

Para contribuir com as discussões acerca do RM aprofundamos duas frentes de estudo sobre o RM, sendo: I) entendimentos essenciais do RM, de Lannin, Ellis e Elliott (2011), e II) o modelo conceitual do RM para a matemática escolar de Jeannotte e Kieran (2017).

4.1 Entendimentos Essenciais do RM

Para Lannin, Ellis e Elliott (2011) o RM compõe uma grande área da matemática escolar crucial para os estudantes aprenderem, mas desafiadora para os professores ensinarem, pois exige profundamente que as ideias matemáticas sejam conhecidas, e ainda, como se relacionam umas com as outras, compreensão considerada difícil de ser identificado pelos professores. Os autores destacam, no livro “*Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning*” (Lannin; Ellis; Elliott, 2011), alguns entendimentos essenciais sobre o RM, para que os professores promovam tarefas matemáticas que apresentem potencial para o desenvolvimento do RM.

A imagem da lâmpada na Figura 4 simboliza, nas palavras de Lannin, Ellis e Elliott (2011), uma “grande ideia” do RM, considerado um processo evolutivo de conjecturar, generalizar, investigar o porquê, desenvolver e avaliar argumentos (Lannin; Ellis; Elliott, 2011). As compreensões destacadas pelos autores envolvem três grupos de processos evolutivos, constituídos na imagem pelas engrenagens (1 – laranja; 2 – verde; 3 – azul), que representam uma transmissão de esforços através da rotação em um eixo, e a combinação das três engrenagens transmitem potencial para essa movimentação. Considerando a função da engrenagem, a relação mostrada na Figura 4 tem por objetivo ilustrar a ideia de que os entendimentos não são isolados, mas articulados entre si.

Figura 4: Entendimentos essenciais do RM propostos por Lannin, Ellis e Elliott (2011)

Fonte: Autoria própria (2023).

Para completar o modelo, os entendimentos estão representados como as peças do quebra-cabeça, as quais dependem uma das outras para criar uma direção para compreender o RM. O conjunto das quatro primeiras engrenagens contempla os processos de conjecturar e generalizar. Conjecturar para Lannin, Ellis e Elliott (2011) é uma forma natural de os estudantes iniciarem o desenvolvimento do RM. Eles desenvolvem conjecturas sobre a Matemática de maneira implícita ou explícita, podendo ocorrer em qualquer momento em sala de aula, pois consideram conceitos e habilidades que já conhecem. Assim, uma conjectura serve como um ponto de entrada na tarefa matemática e no RM, fazendo parte do processo realizar afirmações verdadeiras ou falsas, resultando ou não em uma generalização.

Já a generalização provém da identificação de elementos comuns e a expansão do RM para além do intervalo em que originalmente foi gerado. Pode assumir diferentes formas, como por exemplos descrições verbais, exemplos e digramas, e nem sempre é concluída por meio de uma regra ou expressão algébrica. Logo, generalizar é importante para dar suporte nas capacidades de pensar amplamente e flexivelmente sobre ideias e relações matemáticas (Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

Nesse primeiro grupo, de conjecturar e generalizar, estão contidos os 4 primeiros entendimentos essenciais (Lannin; Ellis; Elliott, 2011) sendo:



Entendimento essencial 1 – “conjecturar envolve raciocinar sobre as relações matemáticas para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras, mas que não

são conhecidas como verdadeiras. Estas afirmações são chamadas de conjecturas” (Lannin, Ellis, Elliott, 2011, p. 13);



Entendimento essencial 2 – “generalizar envolve identificar semelhanças entre os casos ou estender o raciocínio para além do intervalo em que se originou” (Lannin, Ellis, Elliott, 2011, p. 16);



Entendimento essencial 3 – “generalizar envolve identificar a aplicação da generalização, reconhecendo o domínio relevante” (Lannin, Ellis, Elliott, 2011, p. 23);



Entendimento essencial 4 – “conjecturar e generalizar envolve o uso e o entendimento do significado de termos, símbolos e representações” (Lannin, Ellis, Elliott, 2011, p. 26);

O entendimento 1, pode ser considerado como um ponto de entrada na tarefa matemática e, também, no RM, pois prevê a elaboração de conjecturas. Nesse momento, a inferência utilizada pode aparecer como sendo verdadeira ou não. Já no entendimento 2, o estudante pode ou não validar a conjectura estabelecida. As reflexões, a identificação de elementos comuns e a expansão de seus conhecimentos, podem ser um dos caminhos a serem utilizados para que o desenvolvimento ocorra, considerando que o ato de pensar sobre a relação Matemática ou a regra estabelecida possa ser ampliado, podendo assim estabelecer uma relação ou estrutura nova para a resolução de determinada tarefa.

O entendimento essencial 3 destaca a identificação sobre a aplicação da generalização para outros domínios. Lannin, Ellis e Elliott (2011) utilizam o termo domínio referindo-se a qualquer objeto ou relação matemática que seja utilizada para defender a ideia, promovendo assim, a identificação de quando essa ideia poderá ser aplicada. Neste caso, é importante que esse momento se perpetue até a justificação, devido ao fato de o estudante poder rever suas conjecturas e adaptar suas generalizações para outras situações, que sejam possíveis de justificá-las.

Ainda pertencente ao mesmo grupo de engrenagens, o quarto entendimento essencial envolve o uso e entendimento de termos, símbolos e representações à medida que as generalizações vão se desenvolvendo, considerando compreensões matemáticas que auxiliarão no processo de justificação. Para isso, destaca-se também o uso da linguagem matemática, para realizar a comunicação do raciocínio e possibilitar que sejam acessíveis aos outros.

O segundo grupo contém uma engrenagem, contemplando um único entendimento essencial:



Entendimento essencial 5 – “o raciocínio matemático envolve a investigação de vários fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa” (Lannin, Ellis, Elliott, 2011, p. 30).

Esse entendimento engloba fatores que explicam o porquê, pontuando características particulares de relações matemáticas que podem explicar uma generalização. Diante disso, os autores colocam que investigar o porquê pode ocorrer de formas alternativas, como: retomar os significados dos termos e/ou definições, percepção das semelhanças, análise de representações que possam fornecer uma declaração, e que esta seja examinada para verificação de verdadeira ou falsa. Finalizada essa etapa, de investigar o porquê, destacamos o terceiro grupo: de justificar e refutar.

O terceiro e último grupo de engrenagens é composta pelos quatro últimos entendimentos essenciais:



Entendimento essencial 6 – “uma justificação matemática é um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas” (Lannin, Ellis, Elliott, 2011, p. 35);



Entendimento essencial 7 – “uma refutação matemática envolve mostrar que uma afirmação particular é falsa” (Lannin, Ellis, Elliott, 2011, p. 41);



Entendimento essencial 8 – “justificar e refutar envolve avaliar a validade dos argumentos” (Lannin, Ellis, Elliott, 2011, p. 45);



Entendimento essencial 9 – “uma justificativa matemática válida para uma afirmação geral não é um argumento baseado em autoridade, percepção, consenso popular ou exemplos” (Lannin, Ellis, Elliott, 2011, p. 51).

Descrevendo um pouco sobre os entendimentos 6, 7, 8 e 9, Lannin, Ellis e Elliott (2011) destacam que o entendimento 6 possibilita que os estudantes construam justificativas que convençam a si mesmos e a outros sobre a veracidade de uma afirmação. Para isso, compreendem que uma justificativa válida precisa fornecer uma sequência lógica de declarações, ideias já conhecidas como verdadeiras para chegar à determinada conclusão, comprovando que a generalização é válida para todos os casos do domínio, se aplicando a mais de um exemplo particular conjugando uma linguagem geral.

No entendimento 7, os autores avançam na construção de justificativas, estabelecendo que elas podem ser falsas, para isso admitem o conceito de refutar para esse processo, sabendo

que este pode ocorrer de diferentes maneiras, desde um contraexemplo da relação matemática até a ampla compreensão dos princípios matemáticos que não estão de acordo com a situação em questão.

No entendimento essencial 8, é possível perceber que, para que as justificativas possam ser validadas ou não, se faz necessário a avaliação sobre os argumentos utilizados, determinando se incluem suposições corretas ou equivocadas, conclusões válidas com lógica equivocada ou argumentos válidos que explicam apenas uma parte da declaração (Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

Por fim, o último entendimento essencial (9), compreende que as justificativas dos estudantes não podem ser baseadas no que os professores dizem, no que está escrito no livro didático, ou em exemplos particulares. Os estudantes precisam pensar além disso, procurando identificar as suas ideias de acordo com a situação, ou seu modo de raciocinar validando suas generalizações a partir de conceitos e propriedades matemáticas.

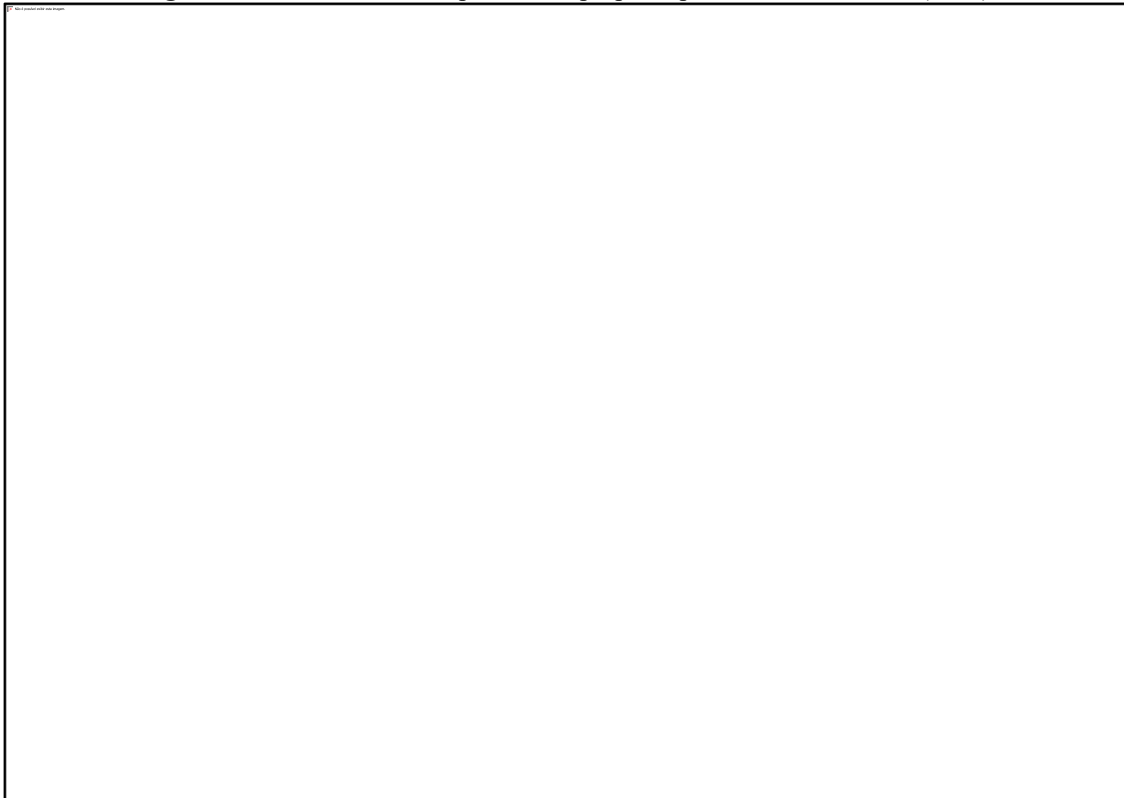
Os nove entendimentos essenciais, contidos nos três grandes grupos, podem ser potencializados por meio de discussões de uma tarefa matemática, que possibilitem aos estudantes perpassarem por todos esses entendimentos.

Práticas de ensino podem ser promovidas pelos professores para que os estudantes sejam envolvidos nos processos de RM, que contemplam oportunidades de raciocinar de forma abstrata, construir argumentos que sejam viáveis para determinadas situações, procurar e construir estruturas para explicitar os argumentos e que sejam possíveis de vivenciar diferentes formas de raciocínio, raciocínio quantitativo e procurar expressar regularidades que compreendem os argumentos criado (Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

4.2 Modelo conceitual do RM para a matemática escolar

Uma segunda frente destacada neste estudo é a de Jeannotte e Kieran (2017, p. 7) que, que definem o RM como “um processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos”. As autoras apontam que o RM pode ser definido tanto em termos de sua estrutura quanto por meio de seus processos (Figura 5).

Figura 5: Modelo conceitual para o RM proposto por Jeannotte e Kieran (2017)



Fonte: A autoria própria (2023).

Na Figura 5 é possível visualizar que o aspecto estrutural contempla três modelos de inferência: dedutivo, indutivo e abduutivo, que apresentam uma natureza mais estática, os quais estão representados pelos tijolos, que na construção civil são elementos estruturais e de sustento à obra, referem-se à maneira pela qual os elementos discursivos se combinam em um sistema ordenado que descreve tanto os elementos quanto sua relação entre si.

Já o aspecto processual “apresenta natureza dinâmica e temporal e compreende vários tipos de processos” (Araman; Serrazina, 2020, p. 149) simbolizados, na Figura 5, como a massa azul para assentamento dos tijolos em uma construção, esta realiza a conexão entre os tijolos possibilitando assim, a construção da parede, apresentam característica dinâmica, moldando e nivelando superfícies. Este aspecto envolve nove processos: conjecturar, generalizar, identificar um padrão, comparar, classificar, validar, justificar, provar e exemplificar.

Compreendemos que as estruturas (dedutivas, indutivas, abduativas) são a base para o trabalho com o RM ou nas palavras de Peirce (2005) a chave da lógica sendo componentes essenciais de tipos de raciocínio. Peirce (2005, p. 207) caracteriza cada uma das estruturas como tipos de raciocínio descrevendo:

A Dedução é o único raciocínio necessário. É o raciocínio da matemática. Parte de uma hipótese, cuja verdade ou falsidade nada tem a ver com o raciocínio; e, naturalmente, suas conclusões são igualmente ideais. [...] A Indução é a verificação

experimental de uma teoria. Sua justificativa está em que, embora a conclusão da investigação num estágio qualquer passa ser mais ou menos errônea, mesmo assim a aplicação ulterior do mesmo método deve corrigir o erro. A única coisa que a indução realiza é a determinação do valor de uma quantidade. Parte de uma teoria e avalia o grau de concordância dessa teoria com o fato. Nunca pode dar origem a uma ideia, seja quais for. Tampouco o pode a dedução. Todas as ideias da ciência a ela advêm através da Abdução. A Abdução consiste em estudar os fatos e projetar uma teoria para explicá-los. A única justificativa que ela tem é que se deve chegar a uma compreensão das coisas algum dia, isso só se obterá por esse modo. (Peirce, 2005, p. 207).

O autor considera que a dedução é um tipo de raciocínio que parte de uma hipótese seguindo um conjunto de regras para chegar a uma conclusão, sendo fundamental para a Matemática, pois tem início em uma inferência e percorre caminhos para validá-la ou não, baseando-se em princípios lógicos e axiomas. Sobre a indução, Peirce (2008) descreve que ela envolve a generalização a partir das observações ou evidências, tornando-as prováveis. Logo, a abdução é um tipo de raciocínio que envolve a teorização ou explicação para um conjunto de fatos observados, não fornecendo garantia que teoria proposta seja verdadeira, porém, é uma etapa importante na geração de novas ideias (Peirce, 2008).

Mata-Pereira (2018) descreve que as inferências dedutivas se desenvolvem do geral para o particular, inferindo uma afirmação a partir de dados e garantia (Jeannotte; Kieran, 2017) gerando uma conclusão necessária para o fato que se pretende validar e refutar, e que pela sua função de validação são centrais na Matemática, associando-se a demonstrações. A autora ressalta que a dedução não é a única forma de se referir ao RM, e que a indução e a abdução podem sustentar esse processo.

O raciocínio indutivo provém de pensamentos que se tornam conjecturas, que ao desenvolvê-las, podem ser generalizadas e justificadas, inferindo uma garantia a partir dos dados e da afirmação sobre os dados (Jeannotte; Kieran, 2017). Já o raciocínio abdução descrito por Mata-Pereira (2018) faz uso de um componente para construção do conhecimento, tal qual o indutivo, ou seja, precisa construir hipóteses para situações desconhecidas, para que assim a generalização possa ocorrer considerando as experiências para com a nova situação. A estrutura de raciocínio abdução pode ser um elemento de todo processo de RM ao gerar dados e garantias na busca de semelhanças e diferenças (Jeannotte; Kieran, 2017). Para Peirce (2008) a abdução é um processo de formação de hipóteses que apresenta uma ideia nova, determinando um valor, sugerindo um percurso a se direcionar, inferindo elementos que podem explicar a afirmação.

Brodie (2010) considera que para raciocinar matematicamente se faz necessária a combinação de diferentes processos, que considerem o pensamento do estudante, o ambiente escolar e as interações entre professores, visando discussões coletivas que ampliem o conhecimento. Para isso, os aspectos processuais do RM, tal qual proposto por Jeannotte e

Kieran (2017), compreendem nove processos cognitivos que são metadiscursivos, que derivam de narrativas sobre objetos ou relações, explorando as relações entre objetos. As autoras dividem os processos em três categorias: 1) processos relacionados a busca de semelhança e diferença; 2) processos relacionados a validação; 3) processo que atua como suporte para as duas primeiras categorias. A primeira categoria, relacionada à busca de semelhanças e diferenças, considera cinco processos: generalizar, conjecturar, identificar padrões, comparar e classificar.

Para Jeannotte e Kieran (2017), *generalizar* compreende inferir narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou relações entre objetos desses conjuntos, com base em um subconjunto do conjunto estudado. Lannin (2005) diz que a generalização pode fornecer uma relação à contextos referenciais que podem ajudar os estudantes a compreender as representações simbólicas, bem como uma ligação ao conhecimento prévio. Ou ainda, generalizar pode ser compreendido com um percurso de relações matemáticas entre conjuntos já conhecidos estendendo para novos (Stylianides, 2008). Quando isso ocorre, os conjuntos já conhecidos tornam-se subconjuntos dos novos conjuntos. Diante disso, a generalização compreende uma relação entre fatos já conhecidos e os que ainda estão por conhecer, considerando as situações e experiências já vivenciadas, pensando sobre elas e buscando validá-las por meio do novo conhecimento matemático, estendendo a outras situações.

Conjecturar, no modelo conceitual de Jeannotte e Kieran (2017), é compreendido como um processo do RM que, pela busca de semelhanças e diferenças, permite inferir uma narrativa sobre alguma regularidade, com valor epistêmico provável ou muito provável e que tem potencial para teorização matemática. Brodie (2010) reflete que estimar respostas, buscar entender os significados dos objetos matemáticos, errar e reavaliar, possibilitam ampliar o pensamento e gerar diferentes conjecturas envolvendo relações ou ideias matemáticas.

Consoante à reflexão de Brodie (2010), Araman e Serrazina (2020) descrevem que para o estudante criar conjecturas, é preciso raciocinar e pensar sobre as relações matemáticas, desenvolvendo afirmações que direcionam para uma justificação válida. Por meio desse processo, os estudantes podem identificar pontos comuns, compreender o significado de conceitos, símbolos e representações, o qual pode ser realizado de forma implícita ou explícita.

Um aspecto importante a ser considerado, no que se refere a criar conjecturas, é como o erro é compreendido, pois quando o estudante cria uma conjectura inválida ele pode reorganizar seu pensamento, considerando o erro cometido, e fazendo uso de outras relações ou ideias matemáticas que estejam de acordo com a tarefa proposta. Neste sentido, o erro pode servir como direção para futuras compreensões matemáticas.

Atribuir padrões às conjecturas criadas e reconhecê-las como verdadeiras a partir de relações ou objetos matemáticos, faz parte do processo de *identificar padrões* proposto por Jeannotte e Kieran (2017). Nele, está envolvida a identificação de padrões ou regularidades por meio de relações recursivas. Diferente de conjecturar e generalizar, este reconhecimento não possibilita uma expansão para outros conjuntos, pois o estudante identifica um padrão aplicável para um determinado conjunto. As autoras concordam com Stylianides (2008) que identificar um padrão é mais do que apenas observá-lo, é preciso compreendê-lo procurando relacioná-lo com o conjunto em questão e posteriormente validá-lo dentro dos elementos deste conjunto.

O quarto processo da primeira categoria é o *comparar*, que infere, pela busca de semelhanças e diferenças, uma narrativa sobre objetos ou relações matemáticas (Jeannotte; Kieran, 2017). No modelo conceitual, as autoras compreendem o processo de comparação como um elemento da natureza inferencial, direcionando ao raciocínio indutivo e abduutivo, e que ocorre juntamente com os outros processos do RM (conjecturar, identificar um padrão e validar).

O último processo da primeira categoria, permite o desenvolvimento de níveis de objetos, unindo ou separando diferentes tipos e estruturando o discurso; este é chamado de *classificar*, que infere uma narrativa sobre uma classe de objetos baseando-se em propriedades e definições matemáticas (Jeannotte; Kieran, 2017). O processo de classificar tem como objetivo conhecer, analisar e separar objetos ou relações matemáticas, a partir de estruturas matemáticas.

A segunda categoria envolve os processos relacionados à validação, a constar: validar, justificar e provar, destacando que o valor epistêmico de um enunciado depende não apenas da validade lógica de sua estrutura, mas também do discurso de uma determinada situação (Jeannotte; Kieran, 2017). O processo de *validação* possui potencial para construir conhecimentos e validar novas ideias matemáticas (Stylianides, 2010), sendo importante para o raciocínio (Loong, 2017). Jeannotte e Kieran (2017) concordam descrevendo que a validação é um processo de RM que visa mudar o valor epistêmico de uma narrativa Matemática. Logo, compreendem que a validação altera o valor epistêmico de alguma maneira, e que as relações Matemáticas direcionam para a justificação, prova e formalização.

Brodie (2010) destaca que, para o processo de validação acontecer, é preciso avaliar as possibilidades de contribuição para levar adiante o pensamento do estudante e da turma, sendo diferente de ouvir para verificar se a resposta está correta ou não. Neste caso, o autor considera que o professor deve encorajar os estudantes a avaliar a validade de suas próprias soluções e das soluções dos outros, sendo um caminho promover momentos em sala de aula que os argumentos matemáticos possam ser explanados e avaliados.

Sobre a *justificação*, Jeannotte e Kieran (2017) pontuam que está relacionada a outros dois processos, sendo o primeiro com a justificação de uma conjectura que surge do processo de conjecturar, considerando a mudança do valor epistêmico de provável para mais provável. O segundo tipo está relacionado ao processo de validação que altera o valor epistêmico de provável para verdadeiro ou falso, sem ser considerado necessariamente como constituinte do processo de comprovação.

Kilpatrick *et al.* (2001) descreve que justificar é um elemento-chave do raciocínio, e que mostra possibilidades de fornecer uma razão suficiente para uma determinada situação. Assim sendo, justificar é um processo de RM que, ao buscar dados, garantir e respaldar, permite modificar o valor epistêmico de uma narrativa (Jeannotte; Kieran, 2017).

Já o processo de *provar* é delimitado por Jeannotte e Kieran (2017) como um processo de RM que, ao buscar dados, garantir e apoiar, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável para verdadeiro, e é limitado por narrativas e realizações, diferenciando-se de justificar no aspecto teorização. Diante disso, a prova é uma forma de argumento e de justificação, porém nem todos os argumentos e justificativas são provas, e uma prova formal nem sempre é uma justificativa ou explicação adequada de ideias matemáticas (Brodie, 2010), sendo que dependendo da aceitabilidade social da prova em um determinado momento, a prova possa ser submetida a um exame futuro (Lannin, 2005).

Stylianides (2008) e Ball (2008) pontuam que provar associa-se à busca de uma prova, que inclui, além da formulação de argumentos e provas, explorações empíricas para gerar conjecturas, raciocinando por analogia para desenvolver ideias possíveis para a formulação de argumentos etc. Considerando este argumento, os autores destacam três critérios para identificar esse processo em sala de aula: (I) utilização de declarações realizadas pelos estudantes em sala de aula que são verdadeiras e disponíveis sem qualquer outra justificação; (II) utiliza diferentes formas de raciocínio, ou então maneiras de argumentação, que são válidas e conhecidas; e (III) é comunicado com formas de expressão, envolvendo modos de representação de argumentos, que são apropriados e conhecidos ou estão dos conceitos conhecidos pelos estudantes da sala de aula.

Um elemento para direcionamento à prova é destacado por Jeannotte e Kieran (2017) como a prova formal, que se baseia na teoria matemática construída a priori e em realizações formalizadas, envolvendo axiomas e teoremas, sendo descrita como um processo de RM que, ao buscar dados, garantia e respaldo, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável para verdadeiro, delimitado por narrativas, uma reestruturação dedutiva final e realizações que são formalizadas e aceitas.

O terceiro e último processo, atua como suporte para as duas primeiras categorias, é o *exemplificar*, inferindo exemplos que auxiliam na busca de semelhanças e diferenças e da validação (Jeannotte; Kieran, 2017). Brocardo *et al.* (2022) destacam o processo de exemplificar, mediante análise da implementação de uma tarefa matemática, salientando ações que se relacionam diretamente com a explicitação de processos de exemplificar, ou seja, descrevem que o processo de encontrar exemplos ajuda a ilustrar ou aprofundar a compreensão de conceitos matemáticos. Esses exemplos podem ser usados para identificar semelhanças e diferenças entre casos específicos, validar a aplicação de teoremas ou regras, bem como apoiar o aprendizado dos estudantes.

Desenvolver a compreensão dos estudantes sobre a validade de suas generalizações é essencial em sala de aula (Lannin, 2005), bem como, proporcionar experiências que conduzam para que eles possam vivenciar momentos que desenvolvam os processos e estruturas que compõem o RM destacado por Jeannotte e Kieran (2017), e que se apresentam como meio para condução do desenvolvimento do conhecimento e do raciocínio. Neste sentido, o modelo destacado por essas autoras não é rígido, pelo contrário, ele foi criado para ser ampliado e potencializado. No entanto, destaca-se como importante em processos formativos, pois pontua conceitos, ações e direções para serem assumidas quando a aprendizagem do professor é repensada.

Mata-Pereira e Ponte (2011) consideram que o processo de generalização envolve criar conjecturas tanto específicas quanto gerais e isso pode ocorrer por meio do aspecto estrutural abduutivo (Jeannotte; Kieran, 2017). Complementam ainda, que para testar uma generalização se faz necessário utilizar propriedades Matemáticas por meio da indução ou abdução e que a justificação pode ocorrer de modo formal ou informal contemplando o aspecto estrutural dedutivo (Jeannotte; Kieran, 2017).

Mediante ao estudo das duas frentes, quando são consideradas as estruturas, os processos (Jeannotte; Kieran, 2017) e os entendimentos essenciais (Lannin; Ellis; Elliott, 2011), o RM contempla um conjunto de elementos presentes na “mente” do estudante quando ele pensa sobre uma tarefa matemática. Também, que relacionem junto a esse pensamento ideias e relações matemáticas que possam ser ampliadas por meio de discussões coletivas que vão além dos conteúdos, e que, assim, oportunizem experiências (re) estruturadas na Matemática como disciplina e como contexto de vivência. Para tanto, é necessário que o professor se utilize de ações que convidem aos estudantes a se envolver nas resoluções das tarefas, atue como um guia, informando e sugerindo (Araman; Serrazina; Ponte, 2019), no sentido de contribuir para que realizem conjecturas, generalizações, validações, justificações, refutações e exemplificações.

O referencial teórico para compor o processo formativo teve como base os autores Jeannotte e Kieran (2017) e Lannin, Ellis e Elliott (2011). Em especial, com a intenção de trabalhar com os professores os entendimentos essenciais e os processos de raciocínio matemático com objetivo de gerar OAP a partir das compreensões, ensinamentos e desenvolvimento dos conceitos matemáticos em sala de aula. Quando os docentes têm a oportunidade de desenvolver essas habilidades, se tornam preparados para interpretar conceitos matemáticos, selecionar estratégias de ensino e fomentar o pensamento crítico nos estudantes.

Fundamentando-se nos referenciais apresentados envolvendo o conhecimento docente, as OAP e o RM, apresentamos no próximo capítulo o percurso metodológico para este estudo.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentam-se os procedimentos metodológicos adotados para a realização da pesquisa, que tem como objetivo *compreender como as ações do formador de professores que ensinam Matemática contribuem para gerar oportunidades de aprendizagem profissional no que diz respeito ao raciocínio matemático*. A pesquisadora, assim, considerou as atividades realizadas em um processo formativo a partir da utilização de TAP, que permitiriam aos professores participantes ampliar conhecimentos sobre o RM, especialmente no que tange aos seus processos e entendimentos essenciais, a partir das ações mediadas pelo formador.

Por conseguinte, para detalhar os passos da pesquisa, bem como os elementos que compõe todo o processo de investigação, é necessário pontuar questões que auxiliam e foram pertinentes durante o percurso de construção do referencial teórico, do planejamento das ações e análise dos resultados, as quais compreendem:

- Quais foram as ações do formador, em um processo formativo que trata do RM e seus entendimentos essenciais, que proporcionam oportunidades de aprendizagem aos professores envolvidos?
- De que forma essas oportunidades de aprendizagem profissional contribuem para que os professores aprimorem seus entendimentos essenciais do RM?

Para melhor explicitar os caminhos metodológicos adotados, este capítulo está estruturado em seções, a fim de tornar mais clara a articulação entre os objetivos da pesquisa, as escolhas metodológicas e os procedimentos realizados. Apresentam-se o tipo e a abordagem da pesquisa (5.1), seguidos da descrição do contexto investigativo e dos participantes envolvidos no estudo (5.2). Continuamente, são detalhados os instrumentos de coleta de dados (5.2), etapas de realização da pesquisa e os procedimentos de coleta de dados (5.3), com destaque para os critérios que fundamentaram tais escolhas e por fim, os procedimentos de estudo e análise dos dados (5.4).

5.1 Tipo e abordagem da pesquisa

A pesquisa qualitativa “é essencial para o entendimento da realidade humana, das dificuldades vivenciadas, das atitudes e dos comportamentos dos sujeitos envolvidos, constituindo-se um suporte teórico essencial” (Ferreira, 2015, p. 117). Este estudo é assim orientado pelo percurso qualitativo de pesquisa, compreendido como um processo sistemático e interpretativo que envolve a produção dos dados, sua organização e categorização, bem como

sua análise à luz do referencial teórico adotado. Esse processo se configura na construção de uma narrativa analítica que expressa a interpretação da pesquisadora sobre o fenômeno investigado, considerando a complexidade e a contextualização das práticas observadas (Gil, 2008). Para Godoy (1995), a pesquisa qualitativa concentra-se no estudo do ambiente natural do pesquisador, considerando os fatos sociais observado no contexto de ação dos participantes mediante contato do observador, utilizando seleção, consolidação e análise de dados.

Neste pressuposto, a abordagem metodológica utilizada tem como suporte a pesquisa intervencionista relacionando a teoria com a prática. Dumay e Baard (2017) descrevem-na como uma metodologia baseada em pesquisa de estudo de determinadas ações em que os pesquisadores se envolvem no trabalho direto com os participantes em seus contextos particulares, implantando teoria para projetar e implementar soluções por meio de intervenções, e analisando os resultados da perspectiva teórica e prática.

O que difere a pesquisa intervencionista da pesquisa-ação, é que a pesquisa-ação além do pesquisador, que tem participação ativa no processo e da produção da pesquisa, sua atuação objetiva alterar o ambiente de estudo (Fiorentini; Lorenzato, 2012), com contribuições durante as intervenções a partir de conhecimento teóricos. No caso deste estudo, o enfoque está no papel e nas ações realizadas mediante intervenção do formador em um processo formativo com professores que desfrutam da oportunidade de aprendizagem envolvendo o conhecimento a respeito dos processos e entendimentos essenciais do RM.

Por mais que as intervenções tenham características que contemplem de certo modo a realidade, tanto do pesquisador quanto do participante, muitos desafios podem ocorrer como, por exemplo, a cautela durante a realização das intervenções, a influência nos conhecimentos dos professores, o sentido dado ao conhecimento que é discutido, o processo de construção da pesquisa em longo prazo, a participação do público-alvo em processos formativos, entre outros.

Em meio as inquietações da pesquisa, Jönsson e Lukka (2006) destacam pontos importantes a serem considerados e questionados pelos pesquisadores que fazem uso da pesquisa intervencionista, que envolvem: a compreensão da situação prática, as ações sobre as situações de maneira impessoal, analisar as causas e consequências e focar no objetivo do estudo. Acrescentando ao indicado pelos autores, Bracci (2017) destaca que é preciso que exista um diálogo contínuo entre o pesquisador e participantes, para que o processo de aprendizagem produza conhecimentos práticos e teóricos em ambientes interativos e colaborativos.

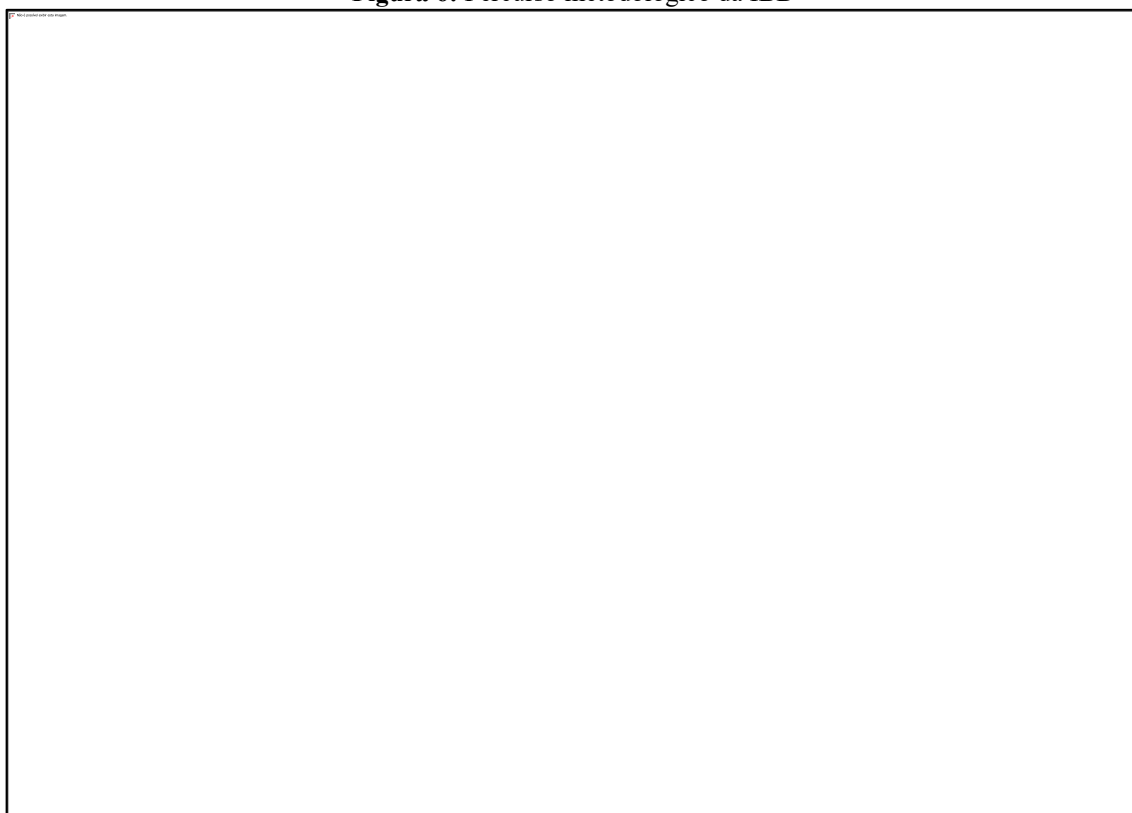
Neste pressuposto, esta pesquisa qualitativa intervencionista está inserida em um projeto envolvendo estudo referente ao desenvolvimento do RM na formação de professores, que faz parte do grupo de estudo no qual a pesquisadora e os orientadores são participantes. As

pesquisas realizadas no grupo de pesquisa, são conduzidas pela Investigação Baseada em Design (IBD) a partir dos ciclos intervencionistas com implementações ocorrendo em um processo formativo. A pesquisa aqui apresentada, aprovada em Comitê de Ética da UTFPR (CAAE 49773821.1.0000.5547), faz parte da implementação do segundo ciclo. O primeiro ciclo realizado no grupo de pesquisa “Raciocínio matemático e formação de professores”⁶, refere-se a pesquisa de Anjos (2022) o qual será discutido adiante.

A IBD objetiva estudar processos de aprendizagem que envolvam contextos naturais, combinando características de investigação fundamental e de investigação aplicada (PONTE *et al.* 2016) com possibilidade de produção de conhecimento que seja utilizado nas práticas educacionais (Wang; Haffanin, 2005).

Ao analisar cada modelo utilizado, cada ciclo pode ser aprimorado e ampliado, oportunizando novos e diferentes tipos de aprendizagens. Sendo assim, cada ciclo oferece novas oportunidades de aprendizagem tanto para o formador quanto para os participantes (professores) (Ramos *et al.* 2010), conforme destacado na Figura 6.

Figura 6: Percurso metodológico da IBD



Fonte: A autoria própria (2023).

⁶ Disponível em: <http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/5307291450401218>. Acesso em jan. 2026.

A primeira fase, de análise e exploração, compreende a etapa de desenvolvimento do projeto em que o pesquisador e os profissionais analisam colaborativamente o problema a ser estudado (DBR COLLECTIVE, 2003), os conhecimentos teóricos necessários para implementação e o desenvolvimento do projeto de intervenção (Mckenney; Reeves, 2012) considerando problemas que se colocam aos professores e/ou formadores no trabalho de ensino, procurando oferecer OAP (Cobb; Jackson; Dunlap, 2016). Nesta pesquisa, em especial, busca-se gerar OAP relacionadas à compreensão do RM e de seus entendimentos essenciais.

De acordo com a segunda fase, de implementação da intervenção, a IBD é escolhida devido ao ser caráter compreensivo envolvendo questões que pretendem melhorar a compreensão de como implementar inovações educativas (Ponte, *et al.* 2016). Nesta fase, a metodologia é entendida como a solução sistemática de problemas, sendo ao mesmo tempo iterativa e flexível, para permitir que decisões formativas sobre o *design* sejam feitas ao longo do projeto (Mckenney; Reeves, 2012) de acordo com o contexto da investigação. Com o projeto pronto para ser implementado, são realizadas as intervenções coletando protocolos de investigação, como: resolução de tarefas, áudios e vídeos das discussões tanto em pequenos grupos quanto em plenária.

A terceira fase consiste em conduzir, a partir do objetivo, o encontro de novos entendimentos, sendo composta de teórico-prática, contemplando tantos os princípios do projeto quanto as reflexões durante a implementação, para que um novo ciclo seja implementado considerando os resultados da intervenção e que assim possa ser aprimorado (IBD COLLECTIVE, 2003). A avaliação e as reflexões geradas neste momento são fundamentais para as decisões a serem tomadas em outros processos que envolvam a formação de professores. Assim, a experiência realizada em um primeiro ciclo de estudo possibilita ampliar as visões de aprendizagens que estejam ao encontro dos objetivos dos professores, das instituições e do currículo.

No contexto do grupo de pesquisa são considerados dois ciclos de formação de professores, sendo o primeiro realizado no segundo semestre de 2022 e o segundo no primeiro semestre de 2023. O primeiro contou com a participação de dez professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental e foi realizado de maneira presencial (Anjos, 2023). Durante a intervenção do primeiro ciclo do processo formativo, a pesquisadora (que assumiu apenas o papel de observadora) apenas acompanhou as ações do formador por meio da observação. Com base nessas reflexões, um segundo ciclo foi planejado e elaborado.

5.2 Contexto investigativo e participantes envolvidos

A necessidade deste estudo surge a partir da inquietação dos pesquisadores que investigam a formação de professores que ensinam Matemática, em oportunizar momentos para que aprendam e ensinem seus estudantes mediante a utilização de tarefas matemáticas envolvendo processos e entendimentos essenciais do RM. Sendo assim, foi cadastrado um projeto de extensão junto à UTFPR sob responsabilidade do orientador e da coorientadora desta pesquisa, com foco na temática RM e aprendizagem profissional docente.

O desenvolvimento desta pesquisa faz parte de um projeto amplo, o qual foi submetido e aprovado pelo Comitê de Ética em pesquisa da UTFPR (CAAE 49773821.1.0000.5547), conforme cópia do termo de consentimento para uso de imagem e som de voz (TCUISV) (Apêndice A). Dessa forma, esta pesquisa foi desenvolvida em consonância com as diretrizes éticas estabelecidas pela Resolução nº 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde (Brasil), que orienta pesquisas em Ciências Humanas e Sociais. Assim, buscou-se garantir não apenas a integridade científica do trabalho, mas também o compromisso ético com os sujeitos que dele participou.

O projeto intitulado *Compreensões sobre os processos de raciocínio matemático e as contribuições com o desenvolvimento profissional* foi construído para implementação por meio de ciclos de intervenção, tendo o primeiro ocorrido no ano de 2022, com o objetivo de promover discussões e reflexões envolvendo os processos de RM mediante as práticas de ensino de matemática, tendo como foco o desenvolvimento profissional adotando pressupostos do modelo PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020). O projeto teve como público-alvo professores que ensinam Matemática na Educação Básica, contando as temáticas: o que é o RM; perspectivas da BNCC e processos de RM; ações do formador; planejamento de tarefas exploratórias; perspectivas x realidade: processos de RM mobilizados por estudantes em tarefas exploratórias; processos de RM mobilizados durante a resolução de tarefas exploratórias; compreensões sobre os processos de RM e os impactos no processo de ensino e de aprendizagem.

O professor formador do primeiro ciclo, à época mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – PPGMAT, realizou uma pesquisa que deu origem a dissertação: “Contribuições de um processo formativo para professores dos anos iniciais visando a compreensão dos entendimentos essenciais de raciocínio matemático” (Anjos, 2023). Este primeiro processo formativo foi organizado em 5 encontros presenciais, com duração de 3h cada, de acordo com o cronograma do Quadro 7.

Quadro 7: Cronograma e ações realizadas no processo do processo formativo – ciclo 1

| Encontro | Data | Ações desenvolvidas e conteúdos |
|-------------|------------|--|
| 1º Encontro | 29/08/2022 | <ul style="list-style-type: none"> • Leitura e discussão envolvendo os aspectos teóricos sobre o desenvolvimento do Raciocínio Matemático, conforme definições descritas na BNCC; • Desenvolvimento da TAP 1: Análise e discussões envolvendo alguns registros de prática, tendo como objetivo a identificação das informações que podem ser consideradas como expressão de RM; • Leitura e discussão envolvendo os aspectos teóricos sobre o conceito de RM, com base em definições apresentadas por alguns autores. |
| 2º Encontro | 05/09/2022 | <ul style="list-style-type: none"> • Leitura e discussão envolvendo os aspectos teóricos sobre os processos de RM e os Entendimentos Essenciais, conforme definições de Lannin, Ellis e Elliot (2011); • Desenvolvimento da TAP 2: Análise e discussões de alguns registros de prática, tendo como objetivo identificar quais processos de RM estavam sendo mobilizados por alguns estudantes do 5º ano, enquanto resolviam uma tarefa exploratória envolvendo o conceito de área e perímetro. Ressalta-se que essa tarefa fez parte de um estudo realizado por Moraes (2022); • Leitura e discussão visando promover um diálogo sobre as ações do professor e a utilização de tarefas exploratórias para o ensino de Matemática. |
| 3º Encontro | 12/09/2022 | <ul style="list-style-type: none"> • Leitura e discussões envolvendo a percepção do modo como deve ser realizado um planejamento coletivo de uma aula na perspectiva do Ensino Exploratório; 1ª parte da TAP 3: Momentos para os participantes do processo formativo discutirem matematicamente a resolução de uma tarefa exploratória, sendo que o objetivo desta etapa foi propor para os participantes um momento de discussão, envolvendo algumas vertentes do conhecimento didático (PONTE, 2012) que julgavam necessários para a aplicação da tarefa e o desenvolvimento da aula. Ressalta-se que a tarefa exploratória foi, antecipadamente, selecionada pelo formador. |
| 4º Encontro | 19/09/2022 | <ul style="list-style-type: none"> • 2ª parte da TAP 3: Análise das resoluções de alguns estudantes do 5º ano para a tarefa exploratória, envolvendo o conceito de sequência numérica. Neste encontro, os participantes do processo formativo tiveram que analisar as resoluções (protocolos dos estudantes) da tarefa e identificar quais processos de RM os estudantes demonstravam mobilizar, com base nos registros apresentados como resolução da tarefa. Ressalta-se que os dados (protocolos dos estudantes) foram coletados pelo formador, durante a aplicação da tarefa envolvendo o conceito de sequência, em uma turma cedida por uma professora da rede municipal de Ensino. Durante o desenvolvimento da aula, o formador deste processo formativo atuou como professor da turma. |
| 5º Encontro | 26/09/2022 | <ul style="list-style-type: none"> • 3ª Parte da TAP 3: Análise de alguns registros de prática coletados durante o desenvolvimento da aula envolvendo o conceito de sequência numérica. Nesta etapa da TAP 3, os participantes do processo formativo tiveram que analisar alguns trechos da discussão promovida por uma dupla de estudantes, enquanto resolviam a tarefa (para auxiliar na análise, as professoras receberam as transcrições dos áudios) e alguns trechos de vídeos gravados durante o momento da plenária realizada como fechamento da tarefa exploratória (os áudios dos vídeos também foram transcritos); • Elaboração de um esquema sintetizando os aspectos discutidos durante o processo de formação continuada; em particular, o foco era o desenvolvimento do RM e seus processos. |

Fonte: Anjos (2023, p. 49).

Durante o primeiro ciclo, foram realizadas leituras e discussões com as professoras sobre os entendimentos essenciais do RM de acordo com Lannin, Ellis e Elliot (2011) e análise,

estudo e desenvolvimento de três TAP. Nas análises feitas por Anjos (2023) e em artigos resultantes do estudo (Anjos, 2024, 2025) foram consideradas as discussões e registros realizados pelas professoras da terceira TAP, organizada a partir de uma tarefa Matemática que explorava a ideia de sequência numérica, aplicada com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental.

Neste primeiro ciclo de intervenção, a autora deste estudo participou como observadora, a fim de observar as ações do formador, a participação dos professores, os recursos utilizados, enfim, o processo como um todo. Aqui, não serão destacadas para fim de análise de dados as ações e discussões promovidas pelo formador, oriundas do primeiro ciclo. Essa observação foi realizada para conhecimento do processo e verificação de possíveis mudanças que poderiam ocorrer de forma positiva no segundo ciclo, que faz parte da terceira fase da IBD.

Alguns aspectos do primeiro ciclo foram considerados, a partir dos olhos da observadora, para o segundo:

- ✓ Ampliar a duração do curso para conseguir distribuir momentos de estudo, desenvolvimento e reflexões;
- ✓ Dividir os momentos do processo formativo, ampliando discussões coletivas e estudos entre os participantes durante os encontros;
- ✓ Contextualizar e organizar os momentos de teoria, possibilitando que os participantes tenham acesso a fundamentação teórica em qualquer momento do curso;
- ✓ Seleção de professores de diferentes contextos e níveis de ensino, permitindo a socialização de experiências diferenciadas, favorecendo a construção coletiva de OAP;
- ✓ Potencializar as discussões nos pequenos grupos;
- ✓ Implantação do ciclo PDR;

No segundo ciclo, foco desta tese, definiu-se como público-alvo professores que ensinam Matemática em diferentes níveis de escolaridade no estado do Paraná e delimitou-se, inicialmente, um número máximo de 10 participantes. A intenção em constituir um grupo relativamente pequeno foi permitir um maior envolvimento dos participantes nas discussões e contribuições dentro da proposta da formação. Um material de divulgação foi elaborado para que o convite acontecesse de maneira individual aos professores que fazem parte do contexto profissional/social dos formadores.

Os formadores foram a doutoranda autora desta tese (formadora 1), seu orientador (formador) e uma mestrandia (formadora 2) do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT), cuja dissertação já foi finalizada (Trevisolli, 2024). Nas análises o

foco na identificação das ações contou com as IDP (Ribeiro; Ponte, 2020) realizadas pelo formador. A escolha pela análise das ações do formador justifica-se pela amplitude de sua experiência profissional docente, que abrange desde a Educação Básica até a pós-graduação, bem como por sua sólida formação profissional e atuação em processos formativos voltados ao ensino de Matemática e a pesquisas relacionadas ao desenvolvimento do RM.

Inicialmente inscreveram-se 17 professores para a formação. Nos quatro primeiros encontros (foco de interesse) alternou entre 12 e 13 participantes. No término, dos 9 encontros, 10 participantes finalizaram o processo formativo, conforme caracterização no Quadro 8 a seguir:

Quadro 8: Caracterização dos participantes

| Nome fictício | Idade (anos) | Formação / Maior titulação concluída ou em andamento | Atuação | Tempo de atuação profissional (anos) |
|----------------------|---------------------|---|---|---|
| Bianca | 24 | Licenciatura em Matemática / Mestranda | Ensino Fundamental anos finais | 1 |
| Eloisa | 35 | Graduação em Pedagogia / Mestre | Ensino Fundamental anos iniciais | 10 |
| Fernanda | 28 | Licenciatura em Matemática e Pedagogia / Doutoranda | Ensino Fundamental anos finais e Ensino Médio | 6 |
| Livia | 27 | Licenciatura em Matemática / Mestranda | Ensino Médio | 0,08 |
| Rebeca | 24 | Licenciatura em Matemática / Mestranda | Ensino Fundamental anos finais e Ensino Médio | 2 |
| Beth | 59 | Licenciatura em Matemática | Ensino Fundamental anos finais e Ensino Médio | 26 |
| Natália | 36 | Licenciatura em Matemática / Mestre | Ensino Fundamental anos finais e Ensino Médio | 4 |
| Roberta | 43 | Licenciatura em Matemática | Ensino Fundamental anos finais e Ensino Médio | 13 |
| Silvia | 50 | Pedagogia e Licenciatura em Matemática / Mestre | Ensino Fundamental anos iniciais | 25 |
| Serena | 50 | Licenciatura em Matemática | Ensino Fundamental anos finais | 20 |
| Formador | 39 | Licenciatura em Matemática / Bacharel em Matemática Aplicada e Computacional / Mestre em Matemática Aplicada / Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática | Ensino Superior e Pós-Graduação | 16 |
| Formadora 1 | 33 | Licenciatura em Matemática / Mestre em Ensino de Ciências e Matemática | Ensino Fundamental anos finais e Ensino Médio | 10 |
| Formadora 2 | 38 | Graduação em Pedagogia / Mestranda em Ensino de Matemática | Ensino Fundamental anos finais e Ensino Médio | 13 |

Fonte: Autoria própria (2023).

Antes do início da coleta de dados, todos os envolvidos foram devidamente informados sobre os objetivos do estudo, os procedimentos metodológicos e os possíveis usos dos registros, em conformidade com os preceitos de pesquisa em Ciências Humanas.

O consentimento livre e esclarecido foi obtido mediante a apresentação do TCUISV, que explicitava o caráter voluntário da colaboração, a possibilidade de desistência a qualquer momento, sem prejuízo pessoal ou profissional, e a garantia de confidencialidade. Para preservar a identidade dos participantes (professores, formadores e estudantes), optou-se pelo uso de nomes fictícios (escolhidos pelos próprios participantes), assegurando o anonimato nas transcrições, relatórios e demais documentos resultantes da investigação.

Outro aspecto ético considerado refere-se ao cuidado na utilização e armazenamento dos dados. As gravações em áudio e vídeo, assim como os documentos produzidos pelos participantes, foram mantidas em ambiente digital seguro, de acesso restrito aos pesquisadores que integram o grupo de pesquisa.

Adicionalmente, procurou-se manter uma postura de respeito e escuta ativa durante todo o processo investigativo, reconhecendo os professores como protagonistas do próprio desenvolvimento profissional. Nesse sentido, as interações foram conduzidas de modo a evitar constrangimentos, julgamentos ou hierarquizações, valorizando as contribuições de todos.

5.3 Etapas de realização da pesquisa e instrumentos de coleta de dados

A partir da experiência e da observação da pesquisadora no primeiro ciclo, iniciou-se a elaboração do segundo ciclo de intervenção. É importante destacar que, por mais que a pesquisadora tenha observado o ciclo como um todo, e realizado anotações do processo de maneira completa, seu foco de análise é compreender as ações do formador durante o segundo ciclo. Os aspectos destacados no primeiro ciclo serviram como base para potencializar o processo formativo com intuito de ampliar OAP do segundo ciclo.

O segundo ciclo de intervenção foi organizado tendo como aporte teórico os entendimentos essenciais do RM (Lannin; Ellis; Elliott, 2011), articulado ao uso de registros de práticas envolvendo tarefas matemáticas que potencializem sua compreensão oriundos de pesquisa anteriores já desenvolvidas no âmbito do grupo de pesquisa *Raciocínio matemático e formação de professores*, incluindo os trabalhos de Anjos (2023) e Morais (2022).

Este processo formativo aconteceu em formato remoto com encontros agendados pelo *Google Meet* durante o primeiro semestre de 2023. A opção pela ferramenta se deu pela possibilidade de realização de reuniões online de maneira gratuita, a comunicação por vídeo

com os participantes, além da divisão dos participantes em salas temáticas que oportunizou a realização das discussões em pequenos grupos. Contou com carga horária de 40 horas, sendo 20 horas de forma síncrona e 20 horas assíncrona. Em um primeiro momento os formadores organizaram o processo formativo em 8 encontros síncronos com duração de 2h e 30 min cada. Porém no decorrer foi necessário a realização de um encontro extra de modo que o processo formativo contou com 9 encontros síncronos e 6 tarefas assíncronas, conforme listado no Quadro 9.

Quadro 9: Cronograma e ações realizadas no processo do processo formativo – ciclo 2

| Encontro | Data | Ações desenvolvidas e conteúdos | | Tarefas assíncronas |
|-----------------|-------------|---|---|---|
| 1º Encontro | 01/03/2023 | Apresentação e aspectos gerais do RM | <ul style="list-style-type: none"> • Apresentação do curso, dos formadores e dos participantes; • Momento individual (TAP síncrona 1 – Apêndice C: o que entendo por RM? Primeiras impressões sobre o RM; • TAP síncrona 2 (Apêndice D): cálculo de área e perímetro com auxílio do geoplano – estudo em pequenos grupos; • Discussões coletivas sobre a resolução da tarefa; • Pressupostos teóricos e tópicos que apoiam o RM (BNCC (2018); Jeannotte e Kieran (2017); Lannin, Ellis e Elliott (2011); Mata-Pereira e Ponte (2018); e • Cronograma de tarefas síncronas e assíncronas. | TAP 1 - Questionário de Caracterização do participante (Apêndice A). |
| 2º Encontro | 15/03/2023 | Entendimentos Essenciais do RM de acordo com Lannin, Ellis e Elliott (2011) | <ul style="list-style-type: none"> • A importância dos processos do RM; • Entendimentos Essenciais (1 a 4): conjecturar e generalizar; • TAP síncrona 3 (Apêndice F): Análise dos registros de prática da Tarefa Matemática Azulejos brancos e cinzentos – estudo em pequenos grupos; • Discussões coletivas sobre a resolução da tarefa; • TAP síncrona 4 (Apêndice G): Análise dos registros de prática da Tarefa Matemática Azulejos brancos e cinzentos – estudo em pequenos grupos; e • Discussões coletivas sobre a resolução da tarefa. | TAP 2 – resolução da Tarefa Matemática Azulejos brancos e cinzentos (Apêndice E). |
| 3º Encontro | 29/03/2023 | | <ul style="list-style-type: none"> • Para relembrar: Como identificar conjectura e generalização? (padlet); • Entendimento essência (5): investigar o porquê; • TAP 5 (Apêndice I): análise dos registros de prática da tarefa Matemática envolvendo cálculo de área e perímetro com auxílio do geoplano; • Discussão coletiva sobre as conjecturas de Maria (Lannin, Ellis e Elliott (2011)) – tarefa assíncrona 3; • Entendimento Essencial (6): Justificar e Refutar; e • Discussão coletiva sobre a elaboração de justificativas Amanda, Bianca e Carla (Lannin, Ellis e Elliott (2011)) – tarefa assíncrona 3. | TAP 3 – Estudo das conjecturas de Maria e justificativas de Amanda, Bianca e Carla (Lannin; Ellis; Elliott, 2011) (Apêndice H). |

| | | | | |
|-------------|------------|--|---|---|
| 4º Encontro | 12/04/2023 | | <ul style="list-style-type: none"> Análise dos registros de prática da Tarefa Matemática Azulejos brancos e cinzentos – TAP assíncrona 4 (Apêndice J); Entendimentos Essências (7 a 9): Justificar e Refutar; Momento individual: estudo dos registros propostos por Lannin, Ellis e Elliott (2011) sobre os entendimentos 7 e 8; TAP síncrona 6 (Apêndice L): estudo das justificativas; Discussões coletivas; TAP síncrona 7 (Apêndice M): análise dos registros de prática da Tarefa Matemática Azulejos brancos e cinzentos – estudo em pequenos grupos; Discussões coletivas sobre o estudo da tarefa; Finalização da explicação do capítulo 1 do livro “Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning for Teaching Mathematics” de Lannin, Ellis e Elliott (2011); e Tarefa de fechamento envolvendo a importância dos processos do RM e dos entendimentos essenciais com utilização do <i>Kahoot</i>⁷. (Apêndice O) | TAP 4 - Estudo dos registros de prática da Tarefa Matemática Azulejos brancos e cinzentos (Apêndice J); e TAP 5 – Proposta de tarefa Matemática que reconheça como potencial explorar os entendimentos essenciais do RM (Apêndice K). |
| 5º Encontro | 26/04/2023 | Ciclo PDR (Planejamento, Desenvolvimento e Reflexão) | <ul style="list-style-type: none"> Apresentação do Ciclo PDR; Modelo pedagógico das cinco práticas para realizar discussões em sala de aula (STEIN <i>et al.</i> 2008, p. 314); e Apresentação da proposta para o planejamento de aula de acordo com Serrazina (2017, p. 24). | TAP 6 – Elaborar uma tarefa Matemática de acordo com uma das propostas apresentadas na TAP 5 (Apêndice N). |
| 6º Encontro | 10/05/2023 | | <ul style="list-style-type: none"> Planejamento: Apresentação das primeiras ideias da proposta de aula a ser implementada com as turmas. | • |
| 7º Encontro | 17/05/2023 | | <ul style="list-style-type: none"> Planejamento: Apresentação da proposta da tarefa Matemática a ser implementada com as turmas. | |
| 8º Encontro | 21/06/2023 | | <ul style="list-style-type: none"> Reflexão: Aplicação da TAP síncrona 9 (Apêndice P) - Estudo nos pequenos grupos sobre as implementações realizadas pelos professores participantes; e Discussões coletivas sobre a TAP 1 – plenária. | |
| 9º Encontro | 28/06/2023 | | <ul style="list-style-type: none"> Reflexão: Aplicação da TAP síncrona 10 (Apêndice Q) – Estudos nos pequenos grupos sobre as implementações realizadas pelos professores participantes; e Discussões coletivas sobre a TAP 2 – plenária. | |

Fonte: Autoria própria (2023).

⁷ Plataforma de engajamento, ensino, avaliação e revisão, que faz uso da gamificação. Disponível em: <<https://kahoot.com/>>. Acesso em jun. 2023.

Os encontros foram divididos em três focos principais: apresentação e aspectos gerais do RM (1º encontro), entendimentos essenciais do RM (2º ao 4º encontro) e ciclo PDR (5º ao 9º encontro). Para compor as horas assíncronas, tarefas assíncronas foram enviadas via e-mail e por grupo de WhatsApp para estudo dos participantes, como objetivo de ser “preparação” para os encontros síncronos.

Para este estudo serão analisados os trechos de discussões realizados durante a plenária nos encontros 1 a 4 (a descrição detalhada dos 9 encontros pode ser consultada no Apêndice B).

Destacamos aqui as tarefas matemáticas (Quadro 10, 11, 12 e 13) discutidas e utilizada para as análises das IDP (Ribeiro, Ponte, 2020) em plenária.

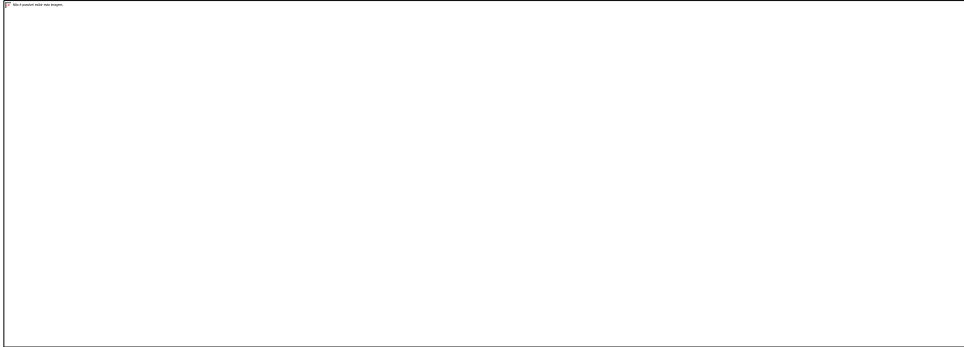
Quadro 10: Tarefa Matemática – cálculo de área e perímetro

| | | | |
|--|------------------|---------------------|----------------------|
| Renato tem um geoplano e gosta de construir figuras geométricas nele. Mas agora, ele tem algumas questões para resolver utilizando o geoplano. Vamos ajudá-lo? | | | |
| Renato formou no geoplano um quadrado com área 9 cm^2 e precisa encontrar o perímetro, depois preencher a tabela abaixo: | | | |
| | Figura 1 | Figura 2 | Figura 3 |
| Área | 9 cm^2 | O dobro da figura 1 | O triplo da figura 1 |
| Perímetro | | | |

Fonte: Adaptado de Morais (2022).

Quadro 11: Tarefa Matemática Azulejos brancos e cinzentos

Observe a seguinte sequência de figuras, onde estão empilhados azulejos brancos e cinzentos, seguindo uma determinada regra.



a) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a **Figura 5**. Explique como você obteve cada resultado.

I. Número de azulejos brancos: _____

II. Número de azulejos cinzentos: _____

III. Número total de azulejos: _____

b) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a **Figura 10**. Explique como você obteve cada resultado.

I. Número de azulejos brancos: _____

II. Número de azulejos cinzentos: _____

III. Número total de azulejos: _____

c) Considerando a regularidade da sequência de figuras, qual figura terá um total de **38 azulejos**? Explique a sua resposta.

d) Considerando a regularidade da sequência de figuras, existe alguma figura com um total de **66 azulejos**? Explique a sua resposta.

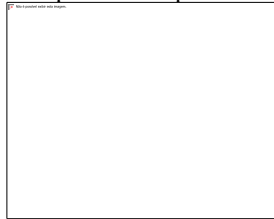
e) Com base na observação da sequência de figuras, construa uma sequência numérica com **10 termos**. Explique qual regularidade você utilizou para escrever a sequência numérica e qual cálculo realizou para obter cada termo da sequência.

Quadro 12: Tarefa Matemática envolvendo cálculo de área e perímetro

Renato tem um Geoplano e gosta de construir figuras geométricas nele. Mas agora ele tem algumas questões para resolver utilizando seu Geoplano. Vamos ajudá-lo?

- 1) Construa no Geoplano um retângulo e um quadrado e depois desenhe na malha pontilhada.
- a) O que você pensou para formar esses polígonos? Explique.
- 2) Construa várias figuras com o perímetro igual a 8 cm. Todas as figuras têm a mesma área? O que você pode concluir?

Malha pontilhada para tarefa 1



Fonte: Morais (2022).

Quadro 13: Conjectura de Maria

A tarefa a seguir mostra como Maria, uma estudante do 3º ano, analisou uma relação que ela descobriu ao multiplicar dois números inteiros:

Eu multipliquei 3×5 e percebi que o resultado é um a menos que o resultado da multiplicação de 4×4 . Tentei isso com outros números, e parece funcionar para todos.

$4 \times 6 = 24$, o resultado é um a menos de $5 \times 5 = 25$

$7 \times 9 = 63$, o resultado é um a menos de $8 \times 8 = 64$

$6 \times 8 = 48$, o resultado é um a menos de $7 \times 7 = 49$

Fonte: Lannin, Ellis e Elliott (2011).

As discussões e ações desenvolvidas pelos formadores, juntamente com os participantes, durante todo o processo formativo são apresentadas no próximo capítulo.

5.4 Procedimentos de estudo e análise dos dados

O estudo e análise dos dados selecionados nessa pesquisa tem como intenção responder os questionamentos que se relacionam com o objetivo de *compreender como as ações do formador de professores que ensinam Matemática contribuem para gerar oportunidades de aprendizagem profissional no que diz respeito aos entendimentos essenciais do RM*. Esses questionamentos já foram apresentados anteriormente, destacamos novamente para situar o leitor nos procedimentos utilizados para estudo e análise destacados neste capítulo:

- Quais foram as ações do formador, em um processo formativo que trata do RM e seus entendimentos essenciais, que proporcionam oportunidades de aprendizagem aos professores envolvidos?
- De que forma essas oportunidades de aprendizagem profissional contribuem para que os professores aprimorem seus entendimentos essenciais do RM?

Como condução no processo analítico, adotamos as pesquisas desenvolvidas por Ball, Thames e Phelps (2008) como referencial teórico central no campo da Educação Matemática, especialmente no que se refere à epistemologia do conhecimento profissional docente. Esses autores mostram que o ensino da matemática exige um saber que transcende o domínio do conteúdo disciplinar: trata-se de um conhecimento matemático específico da docência, voltado para a prática pedagógica, que se manifesta na capacidade de selecionar, organizar, explicar, representar e responder às diferentes demandas que emergem no contexto da sala de aula. Nessa perspectiva, o MKT é compreendido como um conhecimento especializado, distinto do que é requerido em outros contextos profissionais, e que, portanto, precisa ser investigado, sistematizado e desenvolvido ao longo da formação inicial e continuada de professores.

Para identificação das ações do formador, consideramos as pesquisas de Ferreira, Ribeiro e Ponte (2023) que mostram como o MKT pode ser desenvolvido na prática formativa por meio de discussões coletivas conduzidas pelo formador, enquanto Ball, Thames e Phelps (2008) definem o que constitui o conhecimento especializado do professor, Ferreira, Ribeiro e Ponte (2023) analisam como esse conhecimento pode ser mobilizado e desenvolvido em formações coletivas, por meio de práticas de mediação do formador. Em suma, Ferreira, Ponte e Ribeiro (2023) oferecem uma análise qualitativa e interpretativa das práticas dos formadores de professores em ação. As categorias elencadas pelos autores revelam como um formador pode construir ambientes de troca, orientação e reflexão, essenciais para a formação docente.

Incorporamos na análise, as categorias de Trevisolli (2024) que investigou como o MKT (Ball; Thames; Phelps, 2008) pode ser considerado em processos formativos, com potencial para oferecer OAP, em particular, no campo do RM.

A análise minuciosa das IDP (Ribeiro; Ponte, 2020) concentrou-se especialmente no momento da plenária de cada um dos quatro encontros do processo formativo. A escolha para analisar este período se deu ao fato de serem trabalhados pelos formadores os processos e entendimentos essenciais do RM (Lannin; Ellis; Elliott, 2011) constitui-se como uma ação formativa que possibilita promover a transição de práticas baseadas na reprodução de

procedimentos para abordagens que valorizam a construção de significados, a argumentação, a investigação e a justificação.

Nessa etapa, após refletirem sobre os processos e entendimentos essenciais, os participantes haviam realizado as TAP e discutido em pequenos grupos. A plenária, conduzida pelos formadores, tinha como objetivo sintetizar essas discussões e, por meio de diferentes ações, favorecer a criação de OAP promissoras para o desenvolvimento do RM.

É importante destacar, entretanto, que nem todas as ações alcançaram esse propósito. Por esse motivo, foram realizados estudos e análises detalhadas, trecho a trecho, das falas gravadas e transcritas. Esse processo de análise seguiu as seguintes etapas:

1. Identificação das ações do formador;
2. Verificação da geração (ou não) de OAP;
3. Quando geradas, identificação do tipo de OAP;
4. Seleção das ações consideradas promissoras para o desenvolvimento do RM.

Essas etapas foram repetidas ao menos cinco vezes por encontro analisado, para que nos recortes, escolha dos trechos, revelassem as primeiras categorizações, ou seja, as OAP geradas que desenvolveram o RM nos professores. O primeiro refinamento da categorização, referente as análises, consta em um artigo publicado com uma análise de um excerto (Gross; Trevisan; Araman, 2024). Com isso, um novo estudo e análise de todos os trechos foi realizado, percorrendo as quatro etapas citadas anteriormente, considerando as ações do formador (Ferreira; Ribeiro; Ponte, 2023) e as OAP e o conhecimento do RM para o ensino (Trevisolli, 2024).

A fim de explicitar o processo de identificação das ações, apresentamos o Quadro 14, elaborado com o propósito de sistematizar os critérios de seleção das ações do formador observadas durante as plenárias dos quatro encontros analisados. Destacamos que reconhecemos a identificação das ações do formador promissoras para gerar OAP que podem desenvolver o RM docente, foram realizadas mediante análise dos excertos, sendo assim, não estão presentes todas as ações propostas Ferreira, Ribeiro e Ponte (2023) no Quadro 14, apenas as quais foram identificadas e analisadas neste estudo.

Quadro 14: Como identificar as ações do formador que geram oportunidades de aprendizagem referente ao desenvolvimento do RM dos professores?

| Ações do formador | Como identificar as ações do formador promissoras para gerar OAP que podem desenvolver o RM? |
|--------------------------|--|
| Convidar | Ao convidar o formador cria oportunidades para que os professores participem ativamente das discussões, expressando conjecturas, questionamentos e |

| | |
|----------------------------------|---|
| | <p>experiências identificando semelhanças entre os casos ou estendendo o raciocínio.</p> <p>Como podem ocorrer: incentivar a participação, fazer perguntas abertas, promover trocar de experiência entre os participantes, estabelecer momentos de reflexão e criar um ambiente encorajador para que os professores se sintam à vontade para expressar seus pensamentos.</p> |
| Validar | <p>A ação de validar reconhecimento as contribuições, ideias e experiências que os professores compartilham durante as discussões, como: reconhecimento das contribuições, reiterar, fomentar o diálogo, reforço positivo e conexão entre ideias e teorias. Como podem ocorrer: incentivar os registros de representação em linguagem natural e algébrica, favorecendo a compreensão dos significados matemáticos</p> |
| Parafrasear (revoicing) | <p>Essa ação reitera ou reescreve o que um professor ou participante disse, utilizando palavras diferentes, mas mantendo o sentido original da informação, com objetivo de compreensão e fornecimento de uma sequência lógica de declarações, construção sobre declarações, ideias ou compreensão já conhecidas como verdadeiras para chegar a uma conclusão.</p> <p>Como pode ocorrer: confirmar a compreensão do professor, reformular a frase, aprofundar a discussão, clarear as ideias, relacionar experiências anteriores e fomentar inclusão para contribuir com as experiências relatadas.</p> |
| Estender / Ampliar | <p>Essa ação ajuda os educadores a explorar e compreender semelhanças entre os casos e/ou estender o raciocínio para além do intervalo em que se originou. Como pode ocorrer: sugestões alternativas, perspectivas diversificadas, conexão com outras disciplinas, exploração de conceitos, exemplos práticos, desafios no ensino e promoção da colaboração.</p> |
| Solicitar esclarecimentos | <p>Ao solicitar mais informações ou uma explicação mais detalhada sobre as contribuições dos participantes durante as discussões coletivas, o formador solicita esclarecimentos que envolvem a identificação e aplicação da generalização, reconhecendo o domínio relevante e a investigação de fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa. Como pode ocorrer: perguntas diretas, clarear conceitos, encaminhar contextos específicos, reforçar ideias, incentivar respostas coletivas, conexões com experiências pessoais e <i>feedback</i> construtivo.</p> |
| Esclarecer / Explicar | <p>Essa ação permite ao formador utilizar estratégias para oferecer informações adicionais que possam ajudar os participantes a entender e identificar semelhanças entre os casos ou estender o raciocínio para além do intervalo em que de origem, além de ampliar conceitos e/ou práticas relacionadas ao ensino. Como pode ocorrer: fornece exemplos claros, aprofundar conceitos, reformular perguntas, apoio com informações teóricas, <i>feedback</i> e reflexão, utilizar recursos visuais, destinar espaço para perguntas, conexão com conhecimento dos professores e sistematização de ideias.</p> |
| Retomar | <p>Ao revisitar e conectar conteúdo ou discussões anteriores ao que está sendo tratado no momento, essa ação procura revisar e consolidar as conjecturas elaboradas, reconhecendo generalizações por meio da comparação entre casos semelhantes.</p> <p>Como podem ocorrer: revisão de conteúdo, vincular com o conhecimento prévio dos professores, criar contexto para novos conhecimentos, uso de questões reflexivas, exemplos constantes, integração das discussões, <i>feedback</i> e discussão coletiva, utilização de recursos visuais e encorajar a participação ativa.</p> |
| Contrapor | <p>Ação que visa provocar reflexões, promover o debate e esclarecer conceitos, ao apresentar diferentes perspectivas ou questionamentos sobre o que está sendo discutido desafiando afirmações, apresentando diferentes alternativas, comparando representações e utilização de contraexemplos.</p> |

| | |
|---|--|
| | <p>Como podem ocorrer: desafiar as afirmações feitas, usar perguntas provocativas, comparar diferentes representações, encorajar a análise crítica, validar opiniões diferentes, fomentar o debate aberto, refletir sobre as respostas e utilizar exemplos reais.</p> |
| Questionar | <p>Esta ação pode desempenhar um papel central na promoção da reflexão crítica e no aprofundamento do entendimento, especialmente ao favorecer a identificação de semelhanças entre os casos ou estendendo o raciocínio para aplicação do processo de generalização, bem como o reconhecimento dos domínios de validade envolvidos no uso e na interpretação de termos, símbolos e representações. O questionamento pode instigar os professores a investigar fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa e, ainda, conduzir as discussões para que a justificação matemática seja reconhecida como um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas. Sendo assim, por meio do reconhecimento da justificação os questionamentos realizados pelo formador podem proporcionar pensamentos e desenvolvimento do RM para a refutação matemática envolvendo mostrar que uma afirmação pode ser falsa para determinados casos.</p> <p>Como podem ocorrer: promover reflexão, iniciar debates, desafiar suposições, explorar conexões, encaminhar aprofundamento de conteúdo, fomentar o empoderamento, induzir a análise crítica, validar opiniões e ideias e encerrar discursos com síntese.</p> |
| Resumir os tópicos principais da discussão | <p>A ação desempenha um papel importante na sistematização do aprendizado durante as formações, como: sistematizar ideias, ligação com objetivos da formação, utilizar perguntas que resumam os tópicos trabalhados, validar contribuições, criar anotações visuais, encorajar a recapitular o que foi estudado coletivamente, desenvolver uma síntese conclusiva e apresentar conclusão da relevância da aprendizagem para práticas futuras. Como podem ocorrer: interrompe ou encerra uma sequência de falas para organizar as ideias que emergiram; retoma explicitamente o que foi discutido, utilizando expressões como “então, o que vimos até aqui...”, “o ponto central da discussão foi...”; relaciona as contribuições dos participantes aos objetivos da formação ou da tarefa proposta; formula perguntas-síntese que ajudam o grupo a recapitular os principais argumentos; valida contribuições anteriores ao integrá-las em uma explicação mais ampla; elabora uma síntese conclusiva, destacando a relevância do que foi aprendido para práticas futuras de ensino.</p> |
| Recuperar os conhecimentos prévios | <p>A ação conecta o que os participantes já sabem com o novo conteúdo que está sendo apresentado, como: levantamento inicial dos conhecimentos, referência a conversa anteriores, uso de perguntas provocativas, conexão com práticas anteriores, revisão de anotações ou materiais já conhecidos, discussão em grupo, integração com o novo conteúdo e síntese de aprendizagens. Como podem ocorrer: solicita que os participantes lembrem ideias, conceitos ou discussões anteriores; faz referência explícita a conversas, tarefas ou exemplos já trabalhados; utiliza perguntas provocativas que conectam o que já foi estudado ao novo conteúdo; retoma anotações, registros escritos ou produções anteriores; estimula discussões em grupo para comparar aprendizagens passadas e atuais; integra explicitamente conhecimentos anteriores à nova situação analisada.</p> |

Fonte: Aurtoria própria (2025).

Após a identificação das ações, o estudo e análise dos trechos voltam-se olhares para as OAP que foram geradas, verificando se as ações reconhecidas pela pesquisadora geraram algum tipo de oportunidade de aprendizagem. Nesta pesquisa, adota-se como critério analítico,

que uma OAP é identificada quando, em um episódio de interação discursiva, observam-se evidências de mobilização e transformação do conhecimento profissional docente, em especial no que se refere ao desenvolvimento do RM, desencadeadas pelo PAF, mediadas por TAP e explicitadas nas IDP (Ribeiro; Ponte, 2020), revelando potencial formativo para a prática docente.

Considerou-se também, para análise das OAP, os dados e resultados revelados na pesquisa de Trevisolli (2024), consideramos as OAP identificadas como auxiliares na análise das práticas de ensino na formação docente, a contar das IDP (Ribeiro; Ponte, 2020) referente ao desenvolvimento profissional docente acerca do RM.

Na terceira etapa, ocorreu a validação das OAP foram geradas, identificando o tipo de OAP, direcionado para as ações que apresentaram oportunidades de aprendizagens no que tange ao desenvolvimento do RM. Nesse momento, entendemos que as ações do formador pontuadas por Ferreira, Ribeiro e Ponte (2023) podem gerar OAP assim como pontuado nos resultados apresentados por Trevisolli (2024).

Por último, ocorreu a filtragem das ações promissoras para o aprimoramento dos entendimentos essenciais do RM. Importante destacar aqui, o entendimento das ações que criam OAP para este estudo, são aquelas que a partir do PAF e das IDP (Ribeiro; Ponte, 2020) apresentam-se nas falas dos participantes como reconhecimento de aspectos relacionados aos processos e entendimentos essenciais do RM (Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

Após o fechamento das análises a pesquisadora fez uso de recursos da inteligência artificial (IA) em alguns trechos para auxiliar na minuciosidade dos estudos para cada um dos tópicos analisados. A plataforma de IA utilizada foi o ChatGPT⁸ (OpenAI), o recurso foi abastecido com a fundamentação teórica desenvolvida pela pesquisadora e com os trechos de discussões analisados, com intenção de examinar detalhadamente (Buriak *et al.*, 2023), diminuindo a possibilidade da não identificação de ações e/ou as OAP geradas durante as plenárias dos quatro encontros do processo formativo. Os recursos de IA auxiliaram a pesquisadora nas análises ampliando o reconhecimento de ações do formador e OAP identificadas a partir dos registros de fala dos participantes.

Além de apresentar os resultados nas análises e as conclusões elencadas durante a pesquisa nesse material, será também disponibilizado um produto educacional composto por

⁸ O ChatGPT é uma ferramenta de inteligência artificial desenvolvida pela OpenAI, baseada em modelos de linguagem de grande escala, conhecidos como *Generative Pre-trained Transformers* (GPT). Disponível em: <https://chat.openai.com/>. Acesso em: jan. 2026.

plano de formação que articula as ações do formador (Ferreira; Ribeiro; Ponte, 2023), os processos do RM (Lannin; Ellis; Elliott, 2011) e as dimensões do modelo PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020). O plano de formação tem como intuito apresentar um referencial prático-teórico capaz de orientar formadores, condutores de processos de formação continuada de professores que ensinam Matemática, evidenciando o papel das IDP como elemento central para a promoção do RM em contextos formativos e escolares.

6 ANÁLISE DOS DADOS

Para uma melhor organização, evidenciamos as ações do formador de acordo com o modelo de prática e ações propostas por Ferreira, Ribeiro e Ponte (2023) e a partir das dimensões do modelo PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020) e do conhecimento do professor que ensina Matemática (Ball; Thames; Phelps, 2008). Elegemos, como foco de investigação, os quatro primeiros encontros, os quais compreendem discussões e realização de TAP envolvendo os processos e entendimentos essenciais propostos por Lannin, Ellis e Elliott (2011). E as ações do formador (denominado nas seções apenas como formador) como foco de análise e identificação nesse estudo.

Apresentamos a descrição e a análise dos dados dos encontros, considerando que a participação sofreu variações em decorrência das ausências dos participantes. Assim, em cada uma das seções, destacamos os nomes fictícios dos participantes presentes nas datas correspondentes aos quatro encontros.

Finalizado o processo formativo, a descrição dos dados foi iniciada. Nessa etapa, foi realizada a transcrição dos áudios dos vídeos que foram gravados durante os encontros com auxílio da função de gravar disponível no *Google Meet*. Os principais trechos de transcrições estão nas seções 6.1 (encontro 1), 6.2 (encontro 2), 6.3 (encontro 3) e 6.4 (encontro 4) deste capítulo, que destacam as ações do formador nos momentos com diferentes OAP docente a respeito do RM, seus processos e entendimentos.

Para que o leitor acompanhe visualmente, no texto, as ações do formador e as OAP, foram utilizados os efeitos de negrito do *Microsoft Word* no decorrer das seções.

6.1 Encontro 1

No encontro 1 foi apresentada a organização do processo formativo, a contar do cronograma, dos conceitos a serem estudados e como seriam estruturadas cada uma das etapas. Para tanto, o formador iniciou falando sobre os organizadores, as intenções de planejamento e concretização do processo formativo, acolhendo os professores e frisando a importância da

participação. Destacou também a importância do aceite, de cada um, em fazer parte de um processo formativo que contempla um projeto amplo de pesquisas que estavam sendo desenvolvidas em torno do desenvolvimento profissional e compreensões do RM.

Para isso, foi solicitado aos professores que respondessem no *Padlet* sobre as expectativas que eles têm em participar do processo formativo, e após, foi destinado um tempo para que cada um se apresentasse, contando a formação, o nível de escolaridade que atua e o que espera desse momento de aprendizagem. Os formadores e os professores se apresentaram, a formadora 1 continuou destacando a importância do grupo quanto a diversidade de conhecimentos, formações, atuações e experiências.

A formadora 1 **convidou** os professores a participarem da primeira TAP síncrona que compreendeu um questionário envolvendo as primeiras impressões que eles tinham sobre o RM. Para esse propósito foi destinado um tempo de dez minutos para que cada professor respondesse quatro perguntas: 1) Como você explicaria o que é RM?; 2) Que elementos você considera importante para compreendermos o RM dos estudantes? 3) Que tipos de tarefas você considera que podem contribuir para o desenvolvimento do RM dos estudantes?; e 4) Em que você se baseou para responder às questões anteriores (lembranças enquanto estudante, experiência em sala de aula, estudos teóricos, palestras, etc.)?

Essas perguntas foram elaboradas com intenção de proporcionar um momento para que os professores se sentissem à vontade para expressar suas percepções iniciais sobre o tema. Em seguida, os professores compartilharam, com o grupo, algumas experiências e/ou conhecimentos que compreendem como o RM.

Os professores comentaram a respeito do que pensam do RM, que envolve situações de como resolver de terminada tarefa, como o professor organiza a aula para dar suporte para o desenvolvimento do raciocínio do estudante. O formador **retomou** a fala dizendo que as impressões que eles possuem sobre RM estavam ao encontro do que seria proposto no processo formativo, e que o objetivo da formação era construir um percurso para compreender como a literatura científica explora o tema, e que relações podem ser estabelecidas com a prática letiva.

Reconhecemos que essas ações iniciais do formador de **convidar** e **retomar** envolveu os aspectos iniciais a serem discutidos com os professores acerca do RM, desde o conceito até as primeiras maneiras de pensar em como trabalhar essa temática com os estudantes, procurando destacar elementos ou tarefas que podem ser promissoras nesse tipo de trabalho. Desse modo, destacam-se pontos importantes a serem considerados para os professores pensarem na organização da aula com intuito de desenvolvimento do RM nos estudantes.

O formador também **esclareceu** que as impressões dos professores convergiam ao que é proposto em estudos sobre o RM, que compreende refletir e/ou antecipar os pensamentos dos estudantes, as suas expectativas, em utilizar práticas que incentivem um papel ativo e não apenas a replicação dos procedimentos pré-estabelecidos pelos professores ou contidos nos livros didáticos. **Esclareceu**, ainda, que estas discussões já são presentes no contexto da Educação Matemática há algum tempo, principalmente no que tange ao pensamento crítico do estudante e compreensão dos conceitos matemáticos.

Finalizado o primeiro momento individual, o formador organizou o grupo dividindo-os nas salas temáticas no *Google Meet*, para participação do primeiro estudo coletivo. Essa organização foi pensada de modo que professores com diferentes experiências, níveis de atuação e distintas formações fizessem parte do mesmo grupo, com intuito de oportunizar interações e discussões. Foram organizadas três salas temáticas: 1 (Fernanda, Maria, Silvia e Serena); 2 (Lívia, Natália, Roberta e Paula), e 3 (Fátima, Félix, Rebeca, Bianca e Eloísa). Para esse momento, foi destinado um tempo de vinte minutos para realização das discussões e registros das respostas no *Google Forms*.

Nessa primeira TAP constava a tarefa matemática envolvendo cálculo de área e perímetro (Quadro 10), para que os professores resolvessem e, também, discutissem a questão: a partir de um trecho de discussão da dupla Bruno e Maria, e da análise do registro escrito entregue à professora, o que podemos dizer sobre o RM desses estudantes?

Os professores tiveram a oportunidade de apresentar suas compreensões sobre a tarefa matemática e, também, ouvir o que os colegas pensavam sobre ela. Após os vinte minutos, todos os participantes retornaram para a sala geral e o formador **convidou** os participantes a compartilharem reflexões e impressões que tiveram acerca da tarefa matemática.

Os integrantes do grupo 3, formado pelos professores Fátima, Félix, Rebeca, Bianca e Eloísa, apresentaram como pensaram, pontuando que procuraram resolver a tarefa pensando como um estudante, destacando que ele pensaria tanto no dobro da área quanto no dobro do perímetro. Nesse momento, uma das professoras (Rebeca) toma a palavra e destaca um problema percebido pelo grupo no enunciado da tarefa, já que não deixa explícito se a figura pedida é um quadrado ou um retângulo.

O formador pede para que o grupo pense, que antes de ir para a resolução, se atentem para o enunciado da tarefa **esclarecendo** para o grupo que a organização e proposição da tarefa precisa ser bem planejada, para que ela não induza o estudante ao erro, ou a pensar de forma

diferente ao objetivo proposto. Mesmo que para os professores esteja claro o que seria necessário fazer, para o estudante, muitas vezes, não está.

Outro ponto importante é sobre a interpretação do enunciado da tarefa e nas estratégias adotadas pelos estudantes para resolvê-la. O formador **explicitou** sobre a importância de garantir que todos os estudantes compreendam a tarefa, pois diferentes interpretações podem levar a respostas diferentes. Oportunizar surgimento de diferentes resoluções é uma boa opção quando se discute sobre o RM, pois propicia a exploração de diferentes conjecturas e generalizações.

O formador **convida** outros professores a compartilharem qual figura pensaram que poderia ser utilizada para resolver essa tarefa. A professora Paula aceita ao convite, apresentando imagens na tela do Google Meet, mostradas na Figura 10.

Figura 7: Registros de prática Grupo 2: TAP assíncrona 2



Fonte: Autoria própria (2023).

[1.10] Professora (Paula): Nós pensamos em que a figura poderia mudar. Nós pensamos em dobrar a área. No começo ficou um pouco confuso, mas depois a gente foi conseguindo entender. Então, o que aconteceu? Como a área dobrou, né? De nove, passou a dezoito, então a figura para nós teria que mudar. Então, a gente fez um retângulo né? E a base dele acabou dobrando. Em vez de três passou a seis para poder dar o resultado da área dezoito.

[1.11] Professora (Lívia): A gente pensou mais como aluno, sabe, de um jeito mais simples.

[1.12] Professora (Paula): Sim, foi o que nós pensamos porque nem todos os estudantes, ainda, têm o conhecimento da raiz quadrada né? Aquele aluno que não tem, como que ele resolveria? E a nossa figura três, nós triplicamos a figura, o resultado da figura um que deu vinte e sete também, e como do outro grupo, só que a base que foi triplicada. Então a figura continuou sendo um retângulo só que com outras medidas maiores. E aí o perímetro deu vinte e sete nessa figura. Eu não comentei da figura dois, né? O perímetro ficou a mesmo resultado. Na figura dois e na figura três.

[1.13] Formador: Esse é o único retângulo possível que resolve o problema?

[1.14] Professora (Paula): Como assim?

[1.15] Formador: Um retângulo por exemplo seis por três. Ele tem área dezoito centímetros quadrado. Ele é o único retângulo possível?

[1.16] Professora (Paula): Não, nós tentamos manter a altura três. É, mas poderia ter sido dois e nove né?

[1.17] Formador: E se fosse dois e nove, quanto seria o perímetro?

[1.18] Professor (Natália): Vinte e dois.

[1.19] Formador: *É. Nesse caso vocês trabalharam com uma situação particular, vocês montaram a solução pensando em uma escolha também particular, vocês optaram por manter uma das dimensões e vocês só foram mexendo na outra e a gente tem uma outra possibilidade de resolução diferente da do grupo anterior que trabalha com retângulos, mas que ainda assim são retângulos particulares.*

Neste trecho de discussão, as professoras compartilham como analisaram o enunciado e resolveram a tarefa Matemática. Elas exploram diferentes estratégias e consideram possibilidades para chegar a uma solução esperada no contexto educacional em que atuam.

Nesse trecho de discussão, reconhecemos que a ação de **convidar** do formador permitiu aos professores raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações sobre o enunciado e elaborar hipóteses de resolução da tarefa matemática

O **questionamento** do formador [1.13] sobre a possibilidade de construir outros retângulos desafiou os professores a pensarem em diferentes resoluções para esta tarefa, destacando que o grupo pensou em uma situação particular para a resolução. O grupo inicialmente pensou uma solução mais simples, mencionando que pensaram em como seus estudantes resolveriam a tarefa. Em especial, o grupo considerou que nem todos os estudantes têm conhecimento de raiz quadrada e operações com números decimais, conhecimentos que seriam necessários caso a figura fosse um quadrado.

Assim apresentam que na discussão do grupo resolveram manter a altura três e sinalizam da possibilidade de escolher o dois ou o nove [1.16]. Assim reconhecem um domínio particular para a situação apresentada, e generalizam que, ao manter a altura três e triplicar o comprimento nas figuras 2 e 3, o perímetro e área teriam o mesmo valor de medida em cada uma das figuras.

Em [1.17], o formador realiza a ação de **contrapor** solicitando um contraexemplo (retângulo 2×9), o que evidencia que a propriedade “perímetro numericamente igual à área” não é geral, mas decorre de uma escolha particular (manter uma dimensão fixa). Já em [1.19], o formador realiza uma sistematização parcial ao **explicar** a particularidade do procedimento adotado (“vocês optaram por manter uma das dimensões”), e **ampliando** o espaço de soluções (toda a família de retângulos de área 18), para além do domínio original (figuras quadradas ou retangulares), procurando estender o raciocínio para outras possibilidades. Nesse caso, a intenção do formador foi de motivar os professores nas diferentes maneiras de resolução que uma tarefa pode oferecer e, em especial, de como diferentes tipos de raciocínios podem ocorrer.

No âmbito de ações promotoras do RM, reconhecemos que essa discussão contribuiu para os professores refletirem a respeito da organização e preposição de tarefas matemáticas, para que seja bem pensada e elaborada, para que possibilite diferentes raciocínios, quanto as

antecipações de possíveis resoluções que podem surgir na aplicação os estudantes. A ação do formador de contrapor possibilitou ampliar a discussão contribuindo também para que os professores explorassem desdobramentos possíveis que uma tarefa matemática pode ter, e que uma tarefa bem planejada pode atender diferentes níveis de ensino, que dependendo das intervenções realizadas pelo professor, o nível da tarefa pode ser ampliado. Na tarefa em estudo, pode ser explorada a relação com o dobro, as diferentes possibilidades de cálculo de área e perímetro a partir das dimensões das figuras, e que a partir disso podem ser envolvidos conceitos matemáticos como divisores, múltiplos, números inteiros, decimais e números irracionais.

As OAP evidenciadas nestes trechos da discussão, mobilizadas pelas ações do formador, relacionam-se ao desenvolvimento do RM no que se refere à formulação e ao estudo de conjecturas, que envolvem raciocinar sobre relações matemáticas para elaborar afirmações provisoriamente aceitas como verdadeiras, ainda que não se saiba se, de fato, o sejam (Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

O encontro continuou com o formador **explicando** pressupostos teóricos do RM, com foco nos conceitos de conjectura e generalização:

[1.20] Formador: *Por conjectura a gente está querendo de maneira bem simplificada falar em levantar hipóteses. Então, eu tenho que pensar que as tarefas que propuser para os meus estudantes, têm que fazer com que eles levantem hipóteses. Vocês levantaram várias hipóteses durante a resolução dessa tarefa. As tarefas têm que, de alguma maneira, possibilitar que os estudantes generalizem. E o que é generalizar? É você ser capaz de perceber a estrutura por trás daquela resolução! É de você não estar preocupado só com a resposta numérica, mas sim você perceber algo que se aplica a um conjunto maior de situações. Por exemplo, a resolução que a Paula compartilhou, elas fizeram escolhas particulares dos retângulos, vocês não escolheram retângulos que vocês mantiveram as alturas sempre iguais a três? O que vocês perceberam com relação a outra medida, a outra dimensão do retângulo O quadrado original era três por três. E retângulo de área 18, tinha quais medidas?*

[1.21] Professora (Paula): *Medidas 6 e 3.*

[1.22] Formador: *Medida 6 e 3. E o terceiro?*

[1.23] Professora (Paula): *9 e 3.*

[1.24] Formador: *Então, quando você mantém uma das dimensões fixas, que é a dimensão 3, o que vai acontecendo com a outra?*

[1.25] Professora (Paula): *Ela dobrou e depois ela triplicou.*

[1.26] Formador: *Veja então: que se eu queria dobrar a área, eu posso chegar a uma generalização que mantendo uma das dimensões fixas, basta dobrar a outra. Então, se você dobrar um dos lados, a área dobra, se você mantiver uma dimensão fixa. Se você triplicar o lado, a área vai triplicar. Isso é uma generalização, ela envolveu a gente a expandir aquilo que era aplicado naquela tarefa específica para outras situações mais gerais envolvendo retângulos.*

Neste trecho, vemos que, para exemplificar o conceito de conjectura e generalização, o formador **retomou** [1.20] o pensamento do grupo 2 de manter um dos lados do retângulo com a mesma medida, e destacou que para a conjectura que o grupo criou seria possível encontrar as respostas que satisfazem a hipótese inicial. Sendo assim, eles conseguiram generalizar a conjectura criada, o formador destaca que a maneira pensada pelo grupo se expandiu para outros

domínios e poderia ser aplicada para outras situações dentro do contexto proposto na tarefa [1.25].

Houve também, neste trecho, ação do formador de **esclarecer** [1.26] para os participantes a definição dos conceitos conjecturar e generalizar, frisando que a conjectura é a capacidade de levantar hipóteses e a generalização deve permitir que os estudantes sejam capazes de perceber a estrutura por trás de uma resolução e aplicá-la a um conjunto maior de situações semelhantes. **Esclareceu** também que as tarefas propostas para os estudantes devem incentivá-los a fazer conjecturas, ou seja, a pensar em possíveis soluções antes de encontrar a resposta final.

Para exemplificar a generalização o formador fez uso do exemplo da resolução compartilhada pela professora Paula, ressaltando que ao manter uma dimensão fixa (a altura de três unidades), as outras dimensões (largura e comprimento) foram ajustadas para alcançar a área desejada. Os **esclarecimentos** solicitados à professora Paula ajudam-na a explicitar a generalização de que, ao dobrar ou triplicar a dimensão, a área também dobrará ou triplicará.

No que se refere a expandir para situações gerais, o formador sistematiza [1.26] que a generalização, citada no exemplo, expande o entendimento além da tarefa específica para situações gerais envolvendo retângulos, **resumindo os tópicos principais da discussão** [1.26]. **Esclarece**, também, como os professores tiveram a oportunidade de reconhecer que os estudantes podem aplicar seu RM e sua capacidade de generalização para resolver uma variedade de problemas relacionados.

Em resumo, as ações do formador identificadas nesse trecho contribuem para geração de OAP para compreensão dos conceitos de conjectura e a generalização, bem como o reconhecimento de possibilidades de exploração desses processos de RM em suas aulas, o que não apenas ajuda os estudantes a desenvolver o RM, mas também permitem que eles apliquem seus conhecimentos matemáticos de maneira mais ampla em diferentes contextos.

Diante dos trechos analisados do encontro 1, evidenciamos no Quadro 15 as práticas e as ações realizadas pelo formador, considerando os componentes descritos por Ferreira, Ribeiro e Ponte (2023). Para melhor apresentar as OAP destacamos, na primeira coluna as práticas do formador relacionam as suas ações (segunda coluna), terceira coluna o trecho de discussão, na quarta coluna o objetivo da ação e na quinta coluna as OAP relacionadas aos conhecimentos acerca do RM e seus processos.

Quadro 15: Práticas e ações do formador e OAP identificadas no Encontro 1

| Práticas do formador | Ação do formador | Trecho de discussão | Objetivo | OAP relacionadas ao RM |
|---|-------------------------|----------------------------|--|---|
| Estabelecer uma comunidade de aprendizagem | Convidar | 1.10 | Solicitar para os professores evidenciem as conjecturas elaboradas | Raciocinar a respeito das relações matemáticas para desenvolver afirmações e hipóteses. |
| Interpretar as interações com os professores e entre os professores | Explicar | 1.19 | Tornar explícito o significado matemático e didático das escolhas feitas pelo grupo | Avaliar os argumentos para compreenderem como escolhas influenciam o tipo de raciocínio a ser desenvolvido. |
| | Ampliar | 1.19 | Explorar diferentes estratégias, examinar limites e alcances das ideias para que seja possível promover generalizações mais refinadas. | Exploração de diferentes estratégias e à avaliação de argumentos. |
| | Esclarecer | 1.26 | Definição dos conceitos conjecturar e generalizar. | Definir e exemplificar conjectura e generalização. |
| Estabelecer Conexões | Retomar | 1.20 | Relembrar a conjectura elaborada. | Generalizar a conjectura criada. |
| Desafiar os professores a avançar em seus conhecimentos | Contrapor | 1.17 | Solicitar contraexemplo | Analisar casos particulares que podem ocorrer na resolução da tarefa matemática |
| | Questionar | 1.13 | Reconhecer o domínio relevante e buscar por outras opções de resoluções | Identificam a aplicação da generalização, reconhecendo o domínio particular para a situação apresentada. |

| | | | | |
|----------------------------|--|------|---|--|
| | | 1.20 | Reconhecer o domínio com extensão para outros casos | Generalizar a conjectura elaborada |
| Sistematizar aprendizagens | Resumir os tópicos principais da discussão | 1.26 | Generalização expande o entendimento além da tarefa específica. | Ao generalizar o entendimento vai além da tarefa específica estendendo para situações gerais envolvendo outros retângulos. |

Fonte: Aurtoria própria (2023).

Ao convidar os professores a compartilharem o modo como pensam (trecho 1.10), o formador contribui para o estabelecimento de uma comunidade de aprendizagem em que ideias podem ser compartilhadas, discutidas e refinadas coletivamente. Esse movimento valorizou a formulação de conjecturas como parte essencial do RM, estimulando os professores a raciocinarem sobre relações matemáticas e a elaborarem afirmações provisórias que poderiam ser posteriormente testadas e validadas.

Já ao desafiar a partir das ações de questionar e contrapor os professores a avançaram em suas soluções (trechos 1.13 e 1.20), o formador promove um passo além: o reconhecimento dos limites de determinados domínios e a possibilidade de estender soluções para outros casos, o que se conecta ao processo de generalização. Assim, as práticas do formador não apenas incentivam a produção de conjecturas, mas também impulsionam a reflexão crítica e a expansão do pensamento matemático, consolidando o papel do formador como mediador de oportunidades que ampliam e aprofundam conhecimento a respeito do RM no contexto da formação docente.

Ao interpretar as interações com e entre os professores, o formador realiza ações de explicar e ampliar, particularmente no trecho [1.19]. Ao explicar, o formador destaca o significado matemático e didático das escolhas realizadas pelo grupo, ao caracterizar a solução apresentada como uma situação particular decorrente da decisão de manter uma das dimensões do retângulo fixa e variar apenas a outra. Essa ação possibilitou que os professores avaliassem os argumentos mobilizados e compreendessem como determinadas escolhas matemáticas influenciam o tipo de raciocínio desenvolvido. Ainda nesse trecho, ao ampliar a discussão, o formador expande o campo de análise para além da solução apresentada, ao compará-la com outras possibilidades de resolução. Essa prática amplia o espaço de reflexão, permitindo explorar diferentes estratégias, examinando os limites e alcances das ideias e favorecendo

generalizações mais refinadas, gerando OAP relacionadas à exploração de diferentes estratégias e à avaliação de argumentos.

No trecho [1.26], o formador realiza a ação de esclarecer, ao definir os conceitos de conjectura e generalização. Ele esclarece que conjecturar refere-se à capacidade de levantar hipóteses e que generalizar implica em perceber a estrutura subjacente a uma resolução e aplicá-la a um conjunto mais amplo de situações semelhantes. Essa ação contribui para a compreensão conceitual dos processos do RM, apoiando a distinção entre casos particulares e relações gerais.

Ao retomar, no trecho [1.20], o formador reconecta a discussão às conjecturas elaboradas pelos professores, estabelecendo conexões entre as hipóteses levantadas e os processos de generalização em desenvolvimento. Com isso, ao retomar ocorre a continuidade conceitual do processo formativo e cria oportunidades para que os professores generalizem as conjecturas construídas, fortalecendo a articulação entre experiência prática e reflexão teórica.

No que se refere ao desafiar os professores para avançarem seus conhecimentos, o formador mobiliza as ações de contrapor e questionar. No trecho [1.17], ao solicitar implicitamente um contraexemplo, o formador contrapõe a solução apresentada a outras possibilidades matemáticas, incentivando a análise de casos particulares e a avaliação dos limites das generalizações implícitas. Já nos trechos [1.13] e [1.20], ao questionar se a solução apresentada é a única possível e ao discutir a extensão da conjectura para outros casos, o formador estimula o reconhecimento do domínio relevante da situação e a busca por outras opções de resolução, favorecendo a compreensão da aplicação e da ampliação da generalização elaborada.

No trecho [1.26], o formador realiza a ação de resumir os tópicos principais da discussão, ao sintetizar a investigação desenvolvida pelo grupo e ao explicitar que a generalização permite expandir o entendimento para além da tarefa específica, estendendo-o a situações gerais envolvendo retângulos. Nesse momento ocorre uma sistematização resumindo as OAP construídas em comunidade de aprendizagem, permitindo que os professores compreendam o significado e o alcance do processo de generalização no RM.

As ações, convidar e questionar, realizadas pelo formador salientaram também a importância de planejar e organizar a tarefa Matemática de modo que seja possível que o estudante crie conjecturas e possa generalizá-las, antecipando as possíveis resoluções que podem surgir, considerando o potencial que a tarefa possui.

Em síntese as ações do formador neste primeiro encontro foram realizadas no sentido de motivar os professores a iniciarem seus pensamentos em como desenvolver o RM, assim

como uma síntese introdutória dos conceitos de conjecturar e generalizar. A partir da tarefa Matemática que foi resolvida e estudada pelos professores, foi possível que eles iniciassem a compreensão de como conjecturar, generalizar, avaliar argumentos e estabelecimento de conexões, aspectos fundamentais do desenvolvimento do RM, conforme discutido por Lannin, Ellis e Elliott (2011) ocorrem na prática.

6.2 Encontro 2

O segundo encontro iniciou com a fala do formador acolhendo os professores e retomando algumas discussões realizadas no encontro 1, direcionando para o estudo de entendimentos essenciais do RM destacados pelos autores Lannin, Ellis e Elliott (2011)

O formador apresentou os pressupostos principais do livro e a definição que os autores destacam sobre o RM Já a formadora 1 apresenta as explicações sobre o entendimento essencial 1 e 2, destacando o significado de conjectura e de generalização. É proposta então a realização da TAP síncrona 4 (Apêndice F). Os professores foram divididos nas salas temáticas e permaneceram por trinta minutos para estudar os registros de prática (protocolo escrito e transcrições de áudio) e responder aos seguintes questionamentos: 1) Analisando esses registros você diria que os estudantes conseguiram explicar o raciocínio? Justifique.; 2) Que conjectura (s) cada um desses estudantes apresentou?; 3) Esses estudantes realizaram alguma generalização? Se sim, ela é válida em qual domínio? Ela pode ser estendida para além do domínio em que se originou? Discuta a respeito.; 4) Sobre o entendimento essencial 4, "conjecturar e generalizar envolve o uso e o entendimento do significado de termos, símbolos e representações". O que podemos dizer sobre esse uso e entendimento nos registros de prática analisados?

Havia um total de 11 professores, que foram organizados da seguinte maneira: grupo 1 – Rebeca, Fernanda, Roberta e Serena; grupo 2 – Lívia, Salete e Sílvia; grupo 3 – Eloísa, Serena, Bianca e Natália.

Após o tempo combinado todos voltaram para a sala geral do *Google Meet* para realizar as discussões sobre o que refletiram sobre os registros de prática. O formador **convida** os professores a compartilharem o que pensaram:

[1.26] Professora (Rebeca): *Os estudantes perceberam que os azulejos brancos não mudam e que os cinzentos aumentam de três em três.*

[1.27] Formador: *Então aqui tem duas conjecturas. Uma delas é que o número de azulejos brancos não muda, está fixo, não mexe. Eles usam uma palavra nesse sentido. E no caso do aluno do registro 2, que de uma figura*

para figura seguinte aumentam 3 cinzentos. Mais alguma conjectura que vocês conseguiram reconhecer nessas resoluções?

[1.28] Professora (Rebeca): também tem a questão da metade, né? Que eles conseguiram perceber que é a figura 10, obtida a partir da 5 né? Se você somar a figura 5 a quantidade de blocos brancos e cinzas duas vezes, tem a figura 10. Eles conseguiram ter essa percepção da metade e também na letra (a) eles conseguiram perceber que ele é o divisor de 2 por 6, daí o outro aluno fala a é 3! Então eles conseguiram perceber que a figura 2, que seria quantidade de cinzas que era 6, é dois grupos de três, eles tiveram também essa percepção.

[1.29] Formador: Sobre essa questão do dobro, eu posso reconhecer que de alguma maneira eles justificam essa conjectura? Embora a gente não tenha discutido ainda justificativa, vocês diriam que eles justificam essa conjectura?

[1.30] Professora (Paula): eu acho que eles justificam!

[1.31] Formador: ou eles assumem como verdadeira?

[1.32] Professora (Paula): Assumem como verdadeiro então porque quando ele vai falar da figura 10, ele bate bem na tecla, essa aqui é a metade de dez a cinco. Então cinco mais cinco é dez. e então, para dar esse resultado aqui, ele deve certamente apontar para o trinta, é quinze mais quinze. Então, ele falando isso, ele está dizendo que um é o dobro do outro. E é metade também, a figura dez é o dobro da cinco e cinco é a metade do dez.

[1.33] Formador: Então, de alguma maneira, eles estão conjecturando aqui que pelo fato da posição dez ser o dobro da posição cinco, o tanto de azulejo cinzas que eu tenho na posição dez tem que ser o dobro do que eu tinha na posição cinco. Eu já tinha resolvido a posição cinco, encontrado quinze azulejos, quinze mais quinze é igual a trinta cinzentos porque cinco mais cinco me leva na décima figura.

Neste trecho, as ações do formador operam no intuito de desafiar os professores a avançarem em seus conhecimentos acerca dos processos de conjecturar, generalizar e justificar. Primeiramente [1.27], o formador **parafraseia** a fala de Rebeca, direcionando a atenção dos professores para a identificação de duas conjecturas: uma delas envolvendo a invariância (azulejos brancos) e outra uma taxa constante de mudança (azulejos cinzas, que crescem de 3 em 3).

Em seguida, **questiona** se os professores reconhecem mais alguma conjectura [1.27], ao que Rebeca responde destacando a relação entre dobro e metade. Ainda, **questiona** se Rebeca reconhece alguma justificativa nas falas do estudante [1.29], **contrapondo** ideias como justificar ou apenas assumir como verdadeiro [1.31]. Essas ações contribuem para que os professores percebam um movimento que vai do caso particular (figuras 5 e 10) para a validade geral, o que demanda justificativas para além de evidências empíricas. Esse movimento leva o formador a sistematizar que há um entrelaçamento de processos de RM como a elaboração de conjecturas e generalizações, e destas para justificativas [1.33] ao **recuperar os conhecimentos prévios** já discutidos a respeito dos conceitos do RM e da resolução da tarefa matemática.

Esse processo de discutir as conjecturas elaboradas pelos estudantes e as possíveis generalizações auxiliou os professores a pensarem maneiras para que as tarefas elaboradas desenvolvam o RM e contribuam na compreensão de conceitos matemáticos envolvidos. Além disso, eles tiveram a oportunidade de verificar como o RM está presente quando os estudantes identificam, generalizam, reconhecem padrões e conjecturas em suas resoluções, processos de RM importantes na compreensão de conceitos matemáticos.

Diante das conjecturas comentadas pelas duas professoras, o formador **solicita esclarecimentos** ao grupo para pensar a respeito da generalização:

[1.34] Formador: *Vocês falaram pelo menos três ou quatro conjecturas diferentes que vocês reconheceram aqui. Elas têm um caráter mais amplo e podem ser reconhecidas como generalizações?*

[1.35] Professora (Paula): *Ah, eu acho que sim.*

[1.36] Professora (Bianca): *Já eu também acho que sim porque eles fizeram as conjecturas e eles chegaram a respostas que são convincentes, né? Então eu acho que eles conseguiram generalizar, a fazer uma generalização.*

[1.37] Formador: *Para eles terem generalizado, eles têm que ter conseguido perceber alguma coisa que se aplica vários casos. Que coisas que eles conseguiram perceber que se aplicam a vários casos, no caso aqui as várias figuras da minha sequência?*

[1.38] Professora (Rebeca): *Os azulejos brancos que não mudam. Eles conseguiram perceber isso. Também a questão do três em três, né? Eles conseguiram ter essa percepção né? Que caberia ali, né? A figura anterior estava ali, né?*

Esse trecho evidencia a mobilização articulada de alguns entendimentos essenciais do RM. O movimento inicial do formador, ao **solicitar esclarecimentos** se “três ou quatro conjecturas” poderiam ser reconhecidas como generalizações [1.34], oportuniza aos professores verbalizarem que “eles fizeram as conjecturas” e chegaram a soluções “convincente[s]” [1.36], sugerindo um reconhecimento de conjecturas ancoradas em regularidades percebidas e alguma justificativa. Esse aspecto é aprofundado quando o formador **questiona** o critério de generalização (“perceber alguma coisa que se aplica a vários casos”, [1.37]), deslocando o foco do particular para a regularidade estrutural da sequência. A fala de Rebeca sobre os “azulejos brancos que não mudam” e o crescimento “de três em três” [1.38] revela a identificação padrões que sustentam a generalização realizada.

A discussão então prossegue:

[1.40] Professora (Eloisa): *gente podia considerar que ele está generalizando porque ele utilizou esta atividade ou porque, até acho que foi a Bianca que comentou, se para considerar que a generalização tem que ter outras atividades que ele aplique o mesmo raciocínio? Então daí a gente parou um minutinho e discutiu isso pode ser considerado só dentro da atividade ou tem que se estender. Daí a gente chegou até na questão do domínio, que a gente ficou com um pouquinho de dúvida, que era a próxima pergunta.*

[1.41] Formador: *Veja que a gente tem um recorte aqui de uma tarefa individual que ele usou um item específico. Então não dá para inferir se, de alguma maneira, ele consegue estender ou não essa generalização para além do que a originou. Mas a gente que tem conhecimento sobre outros comportamentos de sequência. Vamos pensar: essa generalização que ele fez que se eu dobro a posição a quantidade de azulejos cinza também vai dobrar? Essa generalização, ela vale em que domínio? Em que tipos de sequência que isso funciona? Ela pode ser estendida para outros tipos de sequência? O que vocês têm a dizer sobre isso? Vocês acham que em qualquer sequência numérica se eu dobro a posição, o número que estava naquela posição também vai dobrar?*

[1.42] Professora (Rebeca): *Não, aí já entra um outro caso, já muda essa forma, né? Essa formação original, né?*

[1.43] Formador: *Você consegue dar um exemplo?*

[1.44] Professor (Rebeca): *aquele tem bolinhas, que é muito comum, que tem uma bolinha, daí o próximo termo é uma bolinha, tem duas embaixo. Daí o terceiro termo é uma, daí duas, depois é três, então, é uma sequência já bem diferente e não é um aumento padrão assim dizer, né? Não aumenta sempre três em três ou dois em dois.*

[1.45] Formador: *Então aqui veja que a gente tem algumas particularidades nessa e que o aluno realizou algumas generalizações neste contexto particular. E aí, de alguma maneira, cabe ao professor entender o raciocínio que ele está usando aqui pra chegar essa generalização e problematizar com ele qual é a validade dela*

Ao delimitar o “recorte” de uma tarefa individual e indagar “em que domínio” a afirmação “se dobro a posição, dobra a quantidade de azulejos cinza” se mantém [1.41], a fala da professora mobiliza a OAP de reconhecer uma generalização a partir da ação de **solicitar esclarecimentos** realizada pelo formador.

Ainda sobre as generalizações [1.43], o formador desafiou os professores a pensarem em outra possibilidade de sequência que dobrando a posição o valor da quantidade de elementos também dobrará e questionou sobre o entendimento deles sobre o domínio que valide a generalização.

Na sequência, o pedido de um exemplo que contraponha a regra [1.43], mobiliza as ações de **contrapor** e de **estender/ampliar** para outras classes de sequências; a resposta de Rebeca, com uma sequência de “bolinhas” que não cresce a taxa constante [1.44], serve como contraexemplo e ilustra uma refutação sobre a generalização de que “se dobro a posição, dobra a quantidade”. Do ponto de vista dos entendimentos essenciais do RM, essas ações contribuíram para que os professores investigassem quando e por que essa estrutura se sustenta, refutassem por contraexemplo e avaliassem a validade dos argumentos do estudante.

Ao **esclarecer** que o estudante “realizou generalizações neste contexto particular” e que cabe “problematizar a validade” [1.45], o formador problematiza a questão da generalização matemática e a necessidade de considerar o contexto e as características das sequências numéricas ao fazer generalizações. Também, **explica** a importância de ensinar aos estudantes a avaliar a validade de suas generalizações em diferentes contextos matemáticos.

Finalizadas as descrições do segundo encontro, o Quadro 16 evidencia as ações identificadas, o trecho de discussão que remete a ação, o objetivo do formador a partir da ação realizada e as OAP geradas a partir delas.

Quadro 16: Práticas e ações do formador e OAP identificadas no Encontro 2

| Práticas do formador | Ação do formador | Trecho de discussão | Objetivo | OAP relacionadas ao RM |
|---|-------------------------|----------------------------|-------------------------|--|
| Interpretar as interações com os professores e entre os professores | Parafrasear | 1.27 | Identificar conjecturas | Identificação de duas conjecturas: uma delas envolvendo a invariância (azulejos brancos) e outra uma taxa constante de mudança (azulejos cinzas, que crescem de 3 em 3). |

| | | | | |
|---|------------------------------------|------|--|--|
| | Solicitar esclarecimentos | 1.34 | Proporcionar aos professores transitar do plano das formulações provisórias para a consideração de sua extensão para além dos casos e de seu domínio de validade | Reconhecer semelhanças entre os casos ou estendendo o raciocínio para além do intervalo de origem |
| | | 1.41 | Estender a generalização para outros domínios | Identificar a aplicação da generalização, reconhecendo o domínio relevante |
| | Estender / Ampliar | 1.43 | Solicitar outros exemplos que compreendam as mesmas generalizações | Identificar semelhanças entre os casos ou estendendo o raciocínio para além do intervalo de origem |
| | Esclarecer / explicar | 1.45 | Reconhecer a necessidade de considerar o contexto e as características das sequências numéricas. | Reconhecer a necessidade de considerar o contexto e as características das sequências numéricas. |
| Desafiar os professores a avançar em seus conhecimentos | Contrapor | 1.31 | Diferenciar justificativas de validação | Investigar fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa |
| | | 1.43 | Solicitar outros exemplos que compreendam as mesmas generalizações | Identificar semelhanças entre os casos ou estendendo o raciocínio para além do intervalo de origem |
| | Questionar | 1.27 | Identificar as conjecturas elaboradas pelos estudantes | Reconhecer conjecturas |
| | | 1.29 | Reconhecer justificativa | Analisar as falas dos estudantes para reconhecer diferentes justificativas |
| | | 1.37 | Estender a generalização para outros domínios | Investigar fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa |
| Sistematizar aprendizagens | Recuperar os conhecimentos prévios | 1.33 | Reconhecer conjecturas, generalizações e futuras justificativas. | Reconhecer conjecturas, generalizações e futuras justificativas. |

Fonte: Autoria própria (2026).

No âmbito da prática de interpretar as interações com e entre os professores, o formador mobiliza a ação de parafrasear (trecho [1.27]) ao reformular as falas dos participantes e nomeá-las explicitamente como conjecturas, destacando duas ideias centrais: a invariância do número de azulejos brancos e a taxa constante de variação associada ao crescimento dos azulejos cinzentos. Ao parafrasear, o formador interpreta e reorganiza o discurso dos professores, transformando contribuições informais em objetos de análise matemática, o que gera OAP relacionadas à identificação de conjecturas (Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

Ainda nessa prática, o formador solicita esclarecimentos (trechos [1.34] e [1.41]) com o objetivo de levar os professores a transitarem das formulações iniciais para a análise da extensão das ideias e de seu domínio de validade. Com isso, a OAP de favorecer o reconhecimento de semelhanças entre casos e a aplicação das conjecturas a outros contextos é gerada.

A ação de estender/ampliar [1.43] reforça OAP ao solicitar outros exemplos que satisfaçam as mesmas generalizações. Ao ampliar o espaço de análise para além do intervalo de origem, o formador promove OAP relacionadas à exploração de regularidades e à ampliação do domínio das generalizações.

No trecho [1.45], o formador mobiliza a ação de esclarecer/explicar, ao explicitar a necessidade de considerar o contexto e as características das sequências numéricas envolvidas. Essa explicitação institucionaliza critérios para a análise das generalizações, evidenciando que sua validade depende das condições e do contexto matemático, o que favorece OAP relacionadas a validade das generalizações.

No que se refere à prática de desafiar os professores a avançar em seus conhecimentos, o formador realiza a ação de contrapor [1.31] ao diferenciar justificção de validação, provocando os professores a investigarem os fatores que sustentam ou refutam uma generalização. Essa ação gera OAP associadas à avaliação de argumentos, compondo entendimento essencial 7 do RM (Lannin; Ellis; Elliott, 2011). Ação de contrapor [1.43], ao solicitar novos exemplos, reforçando a análise de limites e alcances das ideias matemáticas.

A ação de questionar também se mostra central nessa prática, aparecendo nos trechos [1.27], [1.29] e [1.37]. Por meio do questionamento, o formador orienta os professores a reconhecer conjecturas, identificar justificativas nas falas dos estudantes e estender generalizações a outros domínios. Com isso, OAP relacionadas à análise de justificativas, à generalização e à investigação das condições de validade das ideias matemáticas foram geradas.

Por fim, na prática de sistematizar aprendizagens, o formador recupera conhecimentos prévios [1.33], retomando conjecturas, generalizações e justificativas discutidas anteriormente. Essa ação contribui para a consolidação das aprendizagens e para a articulação entre diferentes processos do RM, encerrando o encontro formativo ao destacar a progressão do raciocínio construída coletivamente.

De modo geral, as ações identificadas: parafrasear, solicitar esclarecimentos, estender/ampliar, esclarecer/explicar, contrapor, questionar e recuperar conhecimentos prévios, destacam como o formador, ao interpretar, desafiar e sistematizar as interações, transformam episódios de discussão em OAP (Ribeiro; Ponte, 2020).

As ações do formador que foram identificadas no encontro 2 vão desde a orientação, reflexões, esclarecimentos até momentos em que os professores são questionados e desafiados a pensarem, refletirem e se concentrarem de que maneira as conjecturas e generalizações são evidenciadas a partir das tarefas matemáticas. Para isso, o formador motiva os professores a pensarem além dos padrões diários que são praticados em sala de aula. Isso não apenas beneficia os próprios educadores, mas também melhora a experiência de aprendizagem dos estudantes e auxilia na promoção de uma compreensão mais profunda e significativa da Matemática.

Quanto as OAP, foi possível verificar nesse encontro que a partir das interações, reflexões e estudos coletivos, os professores apresentaram uma participação ativa, evidenciando, em diferentes trechos, que avançaram na compreensão dos processos de conjecturar e generalizar (com destaque para a avaliação do domínio de validade da generalização).

6.3 Encontro 3

Nesse encontro foram retomadas discussões acerca da criação de conjecturas e generalizações, bem como a respeito de quais domínios ou relações que as generalizações podem se originar, as semelhanças e diferenças entre os casos. Para isso, foi solicitado aos participantes o preenchimento no *padlet* de seus conhecimentos a respeito desses processos.

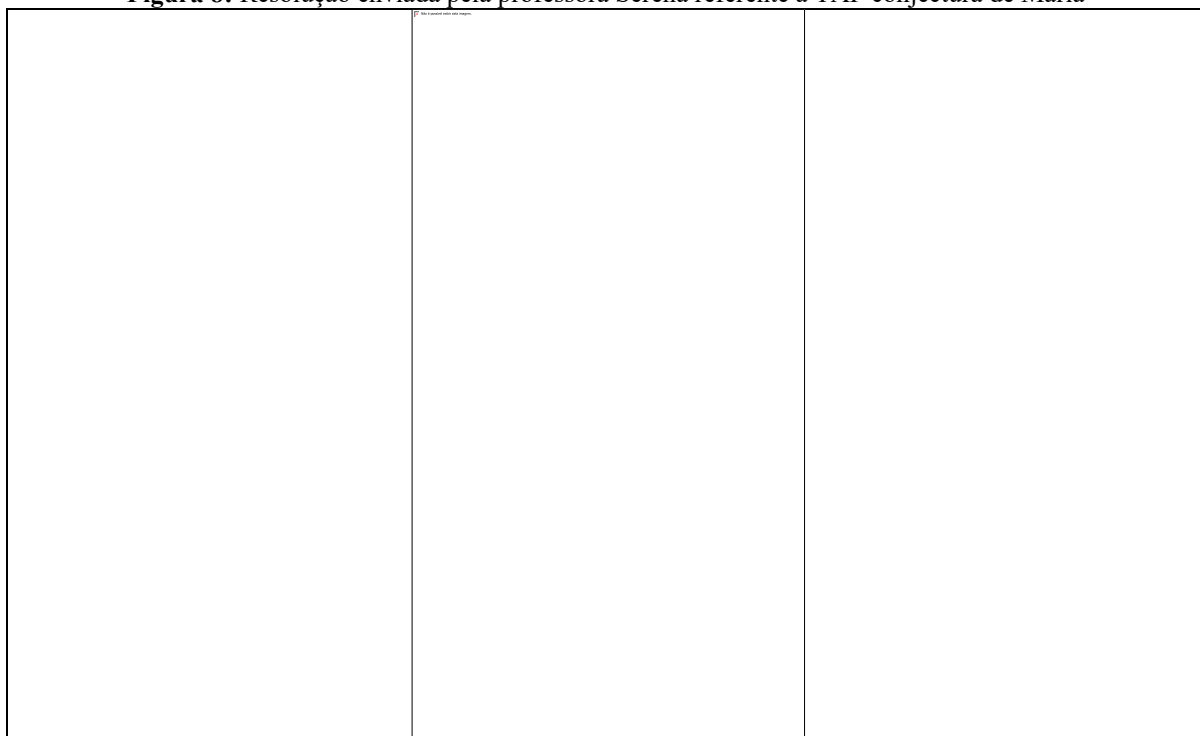
A discussão foi, então, direcionada aos entendimentos essenciais do RM 5 e 6, procurando evidenciar que conjecturas iniciais, ainda que incompletas ou equivocadas, são fundamentais para o processo de aprendizagem, pois criam oportunidades para a refutação e o refinamento das ideias. As justificativas, por sua vez, exigem o uso de linguagem matemática

mais precisa e organizada, aproximando a prática docente da estrutura lógica própria das demonstrações formais.

Como prática para reconhecer os entendimentos essenciais estudados, os professores foram divididos em três grupos, para discutirem o que pensaram e como responderam a TAP envolvendo a conjectura de Maria, que havia sido proposta como tarefa assíncrona (Apêndice G). Os grupos de discussão foram os seguintes: grupo 1: Livia, Fernanda e Bianca; grupo 2: Paula e Rebeca; e grupo 3: Serena e Eloisa.

Após, para plenária com todo o grupo, o formador selecionou algumas respostas que haviam sido enviadas pelos professores para a conjectura de Maria e compartilhou na tela do *Google Meet*. **Convida** então a professora Serena a explicar como pensou (Figura 11):

Figura 8: Resolução enviada pela professora Serena referente a TAP conjectura de Maria



Fonte: Autoria própria (2023).

[1.46] Formador: Então conte-nos Serena, o que você pensou?

[1.47] Professora (Serena): Eu coloquei como n sendo um número né? Que nós estávamos pesquisando ali o valor em questão, o “a” como o antecessor e o “s” como sucessor, fiz várias tentativas ali, para ver que era verdadeira, e aí embaixo fiz a representação algébrica que “n” ao quadrado, que é o número, né? Que nós estamos pesquisando é igual ao antecessor vezes o sucessor menos um. Isso depende da facilidade para cada aluno, principalmente os alunos da educação especial, preferem trabalhar com números positivos. Então para eles será melhor a segunda, então “n” ao quadrado mais um é igual o antecessor vezes o sucessor. Tentei ali outra maneira, mas toda vez só caía nessa. Fiquei meio frustrada assim, queria uma outra, ter uma outra visão e não consegui fora essa.

[1.48] Formador: Você pode repetir para a gente com a linguagem natural, o que que está por trás dessa sua fórmula?

[1.49] Professora (Serena): Eu imaginei, mesmo assim, uma atividade no quadro daquelas assim, quando eu

imaginei essa forma de representação, se fosse, assim coloca o antecessor e sucessor. E aí, a partir dessa representação, que eu consegui montar esse “n” ao quadrado.

[1.50] Formador: *E aí, como que você explicaria essa fórmula que você escreveu? Como se fosse para você a ler, o que essa fórmula está dizendo? Que quando você multiplica o antecessor e o sucessor de um número qualquer...*

[1.51] Professora (Serena): *Um número qualquer é igual a esse número elevado ao quadrado, ao número que eu estou pesquisando ao número que está em questão.*

[1.52] Formador: *Só um detalhezinho ali, do menos um. Quando você multiplica o antecessor e o sucessor de um número qualquer e subtrai um, você encontra o próprio número elevado ao quadrado. Ou quando você eleva um número ao quadrado e soma um, resultado é igual ao antecessor desse número multiplicado pelo sucessor. Beleza? A gente tem aqui (Figura 11) escrita em linguagem algébrica, de duas formas diferentes, uma generalização. A generalização que você escreve aqui, pode ser dita de duas maneiras, ela pode ser dita quando eu multiplico o antecessor pelo sucessor de um número e subtraio um, ele é igual ao número elevado ao quadrado, a número multiplicado por ele mesmo. Quando eu multiplico um número por ele mesmo e somo um, o resultado fica igual ao antecessor dele, multiplicado pelo sucessor.*

O formador inicia **convidando** a professora Serena a expor seu pensamento ([1.46]), que apresenta então sua conjectura. Ela define “n” como o número em questão, “a” como seu antecessor e “s” como seu sucessor, relata “várias tentativas” para verificar o enunciado e propõe duas escritas algébricas: “ n^2 é igual ao antecessor vezes o sucessor menos 1” e, alternativamente, “ $n^2 + 1$ é igual ao produto do antecessor pelo sucessor”. Ao **questionar** e **solicitar esclarecimentos** ([1.48], [1.50]), pedindo que a fórmula seja dita “em linguagem natural”, o formador articula **parafrasear (revoicing)**, promovendo a explicação da professora em outra linguagem natural. Serena, por sua vez, explicita a leitura da relação [1.49], [1.51]. Em seguida, o formador **recupera conhecimentos prévios** e valida a estrutura do enunciado, sintetizando que se trata de uma generalização expressa de duas maneiras em linguagem algébrica e natural [1.52].

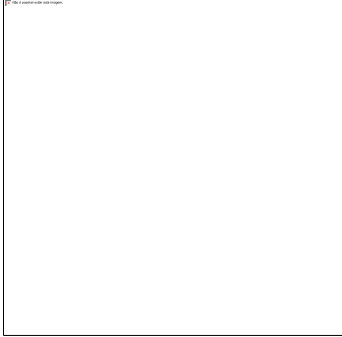
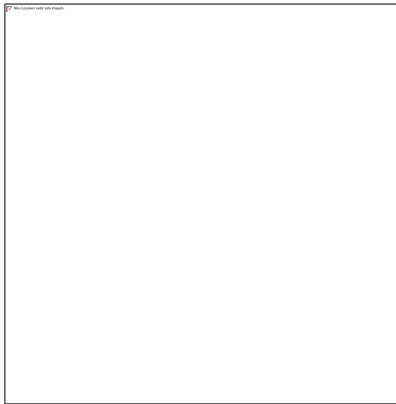

Uma dessas formas associa o antecessor e sucessor ao quadrado de um número, e costuma ser apresentada nos materiais didáticos como uma diferença de quadrados: $(n - 1) \cdot (n + 1) = n^2 - 1$. Em linguagem natural, “o produto do antecessor pelo sucessor é um a menos que o quadrado do número” ou, de modo equivalente, “o quadrado do número é um a mais que o produto do antecessor pelo sucessor”, isto é, $n^2 = (n - 1) \cdot (n + 1) + 1$. Trata-se de um resultado geral com justificativa estrutural, que pode ser representado em linguagem da álgebra, em linguagem natural, e poderia ainda ser atrelado a um modelo de área (reconfigurando o quadrado $n \times n$ em um retângulo $(n - 1) \times (n + 1)$) cuja área difere do quadrado em exatamente uma unidade).

Esse encadeamento das ações de **convidar**, **questionar**, **solicitar esclarecimentos** e **recuperar os conhecimentos prévios** transforma uma hipótese inicialmente “testada por tentativas” em uma generalização formalizada, com domínio e significado explicitados. Nesse

percurso, ativam-se os processos de conjecturar e generalizar, que culminam a organização de uma justificativa em linguagem algébrica e em linguagem natural.

Uma próxima resolução enviada pela professora Fernanda também foi discutida, conforme Figura 12.

Figura 9: Resolução enviada pela professora Fernanda referente a TAP conjectura de Maria

| 1º tentativa | 2º tentativa | 3ª tentativa |
|---|--|---|
|  |  |  |

Fonte: Autoria própria (2023).

O formador convida a professora Fernanda a explicar seu pensamento, desafiando-a a reformular sua escrita algébrica:

[1.53] Formador: Dessas suas várias tentativas, qual que foi a sua versão final do que está projetado na tela? Você conseguiria reformular essa sua escrita algébrica de acordo com o que a professora Serena apresentou?

[1.54] Professora (Fernanda): Para mim, uma equação é uma balança que os 2 lados têm que ficar igual, né? Então não tem como o lado ficar 24. O outro lado fica 25 na hora de eu resolver. Então foi isso que eu pensei, tem que ser assim.

[1.55] Formador: Você tentou de um lado da balança, colocar o número multiplicado por ele mesmo, que é o “n vezes n” e o “n ao quadrado” do outro lado da balança, você tentou multiplicar o antecessor e o sucessor?

[1.56] Professora (Fernanda): isso.

[1.57] Formador: Na sua primeira escrita [referindo-se à primeira opção de resolução da professora Fernanda], você falou que “n vezes n” vai ser igual ao antecessor, multiplicado pelo sucessor, mais um. De tudo que a gente conversou até agora, essa escrita, que é a que está à esquerda, A primeira escrita, ela é verdadeira ou ela é falsa?

[1.58] Professora (Rebeca): Eu acho que ela é verdadeira, professor, porque o quadrado é perfeito, é o número vezes ele mesmo, então ela colocou certinho “n vezes n”. Ali ela escreveu de uma forma diferente, mas o que que a aluna fez, falou ali, né? Você colocou de uma forma diferente, mas se a gente fizer distributiva ali, dá na mesma, dá certinho...

[1.59] Professora (Eloisa): Uma justificativa para a forma que foi pensada, a meu ver, as 3 apresentadas justificaram. Agora é como a gente acabou de ver aqui, surgiria uma outra discussão, se verdadeira ou falsa, né? Que justificativa para chegar aquela generalização, a meu ver, aconteceu.

[1.60] Formador: provocação era essa, tentar ver se vocês conseguiam, a partir daqueles casos particulares, encontrar uma explicação do porquê que aquilo funcionava e de tentar de alguma maneira perceber que aquilo funcionava para outros números e não só para aqueles em particular que a gente trouxe. Então vocês procuraram elementos para explicar o porquê que aquilo que vocês tinham observado funcionava sempre. Uma justificativa, eu diria que a gente teria que, talvez agregar algumas coisas que ficaram na fala de vocês. No registro escrito, se a gente olhar o registro escrito, talvez ele não possa ser reconhecido como uma justificativa por completo, mas as falas de vocês trazem esses elementos. Então um desafio que a gente tem, seja enquanto professor, ou seja, enquanto quem está aqui nesse momento como aluno, é de refinar essas nossas justificativas. Em geral, a gente

acaba não investindo nessa parte do raciocínio de fato, de construir explicações seguindo aquela sequência lógica, acaba ficando na nossa fala, mas isso acaba se perdendo enquanto sistematização de uma explicação do porquê, então, um desafio e uma aprendizagem que fica para a gente, a ser desenvolvida é a de tentar na nossa prática, investir um pouco mais nessa questão da elaboração das justificativas com os nossos alunos.

Nesse trecho de discussão, a metáfora inicial de Fernanda “equação é uma balança” [1.54] é usada como uma analogia para explicar o modo como realizou tentativas de justificar a conjectura de Maria. Ao parafraseá-la e conectá-la à ideia de produto do antecessor e do sucessor [1.55] que havia sido discutida anteriormente, o formador pratica **parafrasear (revoicing)**, **validar** e **solicitar esclarecimentos**, articulando registros de representação em linguagem natural e em linguagem algébrica, provocando os professores a identificarem semelhanças e diferenças entre representações, e envolvendo o uso e o entendimento do significado de termos, símbolos e representações.

Na sequência, o formador **questiona** explicitamente a “primeira escrita” [1.57], no intuito de levá-la, ou não, à validade. A resposta de Rebeca [1.58] indica um movimento que articula os processos de generalizar e justificar: reconhece a estrutura “n vezes n” como quadrado perfeito e sugere equivalência algébrica (“se a gente fizer distributiva”), abrindo espaço para que o grupo passe da validação por exemplos à justificativa por propriedades.

O diálogo também gera oportunidades de compreender a distinção entre validação empírica e justificativa matemática. Frente à fala da professora Eloísa, que reconhece que “as três apresentadas justificaram” o formador ao sistematizar o que havia sido apresentado [1.60], realiza a ação de **resumir os tópicos principais da discussão**. Ele destaca que a aprendizagem desejada inclui “refinar justificativas” por escrito, agregando elementos que sustentem a validade “para outros números e não só para aqueles particulares”. Em termos dos entendimentos essenciais, trata-se de deslocar o grupo de enunciados “convicente” para justificativas lógicas baseadas em ideias compreendidas, com avaliação de validade e consciência de que justificativas gerais não se apoiam em autoridade, intuição ou exemplos isolados.

Do ponto de vista das ações do formador, observa-se frente às ações **questionar**, **solicitar esclarecimentos**, **parafrasear (revoicing)**, **validar** e, por fim, **resumir os tópicos principais da discussão**, os professores exercitam os processos de conjecturar (afirmação provisória da relação), generalizar (extensão para “qualquer n”) e explicar o por quê e justificar (verificação da afirmação provisória, apontando para a necessidade da discussão de elementos que confirmem a sua validade).

O Quadro 17 mostra quais foram as ações do formador identificadas no terceiro encontro do processo formativo.

Quadro 17: Práticas e ações do formador e OAP identificadas no Encontro 3

| Práticas do formador | Ação do formador | Trecho de discussão | Objetivo | OAP relacionadas ao RM |
|---|----------------------------------|----------------------------|---|--|
| Estabelecer uma comunidade de aprendizagem | Convidar | 1.46 | Explicitar as conjecturas elaboradas | Identificar e apresentar as conjecturas elaboradas |
| Interpretar as interações com os professores e entre os professores | Validar | 1.55 | Articular registros de representação em linguagem natural e em linguagem algébrica. | Identificar semelhanças e diferenças entre representações, e envolvendo o uso e o entendimento do significado de termos, símbolos e representações. |
| | Parafrasear (<i>revoicing</i>) | 1.48 | Reiterar o sentido da fórmula a partir do uso da linguagem natural mostrando que se aplica a mais do que apenas um exemplo particular | Compreender e fornecer uma sequência lógica de declarações, cada construção sobre declarações, ideias ou compreensão já conhecidas como verdadeiras para chegar a uma conclusão. |
| | | 1.55 | Articular registros de representação em linguagem natural e em linguagem algébrica. | Identificar semelhanças e diferenças entre representações, e envolvendo o uso e o entendimento do significado de termos, símbolos e representações. |
| | Solicitar esclarecimentos | 1.50 | Reconhecer a linguagem que afirma uma relação geral e especifica um domínio com intuito de verificar o raciocínio que sustenta a relação geral e mostra que ela se mantém para todos os domínios. | Reconhece a relação específica do domínio para casos gerais. |
| | | 1.55 | Articular registros de representação em | Identificar semelhanças e diferenças entre |

| | | | | |
|---|--|------|---|---|
| | | | linguagem natural e em linguagem algébrica. | representações, e envolvendo o uso e o entendimento do significado de termos, símbolos e representações. |
| Desafiar os professores a avançar em seus conhecimentos | Questionar | 1.57 | Investigar vários fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa. | Reconhecer fatores que tornam a generalização verdadeira ou falsa. |
| | | 1.48 | Utilizar linguagem natural para apresentar a fórmula que descreve a situação. | Utilizar a linguagem natural para descrever padrões e relações, promovendo a transição para a representação algébrica da situação. |
| Sistematizar aprendizagens | Recuperar os conhecimentos prévios | 1.52 | Expressar a generalização de duas maneiras em linguagem algébrica e natural | Expressar a generalização de duas maneiras em linguagem algébrica e natural |
| | Resumir os tópicos principais da discussão | 1.60 | Aprendizagem desejada inclui “refinar justificativas” por escrito, agregando elementos que sustentem a validade “para outros números e não só para aqueles particulares”. | Deslocar o grupo de enunciados “convincente” para justificativas lógicas baseadas em ideias compreendidas, com avaliação de validade e consciência de que justificativas gerais não se apoiam em autoridade, intuição ou exemplos isolados. |

Fonte: Autoria própria (2026).

Na prática de estabelecer uma comunidade de aprendizagem, o formador mobiliza a ação de convidar, no trecho [1.46], ao solicitar que os professores explicitem as conjecturas elaboradas. Essa ação cria condições para que as ideias produzidas sejam tornadas públicas, reconhecidas como legítimas e compartilhadas no coletivo, favorecendo OAP relacionadas à identificação e apresentação de conjecturas.

Ao interpretar as interações com e entre os professores, o formador recorre a diferentes ações. A ação de validar, no trecho [1.55], ocorre quando o formador reconhece as contribuições dos professores, articulando registros de representação em linguagem natural e algébrica. Nesse momento ocorre as OAP relacionadas à identificação de semelhanças e diferenças entre

representações, bem como ao uso e à compreensão do significado de termos, símbolos e expressões matemáticas, aspectos fundamentais do conhecimento matemático e do RM.

A ação de parafrasear (*revoicing*), nos trechos [1.48] e [1.55], permite ao formador destacar o sentido da fórmula por meio da linguagem natural, evidenciando que ela se aplica a mais do que um exemplo particular. Ao reorganizar o discurso dos professores, o formador fornece uma sequência lógica de afirmações. Essa ação gera OAP relacionadas à compreensão da estrutura lógica dos argumentos e à articulação entre diferentes registros de representação, favorecendo processos de generalização e justificação.

Nos trechos [1.50] e [1.55], o formador mobiliza a ação de solicitar esclarecimentos, com o objetivo de reconhecer a linguagem que expressa uma relação geral e especifica seu domínio de validade. Ao solicitar que os professores explicitem como a relação se mantém para diferentes casos, o formador gera OAP relacionadas ao reconhecimento da relação específica de um domínio para casos gerais, favorecendo a análise da consistência e da abrangência das generalizações construídas.

No que se refere à prática de desafiar os professores a avançar em seus conhecimentos, a ação de questionar se destaca. No trecho [1.57], o formador questiona com o intuito de investigar fatores que expliquem por que uma generalização pode ser verdadeira ou falsa, promovendo OAP relacionadas ao reconhecimento de critérios de validade das generalizações. Já no trecho [1.48], o questionamento orienta o uso da linguagem natural para apresentar a fórmula, reforçando a compreensão conceitual e o significado das expressões algébricas.

Por fim, na prática de sistematizar aprendizagens, o formador mobiliza as ações de recuperar os conhecimentos prévios e resumir os tópicos principais da discussão. No trecho [1.52], ao retomar ideias discutidas anteriormente, o formador favorece a expressão da generalização tanto em linguagem algébrica quanto em linguagem natural, gerando OAP relacionadas à tradução e articulação entre registros de representação. No trecho [1.60], ao resumir a discussão, o formador explicita que a aprendizagem desejada envolve o refinamento de justificativas, deslocando o grupo de argumentos apenas “convicente” para justificativas lógicas, sustentadas por ideias compreendidas, avaliadas quanto à sua validade e reconhecidas como gerais, não apoiadas em autoridade, intuição ou exemplos isolados.

De modo geral, as práticas e ações identificadas revelam uma orquestração discursiva, na qual o formador cria, interpreta, desafia e sistematiza as interações, transformando-as em OAP que possibilitam aos professores desenvolver e refinar conhecimentos matemáticos e o RM.

A próxima seção apresenta a análise dos dados do encontro 4, compreendendo o último encontro analisado nessa pesquisa.

6.4 Encontro 4

O encontro começa com o formador retomando discussões já realizadas a respeito dos nove entendimentos essenciais do RM. O encontro é direcionado para um momento coletivo, em que as 6 participantes presentes foram organizadas em dois grupos: grupo 1: Silvia, Roberta e Serena; e grupo 2: Eloisa, Paula e Rebeca. Para o estudo coletivo uma nova análise de registros de prática foi solicitada (item C da tarefa “sequência dos azulejos”, “38 azulejos”) (Apêndice L).

Após trinta minutos os participantes retornaram para a sala geral do Google Meet e o formador iniciou a discussão com o seguinte **questionamento**:

[1.61] Formador: *Que conjecturas que vocês reconheceram que o aluno elaborou nesse trecho de diálogo? Que hipóteses que ele tinha sobre a figura que tinha 38 azulejos? Ou ele não tinha hipótese nenhuma? Ele não fazia nem ideia de como resolver a tarefa? O que ele estava pensando no início do diálogo que vocês observaram?*

[1.62] Professora (Rebeca): *Ele estava pensando apenas na regularidade do crescimento dos azulejos cinzas que sempre estavam quando você soma mais três e mais três. Ele falou assim, não tem como dar 38, porque 33 mais 3 dá 36, mais 3 dá 39. Então, no começo ele estava com essa ideia de que o 38 não teria como, porque ele só estava pensando nos cinzas.*

[1.63] Formador: *E se a gente considerar que, embora a tarefa estivesse remetendo ao 38 como total, se a gente pensar que esse 38 fosse o número de azulejos cinzas, a conjectura dele de que não teria uma figura com 38 azulejos cinzas, ela estaria correta? Ele estaria certo nessa hipótese que ele levantou, que não ia ter nenhuma figura com 38 azulejos cinzas?*

[1.64] Professora (Rebeca): *Sim, porque daí, no caso, se considerasse só os blocos cinzentos, ele estaria certo, porque não teria como mesmo. Então, ele estava argumentando no início do diálogo que não tinha como ter uma figura com 38 azulejos, porque ele estava pensando em 38 azulejos cinzas.*

[1.65] Formador: *E que argumentos que ele usou para refutar o fato do enunciado colocar uma figura com 38 azulejos?*

[1.66] Professora (Paula): *Quando ele começou a considerar os azulejos brancos.*

[1.67] Formador: *Aí ele começou a reconhecer a possibilidade de ter uma figura com 38 azulejos, mas até então, quando ele estava só nos azulejos cinza, ele tinha por hipótese que não tinha uma figura com 38 azulejos, né? E aí ele usou o quê? Para tentar convencer o professor de que não tinha uma figura com 38 azulejos cinzas? A Rebeca até falou, mas vamos reforçar. Ele se baseou em quê?*

[1.68] Professora (Roberta): *Ele estava querendo dizer que não existe múltiplo de 3 terminado em 8.*

[1.69] Formador: *Veja que legal, ele percebeu que tinha múltiplo de 3 que terminava em 8, que ele até falou do 18, mas ele não identificava que lá na família do 30 ia ter alguém terminado em 8, porque se tinha uma posição que tinha 30 azulejos, a outra ia ter 33, a outra 36, a outra 39, não ia passar pelo 38. Aí depois ele interpreta a tarefa como o professor havia planejado, que era reconhecer o 38 como sendo o total. Aí ele muda agora a conjectura dele. Então, ele aceita que tem uma figura que tem 38 azulejos no total.*

O formador inicia **questionando e solicitando esclarecimentos** [1.61], a respeito da compreensão que as professoras tiveram das conjecturas do aluno. Rebeca explicita que a hipótese inicial do aluno considerou apenas os azulejos cinza, e que com crescimento recursivo

de +3 por figura, não havia possibilidade de ter uma posição com 38 azulejos desta cor [1.62], [1.64].

O diálogo avança quando o formador **retoma** o enunciado original da tarefa que considera “38” como o total de azulejos [1.65, 1.67], ao que Roberta responde dizendo que “não há múltiplo de 3 terminado em 8”. O formador então **parafraseia** a fala de Roberta [1.69], iniciando validando-a parcialmente, destacando que embora 38 (um número terminado em 8) seja múltiplo de 3, na “família” do 30 não haverá múltiplos de 3 terminados em 8.

Essa sequência de ações gera oportunidades de aprendizagem docente referente ao entendimento de processos de refutar e validar, ao provocar a reflexão a respeito da explicitação de condições para validar/refutar e a revisão de hipóteses à luz do domínio pertinente.

O formador prossegue a discussão, **retomando** uma informação a respeito da tarefa: o fato de que havia um item, anterior ao que trata dos 38 azulejos, pedindo para determinar o total de azulejos da Figura 9:

[1.70] Formador: *Um fato importante aqui é que o item anterior pedia para determinar os azulejos da figura 9. Ai quando ele fala assim, “porque vai aumentar mais um na figura porque subiu mais três”, ele está usando como referência a figura 9. Ai, quando ele fala subiu mais um na figura, é porque ele está indo para o número da figura. Ai, o que acontece com a pilha de azulejos, aumenta mais três, depois ele faz isso de novo. Só que ele menciona a figura 2 também. Por que vocês acham que ele menciona a figura 2?*

[1.71] Professora (Roberta): *Eu acho que daí ele foi verificar se a figura 2 batia com o pensamento dele. Se a figura 2 se tivesse realmente 6, era porque somando a figura 1 mais a figura 1 seria o valor da figura 2.*

[1.72] Formador: *E olha que interessante, porque quando a gente olha a figura 2, o que era a figura 2? 2 azulejos brancos e 6 cinzas, certo? O que que era a figura 9? 2 azulejos brancos e quantos azulejos cinza?*

[1.73] Professora (Rebeca): 30.

[1.74] Formador: *Veja que ele não soma as duas figuras. Ele não soma os brancos duas vezes. Ele percebe que os brancos estão sempre fixos em dois. Então, ele usa em algum momento, me parece, esse 30 como referência. Ai eu sei que a figura 9 tem 30. Ai eu aumento 3, eu vou para 33, aumento 3 de novo, eu vou para 36. E ai eu tenho que acrescentar os dois brancos. Tanto que ele faz ali em algum momento a soma 2 mais 6 igual a 38. O que ele tá querendo dizer, será quando ele escreve 2 mais 6 igual a 38?*

[1.75] Professora (Eloisa): *A Paula até comentou, que ele estava olhando só na ordem das unidades.*

[1.76] Professora (Paula): *Ele voltou lá na figura 2.*

[1.77] Formador: *É, ele pode ter voltado na figura 2, então ele pega os seis cinzentos da figura 2, mais dois brancos que ele sabe que tem que ter, e ele junta com os 30 que já existiam na figura 9, mas ele não acrescenta na escrita dele esse 30. Embora ele esteja usando isso, mesmo sem falar e sem registrar, ele chega no total de 38. O que vocês discutiram sobre aspectos relacionados a argumento, refutação e justificativa, ao olhar esses registros de prática?*

[1.78] Professora (Roberta): *eu acho que ele só refutou a hora que ele entendeu que tinha que somar todos os azulejos, mas para isso acho que teve que ter intervenção do professor.*

[1.79] Formador: *Então, desde aquela intervenção do professor, foi importante para que ele, de fato, compreendesse que esse 38 remetia ao total, não só a parte cinza.*

O formador **retoma** o item anterior da tarefa, que tratava do total de azulejos na figura 10 [1.70] e **questiona** aos professores por que acham que ele (o estudante) mencionou a figura 2? Roberta então diz que ele parece ter usado a figura 2 para validar sua conjectura (“verificar

se a figura 2 batia com o pensamento dele”) [1.71]. O formador então procura **ampliar** essa discussão [1.72], aprofundando a compreensão a respeito do registro escrito do estudante.

Ao **solicitar esclarecimentos** as contribuições das professoras [1.74] por exemplo, ao problematizar a escrita ambígua “ $2 + 6 = 38$ ”, a professora Eloisa conjectura que o estudante “olhava só a ordem das unidades” [1.75].

Novamente o formador **solicita esclarecimentos** [1.77], porém agora referente as discussões realizadas nos grupos a respeito argumento, refutação e justificativa nesse exemplo de registro de prática. A professora Roberta reconhece que o estudante “só refutou” a conjectura inicial após considerar o total de azulejos [1.78]. O formador então sistematiza ao realizar a ação de **resumir os tópicos principais da discussão** que a intervenção do professor parece ter sido decisiva para que “38” fosse interpretado como total de azulejos e não apenas como cinzas [1.79].

No Quadro 18 apresentamos as ações do formador e as OAP identificadas no quarto encontro do processo formativo.

Quadro 18: Práticas e ações do formador e OAP identificadas no Encontro 4

| Práticas do formador | Ação do formador | Trecho de discussão | Objetivo | OAP relacionadas ao RM |
|---|----------------------------------|----------------------------|--|--|
| Interpretar as interações com os professores e entre os professores | Estender/ Ampliar | 1.72 | Reconhecer o padrão da generalização a partir do registro escrito do estudante. | Compreender o padrão estabelecido no raciocínio do estudante a partir do registro escrito. |
| | Parafrasear (<i>revoicing</i>) | 1.69 | Validar a afirmação realizada | Reconhecer o padrão da conjectura generalizada validando-a. |
| | Solicitar esclarecimentos | 1.61 | Avaliar as conjecturas e investigar o porquê | Avaliar as declarações para reconhecê-las como verdadeira ou falsas. |
| | | 1.74 | Investigação de vários fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa tomando como suporte os valores já conhecidos | Investigação de vários fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa tomando como suporte os valores já conhecidos |

| | | | | |
|---|--|------|---|---|
| | | 1.77 | Compreensões sobre o significado de argumento, refutação e justificativa | Reconhecer a refutação de uma leitura inicial e o papel da intervenção docente na explicitação do domínio relevante. |
| Estabelecer conexões | Retomar | 1.65 | Relembrar o enunciado da tarefa matemática para reconhecer a refutação realizada | Reconhecer o momento que o estudante refuta a conjectura criada |
| | | 1.67 | Relembrar o enunciado da tarefa matemática para reconhecer a refutação realizada | Reconhecer o momento que o estudante refuta a conjectura criada |
| | | 1.70 | Identificar a conjectura elaborada e a generalização por meio da identificação de semelhanças entre os casos. | Identificar a conjectura elaborada e a generalização por meio da identificação de semelhanças entre os casos. |
| Desafiar os professores a avançar em seus conhecimentos | Questionar | 1.61 | Identificar a reconhecer conjecturas | Identificar a reconhecer hipóteses raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras, mas que não são conhecidas como verdadeiras. |
| | | 1.70 | Reconhecer conjecturas que podem ser generalizadas | Reconhecer conjecturas que podem ser generalizadas |
| Sistematizar aprendizagens | Resumir os tópicos principais da discussão | 1.79 | Reconhecer a importância da intervenção do professor para que o estudante reconheça seus processos de RM | Reconhecer a importância da intervenção do professor para que o estudante reconheça seus processos de RM |

Fonte: Autoria própria (2025).

Nos trechos destacados é possível compreender a atuação do formador centrada na interpretação do raciocínio dos professores a partir das produções escritas dos estudantes, na análise da validade das generalizações e na compreensão dos processos de refutação e justificção.

Na prática de interpretar as interações com e entre os professores, o formador mobiliza inicialmente a ação de estender/ampliar, no trecho [1.72], ao conduzir a análise do registro escrito do estudante para além da resposta final. Essa ação permite reconhecer o padrão subjacente à generalização, favorecendo a compreensão de como o raciocínio do estudante se estrutura a partir de regularidades identificadas no registro. Ao ampliar o olhar do grupo para o raciocínio exposto por escrito, o formador gera OAP relacionadas à leitura e interpretação de padrões matemáticos, aspecto central para a compreensão do RM.

Ainda nessa prática, o formador realiza a ação de parafrasear (*revoicing*), no trecho [1.69], ao reformular e validar a afirmação apresentada, reconhecendo-a como uma conjectura generalizada. Ao parafrasear (*revoicing*), o formador pontua a ideia do estudante e, simultaneamente, explicita o padrão matemático identificado, favorecendo OAP relacionadas ao reconhecimento e validação de conjecturas, ao transformar uma afirmação implícita em objeto explícito de análise.

A ação de solicitar esclarecimentos aparece de forma recorrente nos trechos [1.61], [1.74] e [1.77], com o objetivo de avaliar as conjecturas e investigar os motivos que sustentam ou refutam as declarações apresentadas. No trecho [1.61], o formador solicita que os professores avaliem as conjecturas, promovendo a distinção entre afirmações provisoriamente aceitas e aquelas que podem ser reconhecidas como verdadeiras ou falsas. Em [1.74], o formador amplia essa investigação ao considerar diferentes fatores que explicam a validade ou invalidade de uma generalização, tomando como suporte valores já conhecidos. No trecho [1.77], ao discutir explicitamente os significados de argumento, refutação e justificativa, o formador favorece OAP relacionadas à compreensão do papel da refutação e à explicitação do domínio relevante.

No que se refere à prática de estabelecer conexões, o formador mobiliza a ação de retomar, nos trechos [1.65] e [1.67], ao lembrar o enunciado da tarefa matemática como forma de reconhecer o momento em que o estudante refuta a conjectura inicialmente criada. Com isso, a ação de retomar permite conectar a produção do estudante ao problema original, favorecendo OAP relacionadas ao reconhecimento da refutação como parte do processo de raciocínio. No trecho [1.70], a ação de retomar é utilizada para identificar a conjectura e a generalização por meio da identificação de semelhanças entre os casos, fortalecendo a articulação entre exemplos particulares e ideias gerais.

Ao desafiar os professores a avançarem em seus conhecimentos, o formador recorre à ação de questionar, nos trechos [1.61] e [1.70], com o objetivo de levar os professores a reconhecer conjecturas e identificar quais delas são possíveis de generalização. Esses

questionamentos promovem OAP relacionadas à análise das hipóteses formuladas, entendidas como afirmações provisórias, e à reflexão sobre as condições que permitem sua generalização, favorecendo processos de conjectura e generalização, conforme os quatro primeiros entendimentos essenciais do RM.

Por fim, na prática de sistematizar aprendizagens, o formador mobiliza a ação de resumir os tópicos principais da discussão, no trecho [1.79], ao explicitar a importância da intervenção docente para que o estudante reconheça e compreenda seus próprios processos de RM. Nesse pressuposto, o formador consolida as oportunidades aprendizagens construídas ao longo da discussão, gerando OAP relacionadas à reflexão a respeito dos processos do RM e ao reconhecimento do papel do professor na mediação e explicitação desses processos.

No próximo capítulo serão apresentadas as interpretações dos resultados revelados a partir das análises dos dados.

7 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O capítulo anterior teve como objetivo apresentar os dados coletados e analisá-los. Neste capítulo nos prontificamos a sistematizar uma resposta às duas questões de pesquisa:

- Quais foram as ações do formador, em um processo formativo que trata do RM e seus entendimentos essenciais, que proporcionam oportunidades de aprendizagem aos professores envolvidos?
- De que forma essas oportunidades de aprendizagem profissional contribuem para que os professores aprimorem seus entendimentos essenciais do RM?

No que tange à primeira questão, apresentaremos o Quadro 19 contendo todas as ações identificadas e analisadas, ou seja, as ações do formador e as respectivas OAP.

Quadro 19: Ações do formador e as OAP geradas durante os quatro encontros do processo formativo

| <i>Práticas</i> | <i>Ação do formador</i> | <i>OAP relacionadas ao RM</i> |
|--|-------------------------------------|---|
| <i>Estabelecer uma comunidade de aprendizagem</i> | Convidar | Os professores exploraram relações matemáticas, elaboraram hipóteses e compartilharam conjecturas em um ambiente colaborativo de reflexão e discussão. |
| <i>Interpretar as interações com os professores e entre os professores</i> | Validar | Os professores identificaram de semelhanças e diferenças entre representações, bem como ao uso e à compreensão do significado de termos, símbolos e expressões matemáticas. |
| | Esclarecer/ Explicar | Os professores compreenderam a justificação matemática como um argumento lógico fundamentado em ideias já conhecidas, analisaram fatores que sustentam ou refutam generalizações e reconhecem a importância da mediação docente na explicitação do domínio relevante. |
| | Estender /Ampliar | Os professores aplicaram generalizações em novos contextos, reconhecendo seus limites de validade, e compreenderam a refutação matemática ao identificar afirmações particulares falsas. |
| | Parafrasear (<i>revoicing</i>) | Os professores organizaram uma sequência lógica de enunciados, conectando ideias aceitas de modo a construir conclusões consistentes. |
| | Solicitar esclarecimentos | Os professores identificaram padrões e semelhanças entre situações, ampliam o raciocínio desenvolvido, relacionaram domínios específicos a casos mais gerais e avaliaram proposições criticamente, classificando-as como verdadeiras ou falsas. |
| <i>Estabelecer conexões</i> | Retomar | Os professores revisaram e consolidaram as conjecturas elaboradas, reconhecendo generalizações por meio da comparação entre casos semelhantes. |
| <i>Desafiar os professores a avançar em seus conhecimentos</i> | Contrapor | Os professores reconheceram semelhanças entre os casos trabalhados e ampliam o raciocínio para além do intervalo inicialmente considerado. |
| | Questionar | Os professores aplicaram generalizações em contextos particulares, formularam e refinaram conjecturas, analisaram fatores que explicam a validade ou a falsidade de determinadas afirmações, elaboraram hipóteses que são inicialmente provisórias e utilizaram refutações como recurso para explicitar o domínio relevante de aplicação. |

| | | |
|--|--|---|
| <i>Sistematizar aprendizagens</i> | Resumir os tópicos principais da discussão | Os professores tiveram a oportunidade de organizar e sintetizar as ideias construídas coletivamente, explicitando os processos de RM mobilizados e consolidando as aprendizagens. |
| | Recuperar os conhecimentos prévios | Os professores relacionaram aprendizagens novas e antigas, favorecendo a reflexão a respeito dos processos do RM. |

Fonte: Autoria própria (2025).

No que tange à segunda questão, organizamos as seções seguintes a partir das práticas do formador, dividindo-as em subseções, que correspondem a cada uma das ações relacionadas a atuação do formador que gerou OAP, procurando evidenciar como contribuem para que os professores aprimorem seus entendimentos essenciais do RM. Procuramos articular, assim, o quadro teórico proposto por Ferreira, Ribeiro e Ponte (2023) (Quadro 6) com:

(a) os processos e entendimentos essenciais do RM (Lannin; Ellis; Elliott, 2011) (Figura 4);

(b) as dimensões PAF do modelo PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020) (Quadro 4): gestão e orquestração (operacional) e aproximação e articulação (conceitual).

Assim, explicitamos como cada ação do Quadro 19 gerou as OAP listadas na coluna 3 e, por consequência, como essas oportunidades contribuíram para que os professores aprimorassem seus entendimentos essenciais do RM. As ações e OAP geradas e analisadas nesta pesquisa fazem parte do produto educacional, que é apresentado uma proposta de uso para formadores de professores que ensinam matemática no que diz respeito ao RM e seus processos.

Identificamos e destacamos no decorrer do texto, nas próximas seções e subseções deste capítulo, os entendimentos essenciais do RM propostos por Lannin, Ellis e Elliott (2011) de acordo com a subseção 4.1, codificados como EE1, EE2, EE3, ..., EE9.

7.1 Estabelecer uma comunidade de aprendizagem

A prática estabelecer uma comunidade de aprendizagem criou condições para que os professores tivessem a oportunidade explicitar seus pensamentos de forma segura e de modo compartilhado (Ferreira; Ribeiro; Ponte, 2023).

Nessa prática, a ação de convidar abriu espaço, reconheceu falas e solicitou que todos participassem ativamente das discussões coletivas, contribuindo para criar, junto àquele grupo, uma comunidade na qual ideias são apresentadas, examinadas e revisadas coletivamente (Ferreira; Ribeiro; Ponte, 2023). O momento que envolveu essa ação proporcionou um

ambiente favorável à geração de OAP referente aos processos e entendimentos essenciais do RM em todo o grupo de participantes.

7.1.1 Convidar para engajar os professores em uma participação ativa e reflexiva

Ao convidar, o formador teve como intenção dar um passo inicial para que as professoras verbalizassem suas compreensões sobre o RM. Durante a ação, tiveram a oportunidade de formular e reconhecer conjecturas (EE1), explicitando hipóteses e condições de produção das ideias além de confirmar o uso de contraexemplos e a avaliação de argumentos (EE7–EE8), deslocando a discussão de respostas pontuais para critérios de validade (clareza da afirmação, evidências, domínio de aplicação, conclusão) (Jeannotte; Kieran 2017). Essa ação possibilitou também a reflexão a respeito do erro, para que funcione como dados a serem analisados, alimentando revisões de conjecturas e novas generalizações.

Dessa forma, “convidar” transformou a participação em investigação: todos foram chamados a apresentar casos, propor variações, questionar suposições e defender (ou refutar) generalizações com base em propriedades (Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

Ao relacionar com modelo MKT (Ball; Thames; Phelps, 2008), a ação de convidar apresentou desenvolvimentos do conhecimento do conteúdo e do estudante ao propor momentos de escuta dos pensamentos quando os participantes tornam público seu raciocínio. O formador e as professoras participaram de momentos de discussão relacionadas à interpretação das estratégias e dos erros previstos/inesperados e a usá-los como ponto de ensino. A ação de convidar contribuiu para compartilhar as estratégias de resolução, e, também, o formador modelou rotinas discursivas e escolhas de representações que sustentam a passagem de casos a argumentos, aspectos relevantes para o desenvolvimento do conhecimento do conteúdo e do ensino.

Pelo modelo PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020), convidar atuou em duas frentes do PAF: gestão de um ambiente exploratório (dimensão operacional) e aproximação (dimensão conceitual). Na gestão a definição da organização de participação, turnos de fala, expectativa de justificativas e acolhimento do erro como recurso para aprender abriu oportunidades de condições para investigação coletiva. Na aproximação a mediação parte da prática escolar (por meio de registros de práticas como protocolos escritos, e transcrição de áudio) e avança para conceitos teóricos como conjectura, generalização, domínio e justificativa, articulando saberes profissionais e matemáticos.

Em síntese, convidar não foi apenas “dar a palavra”, mas organizar possibilidades de fala (Ferreira; Ribeiro; Ponte, 2023) para investigar tornando visíveis as hipóteses (Lannin; Ellis; Elliott, 2011), regulando as análises por critérios de validade, firmando-se nos conceitos matemáticos (Jeannotte; Kieran, 2017), nas questões pedagógicas e didáticas para que seja possível promover o RM de seus estudantes.

7.2 Interpretar as interações com e entre os participantes

A prática interpretar as interações com e entre os professores é o eixo que pode transformar a fala em evidência de pensamento e, por consequência, em OAP. Ao tornar explícitos critérios, reorganizar discursos e exigir precisão, o formador converteu episódios de discussão em prática investigativa, neste caso em estudo orientando-se pelos processos e entendimentos essenciais do RM (Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

7.2.1 Validar para articular registros de representação e compreender significados matemáticos

Ao validar as contribuições dos participantes, o formador mobilizou interações discursivas que articularam diferentes registros de representação, linguagem natural e algébrica, favorecendo a identificação de semelhanças e diferenças entre essas formas de representação. As ações possibilitaram a atribuição de significados a termos, símbolos e expressões matemáticas, promovendo a explicitação e a organização do pensamento matemático. Desse modo, as OAP geradas contribuíram para o desenvolvimento de entendimentos essenciais do RM, especialmente aqueles relacionados à generalização e à justificação de ideias matemáticas. Essa ação sustentou os processos de explicar e avaliar argumentos (Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

Foram mobilizados a partir dessa ação, os domínios do conhecimento do conteúdo especializado e do conhecimento do conteúdo e do ensino (Ball *et al.*, 2008), quando ocorreu a compreensão das estruturas matemáticas envolvidas e a capacidade de interpretar, selecionar e organizar essas estruturas em função dos objetivos formativos. No PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020), em especial na dimensão do PAF, a ação de validar articulou orquestração relacionada as contribuições no interior da comunidade de aprendizagem, selecionando ideias que passam a integrar o discurso coletivo promovendo a conexão entre registros de representação e significados matemáticos, ao tornar explícitas relações entre a linguagem natural utilizada pelos professores e as expressões algébricas correspondentes.

7.2.2 Esclarecer/Explicar para institucionalizar critérios e modelar explicações

Quando esclarece/explica, o formador institucionalizou critérios como explicitar “o que conta como justificativa” (EE6) e separar a validade lógica da autoridade (EE9). No modelo MKT (Ball; Thames; Phelps, 2008), essa ação compreendeu o conhecimento especializado do conteúdo e o conhecimento comum do conteúdo ao explicitar estrutura de argumentos matemáticos (premissas, encadeamento, conclusão). Em relação ao conhecimento do conteúdo e do estudante, essa ação permitiu modelar explicações, mostrando possibilidades para enunciar afirmações, indicar evidências e elaborar conclusões.

No PLOT, a ação de esclarecer/explicar apresentou-se como articulação (dimensão conceitual) entre ideias matemáticas e sua comunicação didática (Ribeiro; Ponte, 2020), em que as professoras passaram a avaliar enunciados pelo esclarecimento realizado pelo formador e pelo domínio de validade das conjecturas, e não por exemplos sem validade ou por autoridade.

7.2.3 Estender/ampliar para explorar novos domínios e limites da generalização

Ao estender/ampliar, o formador teve como intenção organizar uma regra para novos domínios, levando os professores a identificar aplicações desses domínios e as limitações (EE3), investigando os porquês da aplicação (EE5) e refutando quando necessário (EE7).

No modelo de Ball e colaboradores (2008), essa ação apresentou como promissora para mobilizar o conhecimento do horizonte matemático envolvendo conexões entre diferentes tipos de representação (linguagem natural, algébrica e geométrica), e ainda entre a matemática ensinada em diferentes níveis de escolaridade. Também é possível reconhecer, por meio dessa ação, o conhecimento especializado do conteúdo quando os professores reorganizam conceitos matemáticos.

No modelo de organização de Ribeiro e Ponte (2020), o PLOT, o papel e a ação de estender/ampliar, realizada pelo formador, possibilitou um movimento de orquestração (dimensão operacional) a partir da exploração de uma variedade de tarefas e registros de prática. A partir dessa ação, os professores vivenciaram OAP que envolvem o testar as validades das generalizações, condição central para consolidar o significado presente nos excertos: “sempre”, “para todo n ”, “se... então”, presentes nas análises.

7.2.4 Parafrasear (*revoicing*) para organizar raciocínios e estabilizar significados

A ação do formador realizada por meio de parafrasear (*revoicing*) apresentou OAP ao procurar recompor a organização da sequência dos padrões e regularidades (EE1 a EE4), estabilizando termos/símbolos/representações (EE4) e buscando preparar justificativas válidas (EE6).

De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008) observamos que essa ação pode fortalecer o conhecimento do conteúdo e do ensino a partir das estratégias de ensino para tornar o raciocínio explícito e compartilhado. No componente do conhecimento do conteúdo e dos estudantes, essa ação possibilitou reconstruir o pensamento docente com base na sua interpretação de registros de prática dos estudantes.

Dessa forma, o papel e a ação do formador combinam a gestão (dimensão operacional) de turnos de fala com a orquestração (dimensão operacional) de significados compartilhados (Ribeiro; Ponte, 2020). Nesse pressuposto, os professores vivenciam OAP para alterar o repertório utilizado alinhando registros de representação e elaboração de sequências de afirmações que sustentem provas (Jeannotte; Kieran, 2017) e justificativas (Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

7.2.5 Solicitar esclarecimentos para explicitar condições, invariantes e critérios de validade para sustentar o RM

Perguntas do tipo “qual é o domínio?” e “o que varia e o que permanece?” impulsionam a comparação entre casos e a extensão do raciocínio (EE2), a delimitação do domínio relevante (EE3) e a avaliação de validade (EE8), proporcionando a ação de solicitar esclarecimentos oportunizasse aos professores vivenciar momentos de aprendizagem profissional.

Essa ação apresentou integração do conhecimento do conteúdo e dos estudantes e do conhecimento do conteúdo e do ensino (Ball; Thames; Phelps, 2008), ao possibilitar aos professores avançarem em seus raciocínios por meio de questionamentos, solicitando explicações ou reconhecimentos mais elaborados de acordo com as tarefas matemáticas analisadas.

Direcionando ao modelo PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020), essa ação ocorreu por meio da gestão da investigação e precisão conceitual regulando o nível, ao solicitar evidências e recapitular conclusões parciais. Com isso, os professores passaram a conduzir conceitos

matemáticos, mantendo o foco em condições, invariantes e o domínios válidos para os estudos realizados.

Em conjunto, as cinco ações elevam o padrão discursivo do coletivo e produzem OAP diretamente vinculadas ao RM: (I) validade para julgar argumentos (EE6, EE8, EE9); (II) verificação do domínio e de limites de generalização (EE3); (III) organização de registros a partir de termos, símbolos e representações para estabilizar significados (EE4); (IV) investigação de porquês ancorada em propriedades e estruturas (EE5); (V) possibilidades do uso de refutações e contraexemplos (EE7). Didaticamente, os professores ampliam o conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento do conteúdo e dos estudantes e o conhecimento do conteúdo e do ensino. Além disso, eles vivenciaram práticas de articulação e orquestração (Ribeiro; Ponte, 2020) que podem ser transpostas para suas salas de aula, passo decisivo para instalar uma cultura de argumentação na qual os estudantes podem aprender a conjecturar, generalizar, investigar o porquê e justificar/refutar.

7.3 Estabelecer conexões

A prática estabelecer conexões apresenta-se como importante para transformar episódios dispersos de resolução em entendimentos estruturados. Nela, a ação de retomar, pode sintetizar e organizar símbolos, termos, representações, falas e argumentos.

Nessa prática, foi identificada, durante a análise dos excertos, a ação de retomar, tal qual apresentou OAP relacionada a construção de significados, levando em consideração o que deve permanecer e o que pode variar na verificação de comportamentos de padrões e regularidades, tornando explícitas as relações entre representações e reconstruindo a discussão baseando-se em conceitos matemáticos válidos (Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

7.3.1 Retomar para estruturar significados

Ao retomar, o formador reconheceu e instaurou discussões coletivas envolvendo a conjectura e a generalização pela semelhança entre casos (EE2), reunindo produções distintas sob uma mesma “lei de formação”. Ele explicita o domínio de validade (EE3), ao perguntar “em que condições essa regra vale?” e “quando deixa de valer?”, consolidando linguagens e representações (EE4) por meio de passagens entre linguagem natural, registros pictóricos, tabelas, gráficos e expressões e procurando instaurar atenções para justificativas válidas (Jeannotte; Kieran, 2017) mediante o uso de propriedades (EE6).

Com isso, o foco desloca-se de respostas episódicas para estruturas, como por exemplo, a análise do termo constante e a taxa de variação, condição necessária para justificar e refutar com critérios lógicos (Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

Articulando com o referencial de Ball, Thames e Phelps (2008), a ação de retomar apresentou oportunidades aos professores de mobilizar e desenvolver o conhecimento comum do conteúdo no momento que os professores identificaram o termo fixo e as regularidades presentes em diferentes registros, assegurando a compreensão conceitual do conteúdo. O conhecimento do conteúdo e do ensino também pode ser citado a partir da seleção e encadeamento de representações (tabela, gráfico, expressão), de modo que cada uma auxilie e/ou relacione aspectos da outra e sustente a passagem de exemplos a generalizações justificáveis (Jeannotte; Kieran, 2017). De acordo com o conhecimento do horizonte matemático (Ball; Thames; Phelps, 2008) a ação de retomar, apresentou possibilidade de os professores realizarem a projeção do recursivo ao funcional, articulando famílias de seqüências a funções lineares/afins e antecipando conexões curriculares verticais reconhecendo o “+3 por figura” a expressão “ $3n + c$ ”, sendo c , aqui utilizado como o termo constante, que não altera.

Pelo modelo PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020), a ação de retomar se realizou por meio da orquestração (dimensão operacional) e da aproximação (dimensão conceitual). Na orquestração, visualiza-se a estrutura: selecionar produções, ordenar falas, alinhar registros e explicitar condições, de modo que os professores reconheçam o que justifica e o que apenas ilustra. Na aproximação (dimensão conceitual), a partir dos registros de prática dos estudantes e conduzir invariantes, domínios e leis de formação, a ação oportunizou os professores conectar a matemática escolar e matemática acadêmica.

A ação de retomar criou OAP para os professores: identificarem a conjectura e organizarem a generalização por semelhança de casos (EE2); declararem condições de validade e delimitassem domínios de aplicação (EE3); analisassem e reconhecessem termos, símbolos e representações (fala, desenho, tabela, símbolo, álgebra) para sustentar justificativas (EE4, EE6); planejassem sequencias representacionais que façam os estudantes observar os invariantes e argumentar por propriedades (Lannin; Ellis; Elliott, 2011); articulassem diferentes domínios (do recursivo ao funcional), preparando transposições curriculares fundamentadas.

7.4 Desafiar os professores a avançarem em seus conhecimentos

A prática de desafiar proporcionou aos professores avançarem em seus conhecimentos constituiu um eixo estruturante da mediação formativa, pois criou condições para que os

participantes confrontassem suas ideias, revivessem justificativas e ampliassem o escopo de suas generalizações. Em termos de RM, essa prática envolveu os entendimentos essenciais propostos por Lannin, Ellis e Elliott (2011): EE1 (conjeturar), EE2 (generalizar), EE3 (delimitar domínio), EE5 (investigar o porquê), EE7 (refutar) e EE8 (avaliar argumentos).

Do ponto de vista do modelo MKT (Ball; Thames; Phelps, 2008), ela mobilizou e fortaleceu componentes distintos do conhecimento profissional (conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento do conteúdo e do ensino, conhecimento do conteúdo e do estudante e conhecimento do horizonte matemático).

De acordo com o modelo PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020), a prática de desafiar concretizou-se por decisões de gestão e orquestração (dimensão operacional), sustentadas por movimentos de aproximação e articulação (dimensão conceitual). A seguir detalhamos as duas ações reveladas dessa prática: contrapor e questionar (Ferreira; Ribeiro; Ponte, 2023).

7.4.1 Contrapor para promover discussões coletivas e válidas

A ação de contrapor consistiu em tornar evidente diferentes observações, soluções ou justificativas apresentadas pelos professores, tornando-as objeto coletivo de estudo. Ao fazê-lo, o formador despertou uma discussão que desafiou os participantes a identificarem semelhanças entre casos e a estender o raciocínio para além do intervalo de origem (EE2) e, sobretudo, a delimitar condições de validade das generalizações produzidas (EE3). Esse deslocamento de “respostas faladas e/ou observadas” para leis de formação e seus domínios de aplicabilidade é central para consolidar significados matemáticos (Lannin; Ellis; Elliott, 2011; Jeannotte; Kieran, 2017).

Ao contrapor, o formador proporcionou o desenvolvimento do conhecimento especializado do conteúdo, analisando soluções não padronizadas, decompondo estruturas, representações e inferências, e direcionou ao conhecimento do conteúdo e dos estudantes ao antecipar interpretações padrões, erros prováveis e estratégias de reorientação (Ball; Thames; Phelps, 2008).

Considerando as dimensões propostas por Ribeiro e Ponte (2020) essa ação apresentou pressupostos de organização de uma decisão de gestão das normas argumentativas (o que conta como evidência, como discordar com razões) e de orquestração de discussões centradas em evidências, nas quais o foco não é “quem tem razão”, mas “o que torna um argumento válido” à luz de definições e propriedades de acordo com o objetivo da tarefa matemática.

Assim, como efeito formativo, os professores passam a reconhecer padrões estruturais comuns, a estender generalizações com escopo declarado e a problematizar exceções a partir de refinamento conceitual matemático e habilidades diretamente relacionadas ao desenvolvimento do RM dos estudantes.

7.4.2 Questionar para articular conjecturas, generalizações e provas na investigação coletiva

A ação de questionar organizou-se por perguntas focadas que criaram trilhas de investigação. Conduzidas pelo formador, esse tipo de ação articulou junto aos professores o reconhecimento e formulação de conjecturas (EE1), generalização (EE2), explicitar domínios de aplicação (EE3), investigar o porquê de uma afirmação ser verdadeira ou falsa (EE5), refutar por contraexemplo quando cabível (EE7) procurando avaliar os argumentos (EE8). Exemplos de perguntas que foram realizadas pelo formador durante essa ação: “Em que condições essa regra vale?”, “O que varia e o que permanece?”, “Que contraexemplo poderia refutar a afirmação?”.

Segundo os componentes do modelo de Ball e colaboradores (2008) esse movimento fortaleceu o conhecimento do conteúdo e do ensino, quando foram realizadas práticas e discussões por meio de sequências de questões que exigissem raciocínios de nível elevado. Também, aprofundou o conhecimento do conteúdo e dos estudantes ao antecipar “leis de formação” que estudantes tendem a construir; e ativou conhecimento do horizonte matemático ao explorar limites e transferências entre domínios (por exemplo, quando uma regularidade deixa de valer).

A ação de questionar apresentou excertos envolvendo a articulação do conteúdo e da didática (dimensão conceitual) (Ribeiro; Ponte, 2020) orquestrando turnos de fala entre formadores e participantes, escolhas de representações e pedidos de evidências (dimensão operacional) (Ribeiro; Ponte, 2020), de modo a sustentar investigações coletivas a partir das IDP.

Os professores tiveram oportunidades, a partir do repertório de perguntas realizadas pelo formador, para refletir a respeito das conjecturas elaboradas tanto pelos registros de práticas estudados, quanto pelas suas próprias conjecturas de acordo com as transcrições e áudio dos estudantes. Ocorreu, também, mediante a ação de questionar a compreensão e aplicação do processo de generalizar a partir do reconhecimento de domínio, investigaram razões da escolha desses domínios por propriedades matemáticas instaurando, assim, uma cultura de

argumentação em que a validade do argumento, e não a autoridade, é o critério central para o desenvolvimento do RM (Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

Ancorada nos processos de Raciocínio Matemático conjecturar, generalizar, investigar o porquê e justificar/refutar (Lannin; Ellis; Elliott, 2011), a mediação do formador mobiliza interações discursivas (Ribeiro; Ponte, 2020) com o intuito de criar OAP para os professores, promovendo o desenvolvimento do RM a partir da análise de registros de prática.

7.5 Sistematizar aprendizagens: síntese, integração e reflexão a respeito dos processos do RM

Nessa prática, o formador oportunizou aos professores a partir das ações a organização, integração e atribuição de significados às ideias construídas coletivamente, reconhecendo explicitamente os processos do RM mobilizados e compreendendo o papel da intervenção docente na mobilização desses processos. Assim, a sistematização transformou a experiência vivida em conhecimento profissional, consolidando OAP alinhadas aos pressupostos do RM.

7.5.1 Resumir os tópicos principais da discussão para que os professores organizem e sintetizem as ideias construídas coletivamente

Ao resumir os tópicos principais da discussão, o formador criou oportunidades para que os professores organizem e sintetizassem as ideias construídas coletivamente, explicitando os processos de RM mobilizados ao longo da atividade e consolidando as aprendizagens decorrentes da discussão. Essa ação não se restringiu ao encerramento da tarefa, mas constituiu um momento de compartilhamento de conhecimento.

Ao relacionar as OAP com os processos e entendimentos essenciais do RM (Lannin; Ellis; Elliott, 2011), essa ação sustentou, de modo articulado, os processos de generalizar, justificar e avaliar argumentos, favorecendo uma leitura do percurso investigativo realizado. Ao explicitar esses processos, o formador promoveu reflexão não de acordo com a resposta final mas sim para a compreensão dos raciocínios envolvidos na compreensão da tarefa matemática e no conhecimento matemático.

No que se refere aos domínios do MKT (Ball *et al.*, 2008), a ação de resumir mobilizou o conhecimento comum do conteúdo, ao retomar ideias matemáticas compartilhadas pelo grupo; o conhecimento especializado do conteúdo ao destacar estruturas, relações e critérios de validade às generalizações; e o conhecimento do conteúdo e do ensino ao modelar formas de sistematizar discussões matemáticas. No PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020), essa ação destaca a

gestão e orquestração (operacional), ao organizar o fechamento da discussão, e na articulação (conceitual), ao integrar os significados construídos coletivamente.

7.5.2 Recuperar os conhecimentos prévios para que os professores relacionem aprendizagens

Ao recuperar os conhecimentos prévios, o formador favoreceu que os professores relacionassem diferentes aprendizagens, estabelecendo conexões entre ideias já construídas e os novos entendimentos gerados com as OAP. Essa ação ampliou as oportunidades de reflexão sobre os processos do RM, permitindo que os professores reconhecessem a continuidade e a relação entre conjecturar, generalizar, justificar e avaliar argumentos (Lannin *et al.*, 2011).

Na perspectiva de Ball e colaboradores (2008) a ação mobilizou o conhecimento do conteúdo e dos estudantes, ao considerar como os professores constroem e ressignificam ideias matemáticas a partir de experiências anteriores, e o conhecimento do conteúdo e do ensino, ao orientar intencionalmente a retomada de conceitos de modo a favorecer a compreensão conceitual. No PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020), a recuperação dos conhecimentos prévios se situa nas dimensões de aproximação (conceitual), ao partir do que os participantes já sabem, e de articulação (conceitual), ao integrar essas ideias às novas aprendizagens.

7.6 O desenvolvimento do RM em processos formativos: o conhecimento profissional do formador

A análise dos dados evidenciou que o desenvolvimento do RM não ocorreu de forma espontânea, mas resultou de um conjunto de ações realizadas pelo formador, sustentadas pelo próprio conhecimento profissional especializado, articulado e situado ao objetivo da formação.

Os resultados indicaram que o conhecimento profissional do formador se constituiu na intersecção dos diferentes referenciais teóricos, o modelo de Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) (Ball; Thames; Phelps, 2008), o modelo PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020), o modelo MTESK (Ferreti; Martignone; Rodriguez-Muñiz, 2021) e os processos de RM (Lannin; Ellis; Elliott, 2011; Jeannotte; Kieran, 2017).

Inicialmente, evidenciou-se que o formador mobilizou conhecimento matemático especializado (Ball; Thames; Phelps, 2008) que lhe permitiu analisar estruturas, padrões, generalizações e domínios de validade durante as IDP além do domínio do conteúdo comum. Destaca-se que esse conhecimento é fundamental para organizar discussões matemáticas que ultrapassem respostas pontuais e avancem para a construção de argumentos, justificativas e

refutações. Nesse sentido, o formador atuou diretamente na discussão dos entendimentos essenciais do RM, tais como conjecturar, generalizar, investigar o porquê, justificar e avaliar argumentos.

Entretanto, somente o domínio do conteúdo matemático, não é suficiente. Os resultados revelam que o formador precisou também mobilizar conhecimento didático e pedagógico do ensino de Matemática, especialmente no que se refere à organização de tarefas matemáticas e à condução de discussões produtivas. As práticas de antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões (Stein *et al.*, 2008), quando incorporadas ao processo formativo, possibilitaram que os professores experienciem formas de ensino que podem ser posteriormente utilizadas nas salas de aula.

Outro aspecto identificado refere-se ao conhecimento de pesquisa em Educação Matemática, que diferencia o formador de outros profissionais envolvidos em processos educativos. Ao aprofundar em pesquisas na área acadêmica, teorias e modelos analíticos, o formador acrescenta discussões que compreendam a busca pela generalização e a justificação matemática ao processo formativo, estabelecendo conexões entre teoria e prática e ampliando as OAP geradas. Esse conhecimento permitiu que o formador não apenas conduzisse a formação, mas também a investigasse e a compreendesse como um espaço de produção de conhecimento coletivo.

Destaca-se, também, o papel do conhecimento discursivo e interacional do formador. As ações de convidar, validar, esclarecer, parafrasear (*revoicing*), solicitar esclarecimentos, contrapor e questionar configuram-se como intervenção importante para o desenvolvimento do RM, pois transformam as interações em espaços de investigação matemática coletiva de acordo com o que é proposto pelo modelo PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020). Nesse processo, o formador organizou a participação, estabeleceu direções argumentativas e direcionou a atenção dos professores para critérios de validade, deslocando o foco da autoridade para a argumentação.

Na análise evidenciou-se a importância do conhecimento de orquestração de processos formativos (Ribeiro; Ponte, 2020). O formador atuou na gestão e organização das interações (dimensão operacional), ao mesmo tempo em que promoveu a articulação entre prática e teoria (dimensão conceitual). A dupla atuação possibilitou que os professores avançassem suas respostas objetivas para compreensões estruturadas, baseando-se em propriedades matemáticas.

Outro resultado relevante refere-se as intenções planejadas das ações do formador para produzir OAP. As ações do formador não foram neutras; ao contrário, elas estruturaram-se o tipo de oportunidades de aprendizagem, tal qual era estruturada e (re)organizada de acordo com

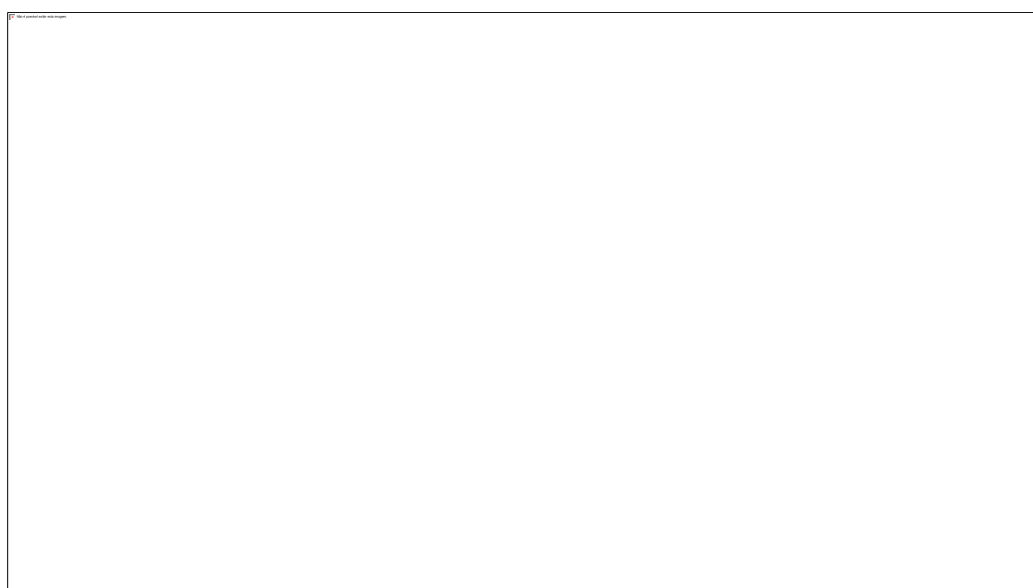
o objetivo de cada encontro. Ao interpretar as interações, selecionar ideias, organizar discussões e sistematizar aprendizagens, o papel do formador a partir de suas práticas e ações, criou condições para que os professores desenvolvessem processos de RM, tais como a elaboração de conjecturas, a generalização de padrões, a análise de validade e o uso de refutações a partir dos estudos dos entendimentos essenciais do RM (Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

Por fim, destaca-se que o formador assumiu uma dupla posição: é simultaneamente agente de sua própria formação e da formação dos professores. Desse modo, destaca-se um processo contínuo de desenvolvimento profissional, no qual o formador mobilizou, refletiu e estruturou seus conhecimentos a partir do planejamento e do objetivo do contexto formativo.

Dessa forma, os resultados desta pesquisa permitiram afirmar que o conhecimento profissional e o PAF para o desenvolvimento do RM se constituem como uma rede articulada de conhecimentos profissionais, no qual a Matemática, a didática, os aspectos pedagógicos, investigativos, discursivos e formativos se articularam para promover OAP. Acrescenta-se que esses conhecimentos sustentaram as ações que transformaram as IDP em oportunidades de aprendizagem, configurando-se o formador como um orquestrador/facilitador de práticas que favoreceram o desenvolvimento do RM dos professores que ensinam Matemática, a partir do seu papel e de suas ações realizadas junto aos participantes do processo formativo em estudo.

Para tanto, apresentamos a Figura 13 com intuito de destacar os conhecimentos profissionais do formador quando organiza e conduz um processo formativo voltado para o desenvolvimento do RM nos professores que ensinam Matemática.

Figura 10: Conhecimento profissional do formador de professores para o desenvolvimento do RM



Fonte: Autoria própria (2026).

A Figura 13 apresenta uma organização hierárquica do conhecimento profissional do formador, evidenciando que o desenvolvimento do RM se apoia em diferentes níveis de conhecimento que se articulam de forma integrada. Na base, situam-se os conhecimentos profissionais amplos, que incluem conteúdos, diretrizes curriculares e fundamentos da Educação Matemática. Os conhecimentos se relacionam com os modelos de conhecimento docente, em especial o Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) (Ball; Thames; Phelps, 2008) e o Conhecimento Especializado do Formador de Professores de Matemática (MTESK) (Ferreti; Martignone; Rodriguez-Muñiz, 2021), que sustentam a compreensão dos conteúdos e de seus processos de ensino.

Sobre essa base, desenvolve-se o conhecimento didático e pedagógico, que possibilita ao formador transformar o conteúdo matemático em objeto de ensino, planejando tarefas matemáticas, estratégias didáticas e discussões produtivas. Evidencia-se a articulação entre o conhecimento do conteúdo e os aspectos didáticos, aspecto destacado no processo formativo em estudo.

Em seguida, destacam-se as práticas e ações formativas, organizadas a partir do modelo PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020) e das contribuições de Ferreira, Ribeiro e Ponte (2023), que representam a atuação do formador utilizando as TAP na condução das IDP. Nesse nível, o formador mobilizou ações como convidar, validar, questionar, contrapor e parafrasear (*revoicing*), estruturando a participação dos professores e orientando o desenvolvimento do RM.

Nesse sentido, compreende-se que a realização de processos formativos voltados ao desenvolvimento do RM só é possível a partir da mobilização articulada do conhecimento profissional, didático e pedagógico do formador, em diálogo com conhecimentos oriundos da pesquisa em Educação Matemática. O formador ao integrar esses conhecimentos planeja e organiza suas decisões, orienta a mediação discursiva e possibilita a criação de OAP, nas quais os professores de maneira colaborativa e coletiva tem a oportunidade de (re) significar os processos de conjecturar, generalizar, investigar o porquê, justificar e refutar.

No topo da estrutura, encontra-se o RM, entendido como resultado da integração de conhecimentos e práticas. Assim, o desenvolvimento do RM na formação docente não ocorre de forma espontânea, mas é produzido por meio do papel e das ações do formador, sustentadas por conhecimentos especializados que articulam teoria, prática e investigação no contexto formativo.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo está organizado de modo a sintetizar e integrar os principais achados da pesquisa, bem como refletir sobre seus desdobramentos teóricos, metodológicos e formativos. Na Seção 8.1, apresenta-se a conclusão articulando os objetivos da investigação aos resultados revelados. A Seção 8.2 dedica-se a explicitar as respostas às questões de pesquisa. Em seguida, a Seção 8.3 descreve o produto educacional desenvolvido e suas contribuições para a formação docente. A Seção 8.4 aborda as limitações da pesquisa, enquanto a Seção 8.5 indica recomendações para trabalhos futuros, apontando possibilidades de aprofundamento e continuidade. Por fim, a Seção 8.6 apresenta reflexões pessoais da pesquisadora, retomando o percurso investigativo e os aprendizados construídos ao longo do processo.

8.1 Conclusão: do objetivo aos resultados revelados de acordo com o referencial teórico

À luz do objetivo deste estudo de *compreender como as ações do formador de professores que ensinam Matemática contribuem para gerar oportunidades de aprendizagem profissional no que diz respeito aos entendimentos essenciais do RM*, a análise dos quatro encontros do processo formativo evidencia que tais ações configuram o espaço de uma comunidade de aprendizagem e convertem episódios de fala em evidências de pensamento, gerando OAP vinculadas ao desenvolvimento do RM.

Na discussão das tarefas matemáticas, a mediação insistiu na explicitação de estrutura (invariantes e taxas de variação) para sustentar generalizações no domínio relevante. Exemplos como a distinção entre “brancos constantes” e “cinzas +3 por figura” (encontro 4) mostram o deslocamento de descrições episódicas para leis de formação (recursivas e funcionais), movimento que, no PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020), corresponde a gestão intencional das interações. A ênfase sistemática em domínio de validade (“em que condições isso vale?”, encontro 3) e em refutação por contraexemplo, elevou o padrão da prática, os professores passaram a diferenciar validação de investigação e a reconhecer justificações por propriedades, avaliando argumentos por sua coerência lógica.

Ao longo dos encontros, emergiram de modo articulado os componentes do MKT (Ball; Thames; Phelps, 2008). No conhecimento comum e especializado do conteúdo, destacaram-se a diferença de quadrados (encontro 3, tarefa da conjectura de Maria), a linearidade com termo constante, o crescimento recursivo e a covariação funcional (encontro 4, tarefa dos azulejos). No conhecimento do conteúdo e dos estudantes, observaram-se a

antecipação de leituras/erros (por exemplo, “38 cinzas”, “termina em 8”, na tarefa dos azulejos) e a escolha de registros próximos ao repertório discente. No conhecimento do conteúdo e do ensino, sobressaiu a sequenciação de tarefas exploratórias, a seleção de representações (língua natural, pictórica, algébrica) e a instituição de rotinas de discussão (revoicing, contraexemplo). Por fim, no conhecimento do horizonte matemático, evidenciou-se a articulação entre famílias de seqüências e a passagem do recursivo ao funcional, crucial para o controle conceitual ao transitar de regularidades empíricas para expressões gerais.

Como resultados formativos, os professores vivenciaram, discutiram e compartilharam experiências que fomentaram: a identificação e o reconhecimento de conjecturas; a condução de generalizações com domínios e condições explícitas; a busca e validação de generalizações por meio de casos, variações e contraexemplos; a avaliação da qualidade de justificativas com base em ideias previamente compreendidas; e a articulação de registros (fala, desenho, notação, álgebra) para estabilizar significados, movimentos convergentes com as recomendações de Lannin, Ellis e Elliott (2011). Em conjunto, as ações formativas ampliaram o repertório didático e dos conteúdos, instituíram normas de argumentação e modelaram práticas de mediação. O efeito esperado em sala de aula é que os docentes proponham tarefas exploratórias que suscitem conjecturas e generalizações, orquestram discussões com uso de contraexemplos e revoicing, avaliem soluções priorizando a qualidade do argumento e conduzam os estudantes a investigar o porquê e a justificar/refutar com base em propriedades e definições.

À luz da dimensão PAF do PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020), as ações do formador mostram-se coerentes com as dimensões conceituais e operacionais. No eixo da gestão, instauraram-se rotinas em que hipóteses são examinadas e evidências são requeridas, ativando processos e entendimentos essenciais do RM. No plano da orquestração, movimentos de retomar, sistematizar e estender deram visibilidade à estrutura subjacente, sustentando generalizações com domínios explicitados. Na aproximação, os registros de prática dos estudantes converteram IDP em OAP. Na articulação, as ações de questionar, contrapor, retomar e esclarecer integraram dimensões matemática e didática, alinhando tarefas, representações e critérios epistêmicos.

O processo formativo transformou movimentos de fala e práticas do formador em práticas docentes que podem ser transferíveis para os estudantes, consolidando uma cultura de argumentação na qual os professores tomam a busca pela validade como questão coletiva e fundamentada em propriedades e conceitos matemáticos. Sendo assim, as OAP geradas no coletivo docente tendem a repercutir na aprendizagem dos estudantes, que podem passar a

conjecturar, generalizar, investigar o porquê, justificar e refutar a partir de novos métodos e práticas propostas pelos professores participantes.

Ao instituir uma comunidade de aprendizagem por meio do convite à participação, o formador legitimou a exposição pública de raciocínios e transformou opiniões iniciais em material de investigação: interpretando interações, explicitando critérios, reorganizando enunciados e solicitando explicações conceituais e institucionalizando padrões de justificativa. Ao estabelecer conexões por meio de retomadas, o formador reorganizou episódios dispersos em estruturas conceituais estáveis e, ao desafiar por contraposição e questionamento, elevou o padrão epistêmico do debate, tornando visíveis domínios de validade e limites de generalização.

Consideradas em conjunto, as ações geram OAP a partir da comunidade de aprendizagem e fornecem condições para a investigação coletiva, aspecto essencial para processos formativos que visam contribuir para o desenvolvimento profissional do professor que ensina Matemática. O resultado é a passagem de uma participação predominantemente descritiva para uma participação argumentativa, na qual propriedades, condições e evidências matemáticas se tornam o eixo da validação. É precisamente nesse encadeamento que as ações do formador geraram OAP capazes de sustentar o desenvolvimento do RM dos professores e, por transposição didática, potencializar a promoção do RM nas salas de aula.

8.2 Conclusão: respostas às questões de pesquisa

A análise dos quatro encontros do processo formativo evidenciou que as ações do formador: convidar, validar, esclarecer/explicar, estender/ampliar, parafrasear (*revoicing*), solicitar esclarecimentos, retomar, contrapor, questionar, resumir os tópicos principais da discussão e recuperar os conhecimentos prévios funcionaram como incentivos e motivação às oportunidades de aprendizagens coletivas, capazes de converter falas, interações e registros de prática em evidências de pensamento.

Tais ações geraram OAP diretamente vinculadas aos processos e entendimentos essenciais do RM: conjecturar, generalizar, investigar o porquê e princípios iniciais de justificar/refutar, conforme delineado por Lannin, Ellis e Elliott (2011), ao mesmo tempo em que se articularam com os domínios do MKT (Ball; Thames; Phelps, 2008) e com as dimensões PAF do modelo PLOT (gestão e orquestração; aproximação e articulação) propostas por Ribeiro e Ponte (2020). Essa articulação favoreceu a construção de um espaço discursivo em que critérios de validade foram explicitados, domínios de aplicação foram delimitados e significados foram estabilizados por meio da coordenação entre registros e representações.

As práticas e ações mediadas pelo formador elevam o padrão epistêmico das discussões docentes e instituem uma cultura argumentativa na qual a validade de uma afirmação se fundamenta em propriedades, definições e justificativas matemáticas, e não em autoridade. As OAP criadas potencializam as oportunidades de aprendizagens docente e mostram viabilidade de transposição para a prática de sala de aula, com impactos esperados no RM dos estudantes.

Em síntese, as questões de pesquisa foram respondidas nos seguintes termos:

(I) As ações do formador geram OAP quando organizam o discurso, explicitam critérios de validade e estruturam significados compartilhados;

(II) O RM dos professores que ensinam matemática é promovido quando os professores vivenciam práticas de conjectura, generalização, justificativa e refutação em ambiente colaborativo;

(III) As mediações do formador transformam as IDP em situações de aprendizagem profissional, alinhadas a referenciais teóricos e a evidências empíricas do processo formativo analisado.

Como complemento as respostas das questões de investigação, destacamos na Figura 13 que o desenvolvimento do RM não decorre da exposição ao conteúdo, mas do papel e das ações realizadas pelo formador, sustentada por uma configuração articulada de conhecimentos profissionais, didáticos e pedagógicos. Ao explicitar a hierarquização desses conhecimentos, destaca-se que são as práticas e ações formativas, orquestradas/facilitadas pelo formador, que podem favorecer a produção de OAP e a construção de significados matemáticos. Assim, o desenvolvimento do RM configura-se como resultado de um processo formativo estruturado, no qual a mediação do formador assume papel central na transformação das IDP em oportunidades de aprendizagem.

8.3 O produto educacional e suas contribuições

O produto educacional resultante desta investigação consiste em um plano de formação que articula as ações do formador (Ferreira; Ribeiro; Ponte, 2023), os processos do RM (Lannin; Ellis; Elliott, 2011) e as dimensões do modelo PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020), sendo sua síntese apresentada no Quadro 19. Esse modelo emerge como um referencial prático-teórico capaz de orientar formadores condutores de processos de formação continuada de professores que ensinam Matemática, evidenciando o papel das interações discursivas como elemento central para a promoção do RM em contextos formativos e escolares.

Em sua aplicabilidade, o plano pode ser utilizado para subsidiar o planejamento de TAP e de tarefas matemáticas voltadas à investigação, à argumentação e à generalização. Além disso, oferece suporte à mediação pedagógica em contextos colaborativos, ao propor uma sequência intencional de ações formativas que transformam as falas e interações entre os participantes em evidências de RM.

A principal contribuição do produto educacional está em oferecer um instrumento formativo que explicita como o formador pode gerar OAP para o desenvolvimento do RM docente. Ao integrar dimensões matemáticas, didáticas e epistêmicas, o modelo propicia uma estrutura conceitual e metodológico que favorece tanto a compreensão dos processos de raciocínio quanto a construção de práticas formativas coerentes com os princípios da Educação Matemática voltada à argumentação, à justificação e à generalização.

Assim, o produto educacional não se limita a um resultado aplicado, mas representa uma proposta de mediação formativa fundamentada teoricamente, passível de ser adaptada e utilizada em diferentes contextos de formação docente, contribuindo para a consolidação de uma cultura de investigação e reflexão sobre o ensinar e aprender Matemática.

8.4 Limitações da pesquisa

Este estudo apresentou algumas limitações que merecem ser reconhecidas e consideradas na interpretação dos resultados. Em primeiro lugar, o recorte temporal e amostral constitui uma restrição relevante: a análise concentrou-se nos quatro primeiros encontros de um único grupo de professores, o que reduz a possibilidade de observar efeitos de longa duração e de identificar mudanças mais consistentes na prática docente ao longo do tempo. Além disso, o número limitado de participantes e o contexto específico em que as interações ocorreram restringem a generalização dos achados para outros grupos de professores ou níveis de ensino, como o ensino superior.

Soma-se no aspecto de limitação da pesquisa o perfil do formador envolvido no processo, cuja trajetória profissional, formação e experiência com processos formativos voltados ao ensino de Matemática e ao desenvolvimento do RM podem ter influenciado diretamente a natureza das ações realizadas e, conseqüentemente, as OAP geradas. Tal especificidade implica reconhecer que os resultados obtidos estão, em alguma medida, associados às características desse formador, o que limita sua extrapolação para contextos em que o formador possua diferentes níveis de experiência ou concepções de ensino.

Além disso, a ausência de observações diretas em sala de aula após o término do processo formativo constitui outra limitação, uma vez que impede avaliar de forma integral o impacto das OAP geradas sobre o RM dos estudantes.

Reconhecer essas limitações não diminui a relevância dos resultados alcançados, contrariamente, contribui para delimitar o alcance das conclusões e sustentar a validade interpretativa da pesquisa, ao mesmo tempo em que abre caminhos para investigações complementares e aprofundamentos futuros sobre a temática.

8.5 Recomendações para trabalhos futuros

Com base nas contribuições e limitações desta pesquisa, delineiam-se algumas direções promissoras para investigações futuras no campo da formação de professores que ensinam Matemática e do desenvolvimento do RM.

Em primeiro lugar, recomenda-se ampliar o número de encontros, no mínimo doze, e contextos formativos, de modo a observar como as OAP se consolidam ao longo do tempo e em diferentes níveis de ensino, permitindo compreender o amadurecimento das práticas argumentativas e dos processos de raciocínio matemático.

Outra linha de investigação diz respeito ao trabalho com OAP em salas de aula dos professores participantes, buscando analisar como os docentes mobilizam os processos de conjectura, generalização, investigação do porquê e justificação/refutação em suas práticas com os estudantes. Essa vertente possibilitaria verificar o impacto direto das ações formativas sobre o RM discente e as transformações na prática pedagógica cotidiana.

Também se mostra relevante explorar a replicação das ações do formador em outros contextos e conteúdos matemáticos, com o objetivo de avaliar a robustez e a adaptabilidade do modelo proposto em diferentes níveis e modalidades de ensino, inclusive na formação de formadores. Tal abordagem permitiria compreender em que medida os resultados identificados nesta pesquisa podem ser ensinados, apropriados e reinterpretados por outros mediadores, fortalecendo redes de prática e comunidades de aprendizagem profissional.

Além disso, propõe-se o desenvolvimento de instrumentos de acompanhamento formativo, inspirados nas ações do formador descritas como rubricas de observação, guias de mediação e protocolos de análise discursiva, que possam auxiliar outros formadores no planejamento, observação e avaliação de processos de desenvolvimento profissional docente.

Por fim, considera-se promissora a exploração de formações híbridas e digitais, analisando como as ações mediadoras e as OAP se manifestam em ambientes virtuais de

aprendizagem e por meio do uso de diferentes *hardwares* e *softwares*, especialmente no que se refere à dinâmica das IDP e à construção coletiva do RM a partir da interação com os meios tecnológicos digitais.

De modo geral, os resultados obtidos neste estudo oferecem perspectivas importantes para novas pesquisas que aprofundem a compreensão dos processos formativos que sustentam o RM, contribuindo para o avanço teórico e metodológico da Educação Matemática e para o fortalecimento de práticas docentes reflexivas e investigativas.

8.6 Reflexões pessoais

Como formadora e pesquisadora, esta investigação representou uma experiência de criar OAP e pessoais. O acompanhamento das interações entre professores permitiu compreender a importância do diálogo, da escuta e da mediação para promover o RM e o desenvolvimento profissional docente.

A participação do e no processo formativo e na pesquisa evidenciou que formar professores é também um ato de aprender a olhar e a intervir sobre o pensamento do outro, reconhecendo o erro, a dúvida e o inacabado como pontos de partida para o avanço do raciocínio.

A análise das práticas, das ações do formador e das OAP geradas, reforçou a convicção de que a formação docente precisa ser um espaço investigativo, em que o professor é convidado a pensar matematicamente e coletivamente sobre sua própria prática e a respeito dos registros de práticas realizados pelos estudantes.

Por fim, esta pesquisa reafirma a importância da articulação entre teoria e prática, entre o conhecimento acadêmico e a realidade escolar, como caminho para ampliar e potencializar a Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Ana Maria. **Histórias de Formação de Professores de Matemática: Alinhavos em um projeto de Mapeamento**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - PPGEdumat. – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul- UFMS. Campo Grande – MS, 2023.

ALMEIDA, Lourdes Maria; BORSSOI, Adriana Helena; DA SILVA, Karina Alessandra Pessoa. Teoria Fundamentada em Dados: uma metodologia para pesquisas em Modelagem Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, n. 18, 2015.

ANJOS, Leandro Quirino. **Contribuições de um processo formativo para professores dos anos iniciais visando a compreensão dos entendimentos essenciais de raciocínio matemático**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT). Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Londrina, PR, 2023.

ANJOS, Leandro Quirino; ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira; GROSS, Giane Fernanda Schneider Gross; TREVISAN, André Luis. Compreensões dos professores quando resolvem uma tarefa matemática com potencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático. **Revista Pesquisa Qualitativa**, v. 13, n. 33, p. 115-146, 2025.

ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira; TREVISAN, André Luis; PAULA, Bruna Angelis. Raciocínio matemático apoiado por tarefas exploratórias e ações de professores. *Alexandria*, v. 15, p. 357-375, 2022.

ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira; SERRAZINA, Maria de Lurdes; PONTE, João Pedro. “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 2, p. 466-490, 2019.

ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira; SERRAZINA, Maria. Processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas exploratórias no 3º ano de escolaridade. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 9, n. 18, p. 118-136, 2020.

BAGGIO, Maria Aparecida; ERDMANN, Alacoque Lorenzini. Teoria fundamentada nos dados ou Grounded Theory e o uso na investigação em Enfermagem no Brasil. **Revista de Enfermagem Referência**, v. 3, n. 3, p. 177-188, 2011.

BALL, Deborah Loewenberg. **Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education**. Michigan State University. Department of Teacher Education, 1988.

BALL, Deborah Loewenberg. Mathematical knowledge for teaching: Explicating and examining a program of research. **In Presentation made at the annual meeting of the American Educational Research Association**, New York, NY. 2008.

BALL, Deborah Loewenberg; COHEN, David K. Developing practices, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional development. **Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice**, 30-32, 1999.

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. **Content knowledge for teaching: What makes it special?**. 2008.

BARBOZA, Lilian Cristina; PAZUCH, Vinícius; RIBEIRO, Alessandro Jacques. Tarefas para a aprendizagem de professores que ensinam matemática nos anos iniciais. **Zetetike**, v. 29, p. e021009-e021009, 2021.

BELO, Edileusa; GONÇALVES, Tadeu Oliver. A identidade profissional do professor formador de professores de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 14, n. 2, p. 299-315, 2012.

BESWICK, Kim. Teachers' beliefs about school mathematics and mathematicians' mathematics and their relationship to practice. **Educational Studies in Mathematics**, v. 79, n. 1, p. 127-147, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9333-2>

BRACCI, Enrico. The practical relevance of public sector research: The potential contributions of the interventionist approach. **Revista de Contabilidade e Organizações**, v. 11, n. 30, p. 4-13, 2017.

BROCARD, Joana *et al.* Ações do professor e desenvolvimento do raciocínio matemático durante a discussão coletiva de uma tarefa. **Educación Matemática**, v. 34, n. 2, p. 101-133, 2022.

BRODIE, Karin. **Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms**. 1. ed. New York, NY: Springer, 2010.

CAMPANELLA, Melissa; PENUEL, Willian. Design based Research in Educational Settings: Motivations, Cross-cutting Features, and Considerations for Design. **Design-Based Research in Education. Theory and Application**, p.3-22, 2021.

CAMPOS, Rodrigo Ruiz. O conhecimento didático de professores do ensino secundário para promover o raciocínio matemático. Tese de doutoramento, Educação (Didática da Matemática), Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, 2024.

CARRILLO-YAÑEZ, J.; CONTRERAS, L. C.; CLIMENT, N.; ESCUDERO-ÁVILA, D.; FLORES-MEDRANO, E.; MONTES, M. Á. Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones. 2014.

CARRILLO-YAÑEZ, José; CLIMENT, Nuria; MONTES, Miguel; CONTRERAS, Luis Carlos; FLORES-MEDRANO, Eric, ESCUDERO-ÁVILA, Dinazar; MUÑOZ-CATALÁN, Cinta. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, 20(3), 236–253, 2018.

CASSIANI, Silvia Helena De Bortoli; CALIRI, Maria Helena Larcher; PELÁ, Nilza Teresa Rotter. A teoria fundamentada nos dados como abordagem da pesquisa interpretativa. **Revista Latino-Am.enfermagem**, v. 4, n. 3, p. 75-88,1996.

CHARMAZ, Kathy. **A construção da Teoria fundamentada: guia prático para análise qualitativa** / Kathy Charmaz; tradução Joice Elias Costa. – Porto Alegre: Artmed, 2009.

COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. Design experiments in educational research. **Educational researcher**, 32(1), pp.9-13, 2003.

COBB, Paul; JACKSON, Kara; DUNLAP, Charlotte. **Design research: An analysis and critique**. In L. D. English; D. Kirshner (Eds.) Handbook of international research in Mathematics Education (Third edition, pp. 481-503). New York, NY: Routledg, 2016.

CORREA, Lucas do Nascimento. **Compreensão dos processos de raciocínio matemático por professores: princípios de design para tarefas de aprendizagem profissional**. 2025. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

CORRÊA, Lucas do Nascimento; ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira; SERRAZINA, Maria de Lourdes. Níveis de compreensão sobre processos de raciocínio matemático manifestados por professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao discutirem uma tarefa de aprendizagem profissional. **Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino**, v. 8, n. 2, p. 1263-1286, 2024.

COSTA, Jaqueline de Moraes; PINHEIRO, Nilcéia Aparecida Maciel; COSTA, Ercules. A formação para matemática do professor de anos iniciais. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 22, p. 505-522, 2016.

COURA, Flávia Cristina Figueiredo; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglione. Estado do conhecimento sobre o formador de professores de Matemática no Brasil. **Zetetiké**, v. 25, n. 1, p. 7-26, 2017.

CRECCI, Vanessa Moreira; FIORENTINI, Dario. Desenvolvimento profissional em comunidades de aprendizagem docente. **Educação em Revista**, v. 34, p. e172761, 2018.

DESIGN-BASED RESEARCH COLLECTIVE. Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. **Educational Researcher**, 32(1), 5–8, 2003.

DÖRR, Raquel Carneiro; NEVES, Regina da Silva Pina; RIBEIRO, Alessandro Jacques. Tarefas Matemáticas na Formação Continuada de Professores: Investigando a Construção e o Desenvolvimento de uma Tarefa Exploratória. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 16, n. 42, p. 1-27, 2023.

DUMAY, Jonh; BAARD, Vicky. **An introduction to interventionist research in accounting**. The Routledge companion to qualitative accounting research methods, p.265-283, 2017.

ELIAS, Henrique Rizek; GERETI, Laís; MARTELOZO, Daniele Peres da Silva; SILVA; Suiane Priscilla Perez Felício. Tarefas exploratórias para o ensino de potenciação:

manifestações do pensamento algébrico a partir de uma Investigação Baseada em Design. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 16, n. 42, p. 1-21, 2023.

ELLIOTT, Rebekah; KAZEMI, Elham; LESSEIG, Kristin; MUMME, Judith; CARROLL, Cathy; KELLEY-PETERSEN, Megan. Conceptualizing the work of leading mathematical tasks in professional development. **Journal of Teacher Education**, East Lansing, v. 60, n. 4, p. 364-379, 2009.

ELLIS, Amy; ÖZGÜR, Zekiye; REITEN, Lindsay. Teacher moves for supporting student reasoning. **Mathematics Education Research Journal**, v. 31, p. 107-132, 2019.

ENGWARD H. Understanding grounded theory. **Nurs Stand**. Oct.; 28(7):37-41, 2013.

EVEN, Ruhama; BALL, Deborah Loewenberg. **The professional education and development of teachers of mathematics**. New York: Springer, 2009.

FERREIRA, Carlos Augusto Lima. Pesquisa quantitativa e qualitativa: perspectivas para o campo da educação. **Revista Mosaico-Revista de História**, v. 8, n. 2, p. 113-121, 2015.

FERREIRA, Jefferson dos Santos. **A graduação como elemento constituinte da matemática do ensino: uma análise da aritmética dos manuais pedagógicos (1933-1951)**. Tese (Doutorado em Ciências). Universidade Federal de São Paulo. Escola de Filosofia, Letras e Humanas. Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência. Guarulhos – SP, 2022.

FERRETTI, Federica; MARTIGNONE, Francesca; RODRÍGUEZ-MUÑIZ, Luis J. Mathematics Teachers Educator specialized knowledge model. **Zetetike**, v. 29, p. e021001-e021001, 2021.

FIorentini, Dario. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, n. 18, 2005.

FIorentini, Dario. A Investigação em Educação Matemática desde a perspectiva acadêmica e profissional: desafios e possibilidades de aproximação. **Cuadernos**, v. 11, p. 61-82, 2013.

GIBBONS, L. K.; LEWIS, R. M.; NIEMAN, H.; RESNICK, A. F. Conceptualizing the work of facilitating practice-embedded teacher learning. **Teaching and Teacher Education**, Cardiff, v. 101, p. 01-12, 2021.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. Editora Atlas SA, 2008.

GODOY, Arlida Schmidt. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de administração de empresas**, v. 35, p. 57-63, 1995.

GONÇALVES, Marcel Messias; RIBEIRO, Alessandro Jacques; AGUIAR, Marcia. Ressignificando conhecimentos profissionais de um professor em pesquisa sobre a própria prática: o ensino de álgebra e o conceito de simetria. **Boletim GEPem**, [S. l.], n. 80, p. 193-230, 2022. DOI: 10.4322/gepem.2022.050. Disponível em: <https://periodicos.ufrj.br/index.php/gepem/article/view/604>. Acesso em out. 2024.

GREGÓRIO, Marisa; OLIVEIRA, Hélia. As justificações matemáticas de alunos do 5.º ano na validação de uma conjectura no estudo da igualdade de triângulos. **Revista BOEM**, v. 6, n. 12, p. 21-40, 2018.

GROSS, Giane Fernanda Schneider; SOUZA, Arnold Vinicius Prado; TREVISAN, André Luis. Raciocínio matemático em documentos e orientações curriculares: o que a literatura destaca? **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)**, v. 14, p. 1-23, 2023.

GROSS, G. F. S.; TREVISAN, A. L.; ARAMAN, E. M. O. Raciocínio matemático e as oportunidades de aprendizagem profissional do professor que ensina matemática: as ações do formador. **Eduser: Revista de Educação**, v. 1, p. 1-18, 2024.

GROSS, Giane Fernanda Schneider. **Cultura digital frente às demandas das escolas do campo: a robótica educacional como possibilidade para o ensino de matemática**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Formação, Científica e Tecnológica do Paraná). Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR. Curitiba, 2020.

GROSS, Giane Fernanda Schneider; TREVISAN, Andre Luis; ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira. Perspectivas teóricas, conhecimentos profissionais e o papel do formador em processos formativos sobre o raciocínio matemático. **PARADIGMA**, Maracay, v. 47, n. 1, p. e2026005, 2026. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2026.e2026005.id1760. Disponível em: <https://revistaparadigma.com.br/index.php/paradigma/article/view/1760>. Acesso em: 6 abr. 2026.

GROSS, Giane Fernanda Schneider; TREVISAN, André Luis; ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira. Raciocínio matemático e as oportunidades de aprendizagem profissional do professor que ensina matemática: as ações do formador. **EduSer**, v. 16, n. 2, 2024.

HENRIQUES, Ana; PONTE, João Pedro da. As representações como suporte do raciocínio matemático dos alunos quando exploram atividades de investigação. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 28, p. 276-298, 2014.

HERBERT, Sandra; BRAGG, Leicha A. Factors in a professional learning program to support a teacher's growth in mathematical reasoning and its pedagogy. **Mathematics education research journal**, v. 33, n. 3, p. 409-433, 2021.

JEANNOTTE, Doris; KIERAN, Carolyn. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in mathematics**, v. 96, p. 1-16, 2017.

JÖNSSON, Sten; LUKKA, Kari. There and back again: doing interventionist research in management accounting. **Handbooks of management accounting research**, v. 1, p. 373-397, 2006.

JUNIOR, Jeferson Gomes Moriel; WIELEWSKI, Gladys Denise. POTENCIAIS OPORTUNIDADES FORMATIVAS COM MTSK E PESQUISAS CIENTÍFICAS SOBRE FRAÇÕES E OPERAÇÕES. **REAMEC-Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, v. 9, n. 1, p. e21013-e21013, 2021.

JUSTULIN, Andresa Maria; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Aprendizagens docentes no contexto da resolução de problemas. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 14, n. 4, p. 432-441, 2021.

KENNY, M; FOURIE, R. Contrasting classic, straussian, and constructivist grounded theory: methodological and philosophical conflicts. **Qual Rep** [Internet]. 20(8):1270-89, 2015.

KILPATRICK, Jeremy. Understanding mathematical literacy: The contribution of research. **Educational studies in mathematics**, v. 47, n. 1, p. 101-116, 2001.

KNEUBIL, Fabiana Botelho; PIETROCOLA, Maurício. A pesquisa baseada em design: visão geral e contribuições para o ensino de ciências. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 22, n. 2, p. 1, 2017.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOT, R. **Developing essential understanding of mathematical reasoning**: Pre-K Grade 8. 2011.

LANNIN, John K. Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. **Mathematical Thinking and learning**, v. 7, n. 3, p. 231-258, 2005.

LEITE, F. Raciocínio e procedimentos da grounded theory construtivista. **Questões Transversais Rev Epistemol Comun** [Internet]. Vol. 3 (6): 76-85, 2015.

LOONG, Esther Yook-Kin; VALE, C.; HERBERT, Sandra; BRAGG, Leicha A.; WIDJAJA, Wanty. Tracking change in primary teachers' understanding of mathematical reasoning through demonstration lessons. **Mathematics teacher education and development**, 19(1), p. 5-29, 2017.

MARTENS, A. S.; TREVISAN, A. L. Atividade de modelagem matemática e o desenvolvimento do raciocínio matemático com futuros professores de Matemática. **Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino**, v. 9, p. 171-199, 2025.

MARTENS, A. S.; TREVISAN, A. L. Ensino de Cálculo e raciocínio matemático e seus processos: o que se mostra dessa relação nas pesquisas dos CNMEM's. **Vidya**, v. 43, p. 39-57, 2023.

MARTIGNONE, Francesca; FERRETTI, Federica; RODRÍGUEZ-MUÑIZ, Luis J. What aspects can characterize the specialised knowledge of a mathematics teacher educator?. **Educación Matemática**, v. 34, n. 3, 2022.

MATA-PEREIRA, Joana Mata; PONTE, J. P. Raciocínio matemático em contexto algébrico uma análise com alunos de 9.º ano. Ensino e Aprendizagem da Álgebra. **Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática**, p. 347-364, 2011.

MATA-PEREIRA, Joana. **As ações do professor para promover o raciocínio matemático na sala de aula**. Tese (Universidade de Lisboa), 2018.

MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João Pedro da. Desenvolvendo o raciocínio matemático: Generalização e justificação no estudo das inequações. **Boletim do GEPEM**, v. 62, p. 17-31, 2013.

MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João Pedro da. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. *Bolema*: **Boletim de Educação Matemática**, v. 32, p. 781-801, 2018.

MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João Pedro. Espaço GTI: Ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. **Educação e Matemática**, n. 137, p. 38-41, 2016.

MCKENNEY, Susan; REEVES, Thomas C. **Conducting educational design research**. New York: Routledg, 2012.

MISHRA, Punya; KOEHLER, Matthew. J. Introducing Technological Pedagogical Content Knowledge. **Annual Meeting of the American Educational Research Association. Proceedings...**New York City, March p.24-28, 2008

MORAIS, R. S.; ARAMAN, E. M. O.; TREVISAN, A. L. Raciocínio matemático e argumentação em tarefas de geometria plana nos anos iniciais. *Vidya*, v. 42, p. 101-119, 2022.

MORAIS, Rosimeiri da Silva. **Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes do 5º ano ao argumentar matematicamente a respeito de figuras geométricas planas**. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio – PR, 2022.

MOSQUITO, Elisa Maria Le. **Práticas Lectivas dos Professores de Matemática do 3º Ciclo do ensino básico**. Dissertação (Mestrado em Educação Especialidade de Didática da Matemática) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

NASCIMENTO, Jardelina Bispo; SILVEIRA, Catarina Ferreira; CARDOSO, Hugo Saba Pereira; FREITAS, Eduardo Manoel Jorge. A teoria fundamentada em dados aplicada ao campo da educação superior. **Research, Society and Development**, v. 10, n. 5, p. e48710515026-e48710515026, 2021.

NEGRINI, M. V.; TREVISAN, A. L.; ARAMAN, E. M. O. Movimentos envolvendo processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes ingressantes no ensino superior em uma tarefa exploratória. **Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)**, v. 38, p. 1-20, 2024.

NEVES, Regina da Silva Pina; DÖRR, Raquel Carneiro; PAULIN, Juliana França Viol; NOGUEIRA, Lemerton Matos; RIBEIRO, Alessandro Jacques. Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) na formação inicial de professores de Matemática no Brasil. In: **Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe**. 2025.

O'DONNELL, Barbara; TAYLOR, Ann. A lesson plan as professional development? You've got be kidding. **Teaching Children Mathematics**, Janeiro, 272-278, 2007.

OLIVEIRA, L. S.; ARAMAN, E. M. O.; TREVISAN, A. L. Processos de raciocínio matemático em uma tarefa exploratória. *Paradigma*, p. 1-21, 2022.

OLIVEIRA, L. S.; TREVISAN, A. L.; ARAMAN, E. M. O.; GUTIERREZ-FALLAS, L. F. O conhecimento docente e os entendimentos essenciais do raciocínio matemático em um contexto de formação continuada de professores que ensinam matemática. *Vidya*, v. 45, p. 393-412, 2025.

OLIVEIRA, Loryane Santos. **Conhecimentos profissionais de professores em um contexto de formação continuada a respeito do raciocínio matemático**. 2024. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

OLIVEIRA, Paulo. O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. **Educação e Matemática**, n. 100, p. 3-9, 2008. Disponível em: <
<https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1715>>. Acesso em ago. 2023.

OPEN UNIVERSITY. Course MS221 exploring mathematics, block D: proof and reasoning. **Open University Press**, Milton Keynes, 1997.

PEIRCE, Charles Sanders. **Semiótica**. Tradução: José Teixeira Cocilho Neto. São Paulo – SP. Editora Perspectiva, 2005.

PHILIPPAKOS, ZOI A.; HOWELL, EMILY; PELLEGRINO, ANTHONY. Design-based research in education. **Theory and applications**. New York, London: The Guilford Pres. 2021.

PIRES, Vera Lucia Gonçalves; MACIEL, Domicio Magalhães. Formação de professores que ensinam matemática nos anos iniciais: o uso de indicadores de desempenho estudantil em uma escola da rede pública municipal de São Luís/MA. **Ensino e Tecnologia em Revista**, v. 7, n. 2, p. 506-519, 2023.

PÓLYA, George. From the 1950s: Mathematics as a Subject for Learning Plausible Reasoning. **The Mathematics Teacher**, v. 100, n. 5, p. 36-39, 2006.

PONTE, João Pedro da. Didáticas específicas e construção do conhecimento profissional. In: **IV Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação**. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, p. 59-72, 1999.

PONTE, João Pedro da; MATA-PEREIRA, Joana; QUARESMA, Marisa. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante**, v. 22, n. 1.ª, p. 55-81, 2013.

PONTE, João Pedro da; SOUSA, Hélia. Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), **O professor e o programa de Matemática do ensino básico** (p. 11-41). Lisboa: APM. 2010.

PONTE, João Pedro; QUARESMA, Marisa. Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. **Educational Studies in mathematics**, v. 93, p. 51-66, 2016.

PONTE, João Pedro; QUARESMA, Marisa; MATA-PEREIRA, Joana. Teachers' learning in lesson study: insights provided by a modified version of the interconnected model of teacher professional growth. **ZDM–Mathematics Education**, v. 54, n. 2, p. 373-386, 2022.

PONTE, João Pedro; QUARESMA, Marisa; MATA-PEREIRA, Joana; BAPTISTA, Mónica. O Estudo De Aula Como Processo De Desenvolvimento Profissional De Professores De Matemática. **Bolema: Boletim De Educação Matemática**, V. 30, P. 868-891, 2016.

PREDIGER, Susanne; ROESKEN-WINTER, Bettina; LEUDERS, Timo. Which research can support PD facilitators? Strategies for content-related PD research in the Three-Tetrahedron Model. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 22, n. 4, p. 407-425, 2019.

PRIGOL, Edna Liz; BEHRENS, Marilda Aparecida. Teoria Fundamentada: metodologia aplicada na pesquisa em educação. *Educação & Realidade*, v. 44, 2019.

RAMOS, Paula; GIANELLA, Taís Rabetti; STRUCHINER, Miriam. A pesquisa baseada em design em artigos científicos sobre o uso de ambientes de aprendizagem mediados pelas tecnologias da informação e da comunicação no ensino de ciências. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 3, n. 1, p. 77-102, 2010.

REEVES, T. C.; HERRINGTON, J.; OLIVER, R. Design research: A socially responsible approach to instructional technology research in higher education. **Journal of Computing in Higher Education**, v. 16, n.2, p. 96–116, 2005.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; AGUIAR, Marcia; TREVISAN, André Luis. Oportunidades de aprendizagem vivenciadas por professores ao discutir coletivamente uma aula sobre padrões e regularidades. **Quadrante**, v. 29, n. 1, p. 52-73, 2020.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; PONTE, João Pedro. Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. **Zetetike**, v. 28, 2020.

RIBEIRO, Renato Douglas Gomes Lorenzetto. INTERFACES ENTRE O PROGRAMA ETNOMATEMÁTICA E O MODELO DO CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA (MTSK). **APeDuC Revista-Investigação e Práticas em Educação em Ciências, Matemática e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 40-56, 2021.

RODRIGUES, Bruna Mayara; PONTE, João Pedro. Investigação Baseada em Design: Uma experiência de formação de professores em Estatística. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 3, p. 138-167, 2020.

RUSSEL, Susan. Mathematical reasoning in the elementary grades. In: STIFF, L. V.; CURCIO, F. R. (Eds.). *Developing mathematical reasoning in grades K-12*. Reston: NCTM, 1999. p. 1-12.

SANTOS, Jose Luis Guedes dos; ERDMANN, Alacoque Lorenzini; SOUZA, Francisca Georgina Macedo; LANZONI, Gabriela Marcelino de Melo; MELO, Ana Lúcia Schaefer Ferreira; LEITE, Josete Luzia. Perspectivas metodológicas para o uso da teoria fundamentada nos dados na pesquisa em enfermagem e saúde. **Escola Anna Nery**, v. 20, p. e20160056, 2016.

SANTOS, José Luís Guedes; CUNHA, Kamylla Santos da; ADAMY, Edlamar Kátia; BACKES, Marli Terezinha Stein; LEITE, Joséte Luzia; SOUSA, Francisca Georgina Macedo. Análise de dados: comparação entre as diferentes perspectivas metodológicas da Teoria Fundamentada nos Dados. **Revista da Escola de Enfermagem da USP**, v. 52, p. e03303, 2018.

SANTOS, Paula Eugenia dos; DENARDIN, Luciano. Uma revisão sistemática de literatura sobre o uso do conhecimento especializado do professor de matemática na formação inicial docente: uma análise à luz do modelo MTSK. **Revista Insignare Scientia-RIS**, 2022.

SHULMAN, Lee. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard educational review**, v. 57, n. 1, p. 1-23, 1987.

SHULMAN, Lee. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SILVA, Daniela Ines Baldan; RIBEIRO, Alessandro Jacques; AGUIAR, Marcia. AVENTURA FORMATIVA ACERCA DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS: DAS APRENDIZAGENS PLANEJADAS ÀQUELAS QUE SURPREENDEM. **VIDYA**, v. 43, n. 1, p. 77-97, 2023a.

SILVA, Daniela Inês Baldan; RIBEIRO, Alessandro Jacques; AGUIAR, Marcia. Aprendizagem relatada por três professoras eo ensino de álgebra nos anos iniciais. PNA. **Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática**, v. 17, n. 3, p. 323-346, 2023b.

SILVA, Valdir Alves; PAZUCH, Vinícius. Oportunidades de Aprendizagem Profissional no Contexto da Formação de Professores de Matemática da Educação Básica. **Educação Matemática em Revista**, v. 29, n. 83, p. 1-17, 2024.

STEEN, Lynn Arthur. **Twenty Questions about Mathematical Reasoning**. 1999. Disponível em: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED440849.pdf> . Acesso em jul. 2023.

STEIN, Mary Kay Stein; ENGLE, Randi A; SMITH, Margaret S.; HUGHES, Elizabeth K. Hughes. Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell, **Mathematical Thinking and Learning**, 10:4, 313-340, 2008. DOI: 10.1080/10986060802229675

STRAUSS, A.; CORBIN, J. **Pesquisa qualitativa: técnicas e procedimentos para desenvolvimento da teoria fundamentada**. 2ª ed. Porto Alegre : Artmed, 2008.

STYLIANIDES, Gabriel J. An analytic framework of reasoning-and-proving. **For the learning of mathematics**, v. 28, n. 1, p. 9-16, 2008.

STYLIANIDES, Gabriel. Engaging Secondary Students in Reasoning and Proving. **Mathematics Teaching**, v. 219, p. 39-44, 2010.

THOMPSON, Alba G. **Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research**. 1992.

TREVISAN, A. L. Raciocínio matemático em aulas de Cálculo Diferencial e Integral: uma análise a partir de tarefas exploratórias. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 1, p. 1-23, 2022.

TREVISAN, A. L.; ARAMAN, E. M. O. Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de Cálculo em tarefas envolvendo representações gráficas. *Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)*, v. 35, p. 158-178, 2021.

TREVISAN, A. L.; NEGRINI, M. V.; FALCHI, B.; ARAMAN, E. M. O. Ações do professor para a promoção do raciocínio matemático em aulas de cálculo diferencial e integral. *Educação e Pesquisa*, v. 49, p. 1-21, 2023.

TREVISAN, A. L.; VIEIRA, A. F. M.; OLIVEIRA, L. S.; ARAUJO, T. T. Tarefas exploratórias e raciocínio matemático: uma meta-análise narrativa sobre práticas e formação docente. *Ensino e Tecnologia em Revista*, v. 9, p. 666-683, 2025.

TREVISAN, André Luis; ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira. Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de Cálculo em tarefas envolvendo representações gráficas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 35, p. 158-178, 2021.

TREVISAN, André Luis; BALDAN DA SILVA, Daniela Inês; SILVA, Janaína Mendes Pereira; RIBEIRO, Alessandro Jacques. Oportunizando Aprendizagens Profissionais a Professores: interações discursivas em um processo formativo. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 37, p. 688-708, 2023.

TREVISAN, André Luis; NEGRINI, Mariana Vasconcelos; FALCHI, Bárbara; ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira. Ações do professor para a promoção do raciocínio matemático em aulas de cálculo diferencial e integral. *Educação e Pesquisa*, v. 49, p. e251659, 2023.

TREVISAN, André Luis; RIBEIRO, Alessandro Jacques; DA PONTE, João Pedro. Professional Learning Opportunities Regarding the Concept of Function in a Practice-Based Teacher Education Program. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, v. 15, n. 2, 2020.

TREVISOLLI, R. F. L.; TREVISAN, A. L.; VIEIRA, A. F. M.; ARAMAN, E. M. O. Oportunidades de aprendizagem profissional acerca do raciocínio matemático: um modelo para categorização. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos (RBEP)*, v. 106, p. 1-23, 2025.

VAN DEN AKKER, Jan. Curricular development research as specimen of educational design research. *Educational design research*, p. 53-70, 2013.

VITALINO, Gabriela da Silva Oliveira; TEIXEIRA, Bruno Rodrigo. Conhecimento Especializado do Professor de Matemática Manifestado a partir de Ações Formativas: um Levantamento Bibliográfico. *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 15, n. 37, p. 1-20, 2022.

WANG, Feng; HANNAFIN, Michael J. Design-based research and technology-enhanced learning environments. *Educational technology research and development*, v. 53, n. 4, p. 5-23, 2005.

APÊNDICES

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO DE CARACTERIZAÇÃO DO PARTICIPANTE

PREZADO (A) CURSISTA

Que satisfação tê-lo (a) fazendo parte desse grupo de estudos intitulado "COMPREENSÕES SOBRE OS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E AS CONTRIBUIÇÕES COM O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL". O principal objetivo é oportunizar aos professores que ensinam matemática momentos de discussão e reflexão sobre os processos de raciocínio matemático.

-> A carga horária certificada é de 40 horas, sendo composta por encontros síncronos quinzenalmente (20 horas), às quartas-feiras, das 19h00 às 21h30, e atividades assíncronas (20 horas). Nosso cronograma inicial prevê as seguintes datas de atividades síncronas: 01.03, 15.03, 29.03, 12.04, 26.04, 17.05, 31.05 e 14.06.

Para iniciarmos, queremos conhecer um pouco mais sobre você e assim, prepararmos encontros que possam oportunizar desenvolvimento profissional voltado à sua prática de ensino. Assim, preparamos esse questionário compondo uma primeira tarefa para contabilizar a carga horária assíncrona do grupo de estudos, para ser preenchido até o dia 26.02.

Qualquer dúvida durante o preenchimento, entre em contato.

Vamos lá!!!

TERMO DE CONSENTIMENTO PARA USO DE IMAGEM E SOM DE VOZ (TCUISV) PARA PROFESSORES

Título da pesquisa: Compreensões sobre os processos do raciocínio matemático e as contribuições com o desenvolvimento profissional

Pesquisador(es/as) ou outro (a) profissional responsável pela pesquisa, com Endereços e Telefones:

Eliane Maria de Oliveira Araman, Avenida Alberto Carazzai, 1640 CEP 86300-000 – Cornélio Procopio – Pr.

André Luis Trevisan, Avenida dos Pioneiros, 3131 CEP 86036-370 - Londrina – PR.

Local de realização da pesquisa: Modalidade Híbrida (tarefas síncronas e assíncronas) - Google Meet

A) INFORMAÇÕES AO PARTICIPANTE

Gostaríamos de convidá-lo (a) a participar da pesquisa “Compreensões sobre os processos do raciocínio matemático e as contribuições com o desenvolvimento profissional”, a ser realizada em aulas de matemática, da escola participante. As informações sobre a pesquisa seguem abaixo:

1. Apresentação da pesquisa.

Esta pesquisa visa o estudo de ambientes educacionais e tarefas exploratórias para o ensino e a aprendizagem matemática, pensado a partir de um conjunto de fatores, com potencial para

desenvolver o raciocínio matemático dos alunos e, em consequência disso, a aprendizagem matemática. Nosso propósito é caracterizar o raciocínio matemático e seus processos, pensar tarefas que o integre nas aulas de matemática, promover formação de professores que implementem tais ações em salas de aula e investigar dados oriundos das aulas resultantes desses processos.

2. Objetivos da pesquisa.

Promover discussões e reflexões envolvendo os processos de raciocínio matemático mediante as práticas de ensino de matemática, tendo-se como foco o desenvolvimento profissional por meio de algumas TAP (Tarefas de Aprendizagem Profissional).

3. Participação na pesquisa.

Sua participação é muito importante e ela se dará em dois momentos. O primeiro deles, em um curso de formação continuada que ocorrerá em 8 encontros síncronos de 2 horas e 30 minutos cada, pela plataforma Google Meet, conforme informações detalhadas no convite de divulgação. Nesse contexto, em alguns momentos de discussão entre os participantes, os dados serão coletados por meio de gravação em vídeo, e esse material ficará de posse exclusiva dos pesquisadores participantes do projeto para análise de dados ao longo dos anos de 2023 a 2026. Portanto, os participantes deverão manter câmera aberta e microfone quando necessário. Os pesquisadores usarão de instrumentos, como diário de campo, gravações em vídeo e coleta de protocolos escritos gerados durante a realização do curso de formação. Durante esses processos formativos, serão planejadas aulas que envolvem o trabalho com tarefas exploratórias, que poderão ser implementadas com alguma de suas turmas. Assim, um segundo momento, por iniciativa própria, você selecionará algumas das tarefas exploratórias desenvolvidas durante o curso de formação e irá aplicá-las juntos aos seus alunos. Caso isso ocorra, a equipe proponente, juntamente com a direção da escola, entrará em contato com os alunos e seus respectivos pais ou representantes legais, para esclarecê-las do projeto. A resolução das tarefas exploratórias será feita por todos os alunos da sua turma, uma vez que se trata de tarefas usuais que normalmente todos os alunos resolvem durante aulas de Matemática. Para os alunos que concordarem em participar da pesquisa, as resoluções escritas, feitas durante as aulas, no próprio caderno serão fotocopiadas pelos professores e comporão os dados a serem analisados pelos pesquisadores. Esse material ficará restrito aos pesquisadores envolvidos no projeto e serão analisados ao longo dos anos de 2023 a 2026.

4. Confidencialidade.

Seu nome não será divulgado de forma alguma. Suas informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar sua identidade.

5. Riscos e Benefícios.

5a) Riscos: Considera-se um risco mínimo de constrangimento durante a coleta de dados, podendo o participante optar por sua não participação na pesquisa, sem prejuízo pedagógico.

5b) Benefícios: Os benefícios esperados são de contribuir de forma significativa para a aprendizagem dos alunos e para a formação de professores, visto que envolve a implementação de tarefas exploratórias diferenciadas, que estimulam a participação ativa do aluno e desenvolvimento de habilidades como a formulação de hipóteses, a busca de soluções viáveis, o uso dos recursos com eficácia, a organização e o trabalho em grupos, enfim, vários

componentes que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

6. Critérios de inclusão e exclusão.

6a) Inclusão: Professores que, por iniciativa própria, inscreverem-se nos projetos de formação continuada acima mencionados; alunos desses professores, que, juntamente com seus responsáveis, autorizarem a coleta de dados durante as aulas (fotocópias do caderno com a resolução de tarefas).

6b) Exclusão: Não se aplica.

7. Direito de sair da pesquisa e a esclarecimentos durante o processo.

Esclarecemos que você pode deixar o estudo a qualquer momento assim como, pode solicitar esclarecimentos em qualquer etapa da pesquisa. Você tem a liberdade de recusar ou retirar o seu consentimento a qualquer momento sem penalização para seu aprendizado nem sua avaliação. Caso não deseje participar, ou interromper sua participação, você continuará participando das aulas normalmente, e não lhe serão tomadas fotos, gravações, áudios e nem seus apontamentos serão usados pelos pesquisadores.

2. Os resultados da pesquisa poderão ser de seu conhecimento, bastando fazer a manifestação de interesse:

Quero receber os resultados da pesquisa por e-mail.

Não quero receber os resultados da pesquisa.

8. Ressarcimento e indenização.

A pesquisas não tem custo para os participantes e, portanto, não inclui ressarcimento, mas esclarecemos que o direito à indenização é obrigatório, se eventualmente a pesquisa ocasionar algum tipo de dano ao participante, comprovado por meio de provas e meios legais.

B) CONSENTIMENTO

Eu declaro ter conhecimento das informações contidas neste documento e ter recebido respostas claras às minhas questões a propósito da minha participação direta (ou indireta) na pesquisa e, adicionalmente, declaro ter compreendido o objetivo, a natureza, os riscos, benefícios, ressarcimento e indenização relacionados a este estudo.

Após reflexão e um tempo razoável, eu decidi, livre e voluntariamente, participar deste estudo, permitindo que os pesquisadores relacionados neste documento obtenham **fotografia, filmagem ou gravação de voz** de minha pessoa para fins de pesquisa científica/ educacional. As fotografias, vídeos e gravações ficarão sob a propriedade do grupo de pesquisadores pertinentes ao estudo e sob sua guarda.

Concordo que o material e as informações obtidas relacionadas a minha pessoa possam ser publicados em aulas, congressos, eventos científicos, palestras ou periódicos científicos. Porém, não devo ser identificado por nome ou qualquer outra forma.

Estou consciente que posso deixar o projeto a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

Após reflexão e um tempo razoável, eu decidi, livre e voluntariamente, participar deste estudo.

3. Consentimento

- Estou ciente e quero participar desta pesquisa.
- Pular para a pergunta 4
- Não quero participar desta pesquisa.
- Pular para a seção 4 (Agradecemos sua participação!)

Para todas as questões relativas ao estudo ou para se retirar do mesmo, poderão se comunicar com Eliane Maria de Oliveira Araman, via email: elianearaman@utfpr.edu.br ou telefone: (43) 991453870.

ESCLARECIMENTOS SOBRE O COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA:

O Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos (CEP) é constituído por uma equipe de profissionais com formação multidisciplinar que está trabalhando para assegurar o respeito aos seus direitos como participante de pesquisa. Ele tem por objetivo avaliar se a pesquisa foi planejada e se será executada de forma ética. Se você considerar que a pesquisa não está sendo realizada da forma como você foi informado ou que você está sendo prejudicado de alguma forma, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (CEP/UTFPR). **Endereço:** Av. Sete de Setembro, 3165, Bloco N, Térreo, Bairro Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba-PR, **Telefone:** (41) 3310-4494, **e-mail:** coep@utfpr.edu.br.

Contato do Comitê de Ética em Pesquisa que envolve seres humanos para denúncia, recurso ou reclamações do participante pesquisado:

Comitê de Ética em Pesquisa que envolve seres humanos da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (CEP/UTFPR)

Endereço: Av. Sete de Setembro, 3165, Bloco N, Térreo, Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba-PR, **Telefone:** 3310-4494, **E-mail:** coep@utfpr.edu.br

Questionário de Caracterização

4. Nome completo:

5. RG:

6. Data de Nascimento:

7. Sexo:

Masculino

Feminino

8. Endereço Completo (Rua, número, Bairro, Cidade, Estado, CEP):

9. Formação (Marque todas que se aplicam):

Licenciatura em Matemática

Licenciatura em Pedagogia

Especialização na área da Educação/Ensino

Mestrado na área da Educação/Ensino

Doutorado na área da Educação/Ensino

Outro:

10. Qual o seu tempo de atuação como professor?

11. Qual ano/série você está trabalhando com a disciplina de Matemática em 2023?

12. Qual sua carga horária semanal?

13. Você gosta de ensinar Matemática?

Sim

Não

14. Conte-nos sobre suas experiências positivas e negativas ensinando Matemática:

15. Com que frequência você realiza o planejamento de suas aulas de Matemática:

Diariamente

Semanalmente

Quinzenalmente

Bimestralmente/Trimestralmente

16. Como você realiza o planejamento de suas aulas de Matemática?

Individualmente

Coletivamente

17. Durante o planejamento você discute com outros professores sobre o conhecimento matemático da sua turma?

Sim

Não

18. Ao escolher as tarefas matemáticas propostas aos seus alunos, você antecipa estratégias de resolução e possíveis dificuldades? Conte um pouco a respeito.

19. Durante as práticas de ensino de Matemática, quais recursos pedagógicos você utiliza em sala de aula? (Marque todas que se aplicam)

Livro didático

Material manipulável

Atividades retiradas de páginas da internet

Atividades retiradas de artigos científicos ou produtos educacionais

Celular ou tablet

Jogos

Calculadoras

Anotações no caderno

Computadores

Outro:

20. Durante as práticas de ensino de Matemática, você propõe a realização de tarefas em grupos? Conte um pouco a respeito dessa prática.

21. Durante as práticas de ensino de Matemática, você oportuniza momentos para os alunos expressarem os seus entendimentos e compreensões sobre as tarefas? Conte um pouco a respeito.

22. Você considera que as atividades matemáticas que você propõe, envolvem com mais frequência:

- Resolução de exercícios de fixação do conteúdo
- Resolução de problemas
- Resolução de tarefas exploratórias (investigação matemática)

23. Você já ouviu falar a respeito de “Ensino exploratório”?

- Sim
- Não

24. Você já fez algum curso ou estudo envolvendo o tema “Processos de Raciocínio Matemático”?

- Sim
- Não

APÊNDICE B – EXPLICAÇÃO DETALHADA DOS ENCONTROS

No primeiro encontro foi realizada a apresentação dos formadores e dos participantes, dedicados momentos de discussões individuais e coletivas sobre os aspectos gerais do RM, considerando os conhecimentos prévios dos professores e as primeiras experiências com o tema. Para engajar os participantes na discussão, inicialmente foi disponibilizado um link via chat no *Google Meet* do *Padlet*⁹ solicitando que a partir de uma palavra por eles escolhida, destacassem a expectativa ao participar do processo formativo. Após discutir sobre os interesses de cada um, os formadores continuaram com a apresentação da dinâmica e cronograma dos encontros.

Para dar início aos estudos teóricos, foi enviado via chat do *Google Meet* um link do *Google Forms* para que os professores respondessem alguns questionamentos sobre as primeiras impressões do RM (Apêndice B). Cada professor apresentou suas impressões prévias sobre o tema, que em seguida geraram discussões entre todos os participantes, evidenciando diferentes motivações e impressões de cada um.

Após o momento de reflexão sobre percepções individuais, os professores foram divididos em quatro grupos, para conhecer e discutir uma tarefa matemática (Quadro 10) (Apêndice C) que envolvia o cálculo de área e perímetro com utilização do Geoplano (Morais, 2022).

Quadro 10: Tarefa Matemática – cálculo de área e perímetro

| | | | |
|--|------------------|---------------------|----------------------|
| Renato tem um geoplano e gosta de construir figuras geométricas nele. Mas agora, ele tem algumas questões para resolver utilizando o geoplano. Vamos ajudá-lo? | | | |
| Renato formou no geoplano um quadrado com área 9 cm^2 e precisa encontrar o perímetro, depois preencher a tabela abaixo: | | | |
| | Figura 1 | Figura 2 | Figura 3 |
| Área | 9 cm^2 | O dobro da figura 1 | O triplo da figura 1 |
| Perímetro | | | |

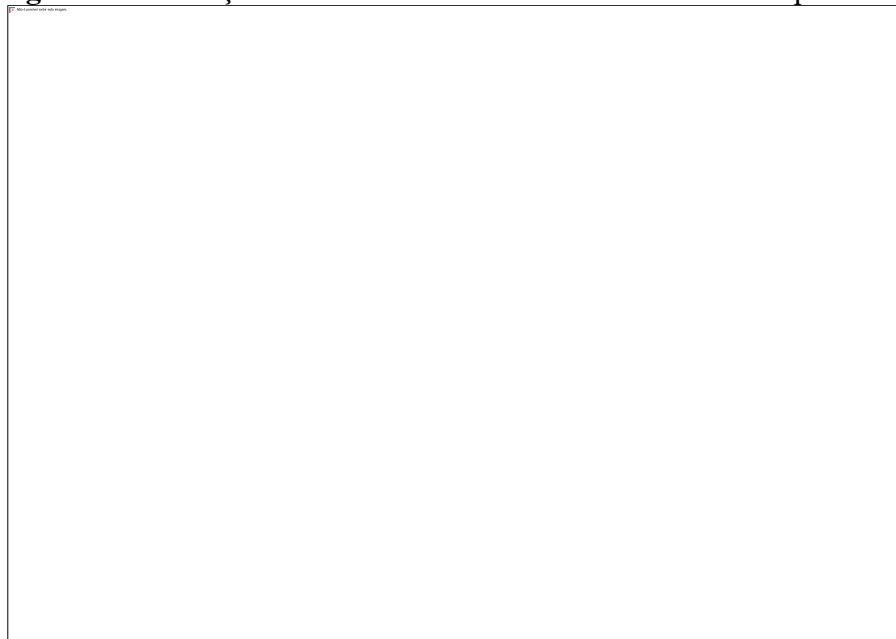
Fonte: Adaptado de Moraes (2022).

Após elaborar uma resolução para tarefa, os professores, organizados em pequenos grupos, estudaram a resolução realizada por uma dupla de estudantes do 5º ano da tarefa Matemática (Quadro 10). A partir das discussões entre os grupos, e com os formadores, o encontro continuou com a apresentação dos pressupostos teóricos do RM, algumas definições do RM (Jeannotte; Kieran, 2017; Stylianides, 2009; Mata-Pereira; Ponte, 2018; Lannin; Ellis;

⁹ “O Padlet é uma ferramenta online que permite a criação de um mural ou quadro virtual dinâmico e interativo para registrar, guardar e partilhar conteúdos” (Secretaria Geral de Educação a Distância da Universidade Federal de São Carlos, p. 2, 2018). Disponível em: <https://inovaeh.sead.ufscar.br/wp-content/uploads/2019/04/Tutorial-Padlet.pdf>. Acesso em ago. 2023.

Elliot, 2011; Morais; Serrazina; Ponte, 2018) e os entendimentos essenciais que seriam trabalhados nos próximos encontros.

Figura 8: Resolução da tarefa matemática – cálculo de área e perímetro

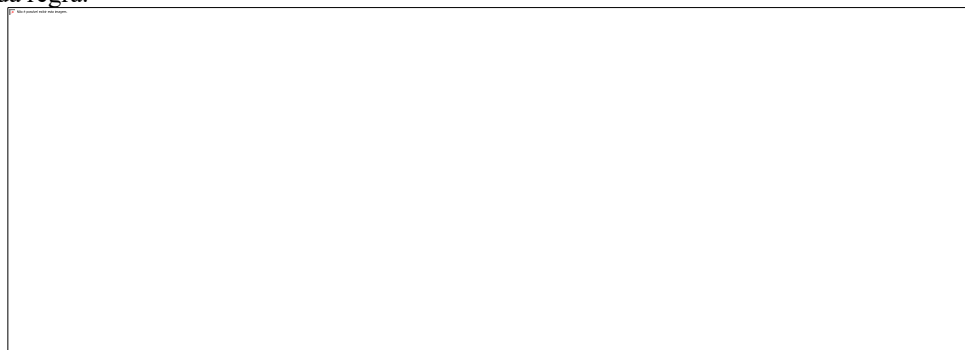


Fonte: Autoria própria (2023).

Entre o encontro 1 e o 2, foi enviado via e-mail, e colocado no grupo de WhatsApp a segunda TAP assíncrona (Apêndice D), a tarefa matemática dos azulejos brancos e cinzentos (Figura 8). Essa tarefa deveria ser enviada para os formadores antes do segundo encontro, para compor a continuidade no planejamento.

Figura 9: Tarefa Matemática Azulejos brancos e cinzentos

Observe a seguinte sequência de figuras, onde estão empilhados azulejos brancos e cinzentos, seguindo uma determinada regra.



a) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a **Figura 5**. Explique como você obteve cada resultado.

I. Número de azulejos brancos: _____

II. Número de azulejos cinzentos: _____

III. Número total de azulejos: _____

b) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a **Figura 10**. Explique como você obteve cada resultado.

I. Número de azulejos brancos: _____

II. Número de azulejos cinzentos: _____

III. Número total de azulejos: _____

c) Considerando a regularidade da sequência de figuras, qual figura terá um total de **38 azulejos**? Explique a sua resposta.

d) Considerando a regularidade da sequência de figuras, existe alguma figura com um total de **66 azulejos**? Explique a sua resposta.

e) Com base na observação da sequência de figuras, construa uma sequência numérica com **10 termos**. Explique qual regularidade você utilizou para escrever a sequência numérica e qual cálculo realizou para obter cada termo da sequência.

Os encontros 2, 3 e 4 foram dedicados para apresentação dos aportes teóricos do RM a contar do primeiro capítulo do livro “*Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning for Teaching Mathematics*”, tradução nossa como “Desenvolvendo entendimentos Essenciais do Raciocínio Matemático para o Ensino de Matemática” dos autores Lannin, Ellis e Elliott (2011). Nestes três encontros, foram realizados estudos e discussões a respeito da importância e dos processos do RM, bem com os seus 9 entendimentos essenciais sugeridos pelos autores. Dentre as discussões, foram realizadas práticas individuais e/ou coletivas que evidenciassem o entendimento com o propósito de possibilitar aos participantes a compreensão de cada um deles de maneira teórico-prática, evidenciando em registro de práticas de estudantes como eles poderiam ser identificados ou quando não eram elucidados.

Mais especificamente, no segundo encontro discutiram-se os entendimentos essenciais 1, 2, 3 e 4. Entre as explanações, foi disponibilizado um momento prático envolvendo resoluções da tarefa matemática dos azulejos, realizadas por estudantes do 5º ano (Anjos, 2023). Uma primeira TAP, enviado via *Google Forms* (Apêndice E), envolveu os entendimentos 1 e 2, com o objetivo de verificar se um estudante apresentou alguma conjectura ou generalização, com base em um registro de prática Tarefa Matemática Azulejos brancos e cinzentos. Em uma segunda TAP, agora com foco nos entendimentos 3 e 4 foram analisadas transcrições de áudio e registros escritos de outro estudante do 5º ano.

No intervalo dos encontros 2 e 3, foi solicitado aos participantes do processo formativo para que respondessem a terceira TAP assíncrona (Apêndice G). Nela constava a análise de uma conjectura e as justificativas de três alunas sobre o porquê das frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ serem equivalentes (Lannin; Ellis; Elliott, 2011, p. 36), elementos introdutórios para os entendimentos que seriam discutidos no encontro 3.

Ao iniciar o encontro 3, foi enviado o link de *Padlet* solicitando para que os participantes escrevessem como identificar conjectura e generalização. Os professores registraram seus conhecimentos e o formador conduziu o encontro lembrando os entendimentos essenciais estudados anteriormente. Após algumas discussões, o formador apresenta os entendimentos 5 e 6 para serem discutidos a partir da Figura 16.

Figura 16: Tarefa Matemática sequência de triângulos

Fonte: Autoria própria (2023).

Foi dedicado um tempo para que os professores analisassem individualmente a sequência de figuras (Figura 16) e pensassem nas possíveis generalizações que poderiam ser elaboradas.

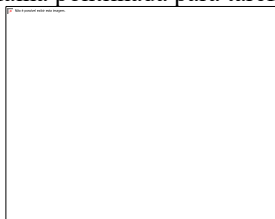
Na continuidade, foi proposta uma TAP que explorou justificativas de dois estudantes acerca de uma tarefa exploratória de cálculo de área e perímetro com auxílio do Geoplano (Figura 16 e 9).

Figura 9: Tarefa Matemática envolvendo cálculo de área e perímetro

Renato tem um Geoplano e gosta de construir figuras geométricas nele. Mas agora ele tem algumas questões para resolver utilizando seu Geoplano. Vamos ajudá-lo?

- 1) Construa no Geoplano um retângulo e um quadrado e depois desenhe na malha pontilhada.
 - a) O que você pensou para formar esses polígonos? Explique.
- 2) Construa várias figuras com o perímetro igual a 8 cm. Todas as figuras têm a mesma área? O que você pode concluir?

Malha pontilhada para tarefa 1



Fonte: Morais (2022).

Figura 18: Registros de Prática da tarefa Matemática envolvendo cálculo de área e perímetro

Resolução alternativa a:

Explicação do estudante: NÓS PENSAMOS QUE SE COLOCASSE OS ELÁSTICOS FORMARIA OS POLÍGONOS, E FORMARIA UM RETÂNGULO E UM QUADRADO QUE SÃO OS POLÍGONOS.

Resolução alternativa b:

Explicação do estudante: NÃO, EU POSSO CONCLUIR QUE TEM TODOS OS PERÍMETROS IGUAIS.

Fonte: Morais (2022).

Após as discussões, um dos formadores continua o encontro apresentando os principais aspectos de acordo com Lannin, Ellis e Elliot (2011) sobre o entendimento essencial 5. Para completar este momento, o formador apresentou algumas resoluções que os professores haviam apresentado acerca da TAP assíncrona 3 (Apêndice G), sobre as conjecturas de Maria. Um novo momento de discussões coletivas foi oportunizado aos professores.

Como preparação para o encontro seguinte, foi enviado o link do *Google Forms*, via e-mail e WhatsApp, da TAP assíncrona número 4 (Apêndice I), onde constavam mais resoluções sobre a Tarefa Matemática Azulejos brancos e cinzentos. Especificamente, questionava-se se, a partir da regularidade da sequência, existiria alguma figura com um total de 66 azulejos. Também, como preparação para o encontro 4 foi proposta a TAP assíncrona 5 (Apêndice J), solicitando aos professores que enviassem um arquivo (via *Google Forms*) de uma tarefa Matemática que reconhecessem com potencial para o desenvolvimento do RM, discutindo sobre os entendimentos essenciais que poderiam estar envolvidos na resolução.

No início do encontro 4, a TAP assíncrona número 4 (Apêndice I) foi colocada em discussão entre os participantes, para depois iniciar as explicações acerca dos entendimentos essenciais 7, 8 e 9. Para exemplificar e discutir sobre o entendimento essencial 7 e 8, foi perguntado aos professores sobre a elaboração de duas conjecturas discutidas por Lannin, Ellis e Elliott (2011) e algumas justificativas apresentadas pelos mesmos autores. Uma das justificativas foi colocada para estudo individual em arquivo do *Google Forms* (Apêndice K), compreendendo a TAP síncrona número 6.

Após apresentar os aspectos principais do entendimento essencial 9, a TAP síncrona 7 (Apêndice L) foi disponibilizada, e os professores foram convidados a retornarem na definição dos entendimentos essenciais 6, 7, 8 e 9 e comentarem sobre os registros de práticas (áudio e registro escrito) de um estudante, quando resolvia a tarefa matemática azulejos brancos e cinzentos, especialmente na questão que solicitava para encontrar a figura com 38 azulejos.

Como fechamento dos estudos sobre os pressupostos teóricos sobre o RM, seus processos e entendimentos, foi realizado com os professores um jogo na plataforma *Kahoot*¹⁰ com *quiz* verdadeiro ou falso (Apêndice N), com intenção de retomar conceitos e proporcionar um momento de descontração no grupo.

Nos encontros 5, 6, 7 e 8 o foco foi a etapa do planejamento do ciclo PDR (Trevisan; Ribeiro; Ponte, 2020), proposto com o intuito de oportunizar aos professores a realização do planejamento de aula a partir da escolha de uma tarefa matemática com potencial para o desenvolvimento do RM, o desenvolvimento com suas turmas e posteriormente a reflexão da implementação. Os professores sugeriram tarefas matemáticas e foram convidados a planejar a aula em grupo organizados de acordo com o nível de ensino em que atuavam.

¹⁰ Plataforma de aprendizagem *gamificada* com opções de criação de perguntas com diferentes formas de respostas.

O encontro 5 foi utilizado para apresentar para os participantes como planejar uma aula, o que envolve o ciclo PDR (Trevisan, Ribeiro e Ponte, 2020), a importância das discussões matemáticas, o modelo de cinco práticas sugeridas por Stein *et al.* (2008): antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar e fazer conexões entre as respostas dos estudantes; e por fim, a proposta do planejamento de aula seguindo os passos direcionados por Serrazina (2017) e sistematizados em trabalhos desenvolvidos no grupo de pesquisas *Formação Matemática para o Ensino: conhecimento profissional docente e desenvolvimento curricular* (ForMatE)¹¹.

- ✓ 1º Passo - Escolher uma boa tarefa e, ao mesmo tempo, os entendimentos essenciais que pretendem explorar;
- ✓ 2º Passo - A partir da tarefa escolhida e, considerar os entendimentos essenciais, estabelecendo as habilidades que pretende desenvolver;
- ✓ 3º Passo – Buscar antecipar as dificuldades dos estudantes e suas possíveis estratégias de resolução para a tarefa;
- ✓ 4º Passo - Antecipar possíveis perguntas do professor e respostas dos estudantes;
- ✓ 5º Passo - Definir quais recursos (materiais e didáticos) serão necessários para a realização da aula; utilizar o questionamento como apoio à aprendizagem dos estudantes; estabelecer que os estudantes trabalhem em grupo;
- ✓ 6º Passo – Preparar, além da antecipação já realizada no 3º e 4º passos, as demais práticas propostas por Stein e colaboradores (2008): estratégias para monitoramento, seleção, sequenciamento e conexões entre respostas dos estudantes;
- ✓ 7º Passo - Preparar o material a ser entregue impresso aos estudantes.

Apresentadas os aspectos teóricos e elementos condutores para a elaboração da aula (Apêndice M), que foi inspirado na etapa de planejamento (P) do ciclo PDR (Trevisan, Ribeiro e Ponte, 2020) os professores foram separados em grupos, de acordo com o nível de ensino para elaborarem a tarefa. Foram criados 3 grupos, sendo: 1) dos professores que lecionavam nos anos iniciais do Ensino Fundamental; 2) dos professores que lecionavam nos anos finais do Ensino Fundamental; e 3) dos professores que lecionavam no Ensino Médio. A partir desses grupos, foi realizado o planejamento da aula a partir da tarefa escolhida, bem como a antecipação de como seria implementada com as turmas.

¹¹ Grupo de pesquisa credenciado no CNPq. Disponível em: <http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/8814738426604861>. Acesso em set. 2023.

Nos encontros 6 e 7, os participantes tiveram a oportunidade de apresentar a tarefa planejada e a colaborar com as tarefas organizadas pelos colegas, sugerindo ideias a partir de seus conhecimentos e de suas experiências, desde a apresentação da tarefa, o objetivo da aula como também a antecipação das resoluções. Esses momentos foram potencializadores da aprendizagem dos professores, pois oportunizaram compartilhar experiências a partir de sua prática de sala de aula.

Após o sétimo encontro, foi destinado aos participantes um tempo de 30 dias para desenvolvimento da aula. Para a aplicação, foi pedido aos professores que organizassem a sala para que fosse possível realizar gravações em vídeo e áudio, tanto da apresentação inicial da tarefa matemática para toda turma, quanto das discussões dos estudantes em pequenos grupos quanto da plenária. Nessa etapa, os formadores acompanharam as aulas de alguns dos professores, dando suporte com equipamentos e materiais necessários, e realizando a coleta de registros de prática (vídeo, áudio e registros escritos). Os formadores se debruçaram no estudo e análise dos materiais e organizaram duas TAP, que foram aplicadas nos encontros 8 e 9.

Após essa etapa, os encontros síncronos foram retomados para a realização da reflexão das aulas (o R do ciclo PDR). Nestes encontros, foram estudadas e discutidas as TAPs síncronas 9 (Apêndice O) e 10 (Apêndice P). Os registros de prática das tarefas aplicadas pelos professores foram organizados pelos formadores e nas duas últimas TAPs síncronas os participantes estudaram três momentos importantes, sendo: (I) a apresentação da tarefa pela professora; (II) as discussões em pequenos grupos; e (III) a discussão em plenária.

Para encerramento do processo formativo, após os 9 encontros, foi solicitado para os professores que respondessem um questionário de finalização, com objetivo de pontuar sugestões, conclusões e aprendizagens observadas por eles que ocorreram durante a participação no grupo de estudos, o questionário foi o seguinte:

Quadro 16: Questionário de finalização do processo formativo

GE - Avaliação da formação

PREZADO(A) CURSISTA

Nossa caminhada no grupo de estudos intitulado "COMPREENSÕES SOBRE OS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E AS CONTRIBUIÇÕES COM O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL" está chegando ao fim. Nosso principal objetivo foi oportunizar a vocês, professores que ensinam matemática, momentos de discussão e reflexão sobre os entendimentos essenciais do raciocínio matemático. Para entender se os objetivos planejados foram alcançados, gostaríamos de saber um pouco sobre a sua experiência na participação deste projeto.

* Indica uma pergunta obrigatória

1. E-mail *
2. Nome completo *
3. CPF *
4. Qual nome fictício você gostaria de ter nos registros da pesquisa? *
5. Em que aspectos as suas expectativas para o grupo de estudos foram alcançadas? *
6. Quais experiências vivenciadas ao longo do curso puderam contribuir para você repensar aspectos de sua prática letiva? *
7. Que impactos em sua prática percebe que ocorreu a partir das discussões ocorridas no curso?
8. A partir do que foi discutido no curso, de que forma sua compreensão a respeito dos processos do raciocínio matemático foi modificada? *
9. Como a maneira como foram apresentados e discutidos os entendimentos essenciais do raciocínio matemático pode vir a influenciar a sua prática letiva? *
10. Indique os três principais pontos positivos e os três principais pontos negativos que você vivenciou ao longo do curso? *

Sua participação foi muito importante para nós! Sintam-se abraçadas!

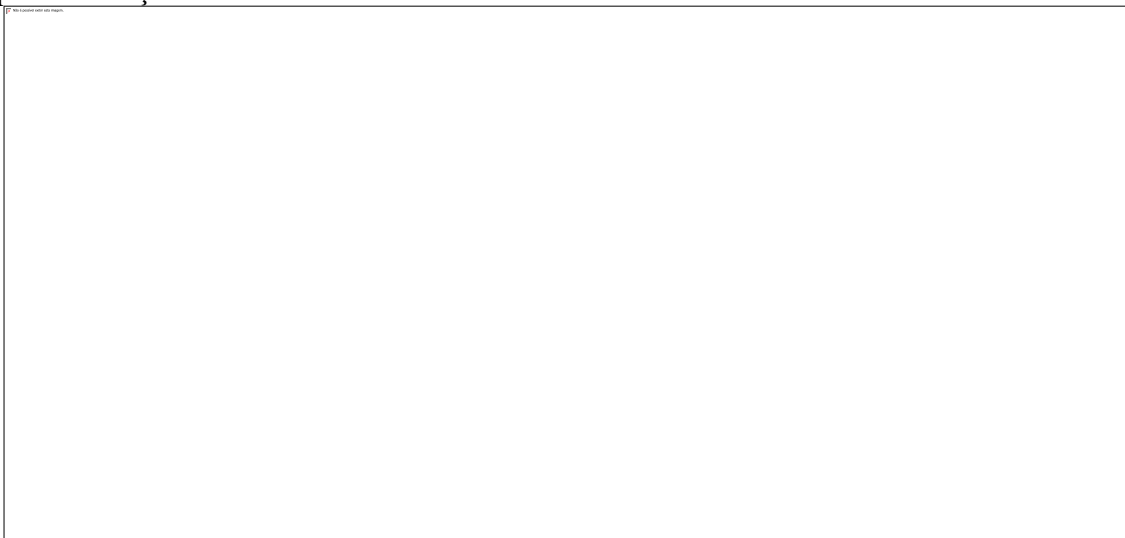
Fonte: Autoria própria (2023).

**APÊNDICE C – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 1 –
PRIMEIRAS IMPRESSÕES**

- 1) Como você explicaria o que é raciocínio matemático?**
- 2) Que elementos você considera importante para compreendermos o RM de estudantes?**
- 3) Que tipos de tarefas você considera que podem contribuir para o desenvolvimento do RM dos estudantes?**
- 4) Em que você se baseou para responder às questões anteriores (lembranças enquanto estudante, experiência em sala de aula, estudos teóricos, palestras, etc)?**

**APÊNDICE D – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 2 –
RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E AS TAREFAS**

1. Resolva a tarefa matemática a seguir, discutindo com seu grupo possíveis estratégias para resolução.



A tarefa que você resolveu foi proposta a uma turma do 5º ano. A partir de um trecho de discussão da dupla Bruno e Maria, e da análise do registro escrito entregue à professora, o que podemos dizer sobre o raciocínio matemático desses estudantes? Discuta com seu grupo.

Transcrição de áudio envolvendo a resolução da tarefa matemática.

(Obs.: F1 significa Fala1, F2 significa Fala 2, ...)

F1 - Bruno: Tarefa 3. 1 Renato formou no geoplano um quadrado com área 9 cm^2 e precisa encontrar o perímetro. Depois preencher a tabela abaixo. Tá.

F2 - Maria: Então significa que cada quadrado é 1 centímetro, né?

F3 - Bruno: É. Então, a gente tem que fazer um de 9.

F4 - Maria: Sim, assim?

F5 - Bruno: Não, mais aí tem? Espera. A precisa fazer 5 mais 4.

F6 - Maria: Pronto. Aí, fiz um quadrado, 3 por 3.

F7 - Bruno: [contando os quadradinhos] 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Então vai ser esse [referindo-se a construção do quadrado no geoplano].

F8 - Maria: O perímetro vai ser? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. [contando os segmentos que formam o quadrado de 9 cm^2 no geoplano].

F9 - Bruno: Tá, então 12. Agora, tem que fazer o dobro. Vai ser 24, o dobro.

F10 - Maria: Tá, aqui ele tá pedindo o perímetro e o dobro da área da figura abaixo.

F11 - Bruno: Tem que fazer os cálculos aqui, né? Mas, [pausa pensando] 18!

F12 - Maria: Não! Não pode ser 18!

F13 - Bruno: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 [contando no quadrado do geoplano].

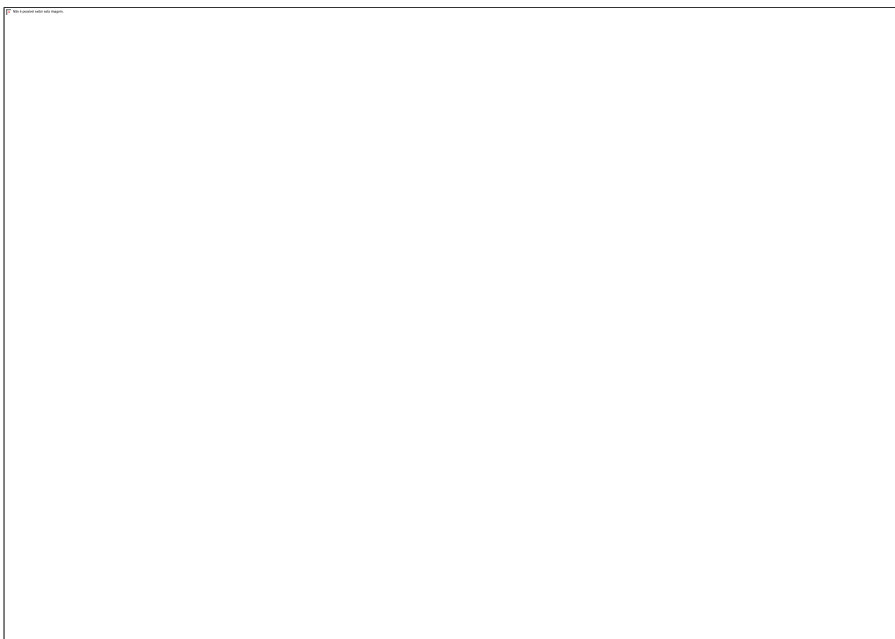
F14 - Maria: Espera!! 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24. Ué que está acontecendo. Não dá? Vamos colocar 24, porque o dobro de 12 é 24.

F15 - Bruno: Ué, vai que assim vai.

F16 - Maria: Acabei de entender o porquê de não está indo, tá vendo que aqui quando a gente faz isso, o que está aqui no meio não fica, 18, 19, 20, 21 e não dá certo de novo, do mesmo

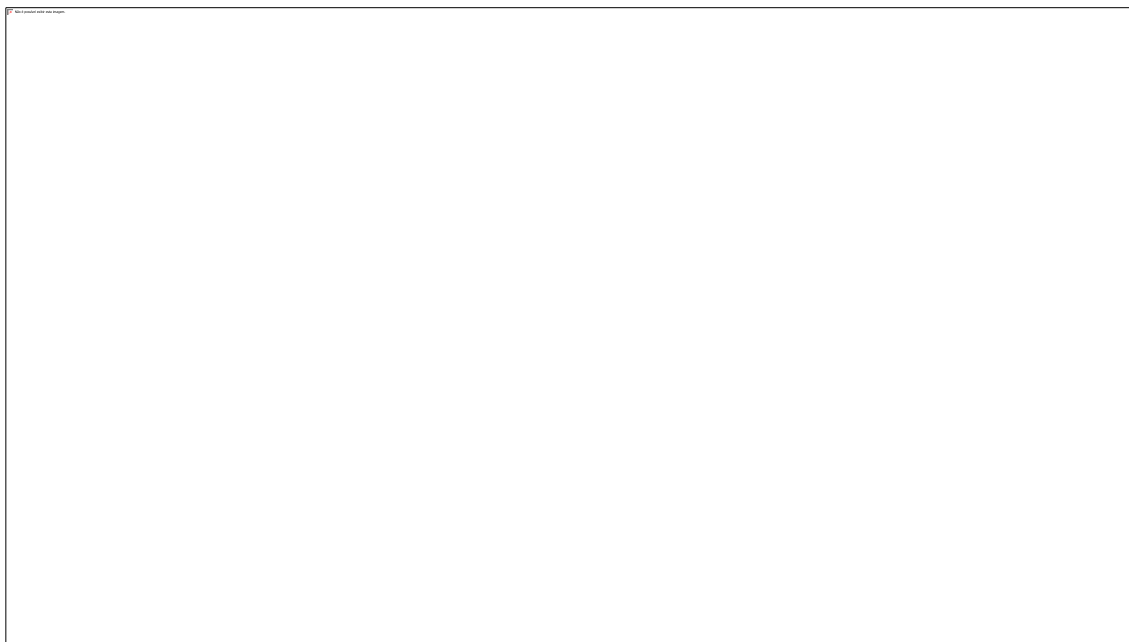
jeito. [manuseando o elástico] 22, 23, 24 ... É isso! Fica olhando. Se eu fazer uma [manuseando o elástico], agora conta.

F17 - Bruno: Tem que contar o do meio.



APÊNDICE E – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL ASSÍNCRONA 2 – TAREFA MATEMÁTICA

1. Observe a seguinte sequência de figuras, onde estão empilhados azulejos brancos e cinzentos, seguindo uma determinada regra.



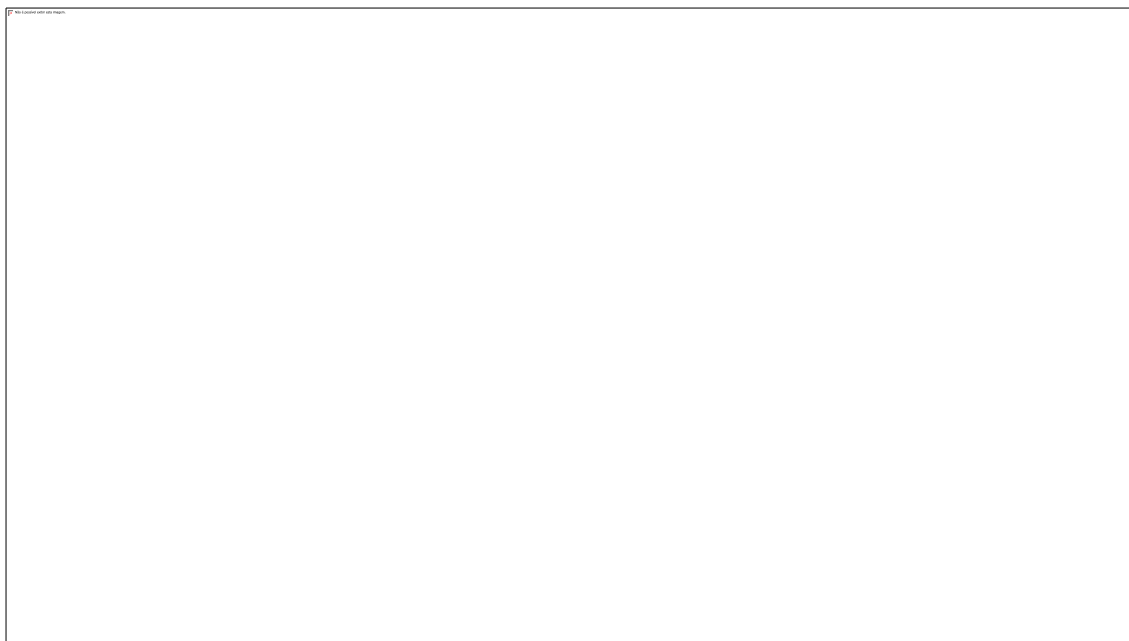
- a) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a **Figura 5**.

I. Número de azulejos brancos: _____

II. Números de azulejos cinzentos: _____

III. Números total de azulejos: _____

2. Explique como você obteve cada resultado do item a. Se você pensar em mais de uma maneira de explicar, apresente-as, usando palavras, desenhos, escrevendo fórmulas ou qualquer outro tipo de registro (pode enviar a foto dos seus registros). *
3. Observe a seguinte sequência de figuras, onde estão empilhados azulejos brancos e cinzentos, seguindo uma determinada regra.



4.

b) Indique o número de azulejos de cada cor e o número total de azulejos para construir a **Figura 10**.

I. Número de azulejos brancos: _____

II. Números de azulejos cinzentos: _____

III. Números total de azulejos: _____

5. Explique como você obteve cada resultado do item b. Se você pensar em mais de uma maneira de explicar, apresente-as, usando palavras, desenhos, escrevendo fórmulas ou qualquer outro tipo de registro (pode enviar a foto dos seus registros).

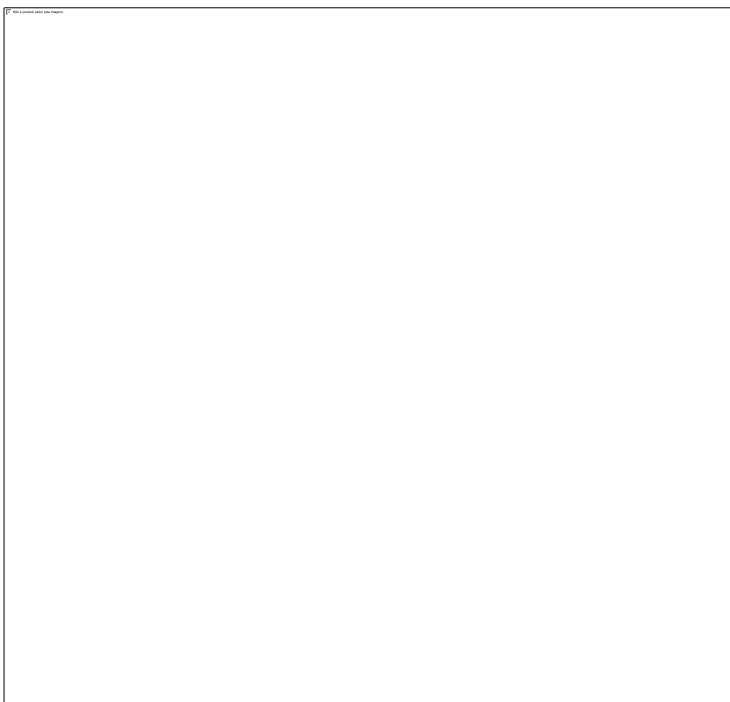
6. Escreva a respeito do potencial dessa tarefa para o desenvolvimento, ou não do raciocínio matemático.

**APÊNDICE F – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 3 –
ANÁLISE DE REGISTROS DE PRÁTICA**

Registro de prática 1 - Resolução da tarefa realizada por um aluno do 5º ano.

Descrição do aluno: *Deu oito Porque quatro mais quatro dá oito. Por que não dá outro resultado e trinta deu trinta Por que o número de azulejos deu a quantidade trinta.*

E deu trinta e oito porque contado os dois dá essa quantidade.

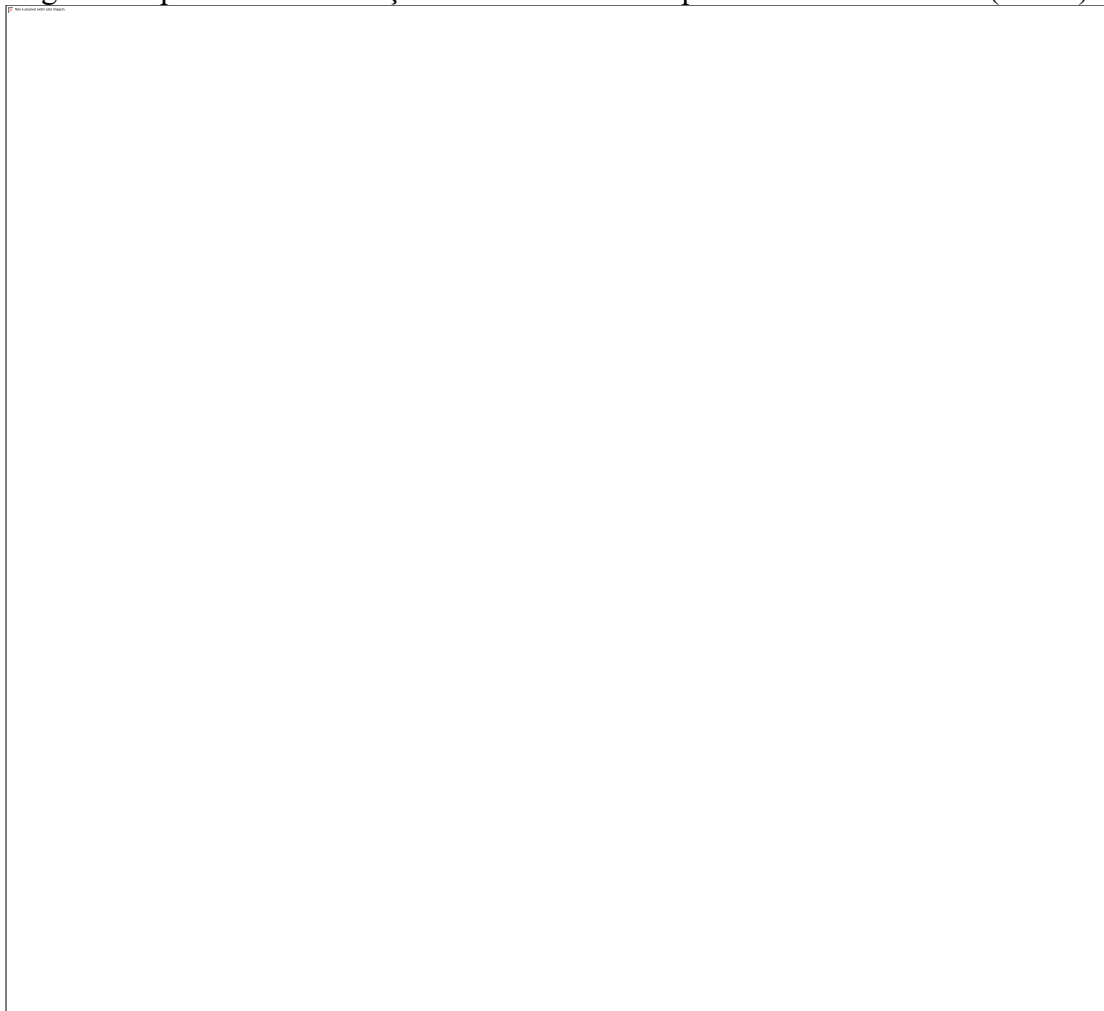


1. Analisando o registro escrito do aluno, você diria que ele conseguiu explicar o pensamento utilizado na resolução? Justifique.
2. O aluno apresentou alguma conjectura? Explique.
3. O aluno realizou alguma generalização? Explique.

**APÊNDICE G – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 4 –
ANÁLISE DE REGISTROS DE PRÁTICA**

Considere os protocolos dos alunos A e B, e também a transcrição da explicação do aluno B sobre a sua resolução. Para o aluno A, é o total de azulejos da Figura 5, e para o aluno B, é o total de azulejos da Figura 10. Discuta com o seu grupo as seguintes questões:

Registro de prática 2 - Resolução da tarefa realizada por um aluno do 5º ano (item a).



Transcrição de áudio (2) de dois alunos 5º ano - Discussão sobre a tarefa (item a).

F1 - Aluno 1: Aqui fala que ele segue uma determinada regra. Mas eu não sei que regra é essa?

F2 - Aluno 2: O que você acha que é?

F3 - Aluno 1: Eu acho que deve ter algum padrão.

F4 - Aluno 2: Tá bom, eu acho que tem que montar uma figura.

F5 - Aluno 1: Espera aí. Olha! Aluno 2 observa a figura número um e a número dois. A número dois tem quantos azulejos cinzentos?

F6 - Aluno 2: um, dois, três, quatro, cinco, seis.

F7 - Aluno 1: E qual é o divisor por 2 de 6.

F8 - Aluno 2: 3.

F9 - Aluno 1: E qual é o número de azulejos cinzentos que estão na primeira imagem?

F10 - Aluno 2: 3!

F11 - Aluno 1: Talvez essa seja a regra ou algo do tipo.

F12 - Aluno 2: Não sei! Não estou entendendo nada!

F13 - Aluno 1: *[contando] um, dois, três, quatro, cinco, um, dois, três, um, dois, três, um, dois, três, um, dois, três, um, dois, três, um, dois, três. Todas as quatro figuras.*

F14 - Aluno 2: *Tem mais três aqui.*

F15 - Aluno 1: *É! Só não sei qual é o significado dos azulejos brancos.*

F16 - Aluno 2: *Mas esse aqui é branco.*

F17 - Aluno 1: *Eu não sei.*

[chamam o professor]

F18 - Aluno 2: *Professor!*

F19 - Aluno 1: *Esses azulejos aqui não conta?*

F20 - Professor: *Mas você não quer saber a quinta figura?*

F21 - Aluno 1: *Aham.*

F22 - Professor: *Então, isso aqui vai te ajudar na quinta figura?*

F23 - Aluno 1: *Vai.*

F24 - Aluno 2: *É porque esse aqui começa a subir mais três.*

F25 - Professor: *Ah! O que acontece?*

F26 - Aluno 2: *Um, dois, três.*

F27 - Aluno 1: *De três em três.*

F28 - Aluno 2: *Um, dois, três, quatro, cinco.*

F29 - Professor: *De três em ...?*

F30 - Aluno 1: *Em três.*

Registro de prática 3 - Resolução da tarefa realizada por um aluno do 5º ano (item b)



Transcrição de áudio (3) de um aluno do 5º ano - discussão sobre a resolução da tarefa (item b):

F1- Professor: *O que vocês pensaram?*

F2- Aluno: *Eu pensei o seguinte, já que aqui, já que cinco, já que isso aqui é a figura 5 e que a metade daqui a figura 5 é metade do que 10, certo?*

F3- Professor: *Isso.*

F4- Aluno: *Então, eu fiz essa resposta mais, mais essa resposta. Que é tipo, esse aqui, mais este aqui. Que vai ficar 10. Ai eu fiz, 15 mais 15 aí ficou 30. Já que esse aqui é 10, esse aqui é*

a metade, vai ter que somar duas vezes esse aqui para ficar 10. Então, tem que somar duas vezes esse aqui para ficar o resultado dela.

F5- Professor: Somar duas vezes o quê?

F6- Aluno: Os azulejos cinzentos, já que o branco fica parado, esse aqui mexe porque fica de três em três, então vai ficar 30. Por causa que 10 é a metade do que 5, e 5 mais 5 é 10, então tem que somar este aqui mais esse aqui que vai ficar 10.

F7- Professor: Ah!!! Muito legal, bacana. Gostei.

1. Analisando esses registros você diria que os alunos conseguiram explicar o raciocínio? Justifique.
2. Que conjectura (s) cada um desses alunos apresentou?
3. Esses alunos realizaram alguma generalização? Se sim, ela é válida em qual domínio? Ela pode ser estendida para além do domínio em que se originou? Discuta a respeito.
4. Sobre o entendimento essencial 4, "conjeturar e generalizar envolve o uso e o entendimento do significado de termos, símbolos e representações". O que podemos dizer sobre esse uso e entendimento nos registros de prática analisados?

**APÊNDICE H – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL ASSÍNCRONA 3 –
CONJECTURA DE MARIA E JUSTIFICATIVAS DE AMANDA, BIANCA E CARLA
(LANNIN; ELLIS; ELLIOTT, 2011)**

A tarefa a seguir mostra como Maria, uma estudante do 3º ano, analisou uma relação que ela descobriu ao multiplicar dois números inteiros:

Eu multipliquei 3×5 e percebi que o resultado é um a menos que o resultado da multiplicação de 4×4 . Tentei isso com outros números, e parece funcionar para todos.

$4 \times 6 = 24$, o resultado é um a menos de $5 \times 5 = 25$

$7 \times 9 = 63$, o resultado é um a menos de $8 \times 8 = 64$

$6 \times 8 = 48$, o resultado é um a menos de $7 \times 7 = 49$

1. Como você descreve a generalização que Maria realizou? Utilize termos, símbolos e representações que julgar adequado.
2. Por que a generalização de Maria é verdadeira? Elabore argumentos para justificá-la.

Considere as justificativas fornecidas por Amanda, Bianca e Carla explicando o porquê das frações $3/4$ e $6/8$ serem equivalentes.

Amanda: para mostrar que duas frações são equivalentes, olhamos para o $3/4$ e $6/8$. Três quartos é equivalente a $6/8$ porque se pode dividir o numerador e denominador de $6/8$ por 2, fazendo de $3/4$ o mesmo número que $6/8$. Pode fazer isto para duas frações quaisquer.

Bianca: duas frações são equivalentes quando se pode dividir uma fração por algo para fazer a outra fração. Três quartos é equivalente a $6/8$ porque se pode dividir $6/8$ ao meio para fazer $3/4$. Olha a minha fotografia [aponta para um desenho] quando $6/8$ é dividido por 2 ou cortado ao meio é o mesmo que $3/4$.

Carla: Três quartos é equivalente a $6/8$ porque se desenhar ambos os quadros, pode ver-se que dois dos oitavos são o mesmo que um quarto. Assim, pode-se ver que o $3/4$ sombreado é o mesmo que o $6/8$. Veja a minha fotografia [aponta para o desenho]. Para frações equivalentes, pode sempre dividir partes para generalizar a mesma fração. Por exemplo, $2/3$ é o mesmo que $6/9$ porque se pode dividir cada um dos terços em três partes, fazendo nonos.

Justificativa de Bianca

Justificativa de Carla



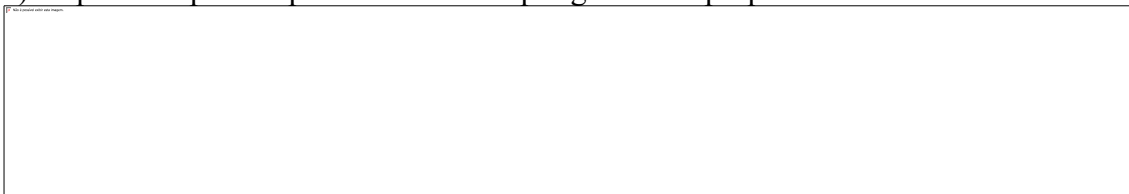
3. De acordo com as justificativas apresentadas pelos alunos, quais delas você vê como válidas? E quais você julga ser inválidas? Como as justificações inválidas poderiam ser melhoradas para que se tornem válidas?

**APÊNDICE I – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 5 –
ENTENDIMENTO ESSENCIAL 5**

Analise cada resolução a seguir de acordo com a tarefa: Renato tem um geoplano e gosta de construir figuras geométricas nele. Mas agora, ele tem algumas questões para resolver utilizando o geoplano. Vamos ajudá-lo?

1) Construa no geoplano um retângulo e um quadrado e depois desenhe na malha pontilhada.

a) O que você pensou para formar esses polígonos? Explique.



Explicação: NÓS PENSAMOS QUE SE COLOCASSE OS ELÁSTICOS FORMARIA OS POLÍGONOS, E FORMARIA UM RETÂNGULO E UM QUADRADO QUE SÃO OS POLÍGONOS.

Construa várias figuras com o perímetro igual a 8 cm. Todas as figuras têm a mesma área? O que você pode concluir?

EXPLICAÇÃO: NÃO, EU POSSO CONCLUIR QUE TEM TODOS OS PERÍMETROS IGUAIS.



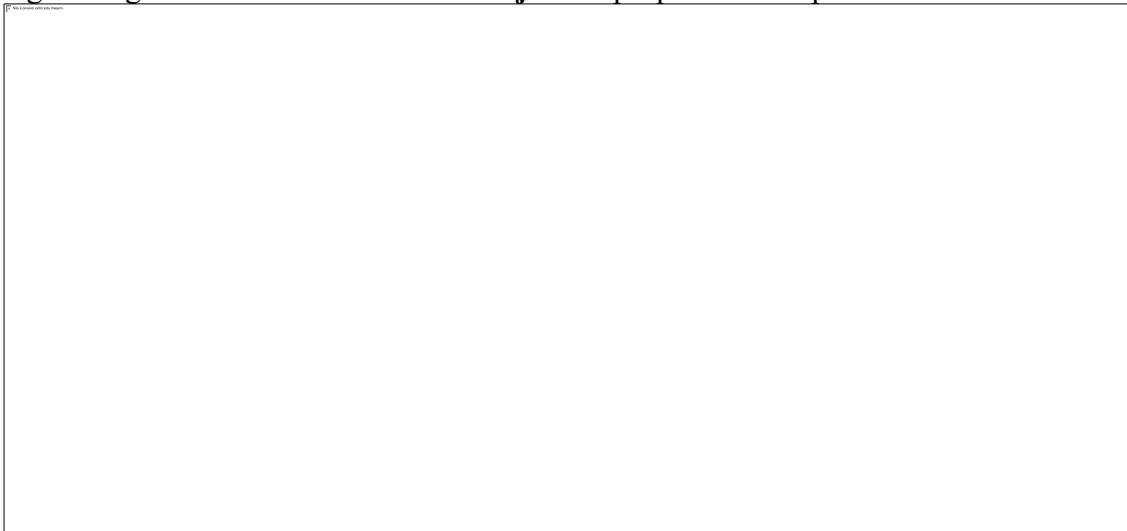
→ De acordo com a explicação dos alunos, como o professor poderia questioná-lo levando a ampliar o raciocínio.

**APÊNDICE J – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL ASSÍNCRONA 4 –
ENTENDIMENTO ESSENCIAL 6**

Já estudamos a tarefa seguinte no encontro anterior, analisamos as resoluções dos itens a (encontrar a Figura 5) e b (encontrar a Figura 10).

Neste momento, vamos discutir sobre os registros de prática de dois alunos quando resolvem o item d.

Tarefa exploratória - item d: Considerando a regularidade da sequência de figuras, existe alguma figura com um total de **66 azulejos**? Explique a sua resposta



Registro de prática: Para ouvir o áudio da discussão dos alunos clique aqui: (disponibilizado para os professores)

Transcrição do áudio quando dois alunos discutem a resolução da tarefa:

EPISÓDIO 8:

F1- Aluno 1: Não estou entendendo como fazer essa aqui de 66. Tá eu tenho que somar 66. Não está falando a cor de novo. Espera aí, 30 mais 30 é igual a, eu vou explicar aqui, eu já entendi. Eu já entendi como fica.

F2- Aluno 2: Você vai chamar o professor para explicar?

F3- Aluno 1: Não eu já entendi tudo, como fica 66.

F4- Aluno 2: Então anota aí, que eu vou fazer aqui a C.

F5- Aluno 1: 12 o resultado é 36, menos 2 vai ficar 10, que é o resultado de 30. Somando esses 10, 10 mais 10. O resultado de 20 vai ser 60, pegando esses dois e levando até o 20, que somando tudo isso vai ficar 22, com esse 2 aqui. Aí já que somou aqui, vai ter aumentar mais isso aqui, então esse 0 vai aumentar. Já que aumentou aqui, tem que aumentar mais 6. E o resultado de tudo isso é 66.

F6- Aluno 2: Myke do céu!!! Eu estou vendo você desenhar o seu esquema e assim, o 20 para dar o 60. Como é que faz?

F7- Aluno 1: Tá bom, se 10 é 30, 20 vai dar quanto? Já que 10 é 30.

F8- Aluno 2: Ah vezes 3.

F9- Aluno 1: Ai vai ficar 60. Já que tirei 2 eu vou repegar o 2 e elevar aqui. Olha o esquema que eu fiz. 66, certo? [falando para o professor].

F10- Professor: Isso.

F11- Aluno 1: Tá bom, eu peguei o meu 12, que 12 é igual a 36.

F12- Professor: Isso.

F13- Aluno 1: Tirando menos 2, vai ficar 10, que 10 é resultado de 30.

F14- Professor: Isso.

F15- Aluno 1: Somando 10 mais 10, vai ficar 20 que é o resultado de 60. Pegando esse 2 aqui, elevando aqui vai ter que somar 22. 22 vai ter que somar mais 6.

F16- Professor: Hum.

F17- Aluno 1: Nesse resultado aqui.

F18- Professor: Isso.

F19- Aluno 1: Por que aumentou mais aqui, então vai ter que aumentar mais 6. Resultando levando até.

F20- Professor: Deu quanto?

F21- Aluno 1: 66.

F22- Professor: Então, é possível obter uma figura com 66?

F23- Aluno 1: Sim.

F24- Professor: Então, você vai justificar por quê. Eu entendi a sua ideia, agora explica o porquê deu 66.

F25- Aluno 1: Tá, meu amigo que está tirando a resposta de mim.

F26- Professor: É!

F27- Aluno 1: Estou tentando entender, na verdade.

Registro de prática - resolução da tarefa matemática:

Escrita do aluno: EU VI QUE FIGURA $10 = 30$ MAS 20 QUE É $= 60$ MAS $2 + 20 = 22 = 66$ PORQUE $10 \text{ É } =30$ ENTÃO EU TIVE QUE SOMAR $10 + 10$ QUE $30 + 30 = 60 +6 = 66$

2. A justificativa apresentada pelo aluno é válida ou não? Comente. *

**APÊNDICE K – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL ASSÍNCRONA 5 –
PROPOSTA DE TAREFA MATEMÁTICA QUE CONTEMPLE OS
ENTENDIMENTOS ESSENCIAIS DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO**

Anexe uma tarefa Matemática que esteja usando em sala de aula, e que reconheça potencial para explorar os entendimentos essenciais estudados.

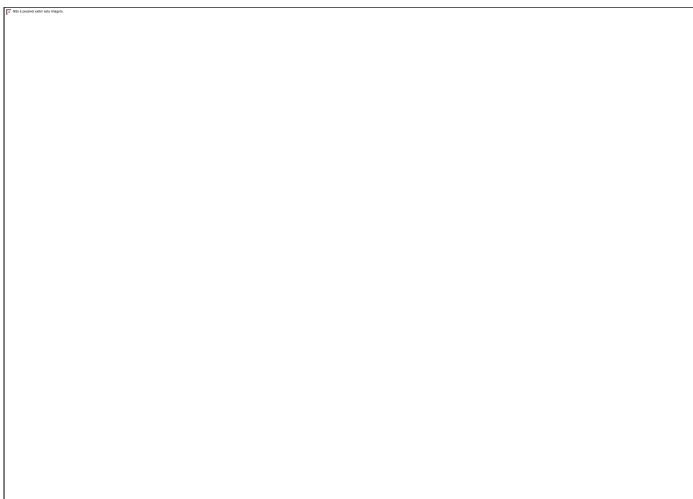
Comente sobre o possível potencial desta atividade e como ela pode mobilizar diferentes processos do Raciocínio Matemático (conjecturar, generalizar, investigar o porquê, justificar e refutar).

**APÊNDICE L – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 6 –
JUSTIFICATIVAS**

Observe a afirmação de um aluno descrevendo sobre duas frações (imagem a seguir):

"Ok, $4/5$ é igual a $6/7$ porque, para cada fração, falta uma parte de uma unidade inteira. Veja, $4/5$ tem uma parte em falta no topo, e $6/7$ também tem uma parte em falta no topo. Por conseguinte, elas são iguais".

A justificativa é válida? Explique.



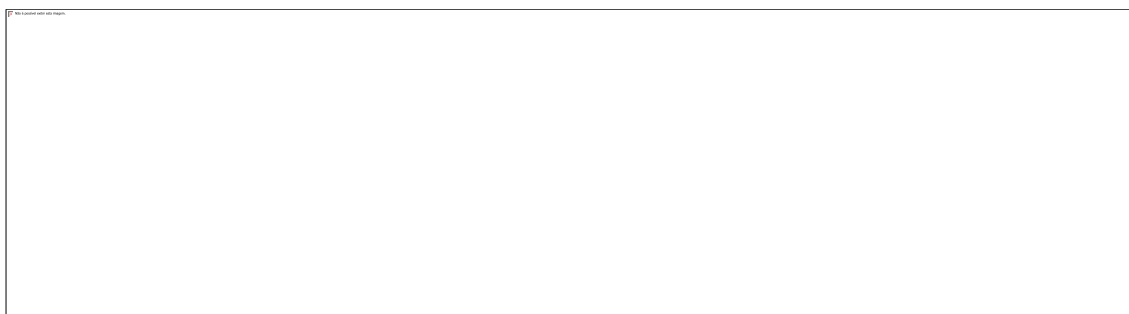
**APÊNDICE M – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 7 –
ENTENDIMENTOS ESSENCIAIS 6, 7, 8 E 9**

De acordo com os entendimentos 6, 7, 8 e 9:

- 6 - Uma justificação matemática é um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas;
- 7 - Uma refutação matemática envolve mostrar que uma afirmação particular é falsa;
- 8 - Justificar e refutar envolve avaliar a validade dos argumentos;
- 9 - Uma justificativa matemática válida para uma afirmação geral não é um argumento baseado em autoridade, percepção, consenso popular ou exemplos.

Comente sobre os registros de prática do aluno, especialmente no que tange ao argumento, a refutar e a justificar.

Escrita do aluno: EU PERCEBI QUE A FIGURA 12 TEM 36 AZULEJOS CINZENTOS MAIS EU TENHO QUE CHEGAR NOS 38 MAS SOBRARAM 2 QUE $2+6 = 38$.



Áudio da tarefa mencionada acima:

<https://drive.google.com/file/d/19mc3GgpZ7Zzb1VabF12wz8V3cMAND6iE/view?usp=sharing>

Transcrição da discussão dos alunos referente a mesma tarefa:

F1- Aluno 1: Professor, como assim, terá um total de 38? Já que 38 não entra, só 39.

F2- Professor: Por que só 39?

F3- Aluno 1: Por causa 30, certo? 33, 36, 39.

F4- Professor: Humm

F5- Aluno 1: Como é que vai dá isso aqui, terá um total de 38 azulejos. Explique a sua resposta.

F6- Professor: Mas aí, você não está pensando somente só no 3?

F7- Aluno 1: É, por que tipo, o 8 não entra no.

F8- Professor: 8 não entra onde?

F9- Aluno 1: Como que se fala, 8 não entra na figura 30, 3 vezes 1 até 10, só entra no 18.

F10- Professor: Ah sim, mas pensa um pouquinho. Essa ideia é boa. Mas tem uma figura que vai ter 38. Agora, por quê?

F11- Aluno 1: Ah!!!! A figura tem que ter 38. Não que tem que ter 38 na figura.

F12- Professor: 38 cinzentos, é isso que você está pensando?

F13- Aluno 1: É, somando este daqui também.

F14- Professor: Isso, vai somar os dois e vai dar 38.

F15- Aluno 1: Ah, agora entendi.

F16- Professor: Por quê? O que você entendeu.

F17- Aluno 1: Pode ser desse ou deste?

F18- Professor: Pode. Você que escolhe a estratégia.

- F19- Aluno 1: *Eu entendi, mas eu estou com dívida.*
- F20- Aluno 2: *Agora, eu vou para o segundo exercício.*
- F21- Aluno 1: *Tá bom, você não vai entender nada.*
- F22- Aluno 2: *Eu vou entender sim.*
- F23- Aluno 1: *Ah é, então faz aí.*
- F24- Aluno 1: *Pode somar, somar mais 3 aqui?*
- F25- Professor: *É viável?*
- F26- Aluno 1: *Tipo mais 3 aqui, aí é como seu eu fosse, a conta ser 11, aqui sobe mais 3.*
- F27- Professor: *Pode.*
- F28- Aluno 1: *Então vai dar certinho, por que se for 12, isso aqui vai subir mais 3, vai fica 6, 6 mais 2 é igual a 8, por que olha o dois aqui.*
- F29- Professor: *Hum.*
- F30- Aluno 1: *Então aqui vai ficar 38 somando tudo.*
- F31- Professor: *E qual é a figura que vai ter 38 azulejos?*
- F32- Aluno 1: *A 12.*
- F33- Professor: *Por que a figura 12? Explica de novo, só para eu entender.*
- F34- Aluno 1: *Oh eu vou desenhar. Por que vai subir mais 3, vai subir mais 3 e aumentar mais 1, vai aumentar mais 1 na figura porque subiu mais 3, já que aqui subiu mais 3 na figura 2 e aqui subiu mais 3 na figura 3, então vai subir a figura. Somando tudo isso, vai dar resultado de 12.*
- Tá bom, a figura é 2, já que sabemos que a figura é 2, esse resultado vai se juntar a esse daqui. Que juntando esses dois vai ficar 32. Já que 6 mais 2 é igual a 8, então esses 3 juntando vai ficar 6, então o 6 entra aqui. Que somando tudo isso vai ficar 38, aqui é o resultado.*
- F35- Professor: *Ah, legal. Você explica isso pra mim.*

**APÊNDICE N - TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL ASSÍNCRONA 6 –
ELABORAÇÃO DA TAREFA MATEMÁTICA**

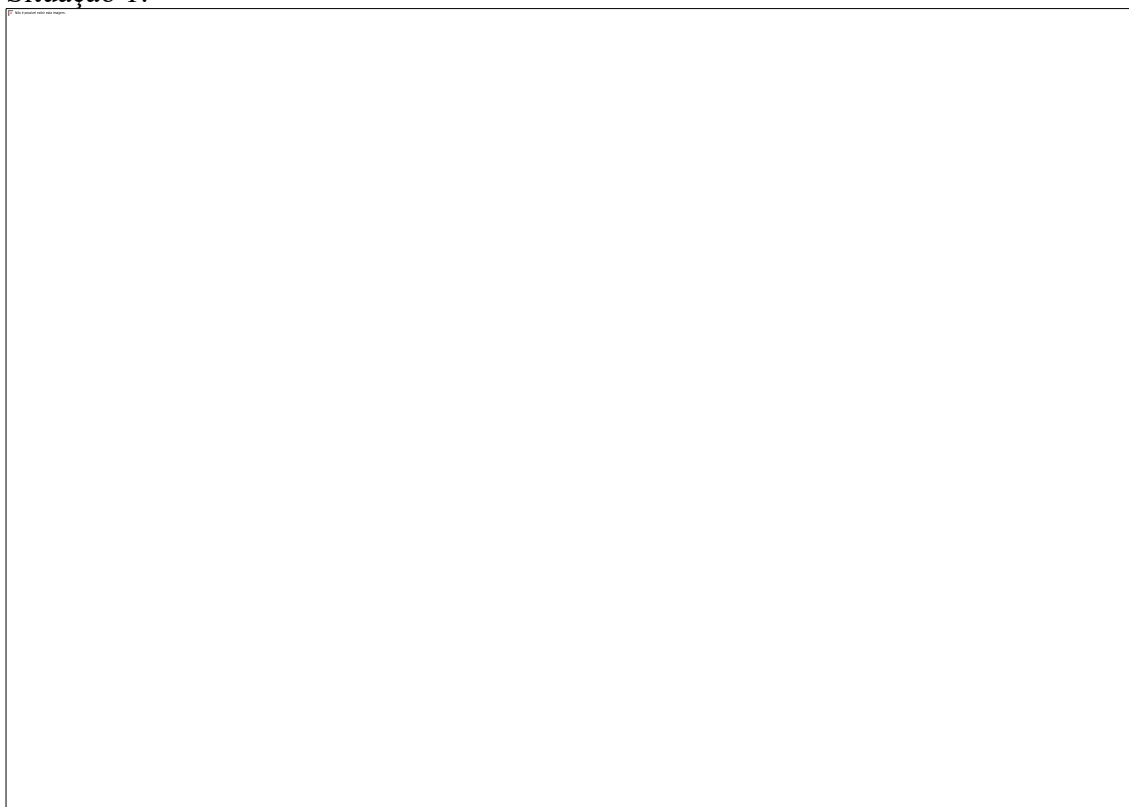
A seguir, apresentamos recortes de quatro situações retiradas da tarefa assíncrona 5, apresentadas pelos professores participantes do GE.

A partir do que estudamos sobre *Entendimentos Essenciais do Raciocínio Matemático*, **selecione uma das situações** que veja com potencial para explorar esses entendimentos e **elabore uma tarefa matemática** de acordo com o ano de escolaridade em que atua.

Para nortear o trabalho:

- Quais estratégias o aluno poderia usar para solucionar a tarefa?
- Quais são as possibilidades de explorar os Entendimentos Essenciais do Raciocínio Matemático nessa tarefa que elaborou?

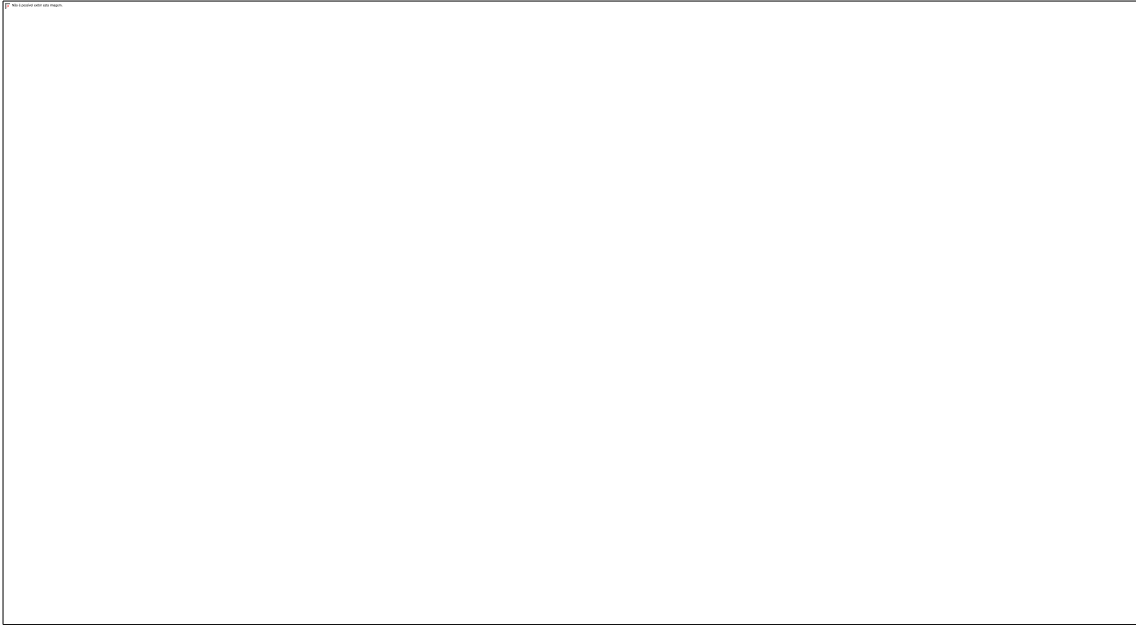
Situação 1:



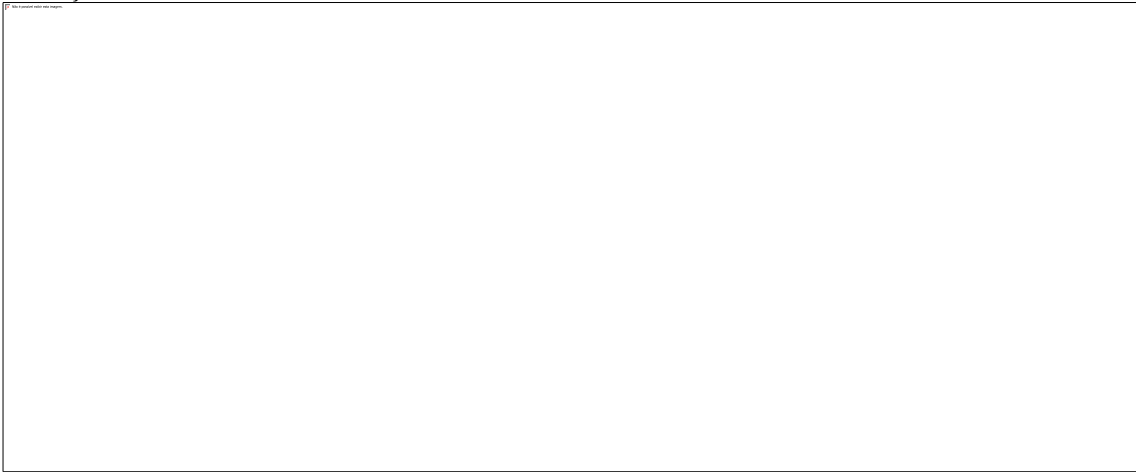
Situação 2:



Situação 3:



Situação 4:



**APÊNDICE O – KAHOOT – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL
SÍNCRONA 8 - FINALIZAÇÃO DOS PRESSUPOSTOS TEÓRICOS DO
RACIOCÍNIO MATEMÁTICO**

1 - Quiz

_____ envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que podem ou não serem verdadeiras

2 - Verdadeiro ou falso

Generalizar envolve identificar a aplicação da generalização, reconhecendo a resposta do aluno como correta.

3 - Quiz

_____ envolve identificar semelhanças entre os casos ou estender o raciocínio para além do intervalo de origem

4 - Verdadeiro ou falso

Entender o significado de termos, símbolos e representações é o mesmo que refutar.

5 - Quiz

Uma _____ matemática é um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas

6 - Quiz

Uma refutação matemática envolve demonstrar que uma afirmação particular é

7 - Verdadeiro ou falso

Justificar e refutar envolve avaliar a validade dos argumentos

8 - Verdadeiro ou falso

Uma justificativa matemática válida para uma afirmação geral é um argumento baseado em autoridade.

9 - Quiz

O raciocínio matemático envolve a investigação de vários fatores potenciais que podem explicar

10 - Quiz

O Raciocínio Matemático é um processo evolutivo de ...

**APÊNDICE P – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 9 –
REFLEXÃO SOBRE AS TAREFAS APLICADAS PELOS PARTICIPANTES**

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
MATEMÁTICA - CÂMPUS LONDRINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - CAMPUS PONTA GROSSA

Grupo de Estudos: Compreensões sobre os processos de raciocínio matemático e as contribuições com o desenvolvimento profissional

REFLETINDO ACERCA DAS AULAS DESENVOLVIDAS / 21 de junho de 2023

No contexto do nosso grupo de estudos/formação continuada, as professoras participantes estudaram e refletiram sobre os entendimentos essenciais do Raciocínio Matemático (RM), trabalhando com protocolos de resolução de tarefas matemáticas para reconhecer esses entendimentos. A partir disso, foram convidados a elaborar uma tarefa matemática que julgavam ter potencial para o desenvolvimento dos entendimentos RM.

Das quatro possibilidades trazidas pelo grupo, três delas foram escolhidas pelas professoras participantes para elaboração de um plano de aula e posterior desenvolvimento em suas salas de aulas, em três níveis de ensino (anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio). As professoras Eloísa e Paula foram responsáveis pelo planejamento de aula para os anos finais do Ensino Fundamental (tarefa: “Matemática é mesmo mágica? Será?”); Rebeca, Serena, Roberta e Silvia pelo planejamento de aula para os anos finais do Ensino Fundamental (tarefa: “Os colares”); e as professoras Fernanda, Natália e Bianca pelo planejamento de aula para o Ensino Médio (tarefa: “Propagação de Fake News usando a técnica de dobradura”). Após a apresentação dos planos para todo o grupo e as discussões realizadas, as professoras realizaram alguns ajustes no planejamento e algumas desenvolveram com as suas respectivas turmas. As turmas na qual foram gerados protocolos que serão analisados neste encontro e no próximo foram as seguintes: Eloísa e Paula (anos iniciais); Serena (anos finais) e Fernanda e Bianca (Ensino Médio). Todos os planos foram desenvolvidos em 2 aulas de 50 minutos, com uma etapa inicial de apresentação da tarefa matemática pela professora, seguida do trabalho dos estudantes em pequenos grupos, e finalizando com uma plenária envolvendo a própria turma.

Na turma da professora Eloísa, o plano foi aplicado no dia 26/05/2023 no período matutino, em uma turma do 4º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Curitiba/PR, e foi acompanhada pela formadora Giane. Pela professora Paula, no dia 30/05/2023, na sua turma do 3º ano de uma escola pública municipal, também no período matutino, na cidade de Cornélio Procópio/PR, acompanhada pelo formador André. O plano de aula teve como objetivo desenvolver o pensamento algébrico por meio da observação, exploração e identificação de padrões numéricos, utilizando linguagem escrita, esquemas, tabelas e quadros na resolução de problemas e em situações cotidianas.

O plano de aula ministrado pela professora Serena, contemplou a tarefa matemática “Os colares”, envolvendo os conteúdos: sequência numérica, regularidade e introdução aos critérios de divisibilidade. Foi desenvolvida na turma 6º ano F, no período vespertino, de um colégio estadual localizado no município de Rolândia/PR, no dia 26/05/2023, acompanhada pela formadora Rosemeire.

Já no dia 01/06/2023, no período vespertino, em uma turma de 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual da cidade de São João do Triunfo no Paraná/PR, foi aplicado o plano de aula na turma da professora Fernanda, acompanhada pela formadora Giane. A professora Bianca desenvolveu o mesmo plano dia 05/06/2023, no período noturno, na cidade de Paranavaí/PR, acompanhada pelo formador André; ele envolvia o conteúdo de função exponencial, a partir da habilidade da BNCC EM13MAT403, que se refere ao analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

No desenvolvimento das aulas, foram coletados protocolos que incluíram gravações em áudio em pequenos grupos, vídeos de apresentação da tarefa e plenária com toda turma, e registros escritos da resolução dos estudantes. A partir de recortes desses materiais, os professores participantes do grupo serão convidados a refletir acerca dos entendimentos essenciais do RM, nos dois últimos encontros do projeto, nas datas de 21 de junho e 28 de junho de 2023. No primeiro encontro serão utilizados os

registros de prática das aulas das professoras Serena e Fernanda; no segundo, das professoras Eloísa, Paula e Bianca.

Assim, foi organizada esta Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP) que compreende: as tarefas matemáticas aplicadas pelas professoras (material enviado anteriormente de forma assíncrona para que os professores estudassem - link de acesso: (disponibilizado para os professores) estudo coletivo a partir dos trechos de áudio, vídeo e registros escritos (coletados pelas professoras que aplicaram as tarefas em suas turmas) que contemplam a resolução da tarefa; e questões para serem discutidas entre as professoras. Para a análise, dividimos os encontros em 3 momentos, a serem observados a partir dos registros de prática coletados:

Encontro 21/06 - (I) apresentação da tarefa pela professora;

Encontro 21/06 e 28/06 - (II) as discussões em pequenos grupos;

Encontro 28/06 - (III) a discussão em plenária.

(I) A APRESENTAÇÃO DA TAREFA PELA PROFESSORA - Anos Finais

Na turma de 6º ano, a professora iniciou a aula fazendo uma leitura coletiva da tarefa “*Os colares*”, esclareceu possíveis dúvidas de vocabulário e explicou como seria o desenvolvimento desta aula. O vídeo a seguir mostra essa orientação inicial da tarefa à turma ((disponibilizado para os professores)

Após assistir ao vídeo, responda:

- **Com relação à orientação inicial da tarefa à turma: A ação da professora foi promissora para que os entendimentos do RM pudessem ser explorados a partir dessa tarefa? De que outras maneiras essa apresentação da tarefa poderia ter sido feita, considerando o potencial da tarefa para a exploração dos entendimentos essenciais do RM?**

(II) AS DISCUSSÕES EM PEQUENOS GRUPOS - Anos Finais

- 1) Para análise das discussões nos pequenos grupos, elencamos registros de prática (episódios em áudio/vídeo e protocolos do grupo) de alguns grupos de uma turma de 6º ano, enquanto discutem a tarefa dos “Colares”. Durante as discussões, a professora circulou pelos grupos.

Dupla Diego e Ygor
(Link da transcrição):

Transcrição do áudio:

Professora: Vamos lá, e aí? Que que deu aí?

Diego: É a última é que a gente é não tava conseguindo (inaudível) é porque que eu não entendi, mas daí (inaudível) explicou pra gente né, e a gente (inaudível) tá adicionando duas sempre é... em cada etapa. Tipo de três, três mais dois vai pra cinco. Etapa dois, etapa três é daí de cinco pra sete, ou seja, no caso somando duas miçangas da última etapa.

Professora: Ahhh, Então vamos lá, deixa eu ver, cê escreveu o que que você pensou, isso. Então, na etapa quatro, vocês fizeram como? vocês contaram no dedo, desenharam, que que foi?

Diego: A gente fez a mesma coisa na verdade não foi contando, a gente pensou nesse negócio que dá das duas unidades a mais de miçangas.

Professora: Então do sete pro nove, vocês fizeram o quê?

Diego: Mais dois.

Professora: Mais dois, então no caso vocês somaram.

Diego: É. Fazendo a sequência a gente descobriu todas, só falta essa daqui (se referindo ao exercício 6) que a gente a gente não tá sabendo como explica, mas a gente vai discutir aqui, vai pensar como vai explicar aí.

Professora: Ah então. E da etapa... quantas miçangas seriam colar na etapa oito vocês chegarem quantas?

Diego: Dezoito.

Professora: Dezoito miçangas teria? Por que daí dezoito?

Diego: Por causa que na etapa quatro aqui é nove miçangas e é oito é... o dobro de quatro.

Professora: Ah o dobro de quatro.

Diego: É daí a gente pensou em pegar a resposta de quatro e dobrar daí a gente saberia de oito.

Professora: Ah, daí você ia dobrar a resposta.

Diego: É.

Professora: Mas isso daí tá dando certo pra todos?

Diego: Sim.

Professora: Sim?

Diego: O que a gente chegou a discutir sim.

Professora: Sim? Vamos pensar assim, descubra quantas miçangas teriam no total o colar na etapa dezoito, sem desenhar. Você tá falando pra mim então que é o dobro. Qual que é o dobro de um?

Diego: De um?

Professora: É.

Diego: Dois.

Professora: Dois. O três e o cinco que você achou aqui, eles são o dobro um do outro?

Diego: Não.

Professora: E por que que então o que você colocou? Fala de novo o que você colocou da etapa quatro pra oito.

Pausa (Estudantes pensam)

Professora: Mas e aí? Não, que que cê acha que tá bom? Quem que é o dobro de dois?

Diego: É....

Professora: Quem é o dobro de dois? Qual é o dobro de dois?

Professora: Quatro.

Professora: Quatro. Quantas miçangas tem aqui?

Diego: Cinco.

Professora: Nooo e quantas miçangas você colocou na quatro?

Diego: Nove.

Professora: Nove! O cinco e o nove eles são dobro um do outro? E aí? Como que a gente pode fazer agora? Vamos pensar, cê falou que tá indo de dois em?

Diego: Dois.

Professora: Dois. E aí, como que cê pode?

Diego: (inaudível) Ir contando de dois em dois até chegar no número?

Professora: No número, contando de dois em dois?

Diego: É... contando de dois em dois até chegar...

Professora: Então coloca aí que daí eu já volto aqui.

A partir deste diálogo com a professora, responda:

- Ao se envolver com a tarefa, quais entendimentos essenciais do RM os estudantes apresentam?
- Como as intervenções realizadas pela professora possibilitaram mudança na estratégia que a dupla havia elaborado inicialmente?

De acordo com o referencial estudado, Lannin, Ellis, Elliott (2011) apresentam o entendimento essencial 2 como: *Generalizar envolve identificar semelhanças entre os casos ou estendendo o raciocínio para além do intervalo em que se originou*. Portanto, a generalização é um exercício de “concentrar-se em um aspecto particular de um problema ou de uma ideia e pensar mais amplamente sobre este aspecto” (p. 16).

Observando o diálogo acima, notamos que diante de uma tarefa matemática, o estudante pode centrar-se em qualquer aspecto, que nem sempre revela uma propriedade matemática importante, sendo, portanto, características que não levarão às generalizações corretas. Assim, a ação do professor ao acompanhar o raciocínio do estudante na exploração da tarefa se faz necessária para “tentar entender o que os estudantes estão generalizando, ao invés de apenas determinar se eles generalizaram ou não”. (p. 17).

- Que tipo de perguntas poderiam, talvez, serem feitas pela professora de modo que os estudantes percebessem que sua estratégia estava equivocada (não era matematicamente válida)?

2) Observem os protocolos escritos:

Tarefa 1: estudante 1



Tarefa 2: aluna Sandra (Trio: Sandra, Eloá e Helena)



Responda:

- **Os estudantes pensaram a tarefa da mesma maneira? Que semelhanças e diferenças há nas resoluções dos dois grupos? Comente a respeito.**
- **A partir das respostas ao item 6, quais generalizações você reconhece que os grupos conseguiram elaborar?**
- **A partir dessas respostas, que intervenções poderiam ser realizadas para ampliar o RM?**

**APÊNDICE Q – TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL SÍNCRONA 10 –
REFLEXÃO SOBRE AS TAREFAS APLICADAS PELOS PARTICIPANTES**

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
MATEMÁTICA - CÂMPUS LONDRINA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO
DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - CAMPUS PONTA GROSSA

Grupo de Estudos: Compreensões sobre os processos de raciocínio matemático e as contribuições com o desenvolvimento profissional

REFLETINDO ACERCA DAS AULAS DESENVOLVIDAS / 28 de junho de 2023

No contexto do nosso grupo de estudos/formação continuada, as professoras participantes estudaram e refletiram sobre os entendimentos essenciais do Raciocínio Matemático (RM), trabalhando com protocolos de resolução de tarefas matemáticas para reconhecer esses entendimentos. A partir disso, foram convidados a elaborar uma tarefa matemática que julgavam ter potencial para o desenvolvimento dos entendimentos RM.

Das quatro possibilidades trazidas pelo grupo, três delas foram escolhidas pelas professoras participantes para elaboração de um plano de aula e posterior desenvolvimento em suas salas de aulas, em três níveis de ensino (anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio). As professoras Eloísa e Paula foram responsáveis pelo planejamento de aula para os anos finais do Ensino Fundamental (tarefa: “Matemática é mesmo mágica? Será?”); Rebeca, Serena, Roberta e Sílvia pelo planejamento de aula para os anos finais do Ensino Fundamental (tarefa: “Os colares”); e as professoras Fernanda, Natália e Bianca pelo planejamento de aula para o Ensino Médio (tarefa: “Propagação de Fake News usando a técnica de dobradura”). Após a apresentação dos planos para todo o grupo e as discussões realizadas, as professoras realizaram alguns ajustes no planejamento e algumas desenvolveram com as suas respectivas turmas. As turmas na qual foram gerados protocolos que serão analisados neste encontro e no próximo foram as seguintes: Eloísa e Paula (anos iniciais); Serena (anos finais) e Fernanda e Bianca (Ensino Médio). Todos os planos foram desenvolvidos em 2 aulas de 50 minutos, com uma etapa inicial de apresentação da tarefa matemática pela professora, seguida do trabalho dos estudantes em pequenos grupos, e finalizando com uma plenária envolvendo a própria turma.

Na turma da professora Eloísa, o plano foi aplicado no dia 26/05/2023 no período matutino, em uma turma do 4º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Curitiba/PR, e foi acompanhada pela formadora Giane. Pela professora Paula, no dia 30/05/2023, na sua turma do 3º ano de uma escola pública municipal, também no período matutino, na cidade de Cornélio Procópio/PR, acompanhada pelo formador André. O plano de aula teve como objetivo desenvolver o pensamento algébrico por meio da observação, exploração e identificação de padrões numéricos, utilizando linguagem escrita, esquemas, tabelas e quadros na resolução de problemas e em situações cotidianas.

O plano de aula ministrado pela professora Serena, contemplou a tarefa matemática “Os colares”, envolvendo os conteúdos: sequência numérica, regularidade e introdução aos critérios de divisibilidade. Foi desenvolvida na turma 6º ano F, no período vespertino, de um colégio estadual localizado no município de Rolândia/PR, no dia 26/05/2023, acompanhada pela formadora Rosemeire.

Já no dia 01/06/2023, no período vespertino, em uma turma de 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual da cidade de São João do Triunfo no Paraná/PR, foi aplicado o plano de aula na turma da professora Fernanda, acompanhada pela formadora Giane. A professora Bianca desenvolveu o mesmo plano dia 05/06/2023, no período noturno, na cidade de Paranavaí/PR, acompanhada pelo formador André; ele envolvia o conteúdo de função exponencial, a partir da habilidade da BNCC EM13MAT403, que se refere ao analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

No desenvolvimento das aulas, foram coletados protocolos que incluíram gravações em áudio em pequenos grupos, vídeos de apresentação da tarefa e plenária com toda turma, e registros escritos da resolução dos estudantes. A partir de recortes desses materiais, os professores participantes do grupo serão convidados a refletir acerca dos entendimentos essenciais do RM, nos dois últimos encontros do projeto, nas datas de 21 de junho e 28 de junho de 2023. No primeiro encontro serão utilizados os registros de prática das aulas das professoras Serena e Fernanda; no segundo, das professoras Eloísa, Paula e Bianca.

Assim, foi organizada esta Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP) que compreende: as tarefas matemáticas aplicadas pelas professoras (material enviado anteriormente de forma assíncrona para que os professores estudassem - link de acesso: (disponibilizado para os professores) estudo coletivo a partir dos trechos de áudio, vídeo e registros escritos (coletados pelas professoras que aplicaram as tarefas em suas turmas) que contemplam a resolução da tarefa; e questões para serem discutidas entre as professoras. Para a análise, dividimos os encontros em 3 momentos, a serem observados a partir dos registros de prática coletados:

Encontro 21/06 - (I) a apresentação da tarefa pela professora;

Encontro 21/06 e 28/06 - (II) as discussões em pequenos grupos;

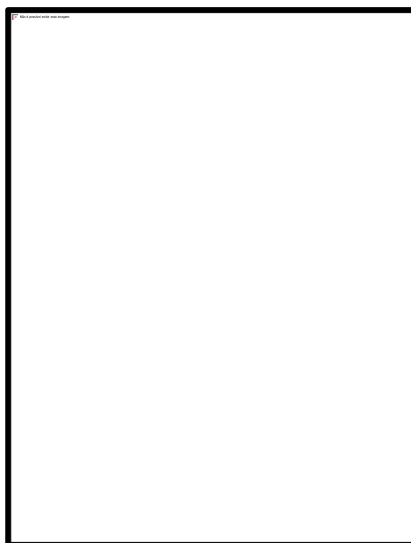
Encontro 28/06 - (III) a discussão em plenária.

(II) AS DISCUSSÕES EM PEQUENOS GRUPOS - Ensino Médio

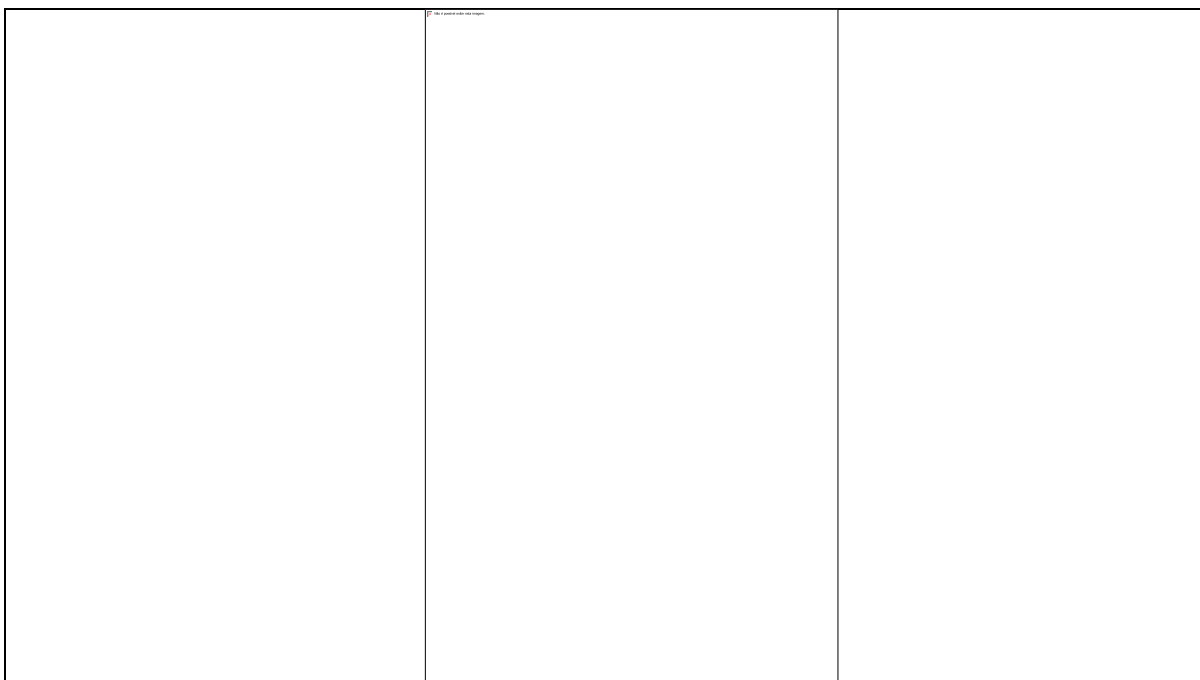
A professora Fernanda iniciou a aula explicando que a tarefa matemática que estava sendo aplicado com a turma (3º ano do Ensino Médio) era oriunda de um estudo coletivo de professores, explanando que um dos pontos principais com a aplicação era a busca de entendimentos sobre os pensamentos e raciocínios dos estudantes quando resolvessem a tarefa. Neste momento, a professora deixa claro para os estudantes que não teria um certo ou errado na resolução que eles realizassem nos grupos, mas sim que a ideia era conversar e discutir o máximo possível sem esquecer de registrar os pensamentos tanto no áudio quanto de maneira escrita. Após a explicação a professora entrega para os grupos a tarefa matemática “Propagação de Fake News usando a técnica de dobradura” e também duas folhas coloridas para eles realizarem a dobradura.

Os estudantes iniciam a resolução da tarefa buscando compreender a dobradura e as etapas que são realizadas diante do contexto da Fake News. Um fato diverso ao planejado pelas professoras é que os grupos compreenderam a maneira de realização das dobras de diferentes maneiras. O grupo 3, o qual vamos refletir, realizou a dobra da seguinte maneira:

Dobra da folha realizada pelo grupo 3



A partir das dobras os estudantes deste grupo iniciam as resoluções dos itens que compõem a tarefa matemática. Para responder os itens a, b, c e d, a partir das discussões realizadas, o grupo constrói o seguinte esquema para melhor compreender o comportamento da Fake News:



Com esse esquema respondem a tarefa da seguinte maneira:

- a) Quantas dobras são preciso fazer para representar no papel em forma de dobradura a quantidade de estudantes que receberam a notícia falsa no primeiro dia? 1 DOBRA
- b) Quantas dobras são necessárias fazer para representar no papel a quantidade de estudantes que receberam a Fake News no segundo dia? 2 DOBRAS
- c) No terceiro dia, quantos estudantes irão receber a notícia falsa? 8 ESTUDANTES IRÃO RECEBER A NOTÍCIA FALSA
- d) Quantos estudantes receberam essa notícia durante o sétimo dia? E durante o décimo dia? NO SÉTIMO DIA 128 ESTUDANTES IRÃO RECEBER ESSA NOTÍCIA, E DURANTE O DÉCIMO DIA SERÃO 1024 ESTUDANTES.

Chegando nos itens e e f, o estudante Vitório, chamado pelos colegas de Vitor, inicia a discussão a partir do que já tinha sido conversado no grupo:

TRECHO 1

Link da discussão: (disponibilizado para os professores)

Transcrição do áudio:

Vitor - o número de dias vai se igual...

Nina - a fórmula vai se... vezes....

Vitor - vezes dois, que vai sempre dobra

Maria - elevado ao quadrado

Sandra - sim

Vitor - elevado ao quadrado...

Sandra - vocês são sensacionais!

Vitor - só que o número nós não sabemos né?

Sandra - d

Vitor - dias...

(conversas aleatórias)

Vitor - o que, que é o p?

Nina - pessoas...

Maria - as pessoas elevado ao quadrado do número de dias...

(conversas aleatórias)

Vitor - escreva... a expressão que vai sempre elevado ao quadrado... não, mas se for elevado ao quadrado...

Nina - como assim?

Vitor - o número vezes o número, não vai se o dobro!

Maria -, mas por que nós não fazemos dois vezes dois, quatro, quatro vezes quatro...

Nina - é verdade isso

Sandra - vamos ve... acho que tinha que se, o dia o dia tinha que ser...

Nina - não vai se o dobro dele!

Vitor - é o dobro, eu acho que é vezes dois

Nina - vezes dois.

Vitor - o número de pessoas vezes dois...

Nina - só

Vitor - número de pessoas... o número de pessoas vai ser igual... não...

Nina - d igual

Vitor - dia igual ... pessoas... números de pessoas vezes dois...

Sandra - sim!

Maria - não vai se o dobro?

Sandra - e se fosse tipo "xis" assim e a coisa aqui vezes.

Nina - Não vai se isso...

Vitor - mas o "xis" conta como o d e o p né? dias e as pessoas

Sandra - é mas o "xis" é mais bonito ...

Registro escrito do grupo para os itens e e f:



Após isso, apresentam o que construíram para a professora, e ela pergunta se eles testaram a fórmula criada. Com a intervenção, os estudantes repensam sobre a fórmula, achando que foi muito fácil encontrá-la e resolveram verificar outras possibilidades.

Uma primeira conjectura elaborada por Vitorcius é utilização da regra de três:

TRECHO 2

Link da discussão: (disponibilizado para os professores)

Transcrição do áudio:

Vitor - dias e pessoas... vamos fazer regra de três pra ve se da certo. Tipo dia dois... ficaram sabendo quantas pessoas?

Sandra - duas...

Nina - quatro pessoas

Vitor - quatro.. agora no dia dez, ficaram sabendo quantas pessoas?

Nina - sim... isso daí!

Sandra - sempre quando você não sabe fazer é regra de três!

Nina - quando você não sabe ooo.... é regra de três... alguma coisa é regra de três.

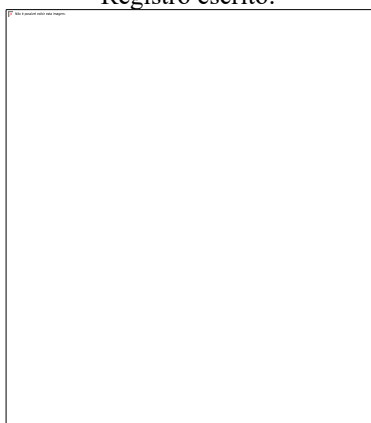
Vitor - como assim?

Nina - nós vamo rir de despero!

Vitor - não faz sentido.. não tem como! Como que no dia vai fica sabendo vinte pessoas? Não tem como! Não vai dar certo.

Nina - não vai dar certo né?

Registro escrito:



Após refutarem a conjectura da regra de três, iniciam outro pensamento:

TRECHO 3

Link da discussão: (disponibilizado para os professores)

Transcrição do áudio:

Maria - porque que nós vamos querer achar um dia... como que nós vamos saber quantas pessoas vai da ...

Vitor - divide... dividido por dois

Maria - seria dobra, é vezes dois...

Nina - não é dividido...

Vitor - então, sim! Então. Oh, dia três... dia três ficou sabendo quantas pessoas?

Sandra - não mais tem que testar grande, pra ver se a fórmula presta.

Vitor - oito! No dia três, ficaram sabendo oito pessoas! Mas porque que, não faz sentido o doze, vai aumenta.

Maria - vai se o número do dia quatro!

Sandra - o que vocês tão entendendo?

Maria - então pode se...

Sandra - nada faz sentido!

Vitor - o dias é igual as pessoas dividido... não! dias é igual pessoas vezes dois dividido por dois

Nina - ahã?

Vitor - aqui oh, dia três ficaram sabendo oito pessoas... dezesseis dividido por dois, oito!

Sandra - ah, então só colocar o divido em baixo, deu boa? não em baixo...

Vitor - em baixo.

Sandra - em baixo, vai ficar a estética bem mais bonita né?

(conversas aleatórias)

Maria - porque que vai por... vezes dois daí dividido por dois? não faz sentido ... então era só colocar dia igual a número de pessoas!

Mesmo Maria afirmando que não teria sentido a fórmula, eles resolveram testá-la, inventando uma situação problema associada:

TRECHO 4

Link do áudio: (disponibilizado para os professores)

Transcrição do áudio:

Vitor - vamo inventa uma pergunta

Sandra - é... quantos...é... em São João do Triunfo colocaram
(conversas aleatórias)

Vitor - nós vamo quere sabe o dia.

Sandra - vamos faze uma pergunta: em São João do Triunfo em quantos dias se propagou é....

Vitor - não tô entendendo essa pergunta. Em São João do Triunfo em quantos dias?

Sandra - se propagou...

Vitor - ... quinhentas pessoas ficaram sabendo

Sandra - não, quinhentos e doze pessoas ficaram sabendo da notícia falsa

Vitor - quinhentos e doze...

Sandra - pessoas vezes dois dividido por dois

Vitor - quinhentos e doze vezes o dois?

Sandra - mil e vinte e quatro!

Nina - mil e vinte e quatro!

Vitor - opa... quinhentos e doze?

Sandra - quinhentos e doze vezes dois é igual a?

Vitor - mil e vinte e quatro!

Sandra - mil e vinte e quatro!

Vitor - mas vai dá quinhentos e doze daí... é dividido

Maria - sim é isso que tô falando ... não faz sentido...

Nina - vai volta no mesmo!

Registro escrito:

Ao refutar a conjectura da construção da fórmula, o grupo volta para a conjectura inicial:

TRECHO 5

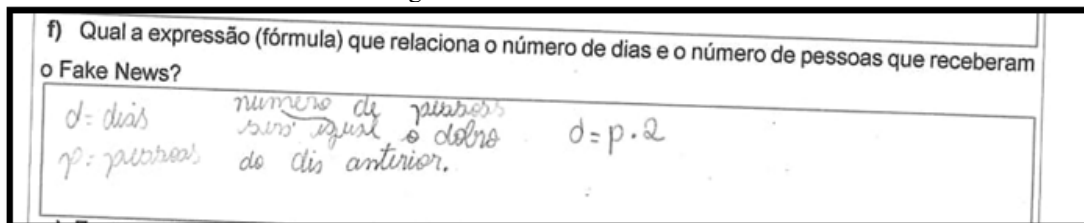
Link da discussão: (disponibilizado para os professores)

Transcrição do áudio:

Nina - o Vitor mas acho que aqui ta certo oh... se nós fazemos assim, sem dividir. Não precisa dividir por dois, pra que dividir por dois?

Vitor - sim, porque os dias de...o número de dias é igual ao número de pessoas .. é verdade tá certo mesmo (se referindo a fórmula criada inicialmente)

Registro escrito da fórmula inicial:



Discussão e registro das respostas do grupo de professores:

- 1) De acordo com as conjecturas criadas pelo grupo, foi possível perceber que em vários momentos os estudantes buscavam uma resposta que se relacionasse com o dobro ou com a divisão por dois. Qual foi a origem deste questionamento? Por que o grupo fixou o pensamento nesse tipo de procedimento e não explorou a potência como falado por Maria, Sandra e Vitor na quarta e quinta linha do primeiro trecho da transcrição do áudio?
- 2) Ainda no trecho 1, Maria tenta discutir com os colegas sobre uma conjectura. De acordo com as falas da aluna, é possível chegar em alguma generalização? Comente sobre o pensamento de Maria.
- 1) “Uma refutação matemática envolve mostrar que uma afirmação particular é falsa” e “Justificar e refutar envolve avaliar a validade dos argumentos” (LANNIN, ELLIS, ELLIOTT, 2011). Nos registros anteriores foi possível perceber o entendimento essencial de refutar, nos momentos que os estudantes testavam suas conjecturas e estavam em busca de validá-las. O que é possível observar quanto à justificação, ela ocorreu? Como o grupo explicou a escolha da fórmula a partir dos argumentos apresentados? Ela está coerente com o contexto da tarefa Matemática?
- 2) Após a intervenção da professora, quando perguntou ao grupo sobre a realização do teste da fórmula, foi possível observar que os estudantes buscaram outras maneiras de chegar na expressão. A partir das conjecturas criadas, eles foram construindo outras possibilidades para tentar encontrar a fórmula. O que é possível perceber em meio às conjecturas estabelecidas pelo grupo? Quais relações matemáticas eles fazem quando pensam nas possibilidades citadas? As conjecturas criadas por eles podem ser generalizadas? Comente.

(III) AS DISCUSSÕES EM PLENÁRIA

A aplicação da tarefa realizada pela professora Eloísa foi dividida em dois momentos, chamados de primeira parte e segunda parte da tarefa. Assim, a professora entregou para os estudantes a primeira parte que continha as operações que resultavam em sessenta e realizou a plenária, depois entregou a segunda folha com as operações que resultavam em oitenta e realizou a plenária. Sendo assim, a plenária ficou dividida em dois momentos (1ª parte e 2ª parte).

A professora Eloísa inicia a 1ª parte da plenária chamando atenção para que os estudantes comentem sobre o que perceberam durante a resolução da tarefa Matemática. Ela destaca, também, que alguns grupos utilizaram as continhas registradas na folha da tarefa, outros fizeram uso de cálculo mental e um deles pediu para utilizar palitos para a contagem. Com isso, conversa com a turma de que a maneira que cada grupo utilizou para resolver a tarefa foi particular e que todos puderam resolvê-la e neste momento podem comentar sobre o que perceberam durante a resolução.

Da primeira parte da plenária foi recortado o seguinte trecho para discussão em grupo:

TRECHO 1 - 1ª parte da plenária:

Link trecho vídeo (1ª parte): (disponibilizado para os professores)

Link trecho áudio (1ª parte): (disponibilizado para os professores)

Transcrição do vídeo:

Professora: eu tenho uma coisa para perguntar pra vocês, o grupo lá da Amanda e o grupo da Laura, não deu a resposta a mesma. Não deu. Mas a gente tá em quantos grupos aqui, estamos em sete grupos, dois grupos pensaram de um jeito. Os cinco, os outros cinco grupos chegaram no resultado de sessenta. Como a gente faz para comprovar qual que está certo? Como a gente faz? Cada grupo, aqui oh, cada grupo, Adriano, foi explicando de um jeito como é que pensou certo? Vamos ver então, Adan, o Myke fez um cálculo mental, ele disse que ele pensou que o trinta mais o vinte, por que nós estamos aqui na dezena né? três valendo trinta e o dois valendo vinte Myke qual que foi tua resposta?

Myke: cinquenta e cinco mais cinco é dez, daí depois soma, juntando os dois dá sessenta.

Professora: isso. Agora Jonas. Sara eu vou apagar o teu que eu quero colocar os três juntos aqui tá? (professora apaga o registro $35 + 25 = 50$ que Sara fez no quadro). Jonas diga lá... o próximo Jonas, Jonas não, Juca diga lá Juca.

Juca: trinta e sete mais vinte e três.

Professora: a gente tá no trinta e seis. Diga lá do trinta e seis.

Juca: Prof, trinta mais vinte é cinquenta.

Professora: huhum.

Juca: seis mais quatro é dez, juntando tudo sessenta.

Professora: todo mundo concorda?

Estudantes: sim.

Professora: os dois grupos que colocaram resposta diferente, pensando desse jeito vocês concordam?

Estudantes: sim.

Professora: então vamos deixar o resultado sessenta?

Estudantes: sim.

Antes de iniciarmos a discussão, acerca da primeira parte da plenária, vamos analisar um recorte da segunda parte da plenária da professora Eloísa:

TRECHO 2 - 2ª parte da plenária:

Link trecho vídeo (2ª parte): (disponibilizado para os professores)

Link trecho áudio (2ª parte): (disponibilizado para os professores)

Transcrição do áudio:

Myke: Aqui nesses dois aqui tá um, uma dezena que é dez..

Professora: aham

Myke: Aqui tá duas dezenas que é o dobro de uma dezena.

Professora: Muito bem!

Myke: E aqui, e aqui e aqui está sessenta que é seis dezenas e a que diminuiu e aumentou.

Professora: diminuiu e aumentou. Muito bem! Eh todos os grupos que eu passei eu falei assim mas e se a gente pensar além do resultado? Já fez a continha, já descobriu que deu oitenta e que tudo deu oitenta. Mas Adan, se a gente pensar além do resultado, se a gente parar um pouquinho e pensar nesse pedaço da continha (aponta para as contas $24 + 56 = 80$ e $20 + 60 = 80$), o que que a gente vai perceber? O Myke acabou de falar uma coisa, Antonio. O Myke acabou de falar que ele percebeu que na ordem das dezenas fez o dobro, (mostra no quadro na primeira coluna que corresponde a primeira parcela de cada operação) aqui e desse lado é diminuiu e depois aumentou (mostra a segunda coluna que corresponde a segunda parcela de cada operação).

Myke: Na última...

Professora: Por que será que isso aconteceu Adriano?

Adriano: talvez pra dar mesmo resultado?

Professora: Talvez pra dar o mesmo resultado Adriano? O Myke percebeu assim Adan. Adan, sente-se, por gentileza. O Myke percebeu assim ó, que diminuiu e depois aumentou (mostra no quadro a segunda parcela das duas últimas operações indicando do 56 para o 60). Será que é pra dar o mesmo resultado Adan? Eh Myke? Como é que você faz isso? Melina.... por que que aqui você pensa que teve que fazer isso pra dar o mesmo resultado?

Myke: ué porque todos dão o mesmo resultado de oitenta.

Professora: mas o que que isso tem a ver com o resultado (mostra para a operação que tem a segunda parcela 60)?

Myke: Mas também daria pra de jeitos diferentes.

Professora: Daria pra fazer de jeitos diferentes, muito bem! Como de jeito diferente?

Adriano: conta de menos, conta de vezes, conta de mais...

Professora: como é que você faria com uma conta de vezes?

Myke: uma conta de vezes?

Professora: é, como é que você faria uma conta de vezes?

Myke: pra dar o resultado de oitenta?

Professora: pra dar o resultado de oitenta.

Myke: ué, eu faria oito vezes dez!

Professora: pode fazer ali.

Myke: (escreve na lousa $8 \times 10 = 80$)

Professora: olha o que o Myke acabou de pensar, vamos ver se a gente concorda com ele. E o grupo do Adriano pensou parecido lá. O Myke acabou de pensar que pra dar o mesmo resultado de oitenta, poderia fazer de outros jeitos. Myke então você pensou que oito vezes o dez, certo? (nesse momento Myke registra na lousa $90 - 10$) e se ele fizesse noventa menos dez? Noventa menos dez Júlia, você concorda que eu posso fazer noventa menos dez? pra dar oitenta.

Júlia: sim.

Professora: Obrigada Myke, colocar o resultado ali (Myke coloca o resultado de 80 na lousa). O grupo do Adriano fez algo parecido e começou lá com a Carmen. A Carmen, falou assim, mas não é só esse aqui que faz dá oitenta. e logo você pensou o que Carmen?

Carmen: que quarenta mais quarenta dá oitenta.

Professora: quarenta mais quarenta dá oitenta, vocês concordam?

Estudantes: sim.

Adriano: cinquenta mais trinta, tem vários resultados.

Como as discussões envolvem, especialmente, os entendimentos essenciais do Raciocínio Matemático, destacamos no Quadro 1 os 9 entendimentos estudados durante o curso de formação continuada.

QUADRO 1 - Entendimentos essenciais do Raciocínio Matemático

| | | |
|---------------------------|---|---|
| Conjecturar e Generalizar | 1 | Conjecturar envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras, mas que não são conhecidas como verdadeiras. Essas declarações são chamadas de conjecturas; |
| | 2 | Generalizar envolve identificar semelhanças entre os casos ou estendendo o raciocínio para além do intervalo em que se originou; |
| | 3 | Generalizar envolve identificar a aplicação da generalização, reconhecendo o domínio relevante. |
| | 4 | Conjecturar e generalizar envolve o uso e o entendimento do significado de termos, símbolos e representações; |

| | | |
|----------------------|---|---|
| Investigar o porquê | 5 | O raciocínio matemático envolve a investigação de vários fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa; |
| Justificar e refutar | 6 | Uma justificação matemática é um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas; |
| | 7 | Uma refutação matemática envolve mostrar que uma afirmação particular é falsa; |
| | 8 | Justificar e refutar envolve avaliar a validade dos argumentos; |
| | 9 | Uma justificativa matemática válida para uma afirmação geral não é um argumento baseado em autoridade, percepção, consenso popular ou exemplos. |

Fonte: Lannin, Ellis e Elliott (2011).

Agora vamos iniciar as discussões acerca da plenária da professora Eloísa respondendo às seguintes perguntas:

- 2) **No primeiro trecho a professora apresenta para a turma que dois grupos não chegaram na resposta 60, como esperado. Como as suas intervenções contribuíram para que esses grupos repensassem o raciocínio utilizado na resolução da tarefa?**
- 3) **Na quinta linha da transcrição do trecho 2, Myke destaca que de uma operação para outra as dezenas foram aumentando e diminuindo, tanto na primeira parcela quanto na segunda parcela.**
 - b) **Que entendimentos essenciais do Raciocínio Matemático estão presentes nesse trecho do diálogo?**
 - c) **Esse raciocínio poderia ser ampliado para outro domínio?**
 - d) **Como a professora poderia ter discutido com a turma, aproveitando o raciocínio de Myke e assim pudesse ampliá-lo?**
- 4) **Diferente do planejamento da professora, que esperava que os estudantes percebessem uma sequência entre as parcelas das adições, no segundo trecho os estudantes percebem que para chegar no resultado 80 podem ser usadas outras operações matemáticas. Essa conjectura foi destacada por alguns grupos durante a resolução da tarefa, e durante a plenária a professora retoma a discussão. No que diz respeito à generalização que ocorreu com as outras operações, como a professora poderia ter potencializado essa discussão para conseguir ampliar o raciocínio dos estudantes?**

Plenária da professora Paula, mesma tarefa matemática aplicada pela professora Eloísa:

Após a apresentação da tarefa matemática em plenária, a professora Paula coloca no quadro outros exemplos para ampliar a discussão, levando os estudantes a perceberem que nem sempre a soma das unidades resultará em 1 dezena, como nos exercícios que a tarefa matemática havia proposto, assim, ampliou a discussão levando os estudantes a identificarem outros padrões, por meio da apresentação de uma adição que resultaria no total 59, os estudantes foram instigados a solucionar o valor da 2ª parcela, resultando no total de 59, como no quadro abaixo:

$$\begin{array}{l} 36+23=59 \\ 25+\underline{\quad}=59 \\ 21+\underline{\quad}=59 \\ 19+\underline{\quad}=59 \end{array}$$

Depois das discussões, chegaram aos resultados apresentados no quadro abaixo:

$$\begin{array}{l} 36+23=59 \\ 25+\underline{34}=59 \\ 21+\underline{38}=59 \\ 19+\underline{40}=59 \end{array}$$

Na sequência a professora propôs que verificassem quanto estava aumentando em uma parcela e diminuindo na outra. Após olharem as operações na sequência, a professora sugere que investiguem as operações alternadas, conforme o vídeo e a transcrição a seguir:

Vídeo discussão em plenária: (disponibilizado para os professores)

Transcrição do vídeo:

- 1 - Professora:** Acharam interessante. Agora vamos pensar nessa aqui ó, um pouquinho mais complicado ó, vamos lá. Se eu olhar o trinta e seis, vamos colocar aqui, trinta e seis para o vinte e um, se fosse trinta e seis e vinte e um. Que que aconteceria?
- 2 - Estudantes:** Diminuí.
- 3 - Professora:** Diminuí quantos?
- 4 - Estudantes:** Quinze.
- 5 - Professora:** Quinze? Como que você descobriu?
- 6 - Aluno:** Porque... Inaudível...
- 7 - Professora:** Diminuir desse pra esse deu onze. E esse pra esse aqui deu?
- 8 - Aluno:** Vinte.
- 9 - Professora:** Deu? Quinze, mas o que que você fez pra você descobrir?
- 10 - Professora:** Você, você diminuiu aqui os seis com um? É isso? É? Mas... muito bem, tá certinho, quinze. Tem alguma informação aqui, ó, que a gente já tinha feito, que a gente pode distribuir também, que dá quinze?
- 11 - Estudantes:** perai perai perai...
- 12 - Professora:** Aqui diminuiu, aqui diminuiu quinze, com menos quinze aqui... psiu. E aqui desse lado?
- 13 - Estudantes:** Subiu quinze.
- 14 - Professora:** Do vinte e três para o...
- 15 - Estudantes:** Trinta e quatro.
- 16 - Professora:** Para o trinta e oito. Que que aconteceu aqui ó? Do vinte e três para o trinta e oito?
- 17 - Estudantes:** Aumentou o quinze.
- 18 - Professora:** Aumentou o quinze, muito bem! Por que que aumentou quinze?
- 19 - Estudantes:** Porque do outro lado diminuiu quinze.
- 20 - Professora:** Diminuiu quinze. Mas ó, se eu por exemplo, se eu fiz esse aqui ó, do vinte e três para o trinta e quatro, eu sei que aumentou onze. Do trinta e quatro para o trinta e oito aumentou quatro, tem alguma informação aqui que eu consigo falar ó, dessa continha, jogando essas duas continhas, eu consigo descobrir que dá quinze? Tem uma alguma informação que tá bem visível pra nós?
- 21 - Aluno:** Contando tudo?
- 22 - Professora:** Fala Élio.
- 23 - Élio:** Inaudível...
- Professora:** Vinte e três com o trinta e quatro? Bom, como você fez aqui né? Aumentou onze e depois?

24 - Élio: Inaudível...
25 - Professora: E depois qual outro que você fez? "Prestando atenção gente, presta atenção." Aqui aumentou onze, né? E depois? Do trinta e quatro...
26 - Estudantes: Mais quatro dá quinze... Ficaaa, fica trinta e oito, aiii...
27 - Professora: Aí do trinta e quatro para o trinta e oito, aumentou quanto?
28 - Estudantes: Quatro... Dois...
29 - Professora: Quatro! E aí você somou o que?
30 - Aluno: Mais quatro.
31 - Professora: Muito bem. Olha lá ó, eu também posso, olha, se eu já fiz isso aqui ó, se eu já fiz isso, eu também posso, eu posso pensar também, olha, se do vinte e três para o trinta e quatro aumentou onze. Do trinta e quatro, para o trinta e oito aumentou quatro, então se eu somar o onze mais quatro dá?
32 - Estudantes: Quinze.
33 - Professora: Quinze. E também se eu pegar do vinte e três para o trinta e oito eu vou descobrir que aumentou...
34 - Estudantes: Quinze!
35 - Professora: Muito bem, parabéns gente!

A partir das reflexões deste momento apresentado no vídeo, responda:

Quais entendimentos essenciais do Raciocínio Matemático foram explorados nesse trecho de diálogo entre a professora e os estudantes? Identifique as falas e os entendimentos correspondentes.