ppgmat

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

CAIO LUIZ ESCOBAR DOS SANTOS

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO MÉDIO ATRAVÉS DE SISTEMAS LINEARES COM O AUXÍLIO DO GEO GEBRA

LONDRINA

2023

UTFPR

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

CAIO LUIZ ESCOBAR DOS SANTOS

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO MÉDIO ATRAVÉS DE SISTEMAS LINEARES COM O AUXÍLIO DO GEO GEBRA

SOLVING PROBLEMS IN HIGH SCHOOL THROUGH LINEAR SYSTEMS WITH THE HELP OF GEO GEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Leonardo Sturion

LONDRINA
2023

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

CAIO LUIZ ESCOBAR DOS SANTOS

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO MÉDIO, ATRAVÉS DE SISTEMAS LINEARESCOM O AUXÍLIO DO GEO GEBRA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 30 de Maio de 2023

Dr. Leonardo Sturion, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Alireza Mohebi Ashtiani, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Rogerio Mendonca Martins, Doutorado - Universidade Estadual do Norte do Paraná (Uenp)

Dedico a todos que contribuíram parameu crescimento pessoal e profissional, exclusivamente a minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus pela oportunidade e por ter me ajudado a conseguir chegar até aqui.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Leonardo Sturion, pelo carinho, amizade, atenção, incentivo, paciência e dedicação durante todo período de orientação para a realização deste trabalho. Agradeço também as sugestões e conversas durante as reuniões de orientação que vieram a consolidar esta pesquisa, bem como as inúmeras leituras de meus textos e cada contribuição, me fazendo aprender um pouco a cada dia.

Aos professores que fizeram parte da minha formação até o presente momento desde as séries iniciais, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Ensino Superior.

Às grandes amizades que esse Mestrado proporcionou, sem dúvida a amizade de vocês foi fundamental nessa caminhada.

E em especial à minha mãe Janilce e ao meu pai Luiz, que tiveram especial importância nesta fase de minha vida, pelo apoio emocional, afetivo, pelas brincadeiras e pelos momentos de distração. Agradeço por sempre estarem me incentivando, motivando e acreditando em mim.

SANTOS, Caio Luiz Escobar dos. **Resolução de problemas no Ensino Médio, através de Sistemas Lineares com o auxílio do Geo Gebra.** 2023. 70 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2023.

RESUMO

Na presente pesquisa apresentamos um estudo sobre resolução de problemas focando os sistemas de equações lineares. A proposta sugere uma sequência didática que pode ser trabalhada em turmas do Ensino Médio, especificamente nos 2º e 3º anos. Inicialmente o texto abordou uma breve reflexão sobre modelagem matemática e ensino de sistemas lineares, destacando-se a grande importância destes conteúdos perante as diversas áreas do comportamento humano notadamente dentro da área de exatas. Foram apresentados as definições e os principais conceitos acerca dos sistemas lineares e a sua aplicabilidade. O estudo terá sua ênfase voltada para a interpretação geométrica de cada equação que constituem o sistema, para tanto serão utilizados o *software GeoGebra* que permite uma visão espacial das equações suas interpelações geométricas tornando uma assimilação mais consistente pelos alunos. Iremos aplicar uma metodologia que aborde os aspectos geométricos explorando as relações existentes entre o sistema e as posições relativas das retas planos que representam as equações bem como as relações entre os resultados obtidos dos coeficientes. A pesquisa de campo foi realizada na Escola Estadual Orlando Drumond Murgel Engenheiro na cidade de Presidente Epitácio – SP. Inicialmente contava com 30 estudantes. Espera-se com esta pesquisa elaborar ao final um produto educacional com forma de *E-book* com todas as atividades desenvolvidas no decorrer do trabalho e que auxiliar novos professores quando forem tratar do conteúdo de sistemas lineares em suas aulas.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Ensino de Sistemas Lineares. Educação matemática no Ensino Médio.

SANTOS, Caio Luiz Escobar dos. **Solving problems in high school, through Linear Systems with the help of Geo Gebra.** 2023. 70 p. Dissertation (Master's Degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2023.

ABSTRACT

In the present research we present a study on problem solving focusing on systems of linear equations. The proposal suggests a didactic sequence that can be worked on in high school classes, specifically in the 2nd and 3rd years. Initially, the text addressed a brief reflection on mathematical modeling and teaching of the linear system, highlighting the great importance of these contents in the various areas of human behavior, notably within the area of exact sciences. Definitions and main concepts about linear system and. their applicability were presented. The study will have its emphasite on the geometric interpretation of each equation that constitutes the system, for which the Geo Gebra software will be used, which allows a spatial view of the equations and their geometric interpellations, making a more consistent assimilation by the students. We will apply a methodology that approaches the Geometric aspects exploring the existing relationships between the system and the relative positions of the straight lines that represent the equations as well as the relationships between the results obtained from the coefficients. Field research was carried out in a state public school Orlando Drumond Murgel Engineer in the city of Presidente Epitácio - SP, initially with 30 students. It is expected that this research to elaborate, at the end, an educational product in the form of an E-book with all the activities developed during the work and that will help new teachers when they are going to deal with the content of linear system in their classes.

Keywords: Mathematical Modeling. Teaching Linear Systems. Athematics Education in High School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
SED-SP	Secretaria Escolar Digital do estado de São Paulo
MMM	Movimento da Matemática Moderna
SPD	Sistema possível e determinado
SPI	Sistema possível e indeterminado
SI	Sistema Impossível

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, nota-se uma grande dificuldade para o ensinar e para o aprender das ciências exatas na escola, grande parte disso vem através de um pré-conceito que os alunos adquirem ao passar dos anos para as disciplinas de tais ciências, na parte de ensinar a principal pedra no caminho é o descaso que os estudantes têm com as disciplinas, criando uma barreira praticamente instransponível com a sua vontade de aprender e com o conteúdo que está sendo lecionado.

Nos dias atuais temos a nossa mão muitas ferramentas tecnológicas que possibilitam resolver muitos problemas dentro de vários segmentos da ciência e também proporcionam uma maior interação com os alunos, professores, educadores e pessoas que estão distantes pois, em qualquer momento, podem fazer chamadas de vídeo para realizar uma reunião, conversar com familiares ou bater papo com os amigos. Consequentemente, essa forma de se comunicar, se estende além do espaço-tempo, não se limitando apenas em encontro físicos (ANJOS; SARAIVA, 2019).

O que mais se vê na conjuntura atual é que praticamente a maioria dos sujeitos da sociedade (crianças, jovens, adultos) estão vivendo numa cultura social bem diferente dos que nasceram e viveram há 30, 20, 10 ou 5 anos atrás. Os seres desta época estão inseridos num mundo em que recebem um excesso de informações. Como expressado por Maltempi (2005), a tecnologia influenciou o jeito de ser, fazer, viver e aprender das pessoas, isto ocorreu pelo simples fato de mudanças radicais trazidas pela revolução tecnológica, em vista disso, usar tais recursos apenas para a transmissão do conhecimento não é mais suficiente.

Nota-se que algum acontecimento que ocorre do outro lado do mundo, em questão de minutos, está na rede, e praticamente uma grande parcela da população ficam sabendo.Portanto, constata-se que as informações estão em constante mudança. Aquilo que era dito como verdade absoluta ontem pode não ser verdade hoje, ou até mesmo ser ultrapassado. A tecnologia mudou a maneira de viver das pessoas e possivelmente continuará mudando o futuro. Diante dessa pressuposição, Powell (2019), salienta que o crescente avanço das tecnologias móveis e os aumentos dos dispositivos móveis influenciou, influencia e continuará influenciando a maneira de viver das pessoas durante muito tempo.

Assim sendo, algumas pessoas sofrem para manipular os aparatos tecnológicos simples, como, por exemplo, o caixa eletrônico de um banco. Esses indivíduos precisam de auxílio para fazer operações bancárias básicas, como tirar um extrato ou sacar seu salário. Contudo, observa-se que a maioria dos nascidos na geração net dificilmente vão ao banco. Essas conseguem fazer praticamente todas suas transações utilizando seus dispositivos móveis no conforto de sua casa.

1.1 JUSTIFICATIVA

A principal justificativa do trabalho pautou-se em estudos que mostravam que os alunos do Ensino Médio apresentam grandes dificuldades de resolver e interpretar sistemas lineares e trabalhar com polinômios algébricos, segundo Freitas (1999).

Observo que as razões das dificuldades dos alunos na interpretação dos resultados obtidos após a aplicação de um método de resolução a um sistema linear podem estar ligadas ao fato de que, métodos de resolução se reduzem a um algoritmo, enquanto que a interpretação dos resultados obtidos exige articulação entre diversos conceitos, que podem envolver diferentes quadros e registros de representação. Assim, as soluções de um sistema linear podem ser relacionadas, por exemplo, a pontos, retas e planos, o que permite se passar de uma manipulação algébrica a uma ilustração gráfica em dimensão 2 ou 3.

> Observo que as razões das dificuldades dos alunos na interpretação dos resultados obtidos após a aplicação de um método de resolução a um sistema linear podem estar ligadas ao fato de que, métodos de resolução se reduzem a um algoritmo, enquanto que a interpretação dos resultados obtidos exige articulação entre diversos conceitos, que podem envolver diferentes quadros e registros de representação. Assim, as soluções de um sistema linear podem ser relacionadas, por exemplo, a pontos, retas e planos, o que permite se passar de uma manipulação algébrica a uma ilustração gráfica em dimensão 2 ou 3 (FREITAS, 1999, p. 24).

Nota-se que tais dificuldades não são advindas somente deste século, mas também se remete ao século passado, tanto por meio da resolução quanto a interpretação gráfica da resolução de sistemas lineares 2x2 ou 3x3, também, segundo Freitas (1999), em sua pesquisa consta que 86%, por meio de teste diagnóstico, não relacionam a solução de um sistema linear com retas que os representam.

1.2 OBJETIVO GERAL

Levantar as principais dificuldades encontradas pelos alunos na resolução e interpretação gráfica de equações de sistemas lineares.

1.2.1 Objetivos específicos

- Retomar os conteúdos básicos para a solução de equações lineares;
- Realizar uma oficina utilizando o *software GeoGebra* para ensinar a manipulação do software para os alunos;
- Mostrar através do software como estudar o comportamento de funções através do gráfico;
- Realizar durantes as aulas ministradas oficinas utilizando a metodologia de Resolução de Problemas com sistemas lineares.

1.3 METODOLOGIA

A pesquisa realizada tem natureza descritiva, com uma abordagem qualitativa, já que, buscamos analisar os dados e interpretá-los, durante a resolução de problemas, para identificar possíveis contribuições para a construção do conhecimento acerca do conteúdo abordado na pesquisa, além disso, a pesquisa se caracteriza como exploratória e interpretativa, segundo Bogdan e Biklen (1994).

A pesquisa tem cunho qualitativo, as informações foram coletadas por meio de observações no decorrer das diferentes etapas da pesquisa, no relatório das atividades realizadas e por meio das transcrições de áudio.

O estudo foi realizado em uma escola estadual na cidade de Presidente Epitácio – SP, inicialmente, contava com 30 estudantes e ao final da pesquisa estavam participando um total de 20 estudantes todos matriculados no terceiro ano do Ensino Médio do período noturno. O decaimento do número de estudantes se dá por muitos alunos trabalharem durante o dia para ajudar no sustento de casa e por ser uma rotina desgastante acabam declinando dos estudos para focar na complementação de renda.

A instituição foi escolhida por conveniência, pois o pesquisador é docente nesta instituição, assim a turma escolhida era uma cujo o professor lecionava, deste modo houve um acordo com a sala para que a oficina valesse pontos adicionais na média bimestral, assim a coleta de dados foi realizada no segundo semestre do ano de 2022 e atendeu às normas e aos requisitos de ética da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), *campus* Londrina, com os procedimentos padrões de consentimento.

Foram realizadas três etapas: retomada de conteúdo, oficina de GeoGebra e aplicação da oficina, totalizando um total de 9 aulas de 45 minutos cada.

Antes de explicar as etapas devo colocar alguns adendos, essa sala foi atribuída a mim no início do segundo semestre letivo do ano de 2022, houveram três professores anteriores a mim que já haviam ministrada a disciplina para os alunos, os mesmos apresentavam dificuldade advindas, principalmente, pela pandemia de COVID-19, por isso foi-se necessário realizar uma retomada de conteúdos essenciais para a resolução de sistemas lineares.

Na primeira etapa foram utilizadas três aulas de 45 minutos, nelas foram retomados conteúdos essenciais para com que os alunos conseguissem realizar tarefas que envolvessem sistemas lineares, a ideia para que tal retomada fosse realizada foi o contexto da pandemia, onde os alunos por dois anos tiveram um déficit causado, principalmente, pelas aulas remotas, que apesar de serem uma solução para o problema não se conseguiu trabalhar de uma maneira totalmente eficiente, já que, em muitos casos os alunos não possuíam meios para acessar tais aulas, deste modo notou-se essencialmente necessário a retomada de conteúdos norteadores para a sequência do trabalho para enfim chegarmos à oficina.

Na segunda etapa foram utilizadas quatro aulas de 45 minutos, nelas os alunos foram apresentados para o *software GeoGebra*, por questões da aplicação de provas online fornecidas pela Secretaria Estadual Digital – São Paulo os alunos tiveram que utilizar o software por meio de seus celulares onde no primeiro momento os alunos aprenderam a utilizar a interface e seus comandos, como é feita a entrada de dados e como representar uma função através de uma equação, deste modo os alunos iriam conseguir colocar cada equação linear e realizar a representação gráfica do sistema linear.

Na terceira e última etapa foram utilizadas duas aulas de 45 minutos, nela foram aplicadas três tarefas envolvendo o tema de sistemas lineares, sendo cada uma delas de um tipo: possível e determinado, possível e indeterminado e impossível. O tempo nessa etapa foi menor pois já estava trabalhando utilizando a metodologia de Resolução de Problemas durante as aulas regulares durante o ano letivo, deste modo, foi um passo que não custou tanto tempo para a organização da sala e dos alunos, fluindo de uma maneira mais rápida.

A metodologia utilizada para a análise dos resultados foi a descritiva qualitativa, a fonte utilizada foram as atividades realizadas pelos alunos, não possuindo rasuras ou interferências do pesquisador, e as gravações realizadas durante a realização das tarefas, constando assim um material físico e auditivo produzidos pelos alunos durante a oficina.

Buscando um ensino-aprendizagem que leve o aluno a sanar as dificuldades oriundas dos anos anteriores e também consiga entender os conteúdos, é que se propôs este trabalho, de apresentar os sistemas lineares vistos sob uma perspectiva de uma aula diferente da tradicional, para isso foi utilizando uma sequência didática, juntamente com a metodologia de resolução de problemas e de recursos tecnológicos, buscando minimizar os problemas de aprendizagem dos alunos que estão no ensino médio. A escolha da sequência didática deu-se, pois ela apresenta um conjunto de atividades ordenadas, articuladas a fim de se alcançar um determinado objetivo educacional. Já a resolução de problemas faz parte desse trabalho, pois consiste em um processo que leva a fixação do conteúdo aprendido pelo educando. O uso dos recursos tecnológicos se deu numa perspectiva de fixação de conteúdos e verificação das respostas.

Como proposta final, do pesquisador culminará na elaboração de um material didático (produto educacional), que auxiliará futuros professores na resolução de Problemas através da utilização de sistemas lineares.

2 ESTUDO DA ARTE

Nesta seção serão apresentadas as referências mais relevantes para o estudo de resolução de problemas através de Modelagem matemática tendo como foco o conteúdo de resolução de sistemas lineares.

2.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Resolver problemas é algo que se denota desde os primórdios da história humana, por exemplo, qual época do ano devemos plantar tal hortaliça? Qual a menor distância entre a cidade A e a cidade B? Como posso maximizar tal espaço? Entretanto a Resolução deProblemas vista como teoria é mais recente, sua principal referência é Polya, um matemático húngaro que viveu de 1887 a 1985, em seu final de carreira voltou os seus estudos para o ensino,em especial para a Resolução de Problemas, escrevendo 5 livros sobre esse assunto, os livros são: ”How to Solve it” (1945), ”Mathematics and Plausible Reasoning” (Volume I: Induction and Analogy in Mathematics, Volume II: Patterns of Plausible Inference)(1954) e MathematicalDiscovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving (volumes 1 and 2).; e”Mathematical Discover” (1962/64).

Em seu livro “How to Solve it” (1945), que ficou traduzido como “A arte de Resolver Problemas”, Polya expõe quatro passos, sendo ideias heurísticas, necessários para a resolução de um problema:

> Primeiro temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia de resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a (POLYA, 1944/1995, p. 3-4).

Para Polya compreender o problema é o ponto inicial do processo, em seguida é preciso estabelecer um plano de resolução, a execução será eficaz se o planejamento seguir estratégias claras, por fim uma retrospectiva do problema será um total valia do que foi realizado, portanto cada fase tem o seu potencial e o método é apenas um auxílio para a resolução.

A resolução de problemas, desenvolvida por Polya foi desenvolvida em 1944, porém seus estudos começaram a ganhar força nos Estados Unidos na década de 1960, advindo principalmente, do Movimento da Matemática Moderna - MMM, tal movimento se baseava na formalidade e no rigor dos fundamentos da teoria dos conjuntos para o ensino e aprendizagem da álgebra, aproximando assim a matemática que era estudada na escola com aquela produzida por pesquisadores. Nos anos 70 a Resolução de Problemas ganhou espaço em todo o mundo, segundo Lambdin e Walcott (2007), com o declínio do MMM, como dito por Morris Kline em seu livro "Why Johnny can't add: the failure of the new math", publicado em 1973 e sendo traduzido para o português como "O Fracasso da Matemática Moderna".

> Mostramos que o currículo tradicional é falho em certos aspectos, e que o novo currículo de matemática certamente não remedia dos defeitos do currículo tradicional. Além disso, ela introduz novos defeitos. Quais as diretrizes, pois, que uma reforma efetiva deve tomar? Apresentadas de maneira aproximada, no momento, as diretrizes devem ser diametralmente opostas às que foram tomadas pela nova matemática (KLINE, 1996, p. 175).

O MMM com o passar dos anos foi perdendo a sua força e sendo deixado de lado, começando assim a fazer com que a Resolução de Problema ganhe espaço a partir da década de 80 com o aparecimento de novas tendências e estudos acerca das já existentes, dessa forma a Resolução de Problemas, tornou-se objeto de estudo na Educação Matemática, e um dos aspectos observados foram as diferentes compreensões sobre o trabalho em sala de aula com tal metodologia. Para autores como Hatfield (1978) e Schroeder e Lester (1989), as diferentes compreensões podem ser dividas em: (1) O ensino *sobre* resolução de problemas, (2) o ensino *para* a resolução de problemas e (3) o ensino *através* da resolução de problemas.

2.2 SISTEMAS LINEARES

Vamos ao encontro de Chervel (1990) quando destaca a relevância de situarmos historicamente um conteúdo escolar, descrevendo a sua evolução, quais as mudanças ocorridas em um determinado período e sempre estabelecendo ligações com o seu ensino e suas finalidades. Cabe–lhe dar uma descrição detalhada do ensino em cada uma de suas etapas, descrever a evolução da didática, pesquisar as razões da mudança, revelar a coerência interna dos diferentes procedimentos aos quais se apela, e estabelecer a ligação entre o ensino dispensado e as finalidades que presidem a seu exercício (CHERVEL, 1990, p. 192).

Consideramos importante realizar um estudo histórico sobre sistemas de equações lineares, entendendo que, dessa forma, seria permitida uma melhor identificação de suanatureza epistemológica. Os vínculos de tipo epistemológico foram assim denominados por sugerirem que a finalidade da educação matemática é fazer com que o estudante compreenda ese aproprie da própria Matemática concebida como um conjunto de resultados, métodos, procedimentos, algoritmos, etc. (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 70).

Muito antes da Álgebra, técnicas da Aritmética eram usadas para solucionar problemas. Essas técnicas eram utilizadas para resolver equações, na maioria das vezes, respondendo às necessidades da época. De acordo com Baumgart (1992), a Álgebra inicia de uma forma retórica, passa a sincopada até chegar à álgebra simbólica que conhecemos hoje.

Em documentos antigos como o Papiro Rhind e Papiro de Moscou encontramos problemas que remetem às equações lineares. De acordo com Dorier (1990), os conceitos de equação já começaram a aparecer através de métodos aritméticos, sob uma forma retórica, dessa maneira, alguns problemas eram equacionados e resolvidos por métodos que remetem aos sistemas de equações lineares com uma, duas, ou três variáveis.

De acordo com Eves (2004), quando nos referimos à História da Matemática ocidental antiga, não podemos perceber uma expressiva utilização de sistemas de equações lineares. Esse assunto obteve maior relevância, no Oriente, pelos chineses, com seu gosto especial por diagramas. Dessa maneira, através da curiosidade chinesa, acabaram descobrindo um método de resolução por eliminação. Esse método consistia em anular coeficientes por meio de operações elementares. Os procedimentos podem ser encontrados na obra "Nove capítulos sobre a arte da matemática", provavelmente datado em 250 a.C.

Segundo Coulange (2000), podemos considerar que a aritmética, desenvolvida em civilizações antigas é, de alguma forma, uma pré-história da Álgebra, pois era sempre alimentazda com uma pré-álgebra, antes do advento da linguagem formal.

No quadro 1, apresentamos uma síntese histórica dos principais acontecimentos dos diferentes povos e suas diferentes culturas, com seus trabalhos relacionados com as equações lineares e sistemas de equações lineares. Essa abordagem foi sintetizada dos estudos de Collette (1986), no livro "História de las matemáticas" Coulange (2000), na obra "*Étude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique".* Boyer (2003), em sua "História da Matemática". Eves (2004), em sua "Introdução à História da Matemática" e Rosa e Orey (2013), no artigo Etnomatemática e modelagem: a análise de um problema retórico babilônio, em que tentamos elencar fatos históricos importantes para subsidiar este propósito.

Quadro 1 – Desenvolvimento Históricos dos Sistemas Lineares

Os Babilônicos	Os problemas babilônicos e suas resoluções expressavam-se em uma linguagem algébrica completamente retórica e já com um alto grau de desenvolvimento. Muitas vezes, os problemas faziam referências à vida cotidiana ou a questões de geometria: por exemplo, para calcular o comprimento e largura de um campo retangular, sabendo a sua superfície, etc. Portanto, muitos dos problemas poderiam ser resolvidos por sistemas de duas equações com duas incógnitas, geralmente uma equação linear da forma e uma equação quadrática como ou . Os povos da Mesopotâmia faziam uso de tabletes de argila para seus registros (figura 1). Em suas resoluções utilizavam-se do método da substituição e, outras vezes, usava-se mudanças de variáveis (ROSA; OREY, 2013; COULANGE, 2000).
Os Egípcios	Assim como os babilônios, os egípcios se interessavam em resolver problemas práticos, ou seja, problemas que eram ligados com sua vida cotidiana, por exemplo: em distribuição de pães e de grãos. A linguagem utilizada era essencialmente retórica. Outro ponto importante era sobre os problemas encontrados no Papiro Rhind e no Papiro Moscou, nos quais muitos deles eram relacionados com quantidades, sem qualificação, o que lhes dava certo grau de generalização. Alguns dos problemas do Papiro Rhind e Papiro Moscou (figuras 2 e 3), ocupavam-se de situações que consideraríamos como sendo hoje, típicas de serem equacionadas por equações lineares (COLLETTE, 1986).
Os Chineses	Um dos mais importantes textos dos chineses antigos é o K'iu-ch'ang Suan Shu ou Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática (figura 4), datado de 250 a.C., no qual já se discutia muitos problemas que remetem aos sistemas de equações lineares em duas variáveis, uma das quais aparece sempre com o coeficiente 1. . O método de resolução se assemelhava muito aoprocesso de eliminação por adição (BOYER, 2003; IVES, 2004).
Os Indianos	No trabalho intitulado de Ganita-Sara-Sangraha, provavelmente escrito por volta de 850 d.C., por Mahavira, encontravam-se muitos problemas que se reportavam a sistemas de várias equações com várias incógnitas. A resolução desses sistemas apresentava-se de forma essencialmente retórica. No entanto, pode ser encontrado algum tipo de símbolo, uma vez que nos problemas costumavam-se utilizar incógnitas com diferentes nomes e cores. Os métodos de resolução podem ser classificados como método de eliminação (EVES, 2004).

Os Gregos	O privilégio concedido à geometria na Grécia, de alguma forma, desviou o interesse dos matemáticos sobre as questões algébricas. No entanto,encontraram-se algumas abordagens referindo-se a problemas lineares geométricos, relacionadas com o cálculo de áreas, envolvendo quantidades diferentes, com valores desconhecidos que deveriam ser encontrados através da utilização de sistemas de equações (BOYER, 2003; EVES, 2004).
Os Árabes	A Matemática árabe desenvolveu-se fortemente desde o século VII. Bagdá se tornou um grande centro científico com muitas bibliotecas. Os árabes aproveitaram a herança grega e Oriental dos séculos VII e VIII e fizeram traduções de várias obras antigas. O livro de Abu Jafar Mohamed ibn Musa al-Khwarizmi (c.780 - c.850), Kitab al-Jabr wa-l-Muqabala (figura 5) trouxe precisas atividades sobre o “cálculo da al-jabr” (de onde derivou o termo álgebra). Este livro é essencialmente dedicado à resolução de problemas de heranças e outros problemas práticos da vida cotidiana da época. Em seu contexto, trazia uma linguagem totalmente retórica. Alguns problemas poderiam ser resolvidos utilizando equações de primeiro e segundo grau com coeficientes positivos. Podem-se encontrar métodos de resolução de problemas por sistemas de equações relacionadas com várias incógnitas, alguns de caráter indeterminado. (EVES, 2004).

Fonte: pesquisa dos autores.

A álgebra linear é um campo matemático que estuda em um de seus aspectosprincipais, os sistemas de equações lineares, conteúdo este fundamental no prosseguimento dagraduação, pois constitui uma parte da matemática da qual necessitam matemáticos, engenheiros, físicos e muitos outros. Assim podemos compreender a importância desta disciplina pelas suas múltiplas aplicações

Através da aplicação dos sistemas lineares podemos resolver problemas desde de os mais simples como um sistema de 1ºgrau até sistemas complexos que envolvem muitas equações na sua solução.

Neste capítulo será discutido sobre o ensino de Sistemas Lineares nos ensinos fundamental e médio, posteriormente será feita a análise de três livros didáticos utilizados no ensino de sistemas lineares no segundo e terceiro ano do ensino médio, além de serem apresentadas orientações que podem ser utilizadas em sala de aula, com o intuito de introduzir o conteúdo de Sistemas Lineares através das abordagens algébrica e geométrica. O ensino de Sistemas Lineares ocorre no nono ano do ensino fundamental e no segundo e terceiro ano do ensino médio, assim, será analisado seu ensino nesses três anos.

No Ensino Fundamental, os alunos do oitavo ano aprendem a resolver sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas utilizando os métodos da adição e da substituição, além de utilizar a representação gráfica para auxiliar na resolução e na classificação dos sistemas lineares.

Quando o professor vai trabalhar no segundo ano do ensino médio, com sistemas lineares, percebe que os alunos têm dificuldades em matemática básica e também não tem clareza sobre o que é uma equação linear, o que acaba dificultando a introdução do conteúdo. Esse desconhecimento prévio, que é um pré-requisito ao conteúdo a ser visto, acaba se configurando como um entrave na aprendizagem do aluno, para isto é preciso que o professor estabeleça uma sequência didática para facilita a compreensão dos alunos.

Como o próprio nome diz, a sequência didática, pode ser considerada como uma sequência, baseada em um conjunto de ações que são pensadas, estruturadas e seguidas, buscando alcançar determinados objetivos dentro da educação.

Para Zabala (1998, p. 18) a sequência didática define-se como "(...) um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos", sendo este o eixo norteador para esta pesquisa. O termo "sequência didática" é encontrado na área da educação matemática, primeiramente com os trabalhos do educador matemático francês Guy Brousseau, na Teoria das Situações didáticas.

Teixeira e Passos (2013, p. 164) apresentam que para Brousseau (1996): ISSN: 2316-2317 Revista Eletrônica Multidisciplinar - FACEAR 3 (...) a forma didática em que se assenta a estruturação de uma sequência didática possa influenciar o aluno, em relação aos significados, de modo que ele consiga interiorizar os conteúdos subjacentes, quando a situação didática lhe é apresentada, permitindo a intervenção preparada.

3 TAREFAS DE ATIVIDADES

Nesta parte do trabalho daremos enfoque às atividades trabalhadas na terceira fase, a aplicação de uma oficina de Resolução de Problemas. Aqui estão demonstrados a tarefa, seus objetivos, o procedimento, as possíveis dúvidas, os possíveis encaminhamentos, as possíveis resoluções e a proposta de sistematização.

3.1 TAREFA 1

Problema de sistema de duas variáveis com uma única solução.

Quadro 2 – Tarefa 1

Paguei R$ 75,00 por uma calça e uma blusa. A calça custou R$ 23,00 mais barato do que a blusa. Qual o preço da blusa?

Fonte: Autoria própria (2022).

3.1.1 Objetivos específicos

- Relembrar alguns conceitos de equações;
- Descobrir como os alunos trabalham em grupos;
- Descobrir se os alunos conseguem diferenciar variável de incógnita;

3.1.2 Procedimentos

- Será redigido na televisão o problema que os alunos devem resolver;
- Eles serão divididos grupos;
- Os alunos farão novamente a leitura nos grupos para iniciar a resolução, com os seus conhecimentos prévios;
- Passaremos nos grupos esclarecendo pequenas dúvidas e analisando as resoluções;
- A observar que a maioria dos grupos concluiu a tarefa, escolheremos alguns representantes para expor a resolução na lousa enquanto outros terminam;
- Faremos uma análise de todas as resoluções da lousa;
- Sistematizaremos sistema de equações com duas variáveis possível e determinado;
- E assim concluir a tarefa.

3.1.3 Possíveis dúvidas

- Interpretar o problema;
- Resolver o sistema;
- Verificar se a resolução é correta.

3.1.4 Possíveis encaminhamentos

No caso de o aluno não conseguir interpretar o problema, pedirei para que o aluno releia o problema, caso a dúvida persista perguntarei quais palavras do enunciado o aluno tem dúvida, e explicaremos, com ajuda do dicionário, o seu significado.

No caso de o aluno não conseguir resolver o sistema, pediremos para o aluno utilizar outra técnica, caso ainda assim não consiga, farei questionamentos que o induza a compreender o que é necessário para a resolução.

No caso de o aluno não conseguir verificar se a resolução está correta, pediremos para que o aluno substitua os valores calculados no lugar das incógnitas x e y.

3.1.5 Possíveis resoluções

$$C + B = 75 \quad C + B = 75$$
$$B - C = 23 \quad B - C = 23$$
$$2B = 98 \rightarrow B = 49$$
$$C + 49 = 75 \rightarrow C = 26$$

Construção da tabela de resolução:

Tabela 1 – Tabela de possíveis soluções para um SPD

C	B	$C + B$	$B - C$	Correto?
0	75	75	75	Errado
10	65	75	55	Errado
20	55	75	35	Errado

25	50	75	25	Errado
26	49	75	23	Correto

Fonte: Autoria própria (2022).

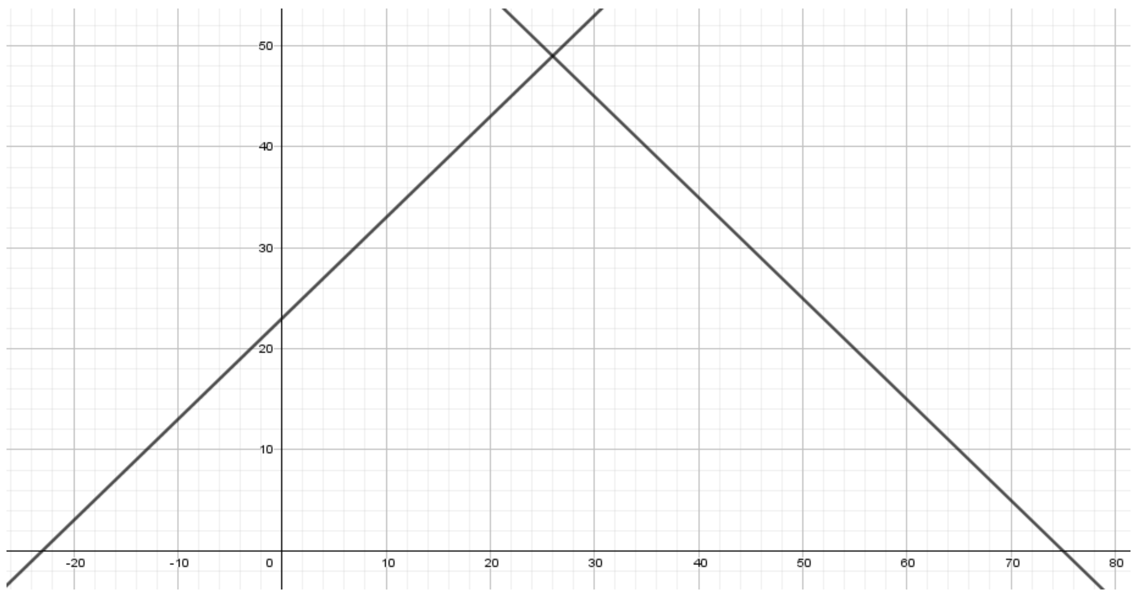
Geometricamente:

Se analisarmos as retas formadas pelas retas montadas pelo sistema e observar como ela se comporta, com algumas suposições podemos saber qual é o ponto onde as duas se cruzam e esta será a solução do sistema.

Supondo na primeira equação que $C = 0$ $C = 0$ temos $B = 75$ $B = 75$, quando $B = 0$ $B = 0$ temos $C = 75$ $C = 75$, com esses dois pontos podemos fazer a primeira reta.

Supondo na segunda equação que $C = 0$ $C = 0$ temos $B = 23$ $B = 23$, quando $B = 0$ $B = 0$ temos $C = -23$ $C = -23$, como não conseguimos uma interseção entre as duas retas, supomos então outro ponto e supondo $C = 30$ $C = 30$ temos $B = 53$ $B = 53$, assim, completando o segundo segmento de reta conseguimos uma intersecção entre elas e descobrimos qual é a solução do sistema.

Quadro 3 – Resolução geométrica de um SPD



Fonte: Autoria própria (2022).

3.1.6 Proposta de sistematização

Um sistema de equações lineares $2x2$ com coeficientes reais é um conjunto de duas equações lineares reais, cada uma com as duas mesmas incógnitas x e y.

Uma solução de um sistema linear $2x2$ com coeficientes reais a_1, b_1, a_2·,b_2, c_1 e c_2

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

É um par (x_1 ,y_1) $\in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas x_1, $y_1 \in \mathbb{R}$ e satisfazem ambas as equações.

O sistema se diz possível e determinado quando admite uma única solução. Cada equação tem como soluções os valores encontrados para as incógnitas x e y, quando fazemos a conexão com a geometria as incógnitas são as coordenadas (x, y) dos pontos de uma reta, demodo que o sistema determinado, conforme as retas r_1 e r_2, representadas pelas duas equações,coincidam (DANTE, 2003).

3.2 TAREFA 2

Problema de sistema de duas variáveis com infinitas soluções.

Quadro 4 – Tarefa 2

Joana comprou uma borracha e dois lápis e pagou R$ 3,50. Marcos comprou 4 borrachas e 8 lápis e pagou quatro vezes mais que Joana. Quanto custou cada borracha e cada lápis?

Fonte: Autoria própria (2022).

3.2.1 Objetivos específicos

- Relembrar alguns conceitos de equações;
- Descobrir como os alunos trabalham em grupos;
- Descobrir se os alunos conseguem diferenciar variável de incógnita;

3.2.2 Procedimentos

Seguirão os procedimentos presentes no tópico 3.1.2.

3.2.3 Possíveis dúvidas

- Interpretar o problema;
- Resolver o sistema;
- Verificar se a resolução é correta.

3.2.4 Possíveis encaminhamentos

Os possíveis encaminhamentos seguirão o tópico 3.1.4.

3.2.5 Possíveis resoluções

1) $B + 2L = 3{,}50$

$4B + 8L = 14{,}00$

Isolando o L na primeira equação obtemos: $B = 3{,}50 - 2L$.

Isolando o L na segunda equação obtemos: $4B = 14{,}00 - 8L \Rightarrow B = 3{,}50 - 2L$.

Logo, o sistema possui infinitas soluções.

2) Construir a tabela de resolução:

Tabela 2 - Tabela de possíveis soluções para um SPI

B	L	$B + 2L$	Correto?
3,50	0,00	3,50	SIM
0,00	1,75	3,50	SIM
1,50	1,00	3,50	SIM
0,50	1,50	3,50	SIM
1,00	1,25	3,50	SIM

Fonte: Autoria própria (2022).

Possuindo infinitas soluções.

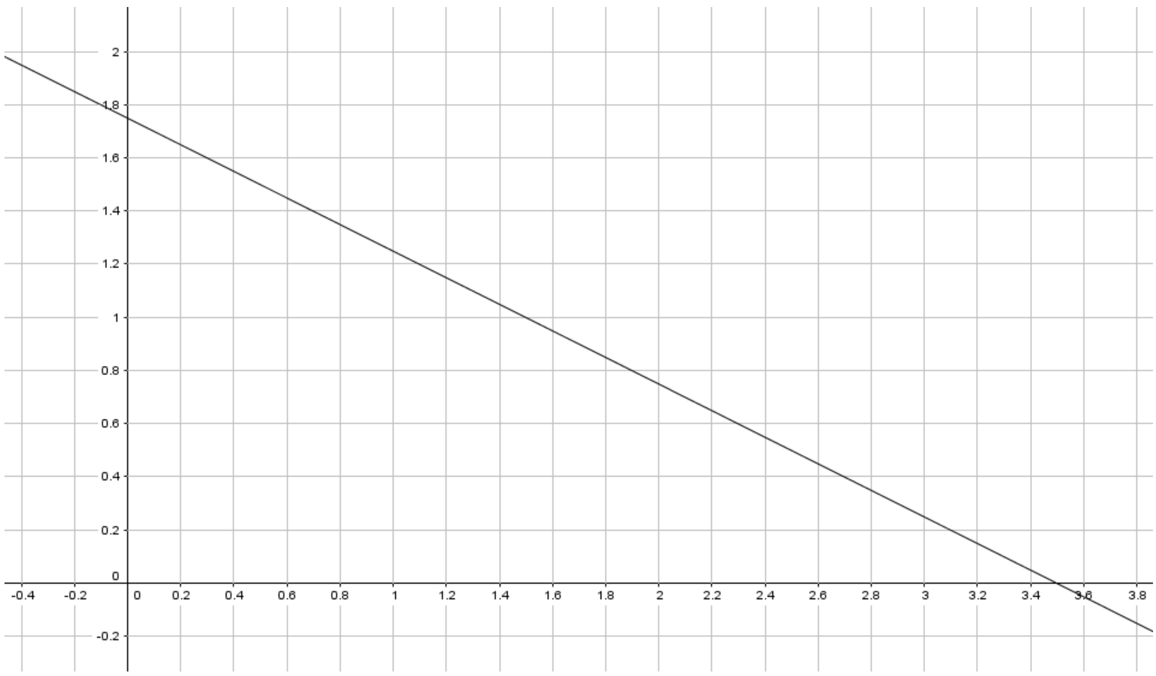
3) Geometricamente:

Se analisarmos as retas oriundas das equações do sistema e observarmos como elas se comportam, com algumas suposições, podemos saber qual é o ponto onde as duas retas se cruzam e esta será a solução do sistema.

Supondo na primeira equação que $B = 3{,}50 \quad C = \mathbf{0}$ temos $L = \mathbf{0}$, quando $B = \mathbf{0}$ temos $L = 1{,}75$, com esses dois pontos podemos traçar a primeira reta.

Supondo na segunda equação que $B = 1{,}50$ temos $L = 1{,}00$, quando $B = 1{,}00$ temos $L = 1{,}25$, conseguimos então uma infinidade de interseções entre as duas retas e, assim, descobrimos a solução do sistema, ou seja, que as retas são coincidentes.

Quadro 5 – Resolução Geométrica de um SPI



Fonte: Autoria própria (2022).

3.2.6 Sistematização

Um sistema de equações lineares $2x2$ com coeficientes reais é um conjunto de duas equações lineares reais, cada uma com as duas mesmas incógnitas x e y.

Uma solução de um sistema linear $2x2$ com coeficientes reais a_1, b_1, a_2, b_2, c_1 e c_2.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

É um par $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ e satisfazem ambas as equações.

O sistema se diz possível e indeterminado quando admite infinitas soluções. Cada equação tem como soluções os valores encontrados para as incógnitas x e y, quando fazemos a conexão com a geometria as incógnitas são as coordenadas (x, y) dos pontos de uma reta, demodo que o sistema possível e indeterminado, conforme as retas r_1 e r_2, representadas pelas duas equações, se sobrepõem, sendo elas coincidentes (DANTE, 2015).

3.3 TAREFA 3

Problema de sistema de duas variáveis sem solução.

Quadro 6 – Tarefa 3

João foi ao mercado e comprou 2L de leite e um pacote de bolacha e pagou R$ 5,50. Maria foi nesse mesmo mercado e compro 4L de leite e dois pacotes de bolacha e pagou R$ 9,00. Qual o preço do pacote de bolacha?

Fonte: Autoria própria (2022).

3.3.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Relembrar alguns conceitos de equações;
- Descobrir como os alunos trabalham em grupos;
- Descobrir se os alunos conseguem diferenciar variável de incógnita.

3.3.2 Procedimentos

Seguirão os procedimentos presente no tópico 3.1.2.

3.3.3 Possíveis dúvidas

- Interpretar o problema;
- Resolver o sistema;
- Verificar se a resolução é correta.

3.3.4 Possíveis encaminhamentos

Os possíveis encaminhamentos seguirão o tópico 3.1.4.

3.3.5 Possíveis resoluções

1)
$$2L + B = 5{,}50$$
$$4L + 2B = 9{,}00$$

Ao resolver o sistema notamos que é impossível, logo não existe uma solução.

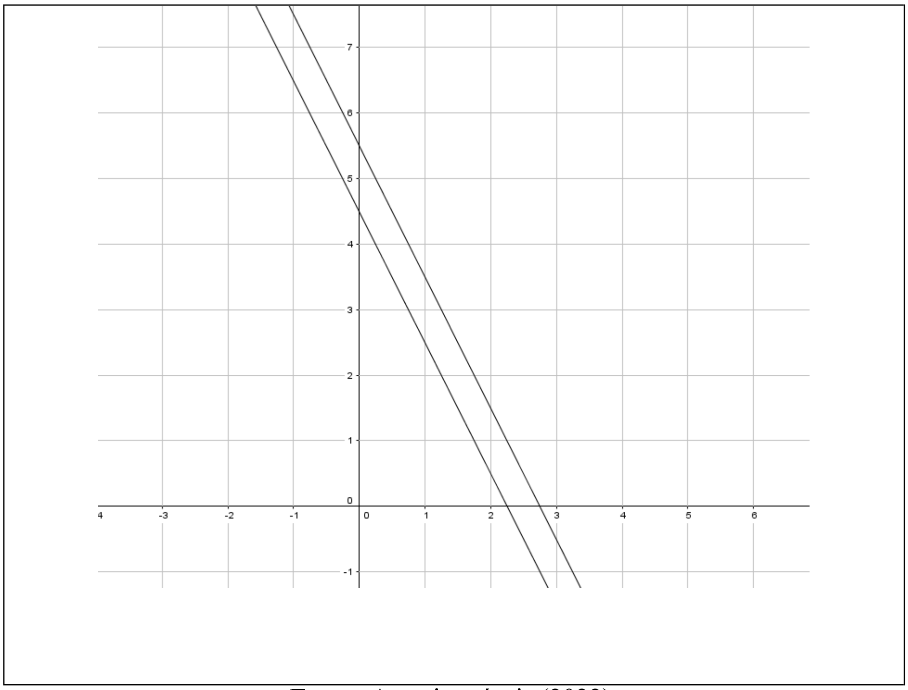
2) Geometricamente:

Se analisarmos as retas oriundas das equações do sistema e observarmos como elas se comportam, com algumas suposições podemos saber qual é o ponto onde as duas retas se cruzam e esta será a solução do sistema.

Supondo na primeira equação que $L = 2{,}75$ temos $B = 0{,}00$, quando $L = 0{,}00$ temos $B = 5{,}50$, com esses dois pontos podemos traçar a primeira reta.

Supondo na segunda equação que $L = 2{,}25$ temos $B = 0{,}00$, quando $L = 0{,}00$ temos $B = 4{,}50$, conseguimos então nenhuma interseção entre as duas retas e, assim, descobrimos que solução do sistema é inexistente, ou seja, as retas são paralelas.

Quadro 7 – Resolução Geométrica de um SI



Fonte: Autoria própria (2022).

3.3.6 Sistematização

Um sistema de equações lineares $2x2$ com coeficientes reais é um conjunto de duas equações lineares reais, cada uma com as duas mesmas incógnitas x e y.

Uma solução de um sistema linear $2x2$ com coeficientes reais a_1, b_1, a_2, b_2, c_1 e c_2.

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

É um par $(x1, y1)$ ϵ R² cujas coordenadas $x1, y1$ ϵ R e satisfazem ambas as equações.

O sistema se diz possível indeterminado quando não admite solução. Cada equação tem como soluções os valores encontrados para as incógnitas x e y, quando fazemos a conexão com a geometria as incógnitas são as coordenadas (x, y) dos pontos de uma reta, de modo que o sistema é impossível, conforme as retas r_1 e r_2 representadas pelas duas equações, nunca se encontram, ou seja, são paralelas (DANTE, 2003).

4 DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE

O trabalho foi dividido em três fases, sendo a primeira a retomada de conteúdo, a segunda uma oficina de GeoGebra e a terceira a realização de uma oficina de Resolução de Problemas. Aqui, trabalharei como foi o desenvolvimento das atividades da terceira fase, contando com um tempo total de 90 minutos.

4.1 TAREFA 1

Assim que entreguei a tarefa 1 para toda a turma, fiz uma leitura em conjunto. Ao final, perguntei aos alunos se eles tinham alguma dificuldade na interpretação. Como os alunos responderam que não, a turma começou a resolver o problema. Esperei um tempo, cerca de um minuto, para andar de grupo em grupo para acompanhar as resoluções, assim daria tempo de os grupos pensarem em uma maneira de resolver o problema.

Ao passar pelos grupos, notei que os alunos estavam com dificuldades para montar o sistema, eles estavam tentando resolver como se fossem duas equações distintas e as igualando, complicando um pouco a resolução. No entanto, esse fato serviu para perceber que os alunos sabiam montar a equação, mas estavam tendo dificuldades para estabelecer a relação do enunciado com o sistema de equação e, assim, resolver o sistema. Com alguns questionamentos como “É possível estabelecer uma relação entre essas duas equações? Como?”, “As duas equações são lineares, será que existe alguma forma de estabelecer uma comparação entre elas?” e “Existe algum meio matemático que me permite relacionar duas equações?”, um aluno disse “Nossa, podemos utilizar sistema para resolver”. Desse modo, o aluno conseguiu chegar ao objetivo da tarefa e, por ele dizer isso um pouco alto, outros alunos ouviram e começaram a utilizar o sistema para resolver a tarefa. Porém, mesmo os outros alunos sabendo que era para ser utilizado o sistema, eles estavam errando na hora de fazer substituição ou adição, errando em contas básicas, o que contribuiu para que dois grupos demorassem para terminar o problema. Mesmo eles demorando para terminar, já havia pedido para que dois grupos fossem ao quadro para passar a sua resolução e, com isso, iniciar as discussões.

Com a tarefa no quadro, os alunos explicaram o que haviam feito. A partir disso, fiz alguns questionamentos para os alunos e eles aparentavam não ter nenhuma dúvida. Assim, passei a sistematização e fiz um paralelo entre a resolução deles e a minha sistematização. Após passarmos a sistematização e a ler, partimos para a parte geométrica, criando uma relação entre o que eles haviam feito no papel com algo mais visual. Utilizando o *GeoGebra*, os alunos notaram que as retas só teriam um ponto de intersecção, ou seja, apenas uma solução, sendo assim um sistema possível e determinado.

Figura 1 – Resolução da tarefa 1 do grupo 1

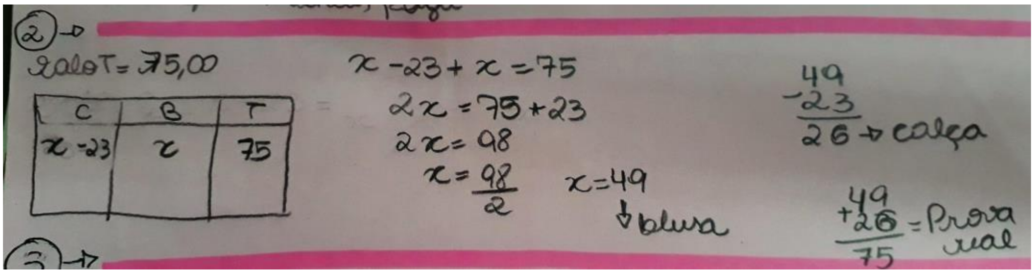


Figura 2 – Resolução da tarefa 1 do grupo 2

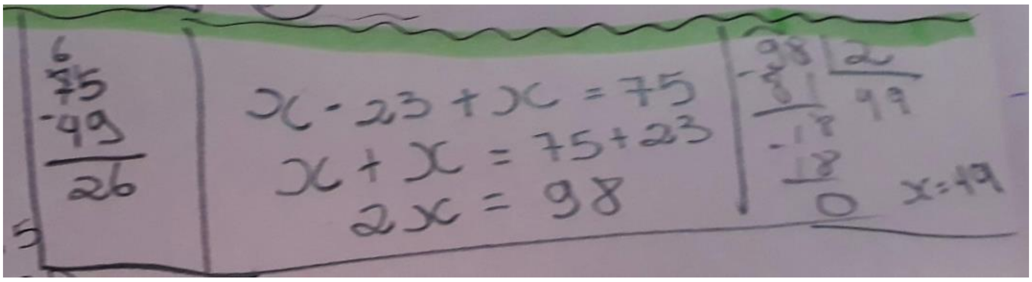


Figura 3 – Resolução da tarefa 1 do grupo 3

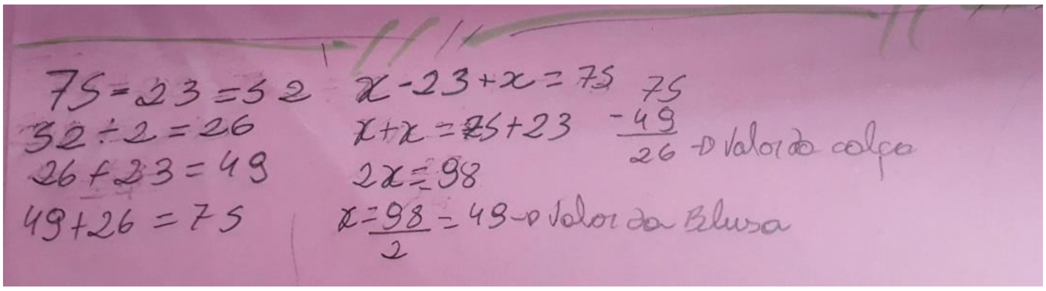
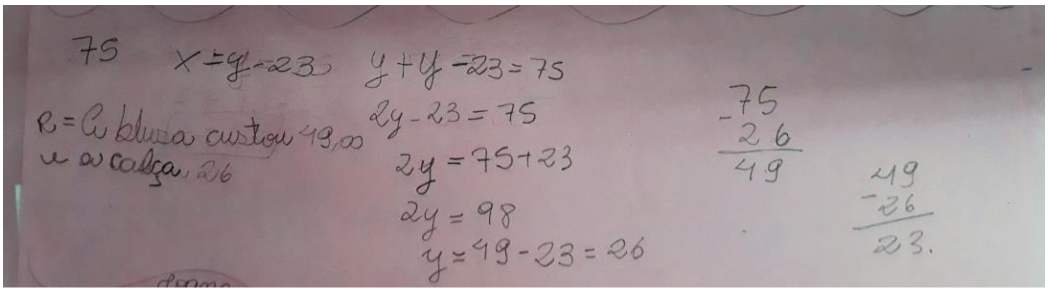


Figura 4 – Resolução da tarefa 1 do grupo 4



4.2 TAREFA 2

Assim que entreguei a tarefa 2 para toda a turma, fiz uma leitura em conjunto. No final, perguntei aos alunos se eles tinham alguma dificuldade na interpretação, como os alunos responderam que não, a turma começou a resolver o problema. Esperei um tempo, cerca de um minuto, para andar de grupo em grupo e acompanhar as resoluções, assim daria tempo para os grupos pensarem em uma maneira de resolver o problema.

Ao passar pelos grupos, notei que os alunos já estavam utilizando sistemas para resolver o sistema, não tivemos problemas nessa etapa, o que já foi um alívio para mim. Isso mostrou que os alunos sabiam utilizar essa ferramenta para a resolução da tarefa, o único problema foi que, por se tratar de um sistema com infinitas soluções, os alunos achavam que estavam errados, já que membros distintos dos grupos chegavam em também distintos resultados. Os alunos sempre questionavam com perguntas como “A borracha é grátis?”, “O lápis é grátis?”, “Professor, não vai, tá sempre dando diferente” e “Essa questão tem quantas respostas?”. Por um lado, era um pouco divertido ver que eles estavam certos, mas eles queriam apenas uma solução e o sistema possui infinitas. Entretanto, bem sabe-se que a resposta para a solução tem um determinado espaço, já que os produtos não podem ter valor negativo, pois se trata de um problema da vida real e, dessa forma, não existe item com preço negativo, ou seja, ninguém lhe dá dinheiro ao comprar um produto em uma loja. Em relação aos questionamentos dos alunos, tentei mostrar que não havia apenas uma solução, sempre perguntava para os membros do grupo os valores que eles haviam encontrado e pedia para que eles fizessem a prova real, para ver se aquilo que eles haviam encontrado estava certo e, em todas as vezes, estavam certos. Feito isso, pedi para que dois grupos, com resoluções distintas, fossem ao quadro, e assim foi feito.

Já com as tarefas no quadro, pedimos para que os alunos explicassem o que eles haviam feito. Após os grupos explicarem, perguntamos se os alunos tinham chego a outras respostas e eles afirmaram que chegaram. Assim, explicamos que o sistema possui infinitas soluções e passamos a sistematização para eles, foi realizado a leitura e estabelecemos a relaçãocom o que eles haviam passado no quadro, perguntamos se havia alguma dúvida e eles afirmaram não haver. Então, partimos para mostrar a representação gráfica, fizemos as suposições, pegamos dois pontos da primeira equação do sistema e fizemos a primeira reta. De maneira semelhante, procedemos conforme a segunda equação do sistema e, ao *plotarmos* no *GeoGebra*, os alunos viram que as retas são coincidentes, ou seja, têm infinitos pontos em comum, assim como a solução para o sistema.

Figura 5 – Resolução da tarefa 2 do grupo 1

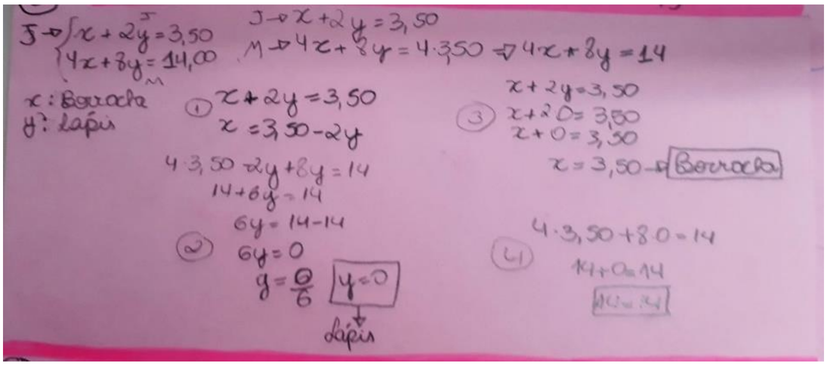
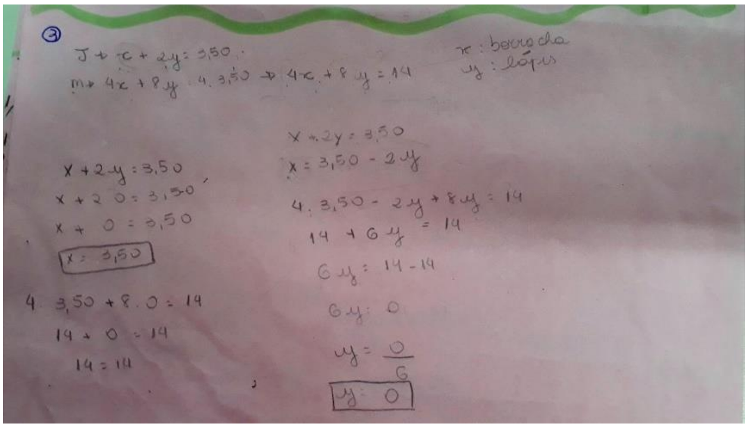


Figura 6 – Resolução da tarefa 2 do grupo 2



4.3 TAREFA 3

Assim que entreguei a tarefa 3 para toda a turma, algo engraçado aconteceu. Uma menina de um dos grupos soltou a seguinte frase: “Esse sistema não vai ter solução”. Fiquei olhando, questionei o motivo de ela dizer isso e ela simplesmente respondeu “Um exercício tinha uma solução, outro tinha infinitas, então acho que esse não vai ter nenhuma”. Ri um pouco com a sala e seguimos com o planejamento normal, fiz uma leitura em conjunto, ao final perguntei aos alunos se eles tinham alguma dificuldade na interpretação e, como os alunos responderam que não, a turma começou a resolver o problema. Esperei um tempo, cerca de um minuto, para andar de grupo em grupo e acompanhar as resoluções, assim daria tempo de os grupos pensarem em uma maneira de resolver o problema.

Quando comecei a passar pelos grupos, notei que os alunos estavam resolvendo o sistema, porém, por se tratar de um sistema impossível, em que não há solução, os alunos tentavam achar uma solução e não conseguiam. Eles falavam: “Professor, isso aqui tá errado, não tá dando certo”. Ao questionar o motivo, eles respondiam que “Não tem resposta!”. Enfim, ao indagar o motivo de tal afirmação, eles mostravam que não era possível resolver o sistema. Dessa forma, eles foram percebendo que o que a colega havia dito estava certo, esse era um sistema sem solução. Logo quando alguns grupos notaram isso, percebi que era a hora de pedir pra um grupo ir ao quadro e apresentar o que eles haviam feito.

Com a resolução da tarefa no quadro, pedi para que o aluno explicasse o que seu grupo havia feito, assim, foi dito que não haveria uma solução para o sistema, já que era um sistema impossível. Feito isso, passamos a sistematização para eles e estabelecemos a relação entre o que estava no quadro com a sistematização. Com isso em mente, partimos para utilização do *GeoGebra*, primeiro colocamos os pontos da primeira função e fizemos uma reta, em seguida, a mesma coisa foi feita com a segunda equação. Ao *plotarmos* o gráfico, percebemos que as retas não se encontravam, ou seja, elas são paralelas.

Figura 7 – Resolução da tarefa 3 do grupo 2

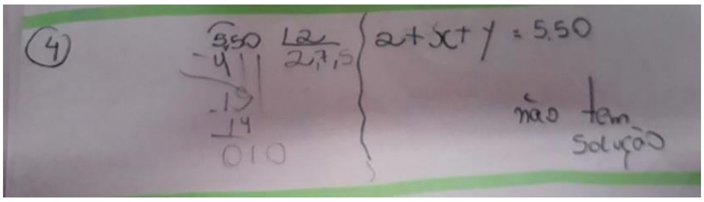
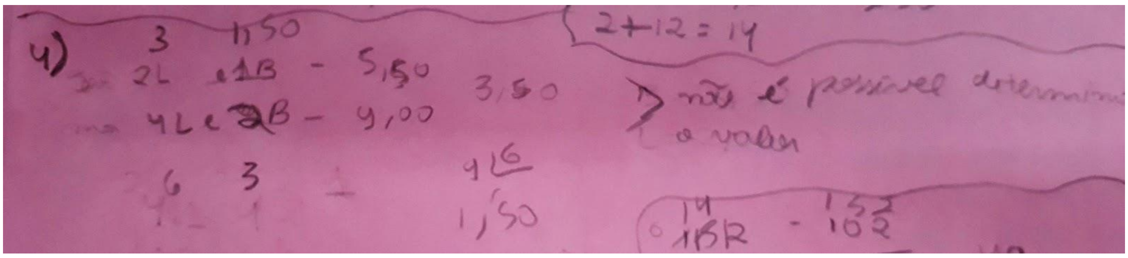


Figura 8 – Resolução da tarefa 3 do grupo 4



5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os conteúdos de matemática ensinados no Ensino Médio muitas vezes são abordados de forma isolada ou com simplicidade excessiva e muitas vezes de forma não adequada para o nível dos alunos.

Esta forma de ministrar os conteúdos faz com que se perca a beleza e riqueza que os temas podem oferecer. Com a abordagem proposta, espera-se que o aluno seja capaz de constatar que os conteúdos estão interligados. Partindo da problemática da resolução de um problema que é transformado em um sistema de equações, espera-se que o aluno(a) reconheça que há diversas possibilidades de encontrar a solução.

Quando introduzimos alguma metodologia tecnológica, consegue-se ampliar a capacidade do aluno de poder elaborar a sua forma de analisar e compreender o problema. Este estudo procurou aplicar essa ordem de conteúdo em uma turma do Ensino Médio, buscando o equilíbrio entre o nível que devesse abordar, de forma que não prejudique a aprendizagem, mas que não se subestime a capacidade dos alunos em aprender o tema em um nível mais aprofundado.

REFERÊNCIAS

ANJOS, C. I.; SARAIVA, M. R. O. Crianças, sociabilidades e tecnologias digitais: contribuições para pensar a (s) infância (s) no mundo contemporâneo. In: BAIRRAL, M.; CARVALHO, M. **Dispositivos móveis no ensino de matemática:** tablets & smartphones. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.

BAUMGART, J. K. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula.** Trad. Hygino Hugueros Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação.** Porto: Porto, 1994.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Bencher Ltda, 2003.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, n. 2, p. 177-229, 1990.

COLLETTE, J-P. **Historia de las matemáticas.** Traducción Pilar González Gayoso. México: Siglo Veintiuno Editores, 1986.

COULANGE, L. **Étude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique.** Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de troisième. 2000. Tese (Doutorado em Didática de Matemática) – Universidade Joseph Fourier, Grenoble, 2000.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto e aplicações. 1. ed. São Paulo: Ática, 2003.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris:** matemática ensino fundamental 2. São Paulo: Ática, 2015.

DORIER, J.-L. **Contribution à l'Étude de l'Enseignement à l'Université des Premiers Concepts d'Algèbre Linéaire. Approches Historique et Didactique.** 1990. Tese (Doutorado em Didática de Matemática) – Universidade Joseph Fourier, Grenoble, 1990.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Trad. Hygino Hugueros Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

FREITAS, I. M. Resolução de sistemas lineares parametrizados e seu significado para o aluno. 1999. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1999.

HATFIELD, L. L. Heuristical emphasis in the instrution of mathematical problem solving: Rationales and research. In: HATFIELD, L. L.; BRADBARD, D. A. (orgs). **Mathematical Problem Solving:** papers from a research workshop. Colombus: ERIC, 1978.

KLINE, M. **O Fracasso da Matemática Moderna.** São Paulo: IBRASA, 1976.

LAMBDIN, D. V.; WALCOTT, C. Changes Through the Years: Connections between Psychological Learning Theories and the School Mathematics Curriculum. In: MARTIN, W. G. (Ed.). **The Learning of Mathematics.** Reston: NCTM, 2007. p. 2-25.

MALTEMPI, M. V. **Novas Tecnologias e Construção de Conhecimento: Reflexões e perspectivas.** In: V Congresso Ibero-americano de Educação Matemática (CIBEM), 2005, Porto. CD-ROM, 2005.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática:** propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MIORIM, M. A.; MIGUEL, A.; FIORENTINI, D. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Zetetiké**, São Paulo, n. 1, p. 19-39, 1993.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Ed. Interciência, 1978.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POWELL, A. B. Preenchendo lacunas: pesquisas sobre dispositivos móveis na Educação Matemático. In: BAIRRAL, M.; CARVALHO, M. **Dispositivos móveis no ensino de matemática:** tablets & smartphones. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.

ROSA, M.; OREY, D. C. Etnomatemática e modelagem: a análise de um problema retórico babilônio. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, v. 6, n. 3, p. 80-103, 2013.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing understanding in maathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Orgs.). **New directions for elementary school mathematics.** Reston: NCTM, 1989. p. 31-42.

SOARES, F. dos S. A divulgação da matemática moderna na imprensa periódica. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2005, Porto. **Anais...** Porto, Portugal: Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2005.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas. **Zetetiké**, Campinas, v. 21, n. 39, 2013.

ZABALA, A. **A prática educativa.** Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

APÊNDICE – PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Caio Luiz Escobar dos Santos
Leonardo Sturion

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES

SOLVING PROBLEMS IN HIGH SCHOOL THROUGH LINEAR SYSTEMS WITH THE HELP OF GEO GEBRA

Produto Educacional apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, do Programa de Pós-graduação em Matemática - PPGMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR.

Orientador: Prof. Dr. Leonardo Sturion

Londrina
2023
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

CAIO LUIZ ESCOBAR DOS SANTOS

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO MÉDIO, ATRAVÉS DE SISTEMAS LINEARESCOM O AUXÍLIO DO GEO GEBRA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 30 de Maio de 2023

Dr. Leonardo Sturion, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Alireza Mohebi Ashtiani, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Rogerio Mendonca Martins, Doutorado - Universidade Estadual do Norte do Paraná (Uenp)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 03/07/2023.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este produto educacional gerado nesta pesquisa tem como objetivo principal: Levantar as principais dificuldades encontradas pelos alunos na resolução e interpretação gráfica de equações de sistemas lineares.

Este trabalho tem com motivação as atividades do autor com alunos das escolas públicas do ensino médio que o autor trabalha como docente.

A principal justificativa do trabalho pautou-se em estudos que mostravam que os alunos do Ensino Médio apresentam grandes dificuldades de resolver e interpretar sistemas lineares e trabalhar com polinômios algébricos, segundo Freitas (1999).

Observo que as razões das dificuldades dos alunos na interpretação dos resultados obtidos após a aplicação de um método de resolução a um sistema linear podem estar ligadas ao fato de que, métodos de resolução se reduzem a um algoritmo, enquanto que a interpretação dos resultados obtidos exige articulação entre diversos conceitos, que podem envolver diferentes quadros e registros de representação. Assim, as soluções de um sistema linear podem ser relacionadas, por exemplo, a pontos, retas e planos, o que permite se passar de uma manipulação algébrica a uma ilustração gráfica em dimensão 2 ou 3 (FREITAS, 1999, p. 24).

> Observo que as razões das dificuldades dos alunos na interpretação dos resultados obtidos após a aplicação de um método de resolução a um sistema linear podem estar ligadas ao fato de que, métodos de resolução se reduzem a um algoritmo, enquanto que a interpretação dos resultados obtidos exige articulação entre diversos conceitos, que podem envolver diferentes quadros e registros de representação. Assim, as soluções de um sistema linear podem ser relacionadas, por exemplo, a pontos, retas e planos, o que permite se passar de uma manipulação algébrica a uma ilustração gráfica em dimensão 2 ou 3 (FREITAS, 1999, p. 24).

Vamos ao encontro de Chervel (1990) quando destaca a relevância de situarmos historicamente um conteúdo escolar, descrevendo a sua evolução, quais as mudanças ocorridas em um determinado período e sempre estabelecendo ligações com o seu ensino e suas finalidades. Cabe-lhe dar uma descrição detalhada do ensino em cada uma de suas etapas, descrever a evolução da didática, pesquisar as razões da mudança, revelar a coerência interna dos diferentes procedimentos aos quais se apela, e estabelecer a ligação entre o ensino dispensado e as finalidades que presidem a seu exercício.

> Consideramos importante realizar um estudo histórico sobre sistemas de equações lineares, entendendo que, dessa forma, seria permitida uma melhor identificação de sua natureza epistemológica. Os vínculos de tipo epistemológico foram assim denominados por sugerirem que a finalidade da educação matemática é fazer com que

> o estudante compreenda e se aproprie da própria Matemática concebida como um conjunto de resultados, métodos, procedimentos, algoritmos, etc. (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 70).

PRIMEIRA ETAPA – RETOMADA DE CONTEÚDOS

Nesta etapa os alunos irão retomar os conteúdos que serão necessários para a realização da oficina de Resolução de Problemas, aqui darei o exemplo de como dar sequência a uma atividade que irá retomar os conceitos de equação do primeiro grau com uma incógnita, conteúdo de extrema importância.

Após a realização da primeira situação problema, podemos também trabalhar com questões dentro de contexto para os alunos, mas nada impede que sejam trabalhadas com exercícios de fixação para os alunos.

SITUAÇÃO PROBLEMA

Jorge e Matheus foram a um restaurante. Na hora de pagar a conta, eles decidiram dividi-la assim: Jorge pagaria o dobro do que Matheus pagasse. O valor da conta foi de R$27,00. Quanto cada um deve pagar?

Fonte: adaptado de Dante (2015, p. 116).

Temos por objetivo com essa tarefa formalizar equação de primeiro grau com uma incógnita.

<u>Possíveis resoluções corretas:</u>

Quadro com alguns possíveis resultados:

Valores a serem pagos por Jorge e Matheus:	Valor total a ser pago:
17 + 8,50	25,50
18 + 9	27
19 + 9,50	28,50

Logo, o valor a ser pago por Jorge e Matheus será 18 e 9,50 reais, respectivamente. Pois, assim, Jorge pagará o dobro de Matheus e o total a ser pago será R$ 27,00.

$$2x + x\ 27$$

$$3x = 27$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{27}{3}$$

$$x = 9$$

Assim, Jorge pagará R$ 18,00 e Matheus R$ 9,00.

Possíveis resoluções incorretas:

$x + x = 27$

$2x = 27$

$x = \frac{27}{2}$

$x = 13{,}5$

Assim, Jorge irá pagar R$ 13,50 e Matheus R$ 13,50

2. $x + x = 27$

$2x = 27$

$x = 54$

Os dois pagarão R$ 54,00, no total.

Possíveis encaminhamentos:

Em relação às resoluções corretas pediremos aos alunos que expliquem seus procedimentos com o intuito de que possamos identificar como fizeram para resolver o problema.

Apresentamos a seguir possíveis encaminhamentos de como iremos agir diante das possíveis resoluções incorretas, apresentadas anteriormente.

No caso da primeira resolução incorreta falaremos para o aluno ler novamente o enunciado com mais cuidado e entender o que se pede, deste modo tentaremos fazer o aluno notar que o valor de um será diferente do outro, perguntando também se R$ 13,50 é o dobro de R$ 13,50 considerando que Jorge pagará o dobro de Matheus.

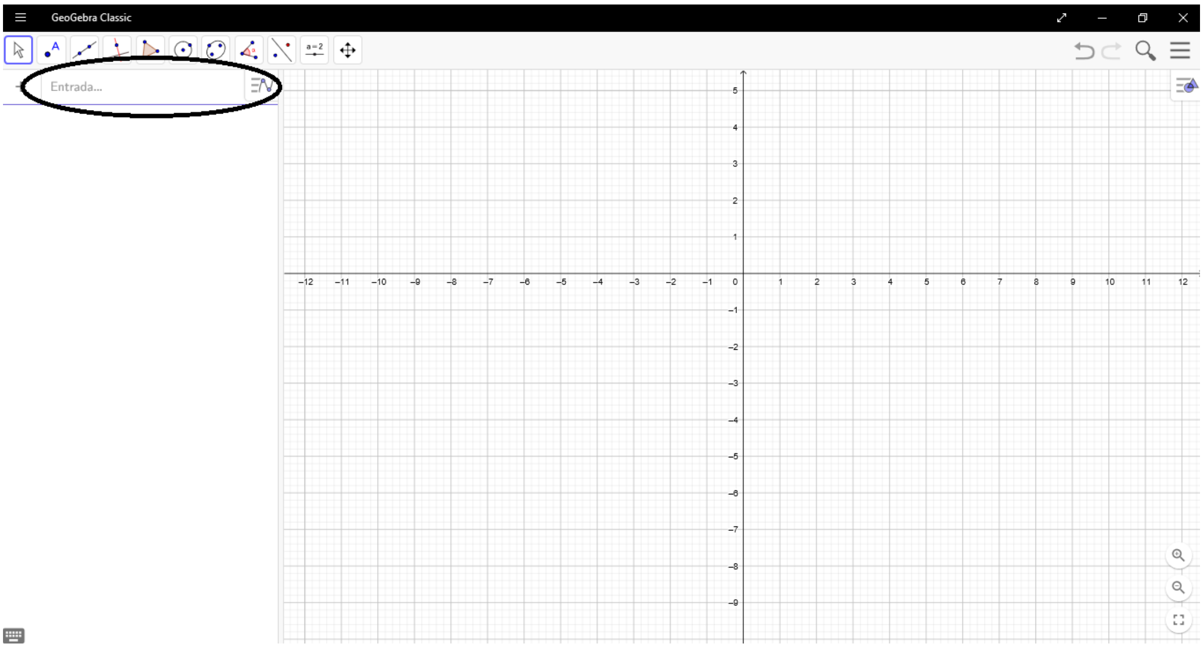
No caso da segunda resolução, faremos com que o aluno note, através de questionamentos, que o valor da conta não se alterará e sim o valor entre as pessoas. Perguntaremos ao aluno se o valor total a ser pago já está definido de alguma forma ou se ele ainda é desconhecido. Se o aluno continuar com a dificuldade de compreender o fato que o valor total é fixo, pediremos para ele ler o enunciado novamente com cuidado, auxiliando a interpretar o valor total a ser pago.

SEGUNDA ETAPA – OFICINA DE GEOGEBRA

Nesta etapa os alunos tiveram o contato com o *Software GeoGebra*, nela os estudantes foram apresentados a alguns comandos que julguei necessários para o andamento da oficina de Resolução de Problemas, por exemplo: Adicionar dados no leitor, alteração de cor na reta e Interseção de dois objetos.

No primeiro momento deixei com que os estudantes mexessem no software para conhecerem e se adaptarem ao software, na aula optei por os alunos utilizassem o software primeiramente no celular, para após irmos ao computador, pois os softwares para o celular tanto quanto no computador os comandos são idênticos, assim, neste momento optei para que os alunos fizessem algumas funções, tendo em vista sempre que iriamos trabalhar com equações do primeiro grau, de modo que, conseguíssemos estabelecer conexões durante a oficina.

Os dados são inseridos na parte descrita como "Entrada", circulada na imagem abaixo. Aqui serão inseridas as equações pelos alunos.

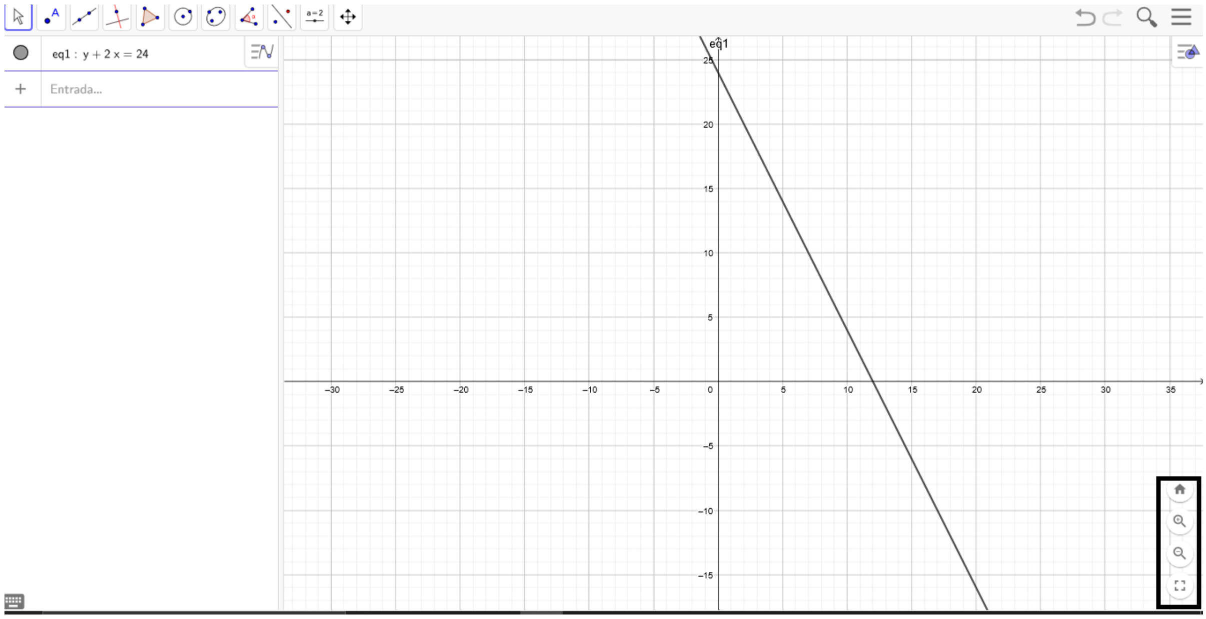


Caso a equação fique muito distante, no canto inferior direito temos alguns comandos para facilitar a localização da função, iremos focar nos três primeiros:

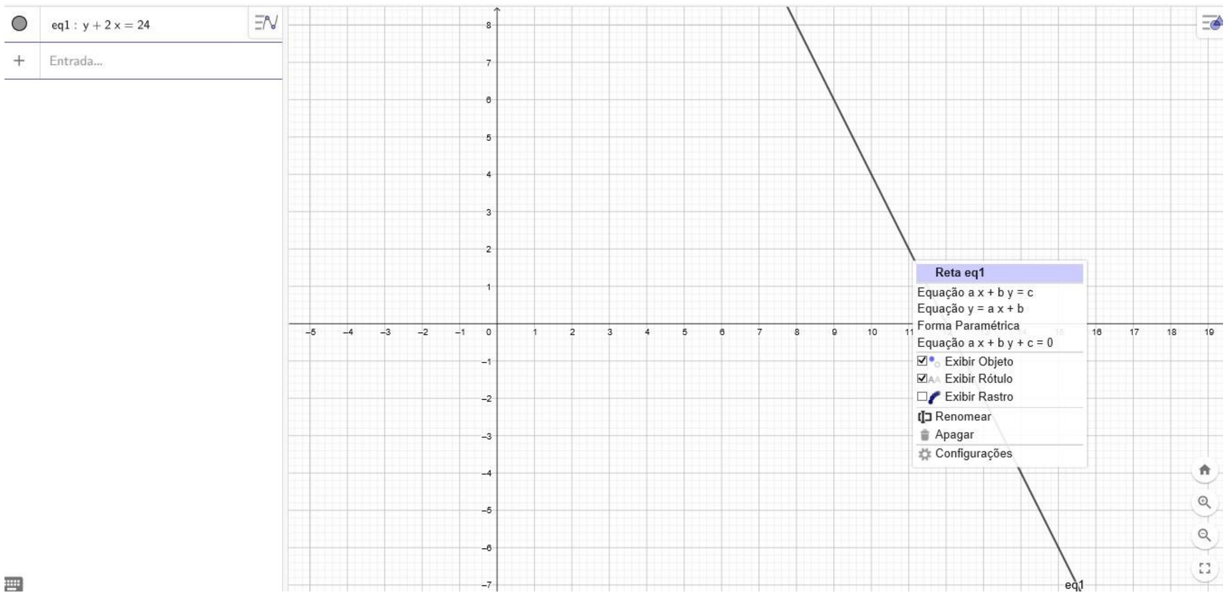
1º O primeiro representado pelo símbolo de uma casinha: ele faz com que o GeoGebra retorne a sua origem (0,0);

2º Zoom +: aproxima a imagem;

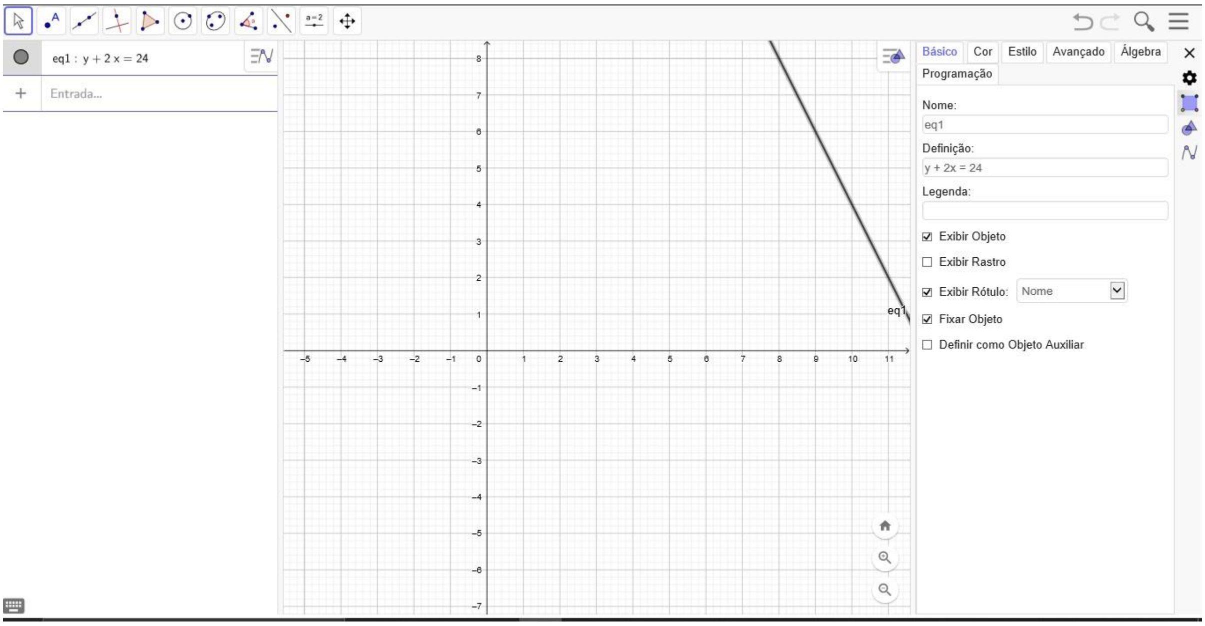
3º Zoom –: afasta a imagem.



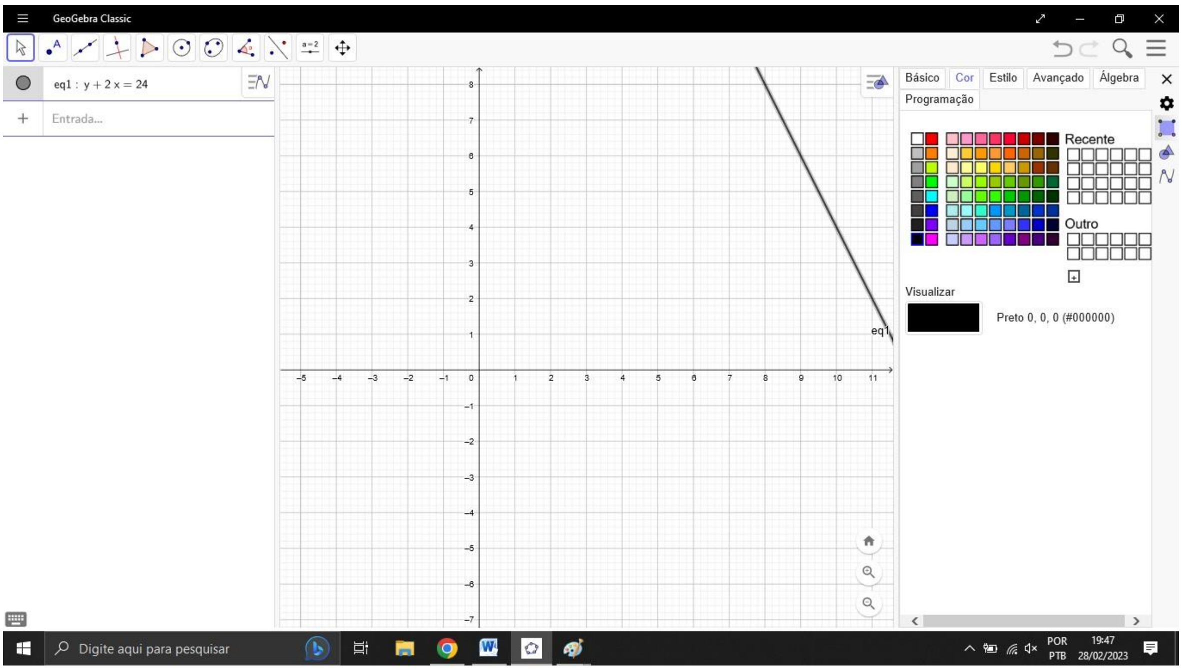
Clicando com o botão direito do mouse sobre a função teremos algumas informações acerca da mesma.



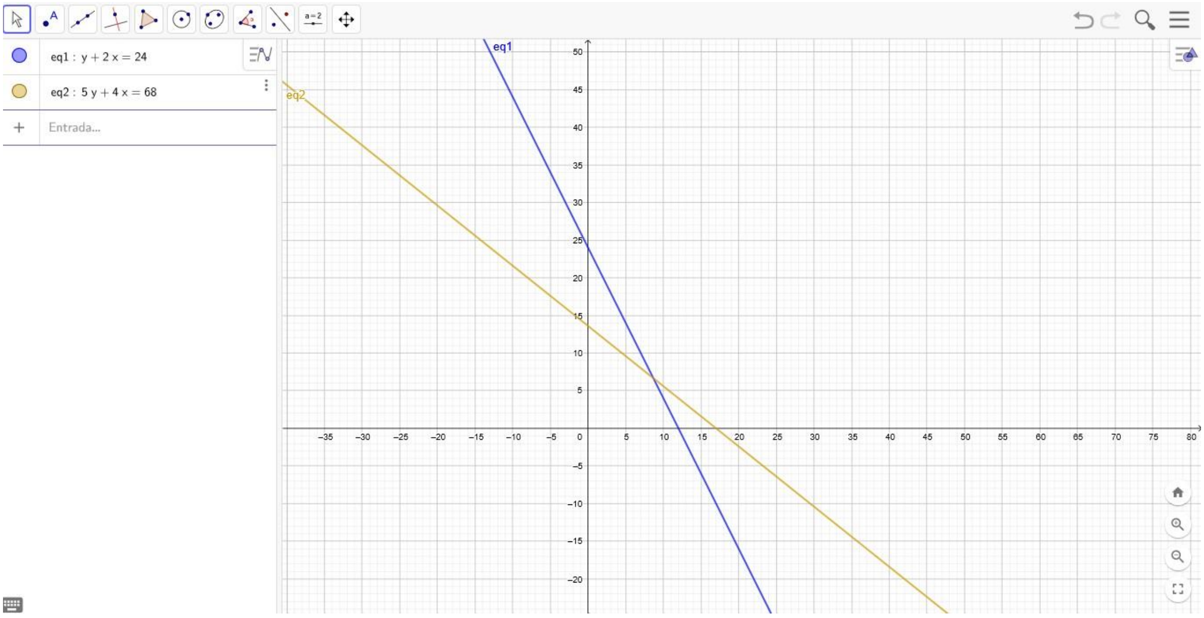
Iremos clicar em configurações e uma janela como essa deverá se abrir.



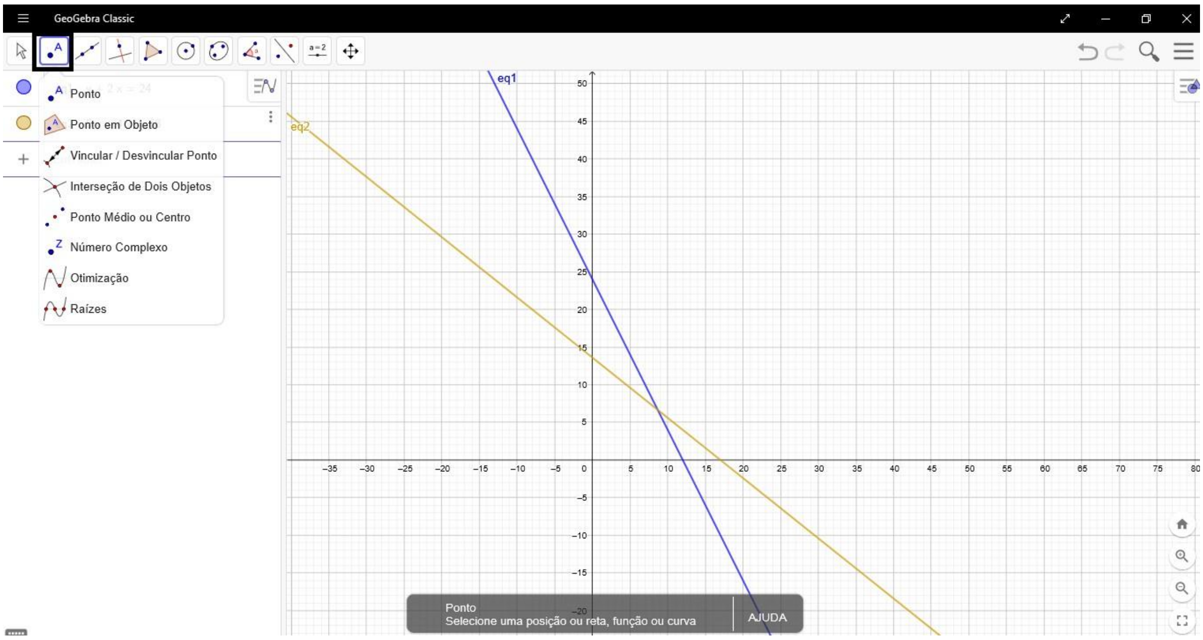
Iremos em cor, para alterar a cor da função para ficar mais fácil a identificação da mesma, após devemos escolher uma cor que lhe convém para o seu ambiente escolar, de modo a facilitar a visualização de todos na sala.



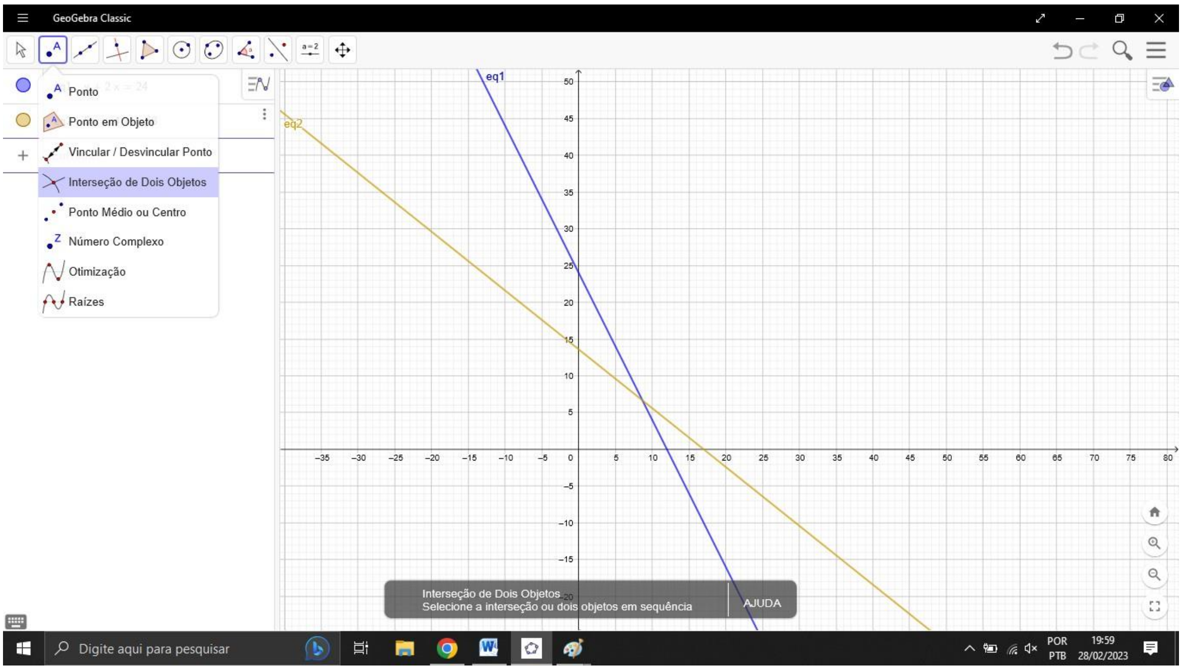
Repetiremos todos os passos para a segunda equação linear.



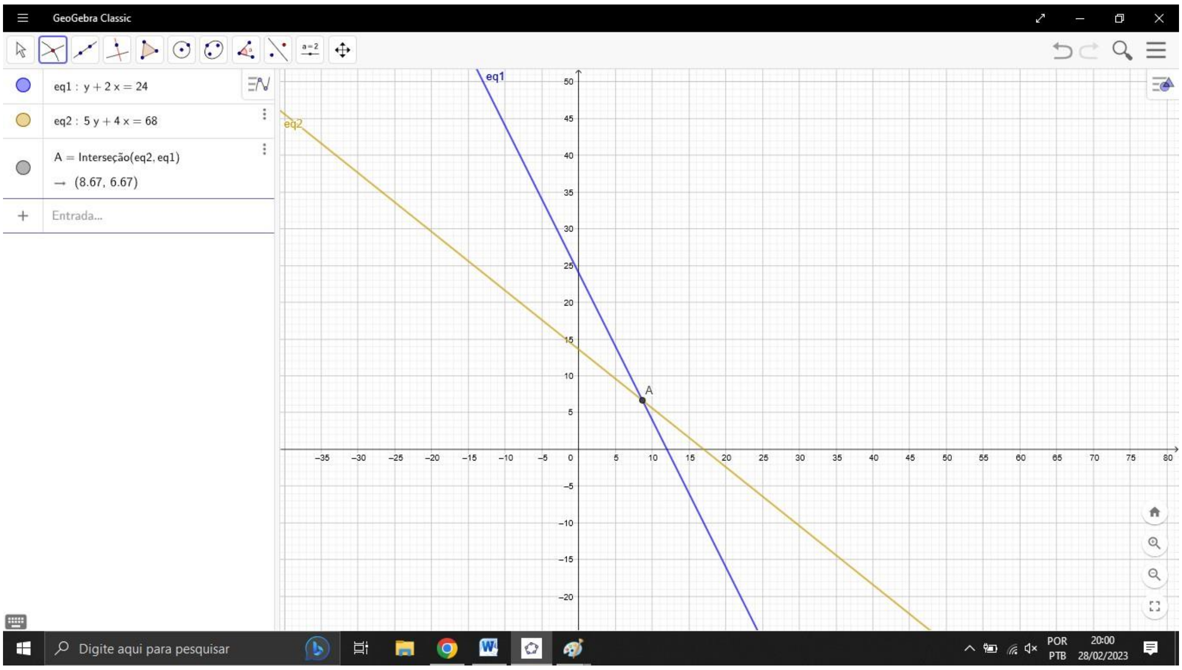
Após a entrada das duas equações e geramos suas representações gráficas devemos ir ao segundo quadrado do canto superior esquerdo, denominado ponto, e clicar com o botão esquerdo do mouse.



Após devemos clicar em “Interseção de dois objetos”.



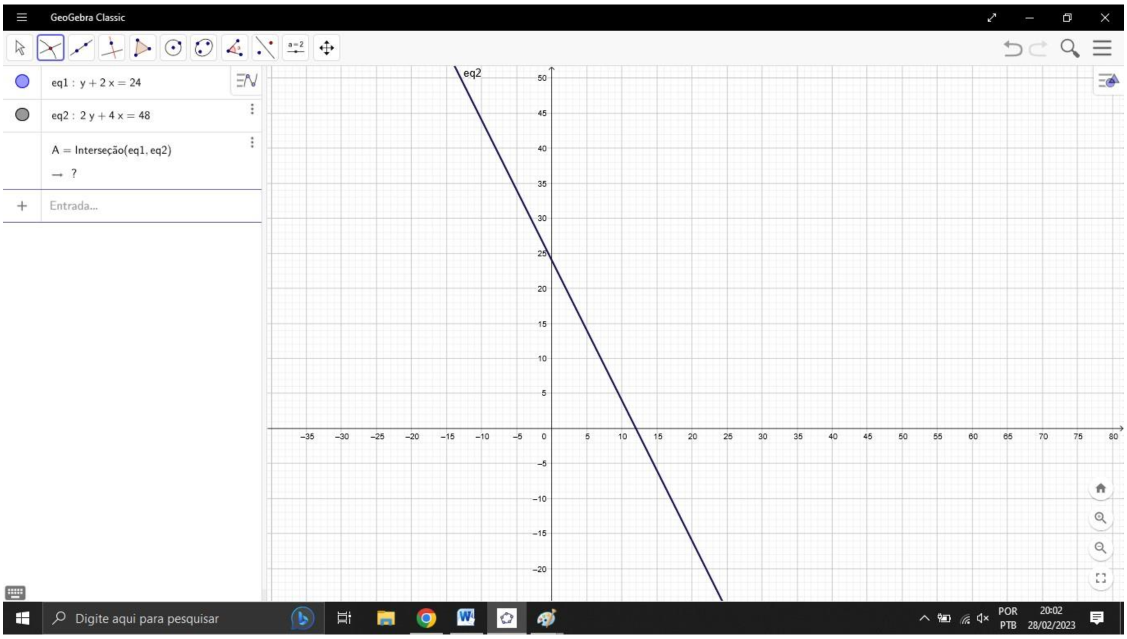
Selecionado a opção clicamos nas duas representações gráficas das equações, de modo a surgir um ponto denominado A.



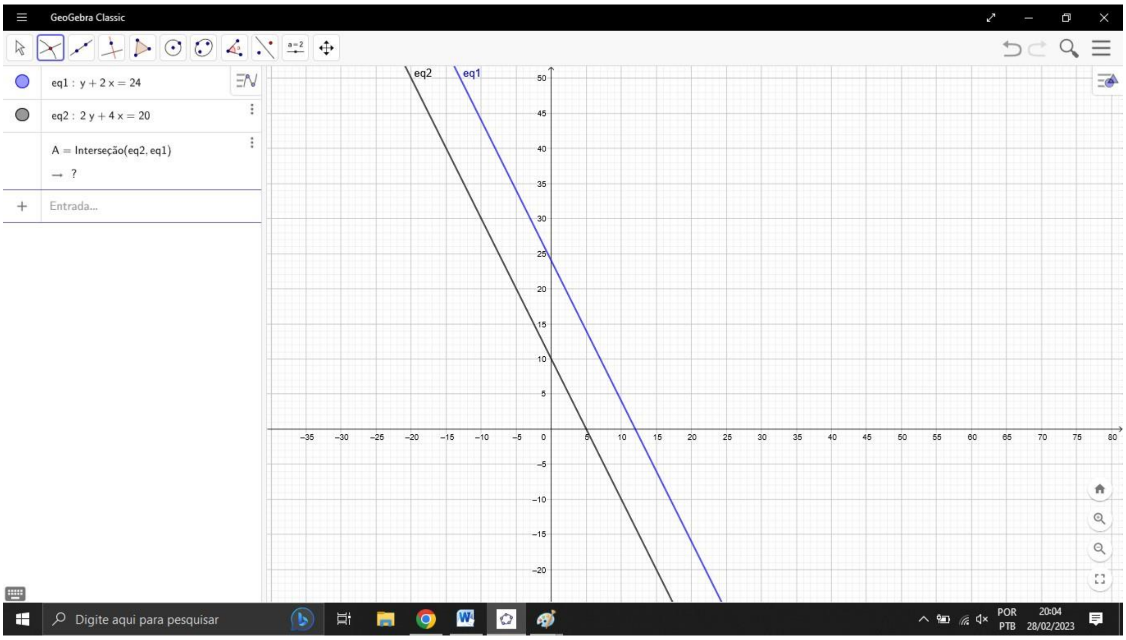
Esse ponto é a solução real dos sistemas lineares 2x2, sendo um Sistema Possível e Determinado, ou seja, um sistema possível e determinado possuindo apenas uma solução real.

Caso não surja um ponto, teremos duas opções.

Caso as duas representações gráficas das equações fiquem sobrepostas, isso é um Sistema Possível e Indeterminado, ou seja, um sistema possível e indeterminado possuindo infinitas soluções.



Caso as duas representações gráficas das equações fiquem paralelas, isso é um Sistema Impossível, ou seja, um sistema impossível não admitindo solução alguma.



TERCEIRA ETAPA – OFICINA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Aqui contará com algumas tarefas que podem ser utilizadas para a aplicação da oficina de Resolução de Problemas para o ensino de Sistemas Lineares, nada impede que você professor faça alterações para a sua realidade, deste modo, as atividades que constam aqui servem como um guia.

A parte de maior importância, além da elaboração do problema, são os passos para as possíveis duvidas do aluno, já que, ao fazer tal planejamento o professor se colocará no lugar do estudante, deste modo, você conseguirá ter um melhor desenvolvimento de sua oficina, já que, ao pensar como o estudante será possível estabelecer perguntas que nortearão os estudantes a matematizar.

TAREFA 1

Problema de sistema de duas variáveis com uma única solução.

Paguei R$ 75,00 por uma calça e uma blusa. A calça custou R$ 23,00 mais barato do que a blusa. Qual o preço da blusa?

Fonte: Autoria própria (2022).

Objetivos específicos:

- Relembrar alguns conceitos de equações;
- Descobrir como os alunos trabalham em grupos;
- Descobrir se os alunos conseguem diferenciar variável de incógnita.

Procedimentos:

- Será redigido na televisão o problema que os alunos devem resolver;
- Eles serão divididos grupos;
- Os alunos farão novamente a leitura nos grupos para iniciar a resolução, com os seus conhecimentos prévios;
- Passaremos nos grupos esclarecendo pequenas dúvidas e analisando as resoluções;
- A observar que a maioria dos grupos concluiu a tarefa, escolheremos alguns representantes para expor a resolução na lousa enquanto outros terminam;
- Faremos uma análise de todas as resoluções da lousa;

- Sistematizaremos sistema de equações com duas variáveis possível e determinado;
- E assim concluiremos a tarefa.

Possíveis dúvidas:

- Interpretar o problema;
- Resolver o sistema;
- Verificar se a resolução é correta.

Possíveis encaminhamentos:

No caso de o aluno não conseguir interpretar o problema, pedirei para que o aluno releia o problema, caso a dúvida persista perguntarei quais palavras do enunciado o aluno tem dúvida, e explicaremos, com ajuda do dicionário, o seu significado.

No caso de o aluno não conseguir resolver o sistema, pediremos para o aluno utilizar outra técnica, caso ainda assim não consiga, farei questionamentos que o induza a compreender o que é necessário para a resolução.

No caso de o aluno não conseguir verificar se a resolução está correta, pediremos para que o aluno substitua os valores calculados no lugar das incógnitas x e y.

Possíveis resoluções:

1) $C + B = 75$

$B - C = 23$

$2B = 98 \rightarrow B = 49$

$C + 49 = 75 \rightarrow C = 26$

2) Construção da tabela de resolução:

C	B	$C + B$	$B - C$	Correto?
0	75	75	75	Errado
10	65	75	55	Errado
20	55	75	35	Errado
25	50	75	25	Errado
26	49	75	23	Correto

Fonte: Autoria própria (2022).

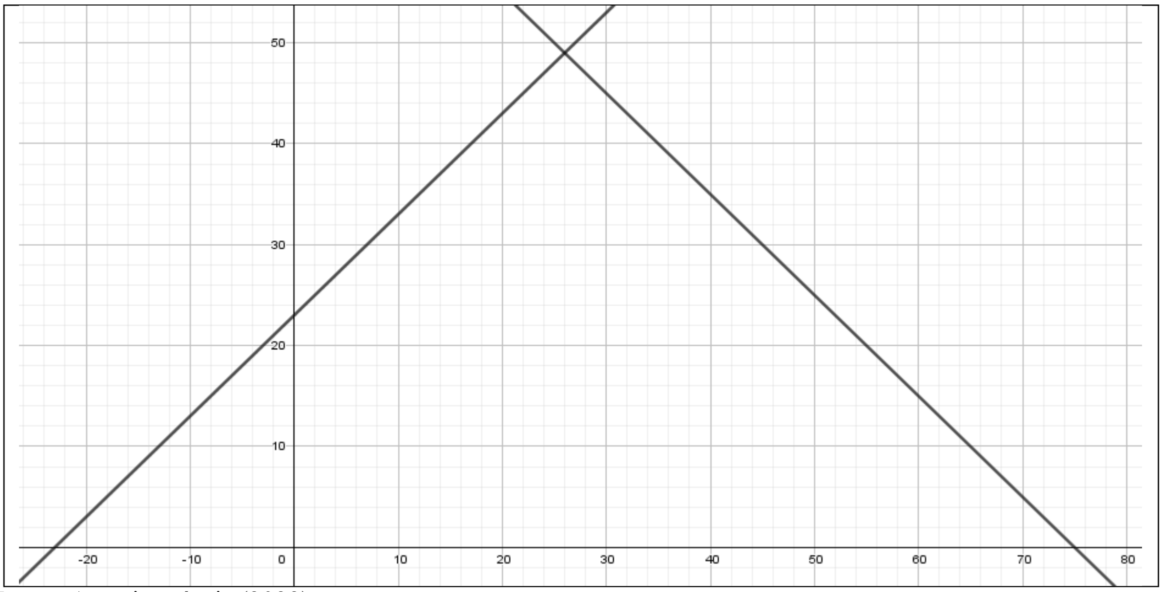
3) Geometricamente:

Se analisarmos as retas formadas pelas retas montadas pelo sistema e observar como ela se comporta, com algumas suposições podemos saber qual é o ponto onde as duas se cruzam e esta será a solução do sistema.

Supondo na primeira equação que $C = \mathbf{0}$ temos $B = \mathbf{75}$, quando $B = \mathbf{0}$ temos $C = \mathbf{75}$, com esses dois pontos podemos fazer a primeira reta.

Supondo na segunda equação que $C = \mathbf{0}$ temos $B = 2\mathbf{3}$, quando $B = \mathbf{0}$ temos $C = -2\mathbf{3}$, como não conseguimos uma interseção entre as duas retas, supomos então outro ponto e supondo $C = 3\mathbf{0}$ temos $B = 5\mathbf{3}$, assim, completando o segundo segmento de reta conseguimos uma intersecção entre elas e descobrimos qual é a solução do sistema.

Resolução geométrica de um SPD:



Fonte: Autoria própria (2022).

<u>Proposta de sistematização:</u>

Um sistema de equações lineares $\mathbf{2}x\mathbf{2}$ com coeficientes reais é um conjunto de duas equações lineares reais, cada uma com as duas mesmas incógnitas x e y.

Uma solução de um sistema linear $\mathbf{2}x\mathbf{2}$ com coeficientes reais $a_{\mathbf{1}}$, $b_{\mathbf{1}}$, a_2·,b_2, c_1 e c_2

$$a_{\mathbf{1}}x + b_{\mathbf{1}}y = c_{\mathbf{1}}$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

É um par $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ e satisfazem ambas as equações.

O sistema se diz possível e determinado quando admite uma única solução. Cada equação tem como soluções os valores encontrados para as incógnitas x e y, quando fazemos a conexão com a geometria as incógnitas são as coordenadas (x, y) dos pontos de uma reta, demodo que o sistema determinado, conforme as retas r_1 e r_2, representadas pelas duas equações,coincidam (DANTE, 2003).

TAREFA 2

Problema de sistema de duas variáveis com infinitas soluções.

Joana comprou uma borracha e dois lápis e pagou R$ 3,50. Marcos comprou 4 borrachas e 8 lápis e pagou quatro vezes mais que Joana. Quanto custou cada borracha e cada lápis?

Fonte: Autoria própria (2022).

Objetivos específicos:

- Relembrar alguns conceitos de equações;
- Descobrir como os alunos trabalham em grupos;
- Descobrir se os alunos conseguem diferenciar variável de incógnita.

Procedimentos:

Semelhante ao procedimento da Tarefa 1.

Possíveis dúvidas:

- Interpretar o problema;
- Resolver o sistema;
- Verificar se a resolução é correta.

Possíveis encaminhamentos:

Semelhante aos possíveis encaminhamentos da Tarefa 1.

Possíveis resoluções:

1) $B + 2L = 3{,}50$

$4B + 8L = 14{,}00$

Isolando o L na primeira equação obtemos: $B = 3{,}50 - 2L$.

Isolando o L na segunda equação obtemos: $\mathbf{4}B = 14{,}00 - \mathbf{8}L \Rightarrow B = 3{,}50 - \mathbf{2}L$.

Logo, o sistema possui infinitas soluções.

2) Construir a tabela de resolução:

B	L	$B + \mathbf{2}L$	Correto?
3,50	0,00	3,50	SIM
0,00	1,75	3,50	SIM
1,50	1,00	3,50	SIM
0,50	1,50	3,50	SIM
1,00	1,25	3,50	SIM

Fonte: Autoria própria (2022).

Possui infinitas soluções.

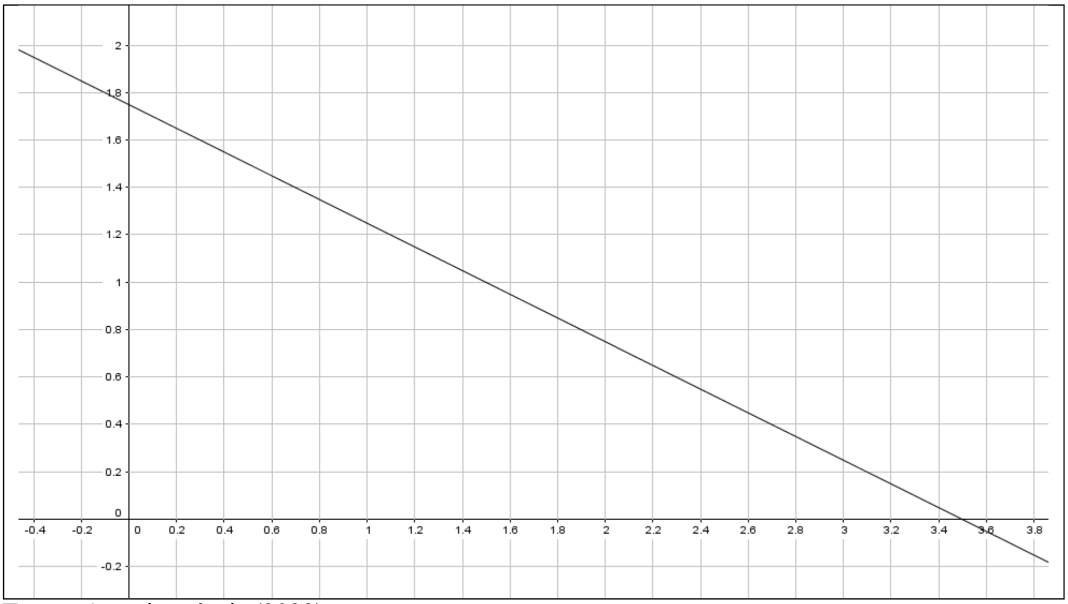
3) Geometricamente:

Se analisarmos as retas oriundas das equações do sistema e observarmos como elas se comportam, com algumas suposições, podemos saber qual é o ponto onde as duas retas se cruzam e esta será a solução do sistema.

Supondo na primeira equação que $B = 3{,}50$ $C = \mathbf{0}$ temos $L = \mathbf{0}$, quando $B = \mathbf{0}$ temos $L = \mathbf{1{,}75}$, com esses dois pontos podemos traçar a primeira reta.

Supondo na segunda equação que $B = \mathbf{1{,}50}$ temos $L = \mathbf{1{,}00}$, quando $B = \mathbf{1{,}00}$ temos $L = \mathbf{1{,}25}$, conseguimos então uma infinidade de interseções entre as duas retas e, assim, descobrimos a solução do sistema, ou seja, que as retas são coincidentes.

Resolução Geométrica de um SPI:



Fonte: Autoria própria (2022).

<u>Sistematização:</u>

Um sistema de equações lineares $2x2$ com coeficientes reais é um conjunto de duas equações lineares reais, cada uma com as duas mesmas incógnitas x e y.

Uma solução de um sistema linear $2x2$ com coeficientes reais a_1, b_1, a_2,b_2, c_1 e c_2

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

É um par $(x_1, y_1) \in R^2$ cujas coordenadas $x_1, y_1 \in R$ e satisfazem ambas as equações.

O sistema se diz possível e indeterminado quando admite infinitas soluções. Cada equação tem como soluções os valores encontrados para as incógnitas x e y, quando fazemos a conexão com a geometria as incógnitas são as coordenadas (x, y) dos pontos de uma reta, demodo que o sistema possível e indeterminado, conforme as retas r_1 e r_2, representadas pelas duas equações, se sobrepõem, sendo elas coincidentes (DANTE, 2015).

TAREFA 3

Problema de sistema de duas variáveis sem solução.

João foi ao mercado e comprou 2L de leite e um pacote de bolacha e pagou R$ 5,50. Maria foi nesse mesmo mercado e compro 4L de leite e dois pacotes de bolacha e pagou R$ 9,00. Qual o preço do pacote de bolacha?

Fonte: Autoria própria (2022).

Objetivos específicos:

- Relembrar alguns conceitos de equações;
- Descobrir como os alunos trabalham em grupos;
- Descobrir se os alunos conseguem diferenciar variável de incógnita.

Procedimentos:

- Semelhante ao procedimento da Tarefa 1.

Possíveis dúvidas:

- Interpretar o problema;
- Resolver o sistema;
- Verificar se a resolução é correta.

Possíveis encaminhamentos:

Semelhante aos possíveis encaminhamentos da Tarefa 1.

Possíveis Resoluções:

1) $\mathbf{2}L + B = \mathbf{5{,}50}$

$\mathbf{4}L + \mathbf{2}B = \mathbf{9{,}00}$

Ao resolver o sistema, notamos que é impossível. Logo, não existe uma solução.

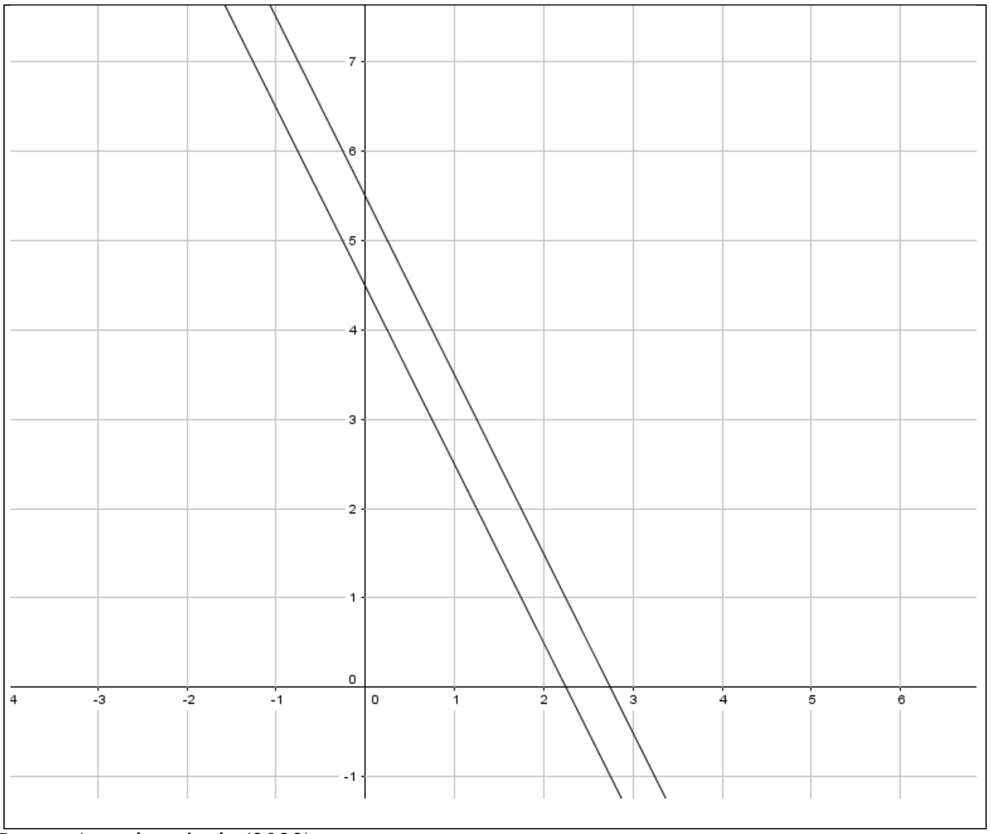
2) Geometricamente

Se analisarmos as retas oriundas das equações do sistema e observarmos como elas se comportam, com algumas suposições podemos saber qual é o ponto onde as duas retas se cruzam e esta será a solução do sistema.

Supondo na primeira equação que $L = 2{,}75$ temos $B = 0{,}00$, quando $L = 0{,}00$ temos $B = 5{,}50$, com esses dois pontos podemos traçar a primeira reta.

Supondo na segunda equação que $L = 2{,}25$ temos $B = 0{,}00$, quando $L = 0{,}00$ temos $B = 4{,}50$, conseguimos então nenhuma interseção entre as duas retas e, assim, descobrimos que solução do sistema é inexistente, ou seja, as retas são paralelas.

Resolução Geométrica de um Sistema Impossível:



Fonte: Autoria própria (2022).

Sistematização:

Um sistema de equações lineares $2x2$ com coeficientes reais é um conjunto de duas equações lineares reais, cada uma com as duas mesmas incógnitas x e y.

Uma solução de um sistema linear $2x2$ com coeficientes reais a_1, b_1, a_2 ,b_2, c_1 e c_2.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

É um par $(x1, y1)$ ϵ $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas $x1, y1$ ϵ $\mathbb{R}$ e satisfazem ambas as equações.

O sistema se diz possível indeterminado quando não admite solução. Cada equação tem como soluções os valores encontrados para as incógnitas x e y, quando fazemos a conexão com a geometria as incógnitas são as coordenadas (x, y) dos pontos de uma reta, de modo que o sistema é impossível, conforme as retas r_1 e r_2 representadas pelas duas equações, nunca se encontram, ou seja, são paralelas (DANTE, 2003).

TAREFA 4

Problema de sistema de três variáveis.

Ana, Bia e Sara subiram juntas em uma balança e ela registrou 152 kg. Sara desceu e a balança registrou 99 kg. Em seguida, Sara subiu novamente na balança, mas Ana desceu, e o registro foi de 102 kg. Quanto pesa cada uma delas?

Fonte: Autoria própria (2022).

Objetivos específicos:

- Relembrar alguns conceitos de equações;
- Descobrir como os alunos trabalham em grupos;
- Descobrir se os alunos conseguem diferenciar variável de incógnita.

Procedimentos:

- Será redigido na televisão o problema que os alunos devem resolver;
- Eles serão divididos grupos;
- Os alunos farão novamente a leitura nos grupos para iniciar a resolução, com os seus conhecimentos prévios;
- Passarei nos grupos esclarecendo pequenas dúvidas e analisando as resoluções;
- Ao observar que a maioria dos grupos concluiu a tarefa, escolherei alguns representantes para expor a resolução na lousa enquanto outros terminam;
- Farei uma análise de todas as resoluções da lousa;
- Sistematizarei sistema de equações com duas variáveis possível e determinado;
- E assim concluirei a tarefa.

Possíveis encaminhamentos:

No caso de o aluno não conseguir interpretar o problema, pedirei para que o aluno releia o problema, caso a dúvida persista perguntarei quais palavras do enunciado o aluno tem dúvida, e explicarei, com ajuda do dicionário, o seu significado.

No caso de o aluno não conseguir resolver o sistema, irei pedir para o aluno utilizar outra técnica, caso ainda assim não consiga, farei questionamentos que o induza a compreender o que é necessário para a resolução.

No caso de o aluno não conseguir verificar se a resolução está correta, pedirei para que o aluno substitua os valores calculados no lugar das incógnitas x e y.

Possíveis Resoluções:

i) $A + B + S = 152$

ii) $A + B = 99$

iii) $B + S = 102$

De i) e iii) temos que $A = 50$, substituindo em A na ii) temos que $B = 49$, substituindo B em iii) temos que $S = 53$.

Sistematização:

Consideramos agora o sistema

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

de três equações com três incógnitas (x, y, z) . Estas equações definem, nesta ordem, os planos γ_1, γ_2 e γ_3 γ_3 . Um termo (x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$ é solução do sistema quando o ponto $P = (x, y, z)$ pertence à interseção $\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \gamma_3$, isto é, quando P está simultaneamente em cada um dos três planos.

Esperamos que este produto possa auxiliar futuros alunos e Professores no estudo sobre Sistemas Lineares.

REFERÊNCIAS

ANJOS, C. I.; SARAIVA, M. R. O. Crianças, sociabilidades e tecnologias digitais: contribuições para pensar a(s) infância(s) no mundo contemporâneo. In: BAIRRAL, M.; CARVALHO, M. **Dispositivos móveis no ensino de matemática:** tablets & smartphones. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.

BAUMGART, J. K. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula.** Tradução de Hygino Hugueros Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto, 1994.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, n. 2, p. 177-229, 1990.

COLLETTE, J-P. **Historia de las matemáticas**. Tradução de Pilar González Gayoso. México: Siglo Veintiuno Editores, 1986.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto e aplicações. 1. ed. São Paulo: Ática, 2003.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris:** matemática ensino fundamental 2. São Paulo: Ática, 2015.

FREITAS, I. M. **Resolução de sistemas lineares parametrizados e seu significado para o aluno.** 1999. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1999.

HATFIELD, L. L. Heuristical emphasis in the instrution of mathematical problem solving: Rationales and research. In: HATFIELD, L. L.; BRADBARD, D. A. (orgs.). **Mathematical Problem Solving:** papers from a research workshop. Colombus: ERIC, 1978.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática:** propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Ed. Interciência, 1978.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

ANEXO – FICHA DE AVALIAÇÃO DO PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL

ppgmat PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: RIZZATTI, I. M. *et al*. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, maio./ago. 2020. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657. Acesso em: 14 dez. 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Resolução de problemas no Ensino Médio, através de sistemas lineares com o auxílio do Geo Gebra
Título do Produto/Processo Educacional	Proposta de sequência didática para o ensino de sistemas lineares
Autores do Produto/Processo Educacional	**Discente**: Caio Luiz Escobar dos Santos
	Orientador: Leonardo Sturion
Data da Defesa	30 de maio de 2023

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. *Apenas um item pode ser marcado. Linhas de Pesquisa do PPGMAT: *L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade); *L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática* (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	(X) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. ( ) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. *Apenas um item pode ser marcado. A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	( ) PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. (X) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). ( ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. *Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.	( ) Local. ( ) Regional. (X)Nacional. ( ) Internacional. Justificativa (*obrigatória*): O trabalho tem abrangência Nacional pois tem aplicação dentro dos conteúdos da BNCC

Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional dodiscente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). *<u>Apenas um item pode ser marcado</u>.	( ) PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). (X) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada *<u>Apenas um item pode ser marcado</u>.	( ) Econômica. ( ) Saúde. ( ) Ensino. ( ) Cultural. ( ) Ambiental. ( ) Científica. (X) Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. *<u>Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.</u>	( ) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. ( ) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. (X) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. ( ) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.

Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	( ) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (X) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ( ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	**Instituição**
Leonardo Sturion	UTFPR
Rogério Martins	UNIMP
Alireza Mohebi Ashtian	UTFPR