ppgmat

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

GISELI SANGUINO

# INDÍCIOS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO E A PRÁTICA DOCENTE EM EPISÓDIOS DE RESOLUÇÃO DE TAREFAS

LONDRINA
2023

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

GISELI SANGUINO

# INDÍCIOS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO E A PRÁTICA DOCENTE EM EPISÓDIOS DE RESOLUÇÃO DE TAREFAS

# EVIDENCE OF ALGEBRAIC THINKING AND TEACHING PRACTICE IN TASK-SOLVING EPISODES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Marcele Tavares Mendes

LONDRINA

2023

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**
**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**
**Campus Londrina**

GISELI SANGUINO

**INDÍCIOS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO E A PRÁTICA DOCENTE EM EPISÓDIOS DE RESOLUÇÃO DETAREFAS**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 23 de Março de 2023

Dra. Marcele Tavares, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Andre Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Cristiano Forster, Doutorado - Secretaria de Educação do Estado de Santa Catarina

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 24/03/2023.

*Dedico este trabalho aos meus pais José e Elza, que não mediram esforços para que eu chegasse até aqui, desde cedo, me ensinaram o valor da educação para se entender o mundo, mostraram com muita paciência e amor, que não há limites para a busca de um sonho, para querer sempre mais da vida e ser feliz !!!*

## AGRADECIMENTOS

*Quero expressar minha profunda gratidão neste momento tão especial de finalização da minha dissertação...*

*Em primeiro lugar, agradecer a Deus por ter me dado força, saúde e sabedoria para enfrentar os desafios ao longo desta jornada. Sem Ele, nada seria possível.*

*Agradeço também aos meus PAIS, por sempre me apoiarem e me incentivarem em todos os momentos da minha vida, desde a minha infância até hoje. Sem a presença e o amor incondicional deles, eu não teria chegado até aqui.*

*Agradeço a meu filho ARTHUR, que foi minha inspiração para correr atrás desse sonho. Espero que este trabalho possa contribuir de alguma forma para a melhoria da Educação matemática, não apenas para ele, mas para todas as crianças e jovens que buscam uma formação sólida e completa.*

*Por fim, agradeço à minha orientadora MARCELE, que me guiou com sua experiência, conhecimento e paciência. Seu apoio foi fundamental para o sucesso desta pesquisa e para o meu crescimento acadêmico e pessoal.*

*Muito obrigada a todos que de algum modo estiveram presentes na minha caminhada para esta conquista.*

*Que Deus abençoe a todos!*

*Feliz aquele que compartilha o que sabe,*

*e aprende o que ensina!!!!*

*(CORA CORALINA, 1997.)*

SANGUINO, Giseli. **Indícios do Pensamento Algébrico e a prática docente em Episódios de Resolução de Tarefas**. 2023. 85 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2023


**RESUMO**

Essa pesquisa, qualitativa, com um cunho interpretativo, teve por objetivo, a partir de indícios do pensamento algébrico reconhecidos em produções e interações de alunos, discutir a organização de espaços pedagógicos e a prática docente em Episódios de Resolução de Tarefas. A pesquisa foi realizada com turmas de 8º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública de Londrina, Paraná. Foram planejados e desenvolvidos cinco episódios de resolução de Tarefas, que envolviam conteúdos matemáticos com potencial para explorar indícios do pensamento algébrico. A análise pautou-se em trechos de diálogos e algumas produções escritas de grupos de alunos ao desenvolverem duas, das cinco tarefas elaboradas. Episódios de Resolução de Tarefas é tomado enquanto uma estratégia de ensino em que os alunos, organizados em pequenos grupos, tornam-se protagonistas de seus processos de aprendizagem, e o professor, mediador desse processo por meio de intervenções planejadas. Acompanhar e investigar as discussões e produções dos alunos permitiu reconhecer indícios do pensamento algébrico, por meio dos quais a professora teve oportunidade de recolher informações para regular os processos de ensino e de aprendizagem, evidenciando um planejamento que considera a produção do aluno não apenas metas curriculares. Por fim, enquanto produto educacional desta pesquisa, foi elaborada uma sequência de 5 tarefas com orientações pedagógicas para o professor/leitor organizar suas práticas de ensino, com vistas a potencializar indícios de um pensamento algébrico em episódios de resolução de tarefas.



**Palavras-chave**: Educação Matemática. Pensamento Algébrico. Tarefas. Episódios de Resolução de Tarefas.

SANGUINO, Giseli. **Evidence of Algebraic Thinking and teaching practice in Task-Solving Episodes.** 2023. 85 f. Dissertation (Master's degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2023.


## ABSTRACT

This qualitative research, with an interpretative nature, aimed, from evidence of algebraic thinking recognized in students' productions and interactions, to discuss the organization of pedagogical spaces and teaching practice in Task Resolution Episodes. The research was carried out with 8th grade elementary school classes in a public school in Londrina, Paraná. Five episodes of task resolution were planned and developed, involving mathematical content with the potential to explore evidence of algebraic thinking. The analysis was based on excerpts from dialogues and some written productions of groups of students when developing two of the five elaborated tasks. Task Resolution Episodes is taken as a teaching strategy in which students, organized in small groups, become protagonists of their learning processes, and the teacher, mediator of this process through planned interventions. Monitoring and investigating the students' discussions and productions allowed recognizing evidence of algebraic thinking, through which the teacher had the opportunity to collect information to regulate the teaching and learning processes, evidencing a planning that considers the student's production not just curricular goals. Finally, as an educational product of this research, a sequence of 5 tasks was elaborated with pedagogical guidelines for the teacher/reader to organize their teaching practices, with a view to enhancing evidence of algebraic thinking in episodes of task resolution.



**Keywords:** Mathematics Education. Algebraic Thinking. Tasks. Task Resolution Episodes.

# LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE QUADROS

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---|---|
| APE | Analise da Produção Escrita |
| PISA | Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Programme For International Student Assessment) |
| RME | Educação Matemática Realística (Realistic Mahematics Education) |
| G1T1 | Grupo 1 Tarefa 1 |
| A1T1 | Aluno 1 Tarefa 1 |
| G2T2 | Grupo 2 Tarefa 2 |
| A6T2 | Aluno 2 Tarefa 2 |
| UTFPR | Universidade Tecnológica Federal do Paraná |

## SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Diante da realidade atual, no contexto político, social e econômico, em especial, no período pandêmico a partir do ano de 2020, os professores, em seus contextos escolares, buscam possibilidades a respeito de como planejar experiências para seus alunos, de forma que os envolvam e os favoreçam a construir um aprendizado que seja relevante para suas vidas enquanto sujeitos ativos e atuantes, em qualquer âmbito.

Os alunos, depois de passarem por um período de estudos *on-line* e de volta às aulas presenciais, têm apresentado ainda mais acentuada a defasagem de conteúdos básicos relacionados ao currículo de anos escolares precedentes. Com o intuito de lidar com essa defasagem faz-se necessário buscar por metodologias e estratégias de ensino que possibilitem a esses alunos um certo protagonismo no processo de construção e resgate de seus aprendizados.

Com acesso à internet, nós professores temos contato com diversas metodologias e estratégias de ensino enquanto objeto de pesquisas, validadas, e apresentadas em produtos educacionais, assim como mencionadas em documentos e diretrizes educacionais. Entretanto, questiono por que nós professores ainda não sentimos confortáveis para usar tais metodologias em nossas aulas? Por que não usar formas novas para o aluno tornar-se protagonista de seu conhecimento e principalmente, sentir-se corresponsável de seu processo de aprendizagem por meio do lidar com as tarefas de sala de aula?

Para encontrar respostas a questões como essas, e por atuar na Educação Básica, trabalhando com os anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio como professora desde o ano de 2006, procurei me aprimorar e conhecer novos caminhos que pudessem me ajudar a entender práticas diferenciadas, metodologias e estratégias que para mim eram inovadoras, de modo que busquei o Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – PPGMAT, campus Cornélio Procópio e Londrina.

Meu primeiro contato com o PPGMAT foi como participante externa, no ano de 2020, quando cursei a disciplina de Resolução de problemas, sob responsabilidade da professora doutora Andresa Maria Justulin. Com as discussões nessa disciplina tive oportunidade de conhecer uma metodologia, um possível caminho de formação e de desenvolvimento profissional que, a partir de discussões reflexivas acerca do contexto escolar, me fizeram reavaliar e refletir acerca da organização das minhas práticas pedagógicas.

No ano de 2021, após um processo de seleção, ingressei como aluna regular do PPGMAT. Ao cursar a disciplina de Ensino de Cálculo Diferencial e Integral, a cargo do

Professor doutor André Luis Trevisan, tive o primeiro contato com a estratégia de ensino Episódios Resolução de Tarefas. Enquanto aluna, experienciei e resolvi tarefas abertas, compreendi que as resoluções permitiam que os alunos expressassem seu conhecimento, e pude compreender que ensino, aprendizagem e avaliação são processos interligados.

A partir dessas duas experiências (disciplinas), e de estudos e orientações, minha orientadora e eu decidimos que Episódios de Resolução de Tarefas seria a estratégia de ensino[1] que permearia o desenvolvimento de minha pesquisa de mestrado, uma estratégia que atende aos anseios de ambas, no meu caso especificamente, enquanto meio de repensar e refletir sobre a minha prática pedagógica. Já em relação à minha orientadora, essa estratégia de ensino tem sido utilizada e investigada em suas aulas de Cálculo Diferencial e Integral (TREVISAN; MENDES, 2018), nas quais utiliza diferentes tipos de Tarefas, levando em conta os objetivos curriculares a serem alcançados e as estratégias que possam levar o aluno a construir seus raciocínios (PONTE, 2005 2006, 2010 PALHA, 2013, 2014).

As pesquisas de mestrado orientadas pela professora Marcele Tavares Mendes, docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio e Londrina, estão associadas à linha de pesquisa Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática, com temáticas que estão relacionadas à Educação Matemática Realística (RME), à Avaliação da Aprendizagem e às Tarefas Matemáticas.

Das pesquisas desenvolvidas toma-se como ponto inicial a própria tese da professora que envolveu esses temas, intitulada "Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo" (MENDES, 2014), seguido por oito dissertações já finalizadas. As dissertações, apresentadas no Quadro 1, podem ser agrupadas a partir de dois temas centrais: a Educação Matemática Realística e a Avaliação da aprendizagem.

**Quadro 1 –** Dissertações do grupo

| Autor | Título da dissertação | Temática Central |
|---|---|---|
| Harmuch (2017) | Tarefas para uma educação financeira: um estudo | Educação Matemática Realística (RME) |
| Marino (2018) | O processo de delineamento de uma trajetória de ensino e de aprendizagem: reflexões para o ensino de matemática | |

[1] Estratégia de ensino enquanto um conjunto de ações planejadas, de modo que expresse "o que" e "como" pode ou deve ser feito, além de incluir os meios de ensino para serem colocadas em prática, entendimento baseado em Santos (2014).

| | | |
|---|---|---|
| Felipes (2022) | Ensino de sequências numéricas à luz da RME: uma proposta que envolve contexto realístico e planilhas eletrônicas | |
| Antunes (2018) | *Design* de uma prova escrita de matemática: um processo reflexivo da prática avaliativa | Avaliação da aprendizagem |
| Marino (2020) | Elementos de uma prática avaliativa enquanto prática social | |
| Santos (2020) | Práticas avaliativas de seis professores de matemática: uma reflexão para a inclusão escolar | |
| Weber (2020) | Articulação da avaliação somativa com avaliação formativa em aulas de matemática | |
| Rodrigues (2021) | Uma prática avaliativa formativa utilizando a prova-com--consulta-ao-caderno em uma disciplina de cálculo | |

Fonte: Autora, adaptado de Felipes (2022).

Dentro deste contexto, a pesquisa que resultou nesta dissertação desenvolveu-se por meio de Episódios de Resolução de Tarefas organizados à luz da abordagem de ensino RME, na qual a matemática é vista como uma atividade humana, e sua aprendizagem uma forma de entender o mundo a partir do saber fazer matemática e construir o seu conhecimento no decorrer do processo de resolução de tarefas. Os caminhos percorridos pelos alunos durante as resoluções são fundamentais e os contextos que envolvem as tarefas propostas devem estar conectados com a realidade ou ser ao menos imagináveis, para que o aprendizado seja relevante e que tenha significado (FREUDENTHAL, 1973).

Em Episódios de Resolução de Tarefas o professor consegue avaliar seu trabalho e, com *feedbacks*, acompanhar o desenvolvimento de seus alunos, direcionando-os por caminhos que pretende que o estudante seja capaz de seguir, considerando as especificidades de cada um (TREVISAN; MENDES, 2018).

Neste sentido, buscamos refletir sobre a seguinte questão de pesquisa: **Como a partir de indícios do pensamento algébrico reconhecidos em produções e interações dos alunos podemos refletir sobre encaminhamentos da organização de espaços pedagógicos e da prática docente em Episódios de Resolução de Tarefas**?

O pensamento algébrico tornou-se meio para guiar a discussão nesta pesquisa, conforme Walle (2009), "envolve formar generalizações a partir de experiências com números e operações, formalizar essas ideias com o uso de um sistema de símbolos significativos e explorar os conceitos de padrão e de função" (p. 287).

Se faz necessário apresentar o entendimento e a distinção de pensamento algébrico e álgebra neste trabalho assumido. O pensamento algébrico pode ser sintetizado "como um modo de descrever significados atribuídos aos objetos da álgebra, às relações existentes entre eles, à modelação, e à resolução de problemas no contexto da generalização destes objetos" (CYRINO; OLIVEIRA, 2011, p. 103), enquanto a álgebra, é considerada "como um corpo autônomo de conhecimento – como um artefato cultural" (KAPUT, 2008, p. 8).

O desenvolvimento e constituição do pensamento algébrico demanda tempo e pressupõe no currículo de matemática, desde o início da escolarização, um trabalho contínuo que, por meio de diferentes tipos de exploração, vai se tornando complexo à medida que as tarefas matemáticas e os conceitos tornam-se complexos (NACARATO; CUSTÓDIO, 2018). Para tanto, conforme Kaput (1999), muito mais que equações, inequações e funções, sugere que o ensino da álgebra deva:

> Começar pela construção do conhecimento informal dos alunos; – Integrar a aprendizagem da álgebra com a aprendizagem de outros assuntos por estender e aplicar o conhecimento matemático; – Incluir as várias formas de pensamento algébrico aplicando o conhecimento matemático; – Construir nos alunos naturalmente poderes linguísticos e cognitivos incentivando-os ao mesmo tempo para refletir sobre o que aprender e articular o que eles sabem, e; – Incentivar a aprendizagem ativa e na construção dos relacionamentos valorizando a percepção e compreensão dos alunos (KAPUT, 1999, p. 3).

Nessa pesquisa, para lidar com a questão de investigação, organizou-se episódios de resolução de tarefas em três turmas do 8º ano do Ensino Fundamental (turma em ensino remoto nos 6º e 7º anos), com vistas a discutir possíveis encaminhamentos para a organização de espaços pedagógicos e para prática docente, a partir de indícios do pensamento algébrico de alunos ao lidar com tarefas matemáticas.

De forma específica, para o alcance do objetivo geral foram desenvolvidas as seguintes etapas: (i) um recorte teórico a respeito de Episódios de Resolução de Tarefas à luz da RME; (ii) um recorte teórico a respeito do Pensamento Algébrico; (iii) elaboração de tarefas matemáticas que possuam potencial para explorar conteúdos curriculares do 7º ano e 6º ano do Ensino Fundamental.

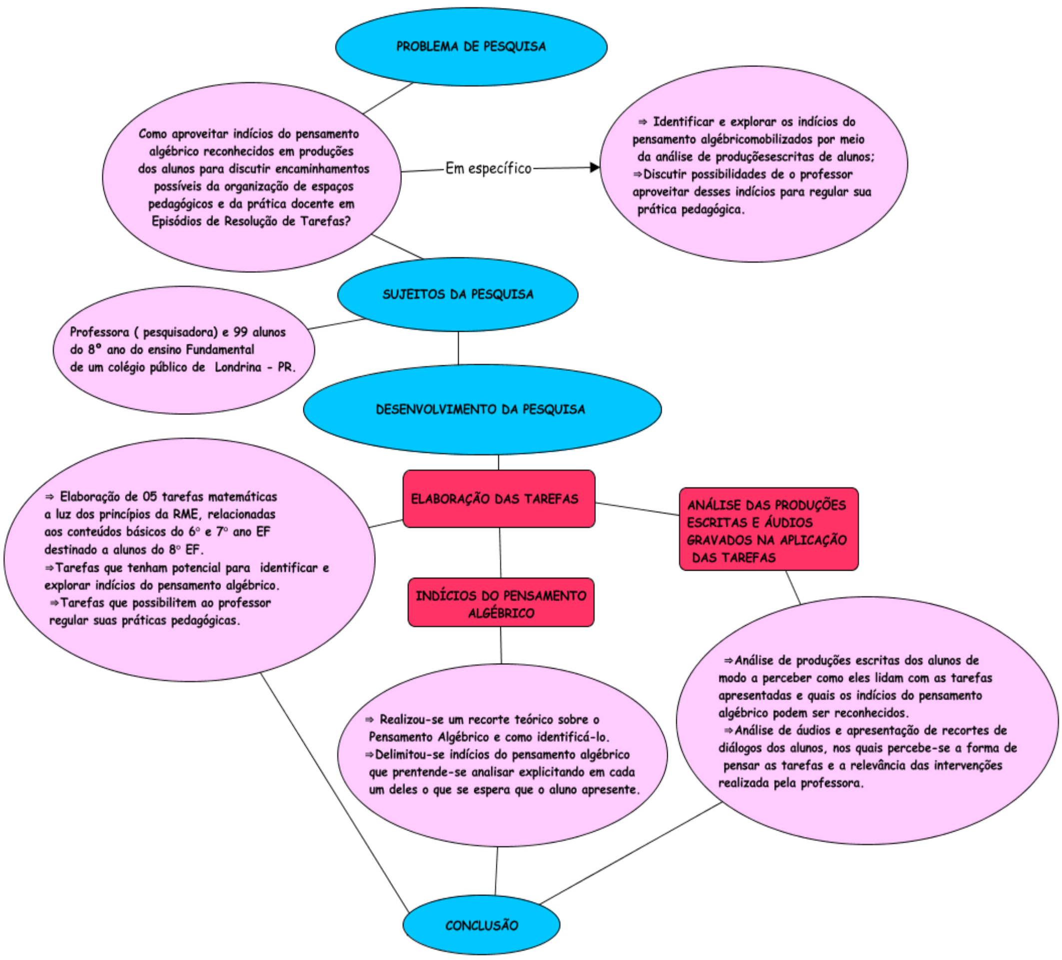
Um construto dessa primeira fase da pesquisa é o conjunto de cinco tarefas, que em suas resoluções requerem estratégias que envolvam conhecimento acerca de números inteiros e racionais, expressões numéricas com as quatro operações (soma, subtração, multiplicação e divisão), além de potenciação, raiz quadrada e equações. Esses conhecimentos fazem parte do currículo do 7º ano do Ensino Fundamental, entretanto tomar contextos aritméticos como ponto de partida para explorar ideias algébricas é interesse também no 8° ano, e então as tarefas foram resolvidas por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, que nos anos de 2020 e 2021 estiveram no formato de ensino remoto devido à pandemia de Covid-19.

A aplicação das tarefas foi desenvolvida em um contexto de sala de aula, em que a pesquisadora era a professora das turmas, e foi organizada por Episódios de Resoluções de Tarefas no primeiro semestre de 2022 e, serviram para:

1) Reconhecer os indícios do pensamento algébrico mobilizados por meio da análise de produções escritas de alunos;
2) discutir possibilidades de o professor aproveitar desses indícios para organizar sua prática pedagógica.

Este está composto de cinco capítulos. O referencial teórico está apresentado no Capítulo 2, que foi dividido em uma seção acerca da Educação Matemática Realística (RME) e de Episódios de Resolução de Tarefas e, outra, acerca do Pensamento Algébrico. No Capítulo 3 são apresentados aspectos metodológicos da pesquisa. No Capítulo 4 são apresentadas as tarefas elaboradas e utilizadas na fase de aplicação nas três turmas de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Londrina. A Figura 1 apresenta uma síntese do roteiro seguido na pesquisa apresentada.

**Figura 1 –** Roteiro de pesquisa




Fonte: Autoria própria (2023).

Por fim, além desse relatório, há um Produto Educacional, "*TAREFAS PARA EXPLORAR O PENSAENTO ALGÉBRICO"*, enquanto construto dessa pesquisa de mestrado. Trata-se de um E-Book composto por 5 tarefas e com sugestões de aplicação apresentada por meio de um livro digital de acesso livre, para que as pessoas possam visitar e utilizar. Segue *Link* para visualização TAREFAS PARA EXPLORAR O PENSAMENTO ALGÉBRICO.

# 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo serão apresentados, brevemente, aspectos relacionados à Educação Matemática Realística, a Episódios de Resolução de Tarefas e ao Pensamento Algébrico. Esses aspectos servirão de base para todo o desenvolvimento da pesquisa, desde a elaboração das tarefas, da organização do contexto pedagógico ao aplicá-las, assim como a análise dos dados coletados.

A Educação Matemática Realística é apresentada enquanto abordagem de ensino que sustenta a atitude da professora e que embasa a reflexão da pesquisadora da prática pedagógica. Já cada Episódio de Resolução de Tarefa configura-se enquanto estratégia de ensino tomada para desenvolver as tarefas elaboradas à luz da Educação Matemática Realística.

As considerações teóricas acerca do pensamento algébrico revelam o olhar dessa pesquisa, de modo a não ser aquele restrito à álgebra apresentada em resoluções de equações, mas aos elementos como generalização, abstrações e relações apresentadas pelos alunos ao resolverem tarefas (KAPUT, 1999).

## 2.1 RME E EPISÓDIOS DE RESOLUÇÃO DE TAREFAS

O ensino de matemática tradicional, aquele em que o professor expõe o conteúdo para o aluno e depois apresenta listas enormes de exercícios mecânicos com a ideia de que os alunos devem apenas reproduzir o que aprenderam, já não é atrativo para os alunos, e não desenvolvem a aprendizagem, conforme o esperado por educadores matemáticos em geral e também pelas diretrizes e bases nacionais. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), espera-se que o ensino e a aprendizagem da matemática aconteçam de modo a,

> contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas (BRASIL, 2018, p. 14).

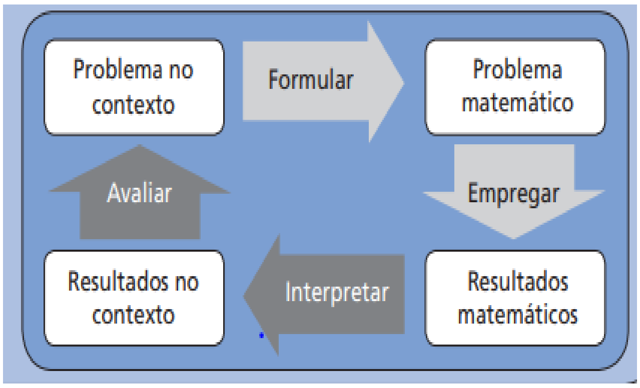
Também, que o aluno desenvolva o letramento matemático, que na BNCC é definido como a “habilidade” de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, com o propósito de favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (BRASIL, 2018). Essa definição vai ao encontro do conceito de letramento apresentado na matriz de 2012 do Programa Internacional de Avaliação de

Estudantes (Pisa), tradução de *Programme for International Student Assessment*, em que é apresentado enquanto sendo

> a capacidade individual de formular, empregar, e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias (OECD/PISA, 2012, p. 18).

O processo de letramento matemático se dá a partir da utilização de linguagem simbólica, formal, técnica e de operações, da compreensão de expressões simbólicas dentro do contexto e regras matemáticas. Envolve a compreensão e utilização de definições, regras e sistemas formais, que dependem do conteúdo matemático necessário para a resolução que se trata a tarefa específica, sendo possível, em cada caso, formular, resolver ou interpretar a matemática envolvida. Na Figura 2 temos um esquema que apresenta ações de formular, empregar, interpretar e avaliar, que estão envolvidas no processo de letramento.

**Figura 2** – Modelo de letramento em matemática




Fonte: OECD/PISA (2012, p. 18).

Com o objetivo de desenvolver, no contexto escolar, o letramento matemático dos alunos em nossas escolas, é preciso discutir metodologias e práticas letivas, estratégias que proporcionem aos alunos um aprendizado que os envolva e possibilite um protagonismo por parte de cada um no processo.

De modo particular tem-se, enquanto uma possibilidade, a Educação Matemática Realística (RME), uma abordagem de ensino holandesa, na qual a matemática é desenvolvida a partir de contextos da realidade do aluno, de situações e fenômenos que por eles podem ser ao menos imaginados. Hans Freudenthal, nos anos 70, foi o precursor das ideias centrais da RME.

De forma mais específica em relação à RME, baseando-se em Mendes (2014), adaptado de Freudenthal (1973), no Quadro 2, contraponto a um ensino tradicional, são destacadas algumas de suas características centrais.

**Quadro 2 –** Características da RME em relação ao Ensino Tradicional

| RME | Contrapontos | Tendências Tradicionais |
|---|---|---|
| Atividade humana | *A matemática como algo dinâmico e em desenvolvimento pelo homem* contrapondo a matemática enquanto conhecimento estático e já definido. | Disciplinas preestabelecidas |
| Matematização da Realidade | *A matemática em contextos realísticos*, contrapondo a utilização da realidade como simples aplicação dos conteúdos matemáticos. | Realidade matematizada |
| Reinvenção de conceitos | *As situações reais como meio de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos formais*, contrapondo o ensino tradicional, no qual o professor é um transmissor de conceitos. | Transmissão de Conceitos |
| Contextos ricos de significados | *Contextos que remetem a situações cotidianas e que tenham significado para o aluno*, contrapondo propostas de problemas que usam informações generalistas para exemplificar conteúdos matemáticos. | Reunião de problemas com informações apenas conceituais |
| Articulação da matemática com outros domínios | *Interdisciplinaridade e transdisciplinaridade* a partir das tarefas, contrapondo problemas que apenas contemplem o cálculo matemático mecanizado. | Matemática Isolada |
| Elaboração de representações mentais | *As tarefas matemáticas como meio de os alunos formalizarem pensamentos matemáticos e generalizações*, contrapondo a ideia de problemas que levam os alunos a aplicar conceitos matemáticos. | Conceitos |

Fonte: Autora – Adaptado de Mendes (2014, p. 21).

O ensino da matemática não deve ser apenas um conjunto de regras vindas dos livros, uma vez que a matemática é “uma atividade humana”, fundamentada em experiências do dia a dia e situações da realidade, promovendo a evolução dos níveis de compreensão e amplitude dos conceitos (FREUDENTHAL, 1973). A matemática é desenvolvida por níveis de compreensão que partem da matemática situacional, em que o aluno pode discutir suas descobertas a partir do conhecimento informal até que seja possível chegar à matemática formal, na qual realizam procedimentos e notações convencionais.

Gravemeijer (2005, 2007) propõe uma organização dos níveis de compreensão em quatro, sendo eles: **Situacional** (o domínio específico, contexto da situação); **Referencial – modelo de –** (modelos e estratégias se referem à situação descrita no problema); **Geral – modelo para –** (as estratégias se sobrepõem à referência ao contexto, os modelos servem para representar outras situações); **Formal** (procedimentos e notações convencionais) (GRAVEMEIJER, 2005)

No nível de compreensão **"modelo de"** espera-se que o aluno utilize seu conhecimento para resolver situações específicas do contexto da tarefa, relacionando o cálculo matemático e as estratégias escolhidas com a resposta esperada para solução da tarefa, enquanto no **"modelo para",** tendo como base um modelo referencial, de modo que o aluno utiliza de estratégias e cálculos realizados em suas experiências ao resolver tarefas semelhantes (ainda no nível de compreensão **"modelos de"** (GRAVEMEIJER, 2005).

De forma mais específica, direciona-se o olhar para a estratégia de ensino Episódios de Resolução de Tarefas à luz da RME (PALHA, 2013, 2014; MENDES; TREVISAN 2018; TREVISAN, MENDES, 2018). Episódios de Resolução de Tarefas é uma expressão adaptada de *Shift Problem Lessons*, proposta por Palha (2013), em que pressupõe um planejamento de ensino, o qual considera uma parte das aulas organizada em pequenos grupos de alunos, nos quais eles lidam com tarefas não precedidas de exemplos, desencadeando discussões que contribuam para elaborações conceituais (TREVISAN; MENDES, 2018). Propor Episódios de Resolução de Tarefas em aulas de matemática favorece ao aluno,

> a oportunidade, por meio da produção elaborada em conjunto de seus colegas, de aprender, não só no fazer, mas progressivamente no entender e no explicar suas escolhas, sendo dado a ele a oportunidade de rever os caminhos escolhidos. O professor, ao invés de ser o mentor de explicações, é o que incentiva as discussões, é o que questiona as ideias levantadas pelos alunos, e aquele que conduz a sistematização dos conceitos subjacentes às produções realizadas pelos alunos, a partir das tarefas planejadas (TREVISAN; MENDES, 2018, p. 12).

Organizar tarefas se utilizando de contextos nos quais os alunos se reconhecem e realizam ligações de como os conteúdos aprendidos podem ter correspondência com a realidade proporcionam condição de aprender, sendo que materiais convencionais em que são apresentados os conteúdos, seguidos de exercícios, podem diminuir o processo criativo dos alunos (LITHNER, 2004, 2008).

Na RME, os conteúdos matemáticos são abordados a partir do lidar com tarefas que envolvam contextos significativos para aqueles que as resolvem. Esses contextos podem favorecer que os alunos busquem por representações que já conhecem, representações externas facilitam o processo de estabelecer conexões com as relações e conceitos representados

(GRAVEMEIJER, 2005). O professor, ao escolher, elaborar tarefas, e realizar mediações influencia diretamente a organização do espaço pedagógico e, assim, a atitude do aluno em seu processo de aprendizagem, como o estabelecimento de conexões entre as representações.

A tarefa é uma peça-chave na evolução dos níveis de compreensão matemática de cada aluno. O professor, em seu planejamento, precisa saber o que pretende com cada tarefa e se atentar para o fato de saber se realmente essa situação escolhida para contextualizar faz parte da realidade dos alunos, se permite ao menos uma compreensão situacional. Para Gravemeijer (2005), muitas vezes as conexões entre o conhecimento interno do aluno e o conhecimento externo que tem que desenvolver não acontece, visto que "os professores tentam forçar os alunos a fazer conexões com o conhecimento externo que para eles não existe".

As tarefas na RME são matéria-prima em todo desenvolvimento na sala de aula. Palm (2009, p. 9) apresenta especificações que devem ser levadas em conta ao planejar e elaborar tarefas que simulem situações reais (Quadro 3). Essas especificações foram agrupadas em alguns aspectos que dizem acerca das escolhas ao elaborar o enunciado em si, como Elaborar Contextos e Dados/Apresentação e Soluções; do nível de compreensão exigido em Estratégia de Solução; das orientações e organização do contexto da sala de aula ao falar das circunstâncias. (Palm,2009).

**Quadro 3 –** Aspectos da simulação de situações reais

| **Elaborar contextos** | **Estratégia de Solução** |
|---|---|
| • Acontecimentos relevantes<br>• Questões a serem abordadas | • Disponibilidade com resoluções experienciadas |
| **Dados / Apresentação** | **Circunstâncias** |
| • Existência, realismo e Especificidades do tema abordado<br>• Linguagem e escrita adequada à faixa etária | • Orientação<br>• Disponibilidade de ferramentas<br>• Consultas e Colaboração<br>• Oportunidade de Discussão<br>• Tempo hábil<br>• Apresentação de Resultados |
| **Soluções** | |
| • Exigência de Solução<br>• Proposta de solução, de acordo com o contexto da proposta | |

Fonte: Autora – Adaptado de Palm (2009, p. 9).

Neste contexto de ensino, o professor assume o papel de organizador – promovendo discussões em grupos, escolhendo tarefas, descobrindo um equilíbrio entre "guiar e reinventar" a aprendizagem de seus alunos. Os alunos devem encontrar seu próprio caminho de exploração da tarefa, sendo o professor aquele que guia/orienta de modo a permitir que eles reinventem tantas matemáticas quanto necessárias para sua vida cotidiana, em direção aos objetivos educacionais. Ainda nesse sentido, o ensino segue um modelo de reinvenção guiada, em que os conteúdos se entrelaçam entre si a partir das produções dos alunos e suas interações uns com os outros (FREUDENTHAL, 1991). A partir desses aspectos, o professor encontra um caminho para planejar uma tarefa e sua execução em uma aula organizada para ser um Episódio de Resolução de Tarefas, por exemplo, o professor escolhe o momento adequado dentro de seu cronograma letivo, em seguida associa aos fenômenos adequados para levantar questões em que as estratégias escolhidas pelos alunos venham a ser ferramentas matemáticas para lidar com a situação, podendo ser a partir de informações baseadas no contexto escolar, do cotidiano do aluno (existência), realísticas (real imagináveis).

Ao planejar aulas, nas quais a estratégia de ensino Episódio de Resolução de Tarefas é considerada, o professor precisa organizar um ambiente em que os alunos evoquem discussões por meio da aprendizagem colaborativa em que assumem uma postura crítica, desenvolvem e compartilham estratégias para lidar com a tarefa. Palha (2013) diz que tarefas, quando abordadas nessa perspectiva, têm como finalidade fomentar compreensões em diferentes níveis, permitindo que os alunos explorem a matemática envolvida, transformando-a em ferramenta para lidar com outras situações.

Na aprendizagem colaborativa o professor tem um papel importante, deve estar atento para guiar e mediar as interações entre os alunos, para que "resolvam suas tarefas, construam um diagnóstico das estratégias por eles utilizadas e de suas dificuldades, e, a partir dessa exploração e identificação, decidir a forma de intervir" (MENDES, 2014, p. 34). Ao realizar trabalhos em grupos, o aluno deve entender que sua participação é relevante não só para obtenção de uma produção correta, mas para compartilhar e dialogar com seus colegas.

O trabalho em grupo é rotineiro em Episódios de Resolução de Tarefas, um aspecto central dessa estratégia. O aluno, ao estar em grupos heterogêneos, tem a oportunidade de colaborar na resolução de uma tarefa, de refletir e explicar aos outros alunos seu ponto de vista, e assim fomentar discussões por meio de diferentes estratégias e procedimentos, proporcionando um maior aprendizado de todos.

Para que seja possível utilizar a estratégia de Episódios de Resolução de Tarefas é importante que o professor dialogue com seus alunos acerca da importância da interação, de modo que entendam que devem trabalhar juntos colaborando um com o outro, a partir do fornecer e receber explicações sobre as estratégias e procedimentos tomados, do discutir pontos de vista, do aceitar a opinião do outro e de reestruturar ideias, promovendo reflexões que os levem às respostas da tarefa.

Durante o desenvolvimento das tarefas o professor precisa estar preparado para apoiar os alunos, reservar um momento inicial da aula para explicar a dinâmica da tarefa, formar os grupos, e no decorrer da aula precisa estar atento, é preciso que o professor esteja pronto para fomentar questionamentos que levem a discussões entre os alunos de forma que os direcione às respostas sem perderem o foco, partindo de compreensões situacionais na direção de compreensões de níveis mais elevados.

## 2.2 PENSAMENTO ALGÉBRICO

O modo como os alunos desenvolvem a sua compreensão de conceitos e procedimentos algébricos tem sido de interesse de pesquisas, nas quais tem surgido caracterizações para os modos de produzir significados para os processos e objetos da álgebra (CYRINO; OLIVEIRA, 2011). Essas caracterizações trazem consigo uma demanda em desenvolver tarefas exploratórias e investigativas enquanto instrumentos/meios de os estudantes produzirem significados e, para o professor, repensar os modos de organização de suas salas de aula:

> Tarefas exploratórias e investigativas adequadas criam oportunidades para o envolvimento dos alunos na Matemática. No entanto, a sua aprendizagem depende muito também de outros elementos da prática do professor, que se relacionam estreitamente com os papéis assumidos na sala de aula por todos os envolvidos e a comunicação que se desenvolve (PONTE, 2010, p. 10).

Se faz necessário apresentar o entendimento e a distinção de pensamento algébrico e álgebra neste trabalho assumido. O Pensamento Algébrico pode ser sintetizado “como um modo de descrever significados atribuídos aos objetos da álgebra, às relações existentes entre eles, à modelação, e à resolução de problemas no contexto da generalização destes objetos” (CYRINO; OLIVEIRA, 2011, p. 103), enquanto a álgebra, considerada “como um corpo autônomo de conhecimento – como um artefato cultural” (KAPUT, 2008 p. 8).

Segundo Blanton e Kaput (2005), o Pensamento Algébrico pode assumir diferentes formas, como

> a) utilização da aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada);
> b) generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional);
> c) modelação como um domínio para expressar e formalizar generalizações;
> d) generalização sobre sistemas matemáticos a partir de cálculos e relações (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413).

Esses autores sugerem que as generalizações estabelecidas pelos alunos partam de casos particulares por meio de discursos argumentativos, que se desenvolvem de maneira progressivamente mais formal e adequados à idade e escolaridade (BLANTON; KAPUT, 2005).

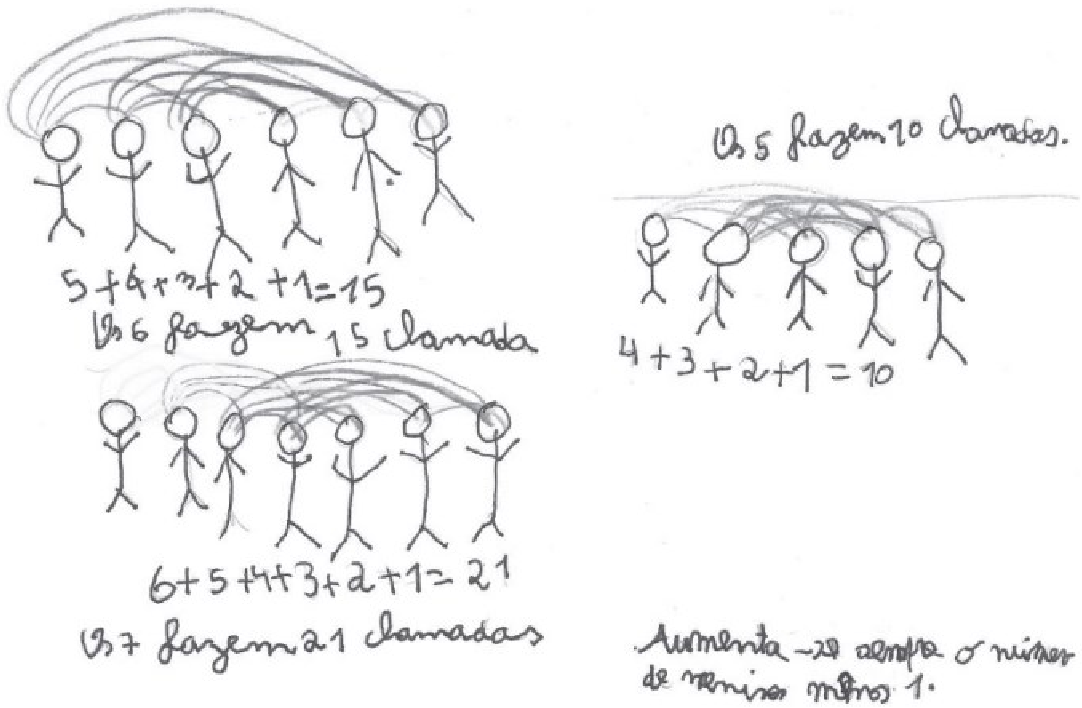
Baseado em Cyrino e Oliveira (2011), com relação às formas elencadas do pensamento algébrico tem-se que a **aritmética generalizada** refere-se ao raciocínio sobre as operações e as propriedades associadas aos números; o **pensamento funcional** envolve a exploração e a expressão de regularidades numéricas; a **modelação** envolve generalização de situações matematizadas ou de fenômenos, na qual a regularidade é objetivo secundário relativamente ao objetivo mais geral da tarefa; a **generalização** envolve uma forma de raciocínio algébrico menos comum no currículo do ensino básico sobre sistemas matemáticos abstratos de cálculos e relações.

O desenvolvimento e constituição do pensamento algébrico demanda tempo e pressupõe no currículo de matemática, desde o início da escolarização, um trabalho contínuo que, por meio de diferentes tipos de exploração, vai se tornando complexo à medida que as tarefas matemáticas e os conceitos também se complexificam (NACARATO; CUSTÓDIO, 2018). Para tanto, conforme Kaput (1999), é sugerido que o ensino da álgebra seja muito mais que lidar com equações, inequações e funções, deva:

> Começar (pela construção do conhecimento informal dos alunos); – Integrar a aprendizagem da álgebra com a aprendizagem de outros assuntos (por estender e aplicar o conhecimento matemático); – Incluir as várias formas de pensamento algébrico (aplicando o conhecimento matemático); – Construir nos alunos naturalmente poderes linguísticos e cognitivos (incentivando-os ao mesmo tempo para refletir sobre o que aprender e articular o que eles sabem), e; – Incentivar a aprendizagem ativa (e na construção dos relacionamentos) valorizando a percepção e compreensão dos alunos (KAPUT, 1999, p. 3).

Indícios do pensamento algébrico, independentemente da tarefa analisada, podem ser buscados por meio da linguagem, da simbologia matemática ou até mesmo por desenhos, sendo um caminho para compreender o modo de lidar com conceitos e de expressar determinadas situações, reconhecendo conjecturas levantadas e o teste de hipóteses. A Figura 3, retirada de Canavarro (2007, p. 85), é um dos exemplos de produções de alunos, a partir das quais o autor explora indícios da presença do pensamento algébrico aos alunos lidarem com a situação para descobrir o número de telefonemas que grupos de amigos teriam que fazer para felicitarem todos entre si, sendo os grupos de 5, 6 e 7 amigos.

**Figura 3** – Pensamento algébrico presente na produção dos alunos




Fonte: Canavarro (2007, p 85).

Sobre a produção apresentada na Figura 3, a autora menciona que os alunos elaboraram uma estratégia criativa para uma situação complexa que não conheciam, sendo que nela foi possível identificar a estrutura matemática da situação em análise; o estabelecimento de relações numéricas entre as duas variáveis em causa; generalização de uma regra para a determinação de qualquer termo da sequência, em linguagem natural (CANAVARRO, 2007).

Essa produção (Figura 3), que utiliza de desenhos, é um exemplo que demarca o fato de que a notação algébrica convencional não é o único veículo para exprimir ideias algébricas, sendo a linguagem natural, e outros elementos como diagramas, tabelas, expressões numéricas, gráficos, podem também ser usados para expressar o pensamento algébrico (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007).

Nessa direção, a atividade do professor no contexto de uma sala de aula favorece o desenvolvimento e exploração do pensamento algébrico, que investiga a compreensão dos significados das utilizações dos símbolos enquanto recursos para representar ideias gerais, de modo que, “Trata-se de olhar através dos símbolos e não de olhar os símbolos” (KAPUT; BLANTON; MORENO, 2008, p. 88). No Quadro 4 são apresentadas características do pensamento algébrico que podem ser buscadas aos alunos lidarem uma tarefa matemática.

**Quadro 4 –** Características do pensamento algébrico

| **Aritmética Generalizada** | **Pensamento funcional** | **Modelação ou Pensamento Relacional** | **Generalização** |
|---|---|---|---|
| Uso da aritmética enquanto domínio para expressar e formalizar generalizações.<br><br>Formulação de conjecturas, compreensão de propriedades matemáticas e aritméticas. | Generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais.<br><br>Estabelecimento de uma relação de equivalência.<br><br>Exploração de correspondências entre grandezas, quantidades,<br><br>Expressar por meio da linguagem matemática ou materna uma regra para descrever uma relação. | Modelação como um domínio para expressar e formalizar generalizações.<br><br>Estabelecimento de padrões e regularidades.<br><br>Evidenciar sentido de símbolo, interpretando o mesmo símbolo em diferentes contextos.<br><br>Uso de expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios. | Generalização sobre sistemas matemáticos a partir de cálculos e relações.<br><br>Generalização, validação de ideias por meio de testes e comparações, entre outros.<br><br>Reconhecimento de regularidade, característica, ou propriedade em uma situação específica, e possibilidade de aplicar o que percebeu em situações mais gerais. |

Fonte: Autora, baseado em Lins e Gimenez (1997) e Blanton e Kaput (2005).

Contudo, "a aposta por parte do professor no pensamento algébrico implica, sobretudo, uma aposta no raciocínio dos alunos e um acreditar na possibilidade de estes construírem conhecimento matemático" (CANAVARRO, 2007, p. 113). Com essa aposta e acreditar que esta pesquisa escolheu Episódios de Resolução de Tarefas à luz da RME, para aproveitar indícios do pensamento algébrico reconhecidos em produções dos alunos para discutir encaminhamentos possíveis da organização de espaços pedagógicos e da prática docente.

## 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Trata-se de uma pesquisa, que utilizou a estratégia de ensino Episódios de Resolução de Tarefas em turmas do 8º ano do Ensino Fundamental (turma em ensino remoto 6º e 7º ano) de uma escola pública de Londrina, para recolher diálogos e produções escritas dos alunos, e com isso gerar informações acerca dos indícios do pensamento algébrico deles ao lidar com tarefas matemáticas. A partir dessas informações, como resultado da reflexão da professora pesquisadora (PONTE, 2002), discutir encaminhamentos enquanto reflexões para a organização de espaços pedagógicos.

A análise dos dados da pesquisa aqui apresentada é de natureza qualitativa de cunho interpretativo. O fato de recolher dados no ambiente natural em que as ações ocorrem (sala de aula), descrever as situações vividas pelos participantes e refletir e interpretar os significados que estes lhes atribuem justifica a realização de uma abordagem qualitativa. Segundo Denzin e Lincoln (2006), a pesquisa qualitativa envolve uma abordagem interpretativa do mundo, o que significa que seus pesquisadores estudam as coisas em seus cenários naturais, tentando entender os fenômenos em termos dos significados que as pessoas a eles conferem.

Foram elaboradas cinco (5) tarefas pela autora, e, a partir delas, planejados e desenvolvidos Episódios de Resolução de Tarefas (Acesse: Tarefas Elaboradas)

O Quadro 5 apresenta uma síntese dos objetivos de aprendizagem de cada uma das tarefas.

**Quadro 5 –** Objetivos de aprendizagem das tarefas

| TAREFA | CONTEXTO | OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM |
|---|---|---|
| TAREFA 1 | FaçaFesta | • construir uma expressão numérica usando soma e subtração;<br>• resolver a expressão numérica e estabelecer ligações entre as respostas para expor a solução. |
| TAREFA 2 | Escolha de Combustível | • construir uma expressão numérica utilizando propriedade da multiplicação e divisão;<br>• compreender e utilizar o cálculo e a aplicação da média aritmética simples;<br>• resolver a expressão numérica e interpretar a solução elaborando uma ideia conclusiva. |

| | | |
|---|---|---|
| TAREFA 3 | Crise Econômica | • construir expressão numérica a partir dos elementos conhecidos, desconhecidos e condições dos dados;<br>• resolver corretamente a expressão numérica construída;<br>• interpretar a solução do problema com a interpretação dos resultados significativos para o primeiro objetivo, determinando os resultados a serem utilizados para reconstruir outra expressão numérica;<br>• refazer cálculos que resolvam o segundo objetivo da tarefa a partir de novas informações. |
| TAREFA 4 | Desafio do Quebra-cabeça | • interpretar o significado de raiz quadrada exata;<br>• reconhecer números quadrados perfeitos;<br>• fazer conexão entre a potenciação e raiz quadrada exata. |
| TAREFA 5 | Crescimento de Bactérias | • reconhecer uma sequência numérica;<br>• compreender a regularidade encontrada na sequência;<br>• utilizar e compreender a simbologia que expresse a regularidade existente na sequência numérica de forma genérica. |

Fonte: Autoria própria (2023).

Os enunciados das duas tarefas, FAÇAFESTA e ESCOLHA DE COMBUSTÌVEL que foram discutidas nessa dissertação são apresentados na seção 3.1, e o conjunto das cinco tarefas é apresentado no Apêndice A. O detalhamento do contexto em que se deram os episódios é apresentado na seção 3.2.; na seção 3.3 é apresentado o modo que se deu a descrição, análise dos trechos de diálogos e análise de produções escritas. Para discussão de encaminhamentos possíveis, enquanto reflexões para a organização de espaços pedagógicos proposto no objetivo geral dessa pesquisa, é apresentada uma descrição do desenvolvimento de um grupo de alunos ao lidar com a Tarefa 1 (seção 4.1), e de um grupo ao lidar com a Tarefa 2 (seção 4.2).

## 3.1 TAREFAS E CONTEÚDOS ENVOLVIDOS

A elaboração das tarefas foi realizada pela professora-pesquisadora, com o intuito de partir da organização de um material e planejamento de ensino, e possibilitar aos alunos a manifestação, em suas produções, de indícios do pensamento algébrico como Aritmética generalizada, Pensamento funcional, Modelação e Generalização, e que fossem instrumentos de regulação da prática pedagógica do professor. Para Ponte (2014, p. 17), “as tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e aprendizagem da matemática, uma tarefa pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que podem ajudar a mobilizar”.

Para que essas tarefas alcançassem o objetivo foram pensadas de forma a contemplar respostas nas quais os alunos expressassem ideias que permitissem evidenciar o modo de raciocinar e expor seu ponto de vista, suas estratégias e procedimentos. Além disso, a professora buscou por tarefas que permitiriam aos alunos mostrar seus conhecimentos de forma livre, porém direcionada.

A organização da sala de aula foi planejada para que os alunos trabalhassem em grupos de 04 integrantes, distribuídos de forma a deixar espaços para que a professora pudesse caminhar entre eles. Cada grupo deveria eleger uma versão final da produção escrita a partir do lidar com a tarefa para entregar à professora, porém cada um realizaria suas produções em seus cadernos.

No início do primeiro episódio, a professora entregou o Caderno de Tarefas, contendo as 5 tarefas com instruções básicas para a resolução e especificidades de como deviam proceder para entrega das mesmas (Apêndice A).

Durante a realização da tarefa a professora deu orientações e realizou questionamentos para guiar e orientar o pensar investigativo dos alunos. Após o término do episódio, a professora analisou de forma horizontal as produções de cada grupo para identificar indícios do pensamento algébrico.

### 3.1.1 Tarefa 01 – FaçaFesta

**Temática:** *Números e Álgebra* – Operações com Números Inteiros.

**Habilidades essenciais:** Ler, interpretar e resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos (soma, subtração); expressar e resolver problemas por meio de expressões numéricas; reconhecer que as estratégias de resolução de um problema podem ser reutilizadas em problemas que têm a mesma estrutura.

**Procedimentos utilizados:** adição, subtração e expressões numéricas com números naturais.
**Números de aulas previstas:** 2 aulas de 50 minutos.

**Quadro 6 –** Enunciado da Tarefa 1 – FAÇAFESTA

| |
|---|
| FAÇAFESTA é uma empresa que produz salgados para festas infantis. Para certa festa, a empresa recebeu uma encomenda de 200 esfirras, 120 empadas e 80 minipizzas. Sabendo que já possui congelado 168 esfirras, 95 empadas e 72 minipizzas, é preciso determinar a quantidade de salgado que a empresa precisa separar de uma nova produção para completar a encomenda da festa. |

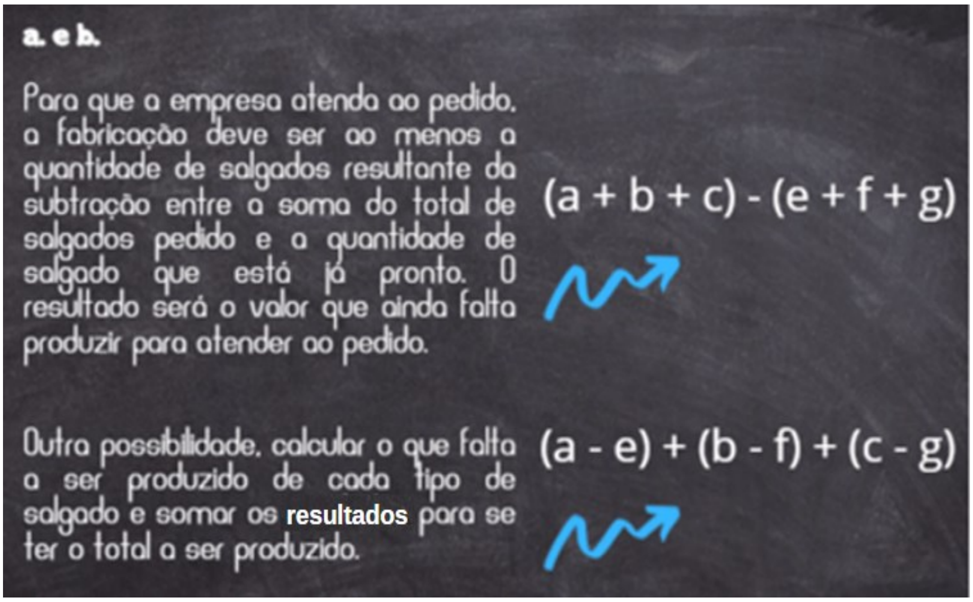
| | |
|---|---|
| a. | Conversem como essa empresa pode determinar o que é preciso, no mínimo, produzir para atender a encomenda recebida. |
| b. | Agora escrevam, brevemente, sem usar simbologia matemática, como vocês diriam para a empresa calcular. |
| c. | Nessa estratégia escolhida pelo grupo foram realizadas quais operações? |
| d. | Agora, se o comando fosse sintetizar a estratégia escolhida em uma expressão numérica como vocês a representariam. |
| e. | O que mudaria se em vez de uma encomenda por tipos de salgado, se tivesse sido um pedido de 300 salgados no total (esfirras, empadas, minipizzas)? Expliquem essa mudança por meio de uma expressão numérica. |

Fonte: Autoria própria (2023).

**Exploração do Pensamento algébrico – potencial da Tarefa 1:**

Nos itens **a** e **b** da Tarefa 1, os alunos discutem e expõem a interpretação das informações do enunciado e levantam hipóteses de estratégias de como deve ser calculado a produção mínima de salgados necessários para atender a demanda. Nesse processo, de levantamento de hipóteses e de formulação de conjecturas, os alunos têm a oportunidade de expor compreensões de propriedades matemáticas e aritméticas em relação à propriedade associativa da adição, indícios da Aritmética Generalizada.

**Figura 4** – Expectativa de resposta dos itens a e b da Tarefa 1

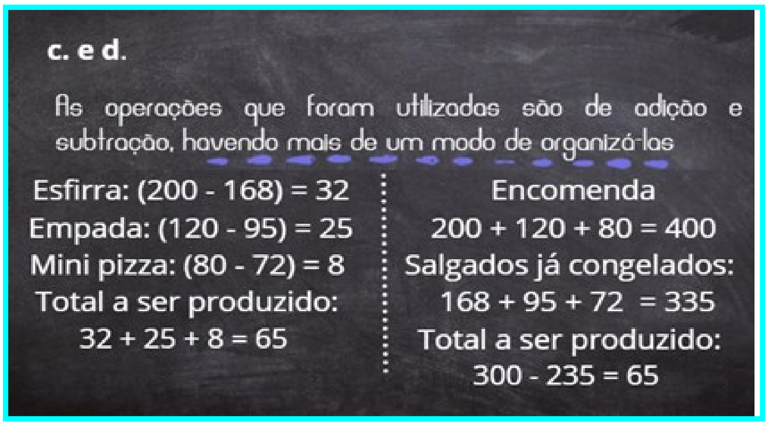



Fonte: Autoria própria (2023).

Apesar de as expressões apresentadas na Figura 4 serem matematicamente equivalentes, e ambas permitirem responder a quantidade total de salgados que é preciso ser feita, a expressão permite responder o total de salgados a ser feito, especificando a quantidade de cada tipo de salgado enquanto resultado de cada uma das parcelas.

Nos itens **c** e **d**, os alunos formulam uma expressão numérica que representa, matematicamente, a tarefa de se ter a quantidade total de salgados a ser feita, sendo possível observar que, apesar de gerar expressões matematicamente equivalentes, apenas o cálculo declara a quantidade de cada tipo de salgado e o total a ser feito.

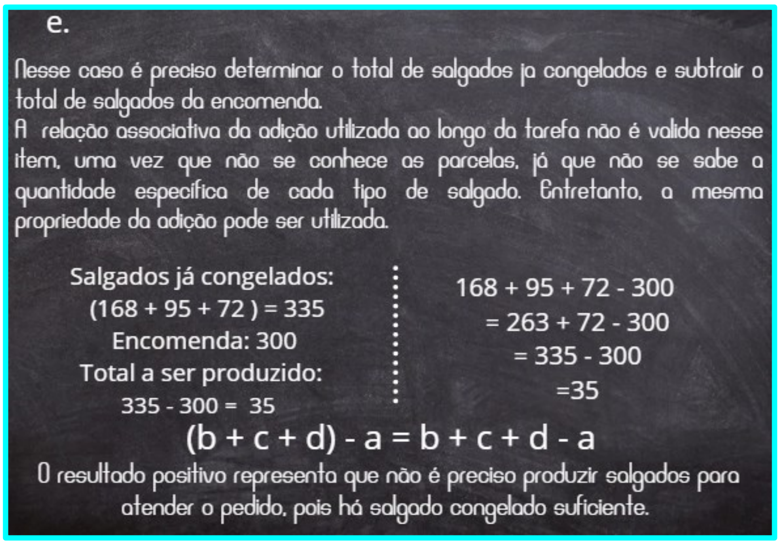
**Figura 5** – Expectativa de resposta dos itens c e d da Tarefa 1




Fonte: Autoria própria (2023).

No item **e**, os alunos precisam ser capazes de perceber a alteração da situação e estabelecer uma nova estratégia de resolução. Nesse processo podem buscar por regularidades com os itens **c** e **d**, realizando uma generalização da simbologia e estratégia em diferentes contextos.

**Figura 6** – Expectativa de resposta do item e da Tarefa 1




Fonte: Autoria própria (2023).

Com a intenção de intervir e acompanhar o desenvolvimento de cada grupo, a professora ao caminhar pela sala irá realizar questionamentos que direcionem as discussões, linguagens e produções dos estudantes. Nesta primeira tarefa, a professora pode realizar questões como:

- Qual é a encomenda que FAÇAFESTA recebeu para cada salgado?
- Quantas esfirras, empadas e minipizzas já estão prontas?
- O que você precisa responder no problema?
- Qual operação será necessária utilizar?
- Qual é a expressão numérica para solucionar esse problema?
- Qual a quantidade de cada salgado que precisa produzir?
- Caso estivessem prontos apenas 20 salgados, quantos, ao todo, ainda teria que fazer para atender ao pedido?

### 3.1.2 Tarefa 2 – A escolha de combustível

**Temática:** *Números e Álgebra* – Operações com Números Inteiros.

**Habilidades essenciais:** Ler, interpretar e resolver um problema utilizando diferentes algoritmos (multiplicação, divisão); expressar e resolver problemas por meio de expressões numéricas; compreender e utilizar cálculos de média com base no contexto e em um conjunto de dados; reconhecer que as estratégias de resolução de um problema podem ser reutilizadas em problemas que têm a mesma estrutura.

**Procedimentos utilizados:** multiplicação, divisão, média simples e expressões numéricas com números racionais.

**Números de aulas previstas:** 2 aulas de 50 minutos.

**Quadro 7 –** Enunciado da Tarefa 2 – A ESCOLHA DE COMBUSTÍVEL

| |
|---|
| Lucas quer fazer uma viagem para uma cidade que está a uma distância de 288 km de sua casa. A capacidade do tanque de combustível do carro é de 50 litros, e seu carro desloca em média 12 km com um litro de álcool.<br><br>a. Conversem como vocês podem explicar para o Lucas quantos litros de álcool o tanque deve ter, no mínimo, para que ele possa fazer essa viagem.<br>b. Agora escrevam, brevemente, sem usar simbologia matemática, como vocês diriam para Lucas calcular e, em seguida, apresentem esse cálculo.<br>c. Nessa estratégia escolhida pelo grupo foram realizadas quais operações? Foi a única estratégia pensada ou pensaram em outras? Apresente todas as estratégias pensadas. |

d. Depois de Lucas pensar sobre a quantidade de álcool que precisaria colocar para viajar, decidiu estimar sobre a quantidade de álcool que tem gastado por mês, uma vez que ele percorre de carro em média 2.400 quilômetros por mês. Sua estimativa é de 4 tanques de 50 litros de álcool. Vocês concordam? Apresentem argumentos que confirmem ou não o resultado estimado que Lucas encontrou.

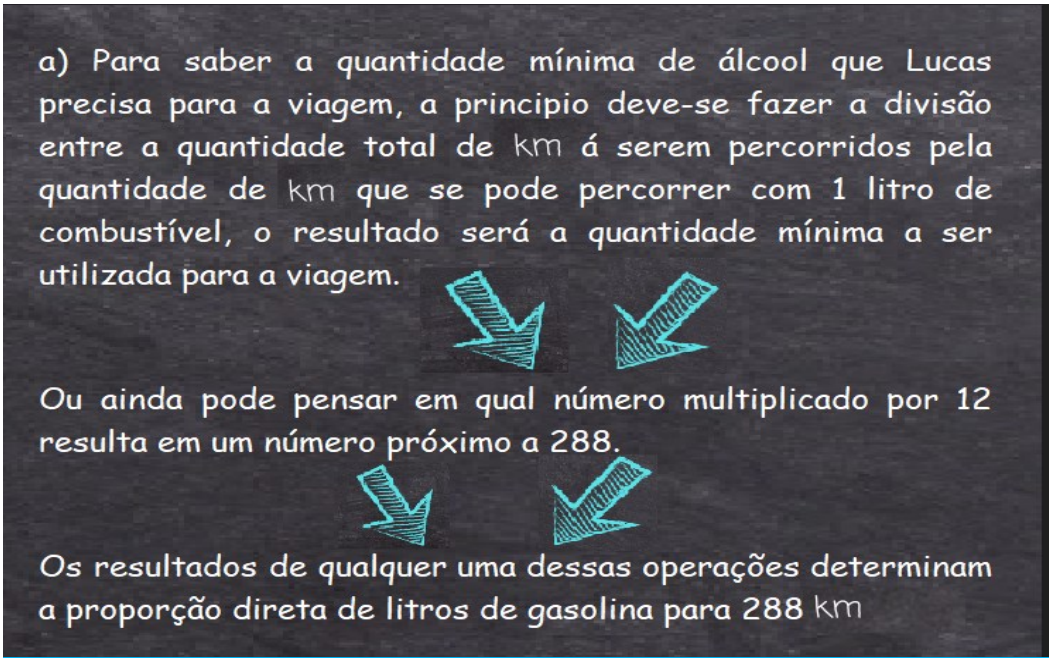
e. Façam uma consulta ao *Google*[2] sobre o valor do litro de álcool e calculem qual o percentual, em relação a um salário mínimo, que Lucas gasta por mês com combustível.

Fonte: Autoria própria (2023).

**Exploração do Pensamento algébrico – potencial da Tarefa 2:**

No item **a** os alunos têm a oportunidade de interpretar a situação-problema relacionada à viagem planejada e, por meio de operações e propriedades da multiplicação e da divisão, relacionar e estimar o que foi solicitado em cada item. Nesse processo em que relacionam o total de km rodados e quantidade de combustível utilizado podem mobilizar indícios do pensamento na forma da **Aritmética generalizada**, uma vez que tomam mão das operações e propriedades como meio de formalizar suas estratégias de resolução**.**

**Figura 7** – Expectativa de resposta do item **a** da Tarefa 2

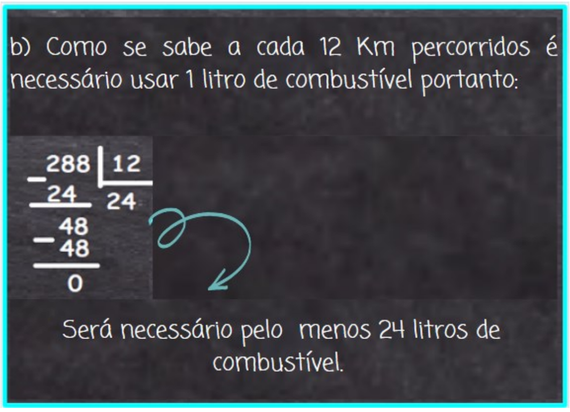



Fonte: Autoria própria (2023).

[2] A consulta ao *Google* acontece porque nessa escola os alunos têm acesso pessoal à internet e todos os grupos poderiam fazer a pesquisa, porém, em outra realidade (sem Internet), os alunos poderiam ter pesquisado anteriormente um valor médio para o preço do litro de combustível em casa.

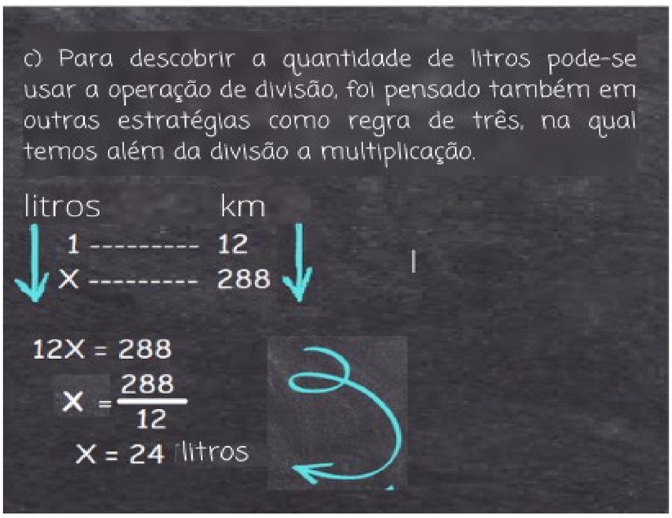
Nos itens **b** e **c**, os alunos descrevem e compartilham suas estratégias em um processo que favorece estabelecer relações de equivalências, indícios do **Pensamento Funcional**. Além disso, por meio do lidar com esses itens, os alunos podem ampliar suas compreensões acerca do conceito de média, unidades de média como quilômetro e litro.

**Figura 8 –** Expectativa de resposta do item **b** da Tarefa 2




Fonte: Autoria própria (2023).

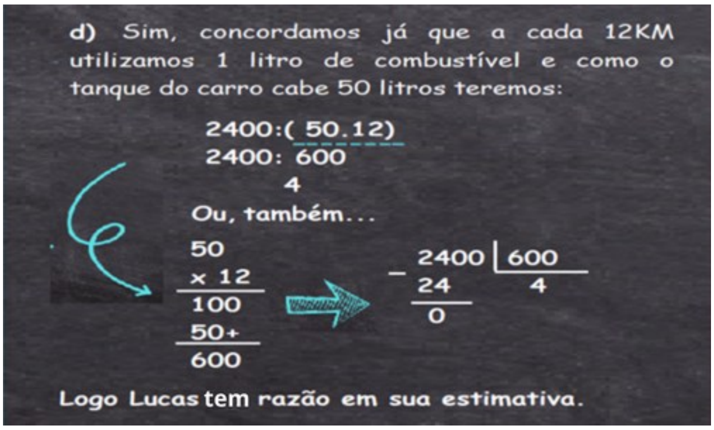
**Figura 9 –** Expectativa de resposta do item **c** da Tarefa 2




Fonte: Autoria própria (2023).

No item **d**, indícios do pensamento de Modelação poderá ser mobilizados pelos alunos ao utilizarem cálculos dos itens anteriores, assim como as estratégias escolhidas pelo grupo para novos cálculos, a fim de obter a quantidade de litros de álcool necessários mensalmente. Além disso, ao perceberem que o cálculo da média de consumo de combustível em relação à quilometragem poderá ser realizado em qualquer espaço de tempo, os alunos utilizam a aritmética enquanto forma de expressar uma generalização de estratégia de resolução indícios do **pensamento de Generalização**.

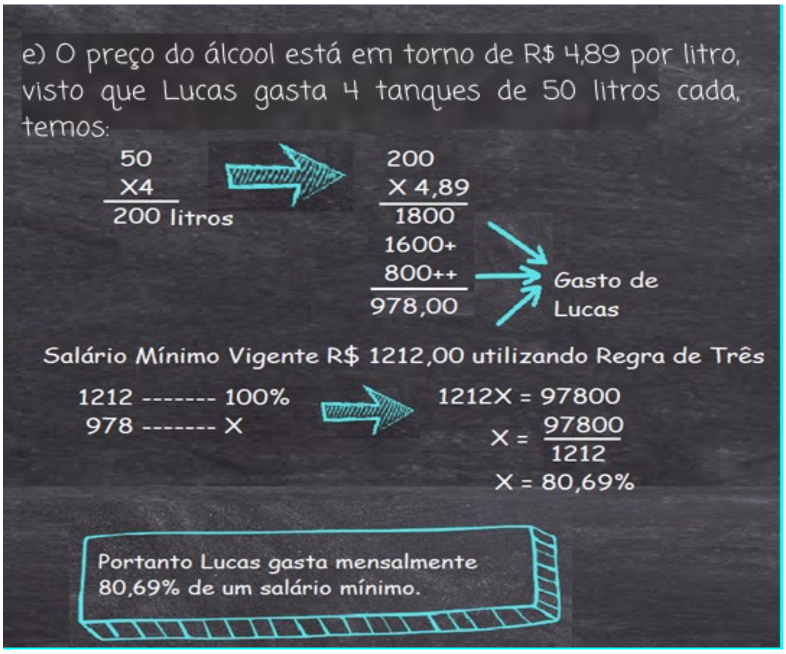
**Figura 10 –** Expectativa de resposta do item **d** da Tarefa 2




Fonte: Autoria própria (2023).

No item **e**, ao realizar cálculos pensando em seu contexto de vida, no salário mínimo e também no valor de combustível aplicado nos dias atuais com informações e dados reais, fazendo pesquisa em tempo real, com seus meios (celular ou *tablet*), estará mobilizando o **pensamento de generalização**, ao utilizar propriedades da multiplicação e, possivelmente, a regra de três, fará conexões com os cálculos já realizados e, com isso, perceberá ser possível a utilização desse pensar em qualquer situação que se assemelhe a essa (com valores diversos).

**Figura 11 –** Expectativa de resposta do item **e** da Tarefa 2




Fonte: Autoria própria (2023).

Para acompanhar o desenvolvimento de cada grupo, a professora ao caminhar pela sala poderá realizar questões como:

- Qual é a distância da viagem que Lucas pretende fazer?
- O que significa afirmar que um carro desloca em média 12 km com 1 litro de álcool?
- O que você precisa responder na tarefa?
- Quais operações serão necessárias utilizar?
- Qual é a expressão numérica para solucionar esse problema?
- O que significa o valor de 2.400 km citado no problema?
- Como você faria para ter certeza de que a quantidade de 4 tanques de combustível é suficiente para Lucas utilizar durante o mês?

## 3.2 DESENVOLVIMENTO DOS EPISÓDIOS DE RESOLUÇÃO DE TAREFAS

A organização para a aplicação das tarefas foi realizada no 1º trimestre de 2022, em três turmas de 8º ano, todas com 33 alunos cada, num total de 99 alunos, que possuem 5 aulas semanais da disciplina de matemática, nas quais a professora responsável é a própria pesquisadora.

Os alunos participantes da pesquisa, por motivo da pandemia de Covid-19, estiveram em ensino remoto nos anos anteriores, e alguns apenas tiveram acesso a conteúdos nesse período por meio de materiais impressos e aulas via TV aberta.

Para o desenvolvimento dos Episódios de Resolução de Tarefas, foi escolhido o dia em que a turma iria ter aulas geminadas, então a sala foi preparada de modo a possibilitar que os alunos se acomodassem em grupos de 4 pessoas e entre os grupos tivesse espaço para que a professora pudesse se locomover. *A priori* foi avisado aos alunos que se organizassem e cada grupo deveria ser responsável pela gravação do diálogo ocorrido no momento das resoluções (por celular), e após o término deveriam enviar a gravação para a professora.

No início da aula, já com os Cadernos de Tarefas impressos e organizados, a professora distribuiu o caderno de questões contendo as 5 tarefas com instruções básicas para a resolução e especificidades de como devem proceder para entrega das mesmas (Apêndice A).

Apesar das tarefas serem realizadas em pequenos grupos, os cadernos foram distribuídos individualmente, e todos entregaram as produções realizadas. Após foi feita a leitura das instruções para lidar com possíveis dúvidas sobre o enunciado que os alunos tivessem. A princípio foi orientado que apenas uma das tarefas seria realizada nesse dia e que deveriam se concentrar nela, em seguida foi permitido o início da tarefa e orientado que, em caso de qualquer dúvida, os alunos deveriam solicitar a presença da professora para orientações individuais ao grupo.

Durante a aplicação os alunos receberam auxílio sempre que solicitavam, de modo que a professora pudesse, além de sanar dúvidas, orientar por meio de questionamentos com o intuito de favorecer reflexões mais profundas e trocas de ideias entre os integrantes do grupo.

Ao terminarem a tarefa ao final da 2ª aula, os alunos fizeram a entrega dos cadernos para a professora e enviaram os áudios gravados via o aplicativo *WhatsApp*. A partir disso foi feita uma análise horizontal das resoluções e a transcrição dos áudios para coleta de dados apresentados na pesquisa.

Ao nos referir a analise horizontal segundo Santos (2014), é uma técnica utilizada para comparar a evolução de uma variável ao longo do tempo. No contexto da produção escrita, essa técnica pode ser aplicada para examinar a evolução do estilo, da estrutura ou do conteúdo do texto ao longo de diferentes versões, e assim reconhecer diferentes formas de resoluções que os alunos apresentaram.

## 3.3 SOBRE A REFLEXÃO A PARTIR DA PRÓPRIA PRÁTICA

A partir das resoluções escritas e áudios dos alunos aqui apresentados, a professora pesquisadora pode identificar indícios do pensamento algébrico proposto nesse estudo e também realizar uma reflexão sobre seu planejamento e prática docente, Ponte (2002) discute a importância da reflexão sobre a própria prática docente por parte do professor em sala de aula. Segundo ele, a reflexão é uma atividade fundamental para o desenvolvimento profissional do professor, pois permite a identificação e a análise crítica das práticas pedagógicas utilizadas em sala de aula.

Além disso, a reflexão possibilita ao professor a compreensão dos processos de aprendizagem dos alunos, permitindo uma identificação de estratégias mais adequadas para cada situação. Ponte destaca ainda que a reflexão deve ser um processo contínuo e sistemático, envolvendo a observação, análise e avaliação das práticas pedagógicas adotadas. Dessa forma, o autor ressalta a importância do professor como pesquisador da própria prática, buscando constantemente aprimorar suas habilidades para proporcionar um ensino de qualidade aos seus alunos.No Capítulo 4 são apresentados trechos de diálogos e algumas produções escritas de grupos de alunos, ao desenvolverem duas das cinco tarefas elaboradas, e para tal foram escolhidas siglas para representar as tarefas, os grupos e os alunos envolvidos, de modo que tornem a leitura mais dinâmica. Serão utilizadas as seguintes siglas: G1 para se referir ao Grupo 1 escolhido, T1 para denominar Tarefa 1 desenvolvida, a fim de que a combinação de G1T1 se refira à resolução do Grupo 1 para a Tarefa 1. E para referenciar alunos usaremos A1, A2, A3 e A4, de modo que a combinação A1T1, A2T1, A3T1 e A4T1, faça referência ao aluno que resolve a Tarefa 1 no Grupo 1. Da mesma forma, para a Tarefa 2 será utilizada a sigla G2 para se referir ao Grupo 2, T2 para denominar Tarefa 2, de modo que a combinação de G2T2 se refira à resolução do Grupo 2 para a Tarefa 2, e para referenciar alunos usaremos A5, A6, A7 e A8, de modo que a combinação A5T2, A6T2, A7T2 e A8T2, se refira ao aluno que resolve a Tarefa 2 no Grupo 2.

Observou-se, após a análise horizontal, que a grande maioria dos alunos apresentaram resoluções semelhantes com reflexões e detalhamentos muito similares. A partir disso foram escolhidas algumas das produções, priorizando aquelas que pudessem estar com letras mais legíveis e grupos que fizeram áudio com melhor qualidade para que na descrição do mesmo ficasse melhor explicitada a importância da organização e das intervenções realizadas pela professora.

A análise das resoluções seguiu as etapas da Análise da Produção Escrita (APE), apresentadas no Quadro 8, juntamente com as ações que serão realizadas em cada uma delas para analisar as produções oriundas da aplicação das tarefas propostas.

**Quadro 8 –** APE e ações a serem realizadas

| **Etapas da análise da produção escrita** | **Ações para realização da análise da produção escrita em cada etapa** | |
|---|---|---|
| Pré-análise | Leitura e reconhecimento dos Cadernos de Tarefas, contendo a tarefa proposta com as resoluções detalhadas das mesmas. | A pesquisadora investiga como os alunos lidam com as tarefas, em relação a seu contexto e interpretação. |
| Exploração de Material | Análise e exploração minuciosa das produções dos alunos de forma horizontal, com objetivo de identificar e agrupar regularidades de resoluções e justificativas individuais para o uso da estratégia aplicada para resolver a questão. | A pesquisadora identifica estratégias e procedimentos nas resoluções escritas.<br>Identifica as produções que evidenciam indícios do pensamento algébrico, como: aritmética generalizada; pensamento funcional; pensamento de modelação; generalizações. |
| Inferência | A professora busca meios (leitura, conversa com os alunos) para entender as produções dos alunos e suas formas de exposição dos pensamentos nas produções. | • investigar como os alunos lidaram com a tarefa e como decidiram em relação ao procedimento de resolução adotado;<br>• reconhecer e desenvolver justificativas teóricas de acordo com o conteúdo proposto nos itens; |

| | | |
|---|---|---|
| | | • analisar os indícios do pensamento algébrico evidenciados nas produções. |
| Interpretação | Interpretar como os alunos procedem frente à problemática da tarefa estando ela correta ou não, com o intuito de perceber indícios do pensamento algébrico, buscando identificar caminhos matemáticos percorridos por eles no decorrer das resoluções, analisar erros de procedimentos, para que a partir daí o professor elabore estratégias para sua prática pedagógica e realize futuros *feedbacks*. | |

Fonte: Autora, baseado em Santos (2014).

Esse tipo de análise proporciona ao professor uma investigação e se mostra como um caminho para conhecer vários indícios da resolução dos alunos e torna capaz ao professor orientar sua prática a partir das informações coletadas nessas produções.

A APE permite ao professor entender o seu aluno, e o próprio aluno perceber suas maneiras de lidar com uma tarefa. Segundo Viola dos Santos e Buriasco (2008, p. 17),

> Análise da produção escrita é uma das formas de buscar conhecer mais detalhadamente como os alunos lidam com o que aprendem de Matemática na escola; como se configuram seus processos de aprendizagem; quais dificuldades encontram, tomando como referência suas maneiras de lidar diferentes ou não da considerada correta, como constituintes do processo de aprendizagem. [...] A produção escrita possibilita tanto conhecer quais "conteúdos matemáticos" os alunos demonstram saber, os "erros" que cometem e suas dificuldades, quanto ter uma compreensão de como utilizam seus conhecimentos matemáticos escolares (VIOLA DOS SANTOS; BURIASCO, 2008, p. 17).

As produções escritas consideradas nesta pesquisa incluem os protocolos com resoluções dos alunos às tarefas propostas, e que permitem inferir indícios do pensamento algébrico. Além das produções escritas, foram gravados áudios nos quais é possível perceber que houve diálogos entre os integrantes dos grupos, e identificar a orientação da professora, ao responder a questionamentos dos alunos individualmente, e fazer perguntas preestabelecidas.

Utilizando a APE, foram escolhidos recortes de transcrições dos diálogos e produções de alunos, de modo a identificar como procederam, perceber indícios do pensamento algébrico, identificar caminhos matemáticos percorridos no decorrer das resoluções e assim analisar procedimentos, para que a partir daí a professora pudesse elaborar estratégias para sua prática pedagógica.

A análise de áudios de alunos ao resolverem uma tarefa é uma prática comum na Educação Matemática. Existem diversos autores que defendem a importância da utilização de registros audiovisuais para o estudo do processo de ensino e aprendizagem de matemática.

De acordo com Schoenfeld (1992), uma análise de registros audiovisuais pode ser uma ferramenta valiosa para acompanhar o desempenho dos alunos em aulas de matemática, o autor propõe a utilização de registros de áudio e vídeo para estudar as dificuldades e estratégias de resolução de problemas por parte dos alunos, defende que esses registros permitem aos professores terem uma visão mais precisa dos processos, bem como identificar padrões de comportamento e estratégias em suas resolução.

As produções dos alunos serão analisadas em relação a apenas alguns indícios do pensamento algébrico, considerando a complexidade e o leque de possibilidades que essas tarefas nos permitem estudar. Os indícios analisados serão: formas de aritmética generalizada; pensamento funcional; pensamento relacional e generalizações, como mencionado por Blanton e Kaput (2005) já citados neste estudo.

# 4 ANÁLISE E DISCUSSÕES DOS DADOS

## 4.1 TAREFA 1 – FAÇAFESTA

O contexto da Tarefa 1 – FAÇAFESTA envolve uma situação realística para os alunos, na qual precisam desenvolver estratégias e procedimentos aritméticos para responderem acerca de uma demanda de produção de determinados salgados para festa.

Conforme já mencionado, houve uma organização do espaço de modo que os grupos fossem formados por 4 pessoas e que houvesse espaços para que a professora caminhasse entre eles, para que viesse a intervir sempre que necessário e solicitado pelos alunos.

Ao iniciar o Episódio de Resolução de Tarefas deu-se a apresentação inicial e a organização da turma, cada integrante do grupo recebeu um Caderno de Tarefas contendo 5 tarefas e os procedimentos necessários para a resolução e entrega da mesma. Foi solicitado que os alunos começassem a gravação dos áudios de seus grupos e então iniciassem a leitura e exploração de cada um dos itens da Tarefa 1.

**Quadro 9 –** Enunciado da tarefa FAÇAFESTA, itens **a** e **b**

| |
|---|
| FAÇAFESTA é uma empresa que produz salgados para festas infantis. Para certa festa, a empresa recebeu uma encomenda de 200 esfirras, 120 empadas e 80 minipizzas. Sabendo que já possui congeladas 168 esfirras, 95 empadas e 72 minipizzas, é preciso determinar a quantidade de cada salgado que a empresa precisa separar de uma nova produção para completar a encomenda da festa.<br>a – Conversem como essa empresa pode determinar o que é preciso, no mínimo, produzir para atender a encomenda recebida.<br>b – Agora escreva, brevemente, sem usar simbologia matemática, como vocês diriam para a empresa calcular. |

Fonte: Autoria própria (2023).

Após a leitura dos itens **a** e **b** da tarefa, os alunos iniciaram a elaboração das respostas, mas sentiram dificuldade em entender como deveriam expressar suas respostas. Essa dificuldade é expressa no diálogo do Quadro 10.

A ação "conversar", solicitada no item **a**, é um meio de envolver cada um dos integrantes no processo de resolução, para além de se ter uma resposta à tarefa. O professor tem a intenção de, por meio do lidar com a tarefa, criar um contexto em que os alunos compartilham, trocam ideias, manifestam como elaboram suas estratégias e como as comunicam.

Nessa busca por entender como devem responder ao item é possível identificar no Quadro 10, em especial por A2T1, ao menos 3 modos de expressar o que deve ser realizado para se obter a quantidade de salgados a serem produzidos, sendo que a cada dizer do aluno a resposta vai se tornando mais completa e que responde à situação. Na L3, A2T1 responde que é só subtrair, mas não menciona os termos dessa subtração. Após comentários dos colegas, ele reformula sua resposta, L7, mencionando que tem que subtrair das encomendas que já tem congeladas, ou seja, acrescenta que o subtraendo será a quantidade de salgados congelados, mas ainda não especifica o que será o minuendo desta subtração. Na L9, ele reformula sua resposta apresentando todos os elementos da operação de subtração a ser realizada, número de salgados encomendados e número de salgados congelados.

**Quadro 10 –** Diálogo do grupo G1T1 para os itens **a** e **b** da Tarefa 1

Linhas:

1. A2T1: Então não precisa falar a conta, essa não é de escrever.
2. A1T1: Conversar como essa empresa pode determinar para no mínimo atender a encomenda recebida.
3. A2T1: Eu acho que é simples é só subtrair.
4. A3T1: Então ele tem 168 esfirras congeladas e precisa de 200, então vai ser 200 -168.
5. A2T1: Não precisa ter conta, é só explicar.
6. A3T1: Conversar como essa empresa pode determinar para no mínimo atender a encomenda recebida.
7. A2T1: Subtrair das encomendas que ele tem congeladas.
8. A3T1: Sim.
9. A2T1: Subtrair o número de salgados encomendados pelo número de salgados congelados.
10. A1T1: Isso.
11. A2T1: B, agora escreva brevemente sem usar simbologia matemática como diriam para a empresa calcular.
12. A1T1: Acho que está errado a primeira então.
13. A3T1: Olha aqui gente conversa como essa empresa pode determinar para no **mínimo** atender a encomenda recebida.
14. A2T1: Então essa é a próxima?
15. A1T1: Sim, pelo menos agora a gente sabe.
16. A2T1: Então vamos fazer uma conta com a simbologia matemática.
17. A3T1: Então vamos pegar 200 – 168, vamos fazer e depois a gente vê como ficou o resultado de cada uma.
18. A4T1: Deu 32, então a próxima é a empada.
19. A2T1: Olha gente estou em dúvida ainda converse como, é para conversar.
20. A1T1: Vamos pergunta para a professora.
21. A3T1: Olha gente converse como essa empresa pode determinar para no **mínimo** atender a encomenda recebida.
22. A1T1: Professora, a A não precisa dos cálculos?
23. Professora – Na letra A não precisa, por enquanto, só conversar como fazer.
24. A1T1: Mas aqui na letra B fala para fazer isso, mas sem as simbologias não é parecido?
25. Professora – É parecido, aqui na letra B você vai falar que tipo de conta a empresa deve fazer e demonstrar descrevendo os passos, já na primeira basta você escrever de forma geral qual seria em sua opinião a atitude da empresa para atender a encomenda o que ela precisa fazer? e então na terceira que você vai resolver.
26. A1T1: Obrigado professora.

| |
|---|
| 27. De nada !! |

Fonte: Dados da pesquisa.

No Quadro 11, na L12 é manifestado por A1T1 que pode ser que tenham feito errado o item **a** da tarefa, apesar de ele ter concordado na L10 com o modo de proceder para se obter a quantidade de salgados a serem fabricados para atender a demanda. Em todo o diálogo esse aluno buscou compreender como comunicar a resposta ao que foi solicitado, não apenas chegar em uma resposta matemática (L2; L12; L15; L22). Essa busca promove uma interação reflexiva que faz com que voltem ao enunciado da tarefa para interpretá-lo; reformulem respostas; repensem o significado da ação solicitada na tarefa (conversar); realizem equivalência entre linguagem natural e linguagem matemática (L4; L09), que é um aspecto da aritmética generalizada.

Após esse início de tarefa os alunos do grupo G1 continuam a discussão, apresentando indícios de que compreendem que no item **a** é preciso trazer a estratégia, enquanto no item **b** é preciso trazer os procedimentos que executam essa estratégia (L23; L30), percebe-se indícios de uma formulação de conjecturas para resolver o problema e mostrar compreensões matemáticas das operações necessárias.

**Quadro 11 –** Diálogo do grupo G1T1 para os itens **a** e **b** da Tarefa 1, parte 2

Linhas:

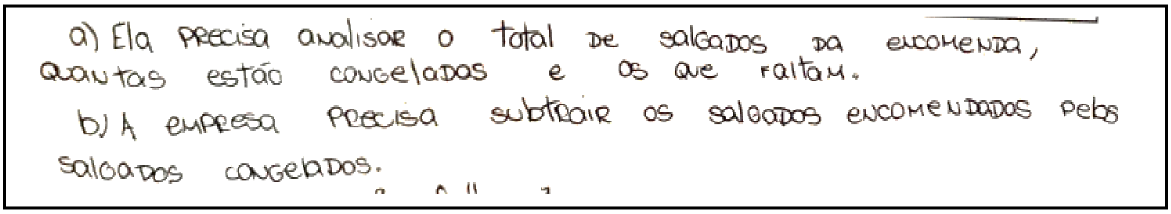
1. A1T1: Na primeira você explica como ele vai ter que fazer, na segunda ele pergunta que conta daí a gente coloca subtração.
2. A2T1: Então como a gente escreve?
3. A1T1: Ela precisaria descongelar as esfirras e usar ela tipo não sei explicar.
4. A2T1: Vamos ter que explicar o que ele tem que fazer e na segunda que conta.
5. A1T1: Sim, eu entendi isso.
6. A3T1: Ela precisa usar as congeladas e fazer as que falta, a gente tem que por isso bonitinho.
7. A4T1: Ela precisa ter mais salgados para chegar nos números de encomendas.
8. A1T1: Ela precisa analisar quantos salgados são necessários para atingir o número da encomenda.
9. A2T1: Ficou como?
10. A1T1: Ela quer saber como a gente vai resolver esse problema então ela precisa analisar quantos salgados são necessários para atingir os números de encomendas, e como ela vai fazer isso com uma subtração.
11. A3T1: Vamos perguntar pra professora se está certo?
12. A1T1: Professora, a gente entendeu isso na letra A.
13. Professora – Isso!!! o que vocês vão ter que responder, primeira coisa você precisar saber, a encomenda que ele recebeu
14. A1T1, A2T1, A3T1 e A4T1: Salgados!!!!.
15. Professora – Quantas ele recebeu?
16. A1T1: 200 esfirras, 120 empanadas, 80 minis pizza.

17. Professora – Quantas já estão prontas?
18. A1T1: 168 esfirras, 95 empadas e 72 minis pizza.
19. Professora – Qual a pergunta do problema então?
20. A1T1, A2T1, A3T1 e A4T1: Converse como essa empresa pode determinar para no mínimo atender a encomenda recebida.
21. Professora – Isso depois que vocês descobrirem o que ela precisa fazer para produzir vocês vão escrever, por que ela já tem uma quantidade pronta, então vocês escrevem o que ela tem que fazer para atender a encomenda, e depois na letra B as operações.
22. A2T1: Então eu vou reescrever um pouco a minha.
23. A3T1: Olha, ficou mais ou menos isso, ela precisa saber quantos são os salgados da encomenda, e quantos já estão prontos.
24. A2T1: Prontos não congelados né.
25. A3T1: Ela precisa saber quantos salgados são da encomenda e quantos congelados e fazer os que faltam.
26. A2T1: Você acha que está certo?
27. A1T1: Vamos fazer assim deixa essa pro A e pula pra B, a B é fácil a gente estava falando já, agora escrever brevemente sem usar simbologia matemática como a empresa deve calcular.
28. A2T1: Subtrair os salgados que ela precisa pelo o que estão congelados.
29. A1T1: Não, ela não sabe quanto ela precisa, tem que ser encomenda pelos congelados.
30. A3T1: Subtrair os salgados encomendados pelos salgados congelados.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 12 é apresentada a resposta formalizada pelo grupo G1 ao responder os itens **a** e **b**.

**Figura 12 –** Resposta do grupo G1T1 para os itens **a** e **b**.


a) Ela precisa analisar o total de salgados da encomenda, quantas estão congelados e os que faltam.
b) A empresa precisa subtrair os salgados encomendados pelos salgados congelados.

Fonte: Dados da pesquisa.

O modo de lidar com os itens **a** e **b** favoreceu uma atitude mais reflexiva dos alunos para lidarem com os itens **c** e **d** da tarefa, itens enunciados no Quadro 12.

**Quadro 12 –** Enunciado dos itens **c** e **d** da Tarefa 1

| |
|---|
| c – Nessa estratégia escolhida pelo grupo foram realizadas quais operações? |

d – Agora, se o comando fosse sintetizar a estratégia escolhida em uma expressão numérica, como vocês a representariam?

Fonte: Autoria própria (2023).

Uma vez que já haviam compreendido que deveriam expressar seus pensamentos e ideias, para então em conjunto decidirem como elaborar uma resposta aos itens, isso foi percebido no diálogo apresentado no Quadro 13 (L3; L4; L5; L6; L24 e L18).

**Quadro 13 –** Diálogo do grupo G1T1 para os itens **c** e **d** da Tarefa 1

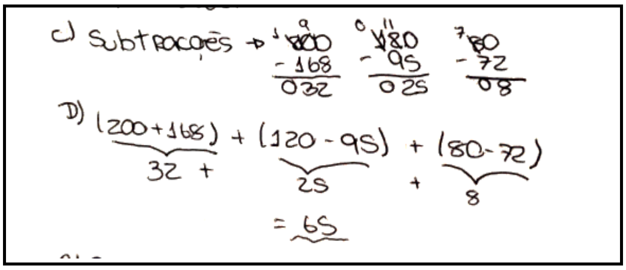
Linhas:

1. A1T1: Então a C pelas estratégias escolhidas pelo grupo qual foi as operações?
2. A2T1: Então agora a gente tem que fazer conta.
3. A3T1: Gente a C precisa fazer conta é para falar quais foram as operações.
4. A1T1: Sim, daí coloca que foi subtração e colocar as contas.
5. A2T1: Mas não precisa por subtração porque falamos na de cima.
6. A2T1: Quanto deu a primeira? 32, 25 e a outra 8?
7. A3T1: Sim isso. A2T1:Todo mundo deu isso?
8. A1T1, A3T1 e A4T1: Sim.
9. A2T1: A primeira então ficou 32, segunda 25, e a outra 8, tudo isso igual a X?
10. A3T1: Não expressão numérica não tem igual.
11. A2T1:Tem sim.
12. A1T1:Para ser expressão numérica tem que ter letra e sinal de igual.
13. A2T1: Tinha que fazer assim 200 esfirras + 120 +80 – 168 – 95 – 72.
14. A1T1: Expressão numérica não tem sinal de igual
15. A2T1: Tem sim.
16. A3T1: A gente está confundindo com expressão algébrica.
17. A2T1: Verdade!!!! Então ficaria 200 – 168, entre parênteses por que se não dá errado.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 13 é apresentada a resposta formalizada pelo grupo G1, ao responder aos itens **c** e **d**.

**Figura 13** – Resposta do grupo G1T1 para os itens **c** e **d**.




Fonte: Dados da pesquisa.

Partindo dos diálogos do Quadro 13 (Linha 14) e Figura 13, identificamos dois procedimentos que evidenciam que os alunos do grupo G1T1 utilizaram expressões numéricas, associando e não associando os termos. Especificamente na L14 e L18, o aluno A2T1 diz "tinha que fazer assim 200 esfirras +120-80 -168 - 95-72", detalhando o procedimento escolhido para o cálculo e depois ainda afirma a necessidade de colocar os cálculos entre parênteses, de modo a subtrair os valores dos salgados que já estão prontos do total de salgados encomendados, e após isso somar os valores para descobrir o total de salgados que precisa ser ainda produzido (Figura 13).

Os alunos A1T1 e A3T1 apresentam dificuldade em suas falas em relação à definição de expressão (Quadro 13: L10, L11, L12, L13, L15 e L16). Com base nesse diálogo, a professora pode regular sua prática em sala de aula de modo a elaborar retomadas e revisões do conteúdo com tarefas que abordem o assunto de expressão numérica, para que as possíveis dúvidas sejam sanadas, visto que ao final do diálogo do grupo os próprios alunos identificaram a forma correta de escrita e se autocorrigem.

**Quadro 14 –** Enunciado do item **e** da Tarefa 1

| |
|---|
| e) O que mudaria se em vez de uma encomenda por tipos de salgado, tivesse sido um pedido de 300 salgados no total (esfirras, empadas, minipizzas)? Expliquem essa mudança por meio de uma expressão numérica. |

Fonte: Autoria própria (2023).

No item **e** da Tarefa 1, os alunos do G1 inicialmente tiveram algumas dificuldades em entender como deveriam expressar seus pensamentos de forma escrita, mas novamente após entenderem puderam expor suas ideias e de forma detalhada indicam, no diálogo do Quadro 15, a mobilização dos indícios do pensamento funcional e generalização, principalmente ao analisarmos as L9, L10, L11, L12, L13, e L14.

**Quadro 15 –** Diálogo do grupo G1T1 para o item **e** da Tarefa 1

Linhas:

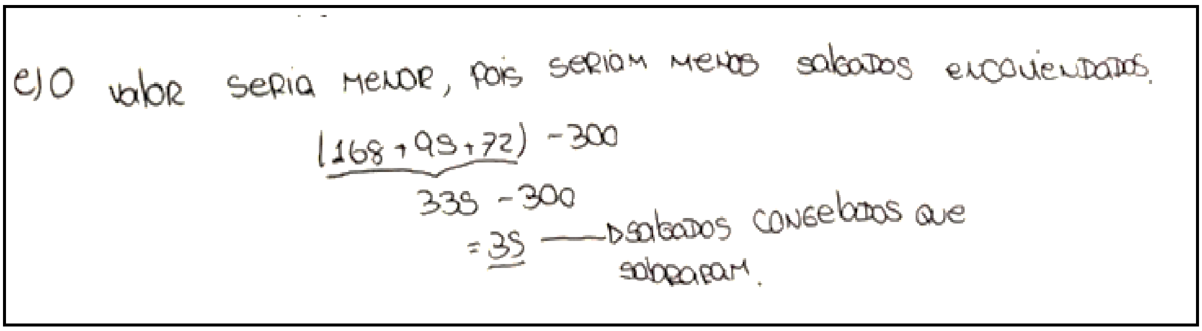
1. T1A 2: Ele quer saber se eu pedisse 300 tudo misturado, como vamos explicar essa mudança só que tipo, como a gente faz isso se não sabemos o valor de cada salgado.
2. A1T1: Aqui agora ele está pedindo expressão algébrica, em vez de fazer 200, 120, 80 vamos só junta.
3. A4T1: Vamos responder a primeira pergunta primeiro, o que mudaria?
4. A1T1, A2T1, A3T1: O valor seria menor.
5. A1T1: E não saberíamos o número de salgados que cada um teria.
6. A2T1: Professora não entendemos a E.

7. Professora – Vocês vão usar a ideia da expressão numérica na D só que agora vão ser 300 salgados no total, o que vai mudar na sua conta você utilizando todos os valores independente de ser esfirra, empada etc.
8. A2T1: Aqui a gente separou A2T1: Aqui a gente separou professora os que não sabemos, o que sabemos que 300 é o total daí vamos fazer menos o que ela já tem.
9. A1T1: A gente tem que pensar numa expressão algébrica, (168 + 95 +72 -300) daí ficaria certo.
10. A2T1: O que ia mudar é que já teria todos os salgados congelados.
11. A1T1: Aqui a gente somou tudo que tinha e depois diminuiu.
12. A3T1: O que ia mudar é que todos os salgados já estariam congelados, já estaria tudo pronto.
13. A2T1: Mas você já somou?
14. A3T1: Sim dá 335 e você precisa só de 300.
15. A1T1: Mas ela não deu valor dos 300, e se na mini pizza tiver 100.
16. A2T1: Deu quanto aí o seu?
17. A3T1: 335.
18. A2T1: Então do certo, é isso mesmo que ela falou.
19. A1T1: Não dá certo isso.
20. A2T1: Da certo sim se a gente está somando congelado tem todos os prontos.
21. A1T1: Mas não está falando quantos ela quer, e se ela quiser mais mini pizza.
22. A2T1: Então não faz sentido a gente somar os congelados.
23. A3T1: Mas se a gente não colocar que tem todos os salgados prontos não faz sentido.
24. A1T1: Mas e se ela quiser 100 de cada não faz sentido somar os congelados.
25. Professora – Na letra E ele pergunta o que mudaria se em vez de tipo de salgado seria 300 salgado, daí você responde se acha que vai mudar alguma coisa, e vê se muda algo, e por que que muda, então nessa tarefa você tem que ir aos poucos e somente E você vai fazer as contas e encontrar os valores totais não por tipos.
26. A1T1: Ok o valor seria menor pois seria menos salgado encomendados.
27. A3T1: O número de salgados seria menor pois somando os salgados prontos menos o que é preciso.
28. A2T1: Na outra encomenda somando todos os salgados o valor é menor.
29. A2T1: Pois seriam menos salgados encomendados e sobrariam 35 ainda.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 14 é apresentada a resposta formalizada pelo grupo G1 ao responder o item **e**.

**Figura 14** – Resposta do grupo G1T1 para o item **e**.


e) O valor seria menor, pois seriam menos salgados encomendados.
$\underbrace{(168+95+72)}$ -300
335 -300
= 35 — salgados congelados que sobraram.

Fonte: Dados da pesquisa.

Após a aplicação da Tarefa 1 e após escutar as gravações e analisar as produções escritas, buscando indícios do Pensamento Algébrico (Aritmética Generalizada, Pensamento Funcional, Modelação e Generalização), reconhece-se que a estratégia de ensino Episódios de Resolução de Tarefas permite que os alunos sejam ativos, que dialoguem e compartilhem ideias, em um contexto em que o professor guia e orienta por meio de intervenções em cada um dos grupos, explorando as estratégias dos alunos.

A atitude e posição da professora nos grupos foi intencional, permitiu que a partir da exploração da tarefa fosse possível tecer um diagnóstico das estratégias por eles utilizadas e de suas dificuldades. Com isso, além de o professor poder construir diálogos com os alunos, permite uma regulação de sua prática, uma leitura curricular, no sentido de compreender os objetivos de aprendizagem bem desenvolvidos e aqueles que precisam ser explorados em seus futuros planejamentos.

Por meio dessa estratégia utilizada de Episódios de Resolução de Tarefas, o trabalho colaborativo se põe presente em contexto escolar, os alunos organizados em grupos permitiu reflexões que apareceram nas produções escritas e nos áudios analisados, uma vez que a interação entre eles não é aquela em que um aluno resolve e o restante aceita a resolução, mas é aquela em que ao surgir uma dúvida, os outros colegas tentam ajudar, um sugere uma estratégia, o restante sugere e complementa o raciocínio.

Outro ponto a ser destacado é o contexto realístico da tarefa, que permitiu aos alunos compreender a situação e se envolver em um processo de busca de estratégias para com ela lidar. Além disso, a possibilidade de itens que não requerem a utilização de expressões prontas, que solicitem que conversem, promoveu diálogos entre eles e a elaboração de respostas escritas em forma de textos, com diferentes registros, antes da formalização da expressão matemática.

## 4.2 TAREFA 2 – A ESCOLHA DE COMBUSTÍVEL

A Tarefa 2, A ESCOLHA DE COMBUSTÍVEL, apresenta uma situação realística, na qual é proposta a ideia de uma viagem e espera-se que os alunos calculem os gastos referentes ao consumo de combustível e façam relação dessa situação proposta com valores e situações reais (valor cobrado pelo combustível e valor do salário mínimo atual). O tema da tarefa foi escolhido por fazer parte da realidade experienciada pelos alunos em questão, visto que todos em algum momento de suas vidas já realizaram viagens de carro, e se sentem familiarizados com a situação.

No item **a** os alunos relacionaram os quilômetros rodados e a quantidade de combustível utilizado, item apresentado no Quadro 16.

**Quadro 16 –** Enunciado da Tarefa 2 – A ESCOLHA DE COMBUSTÍVEL, item **a**

Lucas quer fazer uma viagem para uma cidade que está a uma distância de 288 km de sua casa. A capacidade do tanque de combustível do carro é de 50 litros e seu carro desloca em média 12 km com um litro de álcool.

a) Conversem como vocês podem explicar para o Lucas quantos litros de álcool o tanque deve ter, no mínimo, para que ele possa fazer essa viagem.

Fonte: Autoria própria (2023).

Para a resolução desse item, depois das orientações de início dadas pela professora, o grupo G2T2 começou fazendo a leitura da tarefa em voz alta por um dos integrantes. Os alunos A6T2 e A7T2 apresentaram dúvidas, mas o aluno A5T2 mostrou o entendimento e tomou a iniciativa de explicar para os demais como mostra o trecho do diálogo apresentado. Na tarefa os alunos devem interpretar a situação-problema e utilizar as operações como multiplicação e divisão, ao fazerem a relação entre os quilômetros e o combustível utilizado.

No Quadro 17 é apresentado um trecho do diálogo, no qual, na L3, o aluno A5T2 diz que "Tem 50 litros e ele quer andar 288 km, é só fazer 50 x 12", demonstra entender o contexto da tarefa e a estratégia de como deve ser realizado o cálculo. E na L7 ele explica detalhadamente aos demais seu modo de pensar dizendo: "A capacidade máxima é 50, daí ele anda a cada 1 litro de álcool 12".

**Quadro 17 –** Diálogo do grupo G2T2 do item **a** para Tarefa 2

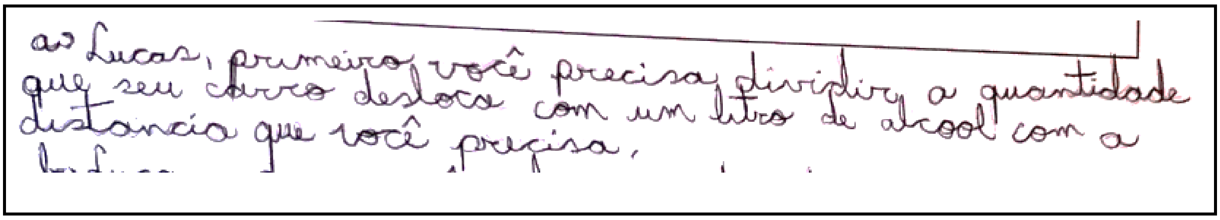
Linhas:

1. A5T2 - Lucas quer fazer uma viagem para uma cidade a 288km de sua casa, a capacidade do tanque de combustível de seu carro é de 50 litros, o seu carro desloca em média 12 km com 1 litro de álcool, conversem como vocês explicam para Lucas o mínimo no tanque para fazer a viagem?
2. A6T2– Você entendeu?
3. A5T2 – Tem 50 litros e ele quer andar 288km, é só fazer 50x12.
4. A7T2 – 50x12?
1. A5T2 – É isso que eu entendi.
2. A7T2 – Por que 50x12?
3. A5T2 – A capacidade máxima é 50 daí ele anda a cada 1 litro de álcool 12.
4. A8T2 – Ia da 500.
5. A6T2 – Da 24.
6. A8T2 – Da 600.
7. A6T2– Mas precisa só de 24 litros.
8. A5T2 – Eu dividi 280/12.
9. A6T2A6T2 – Sim 24x12 é 280.

| |
|---|
| 10. A7T2 – Sim exato. |

Fonte: Dados da pesquisa.

**Figura 15 –** Resposta do grupo G2T2 para o item **a**


ao Lucas, primeiro você precisa dividir a quantidade
que seu carro desloca com um litro de alcool com a
distancia que você precisa,

Fonte: Dados da pesquisa.

No Quadro 18 é apresentado o enunciado dos itens **b** e **c** da Tarefa 2.

**Quadro 18 –** Enunciado dos itens **b** e **c** da Tarefa 2.

| |
|---|
| b. Agora escrevam, brevemente, sem usar simbologia matemática, como vocês diriam para Lucas calcular e, em seguida, apresentem esse cálculo.<br>c. Nessa estratégia escolhida pelo grupo foram realizadas quais operações? Foi a única estratégia pensada ou pensaram em outras? Apresente todas as estratégias pensadas. |

Fonte: Autoria própria (2023)

Nesses itens os grupos demonstraram ansiedade, ao perceber isso a professora fez uma interrupção com uma breve explicação para que eles repensassem suas estratégias e depois formulassem seus possíveis encaminhamentos e cálculos, conforme L1 do Quadro 19. Esse tipo de intervenção está mais relacionada à organização e à atitude desses alunos, no sentido de posicioná-los enquanto aquele que reflete acerca de suas escolhas e sobre a coerência delas para lidar com a situação em questão.

O grupo G2T2 mostrou coerência em suas estratégias e compreensão com a situação. No diálogo do Quadro 19, os alunos A5T2 e A7T2, nas linhas L4, L5, L6 e L7, ao dizerem que "É tipo assim, abasteça 24 litros para fazer a viagem" e "A7T2 – Ele precisa usar um pouco menos da metade", fazem uma reflexão sobre o tamanho do tanque do carro em relação à quantidade de combustível utilizado, demonstrando entender os padrões numéricos e suas relações de quantidades parte/todo.

Nota-se que eles comparam as resoluções e definem a melhor maneira de escrever a sua estratégia. Esperava-se que eles usassem a regra de três, o que não aconteceu, mas identifica-se o conceito de média para o cálculo do gasto de combustível.

**Quadro 19 –** Diálogo do grupo G2T2 para os itens **b** e **c** da Tarefa 2

Linhas:

1. Professora - Pessoal estou vendo que vocês já querem começar a fazer as contas, mas primeiros tentem entender qual é o assunto desse item, leia e entenda o que ele está falando, qual a questão principal, o que ele está querendo descobrir? Isso é a primeira coisa que vocês têm que pensar.
2. A5T2 – Vamos ver a B, escreva sem usar simbologia matemática, vamos ver um pouco a outra para entender.
3. A6T2 – Sem usar simbologia matemática.
4. A5T2 – É tipo assim abasteça 24 litros para fazer a viajem.
5. A7T2 – Ele precisa usar um pouco menos da metade.
6. A5T2 – Como coloca?
7. A7T2 – Ele precisa usar um pouco menos da metade eu acho que é assim.
8. A5T2 – Foram realizadas quais operação? Foi a única estratégia pensada pelo grupo?
9. A6T2 – Não pera aí, como vocês diriam para o Lucas calcular? E em seguida apresente os cálculos.
10. A5T2 – Como você fez?
11. A6T2 – Dividido.
12. A5T2 – Daí você coloca o cálculo 280/12, então eu coloquei assim ele precisa um pouco menos da metade do tanque.
13. A7T2 – Ele irá utilizar quase metade do tanque.
14. A5T2 – Ele precisa, eu coloquei assim aí depois coloquei a conta.
15. A6T2– Eu fiz totalmente diferente.
16. A5T2 – Nessa estratégia escolhida pelo grupo foi utilizado quais operações? Quais estratégias foram utilizadas? Pensaram em outras?
17. A6T2 – A gente pensou em vezes e dividir, alguém mais pensou?
18. A5T2 – As estratégias foram dividir e vezes.
19. A6T2 – Sim só isso.

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir desse diálogo exposto, os alunos, se sentindo um pouco inseguros em relação às suas respostas, solicitaram a presença da professora, a qual aproveitou para questioná-los sobre a interpretação da tarefa. Nesse momento o aluno A5T2 responde dizendo o que ele fez para chegar à resposta correta, L15 do Quadro 20, “Divide a distância da viagem por quanto gasta de álcool por cada km, é isso? Calcular a distância”. Nesse diálogo os alunos exploram relações de grandezas e quantidades expressas na tarefa.

**Quadro 20 –** Diálogo do grupo G2T2 para os itens **b** e **c** da Tarefa 2, parte 2.

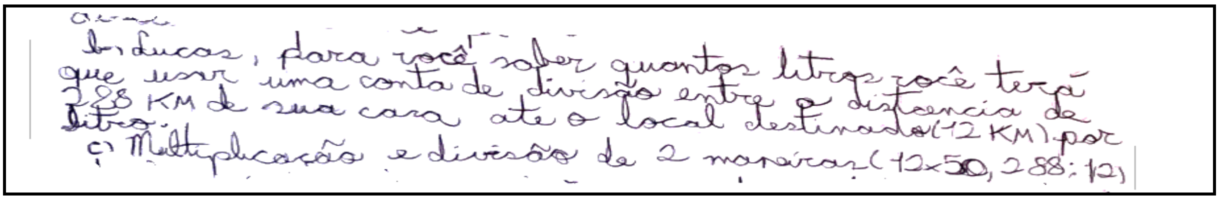
Linhas:

1. Professora – Oi qual era a dúvida?
2. A6T2 – Nessa aqui professora.
3. Professora – Tá vocês já responderam a A? Então primeiro vocês têm que entender o que o exercício quer, vocês estão pensando somente na resposta numérica, ele não quer só isso leiam para mim, ele pediu para você calcular o mínimo? Então eu quero que vocês expliquem, então qual a distância que o Lucas vai fazer, e o que significa que o carro dele faz 12km com 1 litro de álcool?
4. A5T2 – Que ele gasta 1 litro de álcool a cada 12km.
5. Professora – E você já sabe qual a distância da viagem? Quanto ele vai gastar em relação a km?

6. A6T2 – 288.
7. Professora – Se ele quer fazer essa viagem qual seria o pensamento para entender essa conta, você sabe que ele gasta quanto com 12km? E agora como ele faz essa conta para 288km?
8. A6T2– Divisão.
9. Professor – Isso, mas se você fosse me explicar como faria?
10. A7T2 – Que tem que fazer uma conta de dividir.
11. A8T2 – Da distância da viagem sobre a média que desloca.
12. Professora – Exatamente daí vocês colocam isso na letra A, vocês não fazem conta por enquanto só mais pra frente.
13. A5T2 – Tá como ela disse que a gente tem que colocar mesmo?
14. A6T2– Explicar como fazia a conta.
15. A5T2 - Divide a distância da viagem por quanto gasta de álcool por cada km é isso? Calcular a distância.
16. A6T2– Vou colocar assim dívida a distância pelo tanto que ele gasta em litros.
17. A7T2 – Calcule a distância por quanto você gasta de litro por km.
18. A5T2 – Eu coloquei assim, dividi a distância por quanto você gasta por 12 km eu acho que é isso, daí eu coloquei assim na B as estratégias foram divisão e vezes, agora na C vocês concordam?
19. A6T2A – entendi.
20. A5T2 - Ele gastou lá 24 litros
21. A7T2 – 12 é o quanto que ele gasta por litro então agora é só dividi o 288 que vai da 24.

Fonte: Dados da pesquisa.

**Figura 16 –** Resposta do grupo G2T2 para os itens **b** e **c**.


b) Lucas, para você saber quantos litros você terá que usar uma conta de divisão entre a distância de 288 KM de sua casa até o local destinado(12 KM) por litro.
c) Multiplicação e divisão de 2 maneiras(12x50, 288:12)

Fonte: Dados da pesquisa

No Quadro 21 é apresentado o enunciado do item **d**.

**Quadro 21 –** Enunciado do item **d** da Tarefa 2

| |
|---|
| d. Depois de Lucas pensar sobre a quantidade de álcool que precisaria colocar para viajar, decidiu estimar sobre a quantidade de álcool que tem gastado por mês, uma vez que ele percorre de carro em média 2.400 quilômetros por mês. Ele obteve que a estimativa é de 4 tanques de 50 litros de álcool. Vocês concordam? Apresentem argumentos que confirmem ou não o resultado estimado que Lucas encontrou. |

Fonte: Autoria própria (2023).

Nesse item da tarefa, os alunos do G2T2 inicialmente apresentaram uma dificuldade de compreensão, confundindo os valores percorridos mensalmente por Lucas e a quantidade de combustível utilizado, como mostra o diálogo do Quadro 21 (L2 a L8), mas, durante a discussão, os alunos A5T2, A7T2 e A8T2 chamam a atenção do A6T2 para a forma e estratégia de como lidar com a situação (L9 a L19). Essa interação reforça a importância do trabalho em grupo, de um modo colaborativo.

O diálogo do Quadro 22 traz consigo a importância de se priorizar o diálogo entre os alunos em sala de aula, uma vez que por meio desses diálogos os alunos podem expressar seus entendimentos, suas estranhezas (como mencionado por A5T2 na L20), e com isso regular as estratégias que resolvem a situação. Nesse trecho, na L35, quando o aluno G2T2 diz que "Eu vou colocar sim, pois a quantidade de litro que ele gasta por mês depende do quilômetro e ele gasta 200 litros, e 4 tanques é igual a 200", é possível afirmar que há pensamentos de Modelação e Generalização, uma vez que expressa a dependência do gasto de gasolina em relação à distância percorrida (quilômetros), também podemos identificar o pensamento funcional.

**Quadro 22 –** Diálogo do grupo G2T2 ao lidar com o item **d**

Linhas:

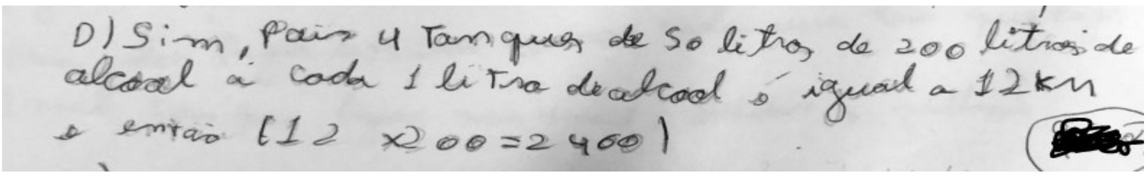
1. A5T2 - Ele gastou por mês lá 2400km e ele obteve 4 tanques ou a gente concorda e afirma ou recusa, mas com provas.
2. A8T2 – Não é melhor a gente vê quanto da primeiro?
3. A5T2 – Só to falando o que tem que fazer.
4. A6T2 – 288x2.
5. A2T2 – 576.
6. A6T2 – Esse daí seria 48.
7. A6T2 – Deixa eu falar 24x2 da 48.
8. A5T2A5T2 – A gente não está mais na A.
9. A8T2 – Deu 200 ele gasta 200 litros.
10. A7T2 – Isso 200.
11. A5T2 – Mas está falando ele teve uma estimativa de 4 tanques.
12. A6T2 – É um pouco menos de 4 tanques.
13. A7T2 – Não, primeiro tem que ver quanto que da.
14. A6T2 – E ele está errado por que é um pouco menos só.
15. A7T2 – Não é quanto tanques certo, 50x4 é 200.
16. A7T2 – 2400 km de só 200 litros, ele está perguntando 4 tanques é o certo? Sim é o certo.
17. A8T2 – 2400/12 já fiz da 200.
18. A7T2 – 12 é o quanto que ele gasta por litro então agora é só dividir.
19. A8T2 – Para tirar a prova só fazer 12x200.
20. A5T2 – É então, mas to achando estranho.
21. A6T2 – Na minha conta daria 8 tanques.
22. A7T2 – Por que 8 tanques?
23. A6T2 – É que eu fiz assim 288x4 por que cada litro cada menos é metade.
24. A7T2 – Não é assim.
25. A6T2 – Eu fiz a conta errada deixa.
26. A5T2 – Mas faz sentido por que ele fala que é 4/50 e se você faz vezes vai da 200, então daí prova.
27. A6T2 – Sim eu concordo.
28. A5T2 – Sim eu concordo daí tem que pôr os argumentos, vamos colocar a quantidade, não sei como a gente pode dizer.

29. A7T2 – Sim pois o tanto de litro que ele gasta é 4 vezes o tanque.
30. A5T2 – A gente tem que colocar 2400km em litros que ele gasta.
31. A6T2 – Por que ele está certo?
32. A5T2 – Pois as nossas contas foram iguais.
33. A6T2 – Mas pode estar errado, pois 2400km em litro ele gasta 200 litros de álcool e é o tanto que ele falou.
34. A5T2 – Sim pois 2400km divido por tanto que ele anda, a gente sabe resultado, mas não sabe escrever, vamos fazer a E primeiro, alguém tem que pesquisar estou sem bateria.
35. A8T2 – Eu vou colocar sim pois a quantidade de litro que ele gasta por mês, depende do km e ele gasta 200 litros, e 4 tanques é igual a 200.

Fonte: Dados da pesquisa.

A Figura 17 é a resposta escrita que os alunos deram ao item **d**, apesar de correta, nela não está expressa a relação de dependência que é possível reconhecer no Quadro 21, mais uma vez reforçando a importância de se explorar os diálogos dos alunos em contexto de sala de aula e aproveitá-los para regular a aprendizagem a partir de intervenções.

**Figura 17 –** Resposta do grupo G2T2 para o item **d**


D) Sim, pois 4 Tanques de 50 litros de 200 litros de alcool e cada 1 litro de alcool é igual a 12km e então (12 x200 = 2400)
([redacted]

Fonte: Dados da pesquisa.

No item **e**, apresentado no Quadro 23, os alunos precisam buscar informações em relação ao preço do litro do álcool. Trazer informações da realidade para o enunciado de uma tarefa é um modo de trazer reflexões acerca de atividades simples do dia a dia de cada um, fazendo com que reflitam acerca de sua realidade e desenvolvam criticidade sobre atividades corriqueiras.

**Quadro 23** – Enunciado do item **e** da Tarefa 2

| |
|---|
| e) Façam uma consulta ao *Google* sobre o valor do litro de álcool e estimem qual o percentual, em relação a um salário mínimo, que Lucas gasta por mês com combustível. |

Fonte: Autoria própria (2023)

No diálogo apresentado no Quadro 24, fica claro que os alunos escolheram uma estratégia que responde o valor gasto por Lucas por mês com gasolina, mas se equivocam em relação ao procedimento, multiplicação de 200 por 5,97. O aluno A5T2 apresenta insegurança quanto ao resultado apresentado (L15 e L22), mas apesar de A5T2 afirmar que irá fazer o cálculo (L23), não apresenta outro valor e o resultado de 194 é utilizado na resolução. Ao caminhar pelos grupos a professora perdeu a oportunidade de pedir que os alunos refletissem sobre o resultado encontrado, questionar se faz sentido gastar 194 reais para comprar 200 litros de gasolina, se cada litro custa quase 6 reais. As intervenções do professor devem sempre acompanhar e orientar as escolhas dos alunos, tornando-se um meio de comunicação em que o professor recolhe informações acerca de como os alunos compreendem e lidam com os conceitos e objetos matemáticos, mas que também sirvam para que os alunos regulem suas aprendizagens.

Nesse caso é importante ressaltar que a professora não interveio no diálogo (L22, L23, L24, L25, L30, L31, L32 e L33), entretanto a professora reconheceu a necessidade de em um próximo momento retomar o conceito de porcentagem e operações com números racionais na forma decimal, utilizando-se de novas tarefas que abordem esses cálculos.

**Quadro 24 –** Diálogo do grupo G2T2 para o item **e**

Linhas:

1. A5T2 – Eu estava pensando em outro jeito, mas está bom, vamos para E pesquisa aí valor do álcool.
2. A6T2 – Pera aí vou ver, 5,97.
3. A5T2 – Estima qual percentual em relação ao salário mínimo.
4. A7T2 – Vou pergunta para professora.
5. A6T2 – A gente vai fazer assim o litro que entra no tanque vezes preço do álcool, depois faz o resto, quanto está o álcool mesmo?
6. A7T2 – 5,97.
7. A8T2 – Quanto ele gasta por mês com combustível?
8. A6T2 – 2985 reais.
9. A5T2 – O litro é 5,97.
10. A7T2 – Se o litro que ele gasta por mês é 200 é só fazer vezes.
11. A5T2 – É 4.
12. A8T2 – Não é 6.
13. A5T2 – 6?
14. A8T2 – Sim por que 5,97 não é 6 reais.
15. A5T2 – Pronto agora vamos fazer a conta 5,97 reais vezes 200, da 194 eu acho não sei onde coloca vírgula direito, não sei fazer essa parte.
16. A7T2 – Vou ver com a professora, professora na E a gente pode arredondar para 6?
17. Professora - Não você coloca o valor que você achou na internet.
18. A5T2 – Professora eu fiz deu 194.
19. Professora – Está bom, mas vocês já responderam todas as outras?
20. A7T2 – A gente colocou professora.
21. Professora – A ele que não colocou só então ok.
22. A5T2 – Meu deu 194 faz a conta ia vocês, por que não sei se está certo, a virgula.

| |
|---|
| 23. A6T2 – 200x5,97 vou fazer pera. |

Fonte: Dados da pesquisa.

Outro ponto a ser destacado refere-se à exploração do conceito de porcentagem. A6T2 na L9 do Quadro 25 menciona o entendimento porcentagem a partir da parte que representa o gasto de gasolina em relação ao valor do salário, entretanto todo o restante do diálogo foca no modo de lidar com esse entendimento, uma divisão, reforçado pela professora na L19. A professora deixou de explorar a produção dos alunos para compreender de forma ampla e aprofundada os conceitos envolvidos na tarefa. Apesar disso, a professora teve a oportunidade de recolher informações e, com isso, explorar grandezas diretamente proporcionais e estender ao conceito de porcentagem em outras aulas que não são objeto de análise nesta pesquisa.

**Quadro 25 –** Diálogo do grupo G2T2 para o item **e**, parte 2

Linhas:

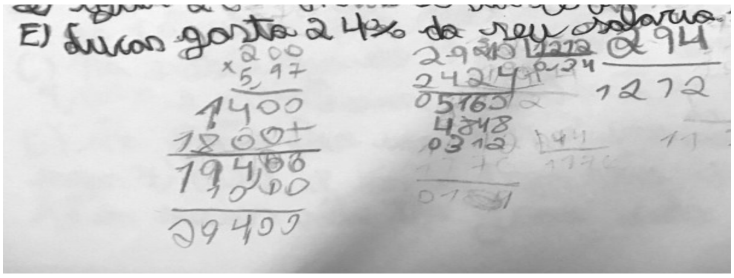
1. A7T2 – Mas ele ganha 194 por mês?
2. A5T2 - Não é assim também, isso é o que ele gasta com gasolina, ele gasta 194 por mês.
3. A6T2 – É pra fazer porcentagem por salário mínimo.
4. A7T2 – Quanto é salário mínimo?
5. A8T2 – Vou pesquisa.
6. A6T2 – 1212 é o salário.
7. A5T2–Agora tem que fazer porcentagem não sei como faz.
8. A8T2 – Tem que fazer o menos e descobrir quanto porcento vale.
9. A6T2 – De 1212 qual é a porcentagem do dinheiro que ele gasta por mês de gasolina.
10. A5T2 – Vou pegar o caderno para lembrar que não sei também, tem que fazer 194/1212 só que não sei se é isso.
11. A7T2 – De 1200, 194 é quantos porcentos?
12. A5T2 – Não sei.
13. A7T2 – Tipo assim 1200 é 100%, 194 é quantos porcentos?
14. A6T2 – 7%?
15. A8T2 - Vamos fazer agora aqui, já temos o valor, vamos dividir.
16. A6T2 – Porcentagem é divisão?
17. A5T2 – Talvez, está aqui olha percentual, vou tentar.
18. A8T2 – Professora a gente esqueceu como faz conta de porcentagem.
19. Professora – Ai meu deus, cadê o caderno para olhar, lembra que uma quantidade fica em cima e outra embaixo, quem fica onde?
20. A7T2 – 100% fica em cima né?
21. Professora – Porcento, o que significa porcento? Quando eu falo o que eu faço?
22. A6T2 – Por 100.
23. Professora – Uma oque?
24. A5T2 – Divisão.
25. Professora – Então o que temos que fazer aqui?
26. A5T2 – Coloca esse valor em cima do 100?
27. Professora – o 100% não é o salário?
28. A6T2 – Então é 1200 em baixo e o outro em cima?

29. Professora – O 1200 não é o valor total, então ele fica em cima do 100%, e agora o outro valor que você descobriu.
30. A6T2 – sim, entendi.
31. A5T2 – E agora como descobrimos o percentual?
32. A7T2 – Da 24% final.
33. A5T2 – Então a gente coloca assim 24% do salário mínimo que ele gasta.
34. A6T2 – Lucas gasta 24% do seu salário, pronto agora só passar a caneta.

Fonte: Dados da pesquisa.

Foi combinado com a turma que cada grupo escolhesse uma produção escrita para ser entregue ao professor. A Figura 18 confirma que o grupo não se atentou aos erros cometidos no algoritmo da multiplicação, assim como a não finalização da operação de divisão. Esses alunos do 8º ano do Ensino Fundamental cursaram o 6º e o 7º ano no formato remoto por conta da pandemia. Essa dificuldade em realizar operações básicas pode ser resultado desse período, sendo necessário o professor orientar seus alunos e, por meio de discussões e realização de outras tarefas, lidar com essas dificuldades.

**Figura 18 –** Resposta do grupo G2T2 para o item **e**



Fonte: Dados da pesquisa.

Essa foi a segunda tarefa aplicada. A aplicação aconteceu em aulas geminadas e os alunos se comportaram enquanto sujeitos que já haviam vivenciado o lidar com uma tarefa em Episódios de Resolução de Tarefas. Eles se apresentaram mais habituados à forma de organização, se reuniram nos mesmos grupos de 4 integrantes que haviam realizado a Tarefa 1, as carteiras já estavam organizadas em grupos, de modo que a professora tivesse espaço para caminhar entre eles sempre que necessário.

O contexto da tarefa se mostrou realístico, os itens propostos possibilitaram aos grupos a liberdade de trilhar por caminhos diferentes durante a resolução e, aos alunos buscarem informações da realidade puderam utilizar a matemática enquanto ferramenta para refletir acerca de situações que virão a lidar, como refletir a distribuição percentual de seus gastos dentro de um orçamento.

Nessa discussão foi escolhida uma produção que contém equívocos com os procedimentos, tanto no diálogo como na produção escrita. Além disso, com esse mesmo grupo, a professora acabou por não aproveitar a produção dos alunos para realizar intervenções no desenvolvimento. *A priori* isso descartaria essa produção da pesquisa? Sim! Mas não, por meio dela evidencia que fazer pesquisa em contexto de sala de aula, em que o professor e o pesquisador são um, percursos não planejados surgem, mas que por meio desse processo reflexivo é possível reconhecer possibilidades de mudança de atitude, e melhor se preparar para novos episódios de resolução de tarefas.

A partir desses apontamentos entendemos que essa tarefa, quando aplicada de acordo com a estratégia de Episódios de Resolução de Tarefas, possibilita a mobilização de ideias que evidenciam indícios da aritmética generalizada, pois em vários momentos os alunos fazem conjecturas e demonstram compreensão de propriedades da multiplicação e divisão, assim como o pensamento funcional, quando descreve os procedimentos utilizados para o cálculo do percentual.

Segue abaixo um quadro relacionando indícios do pensamento algébrico, aritmética generalizada, pensamento funcional, modelação e generalização, de acordo com as perspectivas de Blanton e Kaput já citados nesse estudo, com possíveis encaminhamentos da prática pedagógica do professor em sala de aula:

**Quadro 26 –** Indícios do pensamento algébrico e encaminhamentos da prática pedagógica.

| **Formas de Pensamento Algébrico** | **Perspectiva dos autores** | **Encaminhamentos da Prática Pedagógica** |
|---|---|---|
| Aritmética Generalizada | Estimular a exploração de propriedades aritméticas dos números, operações e padrões, enfatizando o uso de símbolos e expressões para representar. | Propor tarefas que envolvem a manipulação de símbolos e expressões algébricas para resolver problemas aritméticos |
| Pensamento Funcional | Identificar padrões numéricos, regularidades de modo a descrever relações de dependência entre grandezas e suas propriedades | Propor tarefas que envolvem relações de dependência entre variável e que exija a análise e interpretação |
| Modelação | Enfatiza a criação e análise de um modelo matemático, de modo a | Propor tarefas que envolvem a identificação e de padrões, e a |

| | | |
|---|---|---|
| | interpretar o mesmo símbolo em diferentes contextos para representar situações diversas. | criação de fórmulas e expressões com dados e situações diversas |
| Generalização | Identificar e validar padrões e regularidades em dados e situações, e reconhecer a possibilidade de aplicar o que validou em outras situações mais gerais. | Propor problemas que envolvem a identificação e generalização de padrões, e a criação de fórmulas e expressões algébricas correspondentes |

Fonte: Autoria própria (2023).

# 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa pesquisa, em que o interesse foi aproveitar indícios do pensamento algébrico reconhecidos em produções dos alunos, para discutir encaminhamentos possíveis da organização de espaços pedagógicos e da prática docente em Episódios de Resolução de Tarefas, a professora esteve envolvida em um contexto de sala de aula que para ela já era tão corriqueiro, mas que se tornou diferente em muitos aspectos, em especial em relação ao papel mediador por ela assumido e pelo protagonismo de seus alunos na dinâmica de suas aulas.

Outro ponto de destaque já nas primeiras leituras teóricas nos estudos para fundamentação desse trabalho refere-se à relevância de uma tarefa em uma aula de matemática, Ponte (2014) argumenta que as tarefas matemáticas devem estar claras aos objetivos pedagógicos e às necessidades dos alunos, para que possam proporcionar uma experiência de aprendizagem significativa e desafiadora.

Desse modo o professor ao elaborar ou escolher uma tarefa e planejar suas aulas precisa analisar a pertinência em relação aos objetivos curriculares, ao contexto envolvido, às diferentes estratégias e procedimentos que os alunos podem desenvolver. Ao trabalhar em grupos, os alunos são incentivados a desenvolver habilidades, como a capacidade de argumentação, o pensamento lógico e a criatividade, ainda, envolvem-se em um ambiente de colaboração.

Em toda a organização da pesquisa buscou-se por alunos protagonistas em uma sala de aula, e o que se percebeu foi que para se ter alunos corresponsáveis pelos seus processos de aprendizagem, o professor tem um papel-chave, daquele que questiona, intervém, ou seja, daquele que acompanha e guia todo o desenvolvimento de seus alunos. Em alguns momentos a professora não interveio por não perceber a necessidade, mas ao analisar as produções e os diálogos se atentou. Isso é uma reflexão que evidencia um desenvolvimento profissional, de modo que em novas oportunidades a professora pode retomar aquilo que foi deixado, ou pode promover novas tarefas para explorar. Ao analisar a produção dos alunos a professora pode identificar as dificuldades individuais, direcionar o ensino de forma personalizada, regulando sua prática pedagógica de modo a ser mais assertiva em seus *feedbacks* e intervenções.

Tarefas matemáticas contextualizadas são uma defesa desse trabalho, contextos em que os alunos consigam imaginar e envolver-se. Nos episódios de resolução de tarefas desenvolvidos foi possível reconhecer estratégias e processos utilizados pelos alunos para lidar com os contextos, de um modo que a matemática é uma ferramenta e, que resolver tarefas vai muito além de um domínio de operações aritméticas básicas, de acordo com Blanton e Kaput (2005) é preciso que os alunos reconheçam padrões, estabeleçam relações entre situações e generalizem resultados para resolver com eficiência tarefas matemáticas. Ancorados na fundamentação apresentada e no desenvolvimento dos episódios, ressaltamos a necessidade de os alunos serem incentivados a explorar o pensamento algébrico em tarefas que vão além da simples resolução mecânica, de modo a compreender a matemática como uma ferramenta potente para lidar com situações de seu dia a dia.

Os resultados deste estudo sugerem que é importante para os professores de matemática dedicarem tempo e recursos para ajudar os alunos a desenvolverem seu pensamento algébrico, por meio de estratégias pedagógicas que enfatizem a resolução de tarefas de cunho mais aberto e a construção de modelos matemáticos. Também é importante que os professores reconheçam a diversidade de abordagens que os alunos podem ter para suas resoluções e que valorizem e incentivem essa diversidade.

Em última consideração, a resolução de tarefas matemáticas e o desenvolvimento do pensamento algébrico são habilidades importantes que devem ser valorizadas e cultivadas em todos os alunos. Esperamos que esta dissertação contribua para a compreensão dessas habilidades, para o desenvolvimento de estratégias pedagógicas potentes e que seja de algum modo ferramenta ou inspiração para que professores possam rever sua prática pedagógica, seus questionamentos e caminhos para seus desenvolvimentos profissionais.

## REFERÊNCIAS

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 36, n. 5, p. 412-443, nov. 2005.

BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL**. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Relatório Nacional Pisa 2012**. Brasília: Inep, 2013. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2014/relatorio_nacional_pisa_2012_resultados_brasileiros.pdf. Acesso em: 02 jun. 2022.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, v. 6, n. 2, p. 81-118, 2007. Disponível em: https://doi.org/10.48489/quadrante.22816.

CARRAHER, D. W., SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and algebraic reasoning. In: LESTER, F.K. (Ed.), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**, p. 669 - 705. Charlotte, 2007.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. **Pensamento algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal**. Bolema, Rio Claro, v.24, n.38, p.97-126, abr. 2011.

DENZIN, N. K.;LINCOLN, Y. S. Introdução: a disciplina e a prática da pesquisa qualitativa. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Orgs.). **O planejamento dapesquisa qualitativa: teorias e abordagens.** 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006, p. 15-41.

FELIPES, M. **Ensino de sequências numéricas à luz da RME**: uma proposta que envolve contexto realístico e planilhas eletrônicas. 2022. 125 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: Reidel. 1973.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting mathematics education**: China lectures. Dordrecht: Kluwer, 1991.

GRAVEMEIJER, K. P. E. What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? *In*: SANTOS; L., CANAVARRO, A. P.; BROCARDO J. (Ed.). **Educação matemática**: caminhos e encruzilhadas. Lisboa: APM, 2005, p. 83-101.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra. *In*: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. (Ed.). **Mathematics classrooms that promote understanding Mahwah**. NJ: Erlbaum, 1999,p. 133-155.

KAPUT, J. J.; BLANTON, M. L.; MORENO, L. Algebra from a symbolization point of view. *In*: KAPUT, J. J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. L. (ed.). **Algebra in the**

**Early Grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p. 133-160.

KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In KAPUT, J . CARRAHER:BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008, p. 5-17.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LITHNER, J. A research framework for creative and imitative reasoning. **Educational Studies in Mathematics**, [*s. l.*], p. 255-276, 2008.

LITHNER, J. Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. **The Journal of Mathematical Behavior**, [*s. l.*], p. 405-427, 2004.

MENDES, M. T. **Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. Tese (Doutorado – Programa de Pós--Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2014.

NACARATO, A. M.; CUSTÓDIO, I. A. O desenvolvimento do pensamento algébrico: algumas reflexões iniciais. In: NACARATO, A. M.; CUSTÓDIO, I. A. (Orgs**.), O desenvolvimento do Pensamento Algébrico na Educação Básica: Compartilhando Propostas de Sala de Aula com o Professor que Ensina (Ensinará) Matemática**. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p. 13-23, 2018.

OECD. PISA 2012 Results in Focus. **What 15-year-olds know and what they can do with what they know** (Volume I). Paris: OECD Publishing, 2014. Disponível em: http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-overview.pdf. Acesso em: 26 março 2022.

PALHA, S. A. G. **Shift-Problem Lessons: Fostering Mathematical Reasoning in Regular Classrooms**. Research Institute of Child Development and Education, University of Amsterdam, The Netherlands, v. 32, p. 142-159, 2013.

PALHA, S. O efeito das aulas de problemas de turnos na sala de aula de matemática. **Revista Internacional de Ciências e Educação Matemática**, [*s. l.*], abr. 2014.

PALM, T. Theory of authentic task situations. *In*: VERSCHAFFEL, L.; GREER, B.; VAN DOOREN, W.; MUKHOPADHYAY, S. (ed.). **Words and worlds**: Modeling verbal descriptions of situations. Rotterdam: Sense, 2009. p. 3-19.

PONTE, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.), **Reflectir e investigar sobre a prática profissional** (pp. 5-28). Lisboa: APM.

PONTE, J. P. (2010). **Explorar e investigar em Matemática: uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem**. Unión – Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n. 21, p. 13-30, 2010. ISSN: 1815-0640.

PONTE, J. P. Gestão Curricular em Matemática. *In*: GTI (ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34. 2005.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE. J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática.** Instituto de Educação da Universidade de Lisboa: Lisboa, 2014.

SANTOS, E. R. dos. **Análise da produção escrita em Matemática**: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 156 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

SCHOENFELD, A.H (1992). **Para uma teoria do ensino em contexto.** Questões em Educação, 8(2), 211-276.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral pautados em episódios de resolução de Tarefas: uma proposta de caracterização. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 11, p. 209--227, 2018.

VAN DEN HEUVEL -PANHUIZEN, M. V. D. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht: CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht University, 1996.

VAN DE WALLE, J. A. ***Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** Tradução: Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VAN HIELE, P. M. **Structure and insight: a theory of mathematics education**. New York: Academic Press, 1986.

VIOLA DOS SANTOS, J. R.; BURIASCO, R. L. C. **Uma análise interpretativa da produção escrita em Matemática de alunos da escola Básica**. Zetetiké (UNICAMP), v. 16, n. 30, p. 11-43, jul./dez. 2008.

# APÊNDICE A – CADERNO DE TAREFAS

**COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT**
**ALUNO(A): ________________________________________ Nº _______ TURMA: _________**
**Professor(a): Giseli Sanguino – Disciplina: Matemática - Data: ___/___/ 2022 – 1º TRIMESTRE.**

**REGRAS GERAIS PARA RESOLUÇÃO DO CADERNO DE TAREFAS**

- Todos os alunos devem receber o caderno contendo 5 tarefas.
- As tarefas serão realizadas em grupo e, mas cada integrante do grupo deve entregar suas respostas individualmente.
- As tarefas devem ser resolvidas à caneta (sugestão: fazer de lápis primeiro para evitar borrões).
- Ao final de cada tarefa do caderno, o mesmo deve ser devolvido para a professora.
- Os grupos terão até 4 alunos.
- Os grupos serão organizados de um modo em que a professora possa caminhar entre eles.
- Em cada grupo deve ser colocado um celular gravando os diálogos realizados pelos integrantes, assim como as possíveis intervenções da professora.

| TÍTULO | HABILIDADES | Duração |
|---|---|---|
| **Tarefa 01** Faça Festa | Ler, interpretar e resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos (soma, subtração); expressar e resolver problemas por meio de expressões numéricas; reconhecer que as estratégias de resolução de um problema podem ser reutilizadas em problemas que têm a mesma estrutura. | 2 Aulas |
| **Tarefa 02** Escolha de Combustível | Ler, interpretar e resolver um problema utilizando diferentes algoritmos (multiplicação, divisão); expressar e resolver problemas por meio de expressões numéricas; compreender e utilizar cálculos de média com base no contexto e em um conjunto de dados; reconhecer que as estratégias de resolução de um problema podem ser reutilizadas em problemas que têm a mesma estrutura. | 2 Aulas |
| **Tarefa 03** Crise Econômica | Ler, interpretar e resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos (soma, subtração, multiplicação e divisão); expressar e resolver problemas por meio de expressões numéricas; reconhecer e resolver situações em que operações com números negativos; reconhecer que as estratégias de resolução de um problema podem ser reutilizadas em problemas que têm a mesma estrutura. | 2 Aulas |
| **Tarefa 04** Desafio do Quebra-cabeça | Ler, interpretar e resolver problemas, que envolvam cálculos de raiz quadrada utilizando-se de diversos procedimentos; resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação para representar uma raiz como potência, reconhecer a relação entre quadrado perfeito e raiz quadrada aplicado em situações contextualizadas; reconhecer que as estratégias de resolução de um problema podem ser reutilizadas em problemas que têm a mesma estrutura. | 2 Aulas |
| **Tarefa 05** Crescimento de Bactérias | Utilizar e compreender a simbologia/linguagem algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas; reconhecer as duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes; reconhecer, identificar e compreender padrões e regularidade de uma sequência numérica e construir um algoritmo ou expressão algébrica que permita indicar os números ou as figuras seguintes; reconhecer que as estratégias de resolução de um problema podem ser reutilizadas em problemas que têm a mesma estrutura. | 3 Aulas |

**COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT**

**ALUNO(A):_____________________________________________ Nº _______ TURMA: _________**

**Professor(a): Giseli Sanguino – Disciplina: Matemática - Data: ___/___/ 2022 – 1º TRIMESTRE.**

**REGRAS GERAIS PARA RESOLUÇÃO DO CADERNO DE TAREFAS**

- Todos os alunos devem receber o caderno contendo 5 Tarefas.
- As Tarefas serão realizadas em grupo e, mas cada integrante do grupo deve entregar suas respostas individualmente.
- As Tarefas devem ser resolvidas à caneta (sugestão: fazer de lápis primeiro para evitar borrões).
- Ao final de cada tarefa do caderno, o mesmo deve ser devolvido para a professora.
- Os grupos terão até 3 alunos.
- Os grupos serão organizados de um modo em que a professora possa caminhar entre eles.
- Em cada grupo deve ser colocado um celular gravando os diálogos realizados pelos integrantes, assim como as possíveis intervenções da professora.

FAÇAFESTA é uma empresa que produz salgados para festas infantis. Para certa festa, a empresa recebeu uma encomenda de 200 esfirras, 120 empadas e 80 mini pizzas. Sabendo que já possui congelado 168 esfirras, 95 empadas e 72 mini pizzas é preciso determinar a quantidade de cada salgado que a empresa precisa separar de uma nova produção para completar a encomenda da festa.

a. Conversem como essa empresa pode determinar o que é preciso no mínimo produzir para atender a encomenda recebida.
b. Agora escrevam brevemente, sem usar simbologia matemática, como vocês diriam para a empresa calcular.
c. Nessa estratégia, escolhida pelo grupo, foram realizadas quais operações?
d. Agora, se o comando fosse sintetizar a estratégia escolhida em uma expressão numérica, como vocês a representam?
e. O que mudaria se em vez de uma encomenda por tipos de salgado, se tivesse sido um pedido de 300 salgados no total (esfirras, empadas, mini pizzas)? Expliquem essa mudança por meio de uma expressão numérica.

**COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT**

**ALUNO(A):___________________________________________ Nº _______ TURMA: _________**

**Professor(a): Giseli Sanguino – Disciplina: Matemática - Data: ___/___/ 2022 – 1º TRIMESTRE.**

**REGRAS GERAIS PARA RESOLUÇÃO DO CADERNO DE TAREFAS**

- Todos os alunos devem receber o caderno contendo 5 Tarefas.
- As Tarefas serão realizadas em grupo e, mas cada integrante do grupo deve entregar suas respostas individualmente.
- As Tarefas devem ser resolvidas à caneta (sugestão: fazer de lápis primeiro para evitar borrões).
- Ao final de cada tarefa do caderno, o mesmo deve ser devolvido para a professora.
- Os grupos terão até 3 alunos.
- Os grupos serão organizados de um modo em que a professora possa caminhar entre eles.
- Em cada grupo deve ser colocado um celular gravando os diálogos realizados pelos integrantes, assim como as possíveis intervenções da professora.

Lucas quer fazer uma viagem para uma cidade que está a uma distância de 288 km de sua casa. A capacidade do tanque de combustível do carro é de 50 litros e, seu carro desloca em média 12 km com um litro de álcool.

a. Conversem como vocês podem explicar para o Lucas quantos litros de álcool o tanque deve ter, no mínimo, para que ele possa fazer essa viagem.
b. Agora escrevam brevemente, sem usar simbologia matemática, como vocês diriam para Lucas calcular e, em seguida, apresentem esse cálculo.
c. Nessa estratégia escolhida pelo grupo foram realizadas quais operações? Foi a única estratégia pensada ou pensaram em outras? Apresente todas as estratégias pensadas.
d. Depois de Lucas pensar sobre a quantidade de álcool que precisaria colocar para viajar, decidiu estimar sobre a quantidade de álcool que tem gastado por mês, uma vez que ele percorre de carro em média 2400 quilômetros por mês. Ele obteve que a estimativa é de 4 tanques de 50 litros de álcool. Vocês concordam? Apresentem argumentos que confirmem ou não o resultado estimado que Lucas encontrou.
e. Façam uma consulta ao google do valor do litro de álcool e estimem qual o percentual, em relação a um salário mínimo, que Lucas gasta por mês com combustível?

**COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT**

**ALUNO(A):___________________________________________ Nº _______ TURMA: _________**

**Professor(a): Giseli Sanguino – Disciplina: Matemática - Data: ___/___/ 2022 – 1º TRIMESTRE.**

**REGRAS GERAIS PARA RESOLUÇÃO DO CADERNO DE TAREFAS**

- Todos os alunos devem receber o caderno contendo 5 Tarefas.
- As Tarefas serão realizadas em grupo e, mas cada integrante do grupo deve entregar suas respostas individualmente.
- As Tarefas devem ser resolvidas à caneta (sugestão: fazer de lápis primeiro para evitar borrões).
- Ao final de cada tarefa do caderno, o mesmo deve ser devolvido para a professora.
- Os grupos terão até 4 alunos.
- Os grupos serão organizados de um modo em que a professora possa caminhar entre eles.
- Em cada grupo deve ser colocado um celular gravando os diálogos realizados pelos integrantes, assim como as possíveis intervenções da professora.

Em meio a pandemia COVID-19, diversas empresas se viram obrigadas a ajustar ou paralisar suas produções. Como consequência, algumas dessas empresas decidiram fechar, e outras, para continuar funcionando, dividiram as dívidas e custos entre os sócios desse período. Um mercado pequeno da região em que quatro irmãos são sócios (João, Marcos, Alfredo e Rita) tem uma dívida de R$ 36.000,00 reais com o Banco do Brasil. Para o pagamento dessa dívida os 4 irmãos decidiram por cada um responsabilizar-se por uma parte (partes iguais).

a. Sabendo que João pagou R$ 5.000,00 reais de sua parte da dívida diretamente ao banco, conversem como vocês podem determinar quanto cada irmão ainda precisa pagar.
b. Agora escrevam sem usar simbologia matemática como vocês podem determinar o valor que ainda falta para ser pago ao banco e quanto cada um dos sócios teriam que pagar? Depois de descrever, apresente os cálculos que descrevem a estratégia escolhida.
c. De acordo com a estratégia que vocês escolheram para resolver, qual conclusão chegaram, qual o valor individual da dívida, qual o montante que falta pagar ao banco?
d. E se, ao invés de quatro irmãos se responsabilizar pela dívida, apenas três fossem pagar a dívida. Sem saber quais são os irmãos, apresente possibilidades de para essa nova situação.?

**COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT**

**ALUNO(A):____________________________________________ Nº _______ TURMA: _________**

**Professor(a): Giseli Sanguino – Disciplina: Matemática - Data: ___/___/ 2022 – 1º TRIMESTRE.**

## REGRAS GERAIS PARA RESOLUÇÃO DO CADERNO DE TAREFAS

- Todos os alunos devem receber o caderno contendo 5 Tarefas.
- As Tarefas serão realizadas em grupo e, mas cada integrante do grupo deve entregar suas respostas individualmente.
- As Tarefas devem ser resolvidas à caneta (sugestão: fazer de lápis primeiro para evitar borrões).
- Ao final de cada tarefa do caderno, o mesmo deve ser devolvido para a professora.
- Os grupos terão até 4 alunos.
- Os grupos serão organizados de um modo em que a professora possa caminhar entre eles.
- Em cada grupo deve ser colocado um celular gravando os diálogos realizados pelos integrantes, assim como as possíveis intervenções da professora.

Paulo, João, Pedro e Léo adoram brincar com peças de quebra cabeça, em um determinado dia resolveram fazer um desafio e montar figuras geométricas com essas peças, para isso eles juntaram suas peças em 4 mesas diferentes. Em cada mesa foi colocado quantidades diferentes de peças com formatos variados e uma base para montagem. Para a utilização das peças foi decidido que deveria ser seguido a regra de que, sobre a base, todos construíssem quadrados, e ser utilizado apenas as peças da mesa. A distribuição das peças seguiu a seguinte quantidade:

**1º mesa:** 25 peças **2º mesa:** 49 peças **3º mesa:** 81 peças **4º mesa:** 42 peças

Agora responda:

a. Conversem como é possível construir o desejado em todas as mesas conforme o desafio pede? Em todas as mesas será possível usar todas as peças para lidar com o desafio.
b. Apresenta todas as soluções possíveis de cada mesa.
c. Nas soluções encontradas para o desafio há algum elemento que pode justificar uma resposta mais geral, de tal forma que se mudar o número de peças vocês já saberão as possíveis soluções.

**COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT**

**ALUNO(A): ______________________________________________ Nº _______ TURMA: _________**

**Professor(a): Giseli Sanguino – Disciplina: Matemática - Data: ___/___/ 2022 – 1º TRIMESTRE.**

**REGRAS GERAIS PARA RESOLUÇÃO DO CADERNO DE TAREFAS**

- Todos os alunos devem receber o caderno contendo 5 Tarefas.
- As Tarefas serão realizadas em grupo e, mas cada integrante do grupo deve entregar suas respostas individualmente.
- As Tarefas devem ser resolvidas à caneta (sugestão: fazer de lápis primeiro para evitar borrões).
- Ao final de cada tarefa do caderno, o mesmo deve ser devolvido para a professora.
- Os grupos terão até 4 alunos.
- Os grupos serão organizados de um modo em que a professora possa caminhar entre eles.
- Em cada grupo deve ser colocado um celular gravando os diálogos realizados pelos integrantes, assim como as possíveis intervenções da professora.

Determinados seres vivos microscópicos, como as bactérias E. Coli, responsáveis por doenças do intestino, se reproduzem por divisão celular. Cada célula divide-se em duas em intervalos regulares de tempo. Se começarmos uma população de 1024 bactérias e pensarmos que esta população se dobre a cada 20 minutos. Após terem se passado 3 horas, responda:

a) Em discussão com seu grupo escrevam a respeito de qual seria o objetivo da situação problema e explique como você poderia chegar a uma solução?

b) Quais as operações matemáticas você usaria na resolução da Tarefa, houve consenso em como resolver? Quais caminhos vocês encontraram, mesmo que não seja o escolhido para a versão final da Tarefa?

c) Utilizem da situação para explorar o conceito de uma multiplicação e por meio de uma potência, explorando as equivalências entre multiplicação e potência?

A partir do que vocês exploraram é possível estimar esse número de bactérias depois de 1 dia?

# APÊNDICE B – TAREFAS E SUAS EXPECTATIVAS DE RESOLUÇÃO

## TAREFA 3 – CRISE ECONÔMICA.

**Temática:** *Números e Álgebra* – Operações com Números Inteiros

**Habilidades essenciais:** Ler, interpretar e resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos (soma, subtração, multiplicação e divisão); expressar e resolver problemas por meio de expressões numéricas; reconhecer e resolver situações em operações com números negativos; reconhecer que as estratégias de resolução de um problema podem ser reutilizadas em problemas que têm a mesma estrutura.

**Procedimentos utilizados:** adição, subtração, multiplicação, divisão, expressões numéricas com números inteiros.

**Números de aulas previstas:** 2 aulas de 50 minutos.

**Quadro 1 –** Enunciado da Tarefa 3

Em meio à pandemia de Covid-19, diversas empresas se viram obrigadas a ajustar ou paralisar suas produções. Como consequência, algumas dessas empresas decidiram fechar, e outras, para continuar funcionando, dividiram as dívidas e custos entre os sócios desse período. Um mercado pequeno da região em que quatro irmãos são sócios (João, Marcos, Alfredo e Rita) tem uma dívida de R$ 36.000,00 com o Banco do Brasil. Para o pagamento dessa dívida, os 4 irmãos decidiram por cada um responsabilizar-se por uma parte (partes iguais).

a. Sabendo que João pagou R$ 5.000,00 reais de sua parte da dívida diretamente ao banco, conversem como vocês podem determinar quanto cada irmão ainda precisa pagar.

b. Agora escrevam, sem usar simbologia matemática, como vocês podem determinar o valor que ainda falta para ser pago ao banco e quanto cada um dos sócios teriam que pagar? Depois de descrever, apresente os cálculos que descrevem a estratégia escolhida.

c. De acordo com a estratégia que vocês escolheram para resolver, qual conclusão chegaram, qual o valor individual da dívida, qual o montante que falta pagar ao banco?

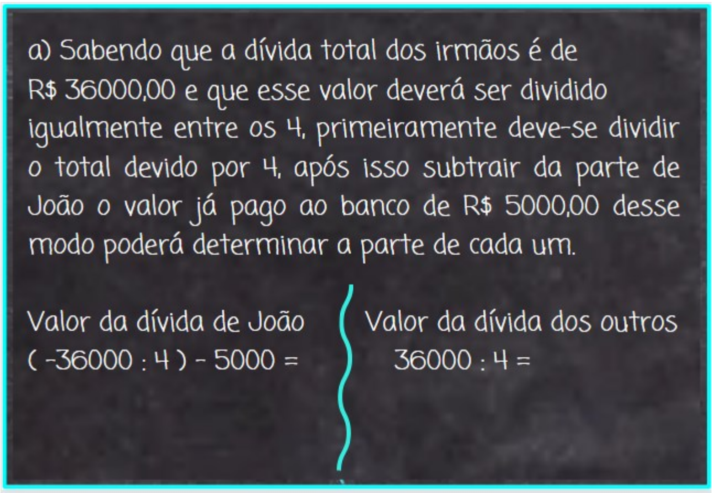
d. E se, ao invés de quatro irmãos se responsabilizarem pela dívida, apenas três fossem pagar a dívida? Sem saber quais são os irmãos, apresente possibilidades para essa nova situação.

Fonte: Autoria própria (2023).

**Exploração do Pensamento algébrico – potencial da tarefa:**

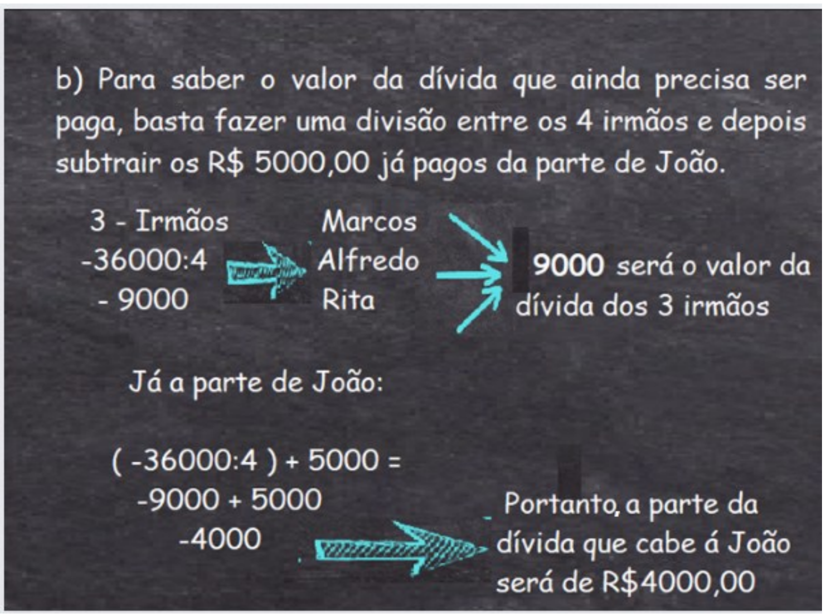
Nos itens **a** e **b** da Tarefa 3, os alunos discutem e levantam as informações contidas na situação-problema. Entenda que a dívida será dividida em quatro partes iguais entre João, Marcos, Alfredo e Rita, reconheça primeiro o objetivo de determinar o valor de cada sócio para pagar ao Banco do Brasil, considerando o adiantamento de R$ 5.000,00 de João, construindo uma expressão numérica para resolver o primeiro objetivo

**Figura 1 –** Expectativa de resposta do item **a** da Tarefa 3




Fonte: Autoria própria (2023).

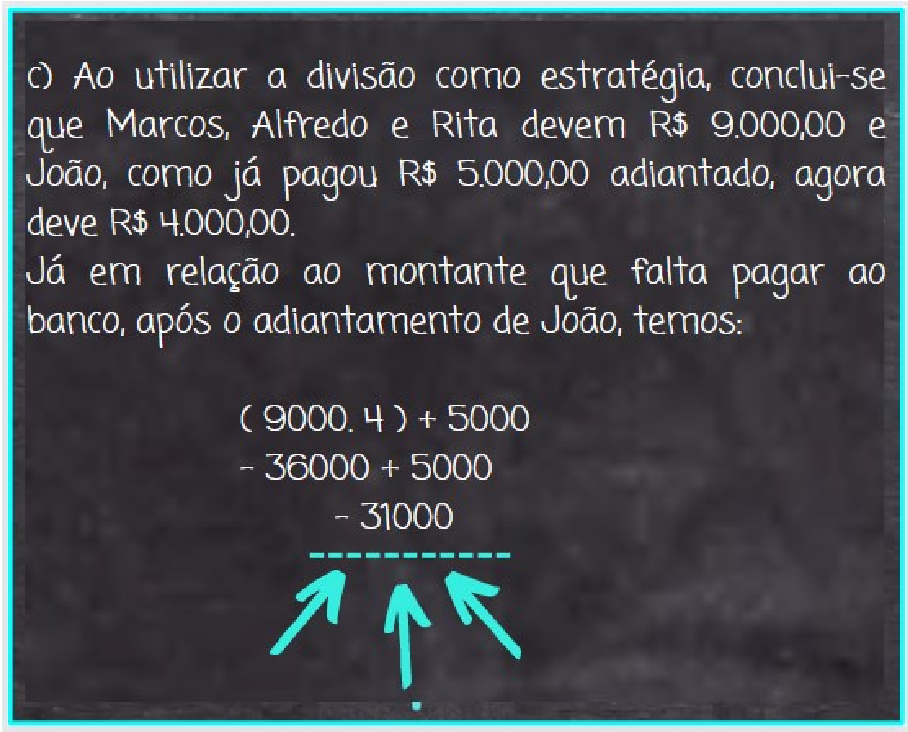
**Figura 2 –** Expectativa de resposta do item **b** da Tarefa 3




Fonte: Autoria própria (2023).

No item **c** o aluno poderá descrever suas estratégias dando indícios de que compreende a problematização. Ainda nessa produção o aluno poderá ampliar sua compreensão determinando corretamente os termos numéricos e operações aritméticas de divisão e subtração a ser utilizado

**Figura 3 –** Expectativa de resposta do item **c** da Tarefa 3

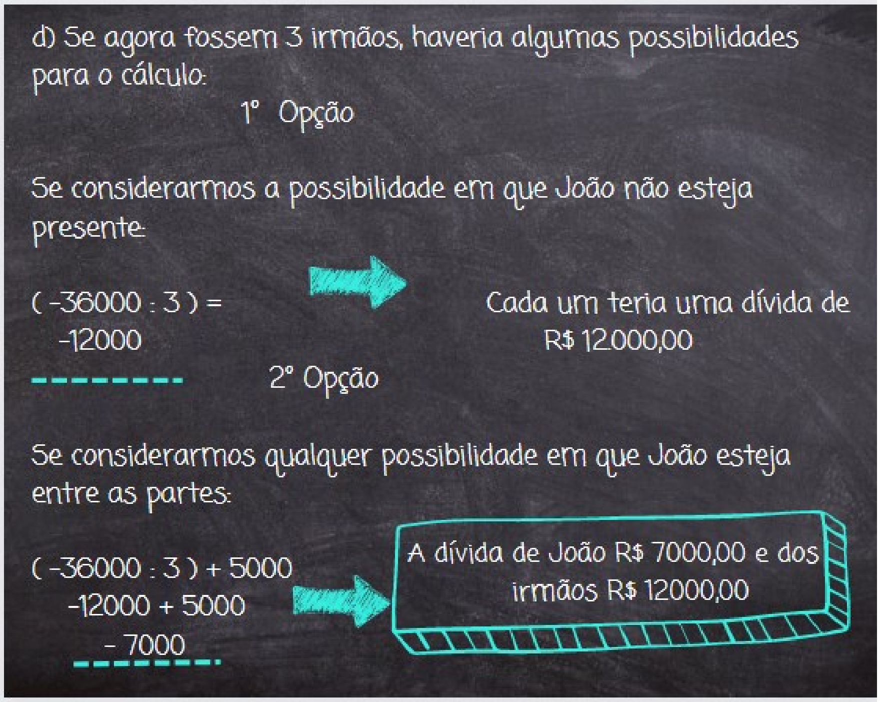



Fonte: Autoria própria (2023).

No item **d**, ao utilizar indícios de cálculos anteriores para fazer ligações com valores a calcular mensalmente, o aluno mobilizará pensamentos de Modelação, ao realizar os cálculos priorizando a divisão para encontrar os resultados de -9000 para três sócios. Com a divisão e subtração encontrar 4000 para João, respondendo que cada um dos três sócios terá que contribuir com 9000 e João com 4000.

Para resolver o segundo objetivo de uma nova situação, considerando três sócios: João, Rita e Marcos, respondendo que o valor da dívida de cada um seria de: -7000 para João, -12000 para Rita e -12000 para Marcos. Ao finalizar espera-se que o aluno consiga dar uma explicação de como chegou à solução da Tarefa.

**Figura 4 –** Expectativa de resposta do item **b** da Tarefa 3




Fonte: Autoria própria (2023).

Com a intenção de intervir e acompanhar o desenvolvimento de cada grupo a professora, ao caminhar pela sala, realizará questionamentos que direcionem às discussões, linguagens e produções dos estudantes. Nesta tarefa, a professora pode realizar questões como:

- Qual é a ideia principal da tarefa?
- O que significa João ter adiantado o valor de R$ 5.000,00 em relação aos outros sócios?
- O que você precisa responder no problema?
- Qual operação será necessário utilizar?
- Qual é a expressão numérica que você pode utilizar para solucionar esse problema?
- O que significa mudar a qualidade de sócios para 3 pessoas?
- Com a nova situação proposta com 3 sócios aumenta ou diminui a participação de cada um na dívida?
- Os valores da dívida individual serão iguais para todos quando forem 3 sócios?

# TAREFA 4 – DESAFIO DO QUEBRA-CABEÇA.

**Temática:** *Números e Álgebra* – Raiz Quadrada Exata de Números Racionais

**Habilidades essenciais:** Ler, interpretar e resolver problemas que envolvam cálculos de raiz quadrada, utilizando-se de diversos procedimentos; resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação para representar uma raiz como potência, reconhecer a relação entre quadrado perfeito e raiz quadrada aplicada em situações contextualizadas; reconhecer que as estratégias de resolução de um problema podem ser reutilizadas em problemas que têm a mesma estrutura.

**Procedimentos utilizados:** multiplicação, potenciação e raiz quadrada exata.

**Números de aulas previstas:** 2 aulas de 50 minutos.

**Quadro 2** – Enunciado da Tarefa 4

Paulo, João, Pedro e Léo adoram brincar com peças de quebra-cabeça. Em um determinado dia resolveram fazer um desafio e montar figuras geométricas com essas peças, para isso eles juntaram suas peças em 4 mesas diferentes. Em cada mesa foram colocadas quantidades diferentes de peças com formatos variados e uma base para montagem. Para a utilização das peças foi decidido que deveria ser seguida a regra de que, sobre a base, todos construíssem quadrados, e utilizassem apenas as peças da mesa. A distribuição das peças seguiu a seguinte quantidade:

**1ª mesa:** 25 peças **2ª mesa:** 49 peças **3ª mesa:** 81 peças **4ª mesa:** 42 peças

Agora responda:

a. Conversem como é possível construir o desejado em todas as mesas, conforme o desafio pede? Em todas as mesas será possível usar todas as peças para lidar com o desafio.

b. Apresentem todas as soluções possíveis de cada mesa.

c. Nas soluções encontradas para o desafio há algum elemento que pode justificar uma resposta mais geral, de tal forma que se mudar o número de peças vocês já saberão as possíveis soluções.

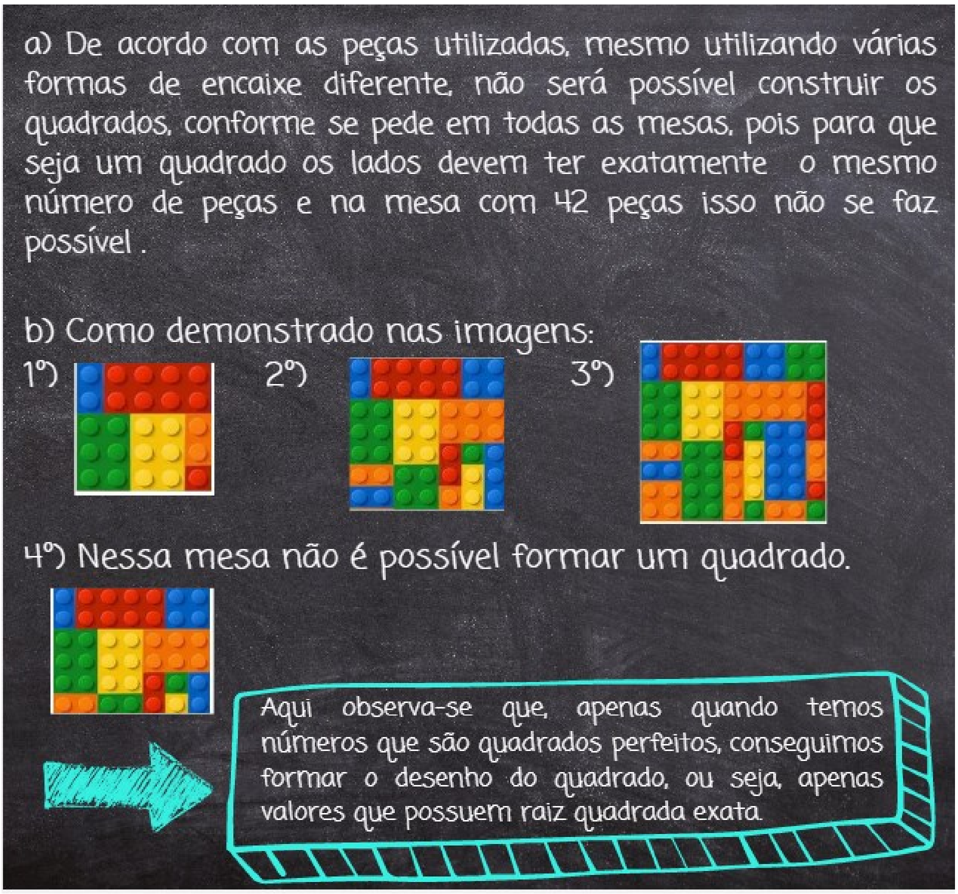
Fonte: Autoria própria (2023).

## Exploração do Pensamento algébrico – potencial da tarefa:

No item **a** da Tarefa 4, os alunos discutem e expõem a interpretação das informações do enunciado e levantam hipóteses de estratégias de como deve ser calculada a possibilidade para construção de um quadrado, conforme proposto no desafio. Nesse processo, de levantamento de hipóteses e de formulação de conjecturas, os alunos utilizam e regulam suas compreensões de potências e formulam ideias para atender as exigências propostas e analisar as possibilidades possíveis e impossíveis.

Já no item **b**, os alunos formulam cálculos que expressem a possibilidade de construção do formato quadrado com a quantidade de peças determinadas. Durante esse processo de resolução o aluno, ao perceber que apenas números de peças que formam quadrados perfeitos serão compatíveis, concluirá que é impossível construir quadrados com bases que possuam 42 peças. Observe a Figura 5:

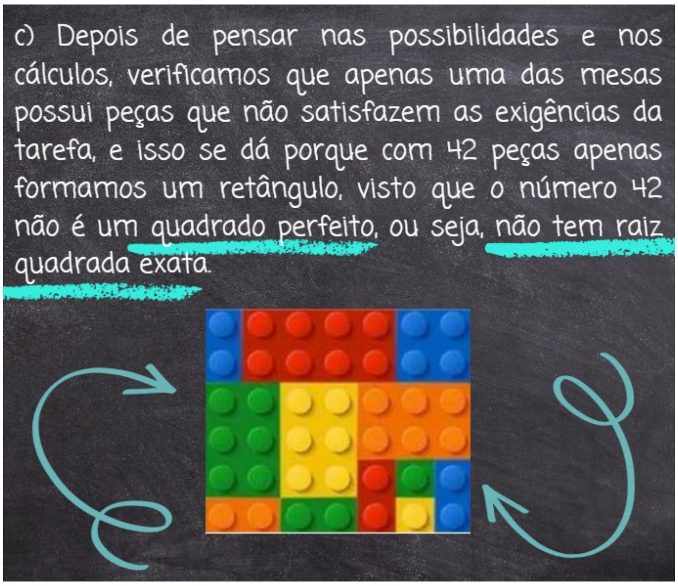
**Figura 5 –** Expectativa de resposta dos itens **a** e **b** da Tarefa 4




Fonte: Autoria própria (2023).

No item **c**, Figura 6, o aluno deve expor suas ideias de cálculo, explicando suas estratégias de resolução e reflexões promovidas durante a discussão do grupo. Nesse momento o aluno pode representar suas respostas usando simbologia matemática ou através de escrita livre. O que se espera é que ele possa expor com certa clareza seu entendimento do fato, que só poderá haver a montagem de quadrados quando a quantidade de peças usada formar números que sejam quadrados perfeitos. Ao relacionar dessa forma sua resolução estarão generalizando sua respos

**Figura 6 –** Expectativa de resposta do item **c** da Tarefa 4




Fonte: Autoria própria (2023).

Com a intenção de intervir e acompanhar o desenvolvimento de cada grupo, a professora, ao caminhar pela sala, irá realizar questionamentos que direcionem as discussões, linguagens e produções dos estudantes. Nesta tarefa, a professora pode realizar questões como:

- Qual é o objetivo dessa Tarefa?
- O que você precisa saber em relação às exigências do desafio?
- Qual é a forma geométrica utilizada no desafio?
- O que esse formato pode influenciar na resposta da Tarefa?
- Qual operação será necessária utilizar?
- Como você poderia me explicar a sua resolução? Todas as opções foram possíveis?
- O que significa não ser possível completar o desafio com determinadas quantidades?
- Como você faria para ter certeza de que com a quantidade de peças seria possível construir uma divisória quadrada? Formalize essa ideia.

## TAREFA 5 – CRESCIMENTO DE BACTÉRIAS.

**Temática:** *Números e Álgebra* – Sequências e Expressões Algébricas

**Habilidades essenciais:** Utilizar e compreender a simbologia/linguagem algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas; reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes; reconhecer, identificar e compreender padrões e regularidade de uma sequência numérica e construir um algoritmo ou expressão algébrica que permita indicar os números ou as figuras seguintes; reconhecer que as estratégias de resolução de um problema podem ser reutilizadas em problemas que têm a mesma estrutura.

**Procedimentos utilizados:** adição, subtração, divisão, potenciação e expressões algébricas com números racionais.

**Quadro 3 –** Enunciado da Tarefa 5

Determinados seres vivos microscópicos, como as bactérias E. Coli, responsáveis por doenças do intestino, se reproduzem por divisão celular. Cada célula divide-se em duas em intervalos regulares de tempo. Se começarmos uma população de 1.024 bactérias e pensarmos que esta população se dobre a cada 20 minutos, após terem se passado 3 horas, responda:

a) Em discussão com seu grupo escrevam a respeito de qual seria o objetivo da situação-problema e explique como você poderia chegar a uma solução.

b) Quais operações matemáticas você usaria na resolução da Tarefa? Houve consenso em como resolver? Quais caminhos vocês encontraram, mesmo que não seja o escolhido para a versão final da Tarefa?

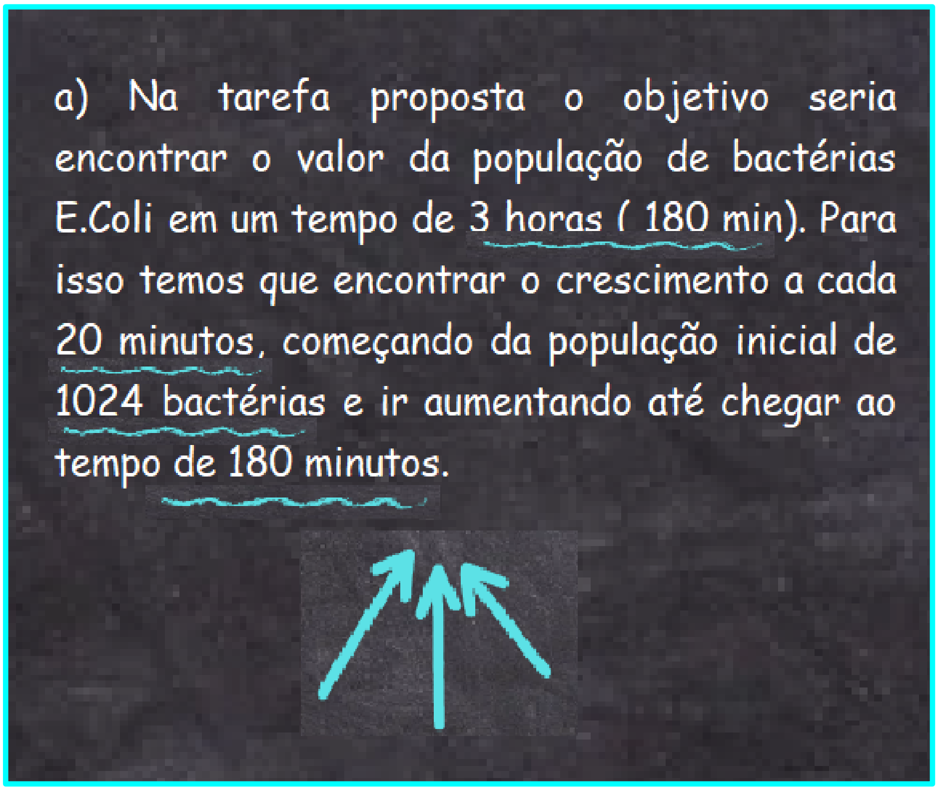
c) Utilizem a situação para explorar o conceito de uma multiplicação e, por meio de uma potência, as equivalências entre multiplicação e potência. A partir do que vocês exploraram é possível estimar esse número de bactérias depois de 1 dia?

Fonte: Autoria própria (2023).

**Exploração do Pensamento algébrico – potencial da Tarefa:**

No item **a** os alunos têm a oportunidade de interpretar a situação-problema relacionada ao crescimento das bactérias no tempo estipulado e por meio de operações e propriedades da multiplicação e potenciação. Nesse processo em que relacionam e descobrem a sequência certa para encontrar o crescimento das bactérias**,** tomam mão das operações e propriedades como meio de formalizar suas estratégias de resolução (Figura 7)**.**

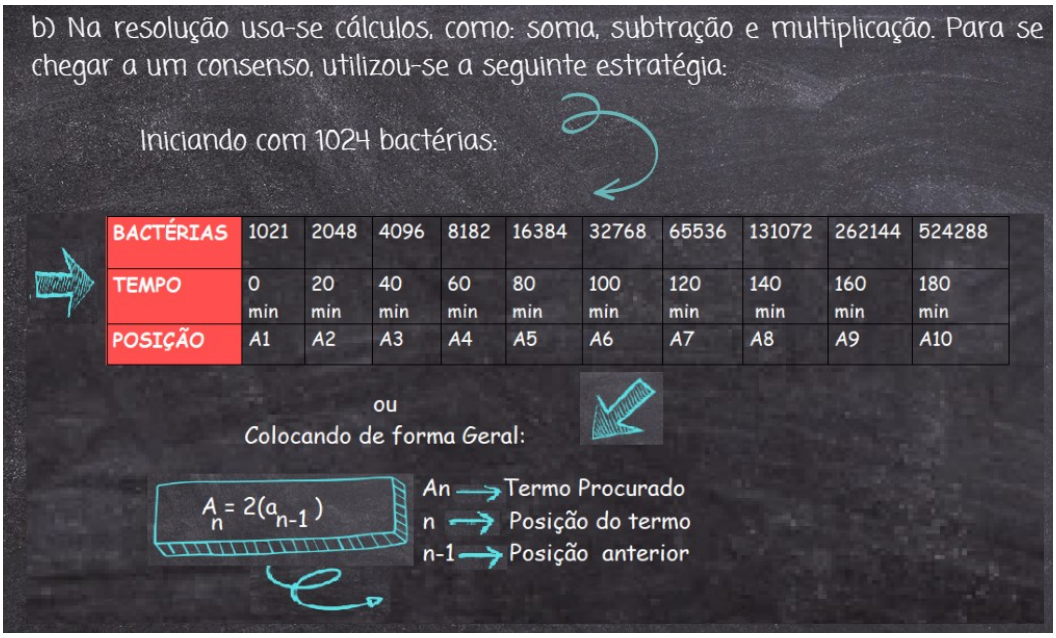
**Figura 7 –** Expectativa de resposta do item **a** da Tarefa 5




Fonte: Autoria própria (2023).

No item **b**, os alunos formulam uma sequência para representar o contexto da Tarefa, utilizando-se de operações matemáticas como: soma, subtração e multiplicação, sendo possível perceber como se relacionam os termos da sequência em relação ao passar do tempo e assim formular uma ordem (Figura 8).

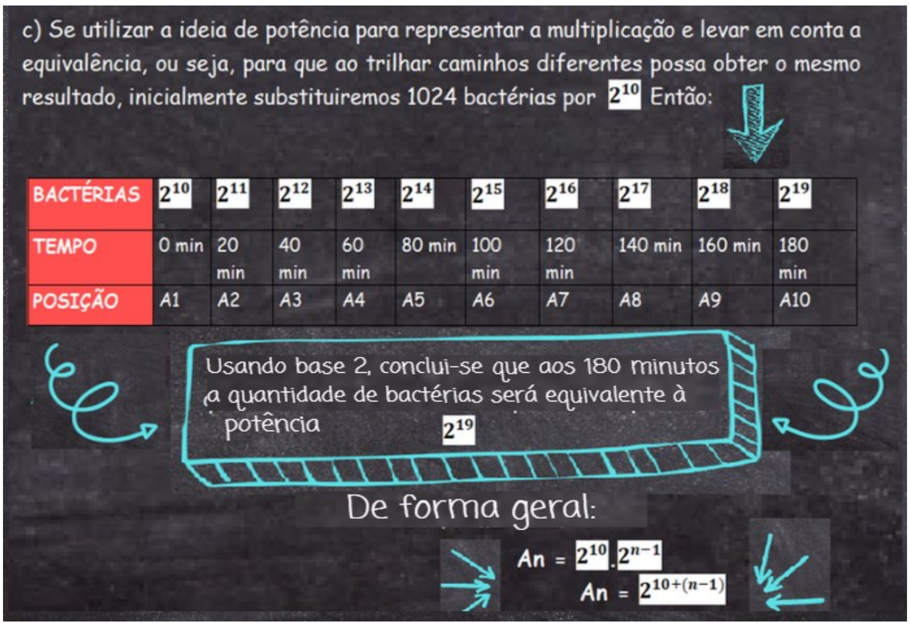
**Figura 8 –** Expectativa de resposta do item **b** da Tarefa 5

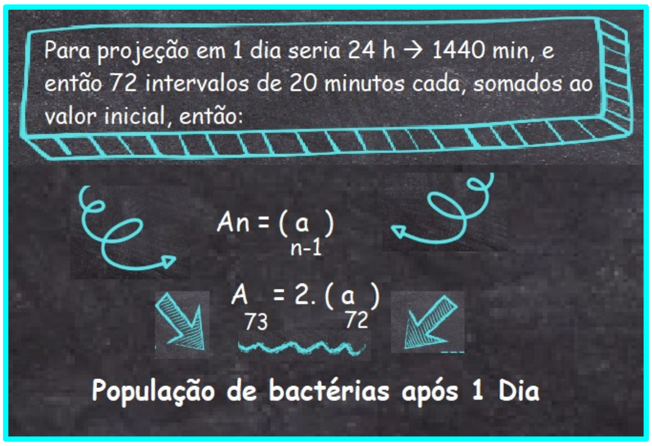



Fonte: Autoria própria (2023).

No item **c**, os alunos precisam ser capazes de perceber a alteração da situação, partindo das regularidades percebidas no item **b**, e assim formular uma equivalência entre a multiplicação e a potenciação, visto que a partir dos cálculos realizados e formando um pensamento conclusivo por meio desse pensamento perceberá ser possível a utilização desse pensar em qualquer situação que se assemelhe a essa (com valores diversos) (Figura 9).

**Figura 9 –** Expectativa de resposta do item **c** da Tarefa 5






Fonte: Autoria própria (2023).

Com a intenção de intervir e acompanhar o desenvolvimento de cada grupo, a professora, ao caminhar pela sala, irá realizar questionamentos que direcionem as discussões, linguagens e produções dos estudantes. Nesta tarefa, a professora pode realizar questões como:

- Qual é o objetivo dessa tarefa?
- O que você precisa saber em relação ao que a tarefa está te propondo?
- Qual é o caminho que você pode seguir para chegar a essa resposta?
- Qual operação será necessária utilizar?
- Como você poderia me explicar a sua resolução? Todas as opções foram possíveis?
- O que significa explorar multiplicações por meio de potências?
- Com base no que você resolveu até agora, é possível calcular o número de bactérias em outros períodos?
- Como você faria para ter certeza de que pode explorar o número de bactérias por outros períodos?

## Anexo A - Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al*. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

| | |
|---|---|
| **Instituição de Ensino Superior** | Universidade Tecnológica Federal do Paraná |
| **Programa de Pós-Graduação** | Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) |
| **Título da Dissertação** | INDÍCIOS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO E A PRÁTICA DOCENTE EM EPISÓDIOS DE RESOLUÇÃO DE TAREFAS |
| **Título do Produto/Processo Educacional** | Tarefas para explorar o pensamento algébrico |
| **Autores do Produto/Processo Educacional** | **Discente**: Giseli Sanguino |
| | **Orientador/Orientadora**: Marcele Tavares |
| | **Outros** (se houver): |
| **Data da Defesa** | 23/03/2023 |

| **FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)** | |
|---|---|
| Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes. | |
| **Aderência:** avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação.<br><br>*Apenas um item pode ser marcado.<br><br>Linhas de Pesquisa do PPGMAT:<br><br>*L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade); | (   ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.<br><br>( x ) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. |

| | |
|---|---|
| *L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática* (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes). | |
| **Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade:** refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas.<br><br>*<u>Apenas um item pode ser marcado</u>.<br><br>A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis:<br>1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado;<br>2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo;<br>3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação.<br><br>Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado. | (  ) PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa.<br><br>(  ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade.<br><br>(x ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).<br><br>( x ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). |
| **Abrangência territorial:** refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente.<br><br>*<u>Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória</u>. | ( ) Local<br>( ) Regional<br>(x) Nacional<br>( ) Internacional<br><br>Justificativa (*obrigatória*): Disponível Repositório Institucional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (***RIUT***). |

| | |
|---|---|
| **Impacto:** considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho).<br><br>*Apenas um item pode ser marcado. | (   ) PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto).<br><br>( x  ) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente. |
| **Área impactada**<br><br>*Apenas um item pode ser marcado. | (   ) Econômica;<br>(   ) Saúde;<br>( x  ) Ensino;<br>(   ) Cultural;<br>(   ) Ambiental;<br>(   ) Científica;<br>(   ) Aprendizagem. |
| **Complexidade:** compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE.<br><br>*Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens. | ( x ) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação.<br><br>( x ) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE.<br><br>(  ) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação.<br><br>(   ) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE. |
| **Inovação:** considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do | (   ) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito).<br><br>(   ) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). |

| | |
|---|---|
| emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores. | ( x ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes). |

**Membros da banca examinadora de defesa**

| **Nome** | **Instituição** |
|---|---|
| Marcele Tavares | UTFPR |
| André Luis Trevisan | UTFPR |
| Cristiano Forster | Secretaria de Educação do Estado de Santa Catarina |