

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

TIAGO CACELLI MARCINIAK

**POSTULADOS DA MECÂNICA QUÂNTICA: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E
PROPOSTA DE MATERIAL DIDÁTICO PARA GRADUANDOS EM CIÊNCIAS
EXATAS**

CURITIBA

2022

TIAGO CACELLI MARCINIAK

**POSTULADOS DA MECÂNICA QUÂNTICA: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E
PROPOSTA DE MATERIAL DIDÁTICO PARA GRADUANDOS EM CIÊNCIAS
EXATAS**

**Quantum mechanics postulates: bibliographic review and didactic material
proposal for STEM field undergraduates**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção
do título de Licenciado em Física do Curso
de Licenciatura em Física da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof^ª. Dra. Luciana Rocha Hirsch

CURITIBA

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

TIAGO CACELLI MARCINIAK

**POSTULADOS DA MECÂNICA QUÂNTICA: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E
PROPOSTA DE MATERIAL DIDÁTICO PARA GRADUANDOS EM CIÊNCIAS
EXATAS**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção
do título de Licenciado em Física do Curso
de Licenciatura em Física da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 11/maio/2022

Arandi Ginane Bezerra Jr.
doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Francisco Caruso
doutorado
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Marcos Florczak
doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**CURITIBA
2022**

Dedico este trabalho aos azuis do céu e do
mar.

"Ao frio montanhês quem foi exposto
compreende; possivelmente em ocaso recente
foi residente. Pois entre questiúnculas
Zaratustra medra, e a última flor do lácio viceja
na pedra.

O Sol soturno em seu canto noturno, no molde
estulto educacional preso. A linha de chegada
— antevista na largada, Típica de minha
estreitez horizontea; que do *lapis* tira
substância argêntea, E da áurea aurora
auspícia nada.

Quem ousaria pensar em uma epígrafe
incendiária destas? Só nesta página há fogo;
se fores populaça: rasgue-me passe-me,
ignore-me — há muito a lhe agradar nas outras.

Nelas há aquele olor putrefato do forçoso;
gozoso ao sádico, que com seu açoite macula
a criação dionisíaca: a mornidão típica do que
quer tudo de seu jeito. Querias assim? Ei-lo."

RESUMO

Por meio da análise de nove livros-texto, sendo sete deles concernentes à mecânica quântica (MQ) e dois deles sobre física moderna, materializou-se o Guia para os postulados de MQ (presente no apêndice A) voltado a alunos de graduação em qualquer curso de ciências exatas. Para tal, realizou-se leitura e análise semiótica dos livros, que compuseram fundamentação para a confecção do material. Já no respeitante ao aprendizado humano, adotou-se a óptica cognitivista por meio da teoria da aprendizagem significativa (AS) do psicólogo David Ausubel. A AS é uma teoria de aprendizagem que enfatiza o uso do que o discente já conhece para facilitar seu aprendizado. Além disso, buscou-se especificar ainda mais o jargão ausubeliano para o contexto da análise. Já no concernente à teoria quântica, os postulados da interpretação de Copenhague são os pilares da ortodoxia presente na maior parte dos livros-texto introdutórios de MQ. Por isso, a fim de tornar aqueles mais precisos e claros houve sua sistematização e explicações, que substanciam o Guia. Nele há quatorze (14) páginas e o material didático será disponibilizado em formato .PDF.

Palavras-chave: mecânica quântica; postulados da mecânica quântica; aprendizagem significativa; formação de professores; ensino de física.

ABSTRACT

Through the analysis of nine textbooks, being seven of those concerning quantum mechanics (QM) and two regarding Modern Physics, the Guide for the postulates of QM (present in the appendix A) was materialized with undergraduate students in the STEM field in the author's mind. For this, the books were read and their semiotics got analyzed by the author, and they served as a foundation to the confection of the aforesaid guide. Regarding human learning, the cognitivist perspective was adopted through the lens of the theory of meaningful learning (ML) by the psychologist David Ausubel. ML emphasizes the use of what the learner already knows to facilitate his learning. In addition, it was sought to further specify the Ausubelian jargon within the context of the analysis. As far as quantum theory is concerned, the postulates of the Copenhagen interpretation are the cornerstones of orthodoxy present in most introductory QM textbooks. Therefore, in order to make them more precise and clear they got systematized and explained, which is the content of the Guide. It consists of fourteen (14) pages and it is available in .PDF format for everyone.

Keywords: quantum mechanics; quantum mechanics postulates; meaningful learning; formation of teachers and professors; physics teaching.

/

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Sistematização dos postulados	42
Tabela 2 – Enumeração dos livros-texto analisados neste trabalho	43
Tabela 3 – Existência de um <i>capítulo ou seção</i> do postulado no livro-texto em questão	43
Tabela 4 – Postulados 1 e 2 nos livros-texto	43
Tabela 5 – Postulados 3 e 4 nos livros-texto	44
Tabela 6 – Postulados 5 e 6 nos livros-texto	44

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	JUSTIFICATIVA	14
2.1	Justificativa pessoal	14
2.2	Justificativa referenciada	14
2.2.1	Formação básica de um professor	14
2.2.2	Formação de um professor-pesquisador	15
3	OBJETIVOS	16
3.1	Pergunta de pesquisa	16
3.2	Objetivo Geral	16
3.3	Objetivos Específicos	16
4	REFERENCIAL TEÓRICO	17
4.1	O cérebro humano: processos básicos para a aprendizagem	17
4.2	David Ausubel e a aprendizagem significativa	17
4.2.1	Aprendizagem significativa	17
4.2.2	Conceitos e assimilação	18
4.2.3	Retenção e organizadores prévios	19
4.3	Categorização das obras analisadas	19
4.3.1	Maneira semântica	19
4.3.2	Maneira sintática	20
4.4	Uso de Analogias e metáforas	21
4.5	Fundamentos da MQ e os postulados	22
4.5.1	Postulado	22
4.5.2	O estado quântico	23
4.5.2.1	Representação do vetor de estado	24
4.5.3	Colapso da função de onda	25
4.5.4	Processo de medição	26
4.5.5	Completude	27
4.5.6	Superposição de estados	27
4.5.7	Observáveis físicos e os operadores	28
4.5.8	Valor esperado de uma grandeza física	29

4.5.9	Operadores <i>momentum</i> e posição	29
4.5.10	Relações de incerteza	31
4.5.11	Dinâmica quântica e a equação de Schrödinger	32
4.6	Aplicação: química computacional	33
5	METODOLOGIA	34
5.1	Análise de conteúdo	34
5.2	Etapas de pesquisa	34
6	ANÁLISE DOS POSTULADOS DA MQ EM LIVROS-TEXTO	37
6.1	Livros sintáticos	37
6.1.1	<i>Principles of Quantum Mechanics</i> (SHANKAR, 1994)	37
6.1.2	<i>Modern Quantum Mechanics</i> (SAKURAI; COMMINS, 1995)	37
6.1.3	<i>Quantum Mechanics vol. 1</i> (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2019)	38
6.1.4	<i>Quantum Mechanics</i> (SCHWABL, 2007)	38
6.1.5	<i>Fundamentals of Quantum Mechanics</i> (FOCK, 1978)	39
6.1.6	<i>Quantum Mechanics: non-relativistic theory</i> (LANDAU; LIFSHITZ, 1991)	39
6.2	Livros semânticos	40
6.2.1	<i>Física Moderna, Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos</i> (CARUSO; OGURI, 2006)	40
6.2.2	<i>Modern Physics for Scientists and Engineers</i> (THORNTON; REX, 2006)	41
6.2.3	<i>Introduction to Quantum Mechanics</i> (GRIFFITHS, 2005)	41
6.3	Resultados: sistematização da análise dos livros-texto	42
7	CONCLUSÃO	45
	REFERÊNCIAS	48
	APÊNDICE A GUIA CONCISO ACERCA DOS POSTULADOS DA MQ	51
	A.1 Fundamentos da MQ e os postulados	51
A.1.1	Postulado	51
A.1.2	Estado quântico	51
	A.2 Representação do vetor de estado	54
	A.3 Ensemble, colapso e o processo de medição	55
	A.4 Regra de Born	56
	A.5 Valor esperado de uma propriedade física	57

	A.6 Propriedades físicas	58
A.6.1	<i>Momentum</i> e posição	59
	A.7 Relações de incerteza	60
	A.8 Dinâmica quântica: equação de Schrödinger	61
A.8.1	Equação de Schrödinger dependente do tempo	61
A.8.2	Equação de Schrödinger independente do tempo	62
	A.9 Referências	63

1 INTRODUÇÃO

A física moderna e contemporânea há de ser ensinada no ensino médio a fim de contextualizar os alunos na física hodierna (OSTERMANN; MOREIRA, 2010). Para tal, precisa haver capacitação dos que lá lecionam, assim como para futuros professores-pesquisadores. Nesse contexto, uma das finalidades deste trabalho é tornar mais fácil o aprendizado dos postulados da interpretação de Copenhague da mecânica quântica (MQ) por parte de graduandos em ciências exatas — que é a interpretação mais comumente adotada em nível introdutório.

Ademais, neste trabalho há a materialização destes postulados de forma didatizada. Tal lida demandou análise de nove livros-texto (ver tabela 2) já consagrados no ensino superior em instituições de excelência mundo afora. Para tal, houve consideração das circunstâncias contextuais típicas de um professor brasileiro, de modo a tornar o material relevante a graduandos em ciências exatas, visto que muitos deles que se propuseram a lecionar não passaram por formação que os capacitasse para transmitir MQ a seus discentes (OSTERMANN; MOREIRA, 2010).

No concernente à análise dos livros didáticos *per se*, houve categorização dos materiais elencados no capítulo 6 em dois conjuntos epitetados semântica e sintaxe, os quais são introduzidos nas subseções 4.3.1 e 4.3.2, respectivamente. Para as atividades supracitadas serem realizadas, tomaram-se como base argumentos biológicos (ênfase visual do homem, seção 4.1) e psicológicos (cognitivismo e construtivismo) alicerçados em fontes primárias (capítulo 4). Ademais, houve uso da teoria da Aprendizagem Significativa do cognitivista David Ausubel (seção 4.2) para dar norte à elaboração do material (Guia conciso acerca dos postulados da MQ para graduandos em ciências exatas) que está presente no apêndice A e que poderia ser aplicado em alguma pesquisa posterior para verificação de sua eficácia pedagógica.

Por fim, tal guia é a materialização da labuta teórica realizada nos anteriormente citados capítulos e seções, em especial a seção 4.5 sobre os postulados da MQ, elaborado com finalidade esclarecedora às dúvidas possíveis a emergirem em um estudo autodidata. Por isso, nele constam possíveis dúvidas articuladas com respostas a elas entrementes à introdução e à explicação dos postulados: ou seja, são introduzidos dialogicamente. A pesquisa que antecedeu a elaboração deste escrito culminou em material didático conciso com quatorze páginas que será disponibilizado em arquivo em formato PDF. Ademais, almejam-se novos testes por parte de outrem para verificar se o material gera aprendizagem significativa.

2 JUSTIFICATIVA

2.1 Justificativa pessoal

Redigir minhas ignorâncias enquanto exercício de autoconhecimento, a tentativa de compreender a estrutura lógica subjacente aos postulados da interpretação de Copenhague enquanto um exercício informal de lógica e o interesse na semiótica empregada na mecânica quântica (MQ) foram suficientes para eu engajar-me neste escrito. O modo como os postulados da MQ e as deduções deles iladas se me afiguraram nas leituras primeiras que realizei em livros-texto fizeram-me observar aqueles como algo de difícil encaixe em algum esquema conceitual bem-definido.

Era como se as proposições lógicas não estivessem trivialmente interconectadas *pari passu* ao vazio de definições (vazio semântico) que tendem a tornar os pilares da MQ artefatos sintáticos de significado puramente instrumental. Ademais, há muito o que ser dito sobre o conceitos de estado puro e sua expressão como a superposição de estados com base no que já foi experimentalmente verificado. Portanto, construiu-se material alicerçado em livros-texto referências nas instituições de excelência com que tive contato, comparados a fim de validar os vieses teóricos apresentados e dar senso de unidade aos postulados. O combustível para prorrogar meus 40 dias de jejum deu-se na ênfase linguística do trabalho e certa liberdade linguística auto-outorgada, testificada no amálgama entre os significados pré-existentes na linguagem vernácula com os símbolos matemáticos, consubstanciando os *signos físico-matemáticos*.

2.2 Justificativa referenciada

2.2.1 Formação básica de um professor

O conhecimento de física moderna e Contemporânea é basilar para a compreensão de tecnologias atuais. Além do mais, a teoria quântica alicerça a maior parte da física moderna (HARDY; SPEKKENS, 2010). Dois exemplos usuais são o estudo dos fundamentos do LASER e o de semicondutores. Sendo assim, para a formação de cidadãos conscientes no respeitante a muitos dos artefatos confeccionados, eles não de passar por um processo de aprendizado com um docente que conheça os fundamentos da física quântica.

Visto que há cursos de licenciatura em física brasileiros que não possuem em sua grade curricular o curso de MQ introdutória¹, materializou-se um material a fim de suplementar a formação docente ou complementá-la.

¹ Toma-se aqui por MQ introdutória um curso equivalente ao 8.04x do MIT <<https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>>

2.2.2 Formação de um professor-pesquisador

O pesquisador, para fundamentar muito de sua labuta, necessitará de MQ. Ademais, o uso de vernáculo preciso é boa prática social, o que implica aumentar seu arcabouço semântico no que tange ao jargão da MQ para precisar o que está sendo dito.

A fim de ilustrar a importância do tema para a pesquisa, empregaremos a informação quântica como exemplo. Vale ressaltar outras aplicações contemporâneas dele, quais sejam simulação molecular, dispositivos eletrônicos, materiais topológicos, física de partículas e teoria quântica de campos, entre outros.

A realidade material do estado de superposição quântica (FEIN *et al.*, 2019) pode ser usada para lidar-se com informação não-classicamente. Isto ocorre por ter-se o constituinte da informação quântica (*quantum bit* ou *qubit*) como um ente descrito distintamente do *bit* clássico. Aquele, por sua vez, pode ser empregado, por exemplo, para a computação quântica. Acerca desta, a estimativa é de 21 bilhões de dólares investidos até o final de 2021 em todo o mundo, sendo 10 bilhões só por parte da China (QURECA, 2021). Visto que a competitividade internacional da pesquisa brasileira é visada (BRASIL, 2014) e que há interesse mundial na pesquisa sobre os tópicos aludidos, um meio de aumentar a competitividade brasileira no cenário internacional é formar pessoas com fortaleza teórica nas ferramentas que possibilitam a investigação científica prática e os fundamentos dela.

Na construção do exemplo acima foram empregados: o estudo dos fundamentos da física quântica fez com que John Bell desenvolvesse seus artigos seminais (os quais indiretamente embasam a ideia de criptografia quântica). Ademais, também a contribuição de William Wothers, que ao questionar a regra de Born chegou a um conhecimento mais profundo do emaranhamento a ponto deste ser um recurso manipulável (HARDY; SPEKKENS, 2010). Estes casos ilustram as vantagens de futuros pesquisadores possuírem fortaleza nos fundamentos da MQ.

Por isso, este material foi elaborado para ser acessível também para graduandos em um curso de exatas — possíveis futuros pesquisadores — com conhecimentos em álgebra linear, mecânica clássica, física moderna, técnicas básicas de resolução de equações diferenciais ordinárias, resolução de equações diferenciais parciais por separação de variáveis e operacionalização concernente à análise harmônica (séries e transformadas de Fourier).

3 OBJETIVOS

3.1 Pergunta de pesquisa

Que elementos das dimensões sintática e semântica (definidas no referencial teórico, seções 4.3.1 e 4.3.2) em livros-texto de MQ se evidenciam para a sistematização e didatização dos postulados da interpretação de Copenhague da MQ?

3.2 Objetivo Geral

Elaborar material didático com ênfase conceitual respeitante aos postulados da MQ disponibilizado via arquivo digital em formato PDF visando a fornecer subsídio aos neófitos em MQ.

3.3 Objetivos Específicos

- Analisar fundamentos da MQ em livros didáticos de graduação e pós-graduação (escolhidos pela familiaridade do autor com as obras e por serem obras conhecidas a ponto de por ele também serem);
- Elaborar resenhas de livros-texto de MQ e física moderna concernentes a suas apresentações dos postulados da MQ, de como eles foram sistematizados (com posterior quantificação desta sistematização em tabelas) e visão geral acerca das obras analisadas;
- Elaborar material didático respeitante aos tópicos que o autor deste trabalho julgou passíveis de dúvidas ou geradores de dificuldades de compreensão presentes em livros didáticos de MQ ou na teoria quântica *per se* com base em sua análise dos livros-texto.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

4.1 O cérebro humano: processos básicos para a aprendizagem

O cérebro humano é o *locus* dos processos cognitivos. Ele possui um local epitetado córtex motor, em que estão localizadas partes relacionadas diretamente aos cinco sentidos. Os primatas são altamente visuais (KAAS; BALARAM, 2014), o *homo sapiens* é um primata, logo, é altamente visual — o que é testificado pela parte mais robusta de seu córtex motor ser a visual.

Com base nisso — especialmente a ênfase visual humana — haverá uso do conjunto de signos e suas relações utilizados por Paul Maurice Dirac: o formalismo de *bra-ket* (DIRAC, 1939) para a MQ que representa estados quânticos com notação simbólica mais intuitiva para a operacionalização instrumental. A composição do objeto *ket* é dada por uma barra vertical e o símbolo matemático de maior ($|\alpha\rangle$, para o estado físico alfa) e um símbolo de menor e uma barra vertical para o respectivo dual ($\langle\alpha|$) (ver 4.5.2 sobre o vetor de estado).

Ademais, paulatinamente haverá a introdução do jargão — que será compreendido pelo contexto. Esta introdução é realizada com a finalidade de tornar o discurso mais preciso e possibilitar ao futuro docente acesso às fontes de saber primárias autonomamente.

4.2 David Ausubel e a aprendizagem significativa

4.2.1 Aprendizagem significativa

A teoria cognitivista da aprendizagem significativa (AS) do psicólogo americano David Ausubel é uma teoria de assimilação. Isto é, lida com a interação entre as estruturas cognitivas pré-existentes e como com elas construir novas estruturas através do material a ser estudado. Mais especificamente, aborda a interação entre ideias (conceitos e proposições) acomodadas nas estruturas cognitivas do sujeito com a parte potencialmente significativa do material. A aprendizagem é dita significativa quando há criação de significados na interação entre a ideia adquirida e a estrutura cognitiva (AUSUBEL, 2000). Quando isso ocorre, podem-se usar conceitos prévios para assimilar-se um novo conceito sem que haja as três etapas da criação do conceito (*ibidem*). Logo, facilita a assimilação. Além disso, epitetam-se ancoradouro o conjunto de ideias que tornam o material potencialmente significativo por poderem interagir com ele de maneira a produzir significados; ou seja, tornar a aprendizagem significativa. Entrementes, cognomina-se ancoragem a ligação posterior à interação significativa entre o material estudado e a estrutura cognitiva em que há o ancoradouro (*ibidem*).

Ademais, a aquisição de conhecimento é uma atividade significativa e é contraposta à aprendizagem mecânica. Esta ocorre quando a ideia nova estabelece uma ligação arbitrária com a estrutura cognitiva preexistente ou quando a proposição é assimilada *ipsis litteris* em um

mesmo contexto e é conectada à estrutura cognitiva sem relação com conhecimentos anteriormente assimilados (AUSUBEL, 2000). Ressalta-se que a aprendizagem mecânica pode ser útil à AS, pois serve para a criação de novos conceitos que comporão o ancoradouro da estrutura cognitiva.

Este material foi concebido com o intuito de ser potencialmente significativo para licenciandos em Física e graduandos em alguma graduação em ciências exatas, porque se usaram ideias que o autor deste TCC presumiu estarem acomodadas em suas estruturas cognitivas para maximizar o potencial significativo dele (isto ocorre no plano proposicional e no conceitual).

Por fim, cognomina-se subsunçora, na obra ausubeliana, a ideia acomodada na estrutura cognitiva que pode servir de ancoradouro para a criação de significados na interação com outras ideias e as significar (AUSUBEL, 2000).

4.2.2 Conceitos e assimilação

Quando há construção de novos significados por meio de conceitos previamente estabelecidos diz-se que houve assimilação. Há a distinção entre dois tipos de conceito. O primeiro é obtido através de mecanismos sensorial-exploratórios por meio da formulação de hipóteses, por investigação empírica e por inferência ou por passo indutivo em um processo cognominado formação de conceitos. Já o segundo, epitetado conceito assimilado, é-o quando se faz uso do acervo acomodado de conceitos para a construção (assimilação) de um novo conceito (AUSUBEL, 2000). Diferenciam-se conceitos assimilados entre conceitos superordenados e conceitos subordinados, sendo ambos fundamentais para a teoria da AS.

Neste escrito os conceitos subordinados foram empregados no contexto da teoria de aquisição de conceitos superordenados. Esta busca explicar o que ocorre quando há ideias mais gerais que as presentes na estrutura cognitiva a serem assimiladas e a construção do novo conhecimento faz uso das menos gerais (MOREIRA, 2011). A MQ foi vista como um conjunto superordenado à Mecânica Clássica (MC). Por analogia, o conceito de vetores abstratos está para os vetores em três dimensões espaciais, o que também foi explorado aqui.

Na prática: os discentes trarão as ideias subordinadas descritas acima, que por sua vez servirão de ancoradouro para ideias da MQ. No que tange ao exemplo dos vetores, o material foi feito para induzir o leitor a enxergar unidade sintática entre os vetores em três dimensões espaciais e os vetores abstratos. Com isto, facilitará a reunião deles para a assimilação em uma estrutura cognitiva; pois o material foi materializado visando evitar possíveis confusões discentes e, por isso, sucintará o processo assimilativo.

4.2.3 Retenção e organizadores prévios

O processo de retenção do conhecimento na teoria da AS pode ser modelado em três etapas. Para que haja AS, há de haver estruturas cognitivas operantes e um material potencialmente significativo, no sentido que alguns aspectos desse material possam usar de ideias presentes naquelas estruturas como ancoradouro, ou seja, há a possibilidade de criar significados novos por meio da interação. A primeira etapa é quando a ideia se liga às ideias-âncora na estrutura cognitiva. Neste estágio a ideia externa e as consolidadas são disjuntas. Progressivamente consubstanciar-se-ão. Quando isto ocorre não há diferenciação entre elas. O processo de diferenciação progressiva dá-se por mecanismos nem sempre conscientes, em que esse *unus* passa a tornar-se *duo*, porém os dois não serão mais os mesmos de quando estavam na primeira etapa, pois a ideia nova o modificou e a recíproca também vale. Na vintura de a ideia ser de fato armazenada há a terceira etapa que é a criação de novos significados, conhecida como reconciliação integradora.

O material cujo conteúdo é mais geral e menos detalhado e serve como criador de ancoradouro para um segundo material que será apresentado é rotulado um criador de organizadores prévios (AUSUBEL, 2000). Este material é facilitador de aprendizagem, pois organiza a estrutura cognitiva do que o acessou para facilitar o processo de assimilação.

Os postulados da MQ são a “essência” da interpretação de Copenhague e a partir deles pode-se deduzir muito da teoria quântica. Ao apresentarem-se os postulados anteriormente à disciplina introdutória de MQ, organizam-se as estruturas cognitivas discentes para torná-los capazes de acessar o material presente em seu curso. Um outro modo de observar-se a mesma situação é enxergar o Guia (anexo A) como um criador de organizadores prévios para o cidadão ulteriormente estudar autonomamente, ler algum livro-texto, artigo de MQ ou acompanhar alguma aula.

4.3 Categorização das obras analisadas

4.3.1 Maneira semântica

Semântica (semasiologia) é o estudo da relação entre o plano da expressão (significante) e o plano do conteúdo (significado) — também conhecida como o estudo dos significados (BECHARA, 2019). A maneira semântica é a ênfase por parte do locutor na criação de significados extralinguísticos, no uso dos pré-existentes e na ressignificação por parte do interlocutor. Nesta maneira, analogias e metáforas soem anteceder a introdução de os postulados da MQ para fazer uso dos subsunçores dos educandos. Um exemplo é um material *Modern Physics for Scientists and Engineers* (THORNTON; REX, 2006) para iniciar-se o estudo de MQ, no qual

analogias com conceitos anteriormente estudados são ponto de partida para a introdução da teoria quântica.

Aos conceitos e proposições pré-existentes na estrutura cognitiva educanda conectados ao mundo sensível quando usados para facilitar a assimilação de um novo saber aqui cognominou-se *subsunçores semânticos*.

Partindo da definição de Física como modelos matemáticos da realidade (na acepção objetivo-materialista do termo), vê-se impossibilidade de um material didático explicá-la — sem ser simplista¹ — sem usar tanto relações lógicas, quanto significados. Pois para interpretar-se o mundo e para haver comunicação há de haver compartilhamento e significação de signos abstratos cujos significados sejam arbitrariamente associados a ele (signos linguísticos) (BECHARA, 2019).

A categorização dos livros didáticos foi qualitativa com ênfase semasiológica (SAUSSURE, 1989) em que por meio dos signos adotados em seu conjunto inferiram-se as intenções do autor do material analisado. Dividiu-se em duas categorias com base nas intenções: se era criar significados acerca da realidade material o autor dele empregou *abordagem semântica* ou se era reforçar as relações lógicas entre os signos por meio da *abordagem sintática*. Por exemplo: rotular-se o vetor abstrato imerso em um espaço vetorial sobre o corpo completo dos complexos que representa o estado do sistema físico *vetor de estado* mostra que a preocupação maior está na lógica, pois ao falar-se em vetor abstrato alude-se a um espaço vetorial e a suas regras de fechamento e propriedades. Por outro lado, um livro que o rotula *estado*, está puxando significado voltado à modelagem física do mundo material, ou seja, uma faceta da abordagem semântica.

4.3.2 Maneira sintática

A sintaxe, do grego clássico estrutura, é o estudo das regras que regem as relações interssimbólicas e suas combinações materiais (BECHARA, 2019). Por metonímia, ao conjunto desses ditames epitetou-se sintaxe. Neste escrito esse termo poderá também designar o conjunto de conhecimentos procedurais matemáticos necessários para a operacionalização. Um modo de apresentar-se a MQ, o qual aqui se rotulou maneira sintática, é tornar o discente fluente (operacionalmente competente) na sintaxe usada na formulação quântica nos capítulos iniciais do livro-texto e abordar a teoria quântica por meio de sua formulação redigida em linguagem matemática mais elaborada; ou seja, operacionalizar a MQ oriunda de seus postulados.

Dita abordagem é utilizada no *Principles of Quantum Mechanics* (SHANKAR, 1994), por exemplo. Nesta abordagem a ênfase inicial é apresentar os postulados — possivelmente com o auxílio de analogias e com a notação *bra-ket*, para posteriormente desenvolver a teoria da MQ deles deduzida. Posteriormente — e *pari passu* ao desenvolvimento da teoria — fazer com que sejam associados significados físicos no cérebro discente aos significantes matemáticos,

¹ Tomo por simplista o reducionismo que ignora elementos essenciais

criando-se o signo físico-matemático, em que o signo é o que emerge na interação entre significante e significado (SAUSSURE, 1989). À ideia pré-existente no cérebro discente concernente ao estudo sintático quando usada para facilitar a assimilação de um novo saber cognominou-se *subsunçora sintática*.

Uma vantagem dessa abordagem é o discente poder focar primeiramente na sintaxe usada, para posteriormente construir significados. Isso implica que ele terá mais memória de trabalho disponível para apreender as minúcias do formalismo e da teoria sem estar preocupado com os passos lógicos *per se*. Vale ressaltar que na abordagem dedutiva há necessidade do desenvolvimento de competência operacional sintática, porém não necessariamente da semântica. Em seu artigo, John Searle coloca que sintaxe não é suficiente por si mesma, tampouco constitutiva, da semântica (SEARLE, 1990). Ou seja, só dominar operacionalização não basta para transformar o objeto matemático em signo físico-matemático.

Na abordagem primariamente sintática, a maneira semântica é introduzida apenas quando o discente possuir "memória muscular" para operacionalizar e dominar os passos lógicos. Um problema nisso é que para ocorrer significação há de haver compreensão do significante. Ou seja, para haver decodificação do alfabeto latino e dos objetos matemáticos em seu conjunto e contexto necessitam-se de imagens mentais — que Saussure cognomina *imagem acústica* — no cérebro do leitor. Portanto, adverte-se que empregar o método sintático em um curso introdutório de MQ pode resultar nos matematicamente bem-versedos estudantes não deixarem mostrar suas lacunas conceituais (SINGH; MARSHMAN, 2015).

4.4 Uso de Analogias e metáforas

Dado que quase qualquer conceito nas ciências exatas possui um análogo (GENTNER; JEZIORSKI, 1993), este pode ser usado para facilitar o aprendizado — especialmente quando a sintaxe coincide. Porém, quando os significados atribuídos a um mesmo objeto são muito diferentes — ou mesmo excludentes (sem possibilidade de metáfora), a analogia pode trazer problemas.

Uma ilustração do problema é a analogia entre a função de onda quântica e uma onda mecânica. Por mais que isso evoque à mente discente o subsunçor sintático onda, que carrega a informação sobre a concatenação lógica de proposições que é realizada na mecânica ondulatória "de Born-Schrödinger", semanticamente a função de onda poderá ser vista como sem significado físico e imersa no espaço de configurações, sendo o seu módulo ao quadrado o objeto que carrega o conceito físico (de probabilidade)(SHANKAR, 1994); ou seja, neste exemplo o subsunçor não só não é semântico como pode ser deletério para a aprendizagem em uma espécie de falso cognato semântico.

Não obstante, empregar-se-ão metáforas como ferramenta facilitadora de memorização (criação de estruturas cognitivas por meio de aprendizagem mecânica) e de transferência de conhecimento.

Um exemplo é o uso do conhecimento prévio discente de as ondas eletromagnéticas, que não necessitam de meio material para propagarem-se, possuírem realidade material e poderem ser explicadas quantitativamente ao acoplarem-se as lei de Faraday e Ampère-Maxwell sabidas as condições de Dirichlet do sistema. Seu uso como subsunçor sintático é útil para o aprendizado da função de estado de um sistema quântico. Para tal, no respeitante à fraseologia, dizer-se que a onda eletromagnética é um tipo de função de onda enfatiza a característica comum entre elas (são ondas) e com isso facilita a operacionalização; pois há uso de conceitos já acomodados na estrutura mental do estudante. Novamente vale ressaltar a limitação da metáfora, visto que as ondas supracitadas não são solução da mesma equação de onda.

4.5 Fundamentos da MQ e os postulados

4.5.1 Postulado

Considerou-se difícil encontrar explicitada uma definição categórica de postulado antes de já os observar enunciados em fontes de saber. Com a finalidade de esclarecimentos e para mostrar uma evidência da máxima wittgensteiniana de que não há definições de palavras fora de contexto (WITTGENSTEIN, 2010), haverá confronto de definições nesta subseção.

Postulado, morfologicamente, é o particípio passado do verbo postular. Vale dizer que aqui se trata do *resultado da materialização (ergon)* do ato de postular em um tempo ido e definido. O postulado é, por haver sido noutrora criado. Vale dizer que também é substantivo, e é esta a classe gramatical do lexema *postulado* do título desta subseção.

De acordo com o Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa (VOLP) postulado é:

s.m. "princípio reconhecido não demonstrado"; cf. pustulado (LETRAS, 2021).

Já Baruch Spinoza em sua *Ethica*², no capítulo sobre a natureza e a origem da mente, enuncia a conexão de dependência dos postulados em relação à experiência:

"(...) my assumptions are based on postulates, which rest, almost without exception, on experience" (SPINOZA, 2009, p. 99).³

Já a definição marciniakiana de postulado, no âmbito da MQ, é a seguinte: proposição não-dedutível tomada por verdadeira em razão de as deduções dela feita serem compatíveis com os resultados experimentais. Poder-se-ia dizer que a base da interpretação de Copenhague da MQ é materializada em seus postulados.

Posteriormente os postulados na MQ são convenientemente redigidos em linguagem matemática, que é decodificada e recebe significados por uma consciência imersa em uma

² *Ethica Ordine Geometrico Demonstrata*

³ "(...) minhas presunções são baseadas em postulados, que estão, quase sem exceção, baseados na *experiência*" (tradução e ênfase por Tiago Marciniak).

tradição interpretativa de modo a fazer sentido a ideia de que a física lida com signos físico-matemáticos.

4.5.2 O estado quântico

O vetor de estado tende a ser introduzido aos neófitos enquanto função de onda normalizada, satisfazendo a regra de Born (eq. 4) e as demais condições apresentadas nesta seção. A função de onda é a visualização do vetor de estado em um espaço de configurações, que sói ser o das posições. Sintaticamente ela pode ser vista no espaço discreto como um vetor coluna de N entradas ou no espaço contínuo como sendo uma função contínua, cujo significante, em ambos os casos, sói ser a letra grega psi (Ψ).

Ademais, a função de onda ensinada no nível introdutório de MQ semanticamente pode ser apresentada de três maneiras (DUBSON *et al.*, 2009): enquanto objeto matemático portador de informação sobre os resultados do processo de medição na interação entre o aparato macroscópico com o sistema quântico, enquanto onda de matéria (ou seja, uma função de onda que descreve o sistema *per se* e possui realidade física) e enquanto a união entre ambas as categorias. Neste trabalho será adotada a primeira interpretação por dialogar diretamente com a interpretação probabilística via regra de Born (eq. 4). Além do mais, mostram-se dificuldades, inclusive em nível de pós-graduação, tangentes à apreensão do conceito de vetor de estado (SINGH; MARSHMAN, 2015). Portanto, as definições serão hialinas e com o mínimo de presunções a fim de minimizar ambiguidades.

Sintaticamente, o estado quântico é um vetor abstrato imerso no espaço de Hilbert $L^p(\mathbb{C})$ com $p = 2$ que implica funções de onda quadrado integráveis. De maneira mais precisa, o estado é um raio neste espaço. Neste escrito ele será definido como objeto que representa a informação sobre o sistema, porém vale dizer qu'ele não é somente isso, pois:

*“if the quantum state merely represents information about the real physical state of a system, then experimental predictions are obtained that contradict those of quantum theory”*⁴ (PUSEY; BARRETT; RUDOLPH, 2012, p.1).

O que mais o estado é que informação sobre o sistema? Esta é uma questão irresolvida. O que se assumiu neste escrito foi: o estado não é somente o ente em que há informação sobre o sistema físico, existe mais algo nele.

⁴ "Caso o estado quântico *apenas* representar informação sobre o estado físico real de um sistema, então há contradição entre os resultados experimentais obtidos e a teoria quântica"(tradução e ênfase por Tiago Marciniak).

4.5.2.1 Representação do vetor de estado

A representação de um vetor abstrato é a seleção de uma base ortonormal de tal modo a poder-se o escrever como uma combinação linear dela. Isto é, é apenas uma maneira escolhida de escrever-se o vetor abstrato complexo no espaço, cujas propriedades mais relevantes são a normalizabilidade e a finitude (quadrado integrável).

No caso de um estado ligado, conhecido como sistema discreto de N níveis, tem-se um vetor coluna com os coeficientes da expansão em cada uma das N entradas, nomeado *ket*:

$$|\Psi(t)\rangle \doteq \begin{bmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_j(t) \\ \vdots \\ a_N(t) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

em que $a_j(t) = \langle j|\Psi(t)\rangle$. Ou seja: cada componente $a_j(t)$ é dada pela projeção do vetor $|\Psi(t)\rangle$ na mesma direção j desta componente. Há a possibilidade de tender-se N ao infinito (N muito grande).

Vale ressaltar que para construir-se o dual *bra* tem-se o transposto complexo conjugado da eq. 1.

A representação do ket de estado é possível na forma da equação 1 pela unicidade dos coeficientes da expansão de qualquer vetor em uma dada base, o que se poderia dizer que é um modo mais compacto de se expressar o estado de superposição, que é expresso em sua forma usual abaixo:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{j=1}^N |j\rangle \langle j|\Psi(t)\rangle = \sum_j^N |j\rangle a_j(t). \quad (2)$$

Já no caso de um estado de espalhamento (contínuo incontável) a expansão pode ser representada como um vetor coluna com infinitas entradas complexas $f(\alpha', t')$ ou, mais usualmente, como uma função $f(\alpha, t)$ que recebe entradas α' e t' , com $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$|\Psi(t)\rangle \doteq \begin{bmatrix} \vdots \\ f(\alpha', t') \\ \vdots \end{bmatrix} = f(\alpha, t) \quad (3)$$

em que $f(\alpha', t) = \langle f(\alpha', t)|\Psi(t)\rangle$, analogamente ao caso da eq. 1. Vale ressaltar que para construir-se o *bra*, assim como no caso discreto, tem-se o complexo conjugado da função acima.

Dito isso, a probabilidade $P(r,t)$ de encontrar-se a partícula simples entre r e $r + dr$ é dada por $dP(r,t)$:

$$dP(r,t) = |\Psi(r,t)|^2 dr, \quad (4)$$

equação conhecida como Regra de Born para partículas simples, em que

$$\langle r | \Psi(t) \rangle = \Psi(r,t). \quad (5)$$

é a projeção do estado na direção $|r\rangle$, conhecida como função de estado ou amplitude de probabilidade para encontrar-se a partícula na coordenada r .

4.5.3 Colapso da função de onda

Atribui-se uma probabilidade para cada evento elementar pertencente ao espaço amostral de eventos possíveis. No caso não-degenerado, a cada medição há a conexão entre o valor medido e um vetor de estado – autovalor e autoestado – associados à grandeza medida, respectivamente.

A probabilidade frequentista do evento k ocorrer é aquela em que, com um N suficientemente grande de medições, é definida como sendo a razão entre ocorrências do evento k e o número total de medições ($P \equiv \frac{n_k}{N}$).

Na MQ existe um "problema": ocorre alteração irreversível no estado consequente ao processo de medição, o que impossibilita estabelecer probabilidade frequentista para este estado. O modo como isso foi solucionado foi hipotetizar que N estados igualmente preparados sejam fisicamente equivalentes a ponto de comporem uma identidade matemática em comum e com isso poder estabelecer-se uma probabilidade, de maneira a medir-se uma vez cada um dos muitos objetos iguais e estabelecer-se uma probabilidade (para o resultado de uma medição de um objeto não medido para aquela propriedade física que faz parte do grupo). A este conjunto de estados preparados igualmente cognomina-se *ensemble* puro. Com isso, a solução é estabelecer uma probabilidade frequentista a uma entidade chamada vetor de estado com base nas medições realizadas em todos os elementos do ensemble estatístico preparados de maneira igual ao estado a que se associou o ensemble. O estado físico é um, porém o signo físico-matemático que o representa necessita de um ensemble puro de cardinalidade N suficientemente grande: ou seja, um conjunto de N estados preparados da mesma maneira e já medidos de antemão para haver no vetor de estado a quantificação de cada uma das probabilidades.

O processo de medição altera o vetor de estado. À mudança abrupta do estado do sistema como consequência do processo de medição dá-se o nome *colapso da função de onda*. Ademais, o colapso pode aparecer como axioma⁵ (LEVINE; BUSCH; SHULL, 2013), ser men-

⁵ Para Marciniak, axioma é uma proposição indemonstrada tomada por verdadeira.

cionado como característica da interpretação de Copenhague ou ser, até mesmo, apenas tacitamente aceito. Conquanto o tema protagoniza publicações atuais — o que evidencia sua relevância, não aparece em muitos livros-texto de maneira clara, direta ou explícita. Haja vista a constatação de Dubson, em que:

“Six of the 20 texts (30%) that we reviewed contained no clear treatment or no mention of the WFC”⁶ (DUBSON et al., 2009, p.139).

4.5.4 Processo de medição

O processo de medição é a interação entre um aparato experimental e um sistema físico. Mesoscopicamente e macroscopicamente é negligenciável a interação entre o aparato experimental e o sistema físico, de tal maneira a isto ser tacitamente aceito — pelo menos em materiais mais teóricos —; é o que Fock alcunha absolutização (*absolutization*) dos processos físicos. Assume-se aqui negligenciável algo que é quantitativamente muito menor que outro e por isso pode ser anulado. Por exemplo, por mais que haja mudança de *momentum* de uma bola de futebol pela luz que nela incide para se localizá-la, essa mudança de *momentum* é muito menor que a incerteza experimental associada ao processo de medição. Logo, a interação entre o aparato de medição e o objeto a ser modelado é dita nula.

Não é autoevidente qual o "limite clássico" no plano das quantidades. Não obstante, há crivos para localizar-se e observar-se a consistência da teoria quântica com os resultados clássicos bem-estabelecidos. Um deles é o princípio de correspondência de Niels Bohr que estabelece um limite em que os resultados quânticos hão de possuir correspondentes clássicos. Sintaticamente, a mecânica quântica há de reproduzir os resultados clássicos no limite dos números quânticos suficientemente grandes ou quando a razão entre a constante de Planck e a ação que descreve a dinâmica do sistema tende ao zero⁷.

$$\frac{\hbar}{S} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Resultados Clássicos} \quad (6)$$

A razão de citar-se o processo de medição é a mudança que ocorre no sistema advinda dele, no caso quântico, ser não negligenciável. O processo de medição, no plano reducionista, é um meio para obter-se alguma propriedade física. Este reducionismo não é simplista na mecânica clássica, porém o é na quântica. No âmbito experimental sabe-se que não é possível obter informação de um sistema sem o investigar materialmente.

No plano sintático o processo de medição pode ser visto como a aplicação do operador projeção associado ao estado encontrado no vetor de estado do sistema no tempo em que

⁶ "Seis dos vinte textos que observamos não davam tratamento claro ou sequer mencionavam o colapso da função de onda" (tradução por Tiago Marciniak).

⁷ Fica mais compreensível o porquê da eq. 6 na formulação de integrais de caminho feynmaniana

houve a medição, que, dessarte, é projetado no espaço de configurações associado ao estado encontrado.

4.5.5 Completude

Em MQ, tem-se por axioma a completude (ou completeza, do inglês *completeness*) da autobase associada a qualquer observável físico. O que matematicamente possibilita expandir o estado original como uma combinação linear sobre a base do observável⁸ a ser medido. Semanticamente, a completude é uma garantia de que não faltarão vetores de base para conseguir-se expressar qualquer estado pertencente ao espaço de estados de dimensionalidade equivalente ao nível do sistema (o espaço de Hilbert "não possui buracos").

Em um sistema discreto de N níveis (espaço de estados de dimensão N) tem-se:

$$\mathbf{I} = \sum_j^N |j\rangle \langle j|, \quad (7)$$

em que \mathbf{I} é a matriz identidade $N \times N$. Já no *continuum*:

$$1 = \int dr' |r'\rangle \langle r'|, \quad (8)$$

sendo as equações 7 e 8 expressões matemáticas da completude.

4.5.6 Superposição de estados

Segundo Rocha, poder-se-ia dizer que o estado de superposição é a marca da nova física ao referir-se à MQ (ROCHA, 2008). Por outro lado, o princípio de superposição já é velho conhecido de muitas formulações vetoriais lineares na física clássica em que o vetor resultante é a soma vetorial dos vetores elementares e também na ondulatória em que a onda resultante é a soma das ondas envolvidas cujos coeficientes da superposição são suas amplitudes individuais.

O princípio de superposição, já presente na operacionalização da MC, é aqui realidade material. O estado de superposição é o estado do sistema anteriormente à interação dele com algum aparato observacional. Em analogia macroscópica, é como se, enquanto um dado estivesse coberto, ele estivesse mostrando as seis faces simultaneamente para cima. Só que na MC a questão se resolveria com argumentos envolvendo a pessoa possuir a informação ou não, visto que o dado quando jogado e sem ter sido observado está com apenas uma face para cima⁹. Sintaticamente vê-se o estado de superposição como uma combinação linear da base composta pelos N autovetores associados ao operador que representa o observável que

⁸ O observável é, sintaticamente, associado a um operador linear e autoadjunto e será explicado logo mais

⁹ É uma crença bem-razoável

se queira medir (supondo não haver degenerescência nos autovalores). No caso de um estado ligado em um sistema de N níveis tem-se:

$$|\Psi\rangle = \mathbf{1}|\Psi\rangle = \sum_{j=1}^N |j\rangle \langle j|\Psi\rangle = \sum_j^N |\Psi_j\rangle a_j. \quad (9)$$

Em que a_j é um elemento do vetor que representa o estado (eq. 1)

Já no *continuum* a situação é análoga, dada a eq. 8. Um exemplo recorrente é o estado na base das posições em que posso expressar o vetor de estado como uma superposição de estados posicionais:

$$|\Psi\rangle = \int dr' |r'\rangle \langle r'|\Psi\rangle = \int dr' |r'\rangle \psi(r') \quad (10)$$

4.5.7 Observáveis físicos e os operadores

Os observáveis físicos na MQ tem a si associados operadores abstratos autoadjuntos (hermitianos) e lineares. Ao medir-se no estado $|\Psi\rangle$ a variável dinâmica que é definida na mecânica clássica por $A = A(q,p)$ (em que q é uma coordenada generalizada e p é o *momentum* canônico conjugado às coordenadas generalizadas) cujo operador associado é \mathbf{A} , obtém-se como resultado de tal medida a grandeza física a , cuja relação obedecida é a equação de autovalores abaixo:

$$\mathbf{A}|\Psi(t)\rangle = a|\Psi(t)\rangle, \quad (11)$$

com $a \in \mathbb{R}$ e \mathbf{A} autoadjunto.

Assim como na representação de um vetor abstrato (ver subsubseção 4.5.2.1), a representação de um operador abstrato é uma maneira de enxergar-se melhormente o operador sob algum ponto de vista: é uma "foto" do abstrato com o uso de uma base ortonormal para representá-la. No caso de um espaço discreto de N dimensões tem-se:

$$\mathbf{A} \doteq \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & & & a_{NN} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

em que $a_{jk} = \langle j|\mathbf{A}|k\rangle$.

Operacionalmente, a representação de um operador pode ser obtida na base dos r com a aplicação do bra $\langle r|$ nos dois lados da equação 11:

$$\mathbf{A}_r \Psi(r,t) = a \Psi(r,t), \quad (13)$$

em que \mathbf{A}_r é a representação no *continuum* do operador \mathbf{A} .

4.5.8 Valor esperado de uma grandeza física

A teoria quântica, na interpretação adotada, é intrinsecamente probabilística. Dado que o processo de medição altera o estado do sistema, para obterem-se as probabilidades associadas a um estado puro prepara-se um conjunto de estados de maneira tal que a informação possuída sobre eles é a mesma para todos. Tal conjunto é cognominado *ensemble* puro e sobre o espaço amostral das medições realizadas serão associadas probabilidades a cada colapso de onda possível na medição daquele observável. Porquanto a interpretação de valor esperado na MQ ser uma média sobre *ensemble*, há dificuldades expressadas por muitos estudantes conforme:

*"Difficulties with measurements and expectation values"*¹⁰. (SINGH; MARSHMAN, 2015, p.11)

Define-se de maneira abstrata com notação de *bra-ket* o valor esperado de uma grandeza física:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \langle \Psi | \mathbf{A} | \Psi \rangle, \quad (14)$$

que na base das coordenadas no espaço contínuo assume a seguinte forma:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \int \cdots \int \Psi^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{A} \Psi(\mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_k. \quad (15)$$

No espaço discreto (sistema de N níveis) a eq. 14 é implementada matricialmente (de modo a resultar um escalar).

4.5.9 Operadores *momentum* e posição

A proposição de um operador associado ao *momentum* é um *postulado* primordial para a concepção da MQ e o mesmo ocorre com o operador posição.

Classicamente, o *momentum* canônico conjugado às coordenadas q índice j é introduzido como:

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad (16)$$

sendo L a lagrangiana do sistema. Esta equação em 1d na base das coordenadas posicionais assume a forma usual:

$$p_x = m \frac{dx}{dt}. \quad (17)$$

¹⁰ Dificuldades com mensurações e valores esperados.

Na base das posições e em uma dimensão, pode-se escrever a componente do operador *momentum* (o negrito é do operador) da seguinte maneira:

$$\mathbf{p}_x \xrightarrow{\text{base } x} -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad (18)$$

tal que:

$$\mathbf{p}_x \psi(x) \equiv -i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}, \quad (19)$$

A forma do operador *momentum* da eq. 18 pode ser justificada pela correspondência clássica de seu valor esperado (eq. 15) que assume a forma da equação 17¹¹:

$$\langle \mathbf{p}_x \rangle = \int \Psi^*(x,t) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(x,t) dx = m \frac{d\langle x \rangle}{dt}. \quad (20)$$

Já na base dos p , a eq. 19 é , com $\phi(p)$ sendo a $\psi(x)$ reescrita agora no espaço dos *momenta*:

$$\mathbf{p}\phi(p) = p\phi(p). \quad (21)$$

Operador posição também é postulado:

$$\mathbf{x} \xrightarrow{\text{base } p} i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x}, \quad (22)$$

logo tem-se:

$$\mathbf{x}\phi(p) = i\hbar \frac{\partial \phi(p)}{\partial p_x}. \quad (23)$$

(note a simetria entre as equações 18 e 22). Na base x tem-se:

$$\mathbf{x}\psi(x) = x\psi(x). \quad (24)$$

Posição e *momentum* já aparecem conectados via definição na mecânica clássica, assim como a coordenada generalizada e seu *momentum* canônico conjugado. No caso de estados de espalhamento a base é contínua, em que o axioma da completude pode ser expresso em sua forma integral (eq. (8)). Ele será útil para ilustrar-se a conexão entre *momentum* e posição e para a visualização do princípio de incerteza em sua forma mais geral. Neste caso o estado do sistema é uma superposição contínua de estados e é cognominado trem de ondas ou pacote de ondas.

A posição no eixo x e o *momentum* correspondente a essa direção estão intimamente conectados. Matematicamente, ao saber-se a função de estado de um consigo obter a função de estado do outro por meio de uma mudança de bases em um *continuum*. Esta conexão dá-

¹¹ Ver (GRIFFITHS, 2005, p.15) para mais detalhes

se por uma transformada integral cujo núcleo converte cada possível posição em um valor de *momentum* e vice-versa:

$$\psi(x') = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right] \int dp' \exp\left(\frac{ip'x'}{\hbar}\right) \phi(p'), \quad (25)$$

$$\phi(p') = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right] \int dx' \exp\left(\frac{-ip'x'}{\hbar}\right) \psi(x'). \quad (26)$$

4.5.10 Relações de incerteza

Em sistemas quânticos, a realização de medidas sucessivas de observáveis diferentes é afetada pela ordem de suas feitura. Em outras palavras: a ordem de medição entre operadores incompatíveis altera o resultado final, o que é sintaticamente mostrado pelo comutador entre eles ser não-nulo. O comutador entre posição e *momentum* é um exemplo do comutador canônico e ilustra o caso geral de variáveis que não são compatíveis:

$$[\mathbf{p}_x, \mathbf{x}] = -i\hbar. \quad (27)$$

Vale ressaltar que o comutador da eq. 27 é independente de base, ou seja, invariante por transformação de coordenadas.

Define-se incerteza associada a uma grandeza física **A** a partir da definição de variância de uma distribuição de valores desta grandeza física:

$$\Delta\mathbf{A} \equiv \sqrt{\langle (\mathbf{A} - \langle \mathbf{A} \rangle)^2 \rangle}, \quad (28)$$

dada a relação de incerteza geral abaixo, sendo **B** uma grandeza física (veja demonstração detalhada em (GRIFFITHS, 2005), seção 3.5.1):

$$\Delta\mathbf{A}\Delta\mathbf{B} \geq \frac{1}{2} \langle [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \rangle, \quad (29)$$

e o comutador canônico da eq. 27 aplicado na eq. 29:

$$\Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{p}_x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (30)$$

4.5.11 Dinâmica quântica e a equação de Schrödinger

A dinâmica do vetor de estado é dada pela equação de Schrödinger dependente do tempo, sendo sua dependência temporal diretamente dependente do potencial escolhido:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \mathbf{H} |\Psi(t)\rangle, \quad (31)$$

que na base das posições $\{|r\rangle\}$ assume a forma:

$$i\hbar \langle \mathbf{r} | \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \langle \mathbf{r} | \mathbf{H} |\Psi(t)\rangle, \quad (32)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H} \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (33)$$

A eq. 31 é, rigorosamente, rotulada equação de Schrödinger apenas quando o operador hamiltoniano possui a seguinte forma:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{V}, \quad (34)$$

com \mathbf{p} e \mathbf{V} não-relativísticos postulados segundo a mecânica quântica, o que implica \mathbf{H} também não o ser. Logo, a eq. 33 assume a forma abaixo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \right) \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (35)$$

A independência temporal da equação de Schrödinger surge caso o potencial não apresente dependência temporal. Neste caso específico o estado a ser medido é um autoestado do operador hamiltoniano na base das coordenadas, ou seja, estamos lidando com representações do vetor abstrato em um espaço de configuração das coordenadas. Esta é a forma da equação de Schrödinger para a maior parte das aplicações iniciais:

$$\mathbf{H} \psi_j(\mathbf{r}) = E_j \psi_j(\mathbf{r}). \quad (36)$$

O uso — muitas vezes tácito — das bases das coordenadas não é necessário. Faz-se aqui por ser o usual pela razão de obras deduzirem a equação acima por meio da resolução da equação de Schrödinger dependente do tempo com uma função de onda separável na base das coordenadas e pela abordagem do assunto de bases em geral ser deixado para livros ou capítulos mais avançados. Vale ressaltar a importância da equação 36, que é a protagonista dos problemas canônicos de MQ introdutória (ZWIEBACH, 2016) (poço de potencial, átomo de hidrogênio, parede de potencial, oscilador harmônico, entre outros). Ademais, há casos em que

há mais de um estado possível para um mesmo valor de energia do sistema, neste caso diz-se que há degenerescência (multiplicidade algébrica) no autovalor.

4.6 Aplicação: química computacional

Por fins de ilustração, um exemplo: o hamiltoniano de sistemas com átomos que não são hidrogenoides faz com que a equação de Schrödinger não seja analiticamente solúvel mesmo para um átomo, em que a solução há de ser realizada por algum método aproximativo. Os dois métodos mais conhecidos são a perturbação (in)dependente do tempo e o método variacional (cuja base é o teorema variacional, ver (SAKURAI; COMMINS, 1995, p. 313)) em que se usa o funcional densidade eletrônica ao invés da função de onda para obter-se a otimização da geometria da molécula.

O uso da MQ para calcularem-se moléculas não-relativísticas (menos massivas e em baixas energias) deu origem à química quântica, cujos métodos para solucionar-se as equações de Schrödinger (geralmente independentes do tempo, pois sói querer-se a energia) compõem a disciplina de química computacional.

Interessantemente, os fundamentos serão aproveitados e empregados mesmo para aplicações mais avançadas que abaixo serão ilustradas.

Os métodos que demandam encontrar-se diretamente a função de onda associada à molécula são conhecidos como *ab-initio*. Um exemplo deles é a teoria de perturbação em ordem N , que é usada mais para moléculas mais simples, visto que sua complexidade computacional escala mal com o aumento nos graus de liberdade do sistema. Já um método mais indireto, não obstante popular, é o método do *Density Functional Theory* (conhecido como DFT), que é um método comum para cálculo de moléculas sem ter de haver solução direta da equação de Schrödinger (por mais qu'ela ainda seja usada) e sim por meio da obtenção do funcional densidade eletrônica, que é o número de elétrons por unidade de volume.

Vale ressaltar que a maior parte desses métodos demandam uma série de aproximações "espertas" para adaptar a teoria ao mundo (a aproximação de *Born-Oppenheimer*, por exemplo), que implicam soluções, agora para o potencial de moléculas, proteínas. O que expande o leque de aplicabilidade da antes limitada aos sistemas simples da mecânica quântica.

5 METODOLOGIA

Realizou-se esta pesquisa nos moldes da metodologia qualitativa de pesquisa. Esta engloba a subjetividade do pesquisador e aumenta a possibilidade de reintroduzir os resultados da pesquisa na vida quotidiana (FLICK, 2009). Ademais, a análise de livros didáticos e artigos com a finalidade da produção de um material nelas embasado se enquadra no que é epitegado interacionismo simbólico. Este é caracterizado pelas: importância despendida à criação de significados e a subjetividade dela (*ibidem*, 2009).

5.1 Análise de conteúdo

"A análise de conteúdo é um conjunto de técnicas de análise das comunicações" (BARDIN, 2011, p.37). Diz-se unidade de análise um recorte relevante para o projeto de pesquisa com o intuito de capturar uma mesma essência em obras distintas. Dito isso, a unidade de análise deste trabalho são os Postulados da MQ ou excertos equivalentes porém não arrolados. As unidades foram categorizadas em sintáticas ou semânticas.

Por fim, ela será empregada neste trabalho por razão da análise de livros-texto ser uma análise de conteúdo, que por sua vez foi adotada sob a óptica de Bardin (*ibidem*, 2009).

Para que a metodologia fosse adequadamente aplicada, houve análise de conteúdo de nove fontes de saber secundárias, ou seja, nove livros, de onde seria possível extrair informações a respeito da redação dos postulados da MQ a fim de nortear este trabalho.

5.2 Etapas de pesquisa

Segregou-se a feitura deste trabalho em três etapas:

Primeiramente fez-se análise detalhada de conteúdos de nove livros didáticos, em nível de graduação e pós-graduação, de MQ e Física Moderna no que concerne aos postulados da MQ e catalogou-se-os sob as seguintes metodologias de sua elaboração:

- Método semântico (seção 4.3.1);
- Método sintático (seção 4.3.2).

Para esta categorização levaram-se em conta, precipuamente, os seguintes fatores:

- O contexto global usual do léxico empregado na obra e os signos físico-matemáticos empregados;
- A ordem de listagem dos postulados nas obras analisadas;
- O contexto didático em que os postulados foram introduzidos;

- Elementos contextuais mais específicos aos objetivos pedagógicos deste material.

Segundamente, os postulados presentes no escrito foram arrolados de modo a haver sistematização deles. Classificaram-se-nos em um rol de seis com base nos escritos de (JAFFE, 2007). Sendo assim, o escrito está organizado nos seguintes tópicos:

1. Estado e Superposição;
2. Operadores (observáveis);
3. Autovalores (resultado da medida);
4. Regra de Born;
5. Colapso da função de onda;
6. Equação de Schrödinger.

Para verificar a correspondência entre a ordem estabelecida e as dos livros-texto, houve a feitura de uma tabela:

1. Rótulo do postulado;
2. Nome do postulado
3. Percentual de aparição nos livros-texto;
4. Percentual de aparição nos livros-texto na posição rotulada.

Para fins de comparação e sistematização dos resultados obtidos na análise dos livros-texto, tabelaram-se estes (seção 6.3). Para tal, levou-se em conta:

- Rótulo de cada livro-texto;
- Nome da obra;
- Autor do livro;
- Ano da edição;
- Se houve subseção dedicada aos postulados;
- Se houve seção dedicada aos postulados;
- Se houve capítulo dedicado aos postulados;

Para cada postulado analisou-se seu aparecimento nos livros, assim como a ordem. Com esse intuito, foram estabelecidas as seguintes classes:

- Posição do postulado;
- Há seção dedicada a ele?;
- Há capítulo dedicado a ele?.

O guia presente no apêndice A foi materializado com base na teoria ausubeliana da AS e os materiais analisados, assim como os resultados da extrapolação dos dados (presente no cap. 7) obtidos na análise. Para tal feitura, levaram-se em consideração os seguintes fatores:

- A ordem dos postulados no material de fundamentos da MQ (JAFPE, 2007);
- A ordem de listagem dos postulados nas obras analisadas;
- O contexto didático em que os postulados foram introduzidos nas obras e os signos empregados para tal;
- Elementos contextuais específicos respeitantes aos objetivos pedagógicos deste material.

6 ANÁLISE DOS POSTULADOS DA MQ EM LIVROS-TEXTO

Categorizaram-se os livros analisados dentro de duas categorias cognominadas sintática e semântica (vide seção 4.3), que são respeitantes ao que foi destacado por seus autores no momento de elaborá-los. Ou seja, o autor observou se houve mais enfoque na lógica matemática ou na fenomenologia ao estabelecerem-se os postulados da MQ nas obras.

6.1 Livros sintáticos

6.1.1 *Principles of Quantum Mechanics* (SHANKAR, 1994)

Obra arquetípica da maneira sintática. Inicia-se com prelúdio matemático de quase cem páginas, em que há extensa revisão de álgebra linear (tanto abstrata quanto teoria de representação) e apresentação do formalismo de Dirac *pari passu*. Posteriormente há revisão de mecânica clássica com ênfase nos formalismos lagrangiano (para os capítulos 8 e 21 das integrais de trajetória) e hamiltoniano.

A introdução à MQ *per se* dá-se via postulados no capítulo 4, que estão sistematizados. Inicialmente são quatro, devidamente comparados com os "análogos" clássicos em sua introdução. A lista dos postulados não está na sua forma final *prima facie*, não obstante é generalizada logo após sua introdução com a probabilidade nos casos degenerados (caso mais geral para a regra de Born para partículas simples), os parênteses de Poisson canônicos e outros postulados envolvendo o spin no capítulo 9.

6.1.2 *Modern Quantum Mechanics* (SAKURAI; COMMINS, 1995)

Obra voltada ao desenvolvimento técnico da MQ (operacionalização), que se dá inicialmente por meio de analogias clássicas e sem priorizar o rigor matemático. Vale ressaltar que nesta obra não se adota a comum abordagem histórica. Ele se vale de experimentos famosos para desenvolver a teoria quântica. No capítulo 1 e no início do 2 residem os postulados da interpretação de Copenhague assim como a dedução da equação de Schrödinger por meio do formalismo de propagadores infinitesimais em primeira ordem.

Os postulados não estão organizados sistematicamente, tampouco aparecem sempre como postulados — podem ser axiomas, por exemplo. Sakurai inicialmente emprega o experimento de Stern-Gerlach para ilustrar a lógica por trás dos sistemas de dois níveis e entretentes para ilustrar a inadequação do modo clássico de se pensar o comparando com a teoria clássica de polarização da onda eletromagnética. É um livro enxuto, que presume conhecimento anterior de MQ em nível introdutório e que usará, muitas vezes tacitamente, artifícios de teoria de

grupos para lidar com a teoria dos *momenta* angulares e as simetrias na MQ (capítulos 3 e 4, respectivamente).

Postulam-se a existência de um espaço de *kets* e a natureza de seus elementos juntamente com a sua interpretação física, a associatividade entre *bras*, *kets* e operadores. De maneira bem sintática continuam-se a enunciar as regras operacionais dos *kets* e seus respectivos duais, como produto interno e externo, operadores abstratos e suas representações.

Deduzem-se em primeira ordem as relações de comutação canônica por meio dos operadores de translação espacial infinitesimal e a equação de Schrödinger via operadores de translação infinitesimal temporal, logo, tanto a equação de Schrödinger, quanto o princípio da incerteza são *teoremas*.

6.1.3 *Quantum Mechanics vol. 1* (COHEN-TANNOUJJI; DIU; LALOË, 2019)

Esta obra fica no centro do reducionismo útil sintaxe-semântica, pois apresenta rigor matemático; todavia, traz analogias clássicas para introduzir, inicialmente, a função de onda e a geradora de sua dinâmica.

É um livro de quase 900 páginas (só o primeiro volume!). Logo, recomenda-se para quem quer apreender *de facto* e sem muita pressa. Também pode ser visto como leitura suplementar para algum livro em uma primeira experiência com MQ introdutória.

No respeitante aos postulados, a ideia de estado quântico já é trazida no capítulo 1 dentro da mecânica ondulatória com as funções de onda, assim como os outros postulados também são trazidos de maneira mais qualitativa e ideias fundamentais para introduzi-los formalmente e já introduz a equação de Schrödinger em sua forma unidimensional e ondulatória. No segundo traz o ferramental sintático-operacional para a MQ abstrata e faz um "meio de campo" ao introduzir um espaço vetorial de estados associado a cada função de onda um vetor abstrato. No capítulo 3 enumera os postulados de maneira esmiuçada e é na ordem em que lá aparecem que, coincidentemente, foi sistematizado neste TCC. Ademais, nele introduz-se a equação de Schrödinger na forma geral. O princípio de incerteza aqui é escrito como conexão entre transformadas de Fourier no capítulo 1, já no 3 é trazida como consequência da incompatibilidade de observáveis.

6.1.4 *Quantum Mechanics* (SCHWABL, 2007)

O leitor não habituado ao modo como matemáticos sistematizam seus livros pode sentir dificuldades com tal leitura. O livro é matematicamente denso com definições explícitas. A linguagem vernácula veiculada é mais matemática que os demais livros deste capítulo assim como sua linguagem simbólica: com espaço L^2 explicitado, notação de produto interno "mais matemática". Ademais, a estrutura das operações matemáticas é em blocos teorema-demonstração.

Não obstante, é bem autocontido com a matemática que usa, ou seja, enuncia a maior parte das coisas anteriormente ao seu uso (ou relega ao apêndice). Em outras palavras, não presume muitos subsunçores sintáticos matemáticos — tampouco físicos (apenas mecânica e eletrodinâmica clássica em nível de graduação). Além disso, mostra passo a passo as deduções e, a meu ver, fá-lo mais rigorosamente que os demais livros aqui analisados, isto é, com menos saídas *ad hoc* físicas (um exemplo é a construção do operador de evolução temporal infinitesimal no (SAKURAI; COMMINS, 1995) em que o termo de primeira ordem é proporcional a \hbar por construção por meio de um argumento vernáculo).

Os postulados são organizados sistematicamente e o autor presume que o leitor esteja mais habituado às leituras matemáticas que os demais livros analisados, pois é escrito com definições explícitas. Eles (postulados) encontram-se organizados nas subseções 2.5.2 e 2.9.4. Neste último (*Axioms of Quantum Theory*) aos postulados o autor atribui o epíteto axiomas¹ — o que manifesta seu linguajar mais matemático — em que sistematiza e apresenta os resultados desenvolvidos em subseções anteriores:

1. Função de onda;
2. Medições sendo operadores;
3. Equação de Schrödinger;
4. Valor esperado;
5. Colapso da função de onda e Regra de Born (partícula simples).

6.1.5 *Fundamentals of Quantum Mechanics* (FOCK, 1978)

Livro de difícil categorização *prima facie*, pois, se por um lado introduz detalhes operacionais-matemáticos (a integral de Riemann-Stieltjes, por exemplo) que são comumente elididos nos livros de fundamentos, por outro, frequentemente adentra discussões filosóficas. No entanto, se se considerar discussões filosóficas como um discurso mais próximo do sintático (atrás dos metadiscursos e das fórmulas atômicas dos livros de lógica) faz sentido rotular-se a obra como sintática, visto que o "discurso filosófico" (muitas vezes circum-ambulatorio) opõe-se à fenomenologia pragmática que caracteriza o método semântico.

6.1.6 *Quantum Mechanics: non-relativistic theory* (LANDAU; LIFSHITZ, 1991)

Livro com bastante densidade de conteúdos, que faz jus à fama do autor de presumir mais informações que os demais. Além disso, apresenta notação vetusta (sua notação para

¹ Na prática não há padronização na distinção de axioma e postulado, visto que ambos não são dedutíveis dentro do conjunto de proposições tomadas por verdadeiras a priori sem justificativa lógica. O termo postulado é mais "físico", o axioma mais "matemático".

comutadores é a mesma que a moderna para os anticomutadores, por exemplo) que não obsta a compreensão, visto que o autor devidamente as introduz. Vale indicar que o autor é bem despudorado no tangente aos assuntos mais avançados, o que o coloca como um livro para aprofundamento nos fundamentos de MQ. Os postulados nele são abordados individualmente de maneira bem analítica, porém sem sistematização ou arrolação enquanto conjunto de postulados. Cada capítulo tende a preencher dúvidas voltadas às possibilidades matemáticas de cada modelo teórico mais que a fenomenologia que subjaz aquela, possivelmente por o autor presumir o conhecimento desta por parte do leitor. Um exemplo é o capítulo dedicado à equação de Schrödinger, em que as primeiras coisas a serem discutidas são as limitações matemáticas dela, isto é, sintaxe.

6.2 Livros semânticos

6.2.1 *Física Moderna, Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos* (CARUSO; OGURI, 2006)

Recomendado para leitores que querem conhecer profundamente de que lugar vêm as informações e técnicas científicas originais. Com as muitas referências primárias — e muitas outras — no final de cada capítulo, proporciona ao investigador da natureza uma trilha mais suave e agradável que a exploração entre as fontes primárias isoladamente.

Ademais, traz as raízes do pensamento atomista juntamente com as primeiras investigações acerca da natureza da matéria de modo a formar um físico cômico das raízes também filosóficas do saber. O livro é autocontido, o que o torna "essencial" para quem for estudar por conta própria.

Há uma subseção para cada postulado na seção sobre mecânica ondulatória, ou seja, eles são todos mostrados na base r . No entanto a nomenclatura não explicita diretamente seu caráter de "postulado" e sim dá a impressão de algo que é consequência de uma teoria bem-alinhada ao que é observado.

A base para a introdução dos "postulados" são os experimentos. É adotada a interpretação via onda piloto de de Broglie-Bohm e no início da parte dedicada à quântica há a dedução de um "quase" princípio de incerteza de Heisenberg.

Equação de Schrödinger é abordada *ad hoc* via analogia opto-mecânica e posteriormente aparece como na eq. 33. Posteriormente mostra a interpretação de Born para a função de onda já satisfazendo à equação de Schrödinger e também obedecendo a equação de continuidade de corrente de probabilidade.

Ulteriormente os operadores posição e *momentum* são postulados assim como as relações de comutação e as relações de incerteza canônicas (de Heisenberg) desta deduzidas.

Analisou-se o capítulo 14 para a feitura da organização dos postulados. Vale ressaltar a ausência do postulado do colapso da função de onda, o que é previsível dada a interpretação

adotada no livro-texto ser a de onda-piloto (Broglie-Bohm) não-realista (não considera o trem de ondas/pacote de ondas-piloto) como realidade física, sim a regra de Born.

6.2.2 *Modern Physics for Scientists and Engineers* (THORNTON; REX, 2006)

Segunda obra de física moderna aqui analisada, só que, diferentemente da primeira, possui ênfase maior para a aplicação do saber teórico — por mais que ambas sejam bem voltadas à criação de significados e usem subsunçores semânticos.

Nesta obra não há sistematização dos postulados. Não obstante, eles estão presentes nos dois capítulos sobre a teoria quântica: nos capítulos 5 e 6 que vão da página 161 à página 239. Mais especificamente, as questões acerca dos fundamentos da MQ aparecem da seção 5.5 cognominada *Waves or particles?* à seção 6.2, cognominada *Expectation values*, que vai da página 181 até a página 208. O princípio da correspondência e o substrato mais filosófico da interpretação de Copenhague aparecem sistematizados nesta obra, o que não exclui seu caráter também teórico.

6.2.3 *Introduction to Quantum Mechanics* (GRIFFITHS, 2005)

O autor deste TCC considera a obra de MQ *per se* deste rol mais fácil e rápida de ser estudada de maneira autônoma. No livro-texto usam-se como subsunçores semânticos as ideias clássicas e a segunda lei de Newton apenas inicialmente, para posteriormente postular-se a equação de Schrödinger de modo a relacioná-las enquanto diferentes geradores da dinâmica de uma partícula, um em evolução determinística e outro em evolução probabilística. Logo em seguida há breve revisão de conceitos básicos de probabilidade, o que reforça a autocontidade do livro.

Em seguida, resolve potenciais mais simples e explora a mecânica ondulatória, que será trabalhada até a introdução da álgebra linear abstrata com a notação de *bra-ket*.

Nos capítulos 1 e 2 introduzem-se como postulados, de maneira não-sistematizada, os elementos do rol ordenado abaixo:

1. Equação de Schrödinger;
2. Regra de Born (partícula simples);
3. Colapso da função de onda;
4. Valor esperado de uma variável dinâmica qualquer;
5. Representações de x e p_x ;
6. Completude e a superposição (caso específico no início do capítulo 2).

Já no capítulo 3 há a apresentação de modo mais formal, no entanto ainda sem a sistematização típica com postulados arrolados. Eis a ordem neste caso:

1. Função de onda;
2. Observáveis;
3. Autoestados.

6.3 Resultados: sistematização da análise dos livros-texto

A tabela 1 foi materializada com influência principalmente do trabalho de (JAFFE, 2007) no que concerne à ordem dos postulados.

A tabela 2 lista as obras, autores, ano da edição, propondo um rótulo a cada uma.

A tabela 3 foi confeccionada com base na existência de um *capítulo ou seção* do postulado no livro-texto em questão e serve de base para inferir a importância que o autor atribui ao postulado em questão.

As tabelas 4 até a 6 foram realizadas com base na posição do postulado na lista de postulados encontrada no livro-texto. Caso o livro não a possuísse, arrolou-se-os com base na aparição do postulado *explicado em sua forma mais completa*. Por exemplo, por mais que no livro de David Griffiths (GRIFFITHS, 2005) a função de onda seja anunciada anteriormente à equação de Schrödinger (eq. 33), a descrição mais detalhada daquela aparece após esta. Sendo assim, a equação é arrolada anteriormente à função de onda. Ressalta-se a leniência do autor em ocasião da aparição de algum dos postulados em qualquer lugar do livro, mesmo se fora do recorte selecionado para a análise, em colocar como "sim" para sua aparição.

Tabela 1 – Sistematização dos postulados

Rótulo	Postulado	Percentual de aparição (%)	Percentual nesta posição (%)
01	Estado e Superposição	100	89
02	Operadores (observáveis)	100	56
03	Autovalores (resultado da medida)	89	22
04	Regra de Born	89	33
05	Colapso da função de onda	78	44
06	Equação de Schrödinger	100	44

Fonte: Autoria própria..

Tabela 2 – Enumeração dos livros-texto analisados neste trabalho

Etiqueta	Nome da obra	Autor	Ano da edição
01	Principles of Quantum Mechanics	Ramamurti Shankar	1994
02	Modern Quantum Mechanics	J. J. Sakurai	1995
03	Quantum Mechanics vol. 1	Cohen-Tannoudji, Diu e Laloë	2019
04	Quantum Mechanics	Franz Schwabl	2007
05	Física Moderna	Caruso e Oguri	2006
06	Modern Physics for Scientists and Engineers	Thornton e Rex	2006
07	Principles of Quantum Mechanics	David Griffiths	2005
08	Fundamentals of Quantum Mechanics	Vladimir Fock	1978
09	Quantum Mechanics: non-relativistic theory	Landau e Lifshitz	1991

Fonte: Autoria própria..

Tabela 3 – Existência de um capítulo ou seção do postulado no livro-texto em questão

Obra	Postulado 1	Postulado 2	Postulado 3	Postulado 4	Postulado 5	Postulado 6
01	Não	Não	Não	Não	Não	Sim
02	Sim	Sim	Não	Não	Não	Sim
03	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
04	Sim	Sim	Não	Sim	Não	Sim
05	Sim	Não	Não	Sim	Não	Sim
06	Não	Não	Não	Sim	Não	Sim
07	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Sim
08	Não	Sim	Sim	Sim	Não	Sim
09	Sim	Sim	Não	Não	Sim	Sim
	P = 67%	P = 67%	P = 33%	P = 67%	P = 22%	P = 100%

Fonte: Autoria própria..

Tabela 4 – Postulados 1 e 2 nos livros-texto

Etiqueta da obra	Postulado 1			Postulado 2		
	Posição do postulado	Há seção dedicada?	Há capítulo dedicado?	Posição do postulado	Há seção dedicada?	Há capítulo dedicado?
01	01	Não	Não	02	Não	Não
02	01	Sim	Não	02	Sim	Não
03	01	Sim	Não	02	Sim	Não
04	01	Sim	Sim	02	Sim	Sim
05	01	Sim	Não	05	Não	Não
06	01	Não	Não	04	Não	Não
07	01	Não	Sim	04	Sim	Não
08	03	Não	Não	02	Sim	Sim
09	01	Sim	Não	03	Sim	Não

Fonte: Autoria própria..

Tabela 5 – Postulados 3 e 4 nos livros-texto

Etiqueta da obra	Postulado 3			Postulado 4		
	Posição do postulado	Há seção dedicada?	Há capítulo dedicado?	Posição do postulado	Há seção dedicada?	Há capítulo dedicado?
01	03	Não	Não	04	Não	Não
02	05	Não	Não	02	Não	Não
03	03	Sim	Não	02	Sim	Não
04	05	Não	Não	02	Sim	Não
05	04	Não	Não	05	Sim	Não
06	-	-	-	04	Sim	Não
07	06	Sim	Não	04	Sim	Não
08	01	Sim	Não	02	Sim	Sim
09	04	Não	Não	03	Não	Não

Fonte: Autoria própria..

Tabela 6 – Postulados 5 e 6 nos livros-texto

Etiqueta da obra	Postulado 5			Postulado 6		
	Posição do postulado	Há seção dedicada?	Há capítulo dedicado?	Posição do postulado	Há seção dedicada?	Há capítulo dedicado?
01	03	Não	Não	04	Sim	Não
02	03	Não	Não	06	Sim	Não
03	05	Sim	Não	06	Sim	Não
04	05	Não	Não	04	Sim	Sim
05	-	-	-	02	Sim	Sim
06	-	-	-	03	Sim	Não
07	06	Não	Não	01	Sim	Sim
08	05	Não	Não	06	Sim	Sim
09	05	Sim	Não	06	Sim	Sim

Fonte: Autoria própria..

7 CONCLUSÃO

A categorização dos livros-texto em sintáticos e semânticos implicou buscar conscientemente um ponto de equilíbrio entre a sistematização lógica puramente sintática e a apresentação de dados experimentais com "muletas didáticas fenomênicas" em sua elaboração. A tendência é o uso da abordagem semântica em livros mais voltados aos neófitos na MQ. Notou-se também que os autores de materiais com ênfase sintática tendem a presumir que o discente já tenha tido contato com algum material mais voltado a abordagem semântica, o que leva a crer que a visão de o que é aprendido para os elaboradores seja equivalente à visão em que não se ensina um conceito sem seu respectivo elemento material, ou que a operacionalização dificilmente será significativa, mesmo havendo subsunçores sintáticos. Com a análise obteve-se um texto guia para os não-iniciados em MQ embasado também nas obras analisadas e no "paradigma".

Da análise presente no capítulo 6, obteve-se que *os postulados que mais apareceram nos livros-texto foram os seguintes:*

1. *Estado e superposição e operadores (observáveis) e eq. de Schrödinger* (em 100% dos livros-texto analisados), o que sugere o caráter axiomático dos três em múltiplas vias de axiomatização;
2. *Autovalores (resultado da medida) e regra de Born* (em 89% dos livros-texto analisados), em que a Regra de Born aparece em um como teorema em obras mais voltadas à sintaxe. Este é mais enfatizado enquanto postulado nas obras semânticas, por apontar o indeterminismo intrínseco à interpretação copenhaguiana;
3. *Colapso da função de onda* (em 78% dos livros-texto analisados). Abordar-se-o pode despertar discussão digressiva mais aprofundada — que é um enveredar para a filosofia da ciência, algo evitável em uma abordagem mais instrumental, pragmática ou voltada à operacionalização. Vale notar que ambos os em que não há menção direta em seção ou capítulo são livros de física moderna, o que sugere que os autores enxerguem o assunto como mais específico para a MQ.

Sobre a correspondência entre os postulados nas obras e a ordem estabelecida:

- O postulado *estado e superposição* apareceu na primeira posição em 89% dos livros-texto, apenas uma obra o colocou na terceira posição, o que é indicativo de sua primacialidade na axiomatização didatizada dos postulados na posição primeira;
- O postulado *operadores (observáveis)* apareceu na segunda posição em 56% dos livros-texto. Visto que está na maioria dos textos na mesma posição, isso sugere ser a posição pedagogicamente mais bem-vista para livros sintáticos, visto que são 100%

dos que os colocaram na segunda posição e que 75% dos que não o colocaram são semânticos;

- O postulado *autovalores (resultado da medida)* apareceu na terceira posição em 22% dos livros-texto, 25% caso haja desconsideração do livro 6 que sequer o cita. Apareceu nesta posição em dois livros sintáticos, porém acredita-se ter sido idiosincrasia autoral;
- O postulado *regra de Born* apareceu na quarta posição em 33% dos livros-texto. Houve obras que o deduziram pelo fato de terem postulado o valor esperado de uma grandeza física. Se se desconsiderar a obra 4, a porcentagem de aparição nesta posição é de 38%.
- O postulado *colapso da função de onda* apareceu na quinta posição em 44% dos livros-texto. Porém, se se considerar apenas os sete livros que citam o colapso da função de onda (todos exceto os 5 e 6), a porcentagem de aparição na quinta posição sobe para 57%. O posicionamento unanimemente não foi anterior à terceira posição, o que sugere não ser basilar para a operacionalização instrumental ou mesmo apresentação axiomática inicial da teoria e tender a ser mencionado apenas ao falar-se do processo de medição, que sói ulteriorizar a descrição do sistema físico enquanto ato e potência.
- O postulado *equação de Schrödinger* apareceu na sexta posição em 44% dos livros-texto, a obra 7 o colocou na primeira posição, o que mostra que a maior parte dos autores busca construir significados para facilitar a aceitação dele. Vale ressaltar a possibilidade de uma estrutura matemática ser axiomatizada de modo a obter-se dela a equação de Schrödinger enquanto teorema, haja vista a formulação de operadores de translação temporal infinitesimal (SAKURAI; COMMINS, 1995), assim como no caso da translação espacial em que o comutador entre a coordenada e seu respectivo *momentum* aparece (*ibidem*, 1995).

Na física há sistematizações que soem ocorrer tanto a ponto de serem consideradas canônicas, exemplos são as leis da termodinâmica, as leis de Newton e as equações de Maxwell. O que há em comum entre elas é o conteúdo das máximas e sua ordem. Já nas sistematizações dos postulados da MQ, não há esse elemento em comum ainda com um agravante: a questão das possíveis interpretações do fenômeno. A interpretação mais comum em livros-texto é a de Copenhague, porém não há consenso sequer entre os pesquisadores na parte de fundamentos da MQ quanto a isso. Além disso, para a sistematização dos postulados desta interpretação a não-unanimidade se mantém. Destarte, o que se realizou neste trabalho foi buscar a sistematização média de textos consagrados para compararem-nas com a sistematização trazida pelo autor deste TCC, para com isso aproximar-se de um arrolamento canônico dos postulados com base nas estratégias didáticas de outrem. O subproduto da lida foi que se se estabelecesse uma ordem de arrolamento dos postulados com base no percentual de aparição

de cada um na dada posição, ela *coincidiria* com a ordem postulística pelo autor deste trabalho arrolada. Portanto, há correspondência entre o posicionamento *médio* que fora pelos autores dos livros estabelecida e a que aqui foi, o que reforça a fortaleza pedagógica de tal ordenamento. Outro mérito do autor deste escrito foi colocar a sistematização dos postulados — que predominantemente só aparece em livros sintáticos — em um material com ênfase semântica, de modo a ajudar o neófito a "conectar os pontos".

Por fim, com base nos materiais analisados, sendo a materialização dos resultados desta pesquisa, houve elaboração de guia de estudo para os postulados da MQ presente no apêndice A. O guia é destinado a estudantes do tema e será disponibilizado em formato .PDF. Deseja-se que seja fruído pelo maior número de pessoas.

REFERÊNCIAS

- AUSUBEL, D. P. *The acquisition and retention of knowledge: A cognitive view*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2000.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.
- BECHARA, E. **Moderna gramática portuguesa**. [S.l.]: Nova Fronteira, 2019.
- BRASIL. Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**, Brasília, DF, 2014. ISSN 1677-7042. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2011-2014/2014/Lei/L13005.htm.
- CARUSO, F.; OGURI, V. **Física Moderna: origens clássicas e fundamentos quânticos**. [S.l.]: Elsevier, 2006.
- COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2019.
- DIRAC, P. A. M. *A new notation for quantum mechanics*. v. 35, n. 3, p. 416–418, 1939.
- DUBSON, M. *et al. Faculty disagreement about the teaching of quantum mechanics*. v. 1179, n. 1, p. 137–140, 2009.
- FEIN, Y. Y. *et al. Quantum superposition of molecules beyond 25 kda*. **Nature Physics**, Nature Publishing Group, v. 15, n. 12, p. 1242–1245, 2019.
- FLICK, U. **Introdução à pesquisa qualitativa**. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.
- FOCK, V. A. **Fundamentals of quantum mechanics**. [S.l.: s.n.], 1978.
- GENTNER, D.; JEZIORSKI, M. *The shift from metaphor to analogy in Western science*. **Metaphor and thought**, Cambridge University Press Cambridge, v. 447, 1993.
- GRIFFITHS, D. J. **Introduction to quantum mechanics**. [S.l.]: Pearson, 2005.
- HARDY, L.; SPEKKENS, R. *Why physics needs quantum foundations*. **arXiv preprint arXiv:1003.5008**, 2010.
- JAFFE, R. L. **Supplementary notes on Dirac notation, quantum states, etc.** 2007. <http://web.mit.edu/8.05/handouts/jaffe1.pdf>. [Online; acessado em 21-Janeiro-2022].
- KAAS, J. H.; BALARAM, P. *Current research on the organization and function of the visual system in primates*. **Eye and brain**, Dove Press, v. 6, n. Suppl 1, p. 1, 2014.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Quantum mechanics: non-relativistic theory**. [S.l.]: Pergamon, 1991. v. 3.
- LETRAS, A. B. de. **Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa, sexta edição, 2021**. 2021. <https://academia.org.br/nossa-lingua/busca-no-vocabulario>. [Online; acessado em 25-Janeiro-2022].
- LEVINE, I. N.; BUSCH, D. H.; SHULL, H. **Quantum chemistry**. [S.l.]: Pearson Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2013. v. 6.
- MOREIRA, M. A. *Meaningful learning: From the classical to the critical view*. **Meaningful Learning Review**, v. 1, p. 1–15, 2011.

OSTERMANN, F.; MOREIRA, M. A. Uma revisão bibliográfica sobre a área de pesquisa “física moderna e contemporânea no ensino médio”. **Investigações em ensino de ciências**, v. 5, n. 1, p. 23–48, 2010.

PUSEY, M. F.; BARRETT, J.; RUDOLPH, T. *On the reality of the quantum state*. **Nature Physics**, Nature Publishing Group, v. 8, n. 6, p. 475–478, 2012.

QURECA. **Overview on quantum initiatives worldwide**. 2021. <https://www.quireca.com/overview-on-quantum-initiatives-worldwide/>. [Online; acessado em 28 de fevereiro de 2022].

ROCHA, C. R. Sobre o ensino do conceito de estado em cursos introdutórios de mecânica quântica. **Dissertação (Mestrado em Ensino de Física)**, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

SAKURAI, J. J.; COMMINS, E. D. **Modern quantum mechanics, revised edition**. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1995.

SAUSSURE, F. D. **Cours de linguistique générale**. [S.l.]: Otto Harrassowitz Verlag, 1989. v. 1.

SCHWABL, F. **Quantum Mechanics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.

SEARLE, J. R. Is the brain’s mind a computer program? **Scientific American**, JSTOR, v. 262, n. 1, p. 25–31, 1990.

SHANKAR, R. **Principles of quantum mechanics**. [S.l.]: Plenum press, 1994.

SINGH, C.; MARSHMAN, E. *Review of student difficulties in upper-level quantum mechanics*. **Physical Review Special Topics-Physics Education Research**, APS, v. 11, n. 2, p. 020117, 2015.

SPINOZA, B. *Ethics (1677)*. **Trans. R. H. M. Elwes. The floating press**, 2009.

THORNTON, S. T.; REX, A. **Modern physics for scientists and engineers**. [S.l.]: Thomson Brooks/Cole, 2006.

WITTGENSTEIN, L. **Philosophical investigations**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010.

ZWIEBACH, B. **Quantum Physics I**. 2016. <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>. [Online; acessado em 21-Janeiro-2022].

APÊNDICE A – Guia conciso acerca dos postulados da MQ

A.1 Fundamentos da MQ e os postulados

A.1.1 Postulado

A interpretação de Copenhague da mecânica quântica (MQ) pode ser sintetizada em uma lista de proposições¹, também conhecida como os postulados da MQ. Postulado é uma proposição não-dedutível tomada por verdadeira em razão de as deduções dela feita serem compatíveis com os resultados experimentais. Neste texto adotou-se a seguinte ordem para a apresentação dos postulados:

1. *Estado e Superposição* para apresentar o signo que descreve o sistema;
2. *Colapso da função de onda* para as complicações e incompatibilidades mais evidentes entre a MQ e a clássica;
3. *Regra de Born*, de modo a quantificar o caráter probabilístico da MQ;
4. *Operadores (observáveis)* enquanto um novo modo de se manipular grandezas físicas;
5. *Autovalores (resultado da medida)*;
6. *Equação de Schrödinger* enquanto geradora da dinâmica quântica.

A.1.2 Estado quântico

O estado de algo é uma descrição de sua condição em um determinado instante. O fato do carro *estar* novo é equivalente ao estado dele *ser* novo em um instante. A discussão pode emergir no estudo ontológico em que há a ideia de essência de um Ser e a ideia de estar sendo sem necessidade de continuidade. Note que mesmo na linguagem corrente a distinção existe, uma vez que as frases "Helena é bonita" e "Helena está bonita" são de significados distintos. Helena ser bonita implica que o estado de sua aparência é bonita *essencialmente*. Por outro lado, Helena estar bonita denota um estado de existência em que sua aparência manifesta beleza *num dado tempo*, o que não implica que beleza a identifique.

Estado é, além de substantivo, verbo. Um exemplo é a locução verbal *eu tenho estado bem*, cujo significado é que eu tenho sentido mais emoções de valência positiva que de negativa em um intervalo temporal. Sendo assim, pode-se dizer que o estado de uma coisa são atributos atuais dela ou que foram atuais subsequentemente um intervalo temporal curto. Já a ideia de Ser traz atributos imutáveis dessa coisa em relação ao passar do tempo.

Já para falar-se de um *estado físico* precisamos definir o que é um *sistema físico*. Este é um recorte material da natureza de fronteiras abstratas, que consiste nos objetos de interesse

¹ Não há consenso no que tange aos ordenamento e conteúdo do postulados.

do observador juntamente com a porção do espaço por eles ocupado em um dado tempo. Já a ideia de estado está vinculada a um sistema físico, sendo sua descrição em um dado tempo. Na mecânica newtoniana, se se conhecerem todas as posições e todos os *momenta* dos constituintes materiais de um sistema físico em um tempo t' , sabe-se de seu estado em t qualquer por meio da equação que rege a dinâmica de um sistema clássico ($\mathbf{F}(t) = \dot{\mathbf{p}}(t)$). Em uma formulação mais analítica, cada ponto no espaço de fase $(p(t), q(t))$ representa um estado possível para o sistema "ocupar". A conservação de informação sobre o sistema físico é uma marca da descrição clássica, que é a indiferença do sistema em relação a um novo processo de medição². Outra é a reversibilidade da dinâmica, que implica conhecimentos *unívocos* do passado e do futuro do sistema ao saber-se do estado atual [Susskind].

Na termodinâmica clássica a determinação de dois parâmetros macroscópicos³ em situação de equilíbrio termodinâmico basta para ter-se o estado termodinâmico do sistema (macroestado). Já na mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs a situação é análoga à newtoniana no tangente ao microestado, pois para N partículas num espaço tridimensional, há de possuírem-se $6N$ coordenadas independentes para determinar-se o microestado do sistema [Pathria, p.30].

Já na mecânica quântica (MQ), conquanto ainda haja a ideia de o estado ser uma descrição de meu sistema físico e de nele haver informações sobre o sistema físico, a informação não é necessariamente conservada. Uma razão para tal é que o processo de medição pode apagar informações já obtidas do estado, modificando-o irreversivelmente.

Sintaticamente o estado é representado como um vetor coluna de N entradas ou por uma função; cujo significante, em ambos os casos, sói ser a letra grega psi (Ψ). O signo físico-matemático associado a ele é o $|\Psi\rangle$, alcunhado *ket* (de estado), que reside no espaço de Hilbert (um espaço vetorial). No entanto, por mais que o estado seja uma descrição do sistema físico, vale ressaltar que o estado não é apenas informação sobre o sistema e suas possibilidades, pois já se mostrou que caso ele fosse apenas isso, haveria contradição entre a teoria quântica e resultados experimentais (veja a referência Pusey para mais informações). Visto que há nele informações sobre as possibilidades de medição de algum estado, seria interessante vermos um processo de medição clássico descrito por linguagem quântica. Para extrair essa informação há de haver interação com ele, num processo de medição.

Para ilustrar o processo de medição na MQ, você pretende observar (medir) a face de Kleytinho. A descrição quântica da face dele anteriormente ao processo de medição pode ser descrita pela seguinte equação:

$$|\Psi\rangle = a_{feliz} |feliz\rangle + a_{triste} |triste\rangle, \quad (1)$$

² O fato de eu saber a posição do carro e saber de seu *momentum* na mesma coordenada é aceito tranquilamente e é compatível com a intuição.

³ Volume e pressão, por exemplo.

em que o estado pré-medida é o de *superposição* dos estados possíveis em que se pode encontrar o sistema na medição da propriedade *face*. Nesta situação, as possibilidades para o semblante dele após a observação são estar triste *ou* estar feliz. Neste momento você observou que sua face ficou/estava feliz, o que quanticamente é equivalente ao colapso do estado de sua face para o estado feliz:

$$|\Psi\rangle \longrightarrow |feliz\rangle . \quad (2)$$

Dado isso, numa nova etapa do jogo, Kleytinho esconde sua mãos nas costas, escolhe um de seus dedos e você há de descobrir o número mostrado por ele. Analogamente à face, a mão observada estará mostrando um número de 1 a 5 , em que o estado da mão será representado por:

$$|\Psi\rangle = a_1 |1\rangle + \dots + a_5 |5\rangle . \quad (3)$$

Você estava concentrado na face de Kleytinho, e não via sua mão posicionada em suas costas, tampouco o número por ele mostrado. Por analogia, um processo de medição se dá no que concerne a *uma* propriedade física dum sistema quântico. A observação (medida) da grandeza física face, representada pelo operador \mathbf{F} , é matematicamente dada por:

$$\mathbf{F} |\Psi\rangle = a_{feliz} |\Psi\rangle , \quad (4)$$

quando a face observada é feliz, em que houve o colapso do estado de superposição dos auto-estados da face no autoestado feliz em decorrência do processo de medição, o que representa a observação de Kleytinho feliz. Em seguida, se você observá-lo mostrando o número 1, sintaticamente tem-se:

$$\mathbf{M} |\Psi\rangle = a_1 |\Psi\rangle , \quad (5)$$

em que \mathbf{M} é o operador associado à grandeza física número mostrado.

Suponhamos uma situação parecida: o mesmo jogo, só que agora você quer trapacear. Para tal, antes de tentar dizer qual o número mostrado você olhará a face de Kleytinho e ele estará feliz. Posteriormente, sub-repticiamente você observa a mão de Kleytinho antes do palpite e obtém o valor 2. Porém, ao notar tal trapaça, ele golpeia o trapaceiro de tal modo que a observação da face de Kleytinho passa a ser de impossível precisão absoluta, isto é, o fato de você ter observado sua mão faz com que a face dele se torne "misteriosa": o trapaceiro não consegue mais determinar se a expressão de Kleytinho é feliz ou triste. Na quântica a questão vai além, a observação de sua mão faz com que a informação anteriormente obtida seja *apagada*, de tal modo a face de Kleytinho não necessariamente permanecer feliz (a probabilidade maior é que Kleytinho fique irritado com a trapaça!). Em outras palavras, o rosto dele pode alterar-se e tornar-se triste em decorrência da observação da mão. Sintaticamente, os observáveis que possuem essa "relação de apagamento" são ditos *incompatíveis*, o que está materializado no

produto de suas variâncias ser limitado inferiormente:

$$\Delta\mathbf{M}\Delta\mathbf{F} \geq c, \quad (6)$$

(com $c \in \mathbb{R}_*^+$) analogamente ao popular princípio da incerteza de Heisenberg:

$$\sigma_x \sigma_p \gtrsim \hbar, \quad (7)$$

o que implica o comutador entre os operadores ser não-nulo (mais detalhes na seção A.7).

Em suma, o vetor de estado pode ser visto como um ente matemático que carrega em si o conjunto das possibilidades de estados possíveis para o sistema e sua informação. A reflexão conseguinte que se nos afigura é: o que mais o estado é, além de informação sobre o sistema? Esta é uma questão irresolvida. O que se adotou neste escrito foi: o estado não é somente o ente em que há informação sobre o sistema físico, pois existe mais algo nele. O que é esse algo a mais? Desconheço. Então o que é o estado quântico? *O ket de estado é um signo físico-matemático que representa um recorte teórico de um fenômeno: ele carrega informações sobre a atualidade do sistema físico e sobre sua potencialidade, pois há nele as informações necessárias para obterem-se as porcentagens associadas aos eventos possíveis num processo de medição.*

O que é essa informação nele contida e o que posso extrair do estado a fim de significar essa informação? Com essa informação posso obter a distribuição de probabilidades para o resultado da medição de uma propriedade física do sistema físico. Outra coisa é que o estado de superposição é uma realidade material, não somente um artifício matemático. Porém, o estado não é só *informação* sobre o sistema e com isso voltamos àquela questão. Sinto que a interrogação "o que é o estado?" é ontológica antes de ser física, então por que ela está aqui? Está para instigar pensamentos acerca da teoria, pois a postura pragmática "cale-se e calcule" pode torná-la simplista no cérebro de quem a aplica.

A.2 Representação do vetor de estado

Já a representação de um vetor abstrato é a seleção de uma base ortonormal de tal modo a poder-se escrevê-lo como uma combinação linear dela. Isto é, é apenas uma maneira escolhida de escrever-se o vetor abstrato complexo no espaço, cujas propriedades mais relevantes são a normalizabilidade e sua finitude (quadrado-integrabilidade). No caso de um estado ligado, conhecido como sistema discreto de N níveis, tem-se um vetor coluna com os coefici-

entes da expansão em cada uma das N entradas, nomeado também *ket*:

$$|\Psi\rangle \doteq \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}, \quad (8)$$

em que $a_j = \langle j|\Psi\rangle$. Ou seja: cada componente a_j é dada pela projeção do vetor $|\Psi\rangle$ na mesma direção j desta componente. Ademais, para construir-se o *bra* associado ao *ket* realiza-se o transposto complexo conjugado da eq. 8.

A função de estado é a visualização do vetor de estado em um espaço de configurações. Mais especificamente, ela é o coeficiente da projeção de $|\Psi\rangle$ no espaço das coordenadas $|x\rangle$:

$$\langle x|\Psi\rangle = \Psi(x), \quad (9)$$

que também pode ser expressa na base dos *momenta*:

$$\langle p|\Psi\rangle = \Phi(p). \quad (10)$$

A representação do *ket* é possível na forma da equação 8 é um modo mais compacto de se expressar o estado de superposição, cuja expressão sempre é possível pelo axioma da completude, que é expressado inteiramente abaixo:

$$|\Psi\rangle = \sum_{j=1}^N |j\rangle \langle j|\Psi\rangle = \sum_j^N |j\rangle a_j. \quad (11)$$

Já no caso de um estado de espalhamento, a expansão pode ser representada como uma função complexa $f(\alpha)$ que recebe entradas $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$|\Psi\rangle \doteq f(\alpha). \quad (12)$$

Note que a dependência temporal de $|\Psi\rangle$ dependerá do potencial escolhido (ver seção A.8).

A.3 Ensemble, colapso e o processo de medição

O processo de medição altera o vetor de estado não-negligenciavelmente. À mudança abrupta do estado como consequência do processo de medição dá-se o nome *colapso da fun-*

ção de onda. Isto faz com que na MQ exista um "problema": ocorre alteração irreversível no estado, o que impossibilita estabelecer probabilidade frequentista para ele por meio de sucessivas medições suas. O modo como isso foi solucionado foi hipotetizar que N estados igualmente preparados sejam fisicamente equivalentes para com isso poder estabelecer-se uma probabilidade por meio da medição única de cada um dos N estados. A este conjunto de N objetos equivalentes cognomina-se *ensemble* puro. Com isso, a solução é estabelecer uma probabilidade a um *ket* com base nas medições realizadas em todos os elementos do ensemble estatístico de estados.

Dado que o sistema físico possui informações sobre as probabilidades de colapso, para representar-se seu estado por meio do *ket* necessito de um ensemble puro para haver representatividade na descrição da natureza.

A.4 Regra de Born

A interpretação de Copenhague é intrinsecamente probabilística, no sentido que o resultado da transformação do estado quântico por um processo de medição é de impossível conhecimento unívoco antes do fato, pois o máximo sabido *a priori* é o conjunto das probabilidades de resultados possíveis para a medida: a realidade do estado é concebida em uma acepção em que *não faz sentido* falar que o sistema está em uma possibilidade específica daquele estado anteriormente ao processo de medição dele.

Sanado o problema de não se poder estabelecer probabilidade de colapso apenas com um estado colapsado, tem-se que a probabilidade de um estado em superposição (eq. 11) colapsar em $|j\rangle$ é dado por $|a_j|^2$. Este é o enunciado da regra de Born para partículas simples em um sistema de N níveis:

$$P(a_j) = |a_j|^2. \quad (13)$$

Equivalentemente, essa é a probabilidade de obter-se a_j ao medir-se a grandeza a por meio da medida de $|\Psi\rangle$. Visto que se trata de uma probabilidade tem-se a condição de normalização:

$$\sum_{j=1}^N |\langle j|\Psi\rangle|^2 = \sum_{j=1}^N |a_j|^2 = \sum_{j=1}^N P(a_j) = 1. \quad (14)$$

Analogamente, uma partícula, antes de ser medida, pode estar em diversas posições do eixo x com suas respectivas probabilidades. Após ser medida, determinaremos uma posição (com precisão de medida explicada na seção A.7) mas antes da medida ela terá apenas probabilidades de ocupar determinadas posições. Ao mapearmos todo o espaço, neste caso, a reta, teremos mapeado todas as possibilidades e portanto, a soma de todas estas probabilidades

será 100%. A isto, chamamos de "normalização da função de onda":

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1. \quad (15)$$

Esta equação é uma manifestação da natureza probabilística da regra de Born.

Dada a condição de existência da partícula no espaço (eq. 15), a probabilidade de encontrar-se a partícula entre as coordenadas x e $x + dx$ em um tempo t é dada por $dP(x,t)$ pela equação conhecida como regra de Born para partículas simples:

$$dP(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 dx. \quad (16)$$

As equações 15 e 16 podem ser generalizadas trivialmente para \mathbb{R}^n .

A.5 Valor esperado de uma propriedade física

Coloquialmente, algo *esperado* é um evento com probabilidade não-nula (*i.e.* se Kleytinho espera passar de ano, é porque ainda há chances para ser aprovado). Já no jargão estatístico, o valor esperado de uma grandeza não precisa obedecer o senso comum, pois pode-se calcular para um conjunto de dados um valor esperado inobtenível em um evento⁴. Notemos que matematicamente não há problemas com isso, pois o valor esperado de uma variável aleatória é apenas uma medida-resumo do conjunto de dados. Para a resolução do entrave semântico basta precisar a definição de valor esperado enquanto *valor médio de um ensemble* (ver seção A.3), visto que a ideia da operação é extrair uma grandeza representativa do sistema. No caso de uma grandeza física $A(q,p)$, associada ao operador \mathbf{A} (ver seção A.6) todas as medidas sobre o *ensemble* de estados compõem o valor esperado.

Define-se o valor esperado de uma grandeza $A(q,p)$ para um operador autoadjunto (hermitiano) e linear \mathbf{A} :

$$\langle A \rangle \equiv \langle \Psi | \mathbf{A} | \Psi \rangle, \quad (17)$$

que na base das coordenadas na reta assume a seguinte forma:

$$\langle A \rangle = \int_{\mathbb{R}} \Psi^*(x) \mathbf{A} \Psi(x) dx. \quad (18)$$

No espaço discreto (sistema de N níveis) a eq. 17 é implementada matricialmente (de modo a resultar um escalar).

⁴ Se Kleytinho comprou duas maçãs e Kathyellen comprou três, o valor esperado para a compra de maçãs é 2,5, mesmo sabendo que só maçãs inteiras são vendidas

A.6 Propriedades físicas

As propriedades físicas $A(q,p)$ de um sistema são quaisquer características mensuráveis suas. Na MQ, a elas são univocamente associadas um operador linear \mathbf{A} . Assim, o processo de medição se dá, sintaticamente, com a ação do operador sobre o *ket* do sistema. O caráter quantitativo da mensuração implica obtenção de um escalar a_j , que por sua vez é um autovalor de $|\Psi_j\rangle$, autoestado de \mathbf{A} que descreverá o sistema após a medição de a_j :

$$\mathbf{A} |\Psi_j\rangle = a_j |\Psi_j\rangle, \quad (19)$$

em que a medição de a_j é representada por:

$$|\Psi\rangle \longrightarrow |\Psi_j\rangle. \quad (20)$$

Às propriedades físicas são associados operadores *hermitianos*, isto faz com que não haja diferença entre sua atuação em um *bra* ou em um *ket*. Ademais, o vetor de estado reside no espaço de estados e é lá em que, matematicamente, ocorre o processo de medição (transformação do vetor). Note que as operações da álgebra linear podem ser realizadas normalmente (vide a seção A.5 e o apêndice A do livro (GRIFFITHS, 2005)).

Assim como na representação de um vetor abstrato, a representação de um operador abstrato é uma "foto" sua; ou seja, uma imagem do operador em uma base ortonormal. No caso de um espaço discreto de N dimensões tem-se:

$$\mathbf{A} \doteq \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & & & a_{NN} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

em que $a_{jk} = \langle j|\mathbf{A}|k\rangle$.

Já no caso contínuo, a representação pode ser vista como uma matriz cujas entradas constituem um *continuum* (ver [Cohen, p.126] para mais detalhes). Vale ressaltar que a base usual é a base das coordenadas; cujos autoestados, conquanto não têm significado físico imediato, compõem uma base contínua e obedecem a relação de completude:

$$1 = \int_{\mathbb{R}} dx' |x'\rangle \langle x'|. \quad (22)$$

A.6.1 *Momentum* e posição

As definições quânticas dos operadores *momentum* e posição se dão tacitamente na base das coordenadas de tal modo àquele ser o operador derivada espacial multiplicado por uma constante. Ademais, é importante notar que há diferença entre as bases sobre as quais houve a projeção no respeitante à representação do operador. Na base das coordenadas, pode-se escrever a componente do operador *momentum* (o negrito é do operador) da seguinte maneira:

$$\mathbf{p}_x \xrightarrow{\text{base } x} -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad (23)$$

tal que:

$$\mathbf{p}_x \psi(x) \equiv -i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}. \quad (24)$$

Já na base dos p , a eq. 24 é , com $\phi(p)$ sendo a $\psi(x)$ reescrita agora no espaço dos *momenta*:

$$\mathbf{p}\phi(p) = p\phi(p). \quad (25)$$

O *momentum* unidimensional na mecânica newtoniana é dado por:

$$p_x = m \frac{dx}{dt}. \quad (26)$$

Ele é parte fundamental da dinâmica de um sistema clássico, cuja equação de evolução é regida por sua variação temporal. A forma do operador *momentum* da eq. 23 pode ser justificada *post hoc* pela compatibilidade entre os resultados obtidos na teoria e no mundo material. Sintaticamente, a essa compatibilidade entre a formulação clássica e valores esperados de seus correspondentes operadores dá-se o nome teorema de Ehrenfest. Por ele se podem obter os valores clássicos por meio do valor esperado (eq. 18) do operador *momentum* do jeito que é postulado⁵:

$$\langle \mathbf{p}_x \rangle = \int_{\mathbb{R}} \Psi^*(x,t) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(x,t) dx = m \frac{d\langle x \rangle}{dt}. \quad (27)$$

Um outro modo de convencer-se da equivalência semântica entre as equações 23 e 26 é por meio de análise dimensional:

$$\dim \hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = \left[\left(\frac{ML^2}{T^2} T \right) \frac{1}{L} \right] = \left[\frac{ML}{T} \right] = \dim \mathbf{p}_x. \quad (28)$$

Vale dizer que na base das autofunções do operador \mathbf{p} , ele é representado por p e a representação do operador posição é proporcional ao operador derivada em relação aos *momenta*

⁵ Ver (GRIFFITHS, 2005, p.15)

(note a simetria entre as equações 23 e 29):

$$\mathbf{x} \xrightarrow{\text{base } p} i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x}. \quad (29)$$

Na base x tem-se:

$$\mathbf{x} \xrightarrow{\text{base } x} x. \quad (30)$$

Ou seja, outro indício de uma relação mais profunda entre x e p_x — embora usemos quase sempre a equação 30 em detrimento da eq. 29.

Posição e *momentum* já aparecem conectados via definição na mecânica clássica, assim como a coordenada generalizada e seu *momentum* canônico conjugado. O mesmo na quântica, em que a coordenada x e o *momentum* p_x estão ainda mais intimamente conectados. Sintaticamente, ao saber-se a função de estado de um, obtém-se a função de estado do outro por meio de uma mudança de bases. Esta conexão dá-se por uma transformada integral cujo núcleo exponencial converte cada possível posição em um valor de *momentum* e vice-versa:

$$\psi(x') = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right] \int_{\mathbb{R}} dp' \exp\left(\frac{ip'x'}{\hbar}\right) \phi(p'), \quad (31)$$

$$\phi(p') = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right] \int_{\mathbb{R}} dx' \exp\left(\frac{-ip'x'}{\hbar}\right) \psi(x'). \quad (32)$$

Em suma, conquanto o espaço de configuração dos *momenta* seja diferente do das coordenadas, estão conectados de tal modo a alteração em um implicar alteração no outro. Ademais, há algo de fundamental que impossibilita a alteração ser de tal forma a precisar ambos arbitrariamente, que é algebricamente manifesto na relação de comutação entre os observáveis ser não nula, que é uma manifestação da relação de incerteza entre eles possuir ínfimo não-nulo (seção A.7).

A.7 Relações de incerteza

Em física experimental introdutória já é mostrado que a todo aparato experimental e a todo processo de medida há incertezas associadas e que ambos limitam a precisão dos valores obtidos. O mesmo vale para um sistema quântico, em que além disso se associam incertezas às *propriedades físicas*. Ao retomar-se o exemplo das incertezas de posição e *momentum* no mesmo eixo, tem-se que o seu produto há de ser maior ou igual a um minimante não-nulo. Isso está conectado com a ordem de medição entre variáveis físicas incompatíveis alterar o resultado final, o que é sintaticamente mostrado pelo comutador entre elas ser não-nulo. O comutador entre posição e *momentum* é um exemplo do comutador canônico e ilustra o caso

geral de variáveis que não são compatíveis:

$$[\mathbf{p}_x, \mathbf{x}] = -i\hbar. \quad (33)$$

Vale ressaltar que o comutador da eq. 33 é independente de base, ou seja, invariante por transformação de coordenadas. Já no exemplo da subseção A.1.2, tem-se que o operador face \mathbf{F} e mão \mathbf{M} não comutam; ou seja: $[\mathbf{F}, \mathbf{M}] \neq 0$.

Define-se a incerteza associada a uma grandeza física \mathbf{A} a partir da definição de desvio quadrático médio (*rms*) de uma distribuição de valores desta grandeza física:

$$\Delta\mathbf{A} \equiv \sqrt{\langle (\mathbf{A} - \langle \mathbf{A} \rangle)^2 \rangle}. \quad (34)$$

Dada a relação de incerteza geral abaixo, sendo \mathbf{B} uma grandeza física (veja demonstração detalhada em (GRIFFITHS, 2005), seção 3.5.1):

$$\Delta\mathbf{A}\Delta\mathbf{B} \geq \frac{1}{2} \langle [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \rangle, \quad (35)$$

e o comutador canônico da eq. 33 aplicado na eq. 35, obtém-se a relação de incerteza entre posição e seu respectivo *momentum*:

$$\Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{p}_x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (36)$$

A.8 Dinâmica quântica: equação de Schrödinger

A.8.1 Equação de Schrödinger dependente do tempo

Uma generalização recorrente aos neófitos de quântica é falar-se que tudo é probabilístico: isto é, não há determinismo em qualquer descrição algébrica da realidade pois a teoria quântica é "intrinsecamente probabilística". Se, por um lado, só se podem saber as probabilidades do colapso, a modificação delas é sabida *exatamente* se se souber o potencial do sistema.

Dinâmica é o comportamento de um sistema físico em decorrência da variação do parâmetro tempo. A dinâmica quântica são as mudanças do sistema quântico e a quantificação delas. Quando vista sob o ponto de vista da mudança do estado, a dinâmica é dada pela proporcionalidade entre a derivada temporal do *ket* e a transformação dele pela ação do operador hamiltoniano.

$$|\dot{\Psi}(t)\rangle \propto \mathbf{H}|\Psi(t)\rangle, \quad (37)$$

com:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{V}. \quad (38)$$

Mais especificamente, a dinâmica quântica é ditada pelo potencial associado ao sistema físico (dentro do operador \mathbf{H}). À regra matemática que descreve a dinâmica do *ket* dá-se o nome equação de Schrödinger dependente do tempo, sendo sua dependência temporal diretamente relacionada ao potencial escolhido:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \mathbf{H} |\Psi(t)\rangle. \quad (39)$$

Nesse formalismo, o operador de translação temporal atua sobre o vetor de estado e os operadores mantêm-se invariantes. Todavia, a formulação em que a recíproca ocorre produz resultados fisicamente equivalentes e são conhecidas respectivamente como a representação de Schrödinger e a representação de Heisenberg.

O outro modo equivalente de observarmos a dinâmica do sistema é se se assumirem as propriedades físicas com dependência temporal de modo aos observáveis dependerem do tempo, não o estado. Essa maneira de observar-se o sistema físico é chamada representação de Heisenberg, regida pela equação de Heisenberg:

$$\frac{d\mathbf{A}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{A}_H] - \frac{\partial \mathbf{A}_H}{\partial t}, \quad (40)$$

em que

$$\mathbf{A}_H = \mathbf{A}(t) \equiv \mathbf{U}^\dagger(t) \mathbf{A} \mathbf{U}(t) \quad (41)$$

é o observável físico na representação de Heisenberg.

Em outras palavras, sobre *o que* as transformações de evolução temporal ocorrem não interfere no resultado — desde que se mantenha a consistência no uso da representação.

Em suma, pode-se observar a dinâmica do sistema tanto por como o estado é alterado (por meio da equação de Schrödinger) quanto por como os operadores sendo alterados (por meio da equação de Heisenberg): a troca das representações é trocar seis por meia dúzia. Vale dizer que o uso da representação de Heisenberg começa a fazer mais sentido em formulações mais avançadas, por exemplo em uma teoria quântica de campos, por hora, basta saber que ela existe e que a física é a mesma.

A.8.2 Equação de Schrödinger independente do tempo

A independência temporal da equação de Schrödinger surge caso o potencial não apresente dependência temporal. Neste caso, o estado a ser medido é um autoestado do operador hamiltoniano. Esta é a forma da equação de Schrödinger para a maior parte das aplicações iniciais:

$$\mathbf{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x), \quad (42)$$

em que os $\psi_n(x)$ são conhecidos também como soluções estacionárias da equação de Schrödinger dependente do tempo, que são a parte espacial da solução dela no caso especial em que a função de onda pode ser separada em um produto das partes espacial e temporal (mais detalhes em [Griffiths, p.24]).

Vale ressaltar a importância desta equação, que é a protagonista dos problemas canônicos de MQ introdutória, tais como: o poço de potencial, a parede de potencial, o oscilador harmônico e o átomo de hidrogênio; todos com método de solução analítica. Ela também pode ser empregada para problemas que demandam métodos computacionais. A vantagem de não precisar se limitar às partículas simples é poder calcular moléculas e proteínas por meio da teoria quântica com uso de um computador de modo a emergir um novo problema: falta de poder computacional e como reduzi-lo. Mas a MQ não foi "resolvida" – sequer a formulação mais atual foi aqui mostrada, não obstante, essa introdução é uma tentativa de mostrar qual o espetáculo que a natureza nos apresenta.

A.9 Referências

SUSSKIND, Leonard; FRIEDMAN, Art. Quantum mechanics: the theoretical minimum. Basic Books, 2014.

GRIFFITHS, David J. Introduction to quantum mechanics. Prentice Hall), v. 23, p. 26, 2005.

SAKURAI, Jun John; COMMINS, Eugene D. Modern quantum mechanics, revised edition. 1995.

COHEN-TANNOUDJI, Claude; DIU, Bernard; LALOE, Frank. Quantum Mechanics, Volume 1. Quantum Mechanics, v. 1, p. 898, 1986.

PUSEY, Matthew F.; BARRETT, Jonathan; RUDOLPH, Terry. On the reality of the quantum state. Nature Physics, v. 8, n. 6, p. 475-478, 2012.

PATHRIA, Raj Kumar. Statistical mechanics. Elsevier, 2016.