UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

HENRIQUE PEREIRA DE AVELAR

FILOSOFIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

CURITIBA
2022

HENRIQUE PEREIRA DE AVELAR

FILOSOFIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Mathematics philosophy in high school

Trabalho de conclusão de curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Orientadora: Leônia Gabardo Negrelli.

CURITIBA

2022

HENRIQUE PEREIRA DE AVELAR

FILOSOFIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 08/junho/2022

___

Leônia Gabardo Negrelli
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

___

Jonas Faccin
Mestrado
Colégio Senhora de Fátima

___

Veronica Ferreira Bahr Calazans
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

CURITIBA

2022

Dedico este trabalho à minha família,
por todo o apoio recebido.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela vida e condições emocionais e cognitivas que muito auxiliaram no desenvolvimento deste trabalho, bem como por colocar em minha vida as pessoas que agradeço a seguir.

Aos meus pais, Inês e Carlos, pelo suporte material e afetivo recebido durante toda a vida, especialmente durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus avós, Geraldino, Melânia, Claudionor e Carmem, todos falecidos, por todo o trabalho e amor com que criaram minha família, bem como pelos valores morais que carrego em todas as situações da minha vida, em especial no enfrentamento deste desafio.

Aos meus padrinhos, Ana, Hilário e Sílvio, meu irmão Claudio e todos os meus familiares e amigos, pelo apoio material e emocional durante todo o processo de composição deste trabalho.

Agradeço à minha orientadora, Profª. Drª. Leônia Gabardo Negrelli, pela disponibilidade e paciência com a qual me guiou nesta empreitada.

À banca avaliadora, pela disponibilidade e pelos apontamentos feitos na apresentação do projeto, que muito contribuíram para o amadurecimento das ideias aqui contidas.

Agradeço, por fim, aos meus professores e demais funcionários da Escola Municipal São José e do Colégio Estadual da Colônia Murici, de onde saiu muito da minha vontade de fazer uma graduação em Matemática e onde nasceram as primeiras das percepções que levaram à concepção do tema deste trabalho.

RESUMO

O propósito deste trabalho foi investigar possibilidades de abordagem de aspectos filosóficos da matemática em aulas regulares de matemática no Ensino Médio. Partindo do pressuposto de que, nesse nível de ensino, a ênfase em aspectos técnicos e aplicativos da matemática, em detrimento de aspectos históricos e filosóficos pode contribuir para o desinteresse e incompreensão dos estudantes, buscou-se pôr em evidência elementos filosóficos relacionados a três conteúdos matemáticos comumente tratados no Ensino Médio, a saber, sistemas de equações lineares, funções e conjuntos numéricos. A escolha desses temas deveu-se ao potencial de cada um deles para contemplar elementos previstos na BNCC e presentes em livros didáticos de matemática e de filosofia. Os encaminhamentos metodológicos adotados para a realização deste estudo incluem a consulta a documentos oficiais acerca da educação básica e da formação de professores, a exploração de livros didáticos de Filosofia indicados pelo PNLD nos anos 2012-2014 e 2015-2017, além da elaboração de propostas de abordagens para os referidos temas. Nelas destacam-se o convite a questionamentos, o espaço para imprecisões e a escolha de posicionamento que podem favorecer abordagens mais amplas, críticas e interdisciplinares de conteúdos, tanto no ensino médio como em cursos de licenciatura.

Palavras-chave: matemática; filosofia; filosofia da matemática; ensino médio.

ABSTRACT

The purpose of this work was to investigate possibilities of approaching philosophical aspects of mathematics in regular classes of mathematics in Brazilian high school. Assuming that, in this level of education, the emphasis on technical and applicatives aspects of mathematics instead of the historical and philosophical aspects can contribute to the student's lack of interest and misunderstanding, we searched to highlight philosophical elements about three mathematical contents commonly treated in high school: systems of linear equations, functions and numerical sets. The choices of these themes was due to the potential to contemplate elements foreseen in BNCC and present in mathematics and philosophy textbooks. The methodological guidelines adopted to this study realization include consulting philosophy textbooks indicated by 2012-2014's and 2015-2017's PNLD, and the elaboration of proposals of approaches to the referred themes. In these proposals, we highlight the inviting to questioning , the possibilities of imprecisions and the choice of positioning that may support broader, critical and interdisciplinary approaches of the contents in the high school and graduation courses.

Keywords: mathematics; philosophy; philosophy of mathematics; high school.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho aborda a filosofia da matemática no contexto do ensino e da aprendizagem de matemática no Ensino Médio e tem o intuito de contribuir para a construção de um olhar mais amplo acerca da matemática, que avance para além da abordagem predominantemente técnica com que ela é ensinada nas escolas. Para tanto, foram trazidas para o debate questões relevantes ao estudo de matemática e de filosofia e também foram vislumbradas possibilidades para um trabalho interdisciplinar[1] nessas duas áreas do conhecimento, quando abordadas na sala de aula. Dentro de nossa concepção, a proposição de abordagens interdisciplinares se faz viável uma vez que o curso de Licenciatura em Matemática possui uma disciplina obrigatória intitulada Filosofia Geral e que todo professor de filosofia do Ensino Médio possui familiaridade com a matemática desse nível, uma vez que já a conheceu enquanto estudante.

Estudos sobre Filosofia da Matemática revelaram-se importantes e necessários para desenvolver o que pretendíamos; por isso o título deste trabalho. Isso, no entanto, não significa que seu objetivo principal seja o de ensinar Filosofia da Matemática no Ensino Médio, mas sim, abordar filosoficamente a matemática.

No Ensino Médio, em atividades desenvolvidas na disciplina de Filosofia, atualmente situada na área do conhecimento Ciências Humanas e Sociais Aplicadas (BRASIL, 2017, Lei 13.415/2017), é usual a abordagem de correntes filosóficas pré socráticas (séc VII ao V aC), modernas (séc XV ao XIX) e contemporâneas (séc XIX ao XX). Apesar de existir grande potencial nesses períodos históricos para a abordagem de temas matemáticos e da atual área do conhecimento Ciências da Natureza, práticas interdisciplinares no contexto escolar que tomam a filosofia como fio condutor para estudo desses temas não são muito frequentes. O conhecimento desse cenário foi possível por meio de atividades de observação participante realizadas no decorrer do estágio supervisionado obrigatório, além de ter, antes disso, sido percebido no decorrer de minha própria vivência como estudante do Ensino Médio. Visualizando possibilidades para a exploração do potencial interdisciplinar que

---

[1]: A palavra “interdisciplinar” indica, neste trabalho, uma abordagem que leva em conta conteúdos e métodos de uma disciplina para o estudo e desenvolvimento de outra. Uma abordagem interdisciplinar entre Matemática e Filosofia, por exemplo, indica a utilização de conteúdos e/ou métodos da Filosofia para a abordagem de conteúdos da Matemática.

a matemática possui quando abordada filosoficamente, pretendeu-se com este estudo identificar, nos temas propostos na Filosofia, possibilidades de entrelaçamento com conteúdos matemáticos.

Contemplar, também, a crítica (e não somente a técnica) é algo necessário para o aprendizado não só de matemática, mas também de outras áreas do conhecimento. É preciso questionar e saber como uma nova explicação ou conceito são aceitos. Além disso, elementos filosóficos fazem parte da matemática, de forma que ensiná-la sem evidenciá-los pode provocar um entendimento limitado, por parte dos discentes, de como a matemática se constituiu como ciência.

A soma de frações com denominadores diferentes, por exemplo, executada a partir de orientações de "é assim que se faz" ao invés de "podemos usar este método, que satisfaz estes princípios e utiliza estas definições, axiomas e propriedades" revela-se hoje, um procedimento presente, oportuno e compreensível no âmbito do Ensino Médio. No entanto, é preciso dispor de estratégias didáticas que tornem possível atingir o grau de entendimento preconizado pela BNCC (BRASIL, 2017, p. 530, 531), segundo a qual o desenvolvimento dos alunos deve pressupor "[...] a formulação e testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas, além dos aspectos [...] em relação às competências de raciocinar e representar" e a utilização de "[...] estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas [...]".

Isso reforça que uma abordagem voltada aos procedimentos, além daquela voltada aos fatos, também é desejável no contexto escolar.

Convém ressaltar que, no decorrer do desenvolvimento deste estudo houve a implementação do Novo Ensino Médio (NEM), não existindo mais neste nível de ensino as disciplinas Matemática e Filosofia, mas sim as áreas do conhecimento Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, estando nesta última os temas e estratégias anteriormente contemplado na disciplina de Filosofia. Devido a essa mudança, faremos referência, neste texto, à Matemática ou à Filosofia, quando tratarmos de teorias e estudiosos e nos referiremos a aulas de matemática ou a aulas de filosofia quando quisermos nos referir a essas mesmas teorias ou estudiosos quando abordados no contexto da sala de aula. Isso não significa que o debate das questões aqui levantadas deva acontecer apenas nas áreas do conhecimento citadas acima, uma vez que muitos deles também serão oportunos em aulas atreladas às outras duas áreas do conhecimento que compõem o NEM, a saber, as Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Linguagens e suas Tecnologias.

Discutir e refletir sobre noções de lógica pode contribuir para a habilidade de interpretação e compreensão de problemas nos mais variados contextos; o mesmo ocorre com as nuances possibilitadas pelo uso de determinadas linguagens, que podem conduzir a falácias e consequentes enganos. Lógica, linguagem, paradoxos e falácias geralmente são temas abordados no contexto da filosofia da matemática. Por isso, e por entender que saber como a matemática funciona (um tema usualmente abordado pela Filosofia da Matemática) pode proporcionar um aprendizado significativo dos conceitos matemáticos, em uma das seções deste trabalho trazemos uma caracterização da Filosofia da Matemática, área de estudo na qual vimos convergir nossos interesses de pesquisa, alguns surgidos antes mesmo do início do curso de graduação, que esperamos sedimentar com este Trabalho de Conclusão de Curso.

Para nortear o desenvolvimento do estudo, formulamos a seguinte questão de investigação: como abordar (também) filosoficamente a Matemática no Ensino Médio?

Como objetivo geral, buscamos explicitar possibilidades para uma abordagem filosófica de conteúdos matemáticos no Ensino Médio, pressupondo que isso implica contemplar a Filosofia da Matemática como tema de estudo nesse trabalho.

Dentre os objetivos específicos estiveram:

- a apresentação de um panorama acerca do ensino de Filosofia no Ensino Médio;
- a identificação, a partir desse panorama, de possibilidades para um trabalho interdisciplinar entre Filosofia e Matemática, o que não exclui as demais componentes curriculares previstas para essa etapa da Educação Básica;
- a explicitação de possibilidades para encaminhamentos que favoreçam uma abordagem também filosófica de conceitos e procedimentos matemáticos.

No que diz respeito aos aspectos metodológicos, este trabalho constituiu-se de um estudo teórico, que inclui elementos de uma pesquisa documental (documentos oficiais e livros didáticos), concomitante à pesquisa bibliográfica realizada com a finalidade de entender acerca da Filosofia da Matemática e sua relação com as disciplinas de Filosofia e de Matemática.

Na sequência deste texto o conteúdo produzido está disposto em mais quatro capítulos. No Capítulo 2 apresentamos o ensino da Filosofia no Ensino Médio Brasileiro partindo de pesquisas bibliográficas e apresentamos discussões sobre o que é a Filosofia enquanto área do conhecimento, o que é a prática filosófica, o que seria filosofar em matemática. No Capítulo 3 caracterizamos a Filosofia da Matemática, trazendo caracterizações de três autores em especial: Russell, Shapiro e Da Costa. No capítulo 4, apresentamos três propostas de abordagens que podem ser desenvolvidas em aulas regulares no Ensino Médio para abordar a matemática de forma filosófica ou mais próxima de alguma das concepções apresentadas no capítulo 3 de Filosofia da Matemática. Por fim, apresentamos as Considerações Finais e as Referências.

2 A FILOSOFIA NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo apresentamos um delineamento da Filosofia como área do conhecimento e como disciplina obrigatória no Ensino Médio brasileiro, tendo tomado como fonte de pesquisa livros didáticos e documentos oficiais que orientam essa etapa da Educação Básica, a saber: a Lei de Diretrizes e Bases (LDB), o Plano Nacional de Educação (PNE), o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Com isso pudemos perceber se há conteúdos comumente abordados em aulas de Filosofia e que podem ser contemplados de modo interdisciplinar em aulas de Matemática.

2.1 A Filosofia como área do conhecimento

Compreender a Filosofia como área do conhecimento nos ajuda a esclarecer o que pretendemos quando dizemos que queremos levar um olhar filosófico da matemática e quando queremos levar a Filosofia da Matemática para as aulas de Matemática no EM. Nesta seção buscaremos caracterizar a Filosofia enquanto área do conhecimento, para que, nas secções seguintes, possamos discutir sobre a prática filosófica, sobre o "filosofar" em matemática e sobre a própria Filosofia da Matemática.

Nossa referência aqui é a obra Iniciação à Filosofia, de Marilena Chaui, na qual a autora expõe algumas definições gerais para Filosofia. Destacamos aqui a quarta dessas definições, que será a norteadora do presente trabalho.

A filosofia seria uma "[...] *Fundamentação teórica e crítica dos conhecimentos e das práticas*" (CHAUÍ, 2010, p. 25, grifo do original), sendo que

> Sob esta perspectiva, fundamentar significa "encontrar, definir e estabelecer racionalmente os princípios, as causas e condições que determinam a existência, a forma e os comportamentos de alguma coisa, bem como as leis ou regras de suas mudanças". (CHAUI, 2010, p. 25).

e a fundamentação crítica se refere a julgar de maneira racional os princípios, causas e condições de alguma coisa (CHAUI, 2010, p. 25).

Essa concepção se mostra muito oportuna a este estudo, pois se aproxima da caracterização apresentada adiante acerca da Filosofia da Matemática.

Como um estudo mais aprofundado sobre as diferentes definições de filosofia nos levaria a estender demasiadamente a presente secção e como o livro de Chauí é um dos aprovados para o PNLD (2012) sendo, portanto, um exemplo do que se pode esperar que um aluno aprenda nas aulas de filosofia no EM, nos contentaremos com a concepção acima e sinalizamos que essa será considerada como a definição de filosofia a partir daqui neste trabalho.

2.2 A DISCIPLINA DE FILOSOFIA NO ENSINO MÉDIO

Embora a filosofia seja muito antiga como área do conhecimento, com suas origens situadas há vários séculos antes de Cristo, como disciplina no EM brasileiro ela é instável e foi garantida no currículo há pouco tempo. Tomamos como referência para a composição desta seção do texto a obra de SARDÁ (2018), que aborda a história do ensino da filosofia no sistema escolar francês e brasileiro.

> No Brasil, o ensino [da Filosofia] durante os três anos do Ensino Médio foi o resultado de uma resolução, submetida em 2006 pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) a fim de tornar obrigatório nesse contexto o ensino da Filosofia e da Sociologia. Em 2 de junho de 2008, uma lei foi criada com esse objetivo: a Lei Federal nº 11.684/08, que tornou definitivamente obrigatório o ensino dessas disciplinas em todas as escolas, sejam elas públicas ou privadas. (SARDÁ, 2018, p. 189).

Entretanto, a Filosofia pode ser situada na escola em três momentos diferentes: quando o seu ensino foi de presença garantida, do período colonial até a República; quando ele foi de presença indefinida, da Primeira República ao início do Regime Militar de 1964; e quando foi de ausência definida, no pós-1964.

A presença garantida é iniciada pelos jesuítas e é marcada pela “hegemonia da Companhia de Jesus, cuja pedagogia continuará forte até o advento das reformas pombalinas” (SARDÁ, 2018, p. 198). Entretanto, nessa época, o ensino era destinado aos homens bons da Colônia (proprietários, senhores de engenho, etc). Os índios, negros e brancos pobres eram excluídos tendo, em alguns casos, acesso apenas a cursos elementares e aos de humanidades, ofertados pelos próprios jesuítas aos externos (crianças e jovens não pertencentes à Companhia de Jesus).

No período pombalino, o Positivismo começa a influenciar o ensino da Filosofia no Brasil, deixando-a garantida no currículo por sua utilidade, uma vez que era vista como ciência natural. Aí entrava a visão cientificista que persistiria no período seguinte.

Com a Primeira República, entramos no período da filosofia com presença indefinida. A proclamação da República foi de influência positivista e trouxe “agudas reformas” no campo educacional. Com a adoção da ideia de “hierarquia das ciências” do positivista Auguste Comte, “pela primeira vez a filosofia, enquanto disciplina escolar, fica ausente do currículo [brasileiro], desde a organização do ensino na Colônia” (ALVES apud SARDÁ, 2018, p. 198).

Também ocorreram reformas na educação no período posterior a 1930, a saber, a Reforma Francisco Campos (1932) e a Reforma Gustavo Capanema (1942). Na Reforma Francisco Campos, o ensino secundário ficou dividido em dois ciclos, um fundamental (de 5 anos, obrigatório para o ingresso em escolas superiores), que dava uma formação básica mais geral e um ciclo complementar (de dois anos), que preparava para o ingresso nas escolas de direito, medicina e engenharia. A filosofia, como lógica e como história da filosofia, compunha apenas o ciclo complementar. Já com a Reforma Gustavo Capanema, a divisão era em dois cursos paralelos: o clássico e o científico. No clássico o foco era a formação intelectual, enquanto no científico se enfatizava mais o estudo das ciências. A Filosofia era disciplina obrigatória na 2ª e 3ª série do curso clássico e na 3ª série do curso científico

Percebemos, assim, que a filosofia no Brasil já vinha há bastante tempo perdendo espaço no currículo do ensino básico. Com o advento do Positivismo, trazido da Europa, a filosofia passou a ser mantida devido a sua utilidade e, assim, foi perdendo importância para os reformadores da educação. Com o Regime Militar, entretanto, a Filosofia finalmente deixou de ser uma disciplina obrigatória do ensino básico no Brasil, vejamos:

> Com a promulgação da Lei 4.024/61, a Filosofia deixa de ser disciplina obrigatória e passa a disciplina complementar nos currículos escolares. A Lei 5.692, promulgada em 1971, em pleno regime militar, extingue a Filosofia dos currículos [...] (RODRIGUES, 2012, p. 71, apud SARDÁ, 2018, p. 200).

O “vácuo” deixado pela Filosofia foi suprido, segundo Sardá (2018, p. 200), com as disciplinas Educação Moral e Cívica (EDC) e Organização Social e Política do Brasil (OSPB) que, segundo Tomazetti (2012, p. 85, apud SARDÁ, 2018, p. 201) visavam a “defesa das tradições e manutenção da ordem e dos valores nacionais”.

Como dito anteriormente, a filosofia enquanto disciplina obrigatória voltou ao Ensino Médio brasileiro em 2008. A Lei Federal nº 11.684/08, formaliza esse retorno:

> A Lei nº 9.394/96 dispõe:
> Art. 36. O currículo do ensino médio observará o disposto na Seção I deste Capítulo e as seguintes diretrizes:
> (...)

> § 1º Os conteúdos, as metodologias e as formas de avaliação serão organizados de tal forma que ao final do ensino médio o educando demonstre:
> (...)
> III - domínio dos conhecimentos de Filosofia e de Sociologia necessários ao exercício da cidadania.
> A Lei nº 11.684/08 altera o art. 36 da Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir a Filosofia e a Sociologia como disciplinas obrigatórias nos currículos do ensino médio. (BRASIL, 2008)

Chama nossa atenção a presença do trecho "[...] conhecimentos de Filosofia e Sociologia necessários ao exercício da cidadania". Fica subentendido, a nosso ver, uma visão da Filosofia (e da Sociologia também) não como disciplina exclusivamente conteudista a ser ensinada por si só, mas como uma área do conhecimento humano que pode alterar, consideravelmente, a participação do indivíduo na sociedade.

É bem verdade que esse critério que garantia a filosofia no EM foi revogado na LDB de 1996. Agora veremos um novo inserto de 2008 que explicita a obrigatoriedade da filosofia como disciplina no Ensino Médio brasileiro.

O PNE (lei nº 13.005, de 2014) é posterior à LDB (lei nº 9.394 de 1996) e traz mais estratégias para melhorar os resultados da educação brasileira do que indicações de como a educação deve ser. Segundo o artigo 4º da LDB, o Estado deve garantir, além de outras coisas, a educação básica gratuita e obrigatória dos 4 (quatro) aos 17 (dezessete) anos de idade. A obrigatoriedade da etapa do ensino médio foi incluída pela Lei nº 12.796, de 2013). Já a Meta 3 do PNE prevê a universalização até 2016 do atendimento de toda a população de 15 (quinze) a 17 (dezessete) anos e a elevação da taxa líquida de matrículas no ensino médio para 85%.

Desta forma temos garantida por lei a existência do Ensino Médio e seu oferecimento gratuito pelo Estado e, também, a existência de esforços para que a maioria dos adolescentes em idade adequada estejam nesta etapa da escolarização.

No segundo artigo da LDB obtemos outra informação a ser destacada: "[a educação] tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho." (BRASIL, 1996). Além disso, no PNE (BRASIL, 2014),

> Art. 2º São diretrizes do PNE:
> [...]
> V - formação para o trabalho e para a cidadania, com ênfase nos valores morais e éticos em que se fundamenta a sociedade;
> [...]
> VII - promoção humanística, científica, cultural e tecnológica do País;

Percebe-se, aí, que não se busca formar especialistas em uma ciência onipotente, mas cidadãos conscientes dos valores vigentes na sociedade onde vivem. A tecnologia e o mercado de trabalho são importantes aqui, mas humanidades e cultura também contam. De modo especial, o segundo parágrafo do Art. 35-A da LDB afirma que

> § 2º A Base Nacional Comum Curricular referente ao ensino médio incluirá obrigatoriamente estudos e práticas de educação física, arte, sociologia e filosofia. (Incluído pela Lei nº 13.415, de 2017) (BRASIL, 1996).

Com esses destaques podemos afirmar que a legislação brasileira garante a existência do Ensino Médio, que ele considera as ciências humanas e que a filosofia é disciplina obrigatória nesta etapa da escolarização.

Consultando o trabalho de SARDÁ(2018), a LDB e o PNE conhecemos um pouco do processo histórico que reinseriu a Filosofia como disciplina no Ensino Médio brasileiro em 2008 e temos a garantia da obrigatoriedade da presença dessa disciplina nos currículos atuais. Mas há outro documento que norteia as práticas educativas escolares a respeito deste tema, a BNCC que

> é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento (BRASIL, 2018, p. 7).

Ressaltamos nossa impressão de que há distanciamento da BNCC em relação à visão positivista que Sardá (2018) destacou anteriormente. Agora, o ensino deve assegurar o desenvolvimento de competências. Na BNCC,

> competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 8).

Esse documento propõe, na área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas (integrada por Filosofia, Geografia, História e Sociologia) a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas até o 9º ano do Ensino Fundamental.

Como na passagem para o Ensino Médio há desenvolvimento cognitivo e ampliação de repertório cultural, ao entrar nesta etapa da escolarização, os alunos, dentre outras coisas,

> [...] intensificam os questionamentos sobre si próprios e sobre o mundo em que vivem, o que lhes possibilita não apenas compreender as temáticas e conceitos utilizados, mas também problematizar categorias, objetos e processos. Desse modo, podem propor e questionar hipóteses sobre as ações dos sujeitos e, também, identificar ambiguidades e contradições presentes tanto nas condutas individuais como nos processos e estruturas sociais. (BRASIL, 2018, p. 548).

Por isso, deve-se desenvolver nos estudantes a capacidade de estabelecer diálogos entre pessoas diferentes tendo aprendido, na escola, as habilidades para que possam dominar os conceitos e metodologias próprias dessa área. Considerando isso e a preferência por desenvolver nos alunos a análise crítica de informações recebidas, o uso e análise crítica das novas tecnologias, a capacidade de formular boas perguntas e o protagonismo juvenil (não explicado claramente no texto), a BNCC, na área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas no Ensino Médio, busca problematizar “algumas categorias dessa área, fundamentais à formação dos estudantes: tempo e espaço; territórios e fronteiras; indivíduo, natureza, sociedade, cultura e ética; e política e trabalho.” (BRASIL, 2018, p. 549).

Após apresentar seis competências específicas de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, a BNCC do ensino médio apresenta as habilidades a serem desenvolvidas sobre cada uma dessas competências, sem explicitar teorias, temas ou problemáticas específicas como, por exemplo, “os estudantes devem conhecer o mito da caverna de Platão” ou “deve ser trabalhada, explicitamente, a maiêutica socrática”. Desta forma, há liberdade para os sistemas de ensino e escolas definirem as especificidades de seus currículos. Conforme a própria BNCC (BRASIL, 2018, p. 471), os “sistemas de ensino e as escolas devem construir seus currículos e suas propostas pedagógicas, considerando as características de sua região, as culturas locais, as necessidades de formação e as demandas e aspirações dos estudantes.”.

2.3 Livros didáticos de Filosofia para o Ensino Médio

Ainda no cenário ligado à legislação, outro documento importante para entender como pode se dar ensino da Filosofia no ensino médio brasileiro é o PNLD.

Trata-se de um programa

> destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público. (BRASIL, 2018).

Na prática, os estudantes recebem um livro didático para ser utilizado no decorrer no Ensino Médio. Mas como ele pode ser utilizado? Que conteúdos ele contém? Que temas para debate ele propõem?

O Edital de Convocação para o Processo de Inscrição e Avaliação de Obras Didáticas Para o Programa Nacional do Livro Didático PNLD 2018 (BRASIL, 2015) dedica vários trechos para especificar aspectos técnicos sobre os livros que seriam analisados e poderiam fazer parte do PNLD 2018. Sobre os livros de filosofia destacamos, das características técnicas, o fato de que deveriam ser em volume único para os três anos do Ensino Médio (BRASIL, 2015, p. 01) e consumíveis (BRASIL, 2015, p. 02), além de haver um limite de 400 páginas para o livro do estudante e 520 páginas para o (obrigatório) manual do professor (BRASIL, 2015, p. 3). Dentre os critérios específicos que devem ser analisados nos livros candidatos a fazer parte do PNLD 2018 destacamos que, no caso da Filosofia, há um conjunto de temas e problemas referentes a uma tradição e um conjunto de práticas de leitura e argumentação através dos quais se estimula a construção de autonomia e pluralidade de perspectivas. Sendo assim, “[...] o ensino de filosofia não deve consistir na apresentação de um conjunto de elementos que encontrem em si próprios sua finalidade”, mas deve poder “[...] explicitar sua relevância em meio aos debates sobre os saberes, sobre as artes, sobre a escola e sobre a vida.” (BRASIL, 2014, p. 43).

Chama nossa atenção nesse ponto que o PNLD, apesar de não especificar como, reconhece na filosofia a ligação com práticas de leitura e argumentação, algo raro nas experiências que tivemos como estudante no Ensino Médio. Uma vez que o ensino da filosofia “deve ser capaz de explicitar sua relevância em meio aos debates sobre os saberes [...]” é aberta uma possibilidade para se usar elementos da filosofia também para compor o estudo da matemática, embora não necessariamente do modo que iremos propor neste trabalho.

Mais adiante (BRASIL, 2015, p. 44) vemos os critérios em si. O livro didático de Filosofia utilizado pelo estudante deve ser aquele que apresenta a filosofia como prática crítica; estimula o pensar em múltiplas alternativas e de forma curiosa e criativa para a solução dos problemas; propicia um contato com a História da Filosofia e a leitura da realidade e diálogo com as artes e as ciências; estimula o contato com textos filosóficos e com sua prática de leitura (podendo essa ser aplicada, inclusive, a textos não inicialmente filosóficos); encoraja o exercício da autonomia intelectual e oferece uma pluralidade de alternativas para a utilização da obra.

O primeiro item que chamou nossa atenção de maneira especial foi o que fala sobre o desenvolvimento da criatividade e da curiosidade para resolver problemas. Percebemos que desse desenvolvimento se obtém avanços em outras disciplinas, especialmente na matemática, onde os problemas aparecem frequentemente e, salvo situações controladas de sala de aula, dificilmente aparecem como uma continha a ser resolvida sem a necessidade de entendimento e interpretação do que está acontecendo.

Já para o manual do professor, deve-se observar se a obra apresenta, para o docente, "[...] alternativas de trabalho interdisciplinar e de integração da reflexão filosófica com outros componentes curriculares das ciências humanas e de outras áreas do conhecimento" (BRASIL, 2015, p 45).

Há, no guia digital do PNLD 2018, uma série de resenhas dos livros aprovados para essa edição do programa. Em geral, as obras estão de acordo com a oferta de possibilidades de interdisciplinaridade, como vemos na resenha do Diálogo: primeiros estudos em Filosofia, de Ricardo Melani. A obra de Melani, segundo análise do guia digital do PNLD 2018

> é dotada de boa articulação dos conteúdos, imagens, abordagens, de modo que fica assegurada a interação da Filosofia com outras áreas do saber, de modo a promover enfoques propícios para o trabalho de formação para a cidadania [...] (BRASIL, 2018).

Notamos, aqui, uma outra constante nos livros aprovados, que é o desenvolvimento do discente para se tornar cidadão.

No mesmo livro temos que

> [a] lista com as referências bibliográficas utilizadas na elaboração da obra é ampla e contempla todos os temas abordados na obra, configurando- se como um plano de leitura diversificado e atualizado que oferece subsídios para professores e estudantes executarem, com proveito, as atividades que foram propostas ao longo da obra. (BRASIL, 2018).

Aqui vemos conformidade com a autonomia a ser dada aos alunos e ao pretenso desapego do livro didático que torna-se um material a ser utilizado, e não o único recurso dos professores para suas aulas.

Em um outro material, o Filosofia e Filosofias - Existência e Sentido, de Juvenal Savian Filho identificamos a valorização do fato de haverem diferentes correntes filosóficas, já que

> a obra é clara na explicitação da multiplicidade do debate filosófico, fazendo referência às várias filosofias e a experiências filosóficas diversificadas, e oferece também uma orientação filosófica geral, escapando, contudo, ao equívoco de apresentar a perspectiva de uma única escola filosófica. (BRASIL, 2018).

Se isso for bem feito, temos uma ótima contribuição à formação dos alunos, pois deixa claro que filosofia não é só a da Grécia Antiga e implicitamente mostra que a Filosofia não é uma ciência pronta tirada do nada, mas fruto do estudo humano culminando na descoberta de verdades pré existentes ou na construção de raciocínios humanos (a depender da concepção de verdade, que também é variada dependendo do tempo e lugar).

No mesmo livro vemos que ainda há a ideia de debate:

> são expostos longos e instigantes debates entre os filósofos. Dessa maneira, os(as) estudantes podem sentir-se estimulados(as) a tomar parte ativa nesse diálogo, sem se sentirem impelidos(as) à conversão a uma determinada diretriz ideológica” (BRASIL, 2018).

Mas aqui, além desse cuidado para que os estudantes não se sintam impelidos à conversão a determinadas ideologias, também há a preocupação com o desenvolvimento de habilidades preliminares à do debate sendo que “[o] diálogo com esse legado da tradição filosófica se insere de maneira a *estimular a capacidade de ler, interpretar e refletir sobre a realidade* [...]” (BRASIL, 2018, grifo nosso).

Usamos essas citações para exemplificar de maneira mais concreta, mas as ideias acima aparecem em todas as resenhas dos livros aprovados no PNLD, de maneira mais ou menos explícita, e não encontramos, em nenhuma das resenhas das obras, que um dos livros contraria qualquer uma dessas ideias. Portanto, e também porque lemos o edital do PNLD 2018 focando na Filosofia, vamos assumir em nosso trabalho que os livros de Filosofia que os estudantes do Ensino Médio estão utilizando enquanto escrevemos esse trabalho buscam, pelo menos minimamente, promover a interdisciplinaridade, a autonomia intelectual dos alunos, a noção de que existem diversas escolas e ideias filosóficas contraditórias, sendo a Filosofia uma ciência humana e não uma imposição teórica a ser tomada como verdade absoluta, a formação do discente como cidadão e a não dependência do livro didático. Não é que não hajam alguns outros fatores bastante comuns nas resenhas lidas (como, por exemplo, a presença de reproduções de obras de arte como recurso para estimular a reflexão filosófica), mas esses que citamos parecem dizer mais sobre como está sendo visto o ensino da Filosofia no Ensino Médio hoje, e parecem ser os que mais vão contribuir para a continuação do presente trabalho.

2.3.1 A filosofia grega

Para desenvolver um trabalho que possa ser oportuno com uma abordagem mais direcionada, ao invés de ampla, vamos focar, neste trabalho, três momentos da filosofia: na Grécia Antiga, na modernidade e na contemporaneidade. É bem verdade que com isso perderemos séculos de conhecimento e desenvolvimento cultural humano, mas consideramos não ser esse um grande problema dadas as nossas intenções aqui.

Analisaremos, agora, como a filosofia da Grécia Antiga é trabalhada no EM brasileiro, utilizando para isso os seguintes livros: Iniciação à Filosofia (CHAUI, 2010) e Filosofia: experiência e pensamento (GALLO, 2013), dos PNLDs 2012-2014 e 2015-2017, respectivamente. Buscaremos explicitar o tratamento dado a algumas ideias do referido período histórico e trazer algumas citações diretas para tentar transmitir alguma noção de como os conteúdos são apresentados nas duas obras. A ideia aqui não é fazer um estudo aprofundado e expor cada nuance do ensino da Filosofia Grega no Ensino Médio, mas sim verificar se há a possibilidade de um aluno nesta fase da escolarização conhecer ideias importantes sobre a filosofia da Grécia Antiga que possam ser utilizadas como auxiliares para o desenvolvimento de atividades que tragam pensamento filosófico ou a própria Filosofia da Matemática para as aulas de matemática.

Começando pelo livro de Chauí, na página 4 é apresentado o Sumário, onde verificamos que o volume é dividido em duas partes: A Atividade Teórica e A Atividade Prática. Os assuntos são divididos de forma temática entre as unidades que compõem cada uma das duas partes, e não aparenta haver preocupação com a ordem cronológica dos fatos e ideias apresentadas.

Chamou nossa atenção o início do capítulo 1 da primeira unidade do livro, intitulado A atitude filosófica (CHAUI, 2010, p. 6). Aqui é feito um paralelo entre o filósofo Sócrates e o filme Matrix. Há uma cena no primeiro filme da série Matrix em que o protagonista, Neo, é levado ao oráculo, que pergunta se ele leu a mensagem na porta do local onde acabou de entrar. Ele nega e ela lê a fórmula em latim Nosce te ipsum (“conhece-te a ti mesmo”, em português). Por outro lado, conta-se (CHAUI, 2010, p. 7) que Sócrates teria ido ao oráculo presente em um santuário onde se lia a mesma frase Conhece-te a ti mesmo. Sócrates queria saber se era mesmo sábio como alguns atenienses diziam. O oráculo perguntou o que ele sabia e a resposta foi “só sei que nada sei”, ao que o oráculo reagiu afirmando que o filósofo era o mais sábio dos homens, pois sabia que de nada sabia. A comparação entre Neo e Sócrates continuam, mas paramos por aqui porque temos duas pistas importantes sobre a abordagem da Filosofia Grega no Ensino Médio, a saber a possibilidade de relacioná-la com elementos culturais mais acessíveis à média dos alunos e a lembrança das ideias de Sócrates, exaltando que ele foi o “patrono da filosofia” (CHAUI, 2010, p. 7). Destacamos que a postura de consciência da própria ignorância de Sócrates também pode trazer benefício no estudo da Matemática, pois nos impede de tomar como verdadeiras proposições que intuímos e ainda não demonstramos.

Na página 9 (CHAUI, 2010) temos referência ao mito da caverna de Platão. Notemos que a referência a Platão ocorre quase que junto à referência à Sócrates. Inclusive, o mito da caverna é colocado dentro do paralelo feito com Matrix:

> O paralelo entre Neo e Sócrates não está apenas no fato de ambos são instigados por “espíritos” que os fazem desconfiar das aparências, nem por [...] consultarem um oráculo e receberem como mensagem o “conhece-te a ti mesmo”, e nem mesmo por ambos lidarem com matrizes.
>
> Podemos encontra-lo também ao comparar a trajetória de Neo no interior da Matrix com um dos mais célebres escritos do filósofo Platão, discípulo de Sócrates. Essa passagem encontra-se na obra intitulada A República e chama-se “O Mito da Caverna”. (CHAUI, 2010, p. 9).

O referido mito é apresentado de maneira bastante acessível aos alunos e em uma linguagem mais atual, sem nenhuma citação direta ao texto original (ou sequer traduzido) de Platão.

No final desse capítulo vemos uma espécie de definição de Filosofia que parece se apoiar na ideia do mito platônico da caverna (ou no filme Matrix). A Filosofia, segundo Chaui (2010, p. 17), poderia ser

> A decisão de não aceitar como naturais, óbvias e evidentes as coisas, as ideias, os fatos, as situações, os valores, os comportamentos de nossa experiência cotidiana; jamais aceitá-los sem antes havê-los investigado e compreendido. (CHAUI, 2010, p. 17).

Mais do que uma área do conhecimento, a filosofia seria a opção pela possibilidade de sair da caverna, de questionar todas as ideias presentes nas nossas vidas. Como veremos adiante neste trabalho, tal prática, de questionar coisas que podem parecer óbvias, é indispensável para a Filosofia da Matemática.

Outra passagem interessante do livro de Chaui está no capítulo 3 (unidade 1, parte 1), onde se destaca uma contribuição de Pitágoras para a Filosofia:

> Atribui-se ao filósofo grego Pitágoras de Samos a invenção da palavra filosofia. Pitágoras teria afirmado que a sabedoria plena e completa pertence aos deuses, mas que os homens podem desejá-la ou amá-la, tornando-se filósofos. (CHAUI, 2010, p. 28).

Essa parte nos interessa já que Pitágoras é importante para a matemática, o que mostra que Filosofia e Matemática não precisam estar necessariamente opostas e que pode-se investigar ambas.

No mesmo capítulo poderíamos falar sobre a relação da Grécia Antiga com o nascimento da filosofia, mas optamos por ir direto à página 35, onde se explicitam algumas contribuições da filosofia grega para o pensamento: tendência à racionalidade (nos interessa aqui já que a capacidade do ser humano de ser racional nos permite obter conhecimento além do que nossos instintos nos induzem a fazer, e daí podemos nos ocupar da matemática e de sua filosofia); recusa de explicações preestabelecidas e exigência de explicação racional para cada fato e busca para soluções próprias exigidas por cada problema (na matemática, não se pode dar uma resposta “porque é assim e pronto” a um problema, devemos construir as resoluções e demonstrações utilizando coisas que já sabemos ser verdadeiras); tendência à argumentação, de modo que nenhuma solução seja aceita sem demonstração racional (desde a antiga Grécia buscamos demonstrar os resultados de forma racional. Inclusive, pode-se discutir na Filosofia da Matemática como fazer uma demonstração aceitável); capacidade de generalização (nos permite defender que uma afirmação vale para todo número natural, e não para os n primeiros números naturais que temos paciência para testar, por exemplo) e a capacidade de diferenciação, isto é, mostrar que coisas que aparecem como iguais -ou semelhantes- na verdade são diferentes (exemplo na matemática: podemos desenhar um cubo e um quadrado de forma que pareçam muito parecidos, mas somos capazes de perceber que, mesmo que em determinadas representações o polígono e o poliedro pareçam iguais, na verdade são entes diferentes).

Na página seguinte, Chaui (2010, p. 36) indica mais algumas importantes influências da filosofia grega, a saber: a ideia de que o conhecimento deve encontrar as leis e os princípios universais necessários do objeto observado e demonstrar sua verdade por meio de demonstrações; a ideia de que a natureza segue uma ordem necessária (não acidental e nem causal); a ideia de que as leis universais e necessárias da natureza podem ser plenamente conhecidas por nós; a ideia de que a razão também obedece a princípios, leis e normas universais e necessários;

> A ideia de que as práticas humanas dependem da vontade livre, da deliberação e da discussão, de uma escolha racional ou emocional, de nossas preferências e opiniões, que se realizam segundo certos valores e padrões [...] estabelecidos pela natureza ou pelos próprios seres humanos, e não por imposições misteriosas e incompreensíveis (CHAUI, 2010, p. 37).

a ideia de que as pessoas aspiram naturalmente ao conhecimento; etc.

De fato, verificamos outras noções da Filosofia Grega no livro de Chauí, mas consideramos que essas que expomos há pouco já mostram que, neste livro, são fornecidas ideias que podem ser utilizadas para apoiar os propósitos que temos nesse trabalho. Agora, vamos ver se o mesmo se verifica no livro de Gallo, Filosofia: experiência do pensamento.

Esta obra, por sua vez, é dividida em 5 unidades e também apresenta os conceitos divididos em temas, e não seguindo a ordem na qual aparecem na história.

Na página 9, Gallo (2013) está falando sobre as origens da filosofia e cita a visão de alguns filósofos sobre o princípio universal de onde vêm todas as coisas (arkhé). Essa passagem é interessante ao citar a visão de Pitágoras: “Em seu pensamento, [Pitágoras] defendia que o Universo (em grego, kósmos) era regido por princípios matemáticos, sendo o número o fundamento de todas as coisas”. Em uma aula de matemática poderíamos comparar essa visão de Pitágoras com a visão dos logicistas (veremos adiante, quando falarmos sobre a Filosofia da Matemática), que afirmavam ser a lógica o lugar de onde derivam os conceitos e teoremas matemáticos.

Chamou-nos a atenção, também, a parte em que Gallo fala sobre Platão e seus diálogos, na página 18 de seu livro. Poderíamos propor uma atividade interdisciplinar entre filosofia e matemática: o professor de filosofia poderia ler com a turma o diálogo Mênon, de Platão e destacar os aspectos mais importantes para a filosofia, fazendo com que seus alunos tivessem contato direto com um texto da área. O professor de matemática poderia levar para suas aulas uma discussão que Sócrates faz com um escravo de Mênon sobre como dobrar a área de um quadrado de lado medindo dois pés. Parece-nos aceitável crer que os alunos *de humanas* que se empolgassem lendo Platão na aula de Filosofia achariam interessantes as aulas de Matemática focadas em um trecho do mesmo Platão.

Podemos citar, ainda, a referência direta feita a Aristóteles no livro de Gallo, que diz que “Há casos em que, aceitando todos os significados de uma palavra, é possível demolir a posição sustentada pelo adversário, fazendo referência a cada significado” (ARISTÓTELES, 2001, apud GALLO, 2013, p. 19, grifo do original). O tipo de raciocínio destacado por Aristóteles é útil na matemática e poderia ser explorado em aulas no Ensino Médio. Por exemplo, se alguém nos diz que um triângulo com dois lados paralelos tem uma propriedade P, podemos recorrer à definição de triângulo, concluir que é impossível um triângulo com dois lados paralelos (pelo menos na geometria euclidiana) e derrubar a conjectura que nos foi lançada. Tal pensamento, de recorrer à definição, é semelhante ao olhar proposto por Bertrand Russell (veremos adiante) para a Filosofia da Matemática, caminhando na direção do mais “básico” (e não do mais complexo) na exploração da matemática.

Assim como no livro de Chauí, no de Gallo também há referências à filosofia da Grécia Antiga que não vamos destacar aqui. Se o fizéssemos, deixaríamos o texto excessivamente longo e não estaríamos cumprindo melhor do que acreditamos ter cumprido a pretensão de verificar se há, na disciplina de Filosofia no Ensino Médio brasileiro, a possibilidade de se trabalhar temas da Filosofia Grega que possam servir como apoio para o desenvolvimento de atividades, nas aulas de Matemática, para trazer um olhar filosófico da matemática ou a própria Filosofia da Matemática sobre um plano de fundo da Grécia Antiga.

2.3.2 A filosofia moderna e contemporânea

Assim como fizemos com a Grécia Antiga, vamos, agora, verificar se há, nos mesmos livros (de Chaui e de Gallo), recursos para que os professores trabalhem ideias da Filosofia Moderna e Filosofia Contemporânea (nos interessam, nesse momento, o que se desenvolveu em filosofia a partir do séc. XV, basicamente) no Ensino Médio brasileiro possibilitando um apoio para um pensamento filosófico da matemática ou para a entrada da Filosofia da Matemática nas aulas de Matemática.

Começando pelo Iniciação à Filosofia de Chaui (2010), temos uma passagem interessante na página 26, onde lemos a opinião sobre a filosofia de alguns pensadores importantes. Destaquemos a opinião de Descartes:

> Descartes dizia que a filosofia é o estudo da sabedoria, conhecimento perfeito de todas as coisas que os humanos podem alcançar para o uso da vida, a conservação da saúde e a invenção das técnicas [...] com as quais ficam menos submetidos às forças naturais [...]

Notamos um certo destaque à utilidade do conhecimento para Descartes, parecendo se encaixar um pouco à visão da matemática dos babilônios e egípcios antigos, onde esta última era utilizada para resolver problemas do cotidiano, e não uma ciência abstrata.

Podemos trazer para nossa discussão, também, o que lemos no capítulo que fala dos aspectos da filosofia contemporânea: “no século XIX, o otimismo científico e técnico levou a filosofia a supor que, no futuro, todos os conhecimentos [...] seriam dados pelas ciências” (CHAUI, 2010, p. 61). Se isso se concretizasse, a filosofia não teria mais razão de ser. Porém, no séc. XX, percebeu-se que “Os princípios, os métodos, os conceitos e os resultados de uma ciência podem estar totalmente equivocados ou desprovidos de fundamento” (CHAUI, 2010, p. 61). Tal passagem é usada no livro que estamos analisando para assinalar que a filosofia não deixou de ser relevante, mas nos é importante por explicitar a falibilidade da ciência. Independente da visão que tiver sobre a matemática, o professor pode explicitar que esta também é falível. Assim, é possível “humanizar” a matemática e trazer discussões relativas à Filosofia da Matemática como, por exemplo, o que é preciso para um fato matemático ser tomado como verdadeiro (ou uma demonstração matemática ser tomada como válida).

Da mesma página do livro de Chauí extraímos um trecho sobre um filósofo contemporâneo que julgamos extremamente condizente com os movimentos dentro da Filosofia da Matemática:

> Foram preocupações como a falta de rigor das ciências que levaram o filósofo alemão Husserl a propor que a filosofia fosse o estudo e o conhecimento rigoroso da possibilidade do próprio conhecimento científico, examinando os fundamentos, os métodos e os resultados das ciências. Foram também preocupações como essas que levaram os filósofos Bertrand Russell e Quine a estudar a linguagem científica, a discutir os problemas lógicos das ciências e a mostrar os paradoxos e os limites do conhecimento científico. (CHAUI, 2010, p. 61, grifo nosso).

Veremos, posteriormente, que o exame dos fundamentos, métodos e resultados da matemática assim como a busca pelo entendimento de sua linguagem, problemas lógicos, paradoxos e limites de seus domínios são parte essencial da Filosofia da Matemática, além de que Bertrand Russell está associado ao logicismo, uma das principais escolas da Filosofia da Matemática.

Assim como aconteceu na secção anterior, poderíamos investigar muito mais o livro de Chauí e parece razoável supor que encontraríamos várias ideias que poderiam ajudar a relacionar a filosofia com a matemática no Ensino Médio. Porém, para focar em nosso objetivo de estudo e para não tornar esse texto excessivamente longo, vamos passar novamente para o Filosofia: experiência do pensamento, de Sílvio Gallo (2013). Dessa forma, ao invés de trazer todas as informações possíveis sobre o assunto que nos interessa em um livro, podemos verificar se esse tipo de informação aparece em livros de autores e PNLDs diferentes.

Em um capítulo sobre a ciência e a arte, Gallo (2013, p. 40) fala sobre René Descartes: “Buscando uma fonte segura para o conhecimento, Descartes afirmava que só a razão é confiável, pois os sentidos podem nos enganar [...]”. Tal opinião, imaginamos, poderia ser debatida em paralelo com a tese formalista, segundo a qual a matemática consiste em sistemas que devem ser consistentes, pois tal tese implica na ausência de necessidade de utilizar os sentidos humanos, visto que um sistema consistente não precisa estar relacionado à realidade material; ou ainda em a paralelo com uma concepção segundo a qual as proposições matemáticas são conhecidas a priori, isto é, independem da experiência. Outro debate possível seria acerca do fato de a visão de Descartes combinar ou não com a tese logicista, que busca reduzir a Matemática à Lógica. O que afirmaríamos em relação ao intuicionismo, onde tudo que pertence à matemática deve poder ser construído pelos matemáticos ou possuir uma lei de formação clara de forma que sempre possamos conhecer um objeto que nos desperte interesse? Iria o intuicionismo ao encontro de Descartes? Discussões e análises em torno dessas relações são exemplos de possíveis abordagens filosóficas possíveis para a matemática no Ensino Médio.

Na página seguinte, Gallo fala um pouco sobre o método cartesiano, que nos parece quase análogo ao método axiomático da Matemática. No método de Descartes,

> [...] a partir de ideias inatas, que já estão em nossa mente quando nascemos porque ali foram colocadas por Deus, podemos deduzir novas ideias, que

> serão necessariamente verdadeiras e corretas. (GALLO, 2013, p. 41, grifo do original)

Essas ideias inatas poderiam funcionar como os axiomas de onde, na matemática, obteríamos as novas ideias necessariamente verdadeiras. Parece-nos que a necessidade demonstração dos teoremas em nossa pseudo analogia estaria implícita no método cartesiano, que consiste em:

> 1. Nunca aceitar como verdadeiro algo que fosse possível duvidar.
> 2. Dividir os problemas em problemas menores, que sejam mais fáceis de resolver. [...]
> 3. Conduzir o pensamento de forma ordenada, indo sempre do mais simples para o mais complexo.
> 4. Revisar a produção do conhecimento em cada etapa, de modo a nada esquecer ou deixar de lado. (GALLO, 2013, p. 41)

Dos procedimentos acima concluímos a necessidade de provar os resultados, que não são autoevidentes e, portanto, não devem ser logo tomados como verdadeiros.

Novamente, seria possível uma investigação muito mais aprimorada do livro que observamos e se a fizéssemos certamente encontraríamos mais possibilidades para se desenvolverem, nas aulas de Filosofia do EM, recursos úteis para trabalhar a Filosofia da Matemática ou a matemática sob um olhar mais filosófico nas aulas de Matemática. Porém, nosso objetivo era verificar se existem possibilidades (e não enumerar todas elas), então julgamos que nossa empreitada nesta subsecção está concluída.

Agora que já vimos um pouco sobre o que é a Filosofia como área do conhecimento, verificamos como a disciplina Filosofia está situada no Ensino Médio brasileiro, colhemos pistas a respeito de como ela é ensinada aos alunos, observamos como podemos pensar filosoficamente, é chegada a hora de tratar sobre o que é a Filosofia da Matemática.

3. FILOSOFIA DA MATEMÁTICA

Neste capítulo abordaremos aproximações entre a Filosofia e a Filosofia da Matemática como áreas do conhecimento para buscar entender o que seria uma abordagem filosófica da Matemática no Ensino Médio como via de acesso/aquisição do conhecimento matemático. Acreditamos ser possível nos apropriar ou aproveitar de conceitos da Filosofia para trabalhar com a Matemática numa abordagem filosófica interdisciplinar de conteúdos matemáticos.

3.1 Filosofia da Matemática

A Filosofia da Matemática é uma área do conhecimento na qual se aborda os fundamentos da matemática. Conforme Da Costa (1992, p. 13) ela deve "[...] determinar, entre outras coisas, quais as suposições e as ideias que servem de fundamentos para as verdades matemáticas".

Desta forma, o filósofo da matemática investiga, dentre outras coisas, o que faz uma demonstração ser aceita entre os matemáticos e na comunidade científica em geral; qual a origem de certos conceitos e métodos, em especial, o método axiomático; como a lógica e a matemática se relacionam, se são inventadas ou descobertas.

Ao demonstrar, por exemplo, que a raiz quadrada de 2 não é um número racional, estamos nos domínios da matemática. Uma prova bastante conhecida desse fato matemático é elaborada com base em uma contradição, supondo que a raiz quadrada de dois é um número racional e derivando um fato absurdo dessa suposição. Portanto, o número não pode ser racional. Este raciocínio é suficiente e satisfatório para todos? Tal tipo de discussão pode se dar no âmbito de uma abordagem filosófica da matemática e, também, despertar o interesse pelo estudo de temas de Filosofia da Matemática.

Outras caracterizações da Filosofia da Matemática podem ser apresentadas, e fazemos isso contemplando os três seguintes autores: (Bertrand Russell (1872-1970), Newton da Costa (1929-) e Stewart Shapiro (1951-). A intenção é dar ao leitor, que não teve contato com a Filosofia da Matemática na graduação em Licenciatura em Matemática, um panorama mínimo acerca de tal área do conhecimento.

A escolha desses três autores se dá porque Da Costa e Shapiro possuem atuação e publicações relevantes na área nos dias atuais, revelando que a Filosofia da Matemática ainda é desenvolvida, assim como fez Russell, há mais de um século, ao se relevar um dos expoentes das correntes filosóficas nascidas da Crise dos Fundamentos da Matemática, sobre a qual falaremos adiante.

3.1.1 Bertrand Russell - retroceder para evoluir

Bertrand Arthur William Russell nasceu em 1872, no Reino Unido, neto de Lord John Russell, que havia sido primeiro-ministro no reinado da Rainha Victoria, segundo Irvine (1996),

Foi aluno na Trinity College, em Cambridge, e lá trabalhou até ser demitido por seu posicionamento pacifista (em meio à Primeira Guerra Mundial). Seus ideais também o levaram à prisão em 1918, de onde escreveu sua Introdução à Filosofia da Matemática.

Enquanto matemático, sua contribuição passa, principalmente, pela lógica. O britânico introduziu a teoria dos tipos, defendeu o logicismo na Matemática e descobriu o Paradoxo de Russell, que expõe uma fragilidade da Matemática com sua lógica clássica e teoria de conjuntos ao questionar se o conjunto formado por todos os conjuntos que não possuem a si mesmos pertence ou não a ele mesmo.

A principal obra de Russell que utilizamos no desenvolvimento deste trabalho foi o livro intitulado Introdução à Filosofia Matemática, lançado em 1919 e cuja versão consultada data de 2020. Segundo palavras do autor (2020, p. vii) , essa obra “[...] não visa apresentar uma discussão completa dos problemas que aborda”, e busca apresentar o conteúdo ao público que não domina o simbolismo lógico. São oito capítulos e alguns dos assuntos tratados são: definição de número; finitude e indução matemática; números racionais, reais e complexos; limites e continuidade; o axioma do infinito e os tipos lógicos; matemática e lógica.

A base do entendimento de Russell sobre a Filosofia da Matemática repousa na atitude em relação à Matemática.

Enquanto o matemático desenvolve ideias mais avançadas, olhando para frente, o filósofo da matemática busca pelos *fundamentos* da Matemática, rumando a uma

> [...] abstração e [...] simplicidade lógica cada vez maiores; em vez de perguntar o que pode ser definido e deduzido daquilo que se admite no começo, indaga-se que mais ideias e princípios gerais podem ser

> encontrados, em função dos quais o que fora o ponto de partida possa ser definido ou deduzido. (RUSSELL, 2020, p. 01).

Desta forma (RUSSELL, 2020, p. 01), os estudantes de geometria da Grécia antiga, por exemplo, “[...] ao passarem das regras de agrimensura empíricas egípcias para as proposições gerais pelas quais se constatou estarem aquelas regras justificadas, e daí para os axiomas e postulados de Euclides”, estavam desenvolvendo Filosofia da Matemática. Quando, porém, se atingem os axiomas e postulados, “[...] o seu emprego dedutivo, como encontramos em Euclides, pertencia à matemática no sentido comum”.

Além dos trabalhos de Russell em lógica, consideramos importante citá-lo neste trabalho pela sua defesa do logicismo na Matemática e pela sua concepção de Filosofia da Matemática, que induz a uma atitude que pode ser levada à sala de aula de maneira proveitosa.

3.1.2 Newton da Costa - o que fundamenta a Matemática

Newton Carneiro Affonso da Costa nasceu em 1929 em Curitiba, Paraná. Formou-se em Engenharia Civil em 1952, Matemática (bacharelado) em 1955 e Matemática (licenciatura) em 1956. Em 1960, cumpriu os requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática) com a aprovação no concurso de Livre-docência. Todos esses títulos foram obtidos pela atual Universidade Federal do Paraná (UFPR). (GOMES, 2016).

Talvez a maior contribuição de Da Costa para a Matemática seja a criação da lógica paraconsistente, que nos permite admitir sistemas onde se pode provar uma afirmação e sua contradição.

A publicação de Da Costa consultada no desenvolvimento deste trabalho foi o livro Introdução aos Fundamentos da Matemática, de 1992. Esse livro foi base para um curso ministrado no Instituto de Filosofia da Universidade do Rio Grande do Sul e teve o objetivo de familiarizar estudantes de Matemática e de Filosofia com os problemas da época referentes aos fundamentos da matemática.

Neste livro, Da Costa elenca, em dois pontos, o que a Filosofia da Matemática deve buscar:

> 1º) caracterizar e explicar o estado presente da evolução da matemática, justificando-o criticamente; 2º) clarificar e explicitar os conceitos e princípios básicos dessa ciência (DA COSTA, 1992, p. 13).

Isso implica “[...] determinar, entre outras coisas, quais as suposições e as ideias que servem de fundamentos para as verdades matemáticas” (DA COSTA, 1992, p. 13).

A escolha de Newton da Costa como uma das referências deste trabalho se dá por termos considerado interessante a sua concepção de Filosofia da Matemática e, também, por ser um pesquisador brasileiro atuante no momento em que este trabalho está sendo escrito, o que sugere que a prática e a produção em Filosofia da Matemática não é algo restrito a séculos passados, como pode parecer, mas uma área do conhecimento que faz parte da cultura humana e que ainda está a se desenvolver.

3.1.3 Stewart Shapiro - a Matemática não está isolada

Na página pessoal de Stewart Shapiro no departamento de filosofia da Universidade Estadual de Ohio, as áreas de especialidade desse autor são Lógica Filosófica, Vagueness (não encontramos um termo adequado em Português para traduzir), Filosofia da Matemática e Filosofia da Linguagem.

A obra de Shapiro escolhida para consulta neste trabalho foi Filosofia da Matemática. O prefácio (2000, p.) indica que “este é um livro de filosofia, sobre matemática”. São feitas discussões metafísicas, como “[...] de que trata a matemática? Tem um conteúdo? Qual é esse conteúdo? O que são números, conjuntos, pontos, linhas, funções, e por aí adiante?”. Também há questões semânticas: “[...] o que é que as proposições matemáticas significam? Qual é a natureza da verdade matemática?”, etc.

O autor parece-nos preocupado com a relação entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento. Para ele, em grande parte, a Filosofia da Matemática é “[...] um ramo da epistemologia - aquela parte da filosofia que lida com a cognição e o conhecimento” (SHAPIRO, 2000, p.) e tem como preocupação central “[...] entender o relacionamento entre a matemática e o resto do discurso científico comum” (SHAPIRO, 2000, p.).

Essa preocupação de entender a relação da Matemática com o resto do discurso científico nos interessou à medida em que, neste trabalho, uma das preocupações é, justamente, levar à sala de aula o fato de que a Matemática não é uma área isolada das outras áreas do conhecimento e da realidade.

O que almejamos nessas três subseções foi dar ao leitor alguma ideia, mesmo que rasa, sobre o que queremos dizer quando falamos Filosofia da Matemática.

Ressaltamos que a Filosofia da Matemática é toda uma área do conhecimento, e não uma mera atitude. Dizer que as propostas no final deste trabalho correspondem a *desenvolver Filosofia da Matemática* seria uma enorme pretensão que, como se vê, não temos.

3.2 Filosofia da Matemática na Grécia Antiga e na Modernidade

Em relação à história da Filosofia da Matemática, parece-nos haver dois momentos essenciais: a Grécia Antiga e a Modernidade (mais especificamente os séculos XVIII, XIX e XX).

Sabemos que o “desenvolvimento inicial da matemática teve como motivação, ao que tudo indica, necessidades práticas de antigas civilizações, como a babilônica e a egípcia” (NEGRELLI, 2000, p. 24), ou seja, a matemática provavelmente não nasceu como ciência abstrata, mas como ferramenta para a resolução de problemas cotidianos da antiguidade (como, por exemplo, a remarcação de divisões de terras danificadas pelas cheias do Rio Nilo).

A importância da Grécia Antiga para a Matemática e, também, para o estudo da Filosofia da Matemática, se dá porque aos subordinados a essa cultura

> [...] não bastou o critério empírico; procuraram encontrar demonstrações dedutivas [sem grifo no original] rigorosas acerca das leis do espaço, que governavam as aplicações práticas da Geometria (BARKER, 1976, p. 28, apud NEGRELLI, 2000, p.24).

Isto é, a demonstração passa a ganhar importância na matemática, e esta começa a se tornar mais ciência e menos senso comum. NEGRELLI (2000, p. 24) ainda cita SZABÓ (1964), que defende que, embora de maneira informal, na Grécia Antiga começam a aparecer conceitos “[...] como os de teorema, demonstração, definição, axioma [e] postulado [...]”.

Um acontecimento histórico marcante relacionado à importância da antiguidade grega para a matemática foi a elaboração dos Elementos de Euclides (séc. III a. C.), que "[...] reuniu e expôs os conhecimentos de geometria e teoria dos números que se tinha até então fazendo uso do método axiomático" (NEGRELLI, 2000, p. 27).

Pelas razões citadas nos parágrafos anteriores, ousamos afirmar que a Grécia Antiga foi de extrema importância para a Matemática, por ter gerado ferramentas para o desenvolvimento dessa área do conhecimento e pela elaboração dos Elementos, que foram usados por muito tempo como referência principalmente no que diz respeito à geometria, além de ter sido onde se evoluiu criticamente rumo à transformação da matemática ferramenta de uso prático em Matemática área do conhecimento científico humano. Tal época também foi importante para a atual Filosofia da Matemática, por lançar as bases sobre as quais, após aperfeiçoamentos, se encontra construída a matemática atual. Quando caminhamos rumo à abstração e simplicidade lógica que Russell categorizou como o trajeto para o estudo da Filosofia da Matemática, nos deparamos com as demonstrações, postulados e teoremas, muitos deles formulados na antiga Grécia.

Apesar de sua grandiosa contribuição, os gregos antigos não desenvolveram uma matemática perfeita e livre de erros. Vamos analisar dois exemplos críticos nos Elementos de Euclides:

Segundo (REÑON apud NEGRELLI, 2000, p.30),

> [...] figuras como um quadrado ou um polígono não só fazem (nos Elementos) referência a noções básicas da geometria plana como também funcionam de fato como instrumento de análise, resolução e demonstração.

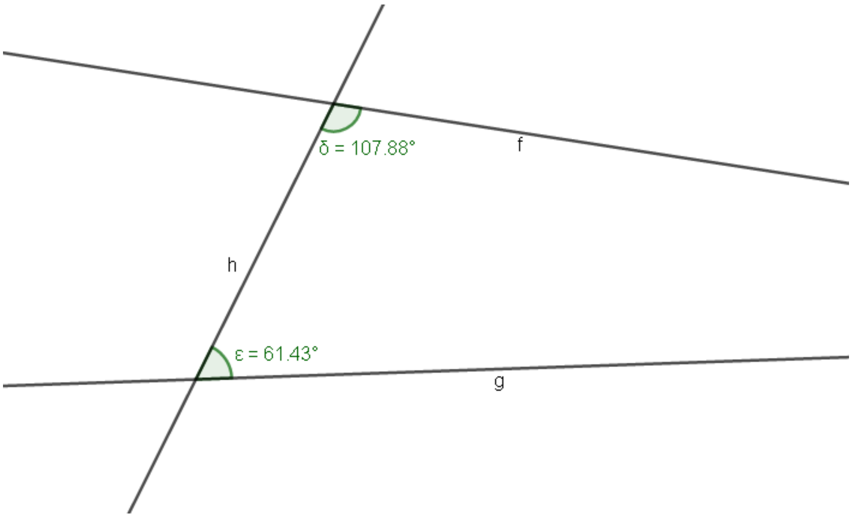
Tal observação revela um grande problema, pois quando desenhamos uma figura estamos criando apenas uma representação. Por exemplo, ao desenhar um quadrado em uma folha de papel, obtemos uma representação de um quadrado, e não o quadrado em si. Tal abuso nos parece semelhante a conversar com uma foto de um amigo por não diferenciar o amigo de uma representação do mesmo. No caso da geometria estaremos vulneráveis a erros provenientes de imperfeições no papel, no nosso lápis, na régua utilizada, ou até mesmo na nossa visão ao olhar para a representação.

Outro problema encontrado na geometria descrita nos Elementos está relacionado ao quinto postulado de Euclides. O quinto postulado é originalmente enunciado da seguinte forma:

> Se uma reta, ao incidir sobre outras duas, forma do mesmo lado ângulos internos menores cuja soma das medidas é menor do que dois retos, as duas retas prolongadas ao infinito se encontrarão no lado em que estejam os ângulos menores do que dois retos (VERA, 1970, apud SOUZA, 1993, p. 1).

Na figura a seguir, notemos que se prolongarmos as retas f e g, elas se intersectarão.

Figura 1: Ilustração do quinto postulado de Euclides.



Fonte: O Autor (2020).

Este postulado euclidiano causou estranhamento na comunidade matemática, sendo que alguns estudiosos de Euclides buscaram "i) modificar a definição de retas paralelas; ii) procurar substituir o quinto postulado; iii) tentar transformar o quinto postulado em teorema" (SOUZA, 1993, p. 1).

Apesar dessas e de outras lacunas,

> [...] até o séc. XIX, os Elementos de Euclides foram não apenas livro texto da Geometria, mas o modelo daquilo que o pensamento científico deveria ser. (BARKER apud NEGRELLI, 2000, p30-1).

Segundo Dias (1999, p. 73), Hilbert apresentou, em 1900, vinte e três problemas que acreditavam que ocupariam grande parte da pesquisa futura, sendo alguns relacionados aos fundamentos da Matemática. Neste mesmo congresso, Poincaré teria lido críticas aos trabalhos de Cantor e daí surgiram algumas escolas filosóficas. Tais escolas não se contrapunham completamente umas às outras e nem todos os matemáticos aderiram a alguma delas. Destacamos as seguintes três escolas: logicismo, formalismo e intuicionismo.

"O logicismo sustenta que as leis da Matemática são redutíveis às leis lógicas ou são deriváveis da Lógica" (DIAS, 1999, p. 74). A tese logicista pode ser decomposta, então, da seguinte maneira:

> 1) Os conceitos da Matemática podem ser derivados dos conceitos lógicos através de definições explícitas e 2) Os Teoremas da Matemática podem ser derivados de axiomas lógicos através de pura dedução lógica. (DIAS, 1999, p. 75).

O logicismo foi defendido por Frege, Russell, Whitehead, entre outros e sua análise utilizava largamente a Aritmética. Devemos destacar alguns problemas que surgiram nessa tese. Um dos problemas consiste nos paradoxos, como o seguinte: consideremos o

> [...] conjunto A formado por todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos. Pelo princípio do terceiro excluído, A pertence ou não pertence a A. Suponhamos que A pertença a A; então, como A é o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos, A não pode pertencer a A. Admitamos, então, que A não pertença a A; logo, de acordo com a definição de A, este conjunto deve pertencer a si mesmo. Há, por conseguinte, contradição. (DA COSTA, 1992, p. 24).

Para tentar resolver os paradoxos, Russell formulou a Teoria dos Tipos. Resumidamente, se tomássemos um conjunto, os elementos desse conjunto seriam do tipo 0, as propriedades dos elementos seriam do tipo 1, as propriedades sobre propriedades constituiriam o tipo 2 e assim por diante. Infelizmente, a Teoria dos Tipos possibilita alguns inconvenientes, como por exemplo o conjunto Universo que não é mais absoluto, pois existe um para cada nível, além de que algumas fórmulas deixam de existir (por exemplo, podemos dizer que x pertence a x e que x pertence a x, mas não podemos mais compor (xx)(xx).

Outro grande problema do logicismo, segundo Da Costa (1992, p. 29), é que ao tentar reduzir a axiomática de Peano à Lógica (passo necessário, já que tal axiomática é base para o estudo dos números naturais), usava-se o axioma do infinito ("Se n for um número cardinal finito qualquer, então existe no universo pelo menos uma classe de indivíduos que tem n elementos" (DA COSTA, 1992, p. 29)), que é plausível no nosso mundo, mas não tem caráter estritamente lógico.

Não citaremos outros problemas aqui porque tal ação implicaria em tornar esta seção excessivamente longa, mas sinalizamos que eles existem, e que o logicismo acabou não logrando êxito em sua empreitada de reduzir toda a Matemática à Lógica.

Vejamos, agora, sobre o formalismo. Segundo Da Costa (1992, p. 51), o formalismo busca transformar o método axiomático (técnica) na essência mesma da matemática. Para estudar pelo método axiomático, em geral, procede-se da seguinte forma: escolhe-se certo número de [de] noções e proposições primitivas,

> [...] aceitando-se outras ideias ou outras proposições só mediante, respectivamente, definições e demonstrações; obtém-se, dessa maneira, uma *axiomática material da teoria dada, deixam-se de lado os significados intuitivos dos conceitos primitivos* [...]. Procuram-se, então, as consequências

> do sistema obtido, *sem preocupação com a natureza ou com o significado inicial desses termos ou das relações entre eles existentes*. Estrutura-se, assim, o que se denomina uma axiomática abstrata. (DA COSTA, 1992, p. 49, grifos nossos).

Para os formalistas, o matemático pode estudar qualquer sistema deste que esse último não contenha contradições. Destacamos o distanciamento dessa concepção em relação à matemática dos povos antigos. No formalismo não interessa se os símbolos e resultados se referem a marcações territoriais nas redondezas do rio Nilo ou a um sistema abstrato sem ligação imediata com o "mundo real". Na verdade, chegou o ponto em que David Hilbert, um dos matemáticos mais famosos defensores da tese formalista, criou a metamatemática, cuja finalidade seria, basicamente, demonstrar consistência das diversas teorias matemáticas (DA COSTA, 1992, p. 53).

O principal problema do formalismo, aparentemente, é o que se refere às demonstrações de consistência. Para demonstrar a consistência de um sistema seria necessário cumprir as seguintes etapas:

> a) Axiomatização [das diversas teorias lógico-matemáticas]
> b) Formalização: formalizam-se as axiomáticas obtidas, isto significando que em cada uma delas os conceitos primitivos, os postulados e os conectivos, relações e princípios lógicos são substituídos por símbolos e arranjos simbólicos sujeitos a regras bem definidas [...].
> c) Demonstração da consistência das axiomáticas formalizadas: para cada axiomática formalizada, [...] procura-se provar sua consistência, evidenciando que jamais se poderá chegar a arranjos simbólicos contraditórios, operando de acordo com as regras estabelecidas. (DA COSTA, 1992, p. 53).

A questão é que, em muitos casos, o passo c) para a demonstração de consistência de uma teoria A se reduz à demonstração da consistência de uma teoria B. Por exemplo, Hilbert provou que a geometria comum é consistente se a Análise for consistente. O problema é que em teorias como a Aritmética e a Análise, não existem teorias mais simples e seguras sobre as quais se possa reduzir a demonstração de consistência (DA COSTA, 1992, p. 55). Além disso, não se pode mais recorrer à intuição e nem a fenômenos do "mundo real", pois a matemática se trata, agora, de sistemas abstratos.

Podemos citar, ainda, dois teoremas de Kurt Gödel que abalaram profundamente o formalismo: "Teorema I. Toda axiomática consistente da aritmética é incompleta" (DA COSTA, 1992, p. 56) (uma axiomática é completa quando qualquer enunciado contido nela ou a negação desse enunciado for demonstrável) e "Teorema II. A consistência de qualquer axiomática consistente da aritmética não pode ser demonstrada nessa axiomática" (DA COSTA, 1992, p. 56) Esses teoremas, segundo DA COSTA (1992, p. 61), "[...] patentearam que as demonstrações matemáticas de consistência, como as queria Hilbert, são geralmente impossíveis".

Outro ponto que sofreu críticas foi a pouca importância dada aos significados dos símbolos matemáticos, que fazia com que, segundo Bertrand Russell, os matemáticos se portassem como relojoeiros que se preocupam demasiadamente com a aparência de seus relógios e esquecem que devem fazê-los marcar o tempo (DA COSTA, 1992, p. 62).

Agora, nos resta averiguar sobre o intuicionismo. Segundo Dias (1999, p. 75), "[a] teste intuicionista é baseada na construção da Matemática a partir dos números naturais considerados como uma ideia *intuitiva*". Basicamente, a série 1, 2, 3, ... dos naturais era vista como parte do senso comum e a Matemática não seria um sistema de regras, ou uma teoria, mas uma "*parte fundamental da atividade humana*" (DIAS, 1999, p. 75). Essa escola, liderada por L. Brouwer, provou uma revisão de conceitos como "prova" e "existência".

Um dos aspectos que mais nos chama atenção é o questionamento do uso indiscriminado do infinito pelos matemáticos. Dias (1999, p. 75) comenta que "um conjunto, por exemplo, só devia ser considerado se cada elemento pudesse ser construído passo a passo por uma lei.". Além disso, uma afirmação poderia ser verdadeira, falsa ou indecidível, o que eliminaria a possibilidade da lei do terceiro excluído e, assim, tornava inviável a demonstração por absurdo, necessária para vários resultados matemáticos, como por exemplo, o fato de raiz de 2 ser um número irracional.

As diferenças ocorridas no intuicionismo não se referem apenas a axiomas e métodos de demonstração, mas a resultados um pouco mais avançados como, por exemplo, alguns do cálculo diferencial. Segundo DA Da Costa (1992, p. 45), na matemática de Brouwer ocorre: 1. Toda função real de variável real, definida num intervalo fechado, é uniformemente contínua nesse intervalo; 2. Qualquer função, nas condições precedentes, é derivável.

Críticas ao intuicionismo podem se basear no excessivo apelo à construção e à intuição. Segundo Da Costa (1992, p. 46), se levarmos ao pé da letra a tese intuicionista, cada pessoa terá sua "própria matemática", e a matemática como ciência se torna impossível.

Acreditamos ter deixado claro o que se estuda em Filosofia da Matemática e pensamos que o resumo histórico dado acima pode ajudar a ilustrar os problemas em torno desta área do conhecimento. Temos a opinião de que a Filosofia da Matemática constitui papel de extrema importância na formação intelectual do sujeito, pois propõe reflexões a respeito dos fundamentos de uma das ciências mais úteis para o mundo atual, destacando seu lado construção humana e mostrando que matemática é mais do que mera resolução mecânica de exercícios descontextualizados.

3.3 Sobre a prática filosófica no estudo da Matemática

Consideramos ser possível realizar, de maneira adequada, a prática filosófica em sala de aula, tornando as aulas de Filosofia em algo mais do que mero estudo de textos e filósofos. Na verdade, como pretendemos apresentar possibilidades para levar algo de filosofia e Filosofia da Matemática para as aulas de Matemática, nos interessa que seja possível o filosofar nas aulas, pois caso contrário estaríamos fadados a apenas ler textos de filósofos da matemática e não fazer nada além disso.

Como escrito por BRITO e ONOFRE (2017, p. 116), “[...] no Ensino Médio, é muito comum a prática orientada pelo estudo dos autores (filósofos), e não pelos problemas da filosofia”. Além disso, segundo eles, na mesma página, os estudantes são desestimulados a investigar os problemas filosóficos devido às aulas meramente expositivas e sem espaço para debate. Notemos que os autores reclamam do desestímulo de investigações sobre as ideias filosóficas, questionando-as, mas não defendem meras discussões sobre assuntos arbitrários.

Os autores defendem que o ensino da filosofia precisa estar atrelado à prática do filosofar, pois é o ato de filosofar que pode unir os alunos à filosofia (BRITO, ONOFRE, 2017, p. 117). Ainda, segundo eles, a função da filosofia no ensino básico é “[...] mostrar aos jovens que é preciso questionar o mundo, para que assim possam transformá-lo” (BRITO, ONOFRE, 2017, p. 118).

Colhemos pistas a respeito do que seja o filosofar na seguinte citação:

> Já que somos possuidores de raciocínio, a Filosofia não consiste apenas em indagações, mas em pensar com lógica. É, pois, um ato de reflexão metodicamente controlado. Ela busca respostas, mas não uma conclusão a respeito de nada, e sim, mais apropriadamente, uma colocação de ideias, um verdadeiro debate (TELES, 2010, p. 13, apud BRITO, ONOFRE, 2017, p. 117).

Afirmamos, a partir daí, que a prática filosófica seria o ato de discutir de maneira metódica sobre um assunto dado. Esse metódica garante que não devam ser aceitos artifícios meramente retóricos para apenas convencer, mas que a argumentação se dê em busca do conhecimento. Destacamos que tal prática é diferente de apenas ler um texto em um livro didático e dizer “é isso e pronto”.

Sobre a importância dos textos dos filósofos obtemos respaldo no mesmo texto de BRITO e ONOFRE (2017, p. 118, grifo nosso): “Saliente-se que o professor de filosofia trabalha os argumentos filosóficos a partir da tradição e da criatividade dos educandos.”. Dessa forma não se inventará a filosofia do zero em toda aula de Filosofia, mas se discutirá os temas que dela fazem parte somando as conclusões tradicionais com as ideias dos próprios estudantes.

Concluindo esta secção, esperamos ter mostrado de maneira razoável a possibilidade de se discutir em filosofia, indo além da leitura passiva de textos ou sobre a história dos filósofos. Como veremos posteriormente, essa característica de discussão da Filosofia será extremamente útil para a proposição e realização das atividades que serão recomendadas.

O que significa “filosofar” em matemática?

Eis o motivo pelo qual falamos tanto em *filosofar nas aulas de matemática* e *usar a Filosofia da Matemática nas aulas de Matemática*, sem omitir nenhum dos dois: são coisas diferentes. Levar a Filosofia da Matemática para as aulas de Matemática, a nosso ver, seria trabalhar ideias da Filosofia da Matemática (uma área do conhecimento com suas obras e autores próprios) nas aulas da disciplina de Matemática no Ensino Médio. Veremos o que seria, portanto, o *filosofar* em matemática.

Na secção anterior esboçamos uma definição de filosofar (ou da prática filosófica). Vimos que consiste, basicamente, na discussão, de forma metódica, de ideias do domínio da Filosofia. Ora, duas secções atrás verificamos algumas concepções de filosofia trazidas por Chaui (2010) em seu livro e dissemos que a quarta, que se referia à Filosofia como fundamentação teórica e crítica dos conhecimentos, nos seria a mais conveniente. Pois bem, sendo a matemática uma área do conhecimento humano, podemos olhar para a mesma a partir da filosofia, ou seja, discutindo sobre seus fundamentos, objetos e resultados. De fato, parte do que acabamos de dizer também é assunto da Filosofia da Matemática, mas aqui estamos ignorando os filósofos da matemática, suas ideias e focando na *prática filosófica*.

A fim de dar um exemplo, estaríamos *filosofando* em Matemática se discutíssemos sobre o famigerado Teorema de Pitágoras. Poderíamos debater sobre sua demonstração, sobre as restrições que devem ser colocadas para que o resultado funcione, sobre o que poderíamos usar para calcular medidas de lados de triângulos nos triângulos onde não podemos usar tal teorema. Notemos que não estaríamos se quer citando o termo Filosofia da Matemática nem qualquer um de seus autores, não precisaríamos sequer ter lido nada sobre tal área do conhecimento para a empreitada proposta.

4. UM OLHAR FILOSÓFICO PARA A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

Como resultado desse trabalho, apresentaremos, neste capítulo, propostas de abordagens que objetivam levar a Filosofia da Matemática e um olhar filosófico da matemática para as aulas do Ensino Médio.

Na secção 4.1, abordaremos o que diz a BNCC sobre o que se deve ensinar em Matemática no Ensino Médio e o que um dos livros aprovados pelo PNLD 2018 apresenta em seu sumário. Em 4.2, relacionaremos o Mito da Caverna de Platão com as representações matemáticas que fazemos de fatos da vida real para resolver problemas. Na secção 4.3, traremos à tona a preocupação de Shapiro em "[...] entender o relacionamento entre a matemática e o resto do discurso científico comum" (2000, p.) em uma abordagem das Leis de Newton que privilegia noções de funções. Por fim, em 4.4, evidenciaremos a concepção de Newton da Costa, de que o papel da Filosofia da Matemática implica "[...] determinar, entre outras coisas, quais as suposições e as ideias que servem de fundamentos para as verdades matemáticas" (1992, p. 13) ao discutir sobre como se pode apresentar o conjunto dos números naturais nas aulas de Matemática no Ensino Médio.

4.1 Sobre a Matemática no Ensino Médio

Quanto à Matemática, a BNCC (BRASIL, 2018) defende que se fale de Números e Álgebra; Geometria e Medidas e Probabilidade e Estatística. Para ter uma visão melhor dos conteúdos que são, efetivamente, trabalhados, olhamos para os sumários dos três volumes para Ensino Médio do livro de Luiz Roberto Dante, Matemática - Contexto e Aplicações (2016), aprovado no PNLD 2018.

No volume dedicado ao 1ª ano do Ensino Médio, temos os capítulos Conjuntos numéricos, Funções, Função afim e função modular, Função quadrática, Função exponencial, Logaritmo e função logarítmica, Sequências e Trigonometria no triângulo retângulo.

No volume relativo ao 2º ano, os capítulos são Trigonometria: a resolução de triângulos quaisquer, Conceitos trigonométricos básicos, Funções trigonométricas, Matrizes e determinantes, Sistemas lineares, Polígonos inscritos e áreas, Geometria espacial de posição: uma abordagem intuitiva, Poliedros: prismas e pirâmides, Análise combinatória e Probabilidade.

Por fim, no terceiro ano do Ensino Médio, são presentes os capítulos Matemática financeira, Estatística, Geometria espacial: corpos redondos, Geometria analítica: ponto e reta, Geometria analítica: secções cônicas, Números complexos, Polinômios, Equações algébricas e, ainda, Relações e equações trigonométricas.

Voltando à BNCC, pretende-se

> [...] colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade (BRASIL, 2018, p. 527).

A BNCC também assinala que os saberes matemáticos, tanto do ponto de vista pedagógico como do ponto de vista didático, devem ser "[...] fundamentados em diferentes bases, de modo a assegurar a compreensão de fenômenos do próprio contexto cultural do indivíduo e das relações interculturais" (BRASIL, 2018, p 542).

Assim, constatamos que há ambição de que o ensino da Matemática exponha as relações entre os conhecimentos matemáticos e, também, entre esses conhecimentos e a cultura.

Parece-nos, então, que seria possível levar um pouco de Filosofia da Matemática ao Ensino Médio. No sumário do livro de Dante (2016) identificamos tópicos que podem ser trabalhados com um ponto de vista da Filosofia da Matemática. Por exemplo, no capítulo sobre conjuntos numéricos do volume do 1º ano, é apresentado o subtópico A noção de conjunto, onde se pode discutir o que é necessário para caracterizar um conjunto ou citar o paradoxo de Russell sobre o conjunto que contém todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos (esse conjunto pertence ou não a ele mesmo?). Outra possibilidade é discutir sobre definições matemáticas ao falar da definição de matriz conforme sugere o volume dedicado ao 2º ano do Ensino Médio. Para citar uma possibilidade com conteúdo referentes ao 3º ano do Ensino Médio, há um subtópico chamado Fermat e a Geometria Analítica em um dos capítulos. Poderíamos falar sobre a história do Último Teorema de Fermat e discutir sobre demonstrações na matemática.

4.2 A Alegoria da Caverna e a Matemática Aplicada

Parece-nos que uma forma de atrair a atenção de alunos autodeclarados de humanas para as aulas de Matemática é propor uma atividade que tenha como ponto de partida um tópico popular da Filosofia. Neste exemplo, usaremos a Alegoria da Caverna de Platão.

Podemos usar a descrição de Chaui (2010, p. 09, 10) da Alegoria da Caverna como forma de contar o mito sem precisar recorrer ao texto original que compõe a obra A República, no Livro VII, de autoria de Platão. Utilizar o texto de Chaui também pode ser bem oportuno por se tratar de um livro didático aprovado para o PNLD. Não há alteração na estratégia caso o livro de Filosofia dos alunos onde esta atividade for executada seja outro.

A caverna de Platão é um lugar imaginário onde seres humanos estão acorrentados desde seu nascimento sem contato com o mundo exterior. Tudo o que se vê daquilo que há fora da caverna são sombras projetadas nas paredes da mesma.

Os habitantes da caverna, que nunca tiveram contato com o mundo exterior, acreditam que as projeções nas paredes são as coisas em si. Por exemplo, um homem que passa próximo à caverna produz uma sombra em suas paredes. Para os prisioneiros, a sombra é o homem, e não uma mera representação do mesmo. A sombra fala e se move, tem vida.

Um dos prisioneiros consegue se livrar de seus grilhões e foge da caverna. O primeiro sintoma ao sair da caverna é dor. No caminho para a saída, o prisioneiro precisa fazer movimentos que não estava acostumado e ficou totalmente cego pelo Sol, que é muito mais intenso do que ele e seus companheiros o sentiam em sua prisão.

Apesar do desconforto, o fugitivo decide que não voltará mais à caverna, encantado pelo vislumbre das coisas como elas realmente são e com a descoberta de que era prisioneiro e que em sua prisão vira apenas sombras.

Porém, ao lamentar a sorte dos companheiros, o prisioneiro decide voltar à caverna para convencê-los a se libertarem. A recepção, contudo, não é boa. Alguns zombam dele, outros o espancam e pode ser que o matem se houver insistência nas afirmações feitas e no convite para sair da caverna.

Feita a leitura da descrição do mito em questão com a turma, o professor pode conduzir uma conversa a respeito das representações que utilizamos na Matemática.

Por exemplo, quando fazemos um esboço de um triângulo, não estamos desenhando o triângulo em si, mas uma mera representação. Ora, se o triângulo é um objeto no plano e qualquer tinta, giz ou lápis utilizado deixa traços possuidores de espessura, desenhar o triângulo em si se torna impossível. O mesmo raciocínio nos impede de desenhar uma reta. Aliás, podemos representar retas não apenas com desenhos, mas também com equações. Resolver equações, inclusive, pode nos dar representações de pontos de intersecção de curvas com o eixo das abscissas. Não precisamos ir tão longe: o próprio ato de escrever um número, por exemplo, “5”, corresponde a fazer uma representação. A ideia que “5” representa está na realidade exterior enquanto o desenho “5” é uma sombra projetada na parede da caverna.

No caso da Matemática, porém, não devemos desprezar as sombras nas paredes da caverna. Se tivermos em mente o objeto da realidade ao qual a sombra corresponde, esta última nos pode ser bastante útil. Para mostrar isso, vamos explorar a seguinte situação-problema. Situações como esta são comuns em livros texto para abordagem inicial de conteúdos de álgebra linear.

> Jorge é um fazendeiro cuja propriedade tem 15 hectares de terreno para plantio e ele pretende cultivar milho e soja nesse terreno, além de deixar uma parte do terreno em repouso. Cada hectare de soja custa 20 mil reais em investimento e demanda 30 horas de trabalho em um mês. Cada hectare de milho custa 15 mil reais em investimento e demanda 40 horas de trabalho em um mês. A terra não plantada custa a ele 5 mil reais o hectare e demanda 5 horas de trabalho em um mês, uma vez que precisa ser cuidada e adubada para plantio posterior. Jorge tem disponível 230 mil reais e 425 horas de trabalho. Cada hectare de soja cultivada rende ao fazendeiro 30 mil reais e cada hectare de milho plantado rende 20 mil reais. Usando um sistema de equações lineares é possível determinar quantos hectares de soja e milho devem ser plantados e o quanto da propriedade não deve ser usado para o plantio, caso Jorge decida usar toda a terra disponível, todo o dinheiro que pode investir e todas as horas de trabalho disponíveis.

Um possível encaminhamento para uma abordagem matemática desse problema de natureza prática é esboçado a seguir.

Representamos as quantidades de hectares que serão ocupados por soja e milho por S e M, respectivamente. Representamos a quantidade de hectares não ocupados por T. Na equação (1) abaixo descrevemos o que nos é dado no enunciado em relação ao custo em reais de cada opção. Na equação (2) descrevemos o que é dito em relação à quantidade de tempo investido em cada opção. Na equação (3), por fim, descrevemos o fato de que as quantidades de hectares ocupados por soja e milho e de hectares desocupados deve ser igual a 15 hectares, que é o tamanho da propriedade de Jorge. Temos um sistema (S1) com as características pedidas no enunciado:

$$\begin{cases} 20000S + 15000M + 5000T = 230000 & (1) \\ 30S + 40M + 5T = 425 & (2) \\ S + M + T = 15 & (3) \end{cases}$$

Podemos dividir a equação (1) por 1000 em ambos os lados e a equação (2) por 5 em ambos os lados e obter o sistema (S2) abaixo:

$$\begin{cases} 20S + 15M + 5T = 230 & (4) \\ 6S + 8M + T = 85 & (5) \\ S + M + T = 15 & (6) \end{cases}$$

Resolvamos (S2):

De (6) obtemos:

T=15-S-M (7)

De (5) temos:

T=85-6S-8M (8)

Igualando (7) e (8):

$$15 - S - M = 85 - 6S - 8M \Rightarrow 5S = 70 - 7M \Rightarrow S = \frac{70 - 7M}{5} \qquad (9)$$

Substituindo (9) em (7):

$$T = 15 - \left(\tfrac{70-7M}{5}\right) - M = \tfrac{5+2M}{5} \qquad (10)$$

Substituindo (10) e (9) em (4):

$$20\left(\frac{70 - 7M}{5}\right) + 15M + 5\left(\frac{5 + 2M}{5}\right) = 230 \Rightarrow \frac{1400 - 140M + 75M + 25 + 10M}{5} = \frac{1150}{5}$$
$$\Rightarrow -55M + 1425 = 1150 \Rightarrow 55M = 275 \Rightarrow M = 5 \quad (11)$$

Substituindo (11) em (9) e substituindo (11) em (10):

$$S = \frac{70 - 7(5)}{5} = \frac{35}{5} = 7$$
$$T = \frac{5 + 2(5)}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

Daí concluímos que Jorge deve plantar soja em 7 hectares de seu terreno, plantar milho em 5 hectares e não plantar nada em 3 hectares.

Uma outra possibilidade seria representar o problema utilizando matrizes. Vejamos como ficaria o que temos no sistema (S2) utilizando matrizes:

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 5 \\ 6 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S \\ M \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 230 \\ 85 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Um primeiro passo para resolver o problema utilizando matrizes seria obter a matriz aumentada (M1) abaixo:

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 5 & | & 230 \\ 6 & 8 & 1 & | & 85 \\ 1 & 1 & 1 & | & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} (L1) \\ (L2) \\ (L3) \end{matrix}$$

E fazer operações nas linhas da matriz (M1) de modo a obter uma matriz triangular superior. Pode-se realizar a seguinte sequência de passos:

Trocar (L1) e (L3) de lugar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 15 \\ 6 & 8 & 1 & | & 85 \\ 20 & 15 & 5 & | & 230 \end{bmatrix} \begin{matrix} (L4) \\ (L5) \\ (L6) \end{matrix}$$

Substituir (L5) por (L5) + 6*(-L4) e substituir (L6) por (L6) + 20(-L4):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 15 \\ 0 & 2 & -5 & | & -5 \\ 0 & -5 & -15 & | & -70 \end{bmatrix} \begin{matrix} (L7) \\ (L8) \\ (L9) \end{matrix}$$

Substituir (L9) por (L9) + (5/2)*(L8), obtendo a matriz (M2):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 15 \\ 0 & 2 & -5 & | & -5 \\ 0 & 0 & \frac{-55}{2} & | & \frac{-165}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} (L10) \\ (11) \\ (L12) \end{matrix}$$

De (L12) obtemos:

$$\frac{-55}{2}T = \frac{-165}{2} \Rightarrow -55T = -165 \Rightarrow T = 3 \ \ (I1)$$

De (I1) obtemos:

2M-5T=-5   (I2)

Substituindo (I1) em (I2):

$$2M - 5(3) = -5 \Rightarrow 2M - 15 = -5 \Rightarrow 2M = 10 \Rightarrow M = \frac{10}{2} = 5 \ \ (I3)$$

De (L10) obtemos:

S+M+T=15   (I4)

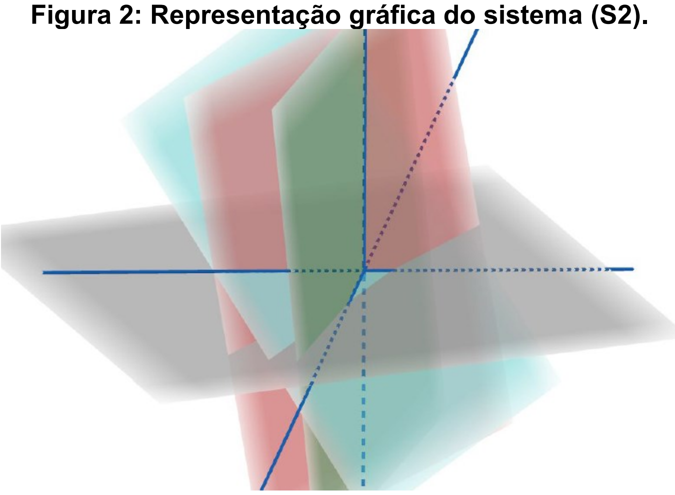
Substituindo (I1) e (I3) em (I4):

$$S + (5) + (3) = 15 \Rightarrow S = 7$$

E obtemos, novamente, que Jorge deve plantar soja em 7 hectares de seu terreno, plantar milho em 5 hectares e não plantar nada em 3 hectares.

Uma outra forma, ainda, de representar a situação-problema, seria tratar as equações do sistema (S2) como equações que representam planos no espaço e a solução (S, M, T) como a tripla de coordenadas do ponto de interseção entre os planos:

Figura 2: Representação gráfica do sistema (S2).



Fonte: O Autor (2022).

O sistema acima não contém grãos de soja e milho e nem terrenos. Muito menos o agricultor Jorge. Trata-se de uma representação de algo que assumimos ser real. Essa mera representação, apesar de não ser a situação em si, nos permite visualizar a resolução de um problema da realidade. Na Matemática, as representações têm papel central: nos auxiliam a entender os fatos matemáticos e a resolver os problemas que devem ser resolvidos. Resolvendo o sistema de equações acima obtemos uma solução.

No entanto, outro tipo de representação desta mesma situação poderia ser elaborada utilizando matrizes. A possibilidade de representações diversas para um mesmo objeto ou situação-problema em matemática pode ser uma via frutífera de discussão filosófica por envolver a escolha de uma estratégia, a análise do esforço e do estudo necessários para conhecê-las, além da avaliação de sua eficácia. Ainda no contexto desta situação-problema, uma abordagem considerando o conceito de vetores e o recurso às combinações lineares de vetores, pode ampliar compreensão da matemática envolvida e perceber o impacto que o poder de escolha pode trazer ao estudante que participa ativa e criticamente na construção de seu conhecimento.

4.3 O mundo físico e a Matemática

Vimos, neste trabalho, que o filósofo da matemática Stewart Shapiro considera importante a preocupação com a relação entre Matemática e outras áreas do conhecimento. Nesta atividade, vamos relacionar a Matemática com a Física, trabalhando o conceito de função junto às leis de Newton.

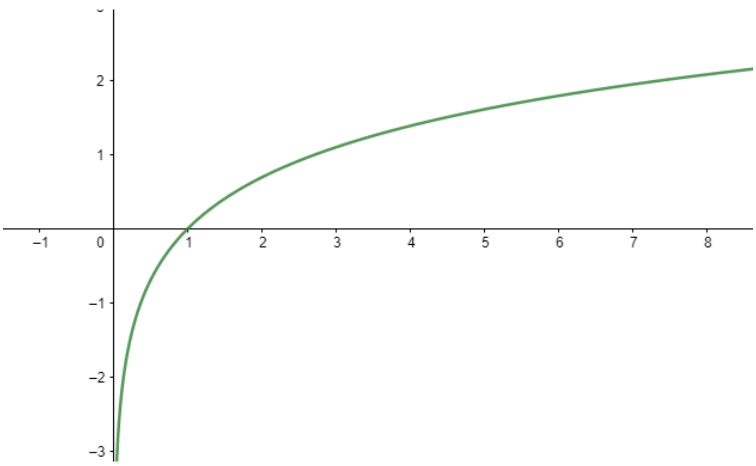
Busca-se evidenciar a ligação entre Matemática e outras áreas do conhecimento e, também, o fato de que, em geral, precisamos fazer simplificações ao tratar fatos da realidade física com leis matemáticas.

Em turmas de terceiro ano do Ensino Médio já foram estudados diferentes tipos de funções, além de conceitos importantes de Física. A essa área do conhecimento, fatos da vida real, muitas vezes, estão conectados. Um erro de gestão pública, por exemplo, pode ter mortes como consequência; uma flor pode secar porque algumas árvores a impediram de receber luz solar; um corredor pode vencer a corrida, em parte, por ter uma boa preparação mental. O erro na gestão pública pode ter consequências mais sérias do que se esperava; o jardineiro pode não ter reparado nas árvores antes de plantar a flor; e os adversários do corredor de boa preparação mental podem ter pensado que, já que se tratava de uma corrida, o que importava era, unicamente, a velocidade que podiam atingir. O que vemos nesses exemplos é que, mesmo quando não reparamos, há ligações entre diferentes fatos da realidade. Outros exemplos podem ser dados, considerando a realidade local da turma onde a aula será aplicada.

Acontece que, sendo as áreas do conhecimento ferramentas para identificar fatos da realidade, diferentes áreas podem, também, estar conectadas. Um exemplo disso é a utilização de resultados matemáticos pela Física.

Uma função é uma relação que leva cada elemento de um conjunto (chamado domínio) a um único elemento de um outro conjunto (chamado contradomínio).

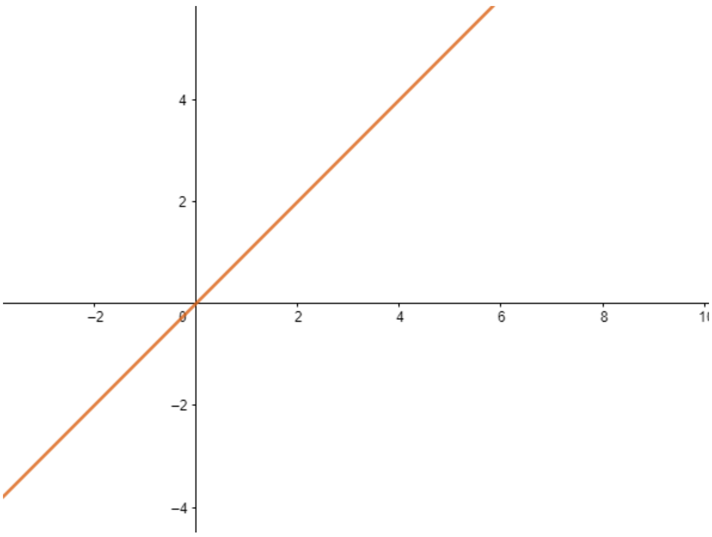
Figura 3: Esboço de um gráfico de uma função.



Fonte: O Autor (2022).

Uma função afim é uma função $f: R \to R$ definida por $f(x) = ax + b$, onde $a, b \in R$ e $a \neq 0$.

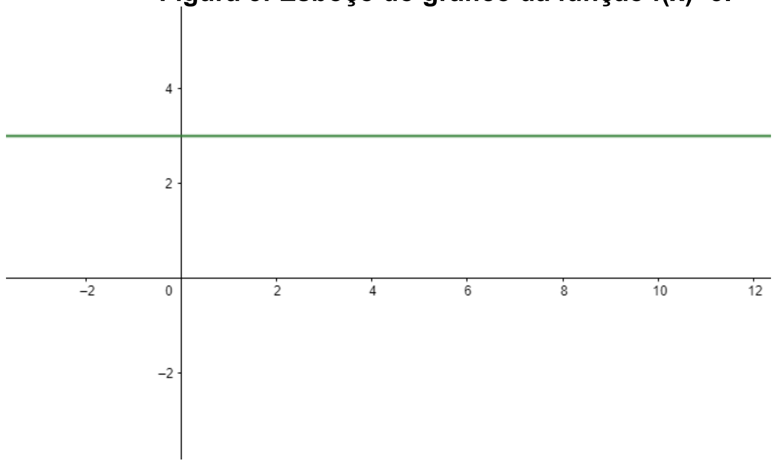
Figura 4: Esboço de gráfico da função f(x)=1x+0.



Fonte: O Autor (2022).

Uma função constante é uma função $f: R \to R$ definida por $f(x) = b$, onde $b \in \mathbb{R}$.

Figura 5: Esboço do gráfico da função f(x)=3.

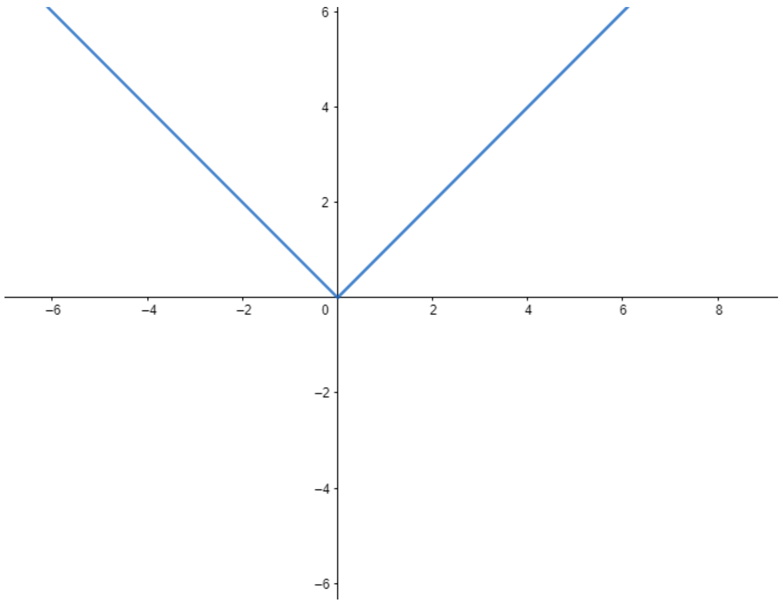


Fonte: O Autor (2022).

Uma função modular é uma função $f: R \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Figura 6: Esboço do gráfico da função f(x)=|x|.



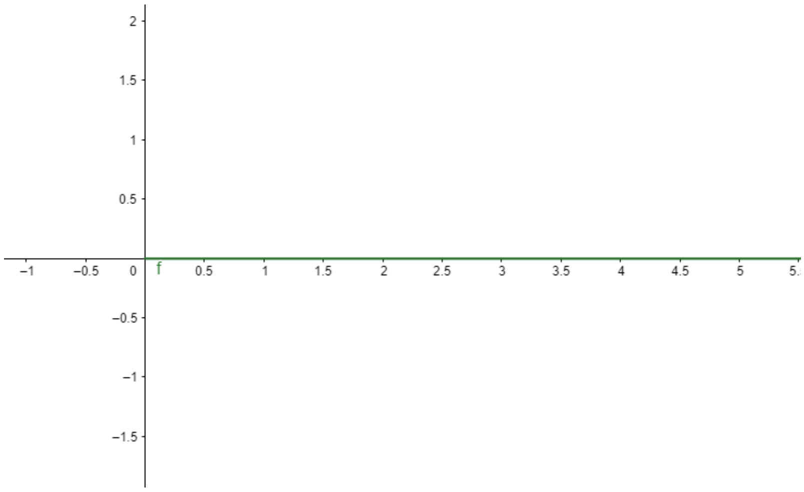
Fonte: O Autor (2022).

Até aqui, falamos apenas de funções, dentro dos domínios da Matemática, mas vamos revisar as três leis de Newton:

1) "*Todo corpo continua em seu estado de repouso ou movimento uniforme em linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças aplicadas sobre ele.*" (HELERBROCK, 20–, grifo do original).

É fácil ver que podemos representar esta lei por funções constantes. Se o corpo está inicialmente em repouso, continuará em repouso, isto é, sua velocidade com o decorrer do tempo será sempre zero. Notar que, aqui, o eixo das abscissas se refere ao tempo, então o domínio da função não contém números negativos.

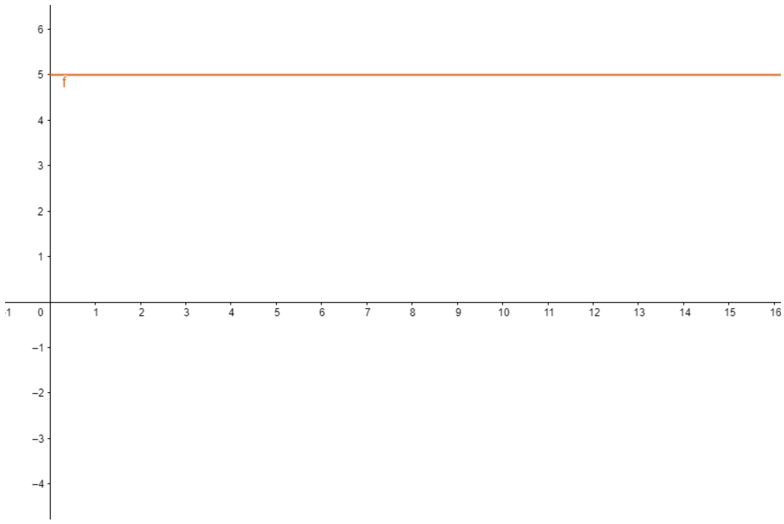
Figura 7: Esboço do gráfico da função f(x)=0 (x0).



Fonte: O Autor (2022).

Se o corpo está em movimento a, digamos, 5 km/h, e não sofre influência de nenhuma força, seu movimento no decorrer do tempo pode ser representado pela função constante f(x)=5, com o domínio sendo o conjunto dos números reais maiores ou iguais a zero.

Figura 8: Esboço do gráfico da função $f(x) = 5(x \geq 0)$.



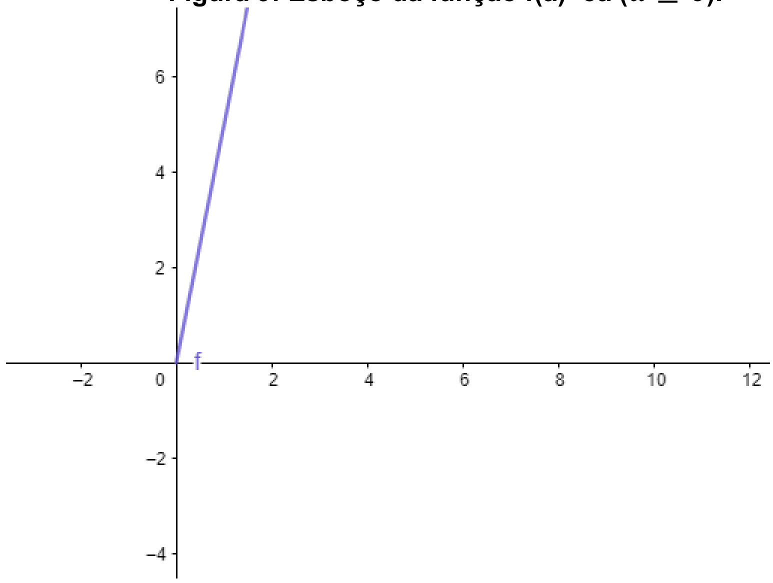
Fonte: O Autor (2022).

2) "*A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida e é produzida na direção de linha reta na qual aquela força é aplicada*" (HELERBROCK, 20–, grifo do original).

Segundo Helerbrock (20–), podemos equacionar esta lei por $F_R = ma$, onde F_R é a força resultante, *m* é a massa do corpo e a é a aceleração, obtida por $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (a razão entre as variações de velocidade e de tempo).

Ora, se fixarmos a massa *m*, temos que a força resultante F_R é uma função da forma $f(x) = mx + n$ com n=0. Neste caso, F_R depende de *a*. Não podemos nos esquecer de que o domínio da função, também aqui, exclui os números negativos.

Figura 9: Esboço da função f(a)=5a ($a \geq 0$).



Fonte: O Autor (2022).

Na Figura 8 temos uma representação da força resultante de um corpo de massa 5 u.m. conforme a aceleração de seu movimento aumenta.

3) "*A toda ação há sempre uma reação oposta e de igual intensidade: as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos*" (HELERBROCK, 20–, grifo do original).

Como as forças de ação e reação em dois corpos distintos apresentam módulo e direção iguais, mas sentido oposto, Helerbrock (20–) equaciona essa lei da seguinte forma: $|F_{1,2}| = -|F_{2,1}|$. $F_{1,2}$é a força exercida pelo corpo 1 sobre o corpo 2, e $F_{2,1}$ é a força exercida pelo corpo 2 sobre o corpo 1.

A Figura 6 nos dá uma representação visual adequada desta lei, mostrando que conforme tomamos valores maiores para$F_{1,2}$,$F_{2,1}$decresce com a mesma intensidade, como se *espelhasse* o crescimento de$F_{1,2}$.

4.4 O Método Axiomático e a natureza dos números

Uma discussão que parece conveniente no Ensino Médio é em relação ao que é um número natural. Nessa fase da escolarização, os discentes já passaram nove anos, no mínimo, em contato com a matemática, então se faz interessante discutir sobre esses objetos (números naturais) que os acompanharam por toda a escolarização.

Além da abordagem mais óbvia, dos naturais como ferramentas para contar objetos, pode-se propor uma alternativa mais formal do ponto de vista matemático. Consideramos ser possível uma abordagem do conjunto dos números naturais que lembre a concepção de Newton da Costa sobre a Filosofia da Matemática, como uma área do conhecimento que se preocupa com o que fundamenta a Matemática.

No volume de 1º ano de Ensino Médio de seu livro aprovado pelo PNLD 2018, Dante (2016, p. 14) caracteriza o conjunto dos números naturais. A caracterização é bastante direta, mas chama a nossa atenção a ênfase à ideia de sucessor:

> O conjunto dos números naturais é representado por: N={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...).
> O primeiro elemento desse conjunto é o zero. O sucessor do zero é 1, o sucessor do 1 é o 2, e assim por diante. Representa-se o sucessor de um número natural qualquer n por n+1. Como sempre podemos obter o sucessor de um número natural, dizemos que o conjunto dos números naturais é infinito. (grifos do original).

Além disso, há um quadro intitulado Para Refletir que apresenta os seguintes questionamentos: qualquer número natural tem um sucessor? Números naturais diferentes têm sucessores diferentes? O zero é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro?

Parece-nos que Dante (2016) está querendo evidenciar fatos da axiomatização de Peano sem falar de axiomatização e sem citar Giuseppe Peano. Essa atitude abre a possibilidade de o professor, em sua aula no Ensino Médio, abordar o método axiomático.

No método axiomático, parte-se de noções primitivas (que não precisam de definição formal) e axiomas ou postulados (proposições aceitas sem demonstração) e constrói-se a teoria matemática. Abordar o que vem a ser um método usual em determinada área do conhecimento, pode ser elemento de estudo tanto em aulas de filosofia como de matemática. O uso do método axiomático explorado a partir de um exemplo prático, como o dos Axiomas de Peano, pode trazer ao estudante do Ensino Médio importantes vivências e aprendizados do que diz respeito à natureza da matemática e o papel da abordagem filosófica para apreendê-la.

A axiomatização de Peano, por exemplo, tem três noções primitivas e cinco axiomas. Vamos enunciar com as palavras de Russell (2020, p. 06, 07):

Noções Primitivas: 0, número e sucessor.

Postulados:

- 0 é um número;
- O sucessor de qualquer número é um número;
- Não há dois números com um mesmo sucessor;
- 0 não é sucessor de número algum;
- Qualquer propriedade que pertença a 0, e também ao sucessor de todo o número que tenha essa propriedade, pertence a todos os números.

Uma possibilidade de atividade seria pedir, antes da aula sobre o conjunto dos números naturais, que os discentes pesquisassem sobre o método axiomático. Em sala de aula, poderia ser apresentada a caracterização dos números naturais dada em Dante (2016) e, em seguida, poderia ser dado um tempo para que os estudantes, em pequenos grupos, respondessem, por escrito, aos questionamentos do quadro Para Refletir do livro citado. Por fim, poderia ser apresentada a axiomatização de Peano com as palavras de Russell e comentários feitos pelo docente para que os alunos pudessem entender o que cada axioma quer dizer.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como premissa que os conteúdos e abordagens presentes em aulas de Filosofia no Ensino Médio podem contribuir com a aprendizagem de Matemática, já que essas duas disciplinas, na realidade possuem fortes ligações. Consideramos que o ensino de matemática sem a consideração de aspectos filosóficos terá lacunas significativas, se comparado àquele que considera tais aspectos.

Iniciamos compondo um panorama sobre a Filosofia no Ensino Médio com a intenção de ter uma noção acerca dos elementos de filosofia que são trabalhados esse nível de ensino e obter pistas sobre a possibilidade de tomar a Filosofia, também, como uma via para abordar a Matemática.

Depois, desenvolvemos um capítulo relacionado à Filosofia da Matemática. Tal assunto, assim como o do parágrafo anterior, renderia um trabalho à parte, mas buscamos compor uma breve introdução para os licenciandos e professores de Matemática que, muitas vezes, não tiveram contato com a Filosofia da Matemática em sua formação.

Por fim, listamos três possibilidades de abordagens de conteúdos de Matemática utilizando o que havíamos obtido nas leituras anteriores sobre a Filosofia, a Filosofia da Matemática e a Matemática no Ensino Médio.

Percebemos que é possível, pelo menos em alguns momentos, propor uma abordagem mais filosófica e menos mecanicista aos conteúdos matemáticos no Ensino Médio. As alterações feitas no Ensino Médio brasileiro no período em que este trabalho estava sendo composto não parecem afetar o que foi exposto aqui, visto que buscamos não nos prender a modelos e formalidades, mas sim à atitude de buscar uma abordagem filosófica dos conteúdos de Matemática.

Parece-nos natural a relação entre Matemática e Filosofia ao longo do desenvolvimento das duas áreas do conhecimento. Conta-se (SHAPIRO, 2000, p.) que na entrada da Academia de Platão lia-se “que ninguém ignorante de geometria entre aqui.”. Shapiro (2000, p.) também nos lembra que, antes da especialização que temos nos acadêmicos de hoje, muitos matemáticos eram, também, filósofos. Podemos citar nomes como os de René Descartes, Gottfried Leibniz e Bertrand Russell como exemplos.

Não somos capazes, também, de negar a importância da Lógica para ambas as áreas. Sendo Matemática e Filosofia aparentemente dependentes do processo de argumentação, torna-se relevante a passagem de Holanda (2019, p. 01) segundo a qual “uma Lógica (ou sistema lógico) é qualquer sistema formal que estude o processo de argumentação.”. Além disso, a atribuição ao filósofo grego Aristóteles dos primeiros tratados sobre Lógica (HOLANDA, 2019, p. 01) e a ampla utilização dessa disciplina no desenvolvimento da escrita matemática nos faz crer que é inegável a existência de relação entre Matemática e Filosofia tendo a Lógica como um dos pontos compartilhados. Poderíamos ir mais longe nessa discussão, mas o uso da Lógica por ambas as disciplinas parece mostrar que há, no mínimo, um aspecto em comum entre elas.

Destacamos, também, que o conhecimento não nos parece estar organizado em áreas de forma restrita, como se fossem caixas com cadeados inquebráveis. Lembrando de nossa experiência no ensino básico, parece não ser possível desenvolver Física sem Matemática nem Educação Física sem Biologia, por exemplo, ou que, pelo menos, é possível estabelecer tais relações entre estas disciplinas como nos foram ministradas.

Feitas estas considerações, se apresenta o seguinte cenário: há possíveis relações entre as diferentes áreas do conhecimento; matemática e filosofia possuem algum tipo de proximidade; existiram filósofos matemáticos e matemáticos filósofos.

Do parágrafo anterior concluímos que a separação das áreas do conhecimento entre humanas (Filosofia, Sociologia, etc), exatas (Matemática, Física, etc) e biológicas (Biologia, etc) até pode servir para organização de provas, departamentos e afins, mas não reflete, com precisão, o processo real de desenvolvimento do conhecimento humano, portanto pode não ser necessária no contexto do ensino básico, onde os estudantes têm oportunidade de estudar um pouco de tudo. Particularmente, o aluno que prefere as matérias de humanas pode ter interesse em temas de exatas, e vice-versa.

Por outro lado, o que vimos quando estudamos no Ensino Médio, fizemos curso pré-vestibular e participamos de intervenções em escolas como estudantes de Licenciatura em Matemática é que existem discentes que colocam-se a si mesmos em determinada categoria (humanas, exatas ou biológicas) e rejeitam ou não se sentem capazes de aprender os conteúdos das outras áreas. Tal constatação se deu pela observação de estudantes que participavam ativamente em aulas de Filosofia e Sociologia, mas pareciam ausentes em aulas de Matemática, Física e Química, por exemplo. Também observamos alunos que se diziam *de exatas* e usavam tal autodenominação para subestimar ou ignorar conteúdos considerados de humanas ou de biológicas.

Neste trabalho, buscamos minimizar esse tipo de atitude e destacar algumas atividades que podem ser desenvolvidas em turmas de Ensino Médio e que envolvem um olhar mais filosófico para a matemática.

Particularmente, não defendemos que o ensino considerado tradicional da Matemática deva ser eliminado, inclusive porque aprendemos muito com professores que tinham esse perfil em nossa trajetória, mas propomos uma discussão que pode mostrar alternativas e ajudar na prática de um ensino mais atrativo aos alunos e que, inclusive, pode se aproximar mais da matemática como é praticada pelos matemáticos e/ou como foi desenvolvida ao longo da história.

Esperamos com este estudo ter trazido para o debate questões relevantes acerca do ensino de matemática no Ensino Médio, ao propor abordagens que professores e estudantes do Ensino Médio possam utilizar para levar um olhar filosófico sobre a matemática ou a própria Filosofia da Matemática para as suas aulas; abordagens que também podem ser realizadas por professores de Filosofia do Ensino Médio, viabilizando uma proposta de trabalho interdisciplinar.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Lei, Nº 13.005, 25 de junho de 2014.** Aprova o Plano Nacional de Educação – PNE e dá outras providências. Brasília: Casa Civil, 2014. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2011-2014/2014/Lei/L13005.htm. Acesso em: 5 mar. 2021.

BRASIL. **Lei, Nº 9.394, 20 de dezembro de 1996.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: Casa Civil. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm. Acesso em: 5 mar. 2021.

BRASIL. **Lei, Nº 13.415, 16 de fevereiro de 2017**. Altera as Leis n º 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho - CLT, aprovada pelo Decreto-Lei nº 5.452, de 1º de maio de 1943, e o Decreto-Lei nº 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei nº 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. Brasília: Secretaria-Geral, 2017. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm. Acesso em: 5 mar. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **BNCC - ENSINO MÉDIO**. [Brasília]: [MEC], 2017. Disponível em http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional- de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc-etapa-ensino-medio>. Acesso em 18 mai. 2022.

BRASIL. **Edital de convocação para o processo de inscrição e avaliação de obras didáticas para o programa nacional do livro didático PNLD 2018**.

BRASIL. Ministério da Educação. **Filosofia e Sociologia no Ensino Médio**. Disponível em http://portal.mec.gov.br/pnaes/323-secretarias-112877938/orgaos-vinculados- 82187207/12768-filosofia-e-sociologia-no-ensino-medio-sp-1870990710. Acesso em 18 mai. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD**. Disponível em http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld. Acesso em 18 mai. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia Digital do PNLD 2018**. Disponível em http://www.fnde.gov.br/pnld-2018/. Acesso em 18 mai. 2022.

BRITO, C.; ONOFRE, J. **A Filosofia como possibilidade da experiência filosófica no Ensino Médio a partir do conteúdo curricular**. Revista Ideação, ed. Especial, 2017.

CHAUI, M. **Iniciação à filosofia**. São Paulo: Ática, 2010.

DA COSTA, N. C. A. **Introdução aos fundamentos da matemática**. 3. ed. São Paulo: Hucitec, 1992. 90 p.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto & aplicações. Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. v 1, 2 e 3.

DIAS, J. R. **Breves noções de Filosofia da Matemática**. Caderno de Licenciatura em Matemática. n. 2. ano 2. 1999. Disponível em http://dalicenca.uff.br/wp-content/uploads/sites/204/2020/05/breves_nocoes_de_filosofia_da_matematica.pdf. Acesso em 18 mai. 2022.

GALLO, S. **Filosofia:** experiência do pensamento. São Paulo: Scipione, 2013.

GOMES, E. L.; D, I. M. L. **Newton da Costa:** O Homem, o Lógico e o Filósofo. EDUCAÇÃO E FILOSOFIA, [S. l.], v. 30, n. 60, p. 533–546, 2016. DOI: 10.14393/REVEDFIL.issn.0102-6801.v30n60a2016-p533a546. Disponível em: https://seer.ufu.br/index.php/EducacaoFilosofia/article/view/36406. Acesso em: 19 mai. 2022.

HELERBROCK, R. **Leis de Newton**; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/leis-newton.htm. Acesso em 07 fev. 2022;

HOLANDA, F. **O que é Lógica Matemática?** Portal da Matemática OBMEP, 2019. Disponível em https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/1xoebyf256iv.pdf acesso em 17 mar. 2021;

IRVINE, A. D. **Bertrand Arthur William Russell**. MacTutor: 1996. Disponível em https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Russell/. Acesso em 19 mai. 2022.

NEGRELLI, L. G. **A consideração de procedimentos dedutivos e indutivos na formação de professores de matemática**. (Dissertação) Mestrado em Educação. UFPR, 2000.

RUSSEL, B. **Introdução à filosofia matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020.

SARDÁ, D. **A história do ensino da filosofia no sistema escolar francês e brasileiro**.
Hist. Educ. Vol. 22, n. 56, p. 187-206. 2018. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2236-34592018000300187&lng=pt&nrm=iso&tlng=pt. Acesso em: 10 abr. 2020.

SERRES, M. **As origens da geometria**. Lisboa: Terramar, 1997.

SHAPIRO, Stewart. **Filosofia da Matemática**. Lisboa: Grupo Almedina (Portugal), 2015. 9789724418711. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9789724418711/. Acesso em: 28 jan. 2022.

SOUZA, A. C. C. de. **Aspectos históricos das Geometrias não-euclidianas**. Bolema, Rio Claro-SP, v. 8, ed. 9, 1993. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10687/7070. Acesso em: 10 jul. 2020.

The Ohio Estate University. **Stewart Shapiro**. Disponível em https://philosophy.osu.edu/people/shapiro.4. Acesso em 20 mai. 2022.