

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

GABRIEL DA CRUZ COVINO

**AVALIAÇÃO DO MÉTODO DE RAYLEIGH NA DETERMINAÇÃO DE
VELOCIDADES CRÍTICAS DE EIXOS PARA GEOMETRIAS INICIAIS
DE PROJETO**

LONDRINA

2023

GABRIEL DA CRUZ COVINO

**AVALIAÇÃO DO MÉTODO DE RAYLEIGH NA DETERMINAÇÃO DE
VELOCIDADES CRÍTICAS DE EIXOS PARA GEOMETRIAS INICIAIS
DE PROJETO**

**Evaluation of Rayleigh Method in the Determination of Critical Speed Shafts in
Initial Design Geometries**

Trabalho de conclusão de curso de graduação
apresentado como requisito para obtenção do título
de Bacharel em Engenharia Mecânica da
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. João Luiz do Vale

Coorientador: Prof. Dr. Jéderson da Silva

LONDRINA

2023



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

GABRIEL DA CRUZ COVINO

**AVALIAÇÃO DO MÉTODO DE RAYLEIGH NA DETERMINAÇÃO DE
VELOCIDADES CRÍTICAS DE EIXOS PARA GEOMETRIAS INICIAIS DE
PROJETO**

Trabalho de conclusão de curso de graduação
apresentado como requisito para obtenção do título
de Bacharel em Engenharia Mecânica da
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(UTFPR).

Data de aprovação: 30/outubro/2023

João Luiz do Vale
Doutorado em engenharia mecânica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Jéderson da Silva
Doutorado em engenharia mecânica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Diego Amadeu Furtado Torres
Doutorado em engenharia mecânica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Juliano Gonçalves Iossaqui
Doutorado em engenharia mecânica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

LONDRINA

2023

RESUMO

A vibração de elementos de máquinas e estruturas pode se originar na aplicação de cargas externas, gerando movimentos oscilatórios no sistema. Um sistema mecânico possui uma propriedade intrínseca, conhecida como frequência natural, que está diretamente relacionada com a sua distribuição de rigidez e inércia. Se, após uma perturbação inicial, um sistema continuar a vibrar por si próprio sem a ação de forças externas, a frequência com que ele oscila é conhecida como sua frequência natural. Em eixos, a frequência natural pode ser chamada também de velocidade crítica e, sempre que esta coincidir com determinada frequência de excitação externa, ocorre um fenômeno conhecido como ressonância, resultando em deflexões excessivas e possíveis falhas. Por esse motivo, é essencial a determinação da velocidade crítica de eixos em projetos de máquinas, a fim de avaliar se a rotação de trabalho está adequada. Entretanto, uma análise completa das frequências naturais de um eixo é um problema complicado, especialmente se a geometria for complexa. Com isso, o Método de Rayleigh em sua formulação discreta para múltiplos graus de liberdade, propõe uma forma simplificada para determinação aproximada da velocidade crítica em eixos, sendo este método baseado na conservação de energia mecânica do sistema. No entanto, é importante avaliar o erro que o Método de Rayleigh proporciona e, para isso, foi tomado como referência o Método dos Elementos Finitos (MEF) ou, caso existente, a solução analítica. O MEF é um método numérico que permite a solução aproximada de equações diferenciais parciais através da discretização do sistema em elementos finitos, podendo ser utilizado para resolver equações diferenciais do movimento. Foram propostos problemas com eixos em geometrias iniciais de projeto, apoiados em mancais de rolamento e contendo volantes dispostos arbitrariamente. A resolução dos problemas propostos utilizando o Método de Rayleigh envolve a utilização de diferentes considerações de massa e rigidez para um mesmo problema analisado. Inicialmente, foram empregados modelos simplificados e, posteriormente, modelos completos que levam em conta toda massa e rigidez do sistema. Os mesmos problemas foram abordados utilizando o MEF ou solução analítica (caso existente), considerando-se modelos completos. Após isso, foi realizada a comparação entre os resultados de velocidade crítica obtidos via Rayleigh e via MEF ou método analítico. Observou-se que a modelagem do eixo tem influência no valor de velocidade crítica obtida via Rayleigh, de modo que os valores encontrados apresentaram diferenças de alguns porcentos em relação a referência (condizentes com a expectativa citada em literatura clássica), destacando que os valores de referência foram determinados utilizando o MEF ou solução analítica existente.

Palavras-chave: vibrações mecânicas; velocidade crítica de eixos; método de Rayleigh; método dos elementos finitos.

ABSTRACT

The vibration of machine elements and structures can originate from the application of external loads, generating oscillatory movements in the system. A mechanical system has an intrinsic property known as natural frequency, which is directly related to its distribution of stiffness and inertia. If, after an initial disturbance, a system continues to vibrate without the action of external forces, the frequency that it oscillates is known as natural frequency. In shafts, the natural frequency can also be called critical speed, and whenever it coincides with a certain external excitation frequency, a phenomenon known as resonance occurs, resulting in excessive deflections and possible failures. For this reason, it is essential to determine the critical speed of shafts in machine designs, in order to identify if the working rotation is adequate. However, a complete analysis of the natural frequencies of shafts is a complicated problem, especially if the geometry is complex. By this way, the Rayleigh Method in its discrete formulation for multiple degrees of freedom proposes a simplified form for the approximate determination of the critical speed of shafts, knowing that this method is based on the conservation of mechanical energy of the system. However, it is important to evaluate the error that the Rayleigh Method provides, and for this, the Finite Element Method (FEM) or, if existing, the analytical solution was taken as a reference. FEM is a numerical method that allows the approximate solution of partial differential equations through the discretization of the system in finite elements and can be used to solve the differential equation of motion. Problems were proposed with shafts in initial design geometries, supported by rolling bearings and containing arbitrarily arranged flywheels. The resolution of the proposed problems using Rayleigh Method involves the use of different mass and stiffness considerations for the same analyzed problem. Initially, simplified models were used and, after that, complete models, that take into account all the mass and stiffness of the system. Furthermore, the same problems were analyzed using the FEM or analytical solution (if existing), considering complete models. After that, a comparison was made between the critical velocity results obtained via Rayleigh and via MEF or analytical method. It was observed that the shaft modeling influences the critical speed value obtained via Rayleigh, by the way that the values found showed differences of a few percent in relation to the reference (consistent with the expectation cited in classical literature). It is worth noting that the reference values were determined using the FEM or analytical solution.

Keywords: mechanics vibration; critical speed of shafts; Rayleigh method; finite element method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Exemplos de falhas causadas por ressonância	14
Figura 2 - Geometria de um eixo	15
Figura 3 - Metodologias de análise de um sistema físico.....	16
Figura 4 – Sistemas mecânicos com diferentes Graus de Liberdade (GDL)	21
Figura 5 - Exemplo de sistemas contínuos.....	21
Figura 6 - Resposta à vibração forçada externamente	22
Figura 7 - Classificação de vibração	23
Figura 8 - Sistema massa-mola amortecido em vibração forçada.....	25
Figura 9 - Sistema massa-mola em posição vertical.....	27
Figura 10 - Viga em balanço com massa na extremidade	28
Figura 11 - Tambor de içamento	29
Figura 12 - Eixo suportando massas.....	33
Figura 13 – Viga em balanço submetida a uma força transversal	35
Figura 14 - Trabalho realizado pela força P é igual a área sob o diagrama força-deformação	36
Figura 15 - Trabalho realizado para um comportamento linear e elástico	37
Figura 16 - Viga em carregamento transversal.....	38
Figura 17 - Exemplo de vibração torcional em uma viga.....	40
Figura 18 – Vibração torcional de dois discos em um eixo comum	41
Figura 19 - Sistemas semidefinidos	43
Figura 20 - Eixo com volantes nas duas extremidades sob vibração torcional	44
Figura 21 - Rodopio de eixo	46
Figura 22 - Modos de vibração associados as velocidades críticas	48
Figura 23 - Estrutura discretizada como uma montagem de elementos	50
Figura 24 - Barra engastada em uma extremidade e livre na outra, submetida a um carregamento axial ao longo de seu comprimento	51
Figura 25 - Solução exata e aproximada em tensão	51
Figura 26 - Elementos finitos para aplicações 3D	52
Figura 27 - Solução exata e numérica em relação ao aumento no número de elementos.....	53
Figura 28 - Resultados do refino de malha para solução de tensões	54
Figura 29 – Experimento de teste de impacto	57
Figura 30 - Equipamentos do experimento	57
Figura 31 - Equivalência entre os modelos do caso 1 (medidas em milímetros)	66
Figura 32 - Diagrama de corpo livre dos modelos 1b (medidas em milímetros).....	67
Figura 33 - Cortes no eixo para determinação do momento fletor interno (medidas em milímetros)	68
Figura 34 - Diagrama de corpo livre e cortes para o modelo 1a (medidas em milímetros).....	71
Figura 35 - Condições de contorno para aplicação no Método da Integração Direta (dimensões em milímetros).....	72
Figura 36 – Deflexão estática representativa para o modelo 1a do caso 1 (medidas em milímetros)	73
Figura 37 - Deflexão estática representativa para modelo 1b do caso 1 (medidas em milímetros)	74
Figura 38 – Desenho 3D e malha para aplicação em MEF do modelo 1b.....	75

Figura 39 - Condição de contorno de força e fixação do modelo 1b	75
Figura 40 - Deflexão estática representativa para modelo 1c do caso 1 (medidas em milímetros)	77
Figura 41 - Condição de contorno de forças e fixação do modelo 1c	78
Figura 42 - Condição de contorno de fixação do problema 1d	79
Figura 43 - Deflexão estática representativa para modelo 2a do caso 2 (medidas em milímetros)	81
Figura 44 - Desenho 3D e malha para aplicação em MEF do modelo 2a.....	82
Figura 45 - Condição de contorno do problema 2a.....	83
Figura 46 - Deflexão estática representativa para modelo 2b do caso 2.....	84
Figura 47 - Condição de contorno do problema 2b.....	85
Figura 48 - Condição de contorno do problema 2d.....	86
Figura 49 - Parâmetros para avaliação das curvas	88
Figura 50 - Equação da linha elástica do problema 1a	93
Figura 51 - Deflexão estática total do modelo 1b	94
Figura 52 - Equação da linha elástica do problema 1b	94
Figura 53 - Deflexão estática total do modelo 1c.....	95
Figura 54 - Equação da linha elástica do modelo 1c.....	96
Figura 55 - Modo de corpo rígido.....	97
Figura 56 - Bimodalidade da solução do caso 1 via MEF	98
Figura 57 - Modo 1 de vibração lateral encontrado via MEF para modelo 1d ...	98
Figura 58 - Curva de deflexão padronizada	99
Figura 59 - Diferença quadrática entre as curvas de deflexão estática e a curva de deflexão dinâmica	100
Figura 60 - Deflexão estática total do modelo 2a.....	104
Figura 61 - Equação da linha elástica do modelo 2a.....	104
Figura 62 - Deflexão estática total do modelo 2b	105
Figura 63 - Equação da linha elástica do modelo 2b	106
Figura 64 - Modo de corpo rígido do modelo 2d	110
Figura 65 - Modo 1 de vibração lateral encontrado via MEF para modelo 2d .	110
Figura 66 - Deflexão total para vibração torcional do caso 2	111
Figura 67- Comparação entre as curvas de deflexão estática do modelo 2a e 2b	112
Figura 68 - Modelos sem a consideração do diâmetro equivalente	124
Figura 69 - Inclinação e deslocamentos de vigas simplesmente apoiadas	124
Figura 70 - Decomposição do modelo B para utilização do método da superposição	127

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Grandezas e unidades de componentes de um sistema mecânico vibratório e seus símbolos	20
Tabela 2 - Problemas propostos	60
Tabela 3 - Propriedades mecânicas do aço	65
Tabela 4 - Deflexões em vigas ou eixos	69
Tabela 5 – Velocidades críticas obtidas para o modelo 1d	96
Tabela 6 - Desvio de deflexão padronizada	101
Tabela 7 - Comparação dos resultados obtidos para diferentes modelagens adotadas no caso 1	101
Tabela 8 – Velocidades críticas obtidas para o modelo 2d	109
Tabela 9 - Comparação dos resultados obtidos para diferentes modelagens adotadas no caso 2	111
Tabela 10 - Distância do ponto de deflexão angular nula	113
Tabela 11 - Comparação entre os modelos A e B	129

LISTA DE SÍMBOLOS

$\ddot{\theta}$	Aceleração angular
g	Aceleração gravitacional
a, \ddot{x}	Aceleração linear
c	Amortecimento
c_t	Amortecimento torcional
Y	Amplitude de deslocamento
θ_j	Ângulo de fase
θ	Ângulo de torção, deflexão torcional, ângulo de inclinação
A, A_i	Área
N	Carregamento
ν	Coefficiente de Poisson
L, L_i, l	Comprimento
C, s	Constantes
δ_d	Deflexão dinâmica
$\delta_{p,d}$	Deflexão dinâmica padronizada
δ, δ_i, y, y_i	Deflexão estática
δ_{max}	Deflexão estática máxima
$\delta_{p,e}$	Deflexão estática padronizada
δ_p	Deflexão padronizada
ϵ, ϵ_i	Deformação específica
ρ	Densidade
u	Densidade de energia de deformação
x	Deslocamento linear, variação de comprimento
X, X_i	Deslocamento máximo
ψ	Desvio
d	Diâmetro do eixo
d_{eq}	Diâmetro do eixo equivalente
δ_{st}	Diferença de comprimento de mola

δ'	Distância quadrática entre curvas de deflexões
T	Energia cinética
E_s	Energia do sistema
U, U_i	Energia potencial, trabalho ou energia de deformação
E_{rel}	Erro relativo percentual
e	Excentricidade inicial do eixo
F	Força
P, P_i, W	Força ou força peso
ω_f	Frequência de excitação
m, m_i	Massa
$[M]$	Matriz de massa
$[K]$	Matriz de rigidez
$[\Omega]$	Matriz espectral
$[\Phi]$	Matriz modal
$\vec{\varphi}_j, \vec{\varphi}_\eta$	Modo natural de vibração
G	Módulo de elasticidade ao cisalhamento
E	Módulo de elasticidade longitudinal
M	Momento
$I_a, I_{a,i}$	Momento de inércia de área
I, I_m, I_i	Momento de inércia de massa
M_f	Momento fletor interno
J	Momento polar de inércia
η	Número de graus de liberdade
x_d	Posição ao longo do comprimento de um eixo
x_p	Posição ao longo, comprimento de uma viga ou eixo
r, r_i	Raio
R, R_i	Reações
k	Rigidez ou constante
k_t	Rigidez torcional, constante torcional de mola
t	Tempo

σ, σ_i	Tensão normal
$\omega, \omega_n, \omega_j, \omega_1, \omega_2, \omega_\eta$	Velocidade crítica de vibração em unidades de frequência angular
$f_n, f_{n,i}$	Velocidade crítica de vibração em unidades de frequência linear
\dot{x}	Velocidade linear
\vec{F}_{ij}	Vetor de força
\vec{M}_{ij}	Vetor de momento
V, V_i	Volume

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Objetivos	17
1.1.1	Objetivo geral	17
1.1.2	Objetivos específicos	17
1.2	Justificativa	18
2	REVISÃO CONCEITUAL E BIBLIOGRÁFICA	19
2.1	Conceitos básicos de vibrações mecânicas	19
2.2	Análise de vibração	24
2.2.1	Vibração Livre sem amortecimento com um grau de liberdade	25
2.2.2	Equivalência de sistemas mecânicos	28
2.3	Método de Rayleigh	30
2.3.1	Análise de vibração de eixos pelo Método de Rayleigh	32
2.3.2	Vibração Lateral	32
<u>2.3.2.1</u>	<u>Deflexão estática pelo Método da Integração Direta</u>	<u>34</u>
<u>2.3.2.2</u>	<u>Deflexão estática pelo Método do Trabalho e da Energia</u>	<u>35</u>
2.3.3	Vibração torcional	39
<u>2.3.3.1</u>	<u>Solução analítica para vibração torcional</u>	<u>44</u>
2.3.4	Rodopio de eixo	45
2.4	Análise Modal	46
2.5	Modelagem numérica para análise de vibrações	49
2.5.1	Método dos Elementos Finitos	49
2.6	Análise experimental de vibrações	56
3	MATERIAIS E MÉTODOS	59
3.1	Definição dos problemas	59
3.2	Resolução do caso 1 via Método de Rayleigh	65
3.2.1	Modelo 1a	66
<u>3.2.1.1</u>	<u>Diâmetro Equivalente</u>	<u>66</u>
<u>3.2.1.2</u>	<u>Equação da linha elástica</u>	<u>70</u>
3.2.2	Modelo 1b	74
3.2.3	Modelo 1c	76
3.2.4	Modelo 1d	79
3.3	Resolução do caso 2	80
3.3.1	Modelo 2a	80

3.3.2	Modelo 2b.....	83
3.3.3	Modelo 2c.....	85
3.3.4	Modelo 2d.....	86
3.4	Metodologia para análise dos resultados	87
4	RESULTADOS.....	90
4.1	Solução do Caso 1	90
4.1.1	Modelo 1a.....	90
4.1.2	Modelo 1b.....	93
4.1.3	Modelo 1c.....	95
4.1.4	Modelo 1d.....	96
4.1.5	Comparação dos resultados obtidos para o caso 1.....	99
4.2	Solução do Caso 2	103
4.2.1	Modelo 2a.....	103
4.2.2	Modelo 2b.....	105
4.2.3	Modelo 2c.....	106
4.2.4	Modelo 2d.....	109
4.2.5	Comparação dos resultados obtidos para o caso 2.....	111
5	CONCLUSÕES	114
	REFERÊNCIAS.....	115
	ANEXO A - Resultados obtidos para deflexão da linha elástica e cálculo dos somatórios para equação de Rayleigh do caso 1 com modelo 1c	117
	ANEXO B - Resultados obtidos para deflexão da linha elástica e cálculo dos somatórios para equação de Rayleigh do caso 2 com modelo 2a	119
	ANEXO C - Resultados obtidos para deflexão da linha elástica e cálculo dos somatórios para equação de Rayleigh do caso 2 com modelo 2b	121
	APÊNDICE A - Modelos sem a utilização do diâmetro equivalente	.123

1 INTRODUÇÃO

De acordo com Juvinall e Marshek (2016, p. 433), o termo eixo se refere a um elemento relativamente longo de seção transversal comumente circular que gira e transmite potência. Em eixos, é comum a ocorrência de esforços internos de cisalhamento resultantes da torção e/ou forças cortantes, assim como esforços internos de tração e compressão originados de momentos fletores e/ou cargas axiais, dependendo da aplicação específica desse componente.

Os eixos podem ser encontrados em diversos equipamentos, desde motores até turbinas, passando por máquinas industriais e ferramentas elétricas. O projeto de eixos deve levar em consideração diversos fatores, como as cargas a que estarão submetidos, a velocidade de rotação, as condições de trabalho, as especificidades do material utilizado, entre outros (NORTON, 2013, p. 594).

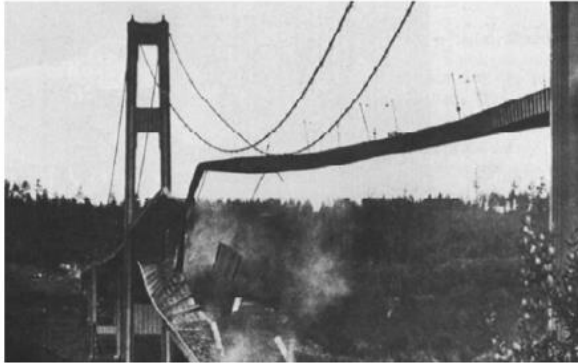
De acordo com Norton (2013, p. 594), se um eixo estiver sujeito a uma carga que varia ao longo do tempo, ele vibrará. Vale destacar que vibração corresponde a oscilação de um sistema em torno de uma certa posição de equilíbrio (MENDONÇA; FANCELLO, 2020, p. 463). Destaca-se que posição de equilíbrio corresponde a um estado onde as forças que agem sobre o sistema se equilibram, ou seja, a soma de todas as forças é igual a zero. Os sistemas vibratórios possuem uma propriedade denominada frequência natural, que corresponde à frequência na qual uma estrutura oscila naturalmente sem qualquer força externa (RAO, 2009, p. 25). Dentro de um contexto de projeto de eixos, a frequência natural é comumente denominada de velocidade crítica (NORTON, 2014, p. 594).

Caso a frequência da força ou torque de excitação de um eixo coincidir com uma de suas velocidades críticas, então a amplitude da resposta de vibração será muito maior que aquela da força ou torque de excitação, levando a deflexões que poderão causar tensões grandes o suficiente para comprometer a funcionalidade da peça, podendo causar falhas graves e rupturas. Diz-se então que o sistema está em ressonância (NORTON, 2013, p. 594).

Dessa forma, a determinação da velocidade crítica de eixos é crucial para preservar a integridade dos equipamentos mecânicos, evitando falhas, fadiga, rupturas, trincas e desgastes excessivos. Segundo Rao (2009, p. 5), a literatura apresenta diversos relatos de falhas em sistemas causadas por ressonância e vibração excessiva, sendo este um efeito significativo no dimensionamento de

máquinas e estruturas. A Figura 1 apresenta dois exemplos de acidentes por ressonância, onde em (a) é apresentado uma falha em estrutura civil e em (b) uma falha em uma máquina.

Figura 1 - Exemplos de falhas causadas por ressonância



(a) Ponte Tacoma durante vibração induzida pelo vento



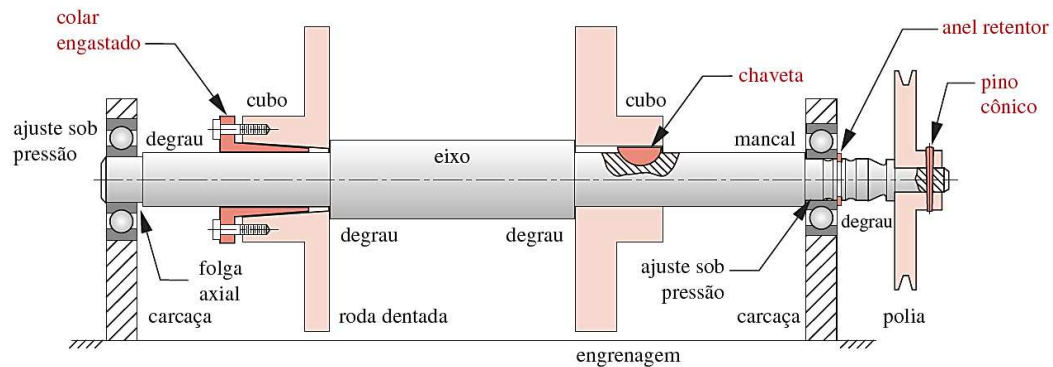
(b) Falha mecânica do helicóptero de resgate devido a vibração excessiva

Fonte: (a) Rao (2009, p. 6); (b) Stochero (2012) apud Zerbielli (2015, p. 13)

A falta de atenção na verificação da rotação de trabalho em equipamentos mecânicos pode ainda levar a avarias, como ruídos excessivos, aumento no consumo de energia, e até mesmo graves acidentes (como observa-se na Figura 1).

Os eixos podem adquirir diversos tipos de geometria, dependendo de quais serão os componentes associados a ele. Segundo Juvinal e Marshek (2016, p. 433), um ou mais componentes, tais como engrenagens, rodas dentadas, polias e cames, são usualmente fixados aos eixos por meio de pinos, chavetas, cavilhas, anéis de pressão e outros elementos de fixação. Na Figura 2 pode-se observar um exemplo da geometria de um eixo em aplicações comuns de engenharia.

Figura 2 - Geometria de um eixo



Fonte: Norton (2013)

Uma análise completa das velocidades críticas de um eixo é um problema complicado, especialmente se a geometria for complexa (NORTON, 2013, p. 595). Por essa razão, diversas metodologias foram propostas com a finalidade de tornar a determinação da velocidade crítica em eixos um processo ágil e eficiente, com a promessa da obtenção de resultados precisos e confiáveis. Como exemplo, pode-se citar o Método de Rayleigh, o qual oferece rapidez, simplicidade e versatilidade conforme citam Leckie e Pestel (1963) (apud SILVA, 2012, p. 11). Nesse contexto, é fundamental avaliar a credibilidade do Método de Rayleigh, a fim de se garantir uma escolha adequada para a aplicação em projetos mecânicos de eixos.

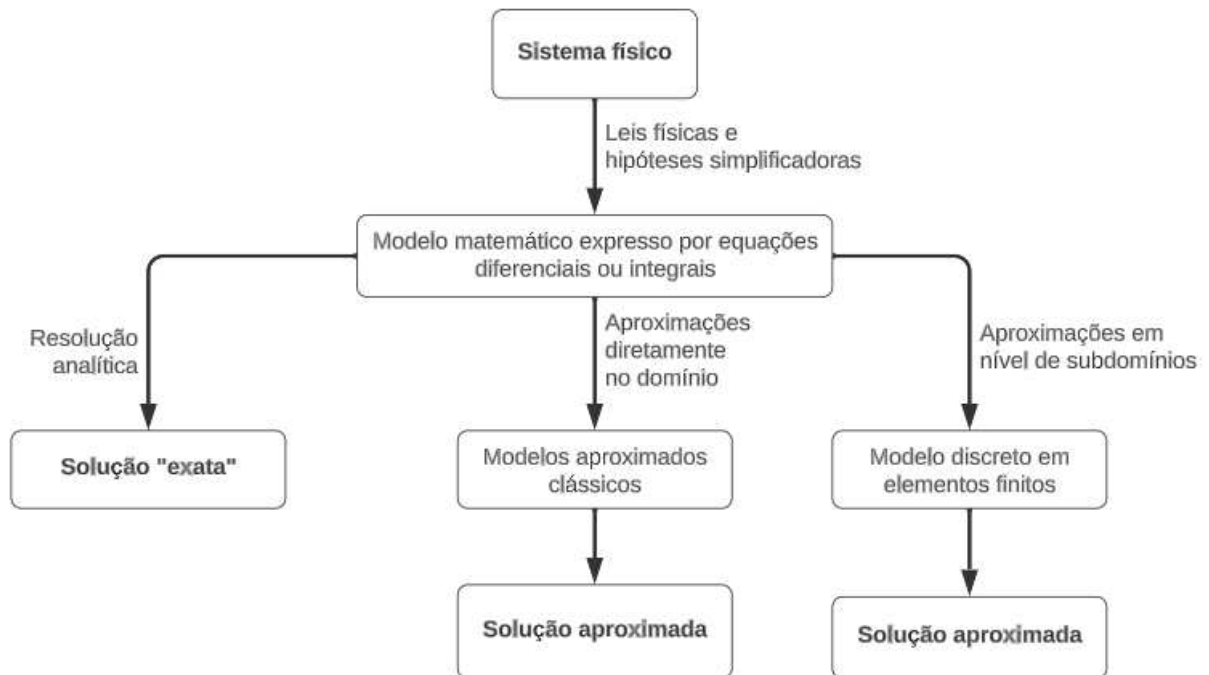
Quando um sistema vibra, ocorre uma transferência de energia entre as parcelas potencial elástica e cinética na hipótese de não haver dissipação (NORTON, 2013, p. 594). Diante disso, o Método de Rayleigh é baseado em conceitos de conservação de energia mecânica e pode ser utilizado para encontrar uma aproximação para a primeira velocidade crítica em sistemas físicos com geometrias iniciais de projeto. Teoricamente, este método também pode ser utilizado para encontrar frequências mais altas que a fundamental, todavia isso é difícil de ser realizado sem uma boa estimativa da forma da curva de deflexão (NORTON, 2013, p. 597).

Destaca-se que neste trabalho, foi adotado o Método de Rayleigh em sua formulação discreta para múltiplos graus de liberdade. Rao (2009, p. 6) relata que grau de liberdade é definido como o número mínimo de coordenadas independentes requeridas para determinar completamente as posições de todas as partes (que se julgue relevante) de um sistema em qualquer instante de tempo.

Outra metodologia que pode ser utilizada para encontrar a velocidade crítica de eixos é a Análise Modal utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), sendo este último correspondente a um método de simulação numérica que busca soluções aproximadas de equações diferenciais parciais através da discretização do sistema em elementos finitos, podendo ser utilizado para resolver a equação diferencial do movimento (SORIANO, 2009, p. 8).

Na Figura 3, é possível visualizar as principais metodologias para resolução de sistemas físicos, de modo que o objetivo é encontrar uma solução desejada para os problemas ou questões relacionadas ao sistema analisado. Neste trabalho foram aplicados todos os métodos de resolução apresentados.

Figura 3 - Metodologias de análise de um sistema físico



Fonte: Adaptado de Soriano (2009, p. 9)

É importante destacar que, no contexto deste trabalho, o “modelo aproximado clássico” expresso na Figura 3 corresponde ao Método de Rayleigh, enquanto o “modelo discreto em elementos finitos” se refere à aplicação do MEF. Ambas as abordagens, em soma da solução analítica, serão detalhadamente exploradas ao longo deste estudo.

1.1 Objetivos

Este capítulo apresenta os objetivos gerais e específicos que se almeja alcançar com o desenvolvimento deste trabalho.

1.1.1 Objetivo geral

Este trabalho tem como objetivo realizar a avaliação do Método de Rayleigh em sua formulação discreta para múltiplos graus de liberdade, tomando como referência a Análise Modal via MEF ou solução analítica (caso existente). Para solução do MEF, foi utilizado como ferramenta o programa ANSYS® *Workbench*. Foi avaliada a determinação da velocidade crítica para vibração lateral e torcional de eixos em geometrias iniciais de projeto.

1.1.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são os seguintes:

- Para análise de vibração lateral, objetiva-se comparar os resultados obtidos para velocidade crítica através do Método de Rayleigh em um eixo em estágio inicial de projeto com os resultados obtidos via MEF por meio do programa ANSYS® *Workbench*. A resolução dos problemas propostos utilizando o Método de Rayleigh envolve a utilização de diferentes considerações de massa e rigidez do sistema, partindo de modelos simplificados até modelos mais elaborados em relação a definição de massas e rigidezes, avaliando as alterações na deflexão da linha elástica, a qual está relacionada com o Método de Rayleigh;
- Para análise de vibração torcional, objetiva-se comparar os resultados obtidos para velocidade crítica através do Método de Rayleigh com a solução analítica.
- Avaliar a influência de maior quantidade de volantes na determinação das velocidades críticas em vibração lateral e torcional de eixos;
- Verificar o benefício do particionamento do eixo em massas discretas, utilizando o Método de Rayleigh para obtenção da velocidade crítica fundamental.

1.2 Justificativa

Considerando a aplicação do Método de Rayleigh em estágios iniciais de projeto, entender o erro cometido mediante essa consideração mostra-se importante para optar por esse método. Ademais, sendo esse erro associado principalmente à qualidade da representação da deflexão estática do eixo, uma discussão aprofundada com diferentes simplificações é útil para que o projetista tome decisões para melhor aplicação desse método.

Adicionalmente, esse estudo também apresenta uma relevância significativa para servir de guia em projetos de equipamentos mecânicos em diversos setores da indústria, uma vez que uma grande parcela de máquinas contém a aplicação de eixos. Ademais, o tema abordado neste trabalho é importante para o enriquecimento de discussões teórico-numéricas acerca da determinação de velocidades críticas de eixos, servindo de complementação às discussões desenvolvidas nas disciplinas de elementos de máquinas.

2 REVISÃO CONCEITUAL E BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta uma revisão conceitual e bibliográfica dos tópicos de relevância para este trabalho. São discutidas as teorias relacionadas à análise de vibrações, MEF e conceitos de mecânica dos sólidos relacionados à obtenção da linha elástica em eixos e vigas.

2.1 Conceitos básicos de vibrações mecânicas

Fancello e Mendonça (2020, p. 463) relatam que a vibração pode ser definida como a oscilação de um sistema mecânico em torno de uma certa posição de equilíbrio em um dado intervalo de tempo. Segundo Rao (2009, p. 6), a teoria da vibração trata do estudo dos movimentos oscilatórios e das forças associadas a eles. Como exemplo de vibração, pode-se citar o balançar de um pêndulo e o movimento de uma corda dedilhada.

Segundo Balachandran e Magrab (2011, p. 21), existem três elementos que constituem um sistema vibratório:

1. Elementos de inércia: armazenam e liberam energia cinética. São caracterizados por uma relação entre força ou momento aplicado e a resposta em aceleração correspondente;
2. Elementos de rigidez: armazenam e liberam energia potencial elástica. São caracterizados por uma relação entre força ou momento aplicado e a resposta em deslocamento linear e angular, respectivamente;
3. Elementos de dissipação ou amortecimento: expressam a perda de energia em um sistema. Através do amortecimento, a energia presente no sistema físico é gradativamente convertida em calor ou som e, dessa forma, o amortecimento pode ser entendido como não conservativo ou dissipativo, uma vez que a energia não é recuperável pelo sistema mecânico.

Além desses elementos, na análise de vibrações em sistemas físicos deve-se considerar forças e momentos aplicados (BALACHANDRAN; MAGRAB, 2011, p. 21). A Tabela 1 apresenta as grandezas e unidades relevantes ao analisar um sistema mecânico vibratório, de modo que a resposta em vibração do sistema está relacionada às grandezas expostas.

Tabela 1 - Grandezas e unidades de componentes de um sistema mecânico vibratório e seus símbolos

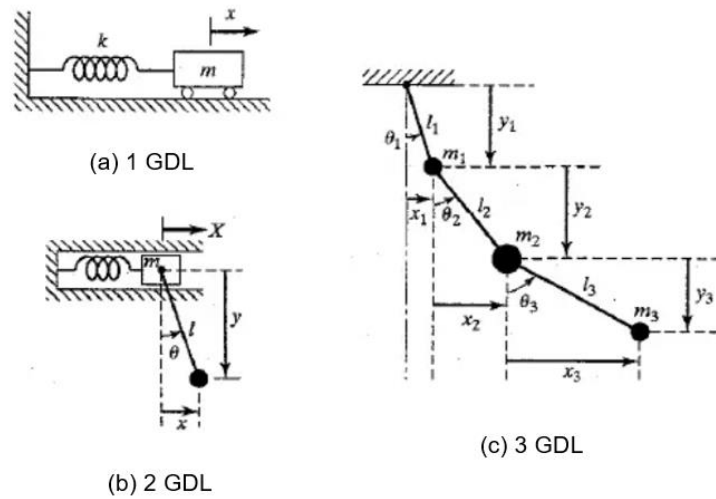
Grandeza	Unidades no Sistema Internacional (SI)
Movimento de translação	
Massa, m	kg
Rigidez, k	N / m
Amortecimento, c	N s / m
Força externa, F	N
Movimento rotacional	
Momento de inércia de massa, I_m	kg m ²
Rigidez torcional, k_t	N m / rad
Amortecimento torcional, c_t	N m s / rad
Momento externo, M	N m

Fonte: Balachandran e Magrab (2011, p. 22)

A análise de vibração em sistemas mecânicos pode ser dividida em duas categorias: sistemas discretos e sistemas contínuos. Os sistemas discretos possuem um número finito de graus de liberdade, enquanto os sistemas contínuos têm um número infinito de graus de liberdade, o que é comum em sistemas estruturais e de máquinas que possuem elementos deformáveis (RAO, 2009, p. 8).

Rao (2009, p. 6) destaca que grau de liberdade (GDL) se refere ao número mínimo de coordenadas independentes requeridas para determinar completamente as posições de todas as partes de um sistema em qualquer instante. A Figura 4 apresenta sistemas discretos com diferentes graus de liberdade, onde A, B e C correspondem a sistemas com um, dois e três graus de liberdade respectivamente. Os termos m, k e x apresentados na Figura 4 (A) correspondem a massa, rigidez e deslocamento linear, respectivamente. Na Figura 4 (B), os termos θ, l, x, y e m correspondem ao deslocamento angular, comprimento, deslocamento na direção x , deslocamento na direção y e massa, respectivamente. Na Figura 4 (C), aparecem os mesmos termos da Figura 4 (B), além de X , que corresponde ao deslocamento linear da massa m na direção x .

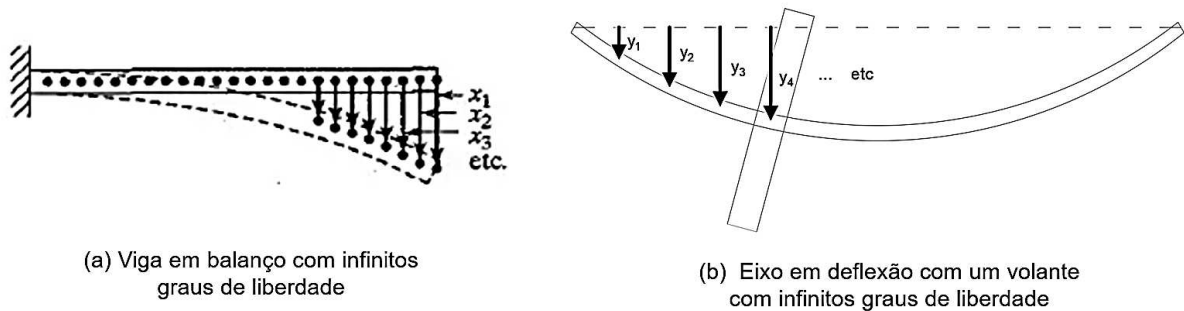
Figura 4 – Sistemas mecânicos com diferentes Graus de Liberdade (GDL)



Fonte: Rao (2009, p. 8)

Na Figura 5, é possível observar um exemplo de um sistema contínuo, onde (a) representa uma viga em balanço com infinitos graus de liberdade e (b) representa um eixo com volante, correspondendo a um tipo de problema similar ao que será abordado neste trabalho. Os termos x_i e y_i correspondem à deflexão estática.

Figura 5 - Exemplo de sistemas contínuos



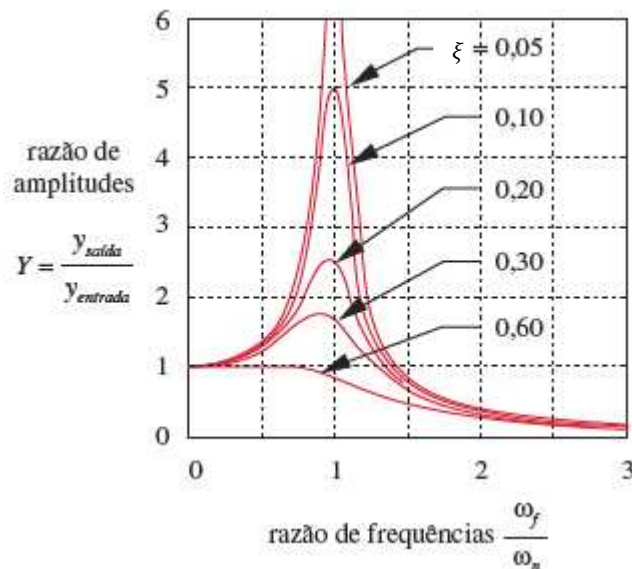
Fonte: (a) Rao (2009, p. 8); (b) Próprio Autor (2023)

Segundo Inman (2018, p.11), depois da definição de grau de liberdade, a próxima importante classificação de problemas de vibração é quanto à natureza de entrada ou excitação do sistema, de modo que a vibração pode ser livre ou forçada. Inman (2018, p. 11) também destaca que a vibração livre se refere ao movimento resultante de um deslocamento inicial e/ou velocidade não nulos do sistema, com nenhuma força ou momento externo aplicado, exceto aquelas provenientes das condições de vínculo e/ou fixação do sistema.

Por outro lado, Rao (2009, p.8) destaca que se um sistema estiver sujeito a uma força externa (além das forças decorrentes dos vínculos/fixações do sistema), a vibração resultante é categorizada como vibração forçada. Neste caso, se a frequência da força externa coincidir com uma das frequências naturais do sistema, então ocorre a ressonância, onde o sistema sofre grandes oscilações, podendo causar falhas e rupturas catastróficas.

A Figura 6 mostra a resposta em amplitude de vibração forçada para um sistema com 1 GDL, onde ω_n é a frequência natural, ω_f é a frequência da força externa, $Y_{entrada}$ e $Y_{saída}$ são as amplitudes de deslocamento da entrada e saída, respectivamente, e ξ é o fator de amortecimento do sistema. Observa-se que quando ω_f for igual ω_n , o sistema entra em ressonância e a amplitude da resposta se aproxima do infinito na ausência de amortecimento. Destaca-se que para aplicação em projetos, a estratégia usual é manter todas as frequências de excitação abaixo da primeira velocidade crítica (ou frequência natural) do eixo por alguma margem de segurança, onde um coeficiente de pelo menos 3 a 4 é desejável (NORTON, 2013, p. 595).

Figura 6 - Resposta à vibração forçada externamente



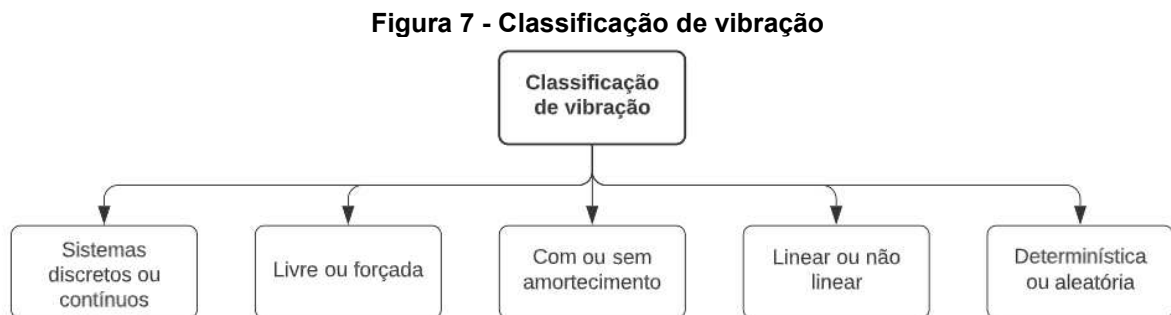
Fonte: Adaptado de Norton (2013, p. 594)

A magnitude da excitação que atua sobre um sistema vibratório pode variar de forma aleatória ou determinística ao longo do tempo. Quando a excitação é aleatória, ela é imprevisível e deve ser descrita em termos de probabilidade e

estatística, como afirma Inman (2018, p. 77). Já quando a excitação é conhecida em qualquer instante, ela é denominada vibração determinística, conforme destacado por Rao (2009, p.9).

Quando todos os componentes básicos de um sistema vibratório (mola, massa e amortecedor) se comportam de forma linear, a vibração resultante é chamada de linear. No entanto, se pelo menos um dos elementos apresentar um comportamento não linear, a vibração também é dita não linear (RAO, 2009, p. 9).

Resumidamente, Rao (2009, p.8) classifica os sistemas vibratórios em cinco categorias distintas, como apresentado na Figura 7.



Fonte: Adaptado de Rao (2009, p. 8)

Embora os elementos de máquinas possam ser considerados como sistemas contínuos, a análise de vibração desses sistemas pode ser complexa devido à necessidade de solucionar equações diferenciais parciais, para as quais soluções analíticas não estão sempre disponíveis. Em contrapartida, a análise de sistemas com muitos graus de liberdade exige apenas a solução de equações diferenciais ordinárias, o que pode ser mais simples em comparação aos métodos de resolução aplicados aos sistemas contínuos. Por esse motivo, muitas vezes aproxima-se sistemas contínuos como sistemas com vários graus de liberdade (RAO, 2009, p. 207).

Com base nisso, no caso deste trabalho, a análise de vibração de eixos é caracterizada como um sistema contínuo com infinitos graus de liberdade considerando vibração livre, sem amortecimento e linear. Vale ressaltar que em aplicações de máquinas industriais com acionamento por motor elétrico, a potência e rotação são constantes e, desse modo, tem-se uma condição de vibração determinística. A obtenção da velocidade crítica de sistemas mecânicos pode se dar

através de métodos analíticos, aproximados (como o Método de Rayleigh), numéricos (via MEF ou outros) ou experimentais.

2.2 Análise de vibração

De acordo com Rao (2009, p. 9), o procedimento de análise de vibrações envolve a modelagem matemática, solução das equações governantes e, posteriormente, interpretação dos resultados. Rao (2009, p. 208) relata que a segunda lei de Newton pode ser usada para deduzir as equações do movimento de sistemas com vários graus de liberdade utilizando

$$m_i \overrightarrow{\ddot{x}}(t) = \sum_j \overrightarrow{F}_{ij} \text{ (para massa } m_i) \quad (1)$$

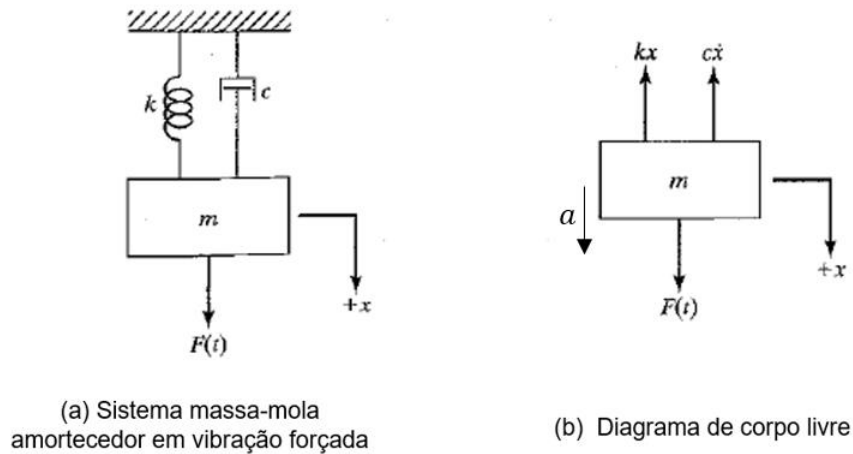
e

$$J_i \overrightarrow{\ddot{\theta}}(t) = \sum_j \overrightarrow{M}_{ij} \text{ (para corpo rígido de inércia } J_i), \quad (2)$$

onde $\sum_j \overrightarrow{F}_{ij}$ representa a soma de todas as forças que agem sobre a massa m_i , e $\sum_j \overrightarrow{M}_{ij}$ indica a soma dos momentos que agem sobre o corpo rígido de momento de inércia de massa com eixo que seja paralelo à direção do momento resultante. A aceleração linear e angular são representadas em função do tempo t pelos vetores $\overrightarrow{\ddot{x}}(t)$ e $\overrightarrow{\ddot{\theta}}(t)$, respectivamente.

A Figura 8 apresenta um sistema massa-molda amortecido em vibração forçada com um grau de liberdade, onde a é a aceleração da massa m , a qual pode ser expressa também como a segunda derivada do deslocamento x .

Figura 8 - Sistema massa-mola amortecido em vibração forçada



Fonte: Adaptado de Rao (2009, p. 101)

Desse modo, aplicando a segunda lei de Newton dada pela Equação (1) ao sistema ilustrado na Figura 8, a equação do movimento para vibração livre pode ser expressa por

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = F(t), \quad (3)$$

onde $F(t)$ é a força atuando sobre a massa m e $x(t)$, $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$ são o deslocamento, a velocidade e a aceleração, respectivamente, da massa m (RAO, 2007, p.33). Com base na Equação (3), pode-se notar que as características essenciais de um sistema vibratório incluem uma massa m , produzindo uma força de inércia $m \ddot{x}(t)$, uma mola de rigidez k , produzindo uma força de resistência $k x(t)$, e um mecanismo de amortecimento que dissipa energia, o qual produz a força de amortecimento $c \dot{x}(t)$, conforme exposto no início da Subseção 2.1. Caso o sistema analisado fosse um eixo, vale ressaltar que o deslocamento seria angular e, portanto, ao invés da análise de resposta sob o deslocamento linear $x(t)$, a resposta se daria sob o deslocamento angular $\theta(t)$.

2.2.1 Vibração Livre sem amortecimento com um grau de liberdade

Na ausência de amortecimento e de forças externas sob o sistema vibratório, a Equação (3) pode ser reescrita como sendo

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = 0, \quad (4)$$

caracterizando uma vibração livre. A solução da Equação (4) pode ser encontrada assumindo

$$x(t) = C e^{st} \quad (5)$$

onde C e s são constantes a serem determinadas. Substituindo a Equação (5) em (4), tem-se

$$C(ms^2 + k) = 0, \quad (6)$$

onde C igual a zero apresenta a solução trivial não desejada. Logo,

$$ms^2 + k = 0, \quad (7)$$

e, conseqüentemente,

$$s = \pm \left(-\frac{k}{m}\right)^{1/2}, \quad (8)$$

onde $i = (-1)^{1/2}$ e, portanto,

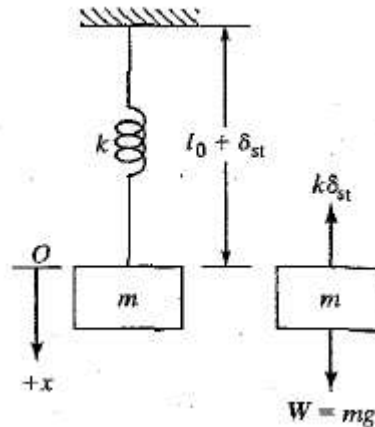
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \left[\frac{rad}{s} \right]. \quad (9)$$

A Equação (9) apresenta o autovalor do problema de vibração representado pela Equação (4), de modo que este autovalor é definido como a frequência natural (RAO, 2009, p. 54). Em unidades de frequência linear, a frequência natural é dada por

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ [Hz]}. \quad (10)$$

Um problema comumente analisado em problemas de vibrações com um grau de liberdade é o sistema massa mola em posição vertical como apresentado na Figura 9, de modo que a equação do movimento é expressa pela Equação (4). Destaca-se que l_0 corresponde ao comprimento inicial da mola de rigidez k e δ_{st} corresponde a variação do comprimento da mola devido a aplicação da força peso W .

Figura 9 - Sistema massa-mola em posição vertical



Fonte: RAO (2009, p. 53)

Desse modo, a constante de mola k desse sistema pode ser expressa em termos da massa m , onde (RAO, 2009, p. 53)

$$k = \frac{W}{\delta_{st}} = \frac{mg}{\delta_{st}}. \quad (11)$$

Substituindo a Equação (11) em (10), tem-se

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}. \quad (12)$$

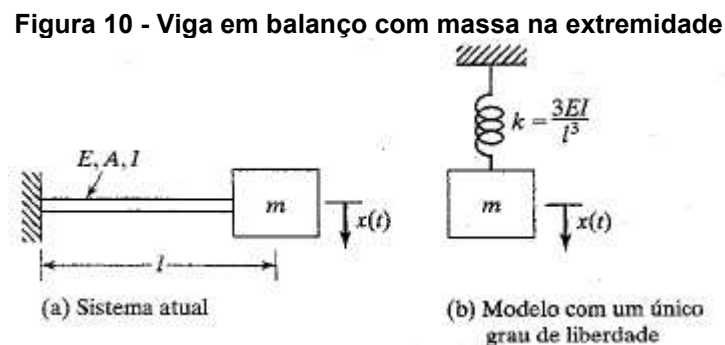
Dessa forma, quando uma determinada massa vibra em sentido vertical, é possível calcular a frequência natural a partir da medição da deflexão estática δ_{st} de modo que, para o caso de um grau de liberdade, não é necessário saber diretamente qual é a rigidez da mola k ou a massa m do sistema (RAO, 2009, p. 56).

É importante ter um profundo entendimento da teoria que abrange a modelagem de sistemas vibratórios com um número finito de graus de liberdade, ou seja, sistemas discretos, pois frequentemente é vantajoso aproximar sistemas contínuos como sistemas com vários graus de liberdade, a fim de se alcançar uma maior simplicidade na resolução do problema, como mencionado por RAO (2009, p. 207).

2.2.2 Equivalência de sistemas mecânicos

A equivalência de sistemas mecânicos é uma abordagem amplamente empregada na análise do comportamento dinâmico. Essa técnica se baseia na determinação da rigidez equivalente do sistema, preservando suas características físicas originais, onde é possível simplificar problemas que inicialmente podem parecer matematicamente complexos.

A Figura 10 ilustra a conceito supracitado, onde uma viga em balanço com uma massa m em sua extremidade é descrita como um sistema massa-mola com um GDL. Destaca-se que a viga possui uma área de seção transversal A , momento de inércia de área I , módulo de elasticidade longitudinal E e comprimento l (RAO, 2009, p. 12).

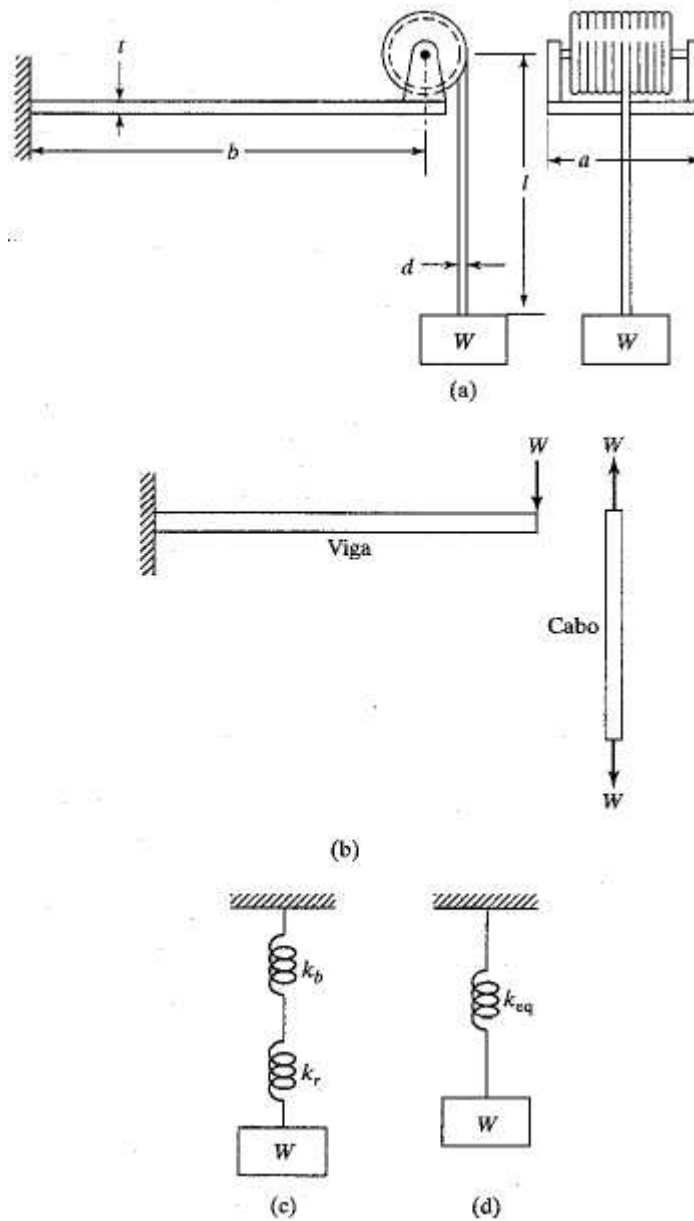


Fonte: RAO (2009, p. 12)

Um outro exemplo é apresentado na Figura 11, onde um tambor de içamento é apoiado sob a extremidade de uma viga em balanço de comprimento b , espessura t e rigidez k_b . O cabo de içamento possui um comprimento l , um diâmetro efetivo de seção transversal d e uma rigidez k_r . Ademais, o tambor iça um corpo de peso W (RAO, 2009, p. 14).

O tambor de içamento ilustrado na Figura 11(a) pode ser descrito em termos das rigidezes da viga e do cabo, representados na Figura 11(b). Essas rigidezes podem ser modeladas como um sistema massa-mola suspenso por molas em série, como mostrado na Figura 11(c). Ao associar essas molas de maneira apropriada, é possível representar o tambor de içamento como um sistema massa-mola, conforme demonstrado na Figura 11(d).

Figura 11 - Tambor de içamento



Fonte: RAO (2009, p. 14)

2.3 Método de Rayleigh

O Método de Rayleigh pode ser utilizado para determinar de forma aproximada a frequência natural de sistemas contínuos sem amortecimento (CRAIG, R.; KURDILA, A. 2006, p. 398). O Método de Rayleigh é baseado no princípio da conservação de energia no contexto de um sistema vibratório não amortecido. Para exemplificar isso de um modo mais concreto, é possível deduzir a Equação (4) a partir do princípio da conservação de energia, partindo da afirmação de que a energia mecânica total de um sistema vibratório corresponde a uma parcela de energia potencial e outra de energia cinética. Logo, a soma dessas duas parcelas permanece constante. Desse modo, o princípio da conservação da energia pode ser expresso como (adaptado de RAO, 2009, p. 53)

$$T(t) + U(t) = E_s, \quad (13)$$

onde $T(t)$ é a energia cinética, $U(t)$ é a energia potencial elástica e E_s é a energia mecânica do sistema. Devido ao princípio da conservação de energia e, conseqüentemente, a característica de um sistema não dissipativo, E_s não varia ao longo do tempo. Portanto,

$$\frac{d}{dt} [T(t) + U(t)] = 0. \quad (14)$$

A energia cinética do sistema $T(t)$ é dada por

$$T(t) = \frac{1}{2} m [\dot{x}(t)]^2, \quad (15)$$

e a energia potencial elástica do sistema $U(t)$ é expressa por

$$U(t) = \frac{1}{2} k [x(t)]^2. \quad (16)$$

Substituindo as Equações (15) e (16) em (14), tem-se como resultado a Equação (4). A Equação (13) pode ser reescrita da seguinte forma

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \quad (17)$$

onde os índices 1 e 2 indicam diferentes instantes de tempo (RAO, 2009, p. 64). No instante 1, a massa está passando por sua posição de equilíbrio estático e admite-se $U_1 = 0$ como referência para a energia potencial. No instante 2, a massa está em seu máximo deslocamento e, portanto, $T_2 = 0$ (RAO, 2009, p. 64). Desse modo,

$$T_1 + 0 = 0 + U_2 \quad (18)$$

ou seja,

$$T_{m\acute{a}x} = U_{m\acute{a}x} \quad (19)$$

onde $T_{m\acute{a}x}$ e $U_{m\acute{a}x}$ representam os valores máximos da energia cinética e potencial respectivamente, desde que o sistema esteja em movimento harmônico simples, ou seja,

$$x = X \cos(\omega_n t). \quad (20)$$

onde X é o deslocamento máximo.

Dessa forma, de acordo com as Equações (15) e (16), os máximos valores de T_1 e U_2 são dados quando x também apresentar seu máximo valor, ou seja, quando $\cos(\omega_n t) = 1$. Dessa forma, pode-se reescrever as Equações (15) e (16) como sendo

$$T_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} m \omega_n^2 X^2 \quad (21)$$

e

$$U_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} k X^2. \quad (22)$$

Substituindo as Equações (21) e (22) em (19), tem-se que a frequência natural ou velocidade crítica é dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (23)$$

2.3.1 Análise de vibração de eixos pelo Método de Rayleigh

Existem inúmeras velocidades críticas que podem levar um eixo a entrar em condições de ressonância. Entretanto, para o projetista, apenas a mais baixa delas e, ocasionalmente, a segunda são relevantes, pois as demais costumam ser tão elevadas que, usualmente, ficam fora da faixa de velocidades de operação do equipamento (HALL, 1961, p. 167).

No que diz respeito às vibrações de eixos, é crucial destacar a existência de três tipos preocupantes: a vibração lateral, o rodopio de eixo e a vibração torcional (NORTON, 2013, p. 596). Esses tipos de vibração serão discutidos em detalhes a seguir.

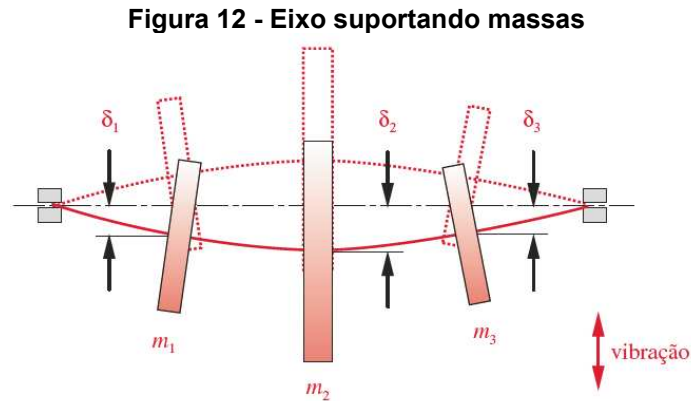
2.3.2 Vibração Lateral

Segundo Hall (1961, p. 167), todos os eixos defletem durante rotação, mesmo na ausência de cargas externas. A deflexão depende da rigidez do eixo, dos suportes ou mancais, das massas próprias e dos elementos anexos, do desbalanceamento de massas em relação ao eixo de rotação e do amortecimento do sistema.

De acordo com Rao (2009, p. 252), o Método de Rayleigh em sua formulação discreta para múltiplos graus de liberdade pode ser utilizado para determinar o valor aproximado da velocidade crítica fundamental para vibração lateral e torcional de eixos.

“O Método de Rayleigh iguala as energias potencial e cinética do sistema. A energia potencial está na forma de energia de deformação no eixo defletido e é máxima na deflexão máxima. A energia cinética é um máximo quando o eixo vibrando passa pela posição não defletida com velocidade máxima” (NORTON, 2013, p. 596)

Considerando um eixo que suporta vários volantes¹ como mostrado na Figura 12, pode-se dizer que a energia potencial do sistema é a energia de deformação do eixo defletido, que é igual ao trabalho realizado pelas cargas estáticas (RAO, 2009, p. 254).



Fonte: Norton (2013, p. 597)

Dessa forma, a energia potencial gravitacional do sistema é dada por

$$U = \frac{1}{2} (m_1 g \delta_1 + m_2 g \delta_2 + \dots + m_i g \delta_i), \quad (24)$$

onde $m_i g$ é a carga estática resultante do volante de massa m_i em virtude da aceleração gravitacional g , e δ_i é a deflexão estática do centro de massa m_i (RAO, 2009, p. 254).

De acordo com Norton (2013, p. 596), a energia potencial elástica do eixo defletido pode ser ignorada por ser pequena comparada à energia do volante. Segundo Rao (2009, p. 254), para vibração livre, a energia cinética máxima devido às massas pode ser expressa por

$$T = \frac{\omega_n^2}{2} (m_1 \delta_1^2 + m_2 \delta_2^2 + \dots + m_i \delta_i^2), \quad (25)$$

onde ω_n representa a velocidade crítica do sistema.

Igualando as equações (24) e (25), têm-se

¹ Volantes são massas genéricas que representam elementos de máquinas utilizados para transmissão de torque e potência, tais como engrenagens, polias, rodas de corrente, entre outros.

$$\omega_n = \sqrt{g \frac{\sum_{i=1}^n m_i \delta_i}{\sum_{i=1}^n m_i \delta_i^2}}, \quad (26)$$

que representa a formulação do Método de Rayleigh, onde n é o número de massas discretas de um dado sistema. É importante destacar que a aplicação do Método de Rayleigh permite que seja encontrada a primeira velocidade crítica (fundamental) e, ocasionalmente, a segunda. Todavia, isso é difícil de ser feito sem uma boa estimativa da forma da curva de deflexão (NORTON, 2013, p. 597).

Ao analisarmos a Equação (26), pode-se notar uma forte relação entre a velocidade crítica e a deflexão δ_i . Assim, se a deflexão for determinada por métodos pouco precisos, o resultado encontrado para velocidade crítica também apresentará baixa precisão. De acordo com Rao (2009, p. 254) a curva de deflexão estática é usada como uma boa aproximação da curva de deflexão dinâmica, desde que a curva de deflexão estática represente razoavelmente a curva de deflexão dinâmica.

É importante ressaltar que uma curva de deflexão estática que não tenha plena concordância com as condições de vibração do sistema pode resultar em uma determinação menos precisa da velocidade crítica do eixo. Entretanto, essa abordagem ainda pode ser útil em projetos de máquinas devido a adoção do coeficiente de segurança.

2.3.2.1 Deflexão estática pelo Método da Integração Direta

Existem diversas maneiras de calcular a deflexão estática de um eixo ou viga. Uma das formas é através da determinação da linha elástica através da equação diferencial dada por

$$E I_a \frac{d^2 y}{dx_p^2} = M_f(x), \quad (27)$$

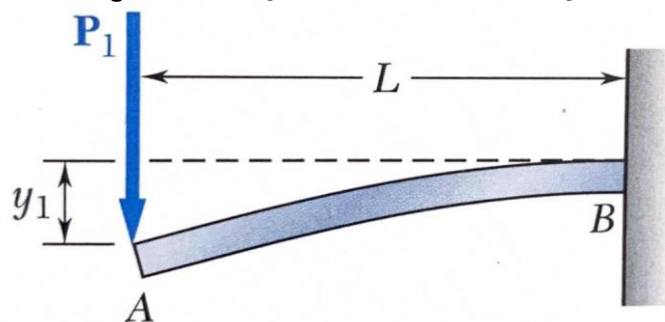
a qual relaciona o momento fletor interno $M_f(x)$, o módulo de elasticidade longitudinal E próprio do material constituinte do eixo e o momento de inércia de área da seção transversal em relação à linha neutra I_a à segunda derivada da deflexão y de uma viga ou eixo, em que x_p representa a posição ao longo de seu comprimento (BEER et al., 2021, p. 581).

Vale destacar que a Equação (27) só é válida para deflexões pequenas e não inclui os efeitos de deflexão devido a forças cortantes transversais (NORTON, 2013, p.163). Além disso, o material deve ser linear-elástico, ou seja, a deformação deve ser proporcional a tensão. Ademais, em casos de geometrias complexas, como por exemplo em casos em que a seção transversal de um eixo ou viga varie demasiadamente, pode ser mais viável obter a deflexão estática por meio do MEF.

2.3.2.2 Deflexão estática pelo Método do Trabalho e da Energia

A deflexão estática também pode ser determinada por métodos de energia de deformação, o qual pode ser definido como o aumento de energia elástica associado a deformação de determinada viga ou eixo (BEER et al., 2021, p. 736). Para determinação da energia de deformação elástica associada a uma viga em carregamento transversal, pode-se admitir uma viga de comprimento L e seção transversal de área A uniforme, engastada em B e submetida a uma força transversal P_1 que cresce lentamente e causa a deflexão estática y_1 , conforme apresenta a Figura 13.

Figura 13 – Viga em balanço submetida a uma força transversal



Fonte: Beer et al. (2015, p. 754)

O trabalho elementar dU realizado pela força P_1 à medida que a viga flexiona pode ser dado pelo produto da força P_1 com o pequeno deslocamento transversal dy (BEER et al., 2021, p. 736), ou seja,

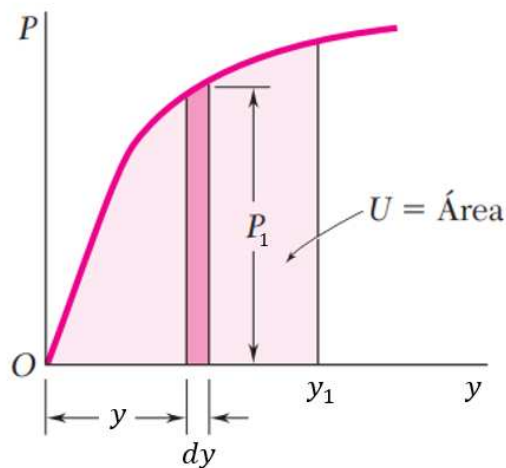
$$dU = P_1 dy . \quad (28)$$

Desse modo, o trabalho total U realizado pela força P_1 enquanto a barra sofre uma deflexão y_1 é dado por

$$U = \int_0^{y_1} P_1 dy . \quad (29)$$

O trabalho da força P_1 resulta em um aumento de energia potencial associada a deformação da barra. Desse modo, a Equação (29) define a energia de deformação e pode ser representada graficamente no diagrama força *versus* deslocamento transversal, conforme apresenta a Figura 14 (BEER et al., 2021, p. 737).

Figura 14 - Trabalho realizado pela força P é igual a área sob o diagrama força-deformação



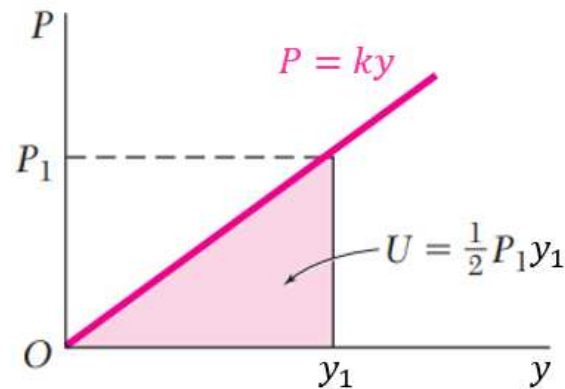
Fonte: Adaptado de Beer et al. (2011, p. 691)

Para um comportamento linear e elástico, a parte do diagrama força-deslocamento envolvida pode ser representada como uma linha reta cuja equação é dada por

$$P_1 = ky , \quad (30)$$

onde k é uma constante. A Figura 15 apresenta a reta dada pela Equação (30).

Figura 15 - Trabalho realizado para um comportamento linear e elástico



Fonte: Adaptado de Beer et al. (2011, p. 691)

Substituindo a Equação (30) em (29) tem-se que

$$U = \int_0^{y_1} ky \, dy = \frac{1}{2} ky_1^2, \quad (31)$$

de modo que, ao substituir a Equação (30) em (31), a energia de deformação pode ser expressa como

$$U = \frac{1}{2} P_1 y_1. \quad (32)$$

É importante salientar que a equivalência entre o trabalho externo e a energia de deformação só é verdadeira quando não há perdas energéticas sob a forma de calor.

Pode-se comparar a Equação (32) com a Equação (24) utilizada pelo Método de Rayleigh no caso de vibração lateral de eixos, onde ambas representam a mesma equação, entretanto a Equação (24) envolve o particionamento do sistema em massas discretas. Vale ressaltar que, caso seja de conhecimento a energia de deformação e as cargas do sistema, é possível obter a deflexão estática y_1 utilizando a Equação (32).

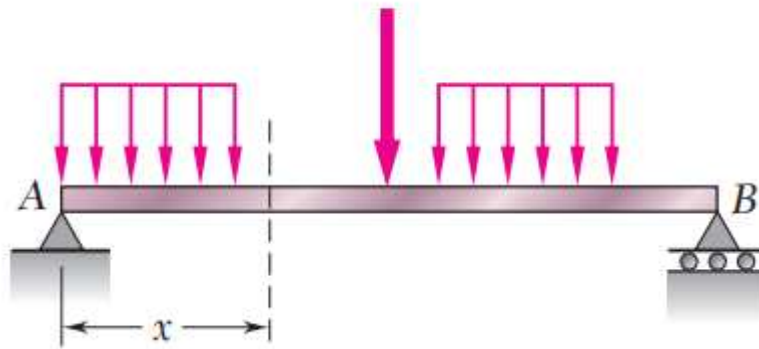
A energia de deformação U pode ser escrita para um corpo submetido a tensões normais uniaxiais como sendo

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV, \quad (33)$$

onde σ_x são as tensões normais, E é o módulo de elasticidade longitudinal e V é o volume. É importante ressaltar que a expressão supracitada é válida apenas para deformações elásticas e é conhecida como energia de deformação elástica do corpo (BEER et al., 2021, p. 740).

Para demonstração da energia de deformação em uma viga ou eixo em flexão, pode-se considerar uma viga AB submetida a um carregamento conforme apresenta a Figura 16.

Figura 16 - Viga em carregamento transversal



Fonte: Beer et al. (2011, p. 693)

Seja um determinado momento fletor M a uma distância x da extremidade A . Desprezando o efeito da força cortante e levando em conta apenas as tensões normais dadas por

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_a}, \quad (34)$$

onde M_z é o momento fletor interno ao longo do eixo z , y é a distância da superfície neutra e I_a é o momento de inércia de área da seção transversal em relação a um eixo que passa pelo centroide da seção transversal perpendicular ao plano do momento (BEER et al., 2021, p. 331). Substituindo a Equação (34) em (33) tem-se

$$U = \int \frac{M^2 y^2}{2EI_a^2} dV. \quad (35)$$

Fazendo $dV = dA dx$, em que dA representa um elemento de área da seção transversal, e lembrando que $M^2/2EI_a^2$ é função apenas de x , tem-se que

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI_a^2} \left(\int y^2 dA \right) dx. \quad (36)$$

Sabendo que $\int y^2 dA$ corresponde ao momento de inércia I_a da seção transversal em relação a linha neutra, pode-se escrever que (BEER et al., 2021, p. 742)

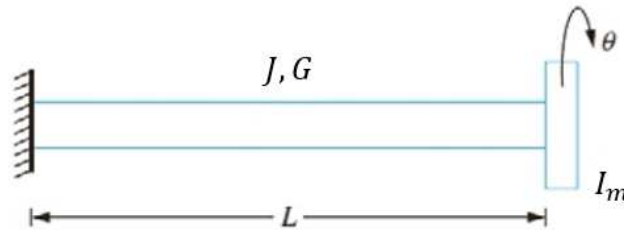
$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI_a} dx. \quad (37)$$

Desse modo, a Equação (37) pode ser utilizada para determinar a energia de deformação associada a uma viga em flexão.

2.3.3 Vibração torcional

De acordo com Assunção, Neto e Santos (2022, p. 127), a vibração torcional ocorre em sistemas como ilustrado na Figura 17, onde um disco de momento de inércia de massa I_m é atrelado a uma viga circular de comprimento L , módulo de elasticidade ao cisalhamento G e momento polar de inércia J . Destaca-se ainda que θ representa o ângulo de torção.

Figura 17 - Exemplo de vibração torcional em uma viga



Fonte: Adaptado de Neto, Assunção e Santos (2022, p. 127)

Norton (2013, p. 599) relata que as equações que descrevem a vibração torcional são análogas às equações que descrevem as vibrações laterais. Para a análise de vibrações torcionais, considera-se o torque aplicado ao sistema, o momento de inércia de massa e a constante torcional de mola. A velocidade crítica para vibrações torcionais é dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{I_m}}, \quad (38)$$

onde k_t representa a constante torcional de mola e I_m o momento de inércia de massa.

De acordo com Inmann (2018 apud NETO; ASSUNÇÃO; SANTOS, 2022, p. 128), a constante torcional de mola apresentada na Equação (38) pode ser calculada utilizando

$$k_t = \frac{J G}{L}, \quad (39)$$

onde J é o momento polar de inércia (correspondente à seção transversal do eixo), G é o módulo de rigidez torcional do material e L é o comprimento do eixo.

Para um eixo circular, o momento polar de inércia é dado por

$$J = \frac{\pi d^4}{32}, \quad (40)$$

onde d representa o diâmetro do eixo (NORTON, 2013, p.600).

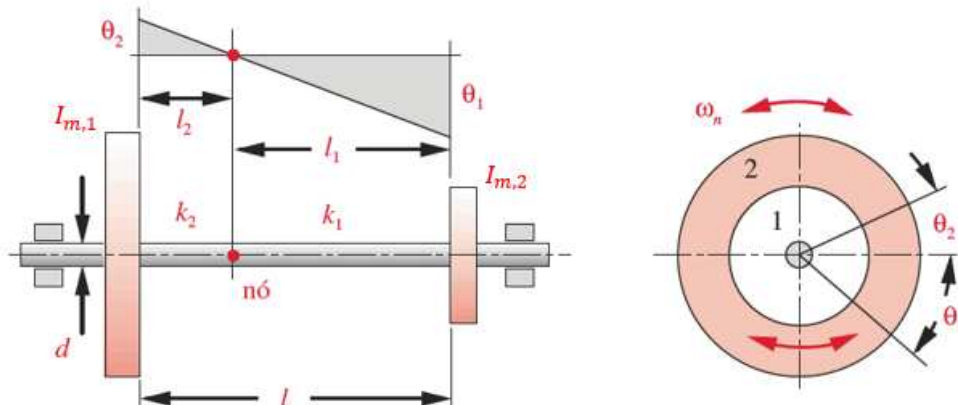
De acordo com Beer, Cornwell e Johnston (2012, p. 1304), o momento de inércia de massa para um cilindro de massa m , raio externo r_{ext} e com rotação ao redor de seu eixo axial pode ser calculado utilizando

$$I_m = \frac{1}{2} m r_{ext}^2. \quad (41)$$

Destaca-se que a constante torcional de mola k_t está relacionado a uma característica do eixo, enquanto o momento de inércia de massa I_m é uma propriedade relativa apenas ao volante.

A Figura 17 apresenta um eixo exposto à vibração torcional com apenas um volante. No entanto, em aplicações de eixos associados à transmissão de torque é comum encontrarmos ao menos dois volantes. De acordo com Norton (2013, p. 600), nesses casos os discos oscilarão torcionalmente na mesma velocidade crítica, com defasagem de 180° . A Figura 18 apresenta a configuração geral do problema de vibração torcional em eixos com dois volantes, onde um volante apresenta momento de massa e deflexão torcional $I_{m,1}$ e θ_1 , e outro $I_{m,2}$ e θ_2 , respectivamente. Ademais, k_1 e k_2 representa uma propriedade do eixo que conecta ambos os volantes, sendo função do comprimento entre volantes como expresso na Equação (39).

Figura 18 – Vibração torcional de dois discos em um eixo comum



Fonte: Adaptado de Norton (2013, p. 600)

Norton (2013, p. 601) ainda relata que a velocidade crítica em sistemas que apresentam vibração torcional com dois volantes, como apresentado na Figura 18, pode ser obtida utilizando

$$\omega_n = \sqrt{k_t \frac{I_{m,1} + I_{m,2}}{I_{m,1} I_{m,2}}}, \quad (42)$$

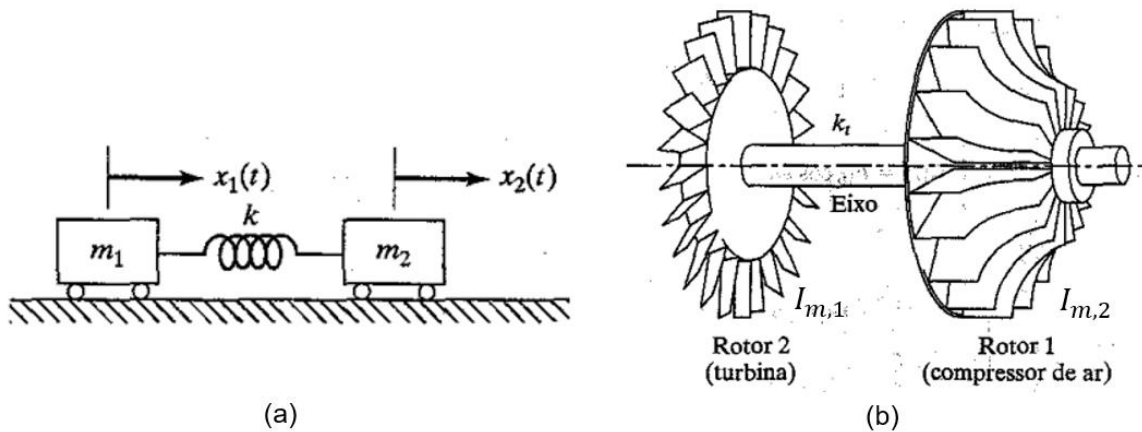
onde a velocidade crítica é determinada em termos das propriedades de inércia conhecidas dos dois discos e a constante torcional de mola k_t do eixo.

Destaca-se que entre os volantes ilustrados na Figura 18 existe um ponto do eixo chamado nó, onde a deflexão angular θ é nula e sua posição ao longo do comprimento do eixo pode ser encontrada por (NORTON, 2013, p. 600)

$$l_1 = \frac{I_{m,1} l}{I_{m,1} + I_{m,2}}, \quad (43)$$

RAO (2009, p. 191) relata que sistemas como o exposto na Figura 18 podem ser caracterizados como sistemas semidefinidos ou irrestritos. Outros exemplos desses tipos de sistemas podem ser visualizados na Figura 19, onde em (a) pode-se considerar a representação de dois vagões ferroviários de massa m_1 e m_2 com uma mola de acoplamento k . Já em (b), pode-se considerar a representação de dois rotores de momento de inércia de massa $I_{m,1}$ e $I_{m,2}$ ligados por um eixo de rigidez sob torção k_t , similar ao exemplo exposto na Figura 18.

Figura 19 - Sistemas semidefinidos



Fonte: Adaptado de RAO (2009, p. 192)

Considerando o sistema apresentado na Figura 19(a), as equações do movimento podem ser escritas como (RAO, 2009, p. 191)

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (44)$$

Para vibração livre, admite-se que o movimento seja harmônico. Logo,

$$x_j(t) = X_j \cos(\omega t + \theta_j), \quad j = 1, 2, \quad (45)$$

em que X_j é a amplitude do movimento, ω é a frequência, t é o instante de tempo e θ_j é o ângulo de fase.

Substituindo a Equação (45) em (44) tem-se (RAO, 2009, p. 191)

$$\begin{cases} (-m_1 \omega^2 + k)X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + (-m_2 \omega^2 + k)X_2 = 0 \end{cases} \quad (46)$$

Dessa forma, igualando os coeficientes de X_1 e X_2 a zero, obtêm-se a equação característica dada por

$$\omega^2 [m_1 m_2 \omega^2 - k(m_1 + m_2)] = 0, \quad (47)$$

onde, através da solução da equação supracitada, pode-se obter as frequências naturais

$$\omega_1 = 0 \quad e \quad \omega_2 = \sqrt{k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}. \quad (48)$$

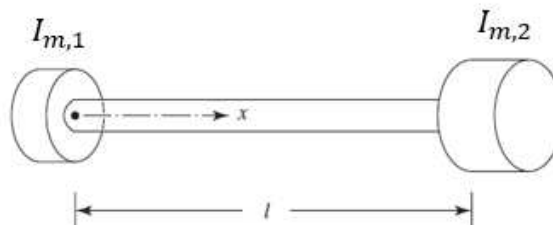
Os sistemas que possuem uma das frequências naturais nulas são denominados sistemas semidefinidos. Fisicamente, isso demonstra que quando a frequência natural é igual a zero o sistema não está oscilando, ou seja, o sistema move-se como um todo, sem nenhum movimento relativo entre as duas massas (translação de corpo rígido) (RAO, 2009, p. 191).

Pode-se notar que as Equações (48) e (42) são similares, de modo que uma corresponde a um sistema em deslocamento linear e outra a um sistema em deslocamento angular, respectivamente. Logo, tanto o método da conservação de energia de Rayleigh quando o método do somatório de forças e momentos de Newton convergem para a mesma equação.

2.3.3.1 Solução analítica para vibração torcional

RAO (2007, p. 283) apresenta uma solução analítica para o cálculo da vibração torcional de eixos considerando dois volantes localizados em sua extremidade, conforme apresenta a Figura 20.

Figura 20 - Eixo com volantes nas duas extremidades sob vibração torcional



Fonte: Adaptado de RAO (2007, p. 283)

A velocidade crítica pode ser determinada utilizando

$$\left(\frac{\alpha_n^2}{\beta_1\beta_2} - 1\right) \tan \alpha_n = \alpha_n \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right), \quad (49)$$

onde

$$\alpha_n = \frac{\omega_n l}{c}, \quad (50)$$

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (51)$$

$$\beta_1 = \frac{\rho J l}{I_{m,1}} \quad (52)$$

e

$$\beta_2 = \frac{\rho J l}{I_{m,2}}. \quad (53)$$

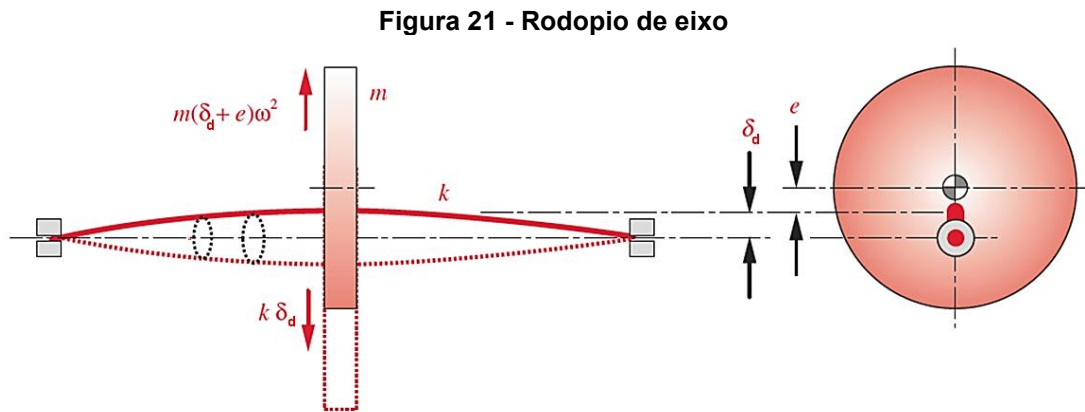
Destaca-se que l é a distância entre volantes conforme exposto na Figura 20, G é o módulo de elasticidade transversal do material do eixo, ρ é a densidade do material do eixo, J é o momento polar de área do eixo, $I_{m,1}$ é o momento de inércia de massa do volante 1 e $I_{m,2}$ é o momento de inércia de massa do volante 2.

2.3.4 Rodopio de eixo

Outra possibilidade de vibração de eixos é por meio do rodopio de eixo. Essa vibração é auto excitada e ocorre devido à força centrífuga que é gerada em virtude de qualquer desbalanceamento residual de um elemento em rotação, fazendo com que o centro de massa verdadeiro de um volante fique excêntrico em relação à linha de centro do eixo (NORTON, 2013, p. 597). É importante destacar que o rodopio de eixo apresenta uma velocidade crítica equivalente ao modo de

vibração lateral. No entanto, para o escopo deste trabalho, será abordada somente a análise de vibração lateral.

A Figura 21 apresenta um exemplo da amplitude gerada em virtude do desbalanceamento, onde δ_d é a deflexão dinâmica e e a excentricidade inicial do eixo.



Fonte: Adaptado de Norton (2013, p. 598)

Através do diagrama de corpo livre apresentado na Figura 21, as forças atuantes no sistema podem ser expressas como (NORTON, 2013, p. 598)

$$m (\delta_d + e) \omega^2 = k \delta_d. \quad (54)$$

2.4 Análise Modal

Considerando um sistema de vibração livre não amortecido com múltiplos graus de liberdade, a equação que governa o sistema pode ser expressa de modo similar ao exposto na Equação (4), ou seja

$$[M] \overline{\ddot{x}(t)} + [K] \overline{x(t)} = 0, \quad (55)$$

onde $\overline{x(t)}$ um vetor de deslocamento linear e $[K]$ e $[M]$ são matrizes de massa e rigidez respectivamente, as quais contam com coeficientes constantes no caso específico de comportamento linear (SORIANO, 2009, p. 311).

De acordo com Soriano (2009, p. 311), a Equação (55) admite a solução harmônica dada por

$$\overrightarrow{x(t)} = \vec{\varphi}_j \cos(\omega_j t - \theta_j), \quad (56)$$

onde $\vec{\varphi}_j$ é um vetor denominado modo natural de vibração, ω_j é a j-ésima velocidade crítica de vibração e θ_j é o ângulo de fase.

A partir da substituição da Equação (56) em (55), pode-se obter a seguinte relação

$$([K] - \omega_j^2 [M]) \vec{\varphi}_j = 0, \quad (57)$$

a qual expressa um problema de autovalor e autovetor generalizado (SORIANO, 2009, p. 311).

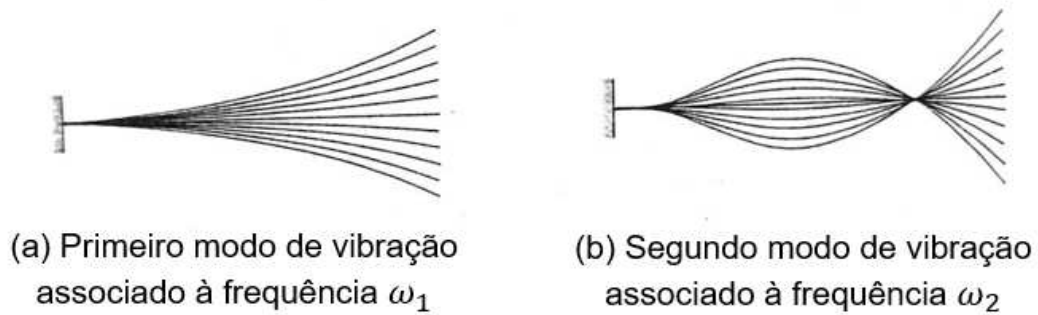
O sistema apresentado na Equação (57) tem soluções não triviais apenas no caso da matriz de coeficientes de $([K] - \omega_j^2 [M])$ ser singular, ou seja

$$\det([K] - \omega_j^2 [M]) = 0. \quad (58)$$

A Equação (58) é conhecida como equação característica, e a resolução dessa equação fornece os autovalores ω_j^2 . Para cada autovalor encontrado, a solução do sistema expresso pela Equação (57) fornece um autovetor $\vec{\varphi}$ que corresponde a um modo natural de vibração (SORIANO, 2009, p. 311).

Soriano (2009, p. 312) relata que a solução das equações (57) e (58) pode ser interpretada fisicamente como a deflexão ou deslocamento angular do modelo estrutural de acordo com o j-ésimo modo de vibração, o qual está associado a uma velocidade crítica. Desse modo, o modelo vibrará na frequência ω_j em torno da posição neutra e assumirá a configuração de vibração de modo $\vec{\varphi}$. A Figura 22 ilustra essa interpretação física em uma viga em balanço, onde o modo (a) representa a vibração na frequência ω_1 , enquanto o modo (b) representa a vibração na frequência ω_2 .

Figura 22 - Modos de vibração associados as velocidades críticas



Fonte: Adaptado de Soriano (2009, p. 312)

A Equação (57) pode ser reescrita como

$$[K][\Phi] = [M][\Phi][\Omega], \quad (59)$$

onde

$$[\Phi] = [\vec{\varphi}_1 \ \vec{\varphi}_2 \ \cdots \ \vec{\varphi}_\eta] \quad (60)$$

e

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_\eta^2 \end{bmatrix}. \quad (61)$$

A solução da Equação (59) é conhecida como Análise Modal. As matrizes apresentadas nas equações (60) e (61) são conhecidas como matriz modal e matriz espectral, respectivamente, onde η representa o número de graus de liberdade do modelo (SORIANO, 2009, p. 312). Desse modo, η está relacionado com o número das i -ésimas massas consideradas no sistema discreto e, portanto, o número de velocidades críticas encontradas deve ser igual a η .

De acordo com Norton (2013, p. 596), a Análise Modal (representada pela solução da Equação (59)) pode ser feita em um modelo de elementos finitos 3D de geometria complexa, a qual produzirá um número elevado de velocidades críticas em três dimensões, começando com a fundamental.

De acordo com Lee (2014, p. 418), o ANSYS® *Workbench* utiliza como base a Equação (57) para a solução modal de sistemas, cujo objetivo é encontrar as velocidades críticas e os modos de vibração associados.

2.5 Modelagem numérica para análise de vibrações

Dependendo do problema de engenharia que se deseja analisar, a resolução analítica pode oferecer grandes dificuldades ou até ser impossível. A alternativa à não obtenção da solução analítica é utilizar um método aproximado que substitua os infinitos graus de liberdade do modelo contínuo por um número finito de parâmetros a ser determinado (SORIANO, 2009, p. 8).

Dentre os métodos de simulação numérica que buscam por soluções aproximadas a partir de subdomínios ou de pontos do domínio ou do contorno, pode-se citar o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos, o Método dos Elementos de Contorno e diversos métodos sem malha (SORIANO, 2009, p.8).

2.5.1 Método dos Elementos Finitos

Neste trabalho, o MEF será utilizado para avaliação da elasticidade linear de eixos, a fim de se obter curvas de deflexão estática. Além disso, a aplicação de MEF visa obter também as velocidades críticas de vibração e curvas de deflexão dinâmica, utilizando Análise Modal. Desse modo, é importante ressaltar que esta subseção visa apresentar uma visão geral do MEF, não focando exclusivamente na sua aplicação voltada aos problemas que serão analisados. Serão apresentadas as principais definições e terminologias utilizadas ao aplicar o MEF nos mais variados problemas.

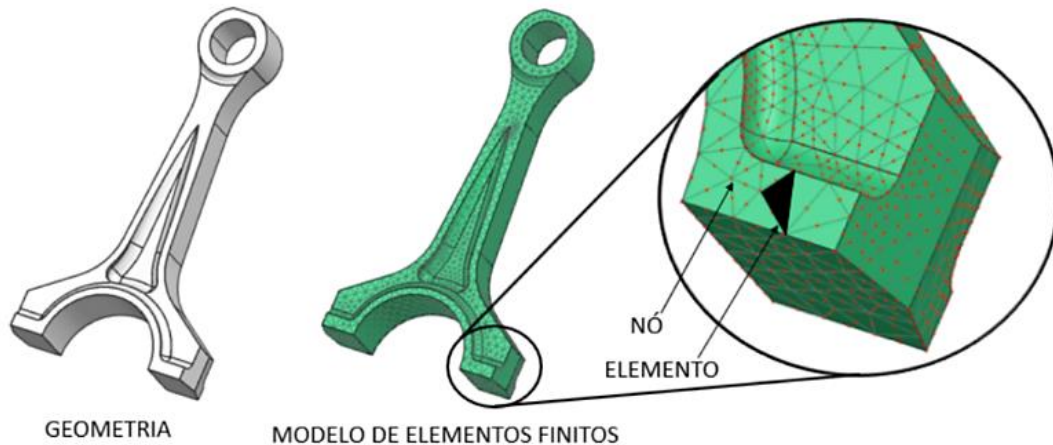
De acordo com Norton (2013, p. 481), as técnicas clássicas de solução analítica para análise de tensões e deformações apresentam uma boa aplicabilidade em componentes de geometria simples, tais como cilindros, prismas retangulares, etc. Entretanto, muitos componentes de máquinas apresentam geometrias mais complexas, tornando o cálculo de tensões e deflexões difícil ou mesmo impossível de ser realizado pelo método analítico.

Nesse contexto, o MEF tem como objetivo a determinação do estado de tensão e de deformação de um sólido de geometria arbitrária sujeito a

carregamentos externos (AZEVEDO, 2003, p. 1). Para aplicação do MEF é necessária a divisão de um domínio em um número finito de elementos, a fim de se obter uma aproximação das tensões e deformações em qualquer parte do componente a partir da aplicação de funções de aproximação (NORTON, 2013, p. 482).

Segundo Filho (2009, p. 30), a discretização de um sistema contínuo considera a divisão de uma estrutura em partes separadas distintas, conectadas entre si, como apresentado na Figura 23. Os pontos de conexão entre os elementos são denominados de nós do modelo e, com a subdivisão do domínio em elementos, é gerado o que se denomina malha de elementos finitos.

Figura 23 - Estrutura discretizada como uma montagem de elementos

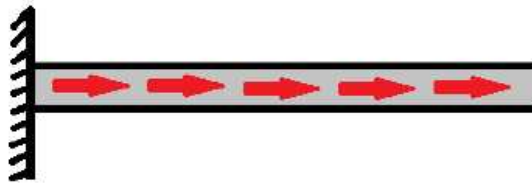


Fonte: JL Engenharia e Software (2021)

Os elementos finitos podem adquirir diferentes formas geométricas, e serem modelados em uma, duas ou três dimensões. Além disso, os elementos também podem apresentar diferentes graus, sendo este o termo referente ao grau da função polinomial utilizada para interpolar o deslocamento no interior do elemento (NORTON, 2013, p. 485).

Para compreender de forma mais apurada a diferença entre os diferentes graus para o polinômio interpolador em elementos finitos, pode-se assumir um problema de carregamento linear cuja solução analítica é conhecida. O problema pode ser visualizado na Figura 24.

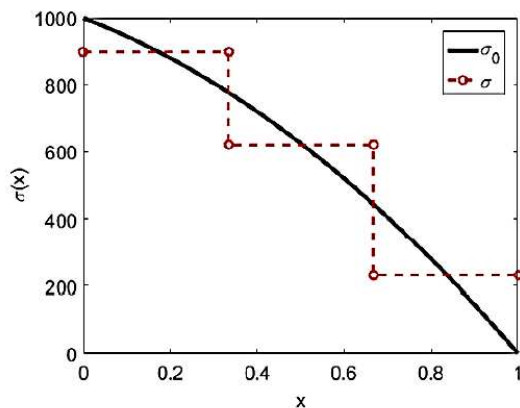
Figura 24 - Barra engastada em uma extremidade e livre na outra, submetida a um carregamento axial ao longo de seu comprimento



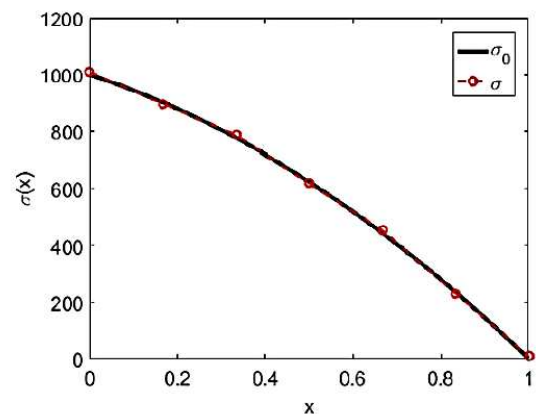
Fonte: GASPAR (2018, p. 47)

A solução em tensão exata e aproximada pode ser visualizada na Figura 25, onde σ_0 corresponde a solução exata, σ a solução aproximada e p ao grau do polinômio interpolador utilizado para respectiva solução. É possível observar que quanto maior o grau p do polinômio mais próxima será a solução aproximada da solução exata.

Figura 25 - Solução exata e aproximada em tensão



(a) Solução em tensão para malha com 3 elementos com $p = 1$

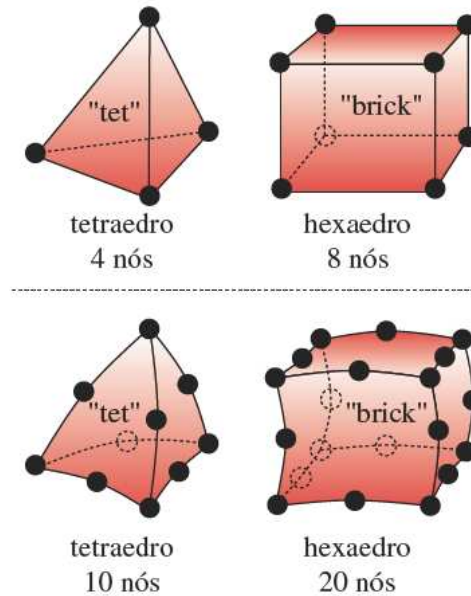


(b) Solução em tensão para malha com 3 elementos com $p = 2$

Fonte: Adaptado de GASPAR (2018, p. 52)

A Figura 26 apresenta os principais elementos finitos utilizados em aplicações tridimensionais. Destaca-se o hexaedro de 20 nós apresenta mais graus de liberdade em relação ao hexaedro de 8 nós.

Figura 26 - Elementos finitos para aplicações 3D



Fonte: NORTON (2013, p. 486)

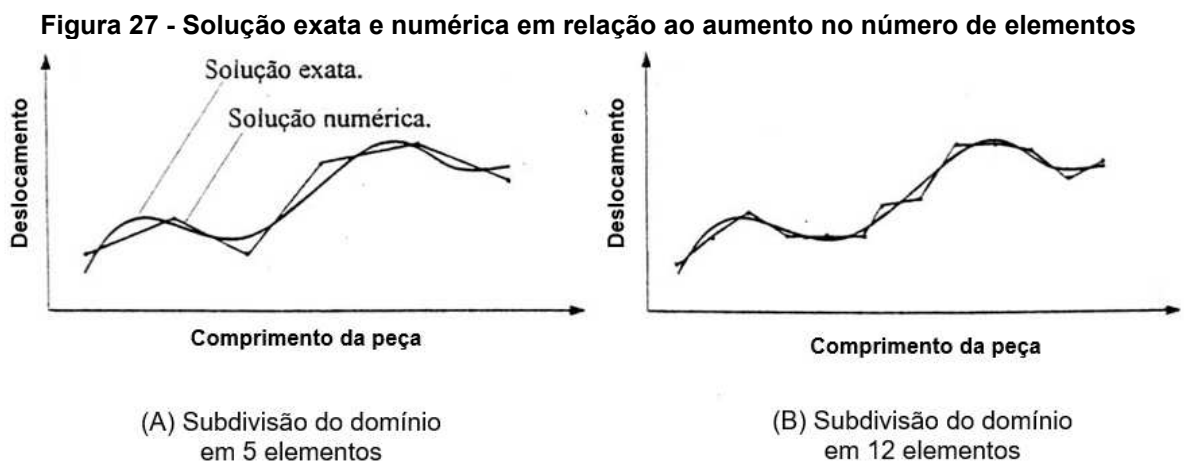
A utilização de elementos de alto grau é indicada para divisão do domínio de peças que contenham contornos curvos, uma vez que possibilita uma melhor representatividade desses contornos devido a possibilidade de curvatura de suas arestas. Já os elementos lineares, são indicados para aplicação em contornos retos e em peças com menor complexidade geométrica. Vale destacar que o aumento no grau dos elementos também eleva o tempo de processamento computacional em relação a uma mesma quantidade de elementos finitos com um grau inferior (NORTON, 2013, p. 486).

De acordo com Reddy (2006 apud GASPARG, 2018, p. 25), existem três tipos básicos de erro:

1. Erros de aproximação de domínio: são comuns em análise de elementos finitos e podem ter um impacto significativo na precisão da solução. Em problemas 2D e 3D, a representação do domínio pode ser mais complexa e a malha deve ser mais refinada para minimizar esses erros. Portanto, é importante ter em mente que uma malha mais refinada pode levar a uma representação mais precisa do domínio, reduzindo os erros de aproximação em problemas com geometrias mais complexas.
2. Erros numéricos e de quadratura: erros numéricos decorrem de imprecisões de arredondamento ou truncamento em operações elementares.

Essas imprecisões ocorrem quando o número de dígitos disponíveis para armazenar um valor no computador é esgotado. Esses erros também podem afetar a solução de sistemas de equações. O tamanho e a qualidade do sistema computacional desempenham um papel crucial na magnitude desses erros. O condicionamento de um sistema está relacionado ao número de condição de sua matriz, o qual é determinado pela proporção entre o maior e o menor autovalor. Quando essa proporção é alta, diz-se que a matriz está mal condicionada. Um alto grau de mal condicionamento contribui para a propagação de erros numéricos ao longo dos cálculos. Por outro lado, erros de quadratura estão associados à integração numérica e variam conforme o tipo de função que está sendo integrada, dependendo ainda da quantidade de pontos de integração utilizados.

3. Erros de discretização: são erros que emergem quando a função que descreve precisamente a solução de um problema é substituída por uma função de aproximação. No contexto do MEF, tal função de aproximação frequentemente assume a forma de um polinômio por partes. Para contornar esse erro, Soriano (2009, p. 11) relata que, na medida em que se refina a malha, a solução numérica tende a se aproximar da solução exata, como apresenta a Figura 27.



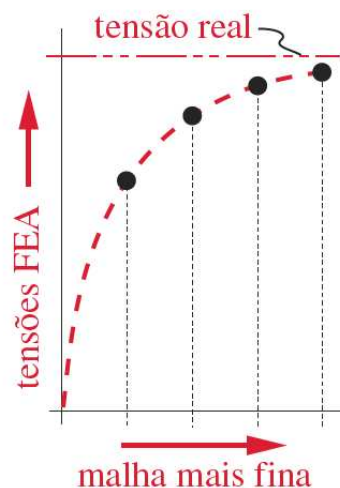
Fonte: Adaptado de Soriano (2009, p. 11)

Para reduzir erros de aproximação de domínio e erros de discretização, é comum a aplicação de refinamentos *h-adaptativo* e *p-adaptativo*. Segundo Norton (2013, p. 487), o refinamento *p-adaptativo* refere-se ao grau do polinômio interpolador que será

aplicada ao elemento. Já o refino *h-adaptativo* refere-se ao refino de malha, ou seja, o aumento da quantidade de elementos nas regiões próximas aos maiores gradientes de tensão ou deformação. Norton (2013, p. 487) também ressalta que o refino *p-adaptativo* permite que os elementos sejam maiores e em menor quantidade do que os elementos utilizados no refino *h-adaptativo*.

De acordo com Lee (2014, p. 153), um dos objetivos essenciais da aplicação do MEF é saber qual o refino ideal da malha e qual o tamanho ideal do elemento finito, a fim de se alcançar o resultado com menor erro possível para determinada quantidade de graus de liberdade. Para isso, é crucial a aplicação do teste de convergência que envolve a aplicação sucessiva de refinamentos *h-adaptativos*, com o objetivo de quantificar a variação percentual entre as soluções obtidas. Desse modo, observando a Figura 27 e Figura 28, observa-se que a aplicação de um refino da malha tende a fazer a solução encontrada via MEF convergir para a solução exata. Todavia é importante destacar que, caso o valor de tensão (que é uma grandeza pontual), for num ponto singular (como por exemplo em uma barra filetada em raio de arredondamento), não haverá convergência mesmo realizando o refino.

Figura 28 - Resultados do refino de malha para solução de tensões



Fonte: NORTON (2013, p. 489)

A aplicação e modelagem adequada das condições de contorno é uma questão crucial quando se aplica o MEF. De acordo com Lee (2014, p. 13), no mundo real, todos os objetos interagem com outras partes do ambiente. Ao realizar a simulação de um objeto específico, é necessário levar em consideração as interações superficiais desse objeto com outros elementos, incluindo forças,

momentos, restrições de movimentos em porções da fronteira, entre outros. Essas interações são descritas matematicamente por meio das condições de contorno. É importante salientar que essas condições podem variar para cada problema, dependendo da geometria, da natureza das cargas aplicadas e das condições de apoio.

De acordo com Norton (2013, p. 492), a definição das condições de contorno não é uma tarefa trivial. Resumidamente, as condições de contorno não devem restringir nem permitir deformações que na verdade não aconteceriam. Norton (2013, p. 492) relata ainda que se poucas condições de contorno são impostas, o sistema estará sub-restrito e o processamento poderá falhar. Do contrário, o sistema estará super-restrito e será excessivamente rígido.

Destaca-se que o MEF possibilita a realização de avaliações dinâmicas de estruturas. Segundo Lee (2014, p. 381), quando uma estrutura sofre movimentações ou deformações rápidas, é necessário incluir os efeitos dinâmicos na simulação. Em soma disso, Fancello e Mendonça (2020, p. 464) relatam que se a frequência de excitação ω_f de um sistema for maior ou igual a, aproximadamente, um terço da sua velocidade crítica ω_n , ou seja

$$\omega_f \gtrsim \frac{\omega_n}{3}, \quad (62)$$

então o problema pode ser tratado como dinâmico.

Nesse contexto, a Análise Modal é um método que permite explorar o comportamento das vibrações e determinar as velocidades críticas dos sistemas físicos (LEE, 2014, p. 381). De acordo com Norton (2013, p. 507), a velocidade crítica e os modos de vibração (autovalores e autovetores) de uma estrutura podem ser calculados utilizando MEF, ou seja, o MEF pode ser utilizado para a composição de um problema descrito pela Equação (58).

Embora a Análise Modal seja diferente da análise de tensões, de acordo com Norton (2013, p. 507), a maioria das ressalvas em relação à seleção adequada de tipos de elementos, convergência da malha e seleção das condições de contorno ainda se aplica, embora alguns sejam menos críticos. Como exemplo, Norton (2013, p. 507) relata que uma estimativa razoável dos autovetores e autovalores de uma estrutura pode ser obtida com uma malha grosseira, o que seria impraticável para o

cálculo preciso de tensões e deflexões. Entretanto, em problemas bidimensionais e tridimensionais, é importante destacar que a utilização de uma malha grosseira pode não ser eficiente quando se deseja obter modos de vibrar correspondentes a velocidades críticas mais altas.

Outro ponto a ser destacado é que o refino de malha em locais com mudança de geometria é menos crítico para uma Análise Modal uma vez que as propriedades são globais e não locais (NORTON, 2013, p. 507). Destaca-se que na análise modal as propriedades que são levadas em consideração é a rigidez e distribuição de massa do sistema.

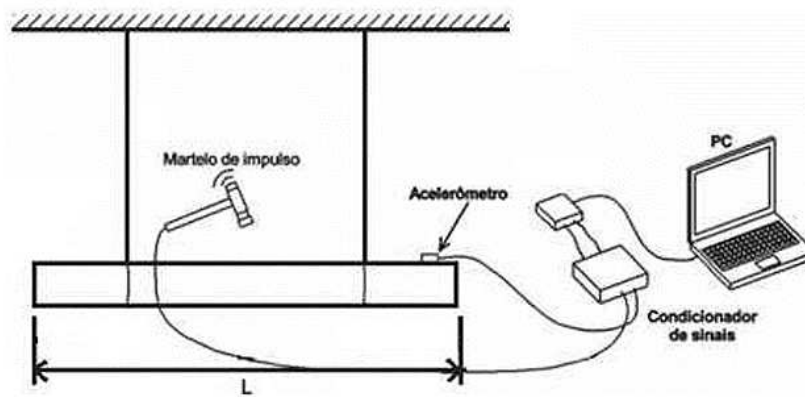
2.6 Análise experimental de vibrações

Apesar deste trabalho não focar em avaliações experimentais, vale destacar que existem diversos métodos e experimentos disponíveis para análise de vibrações. Com o avanço da tecnologia, novos equipamentos surgem com capacidades cada vez mais específicas. No entanto, é necessário ter alguns elementos básicos para realizar uma análise experimental de vibrações conforme disposto a seguir (RAO, 2008; INMAN, 2018; KURKA, 2015 apud ASSUNÇÃO; NETO; SANTOS, 2022, p. 142).

- Excitador: responsável por transmitir uma força conhecida e controlada à estrutura a ser ensaiada, funcionando como uma fonte de vibração.
- Transdutor: responsável pela conversão da resposta mecânica (vibração) da estrutura em um sinal elétrico.
- Amplificador: responsável pela combinação e amplificação de sinais antes de serem analisados.
- Analisador: responsável pelo recebimento das informações dos amplificadores e processamento de sinais.

A Figura 29 apresenta o arranjo de um experimento de teste de impacto para Análise Modal de vibração. Pode-se observar a existência de um excitador (martelo de impacto), um transdutor (acelerômetro), um amplificador (condicionador de sinais) e um analisador (computador) (LEME, 2014, p. 41).

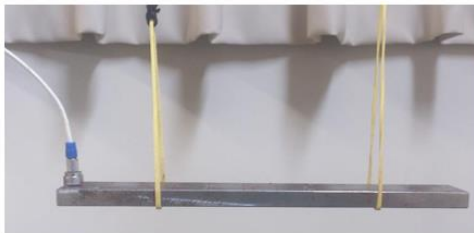
Figura 29 – Experimento de teste de impacto



Fonte: Adaptado de SECCO e FILHO (2014) apud LEME (2014, p. 41)

A Figura 30 apresenta detalhes dos equipamentos necessários para realização da análise modal experimental, os quais foram utilizados para realização do experimento apresentado na Figura 29.

Figura 30 - Equipamentos do experimento



(A) Corpo de prova com acelerômetro



(B) Martelo de impacto e ponteiros



(C) Acelerômetro



(D) Analisador de sinais

Fonte: LEME (2014, p. 42)

Embora a técnica de avaliação experimental em vibração seja bastante útil, é importante lembrar que ela requer tanto a instrumentação adequada quanto um bom conhecimento da técnica em si. Além disso, é necessário ter o sistema físico real para realizar a avaliação, o que pode não ser viável em projetos de eixos. Isso significa que o projetista deve determinar a velocidade crítica de rotação antes de construir o modelo real do eixo, evitando problemas futuros com a operação da

máquina. Para isso, é melhor utilizar uma estimativa baseada em geometrias iniciais de projeto, como propõe Rayleigh.

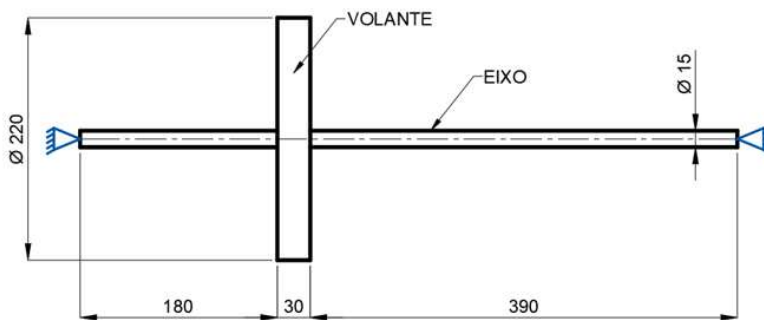
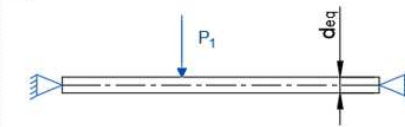
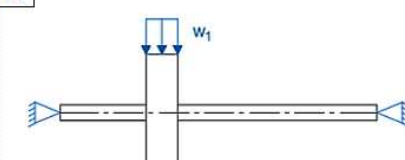
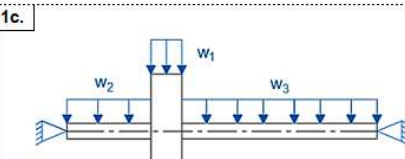
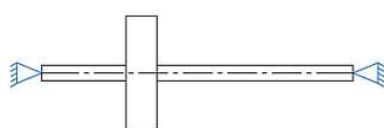
3 MATERIAIS E MÉTODOS

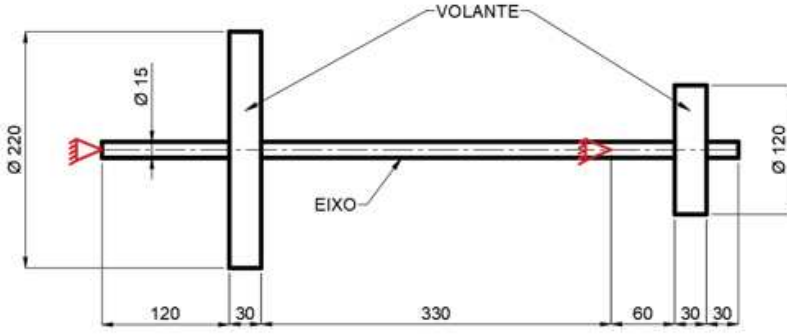
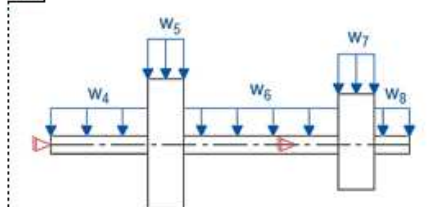
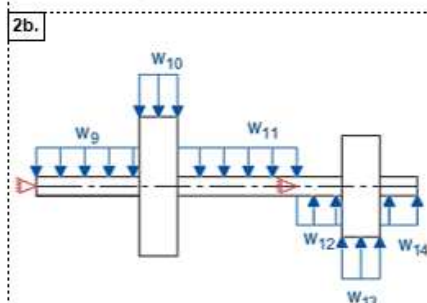
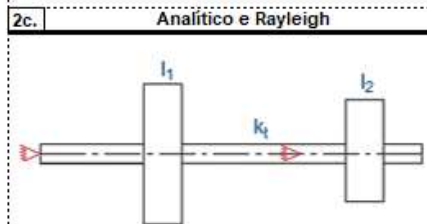
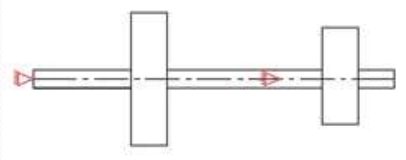
Esta seção tem por finalidade apresentar os métodos adotados para se alcançar os objetivos propostos neste trabalho. Serão apresentados os problemas de engenharia e suas respectivas metodologias de resolução.

3.1 Definição dos problemas

Este trabalho propõe o estudo de dois problemas arbitrários relacionados a eixos com volantes. A Tabela 2 resume as informações essenciais dos problemas de propostos, tais como a geometria envolvida, os métodos de resolução adotados, os modos de vibração avaliados e as condições de contorno utilizadas.

Tabela 2 - Problemas propostos

Problemas propostos	Método de resolução		Avaliação
	Rayleigh	MEF	
<p>Caso 1 - Eixo com um volante</p>  <p>Unidade de comprimento em milímetros.</p>	<p>1a.</p>  <p>1b.</p>  <p>1c.</p> 	<p>1d.</p> 	<p>1º Modo de vibração lateral</p>

Problemas propostos	Método de resolução		Avaliação
	Rayleigh	MEF	
<p>Caso 2 - Eixo com dois volantes</p>  <p>Unidade de comprimento em milímetros.</p>	<p>2a.</p>  <p>2b.</p>  <p>2c. Analítico e Rayleigh</p> 	<p>2d.</p> 	<p>1º Modo de vibração lateral e torcional</p>

Fonte: Próprio Autor (2023)

Observando a Tabela 2, pode-se perceber que o primeiro problema (caso 1) avalia apenas vibração lateral em um eixo com um único volante, a fim de validar a metodologia adotada comparando o Método de Rayleigh com o MEF, objetivando a obtenção da velocidade crítica fundamental. É importante destacar que a vibração torcional não é considerada neste problema, já que o modelo físico não é adequado. Isso ocorre porque as condições de contorno de fixação atuam de modo similar a mancais de rolamentos, não restringindo o movimento de rotação do eixo. Ademais, este sistema pode ser classificado como irrestrito conforme exposto na Subseção 2.3.3. Dessa forma, o eixo não possui restrições suficientes que permitam sua atuação de modo similar a um elemento de mola torcional e, portanto, a vibração torcional não se manifesta.

No caso 1 (conforme Tabela 2), foram adotados três modelos distintos para resolução utilizando o Método de Rayleigh, e um modelo para aplicação em método numérico, utilizando MEF por meio do programa ANSYS®. O objetivo é comparar as três soluções obtidas via Rayleigh com a solução obtida via MEF, a fim de verificar o erro tomando a solução de MEF como referência.

No modelo 1a, considerou-se apenas a rigidez do eixo e o peso do volante. Esse modelo é comumente aplicado em cálculos analíticos para obtenção da linha elástica utilizando a Equação (27), a qual foi aplicada neste modelo. É importante ressaltar que essa modelagem é extremamente simplificada e está longe de representar o problema real. Conseqüentemente, espera-se um resultado com menor precisão, entretanto tem-se a vantagem da facilidade de obtenção da deflexão estática, a qual é demandada para aplicação no modelo de Rayleigh conforme Equação (26).

Para uma comparação mais precisa entre os modelos, tanto do caso 1 como do caso 2, o ideal é que todos apresentem a mesma energia de deformação elástica, ou seja, a energia potencial elástica associada à deformação deve ser a mesma em todos os modelos e, portanto, os modelos devem ser sistemas mecânicos equivalentes como exemplificado na Subseção 2.2.2. Desse modo, como a rigidez do volante é desprezada no modelo 1a, passa-se a ter uma maior energia de deformação associada a este e, para contornar este problema, um diâmetro equivalente foi calculado utilizando a Equação (32), com a finalidade de igualar a energia de deformação do modelo 1a ao modelo 1b. A Subseção 3.2.1.1 apresenta essa metodologia com maiores detalhes.

Em seguida, no modelo 1b foi adicionada a rigidez do volante e seu respectivo peso de forma distribuída, a fim de verificar a influência desses parâmetros adicionados ao calcular a deflexão da linha elástica e, subsequentemente, a velocidade crítica. O modelo 1c corresponde a um modelo melhorado em relação ao 1b, pois foi adicionado o peso do eixo considerando um carregamento distribuído. Assim como o modelo 1c, o modelo 1d leva em consideração toda rigidez e massa do sistema mecânico, no entanto, vale destacar que este modelo é voltado para Análise Modal via MEF.

Após a validação da metodologia utilizando o primeiro problema, o segundo caso aborda a avaliação tanto da vibração lateral, como da torcional, em um eixo com dois volantes. Nesta avaliação, tem-se o objetivo de avaliar a influência da maior quantidade de volantes na determinação das velocidades críticas em vibração lateral, assim como a comparação entre o Método de Rayleigh e o MEF, ou solução analítica, para encontrarmos a velocidade crítica de vibração lateral e torcional.

No caso 2, conforme apresentado na Tabela 2, foram adotados três modelos distintos. O modelo 2a visa a obtenção da linha elástica via MEF e posterior aplicação das deflexões estáticas no Método de Rayleigh. O mesmo procedimento foi adotado para o modelo 2b, todavia invertendo o sentido da força peso correspondente a toda massa posterior a condição de contorno de fixação colocada entre os volantes. Com a aplicação do modelo 2b para o caso 2, objetiva-se analisar se, ao inverter o sentido da força equivocadamente, o quão distante seria o resultado em termos de velocidade crítica.

Ademais, a aplicação do modelo 2b para o caso 2 visa avaliar a condição em que os volantes vibram em desfasagem na velocidade crítica fundamental, o que proporcionaria uma maior deflexão estática e, conseqüentemente, uma menor velocidade crítica. Esse efeito resulta da disposição específica dos mancais, com um deles posicionado entre os volantes, deixando parte do eixo e um volante em balanço. Essa configuração foi arbitrariamente escolhida para o caso 2 com a finalidade de se avaliar esta problemática.

Para o modelo 2c do caso 2, foi aplicado a Equação (49) a fim de se obter a velocidade crítica para vibração torcional a partir de uma solução analítica, a qual foi tomada como referência especificamente na análise de vibração torcional do caso 2. Com o modelo 2d foi realizada a simulação numérica via MEF, onde foi possível obter a velocidade crítica fundamental para vibração lateral.

Ademais, é crucial ressaltar que a escolha cuidadosa da condição de contorno de fixação apresentada na Tabela 2 é fundamental para a análise estática e modal por elementos finitos, evitando a restrição excessiva do sistema e, conseqüentemente, o aumento indevido de sua rigidez, tornando o sistema super-restrito como apontado por Norton (2013, p. 492). A adoção de uma condição de contorno inadequada poderia prejudicar a simulação, resultando em erros nos valores das velocidades críticas e seus respectivos modos de vibração, comprometendo a precisão dos resultados.

Pode-se destacar que a escolha do MEF para obtenção da deflexão estática nos modelos 1b, 1c, 2a e 2b foi motivada pela complexidade da geometria e carregamento, o que dificultaria o cálculo analítico. Por outro lado, para a obtenção da deflexão estática do modelo 1a, foi utilizada a Equação (27) uma vez que este modelo apresenta uma geometria simplificada.

Embora também seja possível obter a deflexão estática de outros modelos além do 1a por meio de cálculos analíticos, optou-se por utilizar métodos numéricos devido as circunstâncias do desenvolvimento do trabalho, uma vez que o programa ANSYS® já seria utilizado para avaliação modal. Em soma disso, o uso do programa também objetiva garantir maior padronização e agilidade. Uma vez obtida a deflexão estática utilizando MEF, estes dados foram considerados para aplicação no Método de Rayleigh.

Destaca-se que a simulação modal visa compreender com certa precisão o comportamento dinâmico do sistema, identificando sua velocidade crítica e modos de vibração associados. No entanto, é importante reconhecer que há algumas limitações, tais como: necessidade de discretização em elementos finitos, adoção de condições de contorno adequadas e capacidade de processamento computacional. Ademais, enfatiza-se que ambos os métodos (Rayleigh e MEF) são soluções aproximadas, enquanto o método analítico é uma solução exata.

Em todas as resoluções numéricas via MEF realizadas neste trabalho, foi aplicado um procedimento para verificação de convergência sobre os resultados de deflexão estática e velocidade crítica. Esse procedimento consiste em realizar iterações sucessivas, aplicando um refino *h-adaptativo* até que a diferença entre as soluções seja inferior a 1% (nas grandezas de deflexão estática e velocidade crítica). É importante ressaltar que, por meio da aplicação do procedimento de convergência, o ANSYS® aplica um refino *h-adaptativo*, permitindo um refinamento de malha mais

preciso nas regiões onde há maiores gradientes na grandeza analisada. Essa aplicação possibilita um aumento no número de elementos finitos especificamente nessas regiões, resultando em uma maior precisão.

Para os estudos realizados, foram utilizadas as propriedades mecânicas do aço (material comumente utilizado em eixos e seus acessórios, incluindo os volantes), as quais podem ser verificadas na Tabela 3.

Tabela 3 - Propriedades mecânicas do aço

Parâmetros	Valor
Módulo de Elasticidade Longitudinal [GPa]	207
Módulo de Elasticidade Transversal [GPa]	79,6
Coefficiente de Poisson [-]	0,3
Densidade [kg/m ³]	7850

Fonte: Callister (2012, p.539)

Vale destacar que o módulo de elasticidade transversal foi obtido através da expressão (HIBBELER, 2010, p. 75)

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (63)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal e ν é o coeficiente de Poisson.

Ademais, foi feita uma análise cuidadosa dos resultados obtidos, comparando os métodos e verificando sua consistência em relação às hipóteses adotadas. A partir disso, foi possível tirar conclusões precisas e relevantes sobre o comportamento dos sistemas estudados.

3.2 Resolução do caso 1 via Método de Rayleigh

De acordo com a Equação (26), para encontrar a velocidade crítica fundamental necessitamos de duas informações: a massa e a deflexão estática. Por essa razão, todas as resoluções utilizando Método de Rayleigh no caso 1 tiveram como objetivo determinar essas grandezas utilizando diferentes métodos, assim como diferentes considerações de massa e rigidez do sistema. Cada método e modelo será abordado em detalhes nas subseções seguintes.

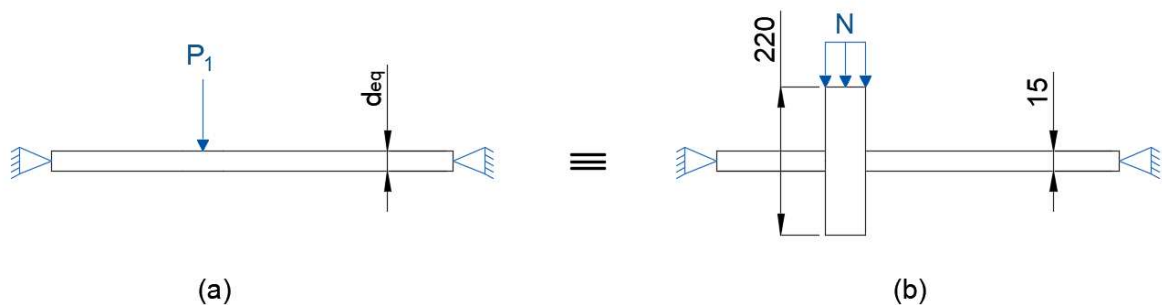
3.2.1 Modelo 1a

Para a resolução do caso 1 com modelo 1a (conforme Tabela 2), foi desconsiderada a rigidez do volante e a massa do eixo.

3.2.1.1 Diâmetro Equivalente

A busca pela equivalência dos sistemas mecânicos foi inspirada pelos exemplos mencionados na Subseção 2.2.2 e, para alcançá-la, aplicou-se o Método do Trabalho e da Energia conforme descrito na Subseção 2.3.2.2. Desse modo, para comparar os sistemas adequadamente, foi calculado um diâmetro equivalente com a finalidade de tornar a energia de deformação do modelo 1a igual à do modelo 1b, como apresenta a Figura 31.

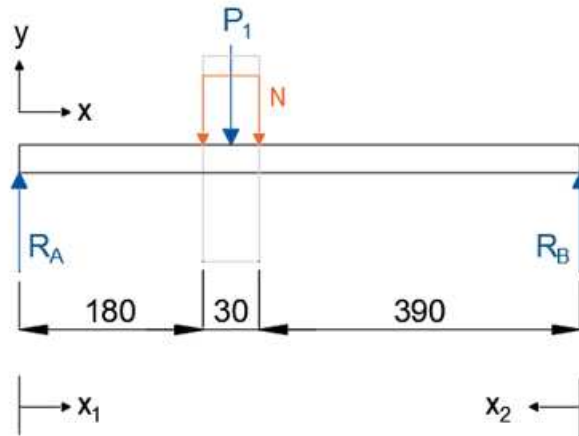
Figura 31 - Equivalência entre os modelos do caso 1 (medidas em milímetros)



Fonte: Próprio Autor (2023)

Inicialmente, para encontrar a energia de deformação associada ao modelo apresentado na Figura 31 (b), foi adotado uma força peso distribuída referente ao volante. Desse modo, a Figura 32 apresenta o diagrama de corpo livre associado ao respectivo modelo, onde foi deixado propositalmente a representação do volante em uma coloração mais clara para ressaltar que a rigidez do volante está sendo levada em consideração.

Figura 32 - Diagrama de corpo livre dos modelos 1b (medidas em milímetros)



Fonte: Próprio Autor (2023)

A força peso do volante pode ser calculada adotando

$$P_1 = \rho V_1 g = \rho \pi r_1^2 L_1 g = 87,82035 \text{ N}, \quad (64)$$

onde V_1 corresponde ao volume do volante sem furo do eixo, ρ a densidade do material, r_1 ao raio do volante, L_1 o comprimento do volante e g a aceleração gravitacional, adotada $9,81 \text{ m/s}^2$. Desse modo, o carregamento N pode ser determinado utilizando

$$N = \frac{P_1}{L_1} = 2927,345 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \quad (65)$$

A partir do somatório de momento ao longo do eixo z e no ponto onde R_A está localizado, tem-se que

$$\sum M_z^A = -P_1 \cdot (0,195) + R_B \cdot (0,6) = 0. \quad (66)$$

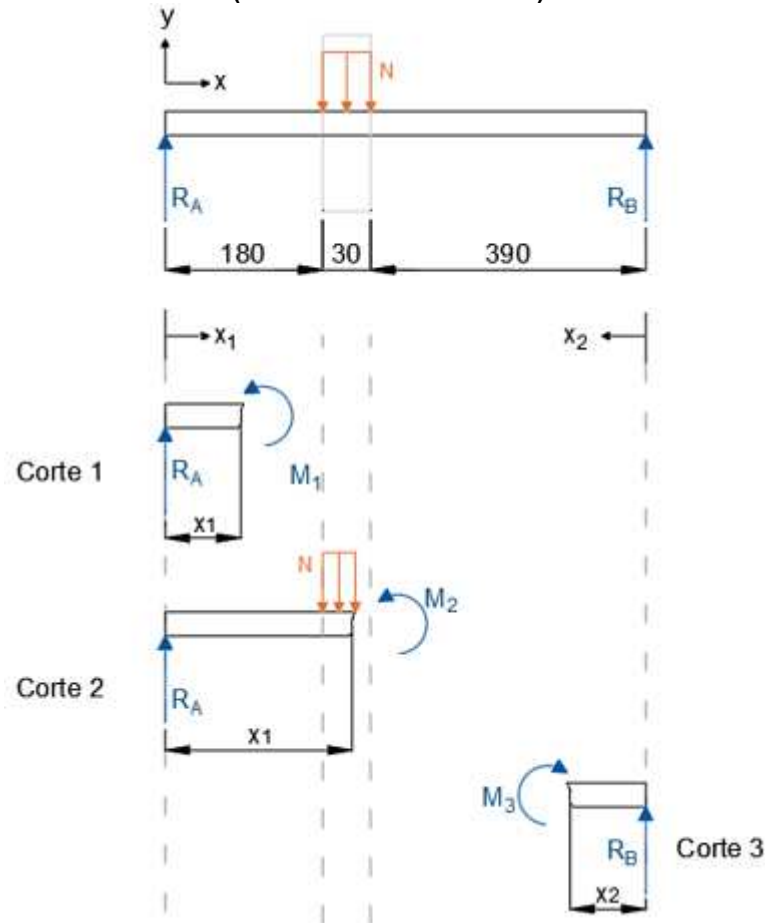
Em seguida, a partir da aplicação do somatório de forças no eixo y dado por

$$\sum F_y = R_A + R_B - P_1 = 0, \quad (67)$$

pode-se encontrar o valor de R_A .

O diagrama de momento fletor pôde ser encontrado a partir da realização de cortes no eixo, como apresenta a Figura 33.

Figura 33 - Corte no eixo para determinação do momento fletor interno (medidas em milímetros)



Fonte: Próprio Autor (2023)

Desse modo, o momento fletor interno é dado por

$$M_1 = R_A x_1 \quad \text{para} \quad 0 \leq x_1 < 180 \text{ [mm]}, \quad (68)$$

$$M_2 = -\frac{N}{2} \cdot (x_1 - 0,18)^2 + R_A \cdot x_1 \quad \text{para} \quad 180 \leq x_1 < 210 \text{ [mm]} \quad (69)$$

e

$$M_3 = R_B x_2 \quad \text{para} \quad 0 \leq x_2 \leq 390 \text{ [mm]}. \quad (70)$$

Para o cálculo da energia de deformação, a Equação (37) pode ser aplicada no modelo apresentado na Figura 31 (b). Desse modo,

$$U_{1b} = \frac{1}{2E} \left(\int_0^{0,18} \frac{M_1^2}{I_e} dx_1 + \int_{0,18}^{0,21} \frac{M_2^2}{I_v} dx_1 + \int_0^{0,390} \frac{M_3^2}{I_e} dx_2 \right) \quad (71)$$

onde I_e e I_v representam o momento de inércia de área da seção transversal do eixo e do volante, respectivamente.

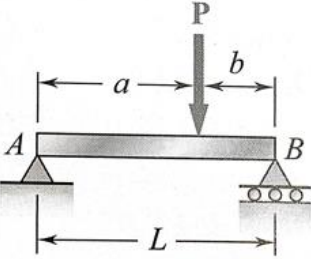
Sabendo que a energia de deformação de ambos os modelos apresentados na Figura 31 devem ser iguais, e que existe uma equivalência entre o trabalho externo e a energia de deformação, pode-se escrever que

$$U_{1b} = U_{1a} = \frac{1}{2} P_1 y_1 \quad (72)$$

onde U_{1a} e U_{1b} é a energia de deformação associada aos modelos 1a e 1b, respectivamente, e y_1 é o deslocamento estático do ponto onde a força P_1 está localizada. Desse modo, com a utilização da Equação (72), foi possível encontrar o valor da deflexão estática y_1 , uma vez que os demais valores são conhecidos.

Para uma viga ou eixo como apresenta o modelo 1a (ver Tabela 2), a deflexão estática y_1 também pode ser obtida através do equacionamento apresentado na Tabela 4.

Tabela 4 - Deflexões em vigas ou eixos

Viga e Carregamento	Equação da linha elástica
	<p>Para $x < a$:</p> $y = \frac{Pb}{6EIL} [x^3 - (L^2 - b^2)x]$ <p>Para $x = a$: $y = -\frac{Pa^2b^2}{3EIL}$</p>

Fonte: Adaptado de Beer et al. (2021, p. 833)

Desse modo, como o valor de y_1 já é conhecido, podemos reescrever o equacionamento apresentado na Tabela 4 como

$$I_{a,eq} = \frac{Pa^2b^2}{3ELY_1}, \quad (73)$$

de modo que $I_{a,eq}$ corresponde ao momento de inércia de área da seção transversal do eixo do modelo 1a com o diâmetro equivalente. Dessa forma, $I_{a,eq}$ também pode ser calculado utilizando

$$I_{a,eq} = \frac{\pi r_{eq}^4}{4}. \quad (74)$$

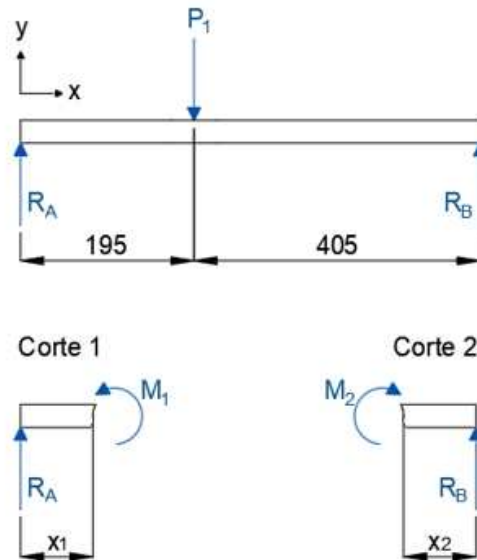
Igualando as Equações (73) e (74), tem-se que o diâmetro equivalente é dado por

$$d_{eq} = 2 \left(\frac{4Pa^2b^2}{3\pi ELY_1} \right)^{1/4}. \quad (75)$$

3.2.1.2 Equação da linha elástica

Após a determinação do diâmetro equivalente, é importante ter conhecimento da equação da linha elástica do modelo 1a para, posteriormente, compará-la com os demais modelos. Inicialmente, é necessário determinar a equação do momento fletor interno, similar ao realizado na subseção 3.2.1.1. Para o modelo 1a, foi adotado o diagrama de corpo livre e cortes conforme apresenta a Figura 34.

Figura 34 - Diagrama de corpo livre e cortes para o modelo 1a (medidas em milímetros)



Fonte: Próprio Autor (2023)

Destaca-se que as reações R_A e R_B podem ser encontradas utilizando as Equações (66) e (67). Desse modo, aplicando a equação de equilíbrio de momentos nos respectivos cortes apresentados na Figura 34, as equações correspondentes ao momento fletor interno são dadas por

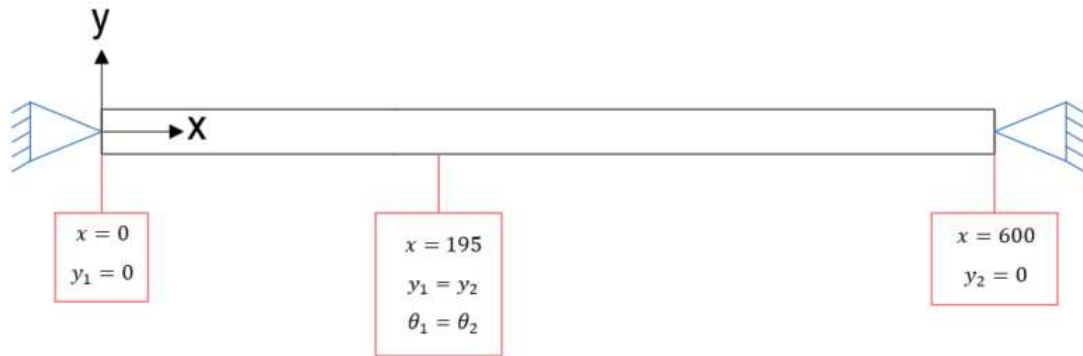
$$M_1 = R_A x_1 \quad \text{para} \quad 0 \leq x_1 < 195 \text{ [mm]}, \quad (76)$$

e

$$M_2 = R_B x_2 \quad \text{para} \quad 0 \leq x_2 \leq 405 \text{ [mm]}. \quad (77)$$

Para aplicação da Equação (27), faz-se necessário a adoção de algumas condições de contorno, as quais são apresentadas na Figura 35, onde y corresponde à deflexão estática e θ ao o ângulo de inclinação da reta que tangencia a curva da linha elástica.

Figura 35 - Condições de contorno para aplicação no Método da Integração Direta (dimensões em milímetros)



Fonte: Próprio Autor (2023)

A Equação (27) foi aplicada em dois trechos do eixo, onde o primeiro corresponde ao comprimento $0 \leq x < 195$, e o segundo à $195 \leq x \leq 600$. Assim, para o primeiro trecho tem-se que

$$EI \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = M_1 = R_A x_1. \quad (78)$$

Integrando, tem-se

$$EI \theta_1 = R_A \frac{x_1^2}{2} + C_1. \quad (79)$$

Integrando novamente, tem-se

$$EI y_1 = R_A \frac{x_1^3}{6} + C_1 x_1 + C_2. \quad (80)$$

Fazendo o mesmo procedimento para o segundo trecho, tem-se que

$$EI \frac{d^2 y_2}{dx_2^2} = M_2 = R_B x_2. \quad (81)$$

Integrando, tem-se

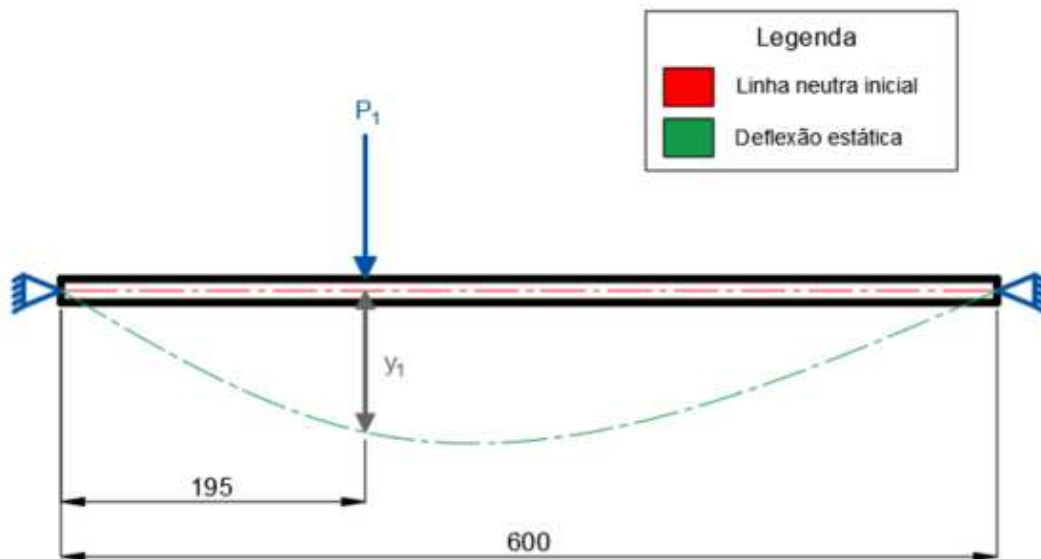
$$EI \theta_2 = R_B \frac{x_2^2}{2} + C_3. \quad (82)$$

Integrando novamente, tem-se

$$EI y_2 = R_B \frac{x_2^3}{6} + C_3 x_2 + C_4. \quad (83)$$

Desse modo, tem-se um sistema linear composto por 4 equações onde, ao aplicar as condições de contorno pertinentes (apresentadas na Figura 35), é possível resolver o sistema e encontrar a equação da linha elástica do modelo 1a. De forma representativa, a Figura 36 apresenta a deflexão estática e a linha neutra inicial, onde P_1 corresponde à força peso decorrente da massa do volante obtida através da Equação (64), a qual causa a deflexão estática y_1 .

Figura 36 – Deflexão estática representativa para o modelo 1a do caso 1 (medidas em milímetros)



Fonte: Próprio Autor (2023)

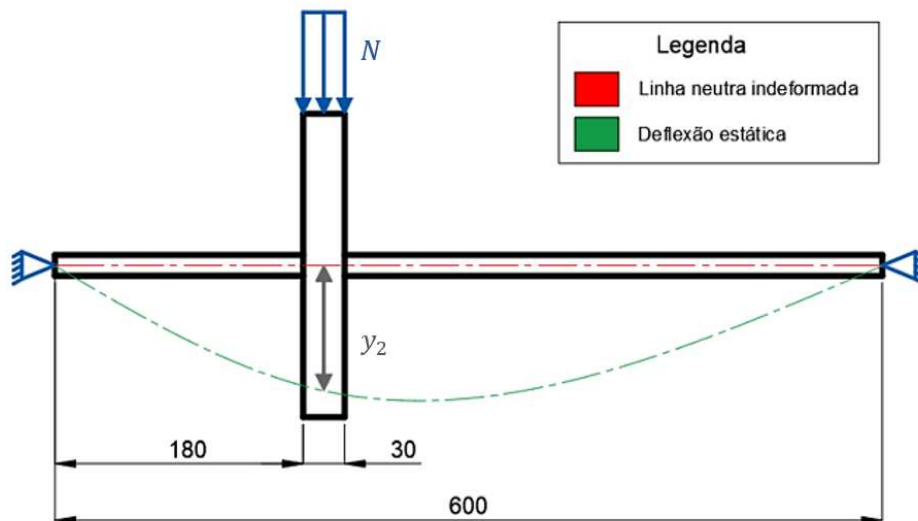
Com isso, pôde-se calcular a velocidade crítica fundamental do modelo 1a simplificando a Equação (26) e a transformando em frequência linear, ou seja,

$$f_{n,1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{y_1}}. \quad (84)$$

3.2.2 Modelo 1b

Para a resolução do caso 1 com o modelo 1b (conforme Tabela 2), foi considerada toda a rigidez do sistema (ou seja: eixo e volante), mas apenas o peso do volante de forma distribuída. A Figura 37 apresenta a modelagem do problema, onde N corresponde ao carregamento devido a força peso decorrente da massa do volante, destacando que a magnitude da força peso corresponde a mesma calculada pela Equação (64). Essa distribuição de carga causa a deflexão estática y_2 e, conseqüentemente, a alteração da linha neutra.

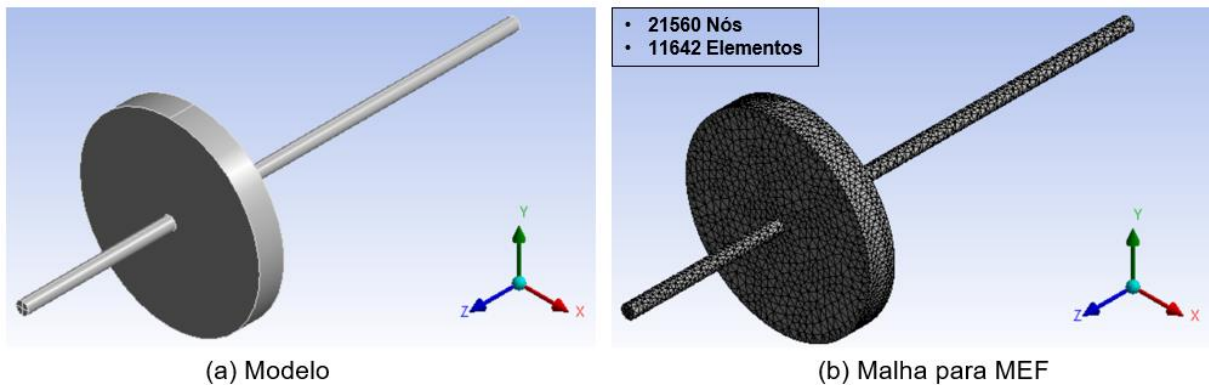
Figura 37 - Deflexão estática representativa para modelo 1b do caso 1 (medidas em milímetros)



Fonte: Próprio Autor (2023)

Para o cálculo da deflexão estática por meio do programa ANSYS®, foi realizada a modelagem tridimensional do problema e a geração da malha, como apresentado na Figura 38. A malha inicial utilizada foi configurada com elementos tetraédricos de segundo grau (P2), com um tamanho máximo de 5,0 milímetros. Destaca-se que a geometria curva do eixo é mais bem descrita com a utilização de elementos de segundo grau, pois garantem uma melhor adequação da malha às superfícies cilíndricas do eixo. A escolha dessa configuração de malha foi justificada pela necessidade de obter resultados mais precisos na análise do problema, sem tornar inviável o custo computacional.

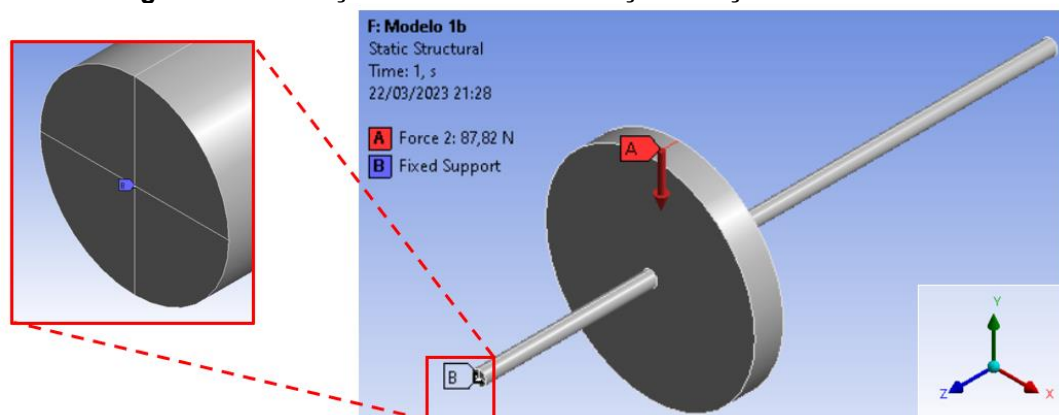
Figura 38 – Desenho 3D e malha para aplicação em MEF do modelo 1b



Fonte: Próprio Autor (2023)

Em seguida, foram aplicadas as condições de contorno de força e fixação. Para condição de contorno de força, o peso do volante foi adicionado na posição indicada na Figura 37 e com a magnitude calculada pela Equação (64). Quanto a condição de contorno de fixação, foi selecionado um ponto localizado no centro da seção transversal do eixo em ambas as extremidades, configurado como suporte fixo. Essa configuração restringe todos os graus de liberdade da parte geométrica selecionada (ponto selecionado). Vale deixar claro que para a aplicação dessas condições de contorno é necessária a divisão geométrica da face (utilizando o comando *split*) nas respectivas posições de força e fixação. A Figura 39 ilustra as condições de contorno aplicadas.

Figura 39 - Condição de contorno de força e fixação do modelo 1b



Fonte: Próprio Autor (2023)

É importante destacar que, caso fossem restringidos todos os graus de liberdade das duas faces localizadas nas extremidades do eixo selecionando-as como condição de contorno de fixação, haveria uma restrição maior ao movimento

de flexão devido à maior quantidade de elementos finitos fixos. Isso resultaria em uma menor deflexão estática e poderia comprometer a precisão dos resultados, aumentando a rigidez do sistema. Ademais, essa condição de contorno não estaria de acordo com a modelagem deste problema, conforme ilustrado na Figura 37, a qual busca representar um apoio em mancal de rolamento.

É fundamental ressaltar que, para extrair a deflexão estática do eixo na direção do eixo y , é necessário aplicar um caminho (utilizando o comando *path*) ao longo de seu comprimento, de modo que esse caminho é localizado no centro da seção transversal do eixo. Logo, são coletados valores nodais de deslocamento na direção y .

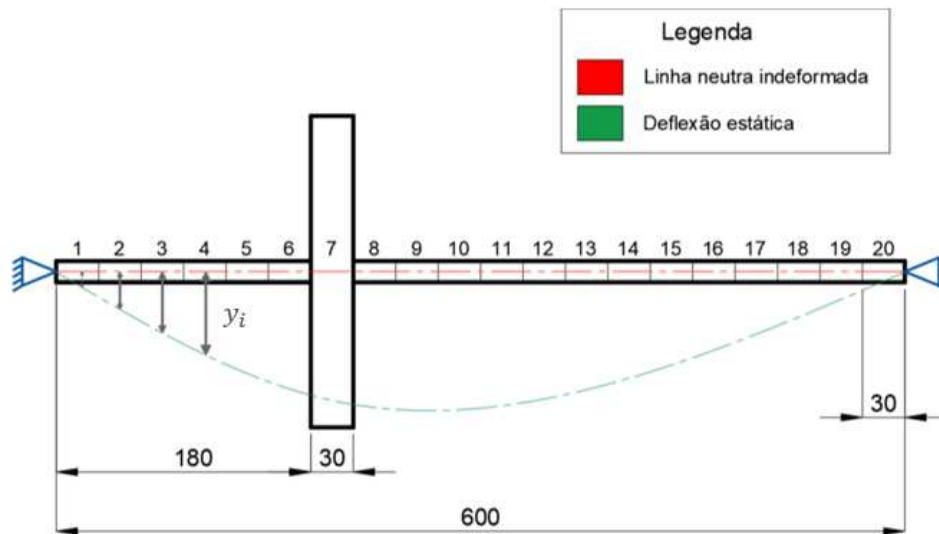
Por conseguinte, foi realizada a simulação e obtida a deflexão estática y_2 , como apresentado na Figura 37. Com isso, foi possível calcular a velocidade crítica fundamental do sistema utilizando a Equação (84), entretanto substituindo y_1 por y_2 .

3.2.3 Modelo 1c

Norton (2013, p. 597) relata que se a massa do eixo for significativa, ela pode ser partida em massas discretas ao longo de seu comprimento com cada parte provendo um termo no somatório da Equação (26). Logo, para a resolução do caso 1 com o modelo 1c (conforme Tabela 2), foram consideradas 20 partições, de modo que cada partição possui uma deflexão estática referente ao seu centro de massa. Em soma disso, foi considerada toda a rigidez e massa do sistema.

Embora, de antemão, não se considere que a massa do eixo seja significativa neste problema, foi realizada esta modelagem a fim de se verificar sua influência sob o resultado obtido. A Figura 40 apresenta a modelagem do problema, onde é possível observar as partições de massa e a representação parcial dos deslocamentos de cada centroide, assim como a linha neutra indeformada e a deflexão estática.

Figura 40 - Deflexão estática representativa para modelo 1c do caso 1 (medidas em milímetros)



Fonte: Próprio Autor (2023)

A massa de cada partição do eixo apresentada na Figura 40 pôde ser calculada como

$$m_i = \rho V_i = \rho \pi r_i^2 L_i, \quad (85)$$

onde V_i , r_i e L_i correspondem ao volume, raio e comprimento de cada partição, respectivamente.

Para o cálculo da deflexão estática por meio do programa ANSYS®, foi realizada a modelagem do problema e a geração da malha, como apresentado na Figura 38. Foram consideradas as mesmas configurações de malha citadas na Subseção 3.2.2, tais como forma geométrica, ordem e tamanho dos elementos finitos.

Em seguida, foram aplicadas as condições de contorno de força e fixação. Para a condição de contorno de fixação, adotou-se o mesmo procedimento explicado na Subseção 3.2.2. Quanto às condições de contorno de força, foi calculado o peso das partições de 1 a 6 como sendo

$$P_2 = \sum_{i=1}^6 \rho V_i g = 2,450N, \quad (86)$$

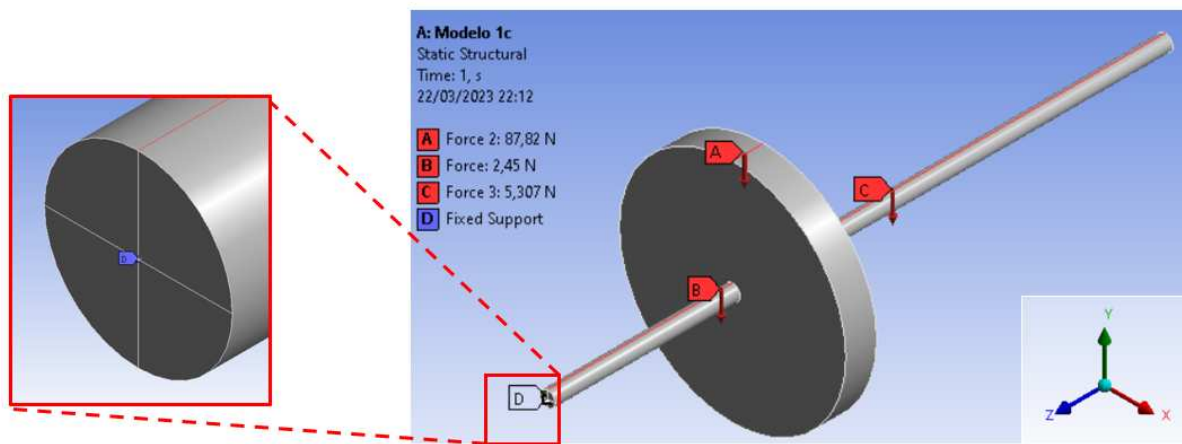
e 8 a 20 utilizando

$$P_3 = \sum_{i=8}^{20} \rho V_i g = 5,307N . \quad (87)$$

Para a partição 7, o peso foi calculado conforme a Equação (64).

Desse modo, a Figura 41 apresenta as condições de contorno aplicadas, onde todas as forças são distribuídas em linha.

Figura 41 - Condição de contorno de forças e fixação do modelo 1c



Fonte: Próprio Autor (2023)

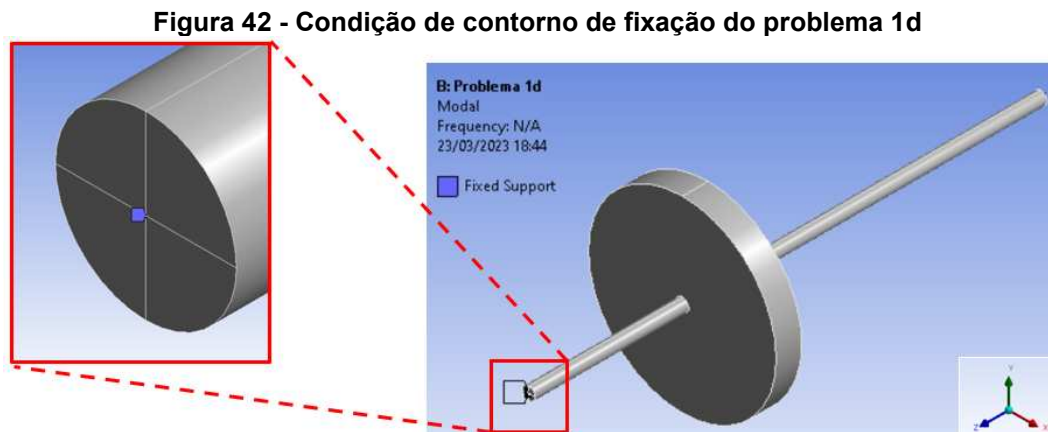
Com base nisso, utilizando a simulação proposta, foi possível obter o valor correspondente à deflexão estática do centro de massa de cada partição indicada na Figura 40. Ademais, a magnitude da massa de cada partição foi determinada por meio da aplicação da Equação (85). Destaca-se que, arbitrariamente, foi particionado o eixo para coincidir com a posição do volante, onde a massa do volante contempla a massa do eixo. Com isso, tornou-se possível calcular a velocidade crítica fundamental do sistema utilizando o Método de Rayleigh em termos de frequência linear, onde

$$f_{n,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g \frac{\sum_{i=1}^{20} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{20} m_i y_i^2}} . \quad (88)$$

3.2.4 Modelo 1d

Para a resolução do caso 1 com o modelo 1d (conforme Tabela 2), foi considerada toda a rigidez e massa do sistema, como no modelo 1c. Foi utilizada a Análise Modal, objetivando a identificação da velocidade crítica fundamental e seu respectivo modo de vibração associado. Com isso, foi realizada a modelagem tridimensional do problema e a geração inicial da malha, como apresentado na Figura 38. Foram utilizadas as mesmas configurações de malha citadas na Subseção 3.2.2, tais como forma geométrica, grau e tamanho dos elementos finitos. É crucial destacar que essas configurações são iniciais, uma vez que a aplicação do critério de verificação de convergência pode levar a alterações nos elementos da malha.

Em seguida, foram definidas as condições de contorno, como apresentado na Figura 42. Vale ressaltar que a Análise Modal exige apenas a condição de contorno de fixação, uma vez que a velocidade crítica é, por definição, a frequência de oscilação de um sistema físico, sem a presença de qualquer força externa ou excitação (LEE, 2014, p. 385), logo uma propriedade oriunda da distribuição de rigidez e inércia de massa do sistema.



Fonte: Próprio Autor (2023)

Com base nisso, utilizando a simulação proposta, foi possível obter o valor correspondente à velocidade crítica fundamental para vibração lateral do sistema. Além disso, foi possível obter também a curva de deflexão dinâmica através da aplicação de um caminho (utilizando o comando *path*) ao longo do comprimento do eixo. Foram extraídas as deflexões dinâmicas a cada 15 milímetros ao longo do

comprimento do eixo, as quais não necessariamente precisam coincidir com as posições nodais.

3.3 Resolução do caso 2

Diferentemente do caso 1, a resolução do caso 2 tem um objetivo duplo: determinar tanto a velocidade crítica para vibração lateral, quanto para vibração torcional. Para isso, assim como no caso 1c, é necessário o conhecimento das deflexões estáticas e massas para cálculo da velocidade crítica em vibração lateral utilizando a Equação (26). Além disso, é necessário calcular a constante torcional da mola do sistema e o momento de inércia da massa para determinar a velocidade crítica de vibração torcional conforme Equação (42).

É importante destacar de antemão que, para vibração lateral, foi tomado como referência a solução via MEF (uma vez que não se encontrou solução analítica na literatura clássica)². Todavia, para vibração torcional a solução analítica foi tomada como referência.

Norton (2013, p. 603) relata que a deflexão estática do eixo devido ao peso dos volantes pode ser utilizada como uma estimativa para o Método de Rayleigh, todavia o peso desses volantes deve ser aplicado na direção que der a maior deflexão estática. Supondo que o projetista não tenha conhecimento desta informação, o modelo 2a e 2b visa avaliar se, por acaso, a direção da força peso for adicionada equivocadamente, qual seria o erro para as velocidades críticas obtidas pelo método. Desse modo, as subseções seguintes apresentam a metodologia aplicada ao caso 2.

3.3.1 Modelo 2a

Para a resolução do caso 2 com o modelo 2a (conforme Tabela 2), foi considerada toda a rigidez e massa do sistema. Em soma disso, foi realizada a divisão da massa do sistema em 20 partições, de modo que cada partição possui uma deflexão estática referente ao seu centroide. A Figura 43 apresenta a

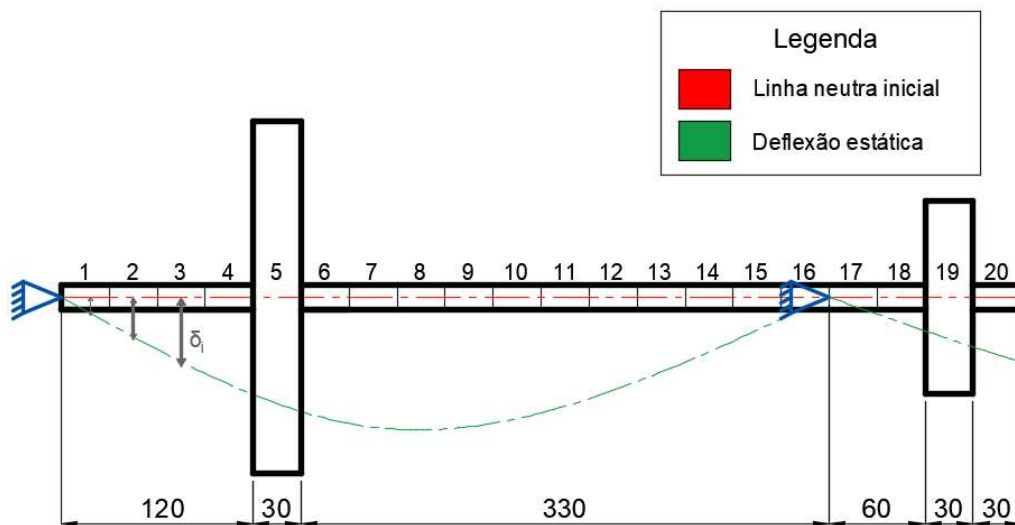
² A busca por soluções analíticas para vibração lateral e torcional dos casos 1 e 2 foi realizada principalmente nas literaturas:

- RAO, S. S. *Vibration of Continuous System*. Wiley. New Jersey, 2007;

- KURDILA, A. J.; CRAIG, R. R. *Fundamentals of Structural Dynamics*. 2 ed. Wiley. New Jersey, 2006.

modelagem do problema, onde é possível observar as partições de massa do sistema mecânico e a representação parcial dos deslocamentos de cada centroide. Destaca-se que no modelo 2a toda a força peso do sistema é colocada no mesmo sentido e, portanto, espera-se resultar em uma curva de deflexão estática cuja inclinação seja parecida a representada na Figura 43.

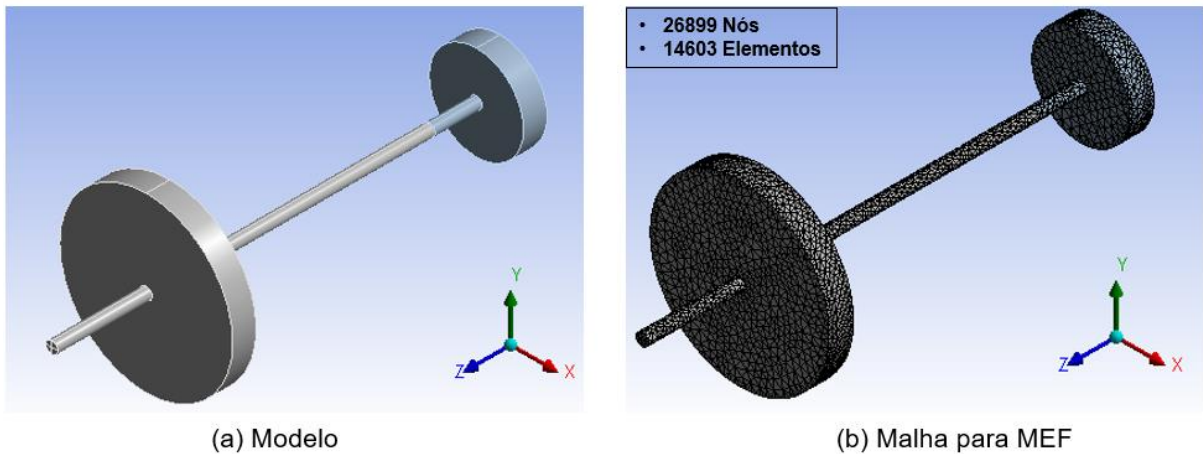
Figura 43 - Deflexão estática representativa para modelo 2a do caso 2 (medidas em milímetros)



Fonte: Próprio Autor (2023)

Para o cálculo da deflexão estática por meio do programa ANSYS®, foi realizada a modelagem tridimensional do problema e a geração da malha, onde os resultados desses procedimentos são apresentados na Figura 44. Para a geração da malha, as mesmas configurações de malha apresentadas na Subseção 3.2.2 foram utilizadas.

Figura 44 - Desenho 3D e malha para aplicação em MEF do modelo 2a



Fonte: Próprio Autor (2023)

Em seguida, foram aplicadas as condições de contorno de força e fixação. Para a condição de contorno de fixação, adotou-se o mesmo procedimento explicado na Subseção 3.2.2. Quanto à condição de contorno de força, calculou-se o peso das partições de 1 a 4 como sendo

$$P_4 = \sum_{i=1}^4 \rho V_i g = 1,63N, \quad (89)$$

enquanto o peso da partição 5 foi determinado utilizando a Equação (64). Já o peso das partições de 6 a 18 foi calculado tomando

$$P_6 = \sum_{i=6}^{18} \rho V_i g = 5,31 N. \quad (90)$$

O peso da partição 19 pôde ser calculado utilizando

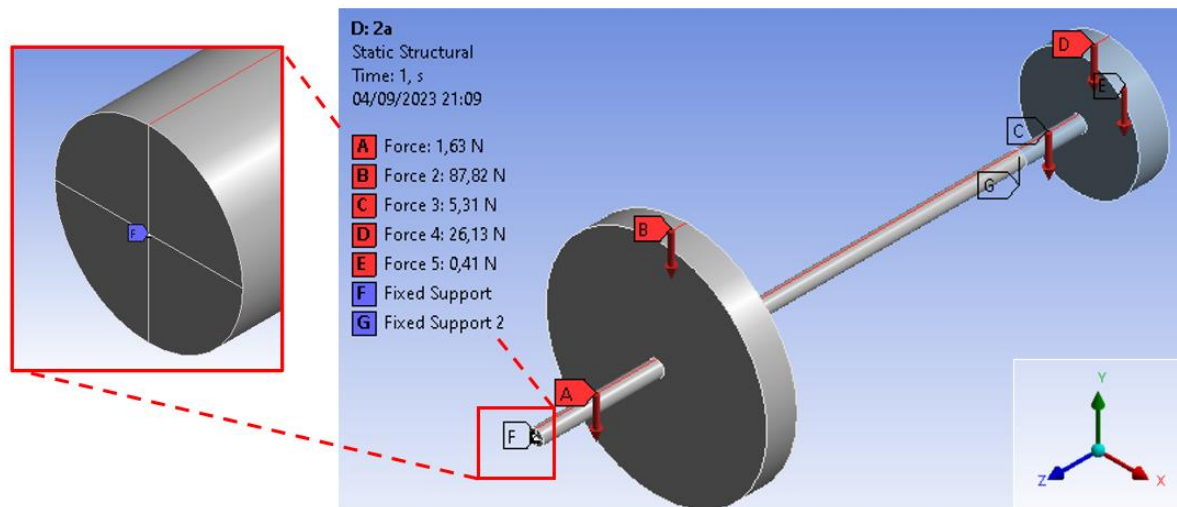
$$P_7 = \rho V_{15} g = 26,13 N, \quad (91)$$

enquanto o peso da partição 20 foi calculado como sendo

$$P_8 = \rho V_i g = 0,41 N \quad (92)$$

Desse modo, a Figura 45 apresenta as condições de contorno aplicadas.

Figura 45 - Condição de contorno do problema 2a



Fonte: Próprio Autor (2023)

Com base nisso, utilizando a simulação proposta, foi possível obter o valor correspondente à deflexão estática do centro de massa de cada partição indicada na Figura 43. Ademais, a magnitude da massa de cada partição foi determinada por meio da aplicação da Equação (85). Com isso, tornou-se possível calcular a velocidade crítica fundamental para vibração lateral do sistema utilizando o Método de Rayleigh, como expresso na Equação (88).

É importante ressaltar que para a aplicação da condição de contorno G exposta na Figura 45, é necessário dividir o conjunto em dois corpos por meio do comando *slice* e, em seguida, aplicar o comando *split face* na superfície onde a condição foi aplicada.

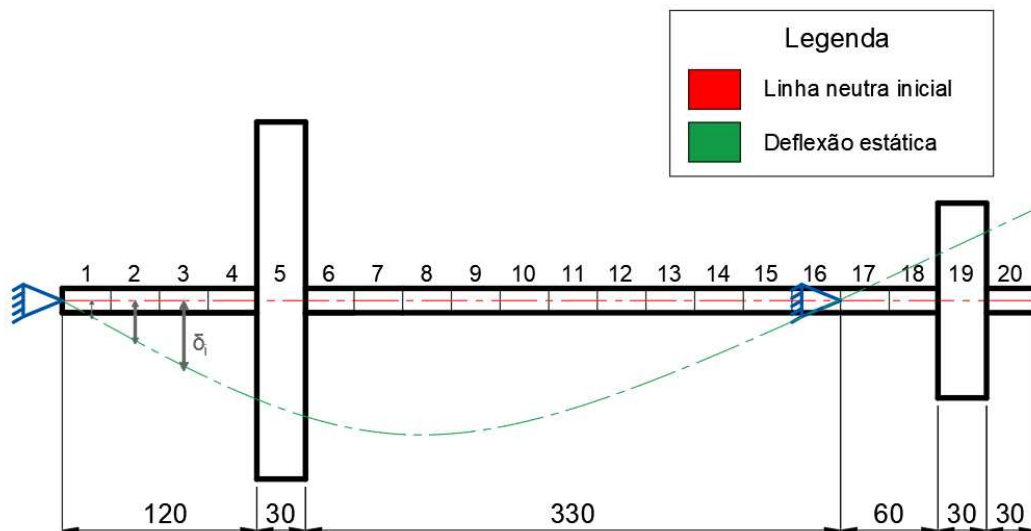
3.3.2 Modelo 2b

Para resolução do modelo 2b (conforme Tabela 2), foi considerada toda a rigidez e massa do sistema. Ademais, utilizou-se o particionamento de massas apresentado na Figura 46. No modelo 2b a força peso do sistema inverte seu sentido após a condição de contorno colocada entre os volantes, como apresentado na Tabela 2. Por esse motivo, a curva de deflexão estática adquire a forma representativa exposta na Figura 46.

É esperado que, com a utilização do modelo 2b, a deflexão estática seja maior em relação ao modelo 2a e Norton (2013, p. 597) relata que, caso mais de uma estimativa da curva de deflexão dinâmica for tentada, deve ser utilizada aquela

que exibir o menor valor de velocidade crítica e, conseqüentemente, o maior valor de deflexão estática. Logo espera-se que o erro alcançado com o modelo 2b seja inferior ao encontrado com o modelo 2a.

Figura 46 - Deflexão estática representativa para modelo 2b do caso 2



Fonte: Próprio Autor (2023)

O cálculo da deflexão estática foi realizado por meio do programa ANSYS®, onde necessitou-se da modelagem tridimensional do problema e a geração da malha. Para a geração da malha, as mesmas configurações apresentadas na Subseção 3.2.2 foram utilizadas. Como ambos os modelos 2a e 2b apresentam a mesma forma geométrica e a mesma configuração de malha, a Figura 44 também representa o resultado da modelagem e da geração da malha para o modelo 2b.

Após isso, foram aplicadas as condições de contorno de força e fixação. Adotou-se o mesmo procedimento explicado na Subseção 3.2.2 para configuração da condição de contorno de fixação. Quanto à condição de contorno de força, calculou-se o peso das partições de 1 a 4 como apresentado na Equação (89) e da partição 5 conforme Equação (64). Quanto ao peso das partições de 6 a 16, foi calculado como sendo

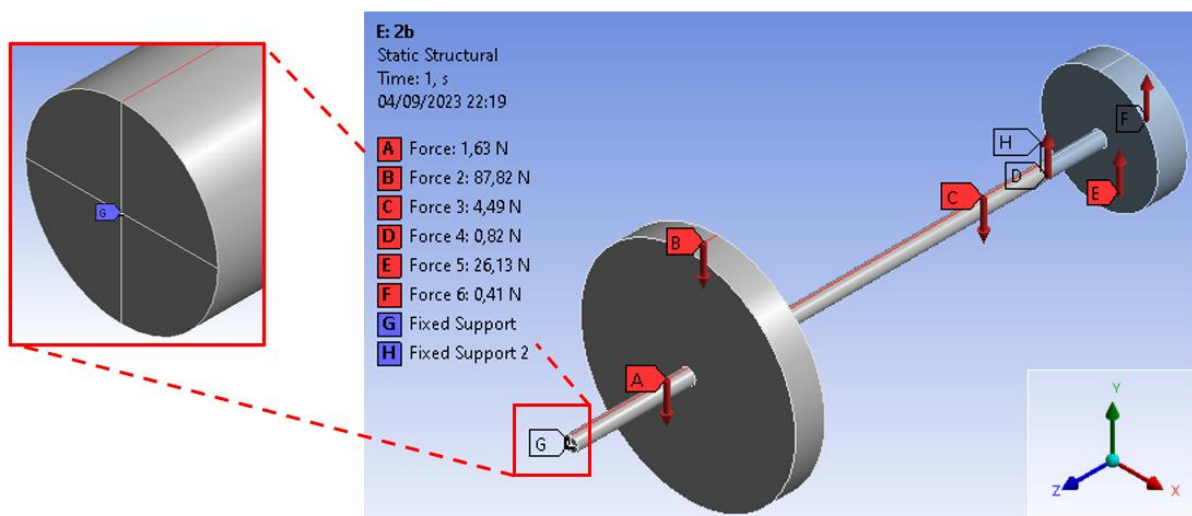
$$P_{11} = \sum_{i=6}^{16} \rho V_i g = 4,49 \text{ N}, \quad (93)$$

a para as partições 17 e 18 foi utilizado

$$P_{12} = \sum_{i=17}^{18} \rho V_i g = 0,82 \text{ N.} \quad (94)$$

O peso das partições 19 e 20 é o igual ao calculado pelas Equações (91) e (92). Desse modo, a Figura 47 apresenta as condições de contorno aplicadas ao modelo 2b.

Figura 47 - Condição de contorno do problema 2b



Fonte: Próprio Autor (2023)

A partir da simulação proposta, foi possível obter o valor correspondente à deflexão estática do centro de massa de cada partição como apresentada na Figura 46. Em seguida, foi calculada a velocidade crítica fundamental para vibração lateral do sistema utilizando o Método de Rayleigh, como expresso na Equação (88).

3.3.3 Modelo 2c

Para encontrar a velocidade crítica aproximada de vibração torcional via Método de Rayleigh para o modelo 2c (conforme Tabela 2), foi utilizada a Equação (42), onde o momento de inércia de massa de ambos os volantes foi calculado por meio da Equação (41). Em soma disso, para o cálculo da constante torcional de mola do sistema, foram utilizadas as equações (39) e (40). Com isso, foi possível obter a velocidade crítica fundamental para vibração torcional de eixos utilizando o

Método de Rayleigh. Além disso, foi calculada ainda a posição ao longo do comprimento do eixo em que o ângulo de torção é nulo, utilizando a Equação (43).

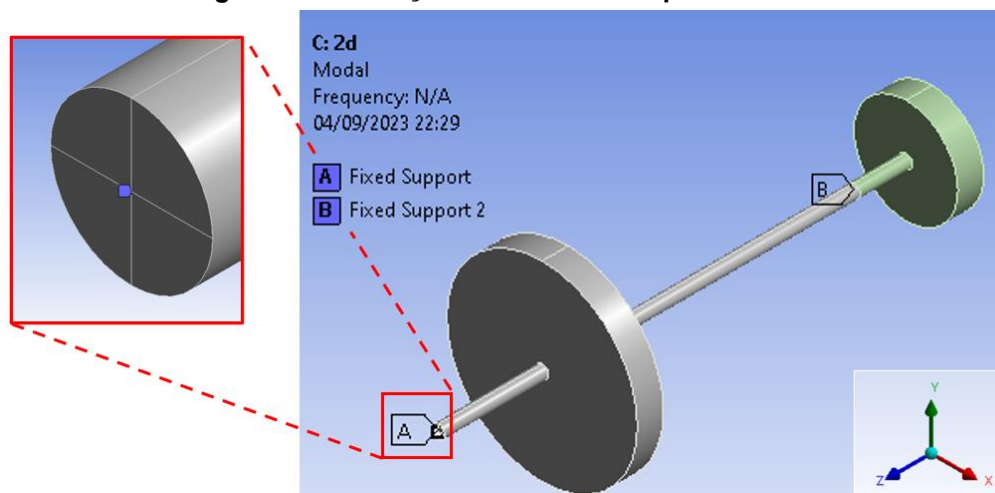
Como referência para a velocidade crítica de vibração torcional, foi adotada a solução analítica exposta na literatura RAO (2007, p. 283), dada pela Equação (49). Para resolução matemática dessa Equação, foi utilizado o programa EES (*Engineering Equation Solver*).

3.3.4 Modelo 2d

Para a resolução do caso 2 com o modelo 2d (conforme Tabela 2), foi considerada toda a rigidez e massa do sistema. Foi utilizada a Análise Modal por meio do programa ANSYS®, objetivando a identificação de velocidades críticas de vibração lateral eixo, assim como seus respectivos modos de vibração associados. Com isso, foi realizada a modelagem tridimensional do problema e a geração da malha, como apresentado na Figura 44. Foram consideradas as mesmas configurações iniciais de malha citadas na Subseção 3.2.2, tais como forma geométrica, grau do polinômio interpolador e tamanho dos elementos finitos. Como o modelo 2d apresenta a mesma forma geométrica e configuração de malha utilizada no modelo 2a, a Figura 44 expõe o resultado do modelo tridimensional e a malha gerada.

Em seguida, foram definidas as condições de contorno de fixação, como apresentado na Figura 48.

Figura 48 - Condição de contorno do problema 2d



Fonte: Próprio Autor (2023)

Com base nisso, utilizando a simulação proposta foi possível obter o valor correspondente à velocidade crítica para vibração lateral. A identificação do modo de vibração correspondente a cada velocidade crítica foi realizada visualmente, haja vista que o programa exibe um pequeno vídeo ilustrativo do eixo em vibração. Ademais, foram extraídos os 6 primeiros modos de vibração para registro.

Além disso, foi adicionado um caminho (através do comando *path*) ao longo do comprimento do eixo entre volantes, com o objetivo de se extrair a deflexão total (em milímetros) para vibração torcional. A posição ao longo do comprimento do eixo onde a deflexão é nula, corresponde a posição do nó. O objetivo de se ter conhecimento de qual seria a posição de ângulo de torção nulo (vide Figura 18) é realizar uma comparação entre o valor numérico encontrado e aquele calculado por meio da Equação (43).

3.4 Metodologia para análise dos resultados

A fim de garantir uma comparação direta entre as curvas de deflexão estática e dinâmica no caso 1, foi adotada a curva de deflexão padronizada δ_p , ou seja,

$$\delta_p = \frac{\delta_i}{\delta_{max}} \quad (95)$$

onde δ_i é a deflexão estática ou dinâmica de cada ponto extraído diretamente do ANSYS®, e δ_{max} é a deflexão máxima da curva correspondente. É fundamental destacar que as deflexões estática e dinâmica foram extraídas a cada intervalo de 15 milímetros ao longo do comprimento do eixo.

Após isso, foi calculada a distância quadrática entre cada ponto, de cada curva, de deflexão estática e dinâmica utilizando

$$\delta' = (\delta_{p,e} - \delta_{p,d})^2, \quad (96)$$

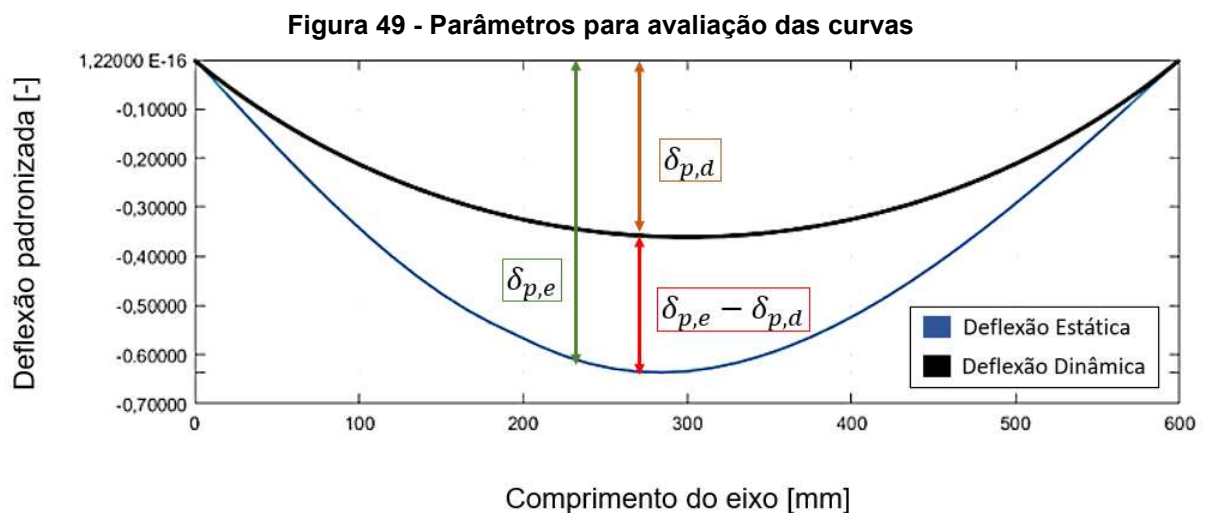
onde $\delta_{p,e}$ é a deflexão estática padronizada e $\delta_{p,d}$ é a deflexão dinâmica padronizada. Destaca-se que, para o caso 1, esse cálculo resulta em um gráfico

com três curvas, o qual representa a distância quadrática entre a curva de deflexão estática correspondente a cada modelo (conforme Tabela 2) em relação à referência (utilizada como a curva de deflexão dinâmica obtida através da Análise Modal via MEF).

Além disso, foi calculado o desvio global de deflexão (correspondente a todos os pontos de extração da deflexão) e o desvio local de deflexão (corresponde apenas à deflexão do centroide do volante em 195mm do comprimento do eixo). Para isso, foi adotado que

$$\psi = \sqrt{\frac{\sum(\delta_{p,e} - \delta_{p,d})^2}{\sum \delta_{p,d}^2}} \cdot 100. \quad (97)$$

Assumindo duas curvas quaisquer, sendo uma para deflexão estática e outra para deflexão dinâmica, a representação gráfica dos parâmetros utilizados nas equações (96) e (97) pode ser observada na Figura 49.



Fonte: Próprio Autor (2023)

Para análise dos resultados obtidos para a velocidade crítica tanto do caso 1, como do caso 2, foi calculado o erro percentual relativo E_{rel} em relação à solução de referência. Desse modo,

$$E_{rel} = \left(\frac{\omega_n(Rayleigh)}{\omega_n(referência)} - 1 \right) \cdot 100, \quad (98)$$

onde $\omega_n (Rayleigh)$ corresponde à velocidade crítica encontrada através do Método de Rayleigh e $\omega_n (referência)$ encontrada utilizando MEF ou solução analítica.

4 RESULTADOS

Esta seção tem como objetivo apresentar os resultados alcançados ao aplicar as metodologias propostas na seção 3. Ademais, esta seção também expõe as soluções obtidas via Método de Rayleigh, MEF e por meio do método analítico apresentado. Posteriormente, foi incluída uma análise comparativa entre os resultados obtidos.

4.1 Solução do Caso 1

O objetivo desta subseção é expor os resultados obtidos para o caso 1. Apresentar-se-á os resultados alcançados para cada modelo e, em seguida, na Subseção 4.1.5, é realizada uma comparação entre estes resultados, com a finalidade de se obter conclusões.

4.1.1 Modelo 1a

Inicialmente, objetiva-se obter a energia de deformação associada aos modelos do caso 1, para posteriormente calcular o diâmetro equivalente do modelo 1a. Com isso, as reações R_A e R_B ilustradas na Figura 32 e obtidas a partir das equações (66) e (67) são dadas por

$$R_A = 59,27874 \text{ N} \quad (99)$$

e

$$R_B = 28,54161 \text{ N}. \quad (100)$$

Desse modo, as equações referentes ao momento fletor interno do sistema apresentado na Figura 33 podem ser dadas por

$$M_1 = 59,27874 x \text{ para } 0 \leq x_1 < 180 \text{ [mm]}, \quad (101)$$

$$M_2 = 1463,6725 (x_1 - 0,18)^2 + 59,27874 x_1 \text{ para } 180 \leq x_1 < 210 \text{ [mm]} \quad (102)$$

e

$$M_3 = 28,54161 x_2 \text{ para } 0 \leq x_2 \leq 390 \text{ [mm]}. \quad (103)$$

Desse modo, pode-se calcular a energia de deformação do sistema utilizando a Equação (71). Logo,

$$U_{1b} = 2,22964 \cdot 10^{-2} \text{ Nm} \quad (104)$$

onde

$$I_e = \frac{\pi}{4} (7,5 \cdot 10^{-3})^4 = 2,48505 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4 \quad (105)$$

e

$$I_v = \frac{\pi}{4} (0,110)^4 = 1,14990 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4. \quad (106)$$

Portanto, o valor do deslocamento estático y obtido é de

$$y = \frac{2 \cdot 2,22964 \cdot 10^{-2}}{87,82035} = 5,07773 \cdot 10^{-4} \text{ m}. \quad (107)$$

Consequentemente, o diâmetro equivalente pôde ser obtido através da Equação (75) onde

$$d_{eq} = 2 \cdot \left(\frac{4 \cdot 87,82035 \cdot 0,195^2 \cdot 0,405^2}{3 \cdot \pi \cdot 207 \cdot 10^9 \cdot 0,6 \cdot 5,07773 \cdot 10^{-4}} \right)^{\frac{1}{4}} = 15,58378 \text{ mm}. \quad (108)$$

É importante ressaltar que este diâmetro equivalente é obtido partindo do pressuposto de que a energia de deformação do modelo 1a deve ser igual ao modelo 1b, de modo que é considerada toda a rigidez do sistema.

Para determinar a equação da linha elástica, tem-se o sistema linear representado pelas equações (79), (80), (82) e (83), o qual pode ser reescrito como

$$\begin{cases} 599,28234 \cdot \theta_1 = 29,63937 \cdot x_1^2 + C_1 \\ 599,28234 \cdot y_1 = 9,87979 \cdot x_1^3 + C_1 \cdot x_1 + C_2 \\ 599,28234 \cdot \theta_2 = 14,27081 \cdot x_2^2 + C_3 \\ 599,28234 \cdot y_2 = 4,75694 \cdot x_2^3 + C_3 \cdot x_2 + C_4 \end{cases} \quad (109)$$

onde o momento de inércia de área da seção transversal do eixo em relação à linha neutra com o diâmetro corrigido é dado por

$$I = \frac{\pi}{4} \left(\frac{15,58378}{2 \cdot 1000} \right)^4 = 2,89508 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4. \quad (110)$$

Aplicando as condições de contorno apresentadas na Figura 35 e resolvendo o sistema linear dado pela Equação (109), tem-se as constantes de integração

$$(C_1; C_2; C_3; C_4) = (-1,93619; 0; -3,60588; 0,10853) \quad (111)$$

Desse modo, a equação que representa a deflexão estática do modelo 1a é dada por

$$y_1 = \frac{1}{599,28234} \cdot \left(59,27874 \cdot \frac{x_1^3}{6} - 1,93619 \cdot x_1 \right) \text{ para } 0 \leq x_1 < 195 \text{ [mm]} \quad (112)$$

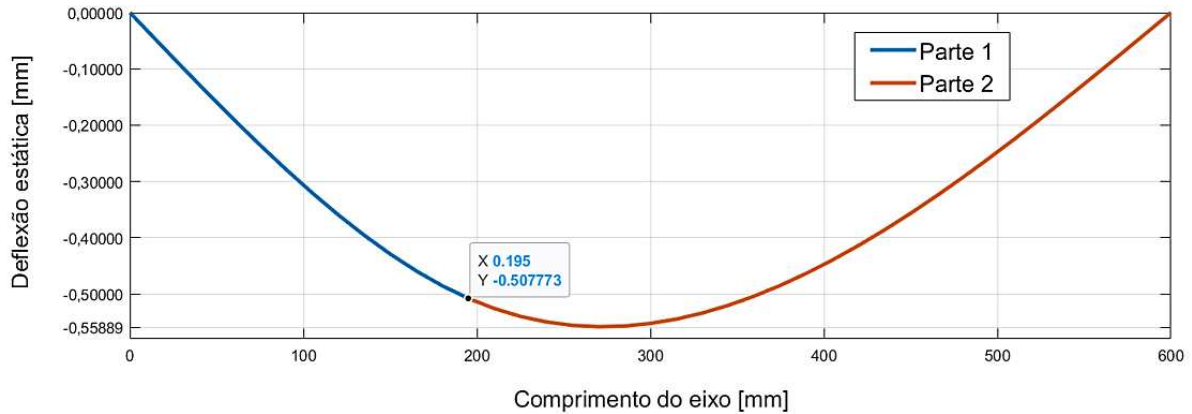
e

$$y_2 = \frac{1}{599,28234} \cdot \left(-28,54161 \cdot \frac{x_2^3}{6} + 17,12497 \cdot \frac{x_2^2}{2} - 3,60588 \cdot x_2 + 0,10853 \right) \quad (113)$$

para $0 \leq x_2 \leq 405 \text{ [mm]}$

Consequentemente, a equação da linha elástica do modelo 1a obtida pelas equações (112) e (113) é apresentada graficamente na Figura 50, onde as partes 1 e 2 correspondem as equações (112) e (113) respectivamente. Na Figura 50 é destacado ainda o valor da deflexão estática de interesse, ou seja, aquele obtido através da Equação (107).

Figura 50 - Equação da linha elástica do problema 1a



Fonte: Próprio Autor (2023)

A magnitude da deflexão estática, em módulo, foi de 0,507773 mm na posição de 195 mm do comprimento do eixo (referente à posição do centro do volante). Substituindo o valor de deflexão estática na Equação (84), pôde-se calcular a velocidade crítica fundamental para vibração lateral, onde

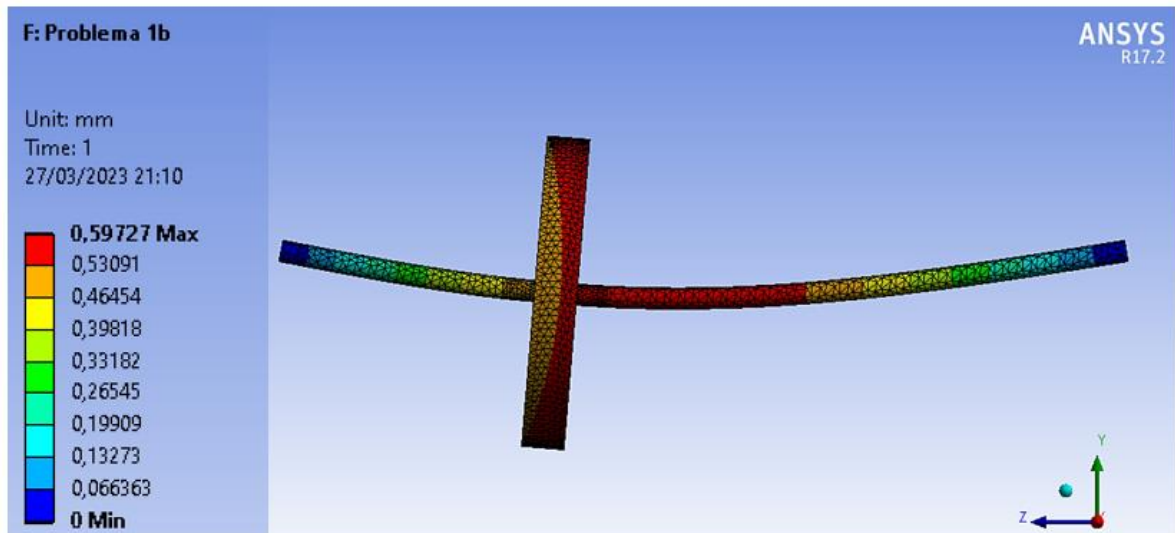
$$f_{n,1a} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9,81}{0,507773 \cdot 10^{-3}}} = 22,122 \text{ Hz} . \quad (114)$$

É relevante salientar previamente que a velocidade crítica encontrada para o modelo 1a foi superior à referência (obtida via MEF), a qual é detalhadamente apresentada na Subseção 4.1.4.

4.1.2 Modelo 1b

A partir da metodologia descrita na Subseção 3.2.2, realizou-se uma simulação estática cujo resultado é mostrado na Figura 51. Nessa figura, é apresentada a deflexão total do eixo, em que a variação de cores indica sua magnitude, como apresentado na legenda.

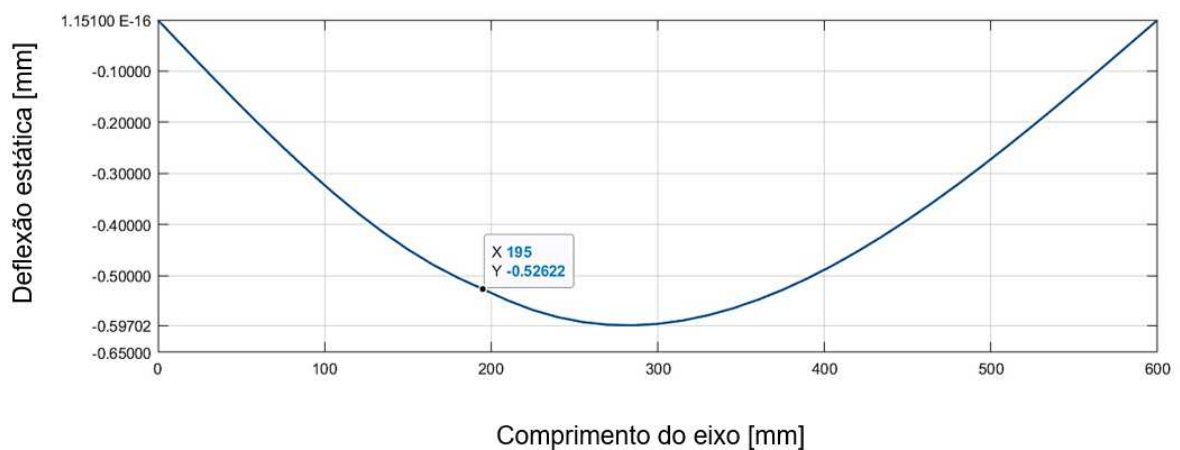
Figura 51 – Deflexão estática total do modelo 1b



Fonte: Próprio Autor (2023)

A Figura 52 apresenta a linha elástica resultante, que mostra a deflexão estática na direção y ao longo do comprimento do eixo. Nesta figura, é destacada ainda a posição ao longo do comprimento do eixo onde deseja-se conhecer a magnitude da deflexão estática.

Figura 52 - Equação da linha elástica do problema 1b



Fonte: Próprio Autor (2023)

O módulo da deflexão estática foi de 0,52622 milímetros na posição de 195 milímetros do comprimento do eixo. Ao substituir o valor de deflexão estática na Equação (84), pôde-se calcular a velocidade crítica fundamental para vibração lateral do eixo, onde

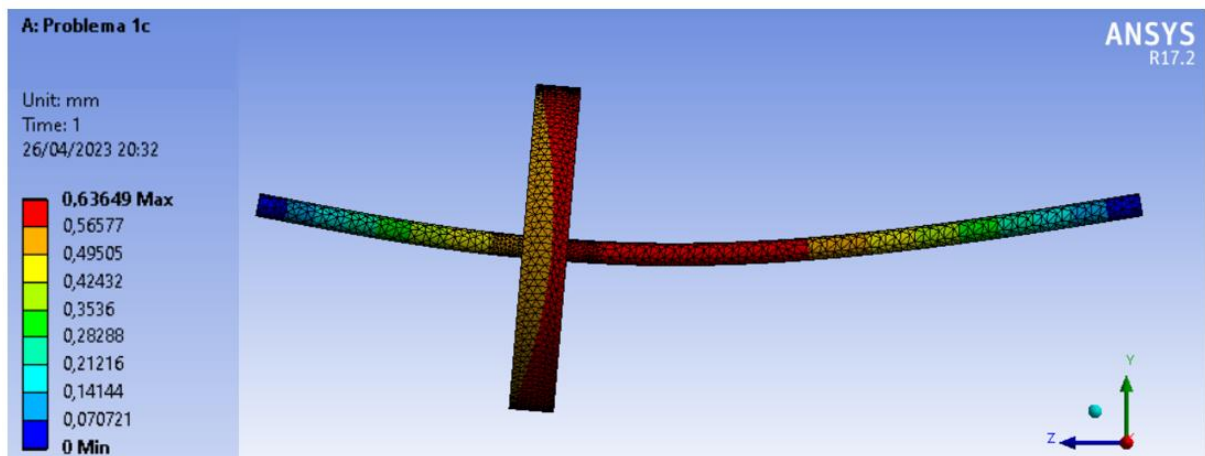
$$f_{n,1b} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9,81}{0,52622 \cdot 10^{-3}}} = 21,731 \text{ Hz}. \quad (115)$$

Observa-se que a deflexão estática obtida com o modelo 1b quando o a posição x é igual a 195 milímetros ($y_{1b} = 0,52622\text{mm}$) é maior comparada ao modelo 1a ($y_{1a} = 0,50777\text{mm}$). Isso se deve ao fato da maior concentração de massa nessa respectiva região com modelo 1b, o que faz com que o peso atuante nessa posição do eixo aumente e, conseqüente, a deflexão estática.

4.1.3 Modelo 1c

A Figura 53 apresenta o resultado visual da simulação estática descrita na Subseção 3.2.3. A figura apresenta a deflexão total do eixo, onde a variação de cores indica sua magnitude de acordo com a legenda.

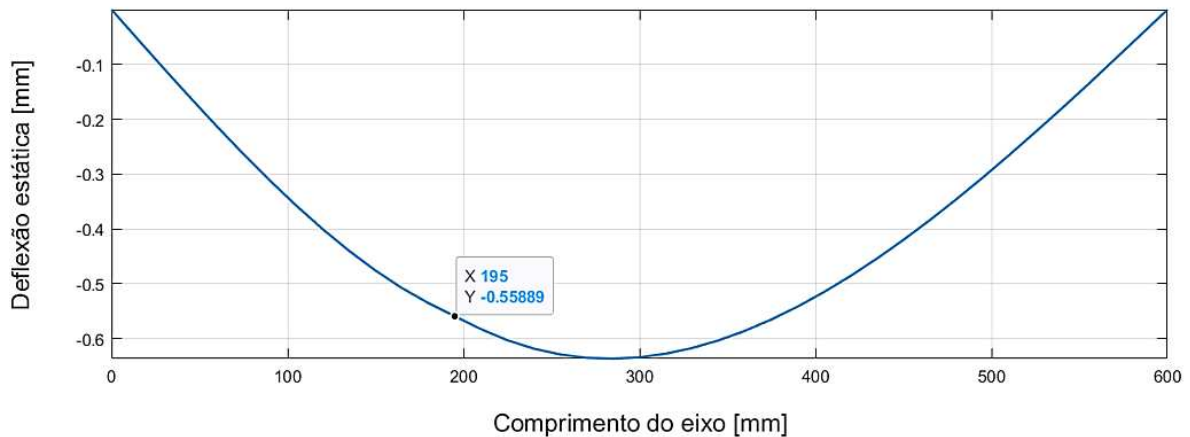
Figura 53 – Deflexão estática total do modelo 1c



Fonte: Próprio Autor (2023)

A curva de deflexão estática na direção y em relação ao comprimento do eixo é apresentada na Figura 54.

Figura 54 - Equação da linha elástica do modelo 1c



Fonte: Próprio Autor (2023)

Dessa forma, foi possível obter a deflexão estática na direção y correspondente ao centro de massa de cada partição, conforme ilustrado na Figura 40. Além disso, utilizando a Equação (85), pôde-se calcular a massa de cada partição. O Anexo A apresenta os resultados detalhados do cálculo da massa e deflexão correspondentes à cada partição, bem como o somatório dos termos necessários para aplicação no Método de Rayleigh. Portanto, a velocidade crítica fundamental para a vibração lateral foi obtida utilizando

$$f_{n,1c} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{9,81 \frac{5,32 \cdot 10^{-3}}{2,95 \cdot 10^{-6}}} = 21,160 \text{ Hz} . \quad (116)$$

4.1.4 Modelo 1d

A Tabela 5 apresenta os resultados obtidos para velocidade crítica com a utilização do MEF, de acordo com a metodologia de resolução apresentada na Subseção 3.2.4.

Tabela 5 – Velocidades críticas obtidas para o modelo 1d

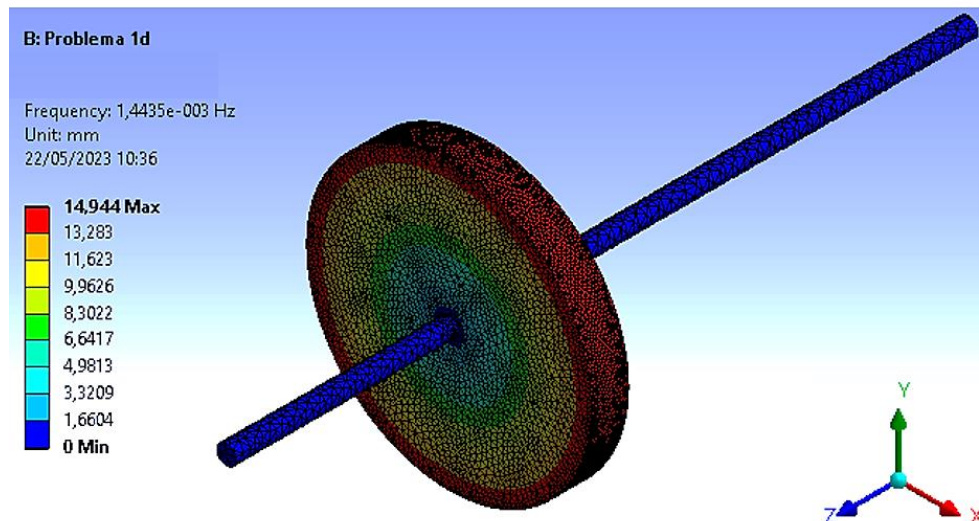
Modo	Velocidade Crítica [Hz]
1º	1,44E-03
2º	20,905
3º	20,911

Fonte: Próprio Autor (2023)

Ao analisar a Tabela 5, nota-se que o primeiro valor para a velocidade crítica é praticamente nulo, indicando pequenos deslocamentos de corpo rígido, como afirmado por Lee (2014, p. 385). Desse modo, o primeiro modo resultante da análise modal é denominado modo de corpo rígido com giro em torno do eixo axial. É fundamental ressaltar que o primeiro modo de vibração ocorre devido às condições de contorno de fixação que não restringem esse tipo de movimentação. Nesse contexto, as condições de contorno buscam representar o efeito de apoio por meio de rolamentos, os quais, de fato, não devem impor restrições ao movimento de rotação.

Além disso, é importante observar que esse modo de corpo rígido não causa deformações e, portanto, isso significa que o modelo em análise não adquire nem perde energia potencial elástica durante o movimento de corpo rígido. A Figura 55 apresenta a visualização física obtida através da resolução numérica, onde é possível notar que os máximos valores do vetor deslocamento resultante ocorrem nas proximidades da circunferência do volante.

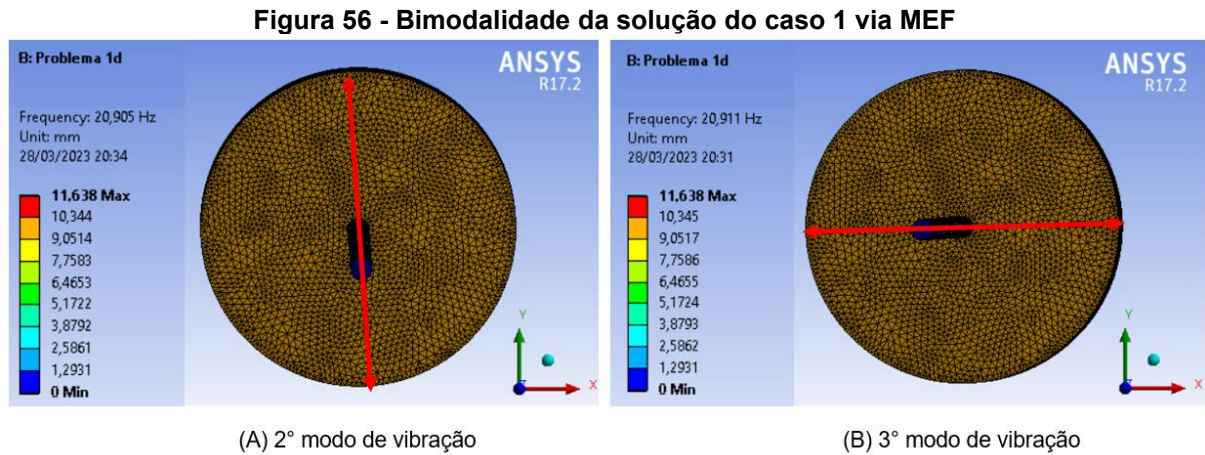
Figura 55 - Modo de corpo rígido



Fonte: Próprio Autor (2023)

A Tabela 5 revela que os modos 2 e 3 apresentam valores praticamente iguais. Isso ocorre devido à bimodalidade, ou seja, a presença de dois modos de vibração, neste caso lateral, com mesma velocidade crítica, onde o modo de vibração é o mesmo, mas se apresenta em planos distintos, sendo estes ortogonais entre si. Esse fenômeno ocorre devido à simetria do problema em planos diferentes,

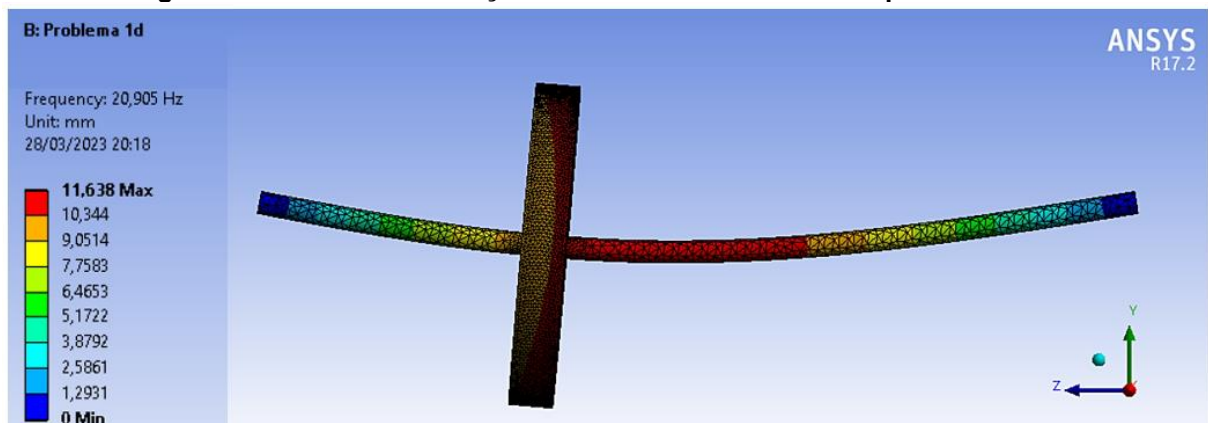
sendo que o problema visto do plano yz é idêntico ao problema visto do plano xz. A Figura 56 apresenta a bimodalidade encontrada, onde a seta em vermelho representa a direção da vibração lateral.



Fonte: Próprio Autor (2023)

A Figura 57 apresenta o segundo modo de vibração mencionado na Tabela 5, onde as cores indicam a magnitude das deflexões de acordo com a legenda. A aplicação do critério de convergência resultou em um refinamento *h-adaptativo* que se concentrou na região do volante. Como consequência, a quantidade de elementos nessa região aumentou e o tamanho reduziu. O motivo do refino ter se concentrado nesta região pode ser explicado devido ao fato da maior variação de rigidez e massa nessa localidade.

Figura 57 – Modo 1 de vibração lateral encontrado via MEF para modelo 1d

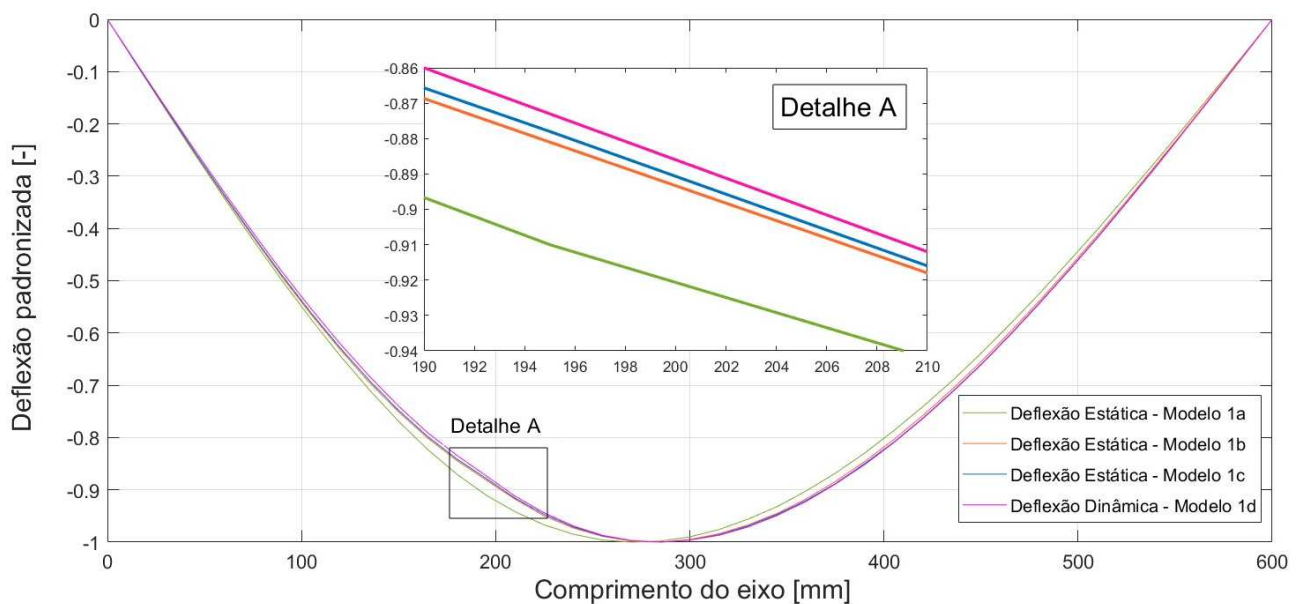


Fonte: Próprio Autor (2023)

4.1.5 Comparação dos resultados obtidos para o caso 1

As curvas de deflexão padronizada podem ser observadas na Figura 58, onde é possível notar uma distância maior da curva de deflexão estática obtida utilizando o modelo 1a em comparação aos demais modelos. É possível notar ainda que, à medida que considerações de massa e rigidez são levadas em conta no sistema mecânico, as respectivas curvas de deflexão estática tendem a se aproximar da curva de deflexão dinâmica, como esperado.

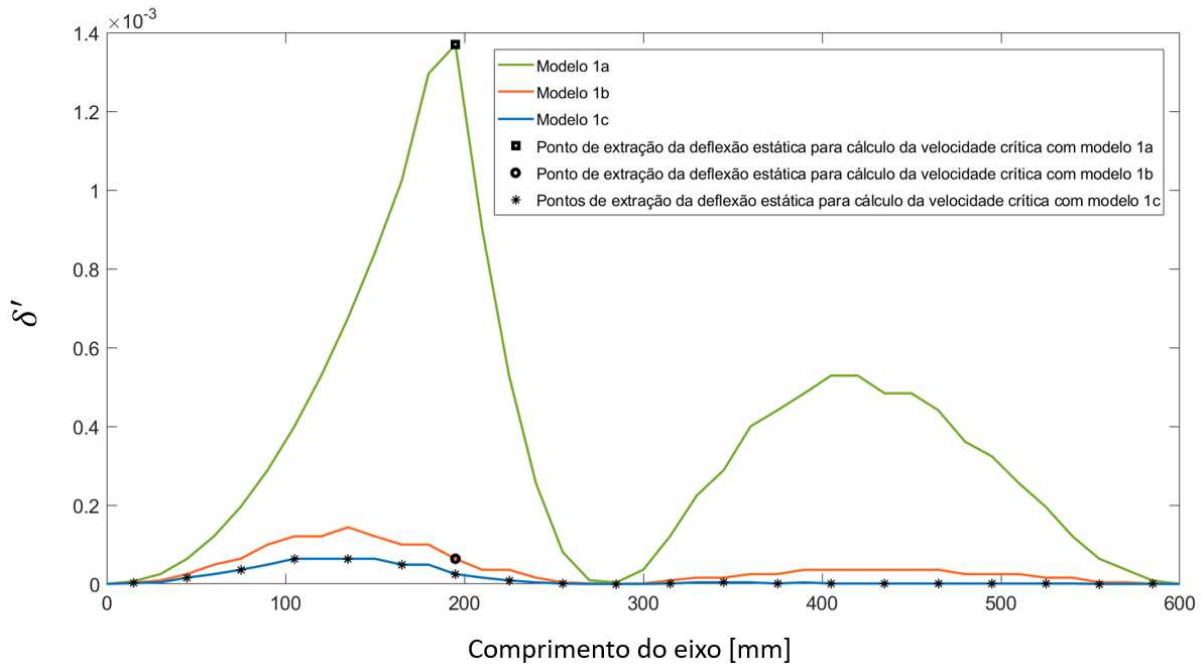
Figura 58 - Curva de deflexão padronizada



Fonte: Próprio Autor (2023)

A Figura 59 apresenta a diferença quadrática entre as curvas de deflexão estática e a curva de deflexão dinâmica, as quais foram obtidas utilizando a Equação (96). Logo, quanto maior o valor de δ' para determinado ponto da curva, maior é a distância entre a deflexão estática em relação a deflexão dinâmica. Embora em determinadas posições a diferença entre as curvas seja demasiadamente pequena, vale ressaltar que foi utilizado apenas um ponto da curva de deflexão estática nos modelos 1a e 1b para cálculo da velocidade crítica. Logo, foi destacado quais foram os pontos de extração das deflexões estáticas utilizadas para aplicação no Método de Rayleigh.

Figura 59 - Diferença quadrática entre as curvas de deflexão estática e a curva de deflexão dinâmica



Fonte: Próprio Autor (2023)

Observando a Figura 59, nota-se que os desvios mais significativos se dão exatamente quando a posição, ao longo do comprimento do eixo, for 195 milímetros medidos a partir da extremidade esquerda, ou seja, justamente na posição do centro do volante. Isso pode ser explicado devido a consideração ou não da rigidez do volante, onde seu centro de massa está localizado exatamente neste ponto. Logo, comparando os modelos 1a e 1b, é mais crítico a não consideração da rigidez do volante do que do peso do eixo. É importante salientar que esse efeito é intrínseco ao sistema analisado, necessitando de novas análises em sistemas mecânicos distintos.

A partir da utilização da Equação (97), foram obtidos os valores de desvio de deflexão padronizada. Na Tabela 6, são apresentados os valores obtidos para o desvio global de deflexão e desvio de deflexão do centro de massa do volante, destacando que os valores de deflexão são padronizados. É perceptível que o desvio de deflexão global é menor em comparação ao desvio localizado. Isso ocorre devido à existência de pontos na curva em que as diferenças são mínimas, enquanto a maior discrepância entre as curvas concentra-se na região em que o comprimento do eixo é de 195 milímetros, como apresentado na Figura 59.

Vale destacar que a posição em que x vale 195 milímetros ao longo do comprimento do eixo é o de maior interesse, uma vez que representa a posição do centro do volante, onde foi utilizada a deflexão estática desta posição para cálculo da velocidade crítica, via Método de Rayleigh, nos modelos 1a e 1b.

Tabela 6 - Desvio de deflexão padronizada

Modelos	Desvio Global de Deflexão	Desvio de Deflexão do Centro de Massa do Volante
Modelo 1a	2,673%	4,188%
Modelo 1b	0,875%	0,942%
Modelo 1c	0,520%	0,589%

Fonte: Próprio Autor (2023)

A Tabela 7 apresenta os resultados obtidos para velocidade crítica fundamental em vibração lateral do caso 1, de acordo com os diferentes modelos adotados. Pode-se observar ainda o erro calculado com base na Equação (98).

Tabela 7 - Comparação dos resultados obtidos para diferentes modelagens adotadas no caso 1

Modelo	Velocidade crítica fundamental para vibração lateral [Hz]	Erro
1a	22,122	5,820%
1b	21,731	3,951%
1c	21,160	1,220%
1d	20,905	(Referência)

Fonte: Próprio Autor (2023)

Com base nos resultados apresentados na Tabela 7, pode-se observar que a utilização dos modelos 1a, 1b e 1c resultaram em uma velocidade crítica superior em comparação com o modelo 1d. De acordo com Norton (2013, p. 597), RAO (2007, p. 661) e CRAIG e KURDILA (2006, p. 299), o Método de Rayleigh pode ser utilizado para encontrar velocidades críticas superiores à fundamental, no entanto,

esse resultado é difícil de ser alcançado sem uma boa estimativa da forma da curva de deflexão dinâmica³.

A modelagem 1a apresentou simplificações significativas em relação à realidade, de modo que o resultado da velocidade crítica obtido foi o mais distante da solução de referência adotada pelo MEF. Embora, no caso específico dessa análise, o erro associado à adoção do modelo 1a tenha sido relativamente pequeno, em torno de 5,8% (resultado coerente com a literatura, como sugerido por NORTON (2013, p. 597)), é importante destacar que este modelo pode ser completamente solucionado sem a utilização de análises modais que são, de fato, mais complexas (além de que, muitas vezes, requerem recursos computacionais e conhecimento aprofundado em MEF por parte do projetista). Ademais, salienta-se que o modelo 1a apresenta a vantagem de permitir uma avaliação rápida da deflexão estática, o que pode ser útil em algumas etapas iniciais de projeto.

Ao adotar a modelagem 1b para estimar a curva de deflexão, pôde-se constatar que o valor alcançado para velocidade crítica é 3,951% superior à encontrada utilizando MEF. Isso demonstra que a adição da rigidez localizada ao sistema (referente ao volante) possibilitou um modelo que leva a um resultado mais preciso.

Ao realizar a aplicação do Método de Rayleigh utilizando a modelagem 1c, foi possível obter um erro de 1,220% em relação ao modelo 1d. Desse modo, como afirmado por NORTON (2013, p. 597), é possível notar que quanto mais próxima da curva de deflexão dinâmica (e, conseqüentemente, do problema analisado) é a modelagem da curva de deflexão estática, maior será a precisão da velocidade crítica fundamental obtida pelo Método de Rayleigh (resultando inclusive em valores maiores que o obtido por MEF), como esperado.

Quanto ao particionamento do eixo, NORTON (2013, p. 597) sugere que, quando a massa do eixo é significativa ou dominante (muito maior que a massa do volante), ela pode ser partida em elementos discretos ao longo de seu comprimento, com cada parte provendo um termo da somatória do Método de Rayleigh, como foi

³ Destaca-se que, caso não fosse utilizado o diâmetro equivalente (determinado através da equivalência de energia de deformação), o erro do modelo 1a considerando apenas o peso do volante seria de -1,961% (20,495 Hz). Caso fosse adicionado também o peso do eixo, o erro seria de -4,774% (19,907 Hz). Este resultado contraria a premissa do Método de Rayleigh de encontrar valores sempre superiores de frequência (NORTON, 2013, p. 597; RAO, 2007, p. 661; CRAIG, R.; KURDILA, A. 2006, p. 299). Os detalhes destes resultados podem ser encontrados no Apêndice A.

realizado no modelo 1c. Embora o modelo 1c tenha apresentado o menor erro em relação a referência, este resultado se deve tanto à consideração da massa do eixo, quanto ao seu particionamento. No entanto, é importante notar que a massa do eixo não é tão significativa se comparada a massa do volante⁴. Logo, atribui-se que a diminuição do erro do modelo 1c em relação ao 1b deve-se, principalmente, à consideração da massa do eixo. Contudo, para alcançar esse resultado, é necessário desprender de um maior tempo e esforço no desenvolvimento matemático, o que pode não ser viável dependendo da necessidade de projeto.

4.2 Solução do Caso 2

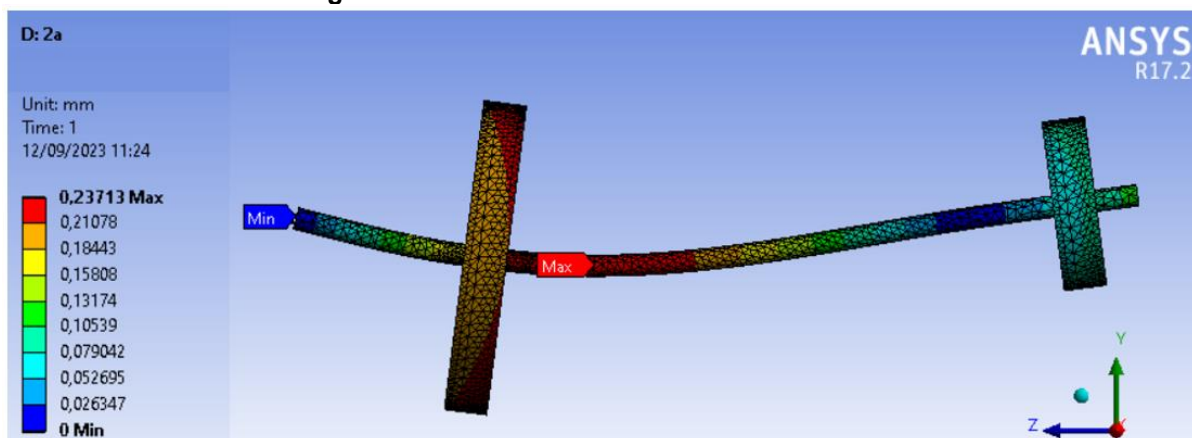
Esta subseção objetiva apresentar os resultados obtidos para o caso 2 com base nas metodologias apresentadas na Subseção 3.3. Assim como na Subseção 4.1, serão apresentados os resultados obtidos para cada modelo e, posteriormente, uma comparação entre estes resultados.

4.2.1 Modelo 2a

A Figura 60 apresenta o resultado da simulação descrita na Subseção 3.3.1. Nesta figura, é exposta a deflexão total do eixo, de modo que a variação de cores indica a magnitude dessas deflexões conforme legenda. Além disso, são indicados também os pontos de máxima e mínima deflexão. Ademais, ressalta-se que um dos mancais está localizado na extremidade esquerda do eixo, enquanto o outro está entre os volantes, como ilustrado na Figura 43.

⁴ Através dos resultados apresentados no ANEXO A, nota-se que massa do eixo corresponde a 0,791 kg e a massa do volante corresponde a 8,952 kg. Logo, a massa do eixo é 8,12% da massa total do sistema, o que indica uma contribuição relativamente baixa. Ressalta-se que não foi encontrado na literatura um limite claro em que a massa do eixo passa a ser significativa.

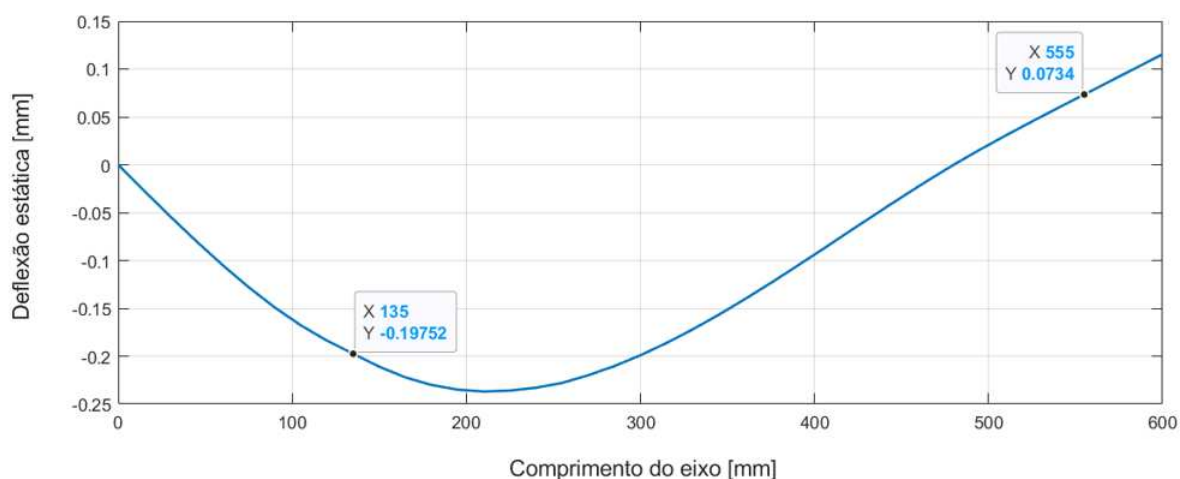
Figura 60 – Deflexão estática total do modelo 2a



Fonte: Próprio Autor (2023)

A Figura 61 apresenta a curva de deflexão estática na direção y em relação ao comprimento do eixo, onde é destacado o valor obtido para deflexão estática na posição do centroide de ambos os volantes. Pode-se observar que existem valores de deflexão estática negativos e positivos, entretanto, ao aplicá-los no Método de Rayleigh, foi tomado o módulo da deflexão.

Figura 61 - Equação da linha elástica do modelo 2a



Fonte: Próprio Autor (2023)

Com isso, foi possível obter a deflexão estática na direção y correspondente ao centro de massa de cada partição ilustrada na Figura 43. Ademais, ressalta-se que o cálculo de massa de cada partição foi obtido por meio da Equação (85). O Anexo B apresenta os resultados detalhados do cálculo da massa e da deflexão correspondentes à cada partição, bem como o somatório dos termos necessários

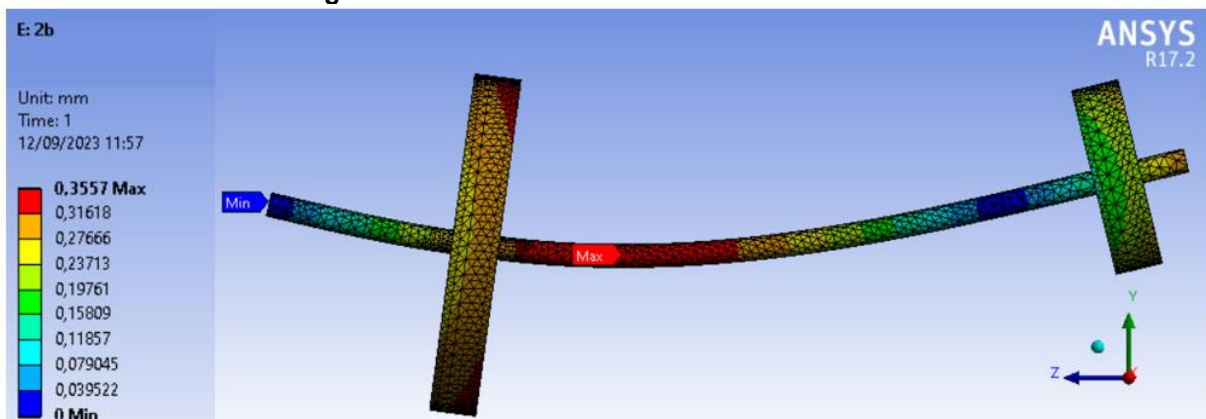
para aplicação no Método de Rayleigh. Desse modo, a velocidade crítica fundamental para a vibração lateral foi obtida utilizando

$$f_{n,2a} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{9,81 \frac{2,06 \cdot 10^{-3}}{3,80 \cdot 10^{-7}}} = 36,680 \text{ Hz} . \quad (117)$$

4.2.2 Modelo 2b

A Figura 62 expõe os resultados da simulação descrita na Subseção 3.2.2. Esta figura apresenta a magnitude da deflexão total do eixo, de modo que a variação de cores indica a severidade dessas deflexões conforme legenda. Ademais, os pontos de deflexão máxima e mínima também são apresentados.

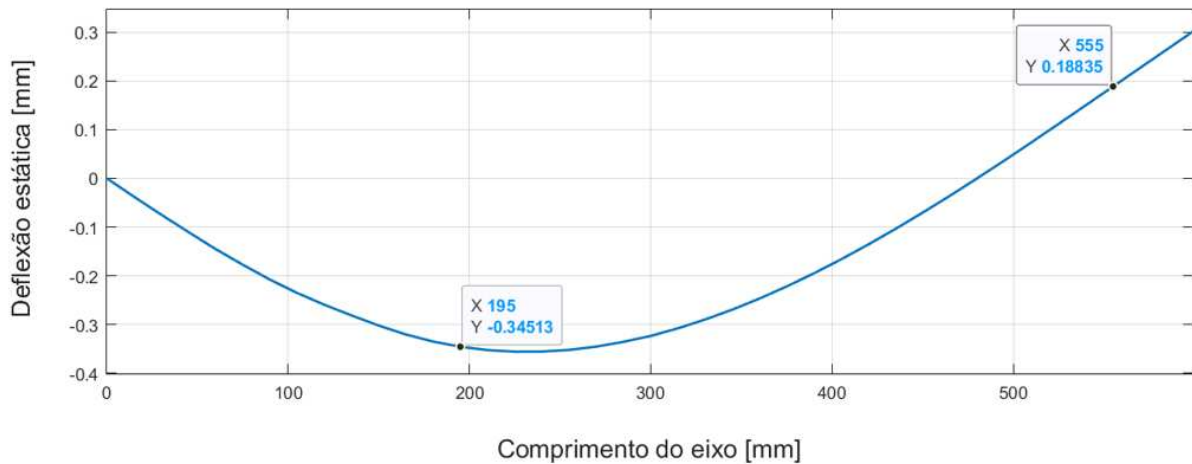
Figura 62 – Deflexão estática total do modelo 2b



Fonte: Próprio Autor (2023)

A curva de deflexão estática na direção y em relação ao comprimento do eixo pode ser visualizada na Figura 63, onde é exposto também o valor obtido para deflexão estática na posição do centroide de ambos os volantes. Ressalta-se que, embora os valores de deflexão estática possam ser negativos ou positivos, ao aplicá-los no Método de Rayleigh, foi tomado o módulo da deflexão.

Figura 63 - Equação da linha elástica do modelo 2b



Fonte: Próprio Autor (2023)

Isso permitiu o cálculo da deflexão estática na direção y referente ao centro de massa de cada partição, conforme mostrado na Figura 46, onde a massa de cada partição foi obtida por meio da Equação (85). Os resultados detalhados desses cálculos, incluindo a massa e a deflexão correspondente a cada partição, juntamente com a soma dos termos necessários para aplicação no Método de Rayleigh, podem ser encontrados no Anexo C. Com base nesses resultados, a velocidade crítica fundamental para a vibração lateral foi obtida utilizando

$$f_{n,2a} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{9,81 \frac{3,17 \cdot 10^{-3}}{8,41 \cdot 10^{-7}}} = 30,597 \text{ Hz} . \quad (118)$$

4.2.3 Modelo 2c

Este modelo foi abordado de duas maneiras distintas: a primeira delas buscou calcular a velocidade crítica para vibração torcional utilizando o Método de Rayleigh, enquanto a segunda teve como objetivo obter a mesma velocidade crítica através da solução analítica apresentada na Subseção 2.3.3.1.

Para a aplicação do Método de Rayleigh, faz-se necessário primeiramente obter o momento polar de área da seção transversal do eixo a partir da aplicação da Equação (40). Dessa forma,

$$J = \frac{\pi \cdot 0,015^4}{32} = 4,97010 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4 . \quad (119)$$

Conseqüentemente, a constante torcional de mola pôde ser calculada utilizando

$$k_t = \frac{4,97010 \cdot 10^{-9} \cdot 79,6 \cdot 10^9}{0,39} = 1014,60575 \frac{Nm}{rad}. \quad (120)$$

Os momentos de inércia de massa I_1 e I_2 dos volantes de maior e menor diâmetro, respectivamente, foram obtidos através de

$$I_{m,1} = \frac{1}{2} \cdot 8,95213 \cdot 0,11^2 = 5,41604 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2 \quad (121)$$

e

$$I_{m,2} = \frac{1}{2} \cdot 2,66344 \cdot 0,06^2 = 4,79420 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2. \quad (122)$$

Dessa forma, substituindo os valores obtidos através das equações (120), (121) e (122) em (42), tem-se que a velocidade crítica para vibração torcional utilizando o Método de Rayleigh é dada por

$$f_{n,2c,Rayleigh} = 76,389 \text{ Hz} \quad (123)$$

Por meio da Equação (43), a posição ao longo do comprimento do eixo cujo ângulo de torção é nulo é dada por

$$l_1 = \frac{I_{m,1} l}{I_{m,1} + I_{m,2}} = 0,358 \text{ m} \quad (124)$$

onde $I_{m,1}$ e $I_{m,2}$ são dados pelas equações (121) e (122) respectivamente e o comprimento entre volantes l é de 0,39 m, sendo esta medida dada com base na Tabela 2. Ressalta-se que o valor de l_1 é a distância em que as referências são apresentadas na Figura 18.

Para o cálculo analítico da velocidade crítica para vibração torcional por meio da Equação (49), foi obtido primeiramente que

$$c = \sqrt{\frac{79,6 \cdot 10^{-9}}{7850}} = 3184,66438 \frac{m}{s}, \quad (125)$$

$$J = \frac{\pi \cdot 0,015^4}{32} = 4,97010 \cdot 10^{-9} m^4, \quad (126)$$

$$\beta_1 = \frac{7850 \cdot 4,97010 \cdot 10^{-9} \cdot 0,39}{5,41604 \cdot 10^{-2}} = 2,80943 \cdot 10^{-4} \quad (127)$$

e

$$\beta_2 = \frac{7850 \cdot 4,97010 \cdot 10^{-9} \cdot 0,39}{4,79420 \cdot 10^{-3}} = 3,17383 \cdot 10^{-3} \quad (128)$$

O valor de α_n obtido com auxílio do programa EES (*Engineering Equation Solver*) é dado por

$$\alpha_n = 0,05872 \quad (129)$$

e, substituindo as equações (129) e (125) em (50), e sabendo que $l = 0,39 m$, o valor da velocidade crítica para vibração torcional é

$$f_{n,1c,analítico} = 76,314 Hz \quad (130)$$

Desse modo, comparando ambos os valores obtidos para velocidade crítica utilizando a solução analítica e o Método de Rayleigh, observa-se que o Método de Rayleigh apresenta um valor levemente superior, convergindo para o esperado com base na literatura (NORTON, 2013, p. 597). Aplicando a Equação (98), tem-se que o erro relativo é de 0,1%, demonstrando uma grande eficácia na aplicação do Método de Rayleigh em avaliação de vibração torcional de eixos.

4.2.4 Modelo 2d

A Tabela 8 exibe os resultados alcançados para velocidade crítica utilizando o método de resolução descrito na Subseção 863.3.4. Destaca-se que, dos primeiros 6 modos analisados, não foi identificado nenhum modo de vibração relacionado a deslocamento axial. De fato, Norton (2013, p.595) não menciona o modo de vibração axial ao abordar os tipos de vibração que podem ser preocupantes em eixos.

Ao analisar a Tabela 8, nota-se ainda que para este caso, a vibração lateral se apresentou como mais crítica. Contudo, é importante ressaltar que essa conclusão pode variar dependendo do problema analisado. É possível observar ainda o valor obtido para vibração torcional (4º Modo), entretanto destaca-se que a referência para análise de vibração torcional é a solução analítica, como citado na Subseção 3.3.3. Ademais, foi analisado até o décimo segundo modo de vibração, e nenhum dos modos encontrados estava associado à vibração axial.

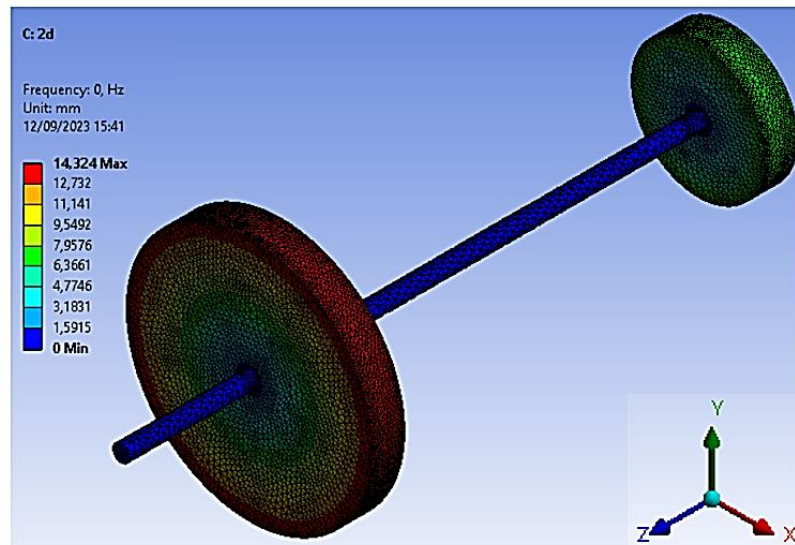
Tabela 8 – Velocidades críticas obtidas para o modelo 2d

Modo	Velocidade Crítica [Hz]	Modo
1º	0	Movimento de corpo rígido
2º	29,797	Vibração lateral
3º	29,800	Vibração lateral
4º	75,928	Vibração torcional
5º	81,112	Vibração lateral
6º	81,123	Vibração lateral

Fonte: Próprio Autor (2023)

Similarmente à análise do modelo 1d, observa-se que o primeiro valor para a velocidade crítica é próximo de zero, o qual indica pequenos deslocamentos de corpo rígido e é denominado modo de corpo rígido, como afirmado por Lee (2014, p. 385). A Figura 64 ilustra a representação visual obtida por meio da resolução numérica para o primeiro valor de velocidade crítica, na qual é evidente que os valores máximos do vetor de deslocamento resultante ocorrem nas proximidades da circunferência dos volantes.

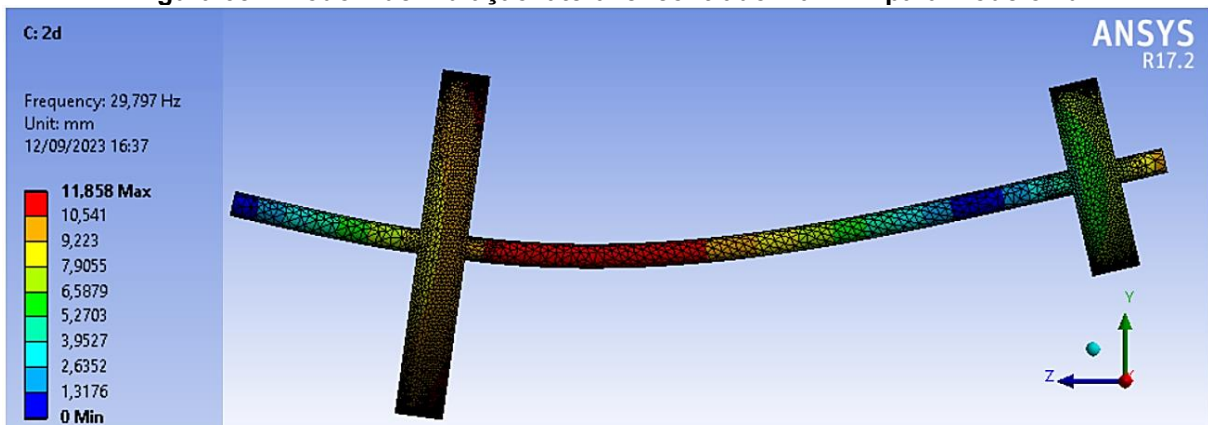
Figura 64 - Modo de corpo rígido do modelo 2d



Fonte: Próprio Autor (2023)

A Tabela 8 revela que os modos 2 e 3 (assim como os modos 5 e 6) apresentam valores praticamente iguais. Assim como no modelo 1d, isso ocorre devido à bimodalidade, a qual ocorre devido a simetria do problema em planos distintos. A Figura 65 apresenta o segundo modo de vibração mencionado na Tabela 8, onde as cores indicam a magnitude das deflexões de acordo com a legenda.

Figura 65 – Modo 1 de vibração lateral encontrado via MEF para modelo 2d

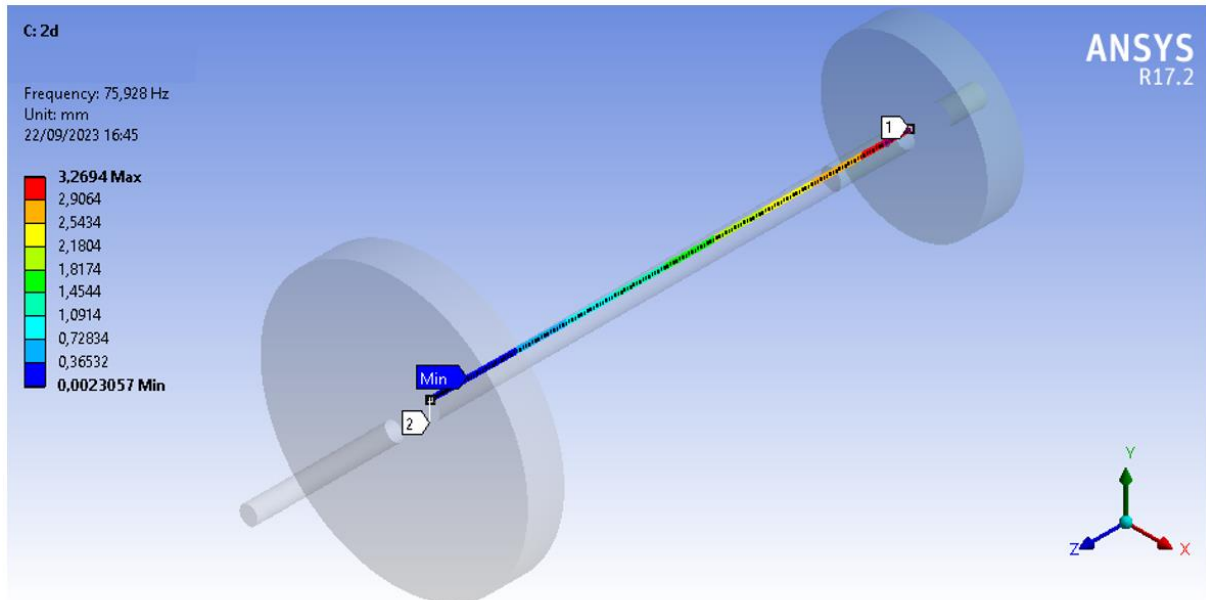


Fonte: Próprio Autor (2023)

A Figura 66 ilustra os resultados alcançados para deformação total em vibração torcional (4º modo apresentado na Tabela 8). Percebe-se claramente que o valor mínimo de deflexão (correspondente a 0,0023057 mm) ocorre próximo ao volante de maior inércia. A distância do ponto de mínima deflexão em relação ao

ponto 1 (apresentado na Figura 66) é de 360 mm, onde esse valor pôde ser extraído diretamente do programa ANSYS®.

Figura 66 - Deflexão total para vibração torcional do caso 2



Fonte: Próprio Autor (2023)

4.2.5 Comparação dos resultados obtidos para o caso 2

A Tabela 9 apresenta os resultados obtidos para vibração lateral e torcional em todos os modelos voltados a análise do caso 2.

Tabela 9 - Comparação dos resultados obtidos para diferentes modelagens adotadas no caso 2

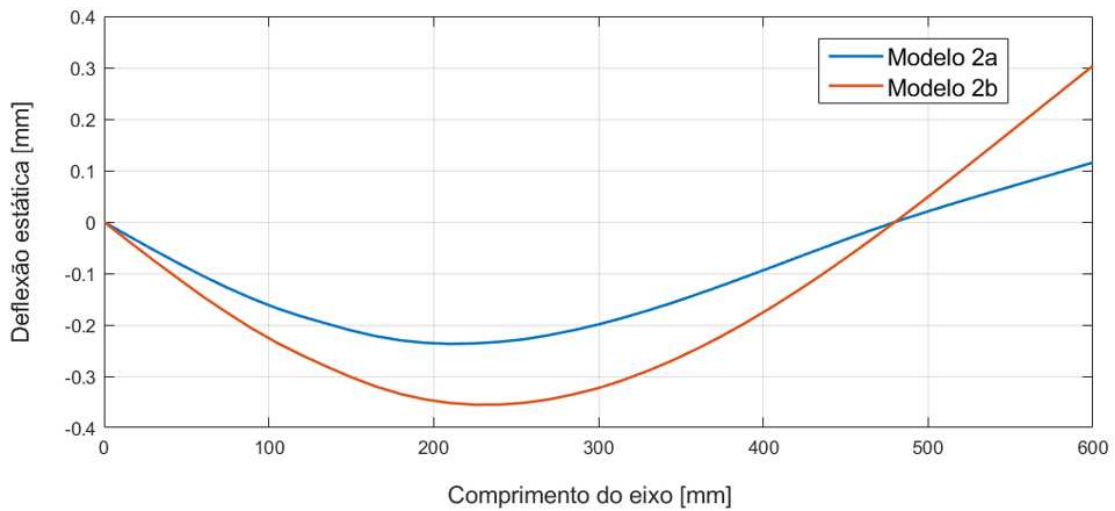
Avaliação	Método de Rayleigh		Referência			Erro
	Modelo	Velocidade crítica [Hz]	Modelo	Método	Velocidade crítica [Hz]	
Vibração Lateral	2a	36,680	2d	MEF	29,797	23,1%
Vibração Lateral	2b	30,597	2d	MEF	29,797	2,7%
Vibração Torcional	2c	76,389	2c	Análítico	76,314	0,1%

Fonte: Próprio Autor (2023)

Comparando os resultados expostos na Tabela 9, é possível notar que a velocidade crítica obtida com o modelo 2a apresenta um erro muito superior àquela

encontrada com o modelo 2b. Isso deve-se ao fato de que a curva de deflexão estática utilizada com o modelo 2a não apresenta a maior deflexão possível, uma vez que Norton (2013, p. 603) relata que o arranjo que representa a melhor situação dinâmica é aquele que possui a maior deflexão estática e, para o caso deste trabalho, esse arranjo corresponde ao modelo 2b, conforme exposto na Figura 67.

Figura 67- Comparação entre as curvas de deflexão estática do modelo 2a e 2b



Fonte: Próprio Autor (2023)

Além disso, Norton (2013, p. 597) relata que se mais de uma estimativa da curva de deflexão for tentada, deve ser utilizada aquela que exibir o menor valor de velocidade crítica, pois ela será a mais próxima da velocidade crítica real. Desse modo, o valor da velocidade crítica obtida com o modelo 2b é o mais acurado. Todavia, é importante observar que, caso fosse adotado o sentido dos carregamentos conforme modelo 2a sem o conhecimento prévio dessas informações, o erro estaria em torno de 23%, o que pode não ser preocupante dependendo das necessidades do projeto. Ressalta-se que em projetos, é recomendado um coeficiente de segurança de 3 ou mais para velocidade crítica (Norton, 2013, p. 595). Desse modo, pode ser desnecessário conhecer com exatidão a velocidade crítica, de modo que uma boa estimativa já seja o suficiente dependendo da aplicação.

Além disso, é de extrema importância destacar que o Método de Rayleigh demonstrou uma notável precisão na estimativa da velocidade crítica de vibração torcional, exibindo um erro de apenas 0,1% em relação à solução analítica. Essa

menor margem de erro em comparação com a vibração lateral pode ser atribuída à natureza do cálculo da vibração torcional pelo Método de Rayleigh, que depende exclusivamente de parâmetros geométricos, como momento de inércia de massa e constante torcional da mola, não sendo influenciado por aproximações de deflexões dinâmicas utilizando deflexões estáticas (como ocorre na vibração lateral).

A Tabela 10 apresenta a distância l_1 (vide Figura 18) encontrada por meio do Método de Rayleigh e por meio do MEF. Pode-se notar que ambos os valores são extremamente próximos.

Tabela 10 - Distância do ponto de deflexão angular nula

Distância l_1 [mm]	
Rayleigh	MEF
358	360

Fonte: Próprio Autor (2023)

Desse modo, a comparação entre os resultados obtidos pelo Método de Rayleigh e MEF ou solução analítica apresentados nas Tabela 9 e Tabela 10, revelou uma notável concordância entre ambos, reforçando a eficácia do Método de Rayleigh. Essa consonância nos resultados valida a robustez das abordagens adotadas neste estudo e demonstra a eficácia da aplicação do Método de Rayleigh.

5 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma análise quantitativa da precisão do Método de Rayleigh na determinação de velocidades críticas de eixos em geometrias iniciais de projeto, além de propor métricas para avaliar a qualidade da curva de deflexão estática empregada no Método de Rayleigh.

Os resultados obtidos neste estudo evidenciaram não apenas uma compreensão da utilização do programa ANSYS® e do Método de Rayleigh na determinação da velocidade crítica de eixos, mas também uma concordância notável entre esses resultados e as informações encontradas na literatura, validando assim a metodologia empregada. Além disso, estabeleceu-se uma relação sólida entre o Método de Rayleigh, a Análise Modal via MEF e as soluções analíticas para a vibração torcional já documentadas na literatura.

É importante ressaltar que, apesar da simplicidade nos cálculos da velocidade crítica oferecida pelo Método de Rayleigh, ele demonstrou ser uma ferramenta extremamente eficaz e precisa para uma ampla gama de aplicações em projetos. Como sugestão para estudos futuros baseados na aplicação do Método de Rayleigh, seria interessante investigar como o método se comporta em eixos em estágios avançados de desenvolvimento, incorporando elementos como chavetas, rebaxos e outros componentes que são comuns em aplicações práticas de engenharia. Isso proporcionaria uma visão mais completa e detalhada do desempenho do Método de Rayleigh em cenários mais complexos e realistas.

REFERÊNCIAS

- ASSUNÇÃO, G. C.; NETO, A. F.; SANTOS, F. D.; et al. **Vibrações Mecânicas**. Porto Alegre, 2021. *E-book*. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9786556902654/>. Acesso em: 06 abr. 2023.
- AZEVEDO, A. F. M. **Método dos elementos finitos**. 1 ed. Faculdade de engenharia da universidade do porto. Portugal, 2003.
- BALACHANDRAN, B.; MAGRAG, E. B. **Vibrações mecânicas**. 2. ed. São Paulo: **Cengage Learning**, 2011.
- BEER, F. P.; CORNWELL, P. J.; JOHNSTON, E. R. **Mecânica vetorial para engenheiros: Dinâmica**. 9 ed. **Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda**. São Paulo, 2012.
- BEER, F. P.; DEWOLF, J. T.; JOHNSTON, E. R.; et al. **Mecânica dos Materiais**. 8 ed. **McGraw Hill Book Company Inc**. São Paulo, 2021.
- CALLISTER, W. D.; RETHWISCH, D. G. **Ciência e engenharia de materiais: uma Introdução**. 8. ed. **Livros técnicos e científicos editora**. 2012.
- FANCELLO, E. A.; MENDONÇA, P. T. R.; **O Método de Elementos Finitos aplicado à Mecânica dos Sólidos**. 1. ed. 907153. 2020.
- FILHO, A. A. **Elementos finitos: a base da tecnologia CAE**. **Editora Saraiva**, 2009. *E-book*. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788536519708/>. Acesso em: 29 mar. 2023.
- FILHO, J. R. K.; SECCO, A. V. **Caracterização de ferro fundido por meio da técnica de excitação por impulso**. 2014. Dissertação (Graduação em Engenharia Mecânica), Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2014.
- GASPAR, V. **Análise de técnicas de refino h-adaptativo em MEF utilizando estimativas de erro a posteriori em problemas de elasticidade unidimensional**. 2018. Dissertação (Graduação em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2018.
- INMAN, D. **Vibrações mecânicas**. **Grupo GEN**, 2018. *E-book*. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788595154568/>. Acesso em: 02 abr. 2023.
- JUVINALL, R. C.; MARSHEK, K. M. **Fundamentos do projeto de componentes de máquinas**. 5 ed. **Livros técnicos e científicos editora**. Rio de Janeiro, 2016.
- KURDILA, A. J.; CRAIG, R. R. **Fundamentals of Structural Dynamics**. 2 ed. **Wiley**. New Jersey, 2006.
- KURKA, S. G. **Vibrações de Sistemas Dinâmicos: análise e síntese**. **Livros técnicos e científicos editora**. Rio de Janeiro, 2015.

LECKIE, F. A.; PESTEL, E. G. Matrix Methods in Elasto-Mechanics. **McGraw Hill Book Company Inc.** Nova York, 1963.

HALL, A. S.; HOLOWENKO, M. S.; LAUGHLIN, M. S. Elementos orgânicos de máquinas. 2 ed. **Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda.** São Paulo, 1961.

HIBBELER, R. C. Resistência dos Materiais. 7 ed. **Pearson Prentice Hall.** São Paulo, 2010.

LEE, H.H. Finite element simulations with ANSYS *Workbench* 15. **Mission (KS): Schroff Development Corporation**, 2014.

LEME, L. M. M. **Estudo comparativo de técnicas de análise modal experimental no domínio da frequência em uma barra na condição de contorno livre-livre.** 2014. Dissertação (Graduação em Engenharia Mecânica) – Coordenação de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2014.

NORTON, R. L. Projeto de Máquinas: uma abordagem integrada. 4. ed. **Bookman**, 2013.

RAO, S. S. Vibrações mecânicas. 4. Ed. São Paulo: **Prentice-Hall.** 2009.

RAO, S. S. Vibration of Continuous System. **Wiley.** New Jersey, 2007.

REDDY, J. N. An introduction to the Finite Element Method. 3. ed. **Mc Graw Hill.** New York, 2006.

SILVA, M. S. P. **Determinação da frequência natural de eixos utilizando o software Excel.** 2012. Dissertação (Graduação em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

STOCHERO, Tahiane. Aeronáutica investiga se ressonância fez helicóptero se despedaçar no Pará. **G1**, São Paulo, 23 fev. 2012. Notícia. Disponível em: <http://g1.globo.com/brasil/noticia/2012/02/aeronautica-investiga-se-ressonancia-fez-helicoptero-se-despedacar-no-para.html>. Acesso em: 29 abr. 2023.

SORIANO, H. L. Elementos Finitos: formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas. **Editora Ciência Moderna Ltda.** Rio de Janeiro, 2009.

ZERBIELLI, J. A. **Estudo de uma mesa vibratória para aplicações didáticas baseada num mecanismo biela-manivela.** 2015. Dissertação (Graduação em Engenharia Mecânica) – Centro de Ciências Exatas e da Tecnologia, Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, 2015.

ANEXO A - Resultados obtidos para deflexão da linha elástica e cálculo dos somatórios para equação de Rayleigh do caso 1 com modelo 1c

Divisão	x [mm]	x [m]	y [mm]	y [m]	Massa [Kg]		Massa Total	1° Termo ^[1]	2° Termo ^[2]
					Eixo	Volante			
1	15	0,015	-5,45E-02	-5,45E-05	0,04		0,04	2,27E-06	1,24E-10
2	45	0,045	-0,16153	-1,62E-04	0,04		0,04	6,72E-06	1,09E-09
3	75	0,075	-0,26361	-2,64E-04	0,04		0,04	1,10E-05	2,89E-09
4	105	0,105	-0,35747	-3,57E-04	0,04		0,04	1,49E-05	5,32E-09
5	135	0,135	-0,43987	-4,40E-04	0,04		0,04	1,83E-05	8,05E-09
6	165	0,165	-0,50759	-5,08E-04	0,04		0,04	2,11E-05	1,07E-08
7	195	0,195	-0,55889	-5,59E-04	0,04	8,91	8,95	5,00E-03	2,80E-06
8	225	0,225	-0,60284	-6,03E-04	0,04		0,04	2,51E-05	1,51E-08
9	255	0,255	-0,62868	-6,29E-04	0,04		0,04	2,62E-05	1,64E-08
10	285	0,285	-0,63631	-6,36E-04	0,04		0,04	2,65E-05	1,69E-08
11	315	0,315	-0,6272	-6,27E-04	0,04		0,04	2,61E-05	1,64E-08
12	345	0,345	-0,60285	-6,03E-04	0,04		0,04	2,51E-05	1,51E-08
13	375	0,375	-0,56478	-5,65E-04	0,04		0,04	2,35E-05	1,33E-08
14	405	0,405	-0,51451	-5,15E-04	0,04		0,04	2,14E-05	1,10E-08
15	435	0,435	-0,45361	-4,54E-04	0,04		0,04	1,89E-05	8,56E-09
16	465	0,465	-0,38364	-3,84E-04	0,04		0,04	1,60E-05	6,13E-09
17	495	0,495	-0,30622	-3,06E-04	0,04		0,04	1,27E-05	3,90E-09
18	525	0,525	-0,22296	-2,23E-04	0,04		0,04	9,28E-06	2,07E-09
19	555	0,555	-0,1355	-1,36E-04	0,04		0,04	5,64E-06	7,64E-10
20	585	0,585	-4,55E-02	-4,55E-05	0,04		0,04	1,89E-06	8,62E-11
Total							9,74	5,32E-03	2,95E-06

[1] $m_i y_i$

[2] $m_i y_i^2$

ANEXO B - Resultados obtidos para deflexão da linha elástica e cálculo dos somatórios para equação de Rayleigh do caso 2 com modelo 2a

Divisão	x [mm]	x [m]	y [mm]	y [m]	Massa [Kg]		Massa Total	1° Termo ^[1]	2° Termo ^[2]
					Eixo	Volante			
1	15	0,015	-2,74E-02	-2,74E-05	0,04		0,04	1,14E-06	3,12E-11
2	45	0,045	-8,01E-02	-8,01E-05	0,04		0,04	3,34E-06	2,67E-10
3	75	0,075	-0,12806	-1,28E-04	0,04		0,04	5,33E-06	6,82E-10
4	105	0,105	-0,16792	-1,68E-04	0,04		0,04	6,99E-06	1,17E-09
5	135	0,135	-0,19752	-1,98E-04	0,04	8,91	8,95	1,77E-03	3,49E-07
6	165	0,165	-0,2222	-2,22E-04	0,04		0,04	9,25E-06	2,05E-09
7	195	0,195	-0,23497	-2,35E-04	0,04		0,04	9,78E-06	2,30E-09
8	225	0,225	-0,23627	-2,36E-04	0,04		0,04	9,83E-06	2,32E-09
9	255	0,255	-0,22757	-2,28E-04	0,04		0,04	9,47E-06	2,16E-09
10	285	0,285	-0,2104	-2,10E-04	0,04		0,04	8,76E-06	1,84E-09
11	315	0,315	-0,18628	-1,86E-04	0,04		0,04	7,75E-06	1,44E-09
12	345	0,345	-0,15677	-1,57E-04	0,04		0,04	6,52E-06	1,02E-09
13	375	0,375	-0,12345	-1,23E-04	0,04		0,04	5,14E-06	6,34E-10
14	405	0,405	-8,79E-02	-8,79E-05	0,04		0,04	3,66E-06	3,22E-10
15	435	0,435	-5,18E-02	-5,18E-05	0,04		0,04	2,16E-06	1,12E-10
16	465	0,465	-1,67E-02	-1,67E-05	0,04		0,04	6,95E-07	1,16E-11
17	495	0,495	1,57E-02	1,57E-05	0,04		0,04	6,52E-07	1,02E-11
18	525	0,525	4,52E-02	4,52E-05	0,04		0,04	1,88E-06	8,50E-11
19	555	0,555	7,34E-02	7,34E-05	0,04	2,62	2,66	1,95E-04	1,43E-08
20	585	0,585	0,10143	1,01E-04	0,04		0,04	4,22E-06	4,28E-10
Total							12,36	2,06E-03	3,80E-07

[1] $m_i y_i$

[2] $m_i y_i^2$

ANEXO C - Resultados obtidos para deflexão da linha elástica e cálculo dos somatórios para equação de Rayleigh do caso 2 com modelo 2b

Divisão	x [mm]	x [m]	y [mm]	y [m]	Massa [Kg]		Massa Total	1° Termo ^[1]	2° Termo ^[2]
					Eixo	Volante			
1	15	0,015	-3,76E-02	-3,76E-05	0,04		0,04	1,56E-06	5,87E-11
2	45	0,045	-1,10E-01	-1,10E-04	0,04		0,04	4,59E-06	5,07E-10
3	75	0,075	-0,17742	-1,77E-04	0,04		0,04	7,38E-06	1,31E-09
4	105	0,105	-2,35E-01	-2,35E-04	0,04		0,04	9,78E-06	2,30E-09
5	135	0,135	-0,28051	-2,81E-04	0,04	8,91	8,95	2,51E-03	7,04E-07
6	165	0,165	-3,20E-01	-3,20E-04	0,04		0,04	1,33E-05	4,27E-09
7	195	0,195	-0,34513	-3,45E-04	0,04		0,04	1,44E-05	4,96E-09
8	225	0,225	-3,55E-01	-3,55E-04	0,04		0,04	1,48E-05	5,25E-09
9	255	0,255	-0,35157	-3,52E-04	0,04		0,04	1,46E-05	5,14E-09
10	285	0,285	-0,33522	-3,35E-04	0,04		0,04	1,40E-05	4,68E-09
11	315	0,315	-0,30732	-3,07E-04	0,04		0,04	1,28E-05	3,93E-09
12	345	0,345	-0,26903	-2,69E-04	0,04		0,04	1,12E-05	3,01E-09
13	375	0,375	-0,22151	-2,22E-04	0,04		0,04	9,22E-06	2,04E-09
14	405	0,405	-0,16596	-1,66E-04	0,04		0,04	6,91E-06	1,15E-09
15	435	0,435	-0,1036	-1,04E-04	0,04		0,04	4,31E-06	4,47E-10
16	465	0,465	-3,57E-02	-3,57E-05	0,04		0,04	1,48E-06	5,29E-11
17	495	0,495	3,66E-02	3,66E-05	0,04		0,04	1,52E-06	5,57E-11
18	525	0,525	0,11177	1,12E-04	0,04		0,04	4,65E-06	5,20E-10
19	555	0,555	0,18835	1,88E-04	0,04	2,62	2,66	5,02E-04	9,45E-08
20	585	0,585	0,26506	2,65E-04	0,04		0,04	1,10E-05	2,92E-09
Total							12,36	3,17E-03	8,41E-07

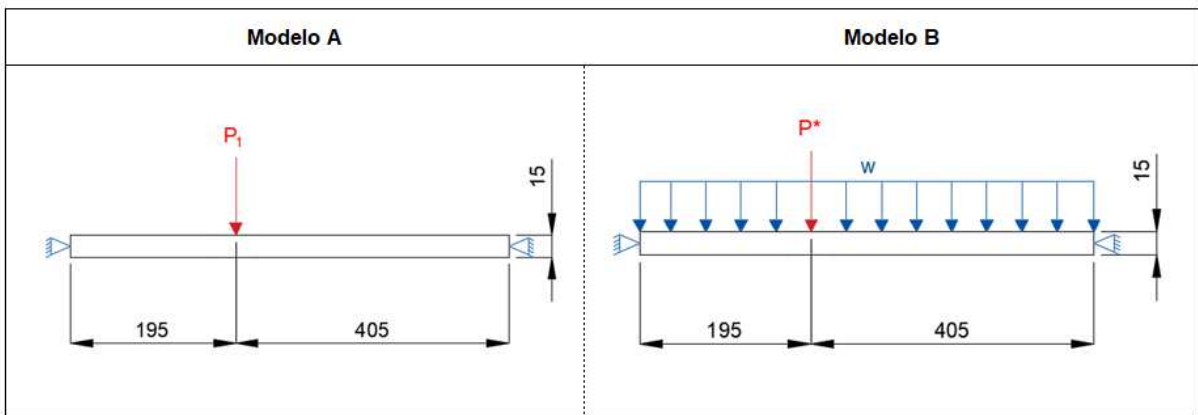
[1] $m_i y_i$

[2] $m_i y_i^2$

APÊNDICE A - Modelos sem a utilização do diâmetro equivalente

Este apêndice tem como objetivo apresentar variações do modelo 1a, na hipótese da não utilização da correção do diâmetro do eixo. Para isso, foi adotado os dois modelos expostos na Figura 68, onde no modelo A foi considerado apenas a rigidez do eixo e o peso do volante, e no modelo B foi considerado a rigidez do eixo e o peso do eixo e do volante.

Figura 68 - Modelos sem a consideração do diâmetro equivalente



Fonte: Próprio Autor (2023)

Inicialmente, para o modelo A, foi adotado o peso do volante como calculado pela Equação (64). A deflexão estática pôde ser determinada adotando as expressões de deflexão máxima e equação da linha elástica apresentadas na Figura 69.

Figura 69 - Inclinação e deslocamentos de vigas simplesmente apoiadas

Viga e carregamento	Linha elástica	Deflexão máxima	Inclinação e extremidade	Equação da linha elástica
<p>5</p>		<p>Para $a > b$:</p> $-\frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIL}$ $a x_m = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$	$\theta_A = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EIL}$ $\theta_B = +\frac{Pa(L^2 - a^2)}{6EIL}$	<p>Para $x < a$:</p> $y = \frac{Pb}{6EIL} [x^3 - (L^2 - b^2)x]$ <p>Para $x = a$: $y = -\frac{Pa^2b^2}{3EIL}$</p>
<p>6</p>		$-\frac{5wL^4}{384EI}$	$\pm \frac{wL^3}{24EI}$	$y = -\frac{w}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$

Fonte: Adaptado de Beer et al. (2011, p. 774)

Observando a Figura 69, a máxima deflexão para o modelo A pode ser encontrada utilizando

$$y_A = \frac{-Pba}{6EIL} (L^2 - b^2 - a^2) \quad (131)$$

onde

$$I = \frac{\pi}{4} \left(\frac{0,015}{2} \right)^4 = 2,48505 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4, \quad (132)$$

e

$$E = 207 \text{ GPa}. \quad (133)$$

Desse modo, substituindo as equações (132) e (133) em (131), e assumindo ao valores geométricos apresentados na Figura 68, têm-se que o módulo da deflexão estática cujo comprimento do eixo vale 195 milímetros é dada por

$$y_A = 0,59156 \text{ mm}. \quad (134)$$

Em seguida, substituindo a Equação (134) em (84) têm-se que a frequência natural para o modelo A é dada por

$$f_{n,A} = 20,495 \text{ Hz}. \quad (135)$$

Para o modelo B, foi determinado um valor para P^* correspondendo ao peso do volante sem o peso do eixo. Desse modo,

$$P^* = P_1 - \rho \pi r_{eixo}^2 L_{vol} g = 87,41209 N \quad (136)$$

onde ρ é a densidade do material, r_{eixo} é o raio do eixo, L_{vol} é o comprimento do volante e g é a aceleração da gravidade. Em seguida, para determinar o carregamento w , foi determinado primeiramente o peso do eixo, sendo este dado por

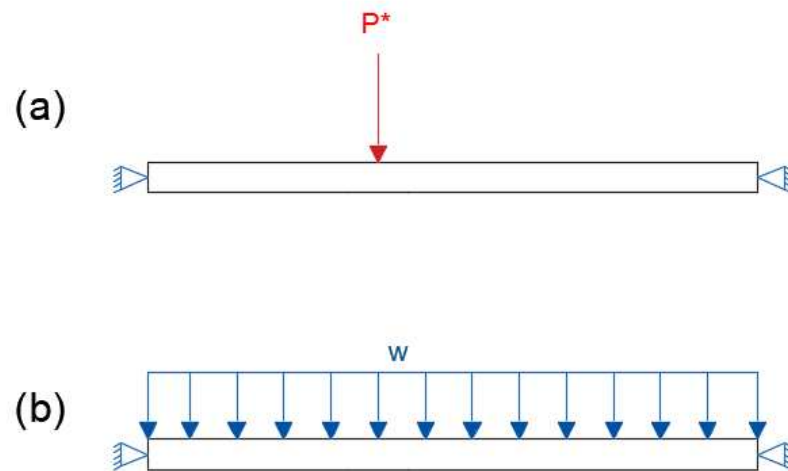
$$P_{eixo} = \rho \pi r_{eixo}^2 L_{eixo} g = 8,16512 N. \quad (137)$$

onde L_{eixo} é o comprimento total do eixo. Dessa forma, o carregamento w é dado por

$$w = \frac{P_{eixo}}{L_{eixo}} = 13,60853 \frac{N}{m}. \quad (138)$$

Em seguida, para determinar a deflexão estática, foi utilizado o método da superposição, de modo que a deflexão total do modelo B onde o comprimento do eixo vale 195 milímetros é dada pela soma da deflexão do modelo B só com a ação do carregamento w e outra deflexão do modelo B só com o carregamento P^* . A Figura 70 apresenta como foi realizada a decomposição do modelo B em (a) e (b) para aplicação do método da superposição.

Figura 70 - Decomposição do modelo B para utilização do método da superposição



Fonte: Próprio Autor (2023)

De acordo com a Figura 69, a máxima deflexão para o modelo B exposto na Figura 70 (a) pode ser encontrada utilizando

$$y_{B,1} = \frac{-P^*ba}{6EIL}(L^2 - b^2 - a^2). \quad (139)$$

Substituindo as equações (132), (133) e (136) em (139) e assumindo a geometria exposta nas Figura 68 e Figura 69, tem-se que o módulo da deflexão estática é dado por

$$y_{B,1} = 0,58881 \text{ mm}. \quad (140)$$

De mesmo modo, de acordo com a Figura 69, a máxima deflexão para o modelo B exposto na Figura 70 (b) é dada por

$$y_{B,2} = \frac{-w}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x). \quad (141)$$

onde x é o comprimento do eixo onde se deseja conhecer a deflexão estática e L é o comprimento total do eixo. Desse modo, substituindo as equações (132), (133) e (138) em (141), e adotando que tem-se que x vale 195 milímetros, tem-se que a deflexão estática causada pelo carregamento w é

$$y_{B,2} = 0,03821 \text{ mm}. \quad (142)$$

Portanto, a deflexão estática devido a ambos os esforços (peso próprio do eixo e peso do volante) atuando no sistema é dada por

$$y_B = y_{B,1} + y_{B,2} = 0,62702 \text{ mm}. \quad (143)$$

Substituindo (143) em (84) têm-se que a frequência natural para o modelo B é dada por

$$f_{n,B} = 19,907 \text{ Hz}. \quad (144)$$

A Tabela 11 apresenta uma comparação entre os modelos A e B, onde é exposto o peso do volante e eixo considerado, assim como a deflexão estática obtida em cada modelo. Ademais, é apresentado também a frequência natural e o erro em relação a referência (modelo 1d que apresentou 20,905 Hz conforme Subseção 4.1.4). Nota-se que em ambos os casos os valores encontrados de erro são negativos, contrariando a premissa do Método de Rayleigh que propõe encontrar valores sempre superiores de frequência em relação a frequência natural

real (ou mais exata possível) (NORTON, 2013, p. 597; RAO, 2007, p. 661; CRAIG, R.; KURDILA, A. 2006, p. 299).

Tabela 11 - Comparação entre os modelos A e B

	Modelo A	Modelo B
Peso do volante [N]	87,82035	87,41209
Deflexão Estática [mm]	0,59156	0,58881
Peso do eixo [N]	0	8,16512
Deflexão Estática [mm]	0	0,03821
Deflexão Total [mm]	0,59156	0,62702
Frequência [Hz]	20,495	19,907
Erro [%]	-1,961%	-4,774%

Fonte: Próprio Autor (2023)

Ademais, cabe ressaltar que o erro encontrado com o modelo B é superior, uma vez que a consideração do peso do eixo faz com que a deflexão estática aumente e, conseqüentemente, a frequência natural diminua. Ainda assim, este resultado pode ser útil, em avaliações tecnológicas, levando em conta que o procedimento de projeto citado na Subseção 2.1 sugere a utilização de um coeficiente de segurança de no mínimo 3 (NORTON, 2013, p. 595).