

ppgmat

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

JULIANA APARECIDA GONÇALVES

**PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO EM TAREFAS INVESTIGATIVAS
DESENVOLVIDAS NO ENSINO MÉDIO**

LONDRINA

2022

JULIANA APARECIDA GONÇALVES

**PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO EM TAREFAS INVESTIGATIVAS
DESENVOLVIDAS NO ENSINO MÉDIO**

**ADVANCED MATHEMATICAL THINKING IN INVESTIGATIVES TASKS
DEVELOPED IN HIGH SCHOOL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dra. Karina Alessandra Pessoa da Silva

LONDRINA

2022



4.0 Internacional

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do
ParanáCampus Londrina



JULIANA APARECIDA GONÇALVES

**PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO EM TAREFAS INVESTIGATIVAS
DESENVOLVIDAS NO ENSINO MÉDIO**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 30 de Setembro de 2022

Dra. Karina Alessandra Pessoa Da Silva, Doutorado - Universidade
Tecnológica Federal do Paraná
Dra. Leticia Barcaro Celeste Omodei,
Doutorado - Universidade Estadual do Paraná (Unespar)
Michelle Andrade Klaiber, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dedico este trabalho à minha família, em especial aos meus filhos Heloísa e Luís Guilherme e ao meu esposo Luiz Alberto, por todas as vezes que fiquei ausente para me dedicar à realização do mestrado.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por sempre me iluminar e me dar forças para prosseguir mesmo diante de tantos obstáculos e principalmente por colocar pessoas especiais em minha vida. Agora, tenho a oportunidade de registrar meus agradecimentos a algumas delas.

Ao meu pai, por sempre me ensinar a lutar, mesmo nas dificuldades seguir em frente, por todas as vezes que disse para estudar, ter uma profissão, pois, para pessoas humildes como nós a maior riqueza é os estudos. Obrigada Paizinho!

A minha querida mãe, guerreira, que abandona tudo para cuidar das filhas e dos netos, obrigada por cuidar da minha casa e, principalmente dos meus filhos nos momentos que tive ausente para me dedicar ao mestrado. Você foi essencial para concretização do meu sonho.

Ao meu esposo, que me incentivou a iniciar e concluir o mestrado, as palavras de acalento para prosseguir na realização deste sonho, por aguentar meu estresse e ansiedade durante todo o momento, obrigada por acreditar em mim!

A minha irmã, por todo apoio e incentivo, por comemorar comigo cada vitória e principalmente, por estar ao meu lado nos momentos de descontração e nos momentos de angústia.

A minha sogra, por me incentivar a iniciar o mestrado e por todo suporte quando necessário e o empréstimo do notebook para realizar o mestrado.

Aos meus filhos amados, que me deram forças, por eles e para eles que me propus a realizar mais esse sonho, pensando no orgulho que eles sentiriam da mãe, que batalhou mesmo frente toda dificuldade para alcançar seus objetivos. Desculpe-me por todas as vezes que os deixei com febre ou dores para me dedicar as aulas, ao grupo de estudos ou a escrita da dissertação.

A minha orientadora Prof.^a Dra. Karina Alessandra Pessoa da Silva, por toda paciência, carinho e incentivo. Obrigada por todos direcionamentos e principalmente de uma forma direta ou indireta me ajudou a acreditar em mim mesma, mesmo quando achava que não iria conseguir.

À Prof.^a Dra. Elaine Cristina Ferruzzi, por me escolher no dia da entrevista e a isso iniciei o mestrado, à minha gratidão, pelos momentos que me orientou e me tratou com carinho e amizade.

Às professoras Dra. Letícia Barcaro Celeste Omodei e Dra. Michelle Andrade Klaiber que compuseram a banca avaliadora deste trabalho, muito obrigada por aceitarem fazer parte desta pesquisa e pelas valiosas contribuições.

Obrigada aos professores do PPGMAT por todos os ensinamentos. Agradeço também, as professoras e aos colegas do grupo de estudos GEPMIT (Grupo de Estudo e Pesquisa em Modelagem Matemática, Investigação Matemática e Tecnologias), que contribuíram muito com esse trabalho, discutindo sobre a pesquisa e assuntos relacionados aos estudos abarcados aqui, além de leituras relacionadas ao ensino da matemática e pelos momentos de descontração.

Aos meus alunos que aceitaram participar desta pesquisa e a equipe do colégio que me permitiram realizar esta investigação.

Às amigas que o PPGMAT me trouxe, Rosimeire e Josiane, pelas palavras de incentivo, pela troca de experiência, pelos momentos de risadas e por compartilhar os momentos de angústia.

Enfim, agradeço a toda minha família, amigos e todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram com esta pesquisa, que souberam entender minhas ausências e meus momentos de incertezas.

Dever de Sonhar

*“Eu tenho uma espécie de dever, dever de sonhar, de sonhar sempre,
pois sendo mais do que um espetáculo de mim mesmo,
eu tenho que ter o melhor espetáculo que posso.
E, assim, me construo a ouro e sedas, em salas
supostas, invento palco, cenário para viver o meu sonho
entre luzes brandas e músicas invisíveis”.*

(Fernando Pessoa)

GONÇALVES, Juliana Aparecida. **Pensamento Matemático Avançado em Tarefas Investigativas desenvolvidas no Ensino Médio**. 2022. 167p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo “*evidenciar e discutir indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado mobilizados por estudantes do ensino médio ao desenvolver tarefas investigativas*”. Para isso fundamentamos no Ensino por Investigação, especificamente em Tarefas Investigativas e no Pensamento Matemático Avançado (representação e abstração). A pesquisa é qualitativa de cunho interpretativo, as análises foram subsidiadas nos registros escritos e nas transcrições dos áudios e vídeos, referentes a dois grupos (A e D). Para isso, foram desenvolvidas e analisadas três tarefas investigativas – compra do aparelho celular (Tarefa 1), preço do gás e energia (Tarefa 2), quanto vale o salário mínimo? (Tarefa 3) –, aplicadas no primeiro semestre de 2022 em uma turma da 2ª série do Ensino Médio, no componente curricular de Educação Financeira em um colégio público do estado do Paraná. Na Tarefa 1 foram abarcados juros simples e juros compostos para a compra de um aparelho celular, segundo condições estabelecidas pelos estudantes; a Tarefa 2, a partir da evolução nos valores do gás de cozinha e do quilowatts horas presentes em faturas de energia elétrica, os estudantes investigaram possíveis projeções e comprometimentos no orçamento familiar; já para a Tarefa 3, os estudantes investigaram o percentual de comprometimento do salário mínimo com a compra de uma cesta básica. Ao analisarmos as três tarefas chegamos a algumas conclusões e reflexões que revelaram indícios de todos os processos do Pensamento Matemático Avançado, com relação aos processos de representação, evidenciamos indícios de representação simbólica, representação mental, visualização e intuição, mobilizados pelos dois grupos (A e D) nas três tarefas. Os processos de mudança de representação e tradução foram mobilizados pelo grupo A em todas as tarefas, já o grupo D mobilizou apenas na tarefa 2. O processo de modelação foi evidenciado com menos frequência: na tarefa 1 não evidenciamos indícios deste processo, na tarefa 2 foi mobilizado pelos dois grupos (A e D) e na tarefa 3 apenas pelo grupo A. Quanto aos processos ligados à abstração, evidenciamos indícios de generalização nas tarefas 2 e 3 feitas pelo grupo A, já o grupo D apresentou indícios apenas na tarefa 2; a síntese foi mobilizada pelo grupo A na resolução das três tarefas e pelo grupo D apenas na tarefa 3. Concluimos que Tarefas Investigativas contribuem com o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, relacionado aos processos de representação e abstração. Como resultado desta pesquisa elaboramos o Produto Educacional intitulado “*Tarefas Investigativas para a Educação Financeira: alguns encaminhamentos*” composto por três sugestões de Tarefas Investigativas, envolvendo temáticas do componente curricular de Educação Financeira e alguns encaminhamentos com o objetivo de auxiliar professores que pretendem implementar em suas aulas tarefas de caráter investigativo.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino por Investigação; Pensamento Matemático Avançado; Representação; Abstração; Educação Financeira.

GONÇALVES, Juliana Aparecida. **Advanced Mathematical Thinking in Investigative Tasks developed in High School**. 2022. 167p. Dissertation (Mastering in Mathematics Teaching) – Federal Technological University of Paraná, Londrina, 2022.

ABSTRACT

This research aimed to “show and discuss evidence of Advanced Mathematical Thinking processes mobilized by high school students when developing investigative tasks”. For this, we base ourselves on Teaching by Investigation, specifically on Investigative Tasks and on Advanced Mathematical Thinking (representation and abstraction). The research is qualitative with an interpretative nature, the analyzes were supported by written records and transcripts of audios and videos, referring to two groups (A and D). For this, three investigative tasks were developed and analyzed – purchase of a cell phone (Task 1), price of gas and energy (Task 2), how much is the minimum wage? (Task 3) – , applied in the first semester of 2022 in a class of the 2nd grade of High School, in the curricular component of Financial Education in a public school in the state of Paraná. In task 1 simple and compound interest were included for the purchase of a cell phone, according to conditions established by the students; Task 2, based on the evolution in the values of cooking gas and kilowatts hours present in electricity bills, the students investigated possible projections and commitments in the family budget; for Task 3, the students investigated the percentage of commitment of the minimum wage to the purchase of a basic needs package. By analyzing the three tasks, we came to some conclusions and reflections that revealed evidence of all the processes of Advanced Mathematical Thinking, in relation to the representation processes, we evidenced evidence of symbolic representation, mental representation, visualization and intuition, mobilized by the two groups (A and D) in the three tasks. The processes of change of representation and translation were mobilized by group A in all tasks, while group D mobilized them only in task 2. The modeling process was evidenced less frequently: in task 1 we did not show evidence of this process, in task 2 it was mobilized by both groups (A and D) and in task 3 only by group A. As for the processes related to abstraction, we showed signs of generalization in tasks 2 and 3 performed by group A, while group D showed signs only in task 2; while the synthesis was mobilized by group A in solving the three tasks and by group D only in task 3. We concluded that Investigative Tasks contribute to the development of Advanced Mathematical Thinking, related to the processes of representation and abstraction. As a result of this research, we developed the Educational Product entitled "Investigative Tasks on Financial Education: some referrals" composed of three suggestions for Investigative Tasks, involving themes from the curricular component of Financial Education and some referrals with the objective of helping teachers who intend to implement in their classes investigative based tasks.

Keywords: Mathematics Education; Teaching by Investigation; Advanced Mathematical Thinking; Representation; Abstraction; Financial education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Características da Tarefa no contexto do ensino por investigação	24
Figura 2 - Dimensão da tarefa	26
Figura 3 - Características das Tarefas	29
Figura 4 - Estágios dos Processos de Aprendizagem	38
Figura 5 - Interação dos Processos do Pensamento Matemático Avançado	39
Figura 6 - Capa do Produto Educacional	60
Figura 7 - Momento da introdução da Tarefa 1	63
Figura 8 - Resposta à questão 1 “Grupo A”	66
Figura 9 - Momento da pesquisa “Grupo A”	66
Figura 10 - Valor do aparelho de celular “Grupo A”	67
Figura 11 - Resposta à questão 5 - Representação decimal da taxa na expressão algébrica de juros compostos “Grupo A”	69
Figura 12 - Resposta à questão 5 - Organização em tabela “Grupo A”	71
Figura 13 - Resposta à questão 5 – Expressões Matemáticas “Grupo A”	71
Figura 14 - Resposta à questão 5 - Gráfico “Grupo A”	73
Figura 15 - Resposta à questão 5 - Síntese “Grupo A”	73
Figura 16 - Resposta à questão 6 - “Grupo A”	74
Figura 17 - Resposta à questão 1 - “Grupo D”	75
Figura 18 - Valor do aparelho de celular - “Grupo D”	77
Figura 19 - Resposta à questão 5 - Generalização - "Grupo D"	80
Figura 20 - Resposta à questão 5 - Organização em tabela - “Grupo D”	81
Figura 21 - Transcrição da resposta à questão 5 - Organização em tabela - “Grupo D”	82
Figura 22 - Resposta à questão 5 - Gráfico - “Grupo D”	83
Figura 23 - Resposta à questão 6 - “Grupo D”	84
Figura 24 - Charge da "Tarefa 2"	89
Figura 25 - Momento da introdução da Tarefa 2	89
Figura 26 - Momento da iniciação da resolução da Tarefa 2	91
Figura 27 - Coleta dos dados “Tarefa 2”	92
Figura 28 - Resposta à questão c - T2 “Grupo A”	93
Figura 29 - Resposta à questão d - T2 “Grupo A” - Modelação	95
Figura 30 - Resposta à questão d - T2 “Grupo A” - Mudança de representação e tradução... ..	97
Figura 31 - Resposta à questão d - T2 “Grupo A” - Generalização	99

Figura 32 - Resposta à questão d - T2 “Grupo A”.....	100
Figura 33 - Momento resolução da questão e - Grupo A.....	104
Figura 34 - Resposta à questão e - T2 “Grupo A”.....	105
Figura 35 - Resposta à questão a e b - T2 “Grupo D”	106
Figura 36 - Momento da análise dos dados - Grupo D.....	107
Figura 37 - Resposta à questão d - T2 “Grupo D”.....	111
Figura 38 - Organização em tabela - Resposta à questão d - T2 “Grupo D”	112
Figura 39 - Resposta à questão d - T2 “Grupo D”.....	113
Figura 40 - Gráficos - Resposta à questão d - T2 “Grupo D”	114
Figura 41 - Gráficos - Resposta à questão d - T2 “Grupo D”	115
Figura 42 - Análise dos gráficos - Resposta à questão d - T2 “Grupo D”	116
Figura 43 - Resposta à questão e - T2 “Grupo D”.....	117
Figura 44 - Leitura da Tarefa 3 “Grupo A”.....	122
Figura 45 - Momento da pesquisa - T3 “Grupo A”	123
Figura 46 - Resolução da questão 1 - T3 “Grupo A”.....	125
Figura 47 - Resolução da questão 2 - T3 “Grupo A”.....	126
Figura 48 - Resolução da questão 3 letra b - T3 “Grupo A”.....	128
Figura 49 - Resolução da questão 3 - letra a - T3 “Grupo A”	129
Figura 50 - Resolução da questão 1 - T3 “Grupo D”.....	132
Figura 51 - Momento do registro da questão 2 – T3 “Grupo D”	133
Figura 52 - Resolução da questão 2 - T3 “Grupo D”.....	134
Figura 53 - Resolução da questão 3 - letra a - T3 “Grupo D”	135
Figura 54 - Resolução da questão 3 - letra b - T3 “Grupo D”.....	136
Figura 55 - Evidência dos Processos de Representação	145
Figura 56 - Evidência dos Processos de Mudança de representação.....	146
Figura 57 - Evidência dos Processos de Modelação.....	147
Figura 58 - Evidência dos Processos de Abstração	148

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Proposta de Tarefa Investigativa: Vincos em uma fita	27
Quadro 2 - Proposta de Tarefa Investigativa: Sequência de losangos.....	28
Quadro 3 - Teses e dissertações sobre o Pensamento Matemático Avançado	40
Quadro 4 - Critérios para identificação dos processos do PMA	43
Quadro 5 - Tarefas desenvolvidas	49
Quadro 6 - T1 “Compra do Aparelho de Celular”	50
Quadro 7 - Organização dos grupos “Tarefa 1”	50
Quadro 8 - T2 “Preço do gás e energia elétrica”	51
Quadro 9 - Organização dos grupos “Tarefa 2”	51
Quadro 10 - T3 “Quanto vale o salário mínimo?”	52
Quadro 11 - Organização do grupo “Tarefa 3”	52
Quadro 12 - Parâmetros para identificação dos processos do PMA	53
Quadro 13 - TAREFA 1 “Compra do Aparelho de Celular”	63
Quadro 14 - Organização dos grupos analisados – Tarefa 1.....	64
Quadro 15 - Síntese dos processos do PMA mobilizados na Tarefa 1	85
Quadro 16 - Organização dos grupos analisados – Tarefa 2.....	90
Quadro 17 - TAREFA 2 “Preço do gás e energia”	91
Quadro 18 - Comprometimento do salário (%).....	97
Quadro 19 - Síntese dos processos do PMA mobilizados na T2	118
Quadro 20 - Organização dos grupos analisados “Tarefa 3”	121
Quadro 21 - TAREFA 3 “Quanto vale o salário mínimo?”	121
Quadro 22 - Síntese dos processos do PMA mobilizados na Tarefa 3	137
Quadro 23 - Síntese dos processos do PMA mobilizados nas três tarefas	141

LISTA DE ABREVIATURAS

BCB	Banco Central do Brasil
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CF	Constituição Federal
DIEESE	Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos
ENADE	Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes
ENEF	Estratégia Nacional de Educação Financeira
INSS	Instituto Nacional de Seguro Social
IRPF	Imposto de Renda Retido na Fonte
kWh	Quilowatts hora
PCP	Princípio da Casa de Pombos
PMA	Pensamento Matemático Avançado
RIUT	Repositório Institucional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	15
1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	20
1.1 Ensino por Investigação.....	20
1.2 Pensamento Matemático Avançado	30
1.2.1 O Pensamento Matemático Avançado segundo Dreyfus	31
1.2.2 Pesquisas relacionadas ao Pensamento Matemático Avançado	39
2. ASPECTOS METODOLÓGICOS	46
2.1 Contexto de Pesquisa	46
2.2 Procedimento de Estudo	47
2.3 Metodologia	57
2.4 Sobre o Produto Educacional.....	59
3. DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS DADOS	61
3.1 Descrição e Análise da Tarefa 1 “Compra do Aparelho de Celular”	61
3.1.1 Análise do desenvolvimento da Tarefa 1 - grupo A	64
3.1.2 Análise do desenvolvimento da Tarefa 1 - grupo D	75
3.1.3 Análise local dos processos do PMA nos grupos A e D na Tarefa 1	85
3.2 Descrição e Análise da Tarefa 2 “Preço do gás e energia”	87
3.2.1 Análise do desenvolvimento da Tarefa 2 - grupo A	92
3.2.2 Análise do desenvolvimento da Tarefa 2 - grupo D	106
3.2.3 Análise local dos processos do PMA nos grupos A e D na Tarefa 2	117
3.3 Descrição e Análise da Tarefa 3 “Quanto vale o Salário Mínimo?”	119
3.3.1 Análise do desenvolvimento da Tarefa 3 - grupo A	122
3.3.2 Análise do desenvolvimento da Tarefa 3 - grupo D	130
3.3.3 Análise local dos processos do PMA nos grupos A e D na Tarefa 3	137
3.4 Análise Global das Três Tarefas	139
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS	143
REFERÊNCIAS	152
APÊNDICES	159
ANEXOS	163

INTRODUÇÃO

O ensino de matemática vem passando por mudanças no contexto escolar, contemplado por diferentes abordagens que visam a aprendizagem, tais como: Investigação Matemática, Modelagem Matemática, Etnomatemática, Resolução de Problemas e Tecnologias. O ensino de matemática trata da relevância no contexto social, suas implicações na formação do indivíduo. De acordo com Pinto e Pires (2019), o ensino de matemática vai além de ensinar conteúdos prioritários da área em si e passa pela formação e inserção do indivíduo na sociedade, visando a formação da cidadania e efetiva inclusão social.

As práticas pedagógicas em sala de aula orientam como o ensino de matemática pode influenciar a aprendizagem dos estudantes. Neste sentido é importante ações que viabilizem a interligação entre os conceitos e as práticas pedagógicas na sala de aula. Para Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021), as práticas pedagógicas devem ser de tal forma que estimulem o pensamento do aluno, fazendo com que o papel do professor seja de mediador, provocador e incentivador.

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018), defende que a aprendizagem em matemática:

Está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização (BRASIL, 2018).

O ensino por investigação contribui com o ensino de matemática, incentivando a aprendizagem dos estudantes e fortalecendo uma reflexão crítica. Para Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021), o ensino por investigação é uma tendência que abrange uma série de práticas de ensino ativas¹. Trata da investigação de uma forma ampla, abrangendo diversas disciplinas como ciências, física, química, história, etc. Esse tipo de ensino tem como principal meta promover nos estudantes diferentes processos cognitivos. Neste sentido, entendemos que

¹ As práticas de ensino ativas (metodologias ativas) são estratégias de ensino que têm por objetivo incentivar os estudantes a aprenderem de forma autônoma e participativa, por meio de problemas e situações reais, realizando tarefas que os estimulem a pensar além, a terem iniciativa, a debaterem, tornando-se responsáveis pela construção de conhecimento (Disponível em: https://professor.escoladigital.pr.gov.br/metodologias_ativas. Acesso em: 06 abr 2020).

[...] o ensino por investigação extravasa o âmbito de uma metodologia de ensino apropriada apenas a certos conteúdos e temas, podendo ser colocada em prática nas mais distintas aulas, sob as mais diversas formas e para os diferentes conteúdos. Denota a intenção do professor em possibilitar o papel ativo de seu aluno na construção de entendimento sobre os conhecimentos científicos. Por esse motivo, caracteriza-se por ser uma forma de trabalho que o professor utiliza na intenção de fazer com que a turma se engaje com as discussões e, ao mesmo tempo em que travam contato com fenômenos naturais, pela busca de resolução de um problema, exercitam práticas e raciocínios de comparação, análise e avaliação bastante utilizadas na prática científica (SASSERON, 2015, p. 58).

De acordo com Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021), o ensino por investigação é possível quando a tarefa possibilita a participação ativa do aluno no processo de construção do conhecimento, a tarefa deve ser uma situação problemática e deve gerar formulações de hipóteses e testes para a comprovação da mesma.

Pesquisas como as de Sasseron (2015), Silva e Mortimer (2012), Silva, Gerolin e Trivelato (2018), Carvalho (2017), Alves (2018) e Scarpa e Campos (2018) nos revelam potencialidades do Ensino por Investigação na Educação Básica, um ambiente propício para aprendizagem e engajamento dos estudantes, favorecendo a reflexão e autonomia. Essas pesquisas apresentam propostas que tratam de diferentes abordagens e possibilidades que podem ser inseridas em sala de aula, “[...] favorecendo a construção do conhecimento dos alunos” (ALVES, 2018, p. 6).

Tendo em vista o Ensino por Investigação com tais potencialidades, a Educação Financeira pode contribuir para ampliar a discussão e reflexão em sala de aula. Para Silva, Seki e Silva (2020), a Educação Financeira tem como objetivo educar o cidadão para administrar as finanças pessoais, além do planejamento financeiro. A BNCC propõe às escolas incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas temas do contexto do estudante, entre as temáticas encontra-se a Educação Financeira que pode abordar

[...] assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos. Essa unidade temática favorece um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro (BRASIL, 2018, p. 269).

Desta forma, concordamos que a Educação Financeira pode vislumbrar temáticas que podem “[...] promover o desenvolvimento de competências pessoais e sociais dos alunos, podemse constituir em excelentes contextos para as aplicações dos conceitos da Matemática Financeira e também proporcionar contextos para ampliar e aprofundar esses conceitos” (BRASIL, 2018, p. 269).

Nesta perspectiva, Tarefas Investigativas com temáticas envolvendo a Educação Financeira podem favorecer diferentes pensamentos. Para Ponte (2003) Tarefa Investigativa se

caracteriza pelo seu ponto de partida que pode ser uma situação aberta, ou seja, a questão não está totalmente definida, ficando a quem investiga um papel fundamental na sua concretização, sendo possível concretizar de vários modos os pontos de partida, os pontos de chegada, naturalmente são também diferentes. Desta forma, o aluno participa de forma ativa formulando questões a estudar.

A escolha por esse tipo de tarefa realizou-se após os estudos sobre Tarefas Investigativas, pautadas em Ponte (2003), Ponte, Brocardo e Oliveira (2015), Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021) e Sasseron (2015). Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2015). As Tarefas Investigativas motivam os estudantes, desenvolvendo capacidades para a construção de um conhecimento mais amplo de conceitos matemáticos facilitando a aprendizagem.

Para Baptista (2010), o ensino por investigação permite a interação entre a teoria e a prática, ocorrendo uma relação entre os conteúdos e processos, quando os alunos estão envolvidos na investigação, as tarefas permitem adquirir conhecimentos e reflexão sobre os procedimentos utilizados para resolver a situação.

Dreyfus (2002) ressalta a importância de exercícios não-triviais (sinônimo de exercícios não comuns), que estimulem a reflexão sobre a experiência matemática e tarefas que possuam potencial para mobilizar diferentes Processos de pensamento matemáticos. Esse autor afirma ainda que é importante que professores de Matemática proporcionem aos estudantes, atividades com respostas abertas no lugar de exercícios de um minuto, transferindo-lhes mais responsabilidade pelo processo de aprendizado, estimulando a independência em relação à descoberta.

Consideramos que Tarefas Investigativas oferecem oportunidades de desencadear processos de Pensamento Matemático Avançado, despertando o senso crítico e a criatividade, além de desafiadoras, estimulam o interesse dos estudantes pela aula. Observando o cenário atual, também percebemos a necessidade de estimular a realização de diferentes tarefas, promovendo aprendizagens significativas².

Bussmann, Klaiber e Silva (2017, p. 12) corroboram que tarefas com investigações “podem contemplar todos os processos do Pensamento Matemático Avançado”. Neste sentido, a natureza de uma Tarefa pode dizer muito sobre o que se espera dos estudantes e com isso analisar os processos de pensamentos desenvolvidos em sua resolução.

² Aprendizagem Significativa se caracteriza pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, e que essa interação é não literal e não arbitrária. Nesse processo, os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva (MOREIRA, 2012). Embora intencionamos que a aprendizagem significativa aconteça no contexto das aulas, não é nosso foco de análise em nossa pesquisa.

Com isso, nos pautamos em investigar o Pensamento Matemático Avançado. Estudos como os de Tommy Dreyfus e David Tall versam sobre o Pensamento Matemático Avançado, porém, apresentam algumas abordagens diferentes. Para Dreyfus (2002), o Pensamento Matemático Avançado consiste em uma gama de processos e subprocessos que interagem entre si, entre eles os processos de representação e abstração. Para o autor, o Pensamento Matemático Avançado pode estar presente até mesmo na infância, pois o que caracteriza esses processos são o grau de complexidade com a qual tais processos são tratados. Já Tall (1991) compreende que o Pensamento Matemático Avançado envolve aspectos psicológicos que podem estar associados ao contexto social em que as pessoas estão envolvidas.

Pesquisas como as de Vieira, Souza e Imafuku (2017) e Elias, Barbosa e Savioli (2011) discutem como o Pensamento Matemático Avançado vem sendo trabalhado na Educação Básica e as dificuldades encontradas pelos estudantes na transição da Educação Básica para o Ensino Superior. Os autores abordam a importância de estimular processos do Pensamento Matemático Avançado desde a Educação Básica.

Ao iniciarmos nosso trabalho, realizamos uma pesquisa na Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES. Para a pesquisa, utilizamos o termo “Pensamento Matemático Avançado”, no período de tempo de 2017 até 2021, e foram encontrados vinte e um resultados. Nesse panorama, não encontramos pesquisas que abordam o Pensamento Matemático Avançado desenvolvido com Tarefas Investigativas, em especial, no ensino médio. Após esse levantamento, percebemos que há relevância em nossos estudos que contribui para o referencial teórico do Pensamento Matemático Avançado, para o desenvolvimento do Pensamento do Pensamento Matemático Avançado em estudantes do ensino médio.

Sendo assim, buscamos em nossa investigação desenvolver em sala de aula tarefas que mobilizem nos estudantes diferentes processos cognitivos que tratem de temas que contemplem o seu cotidiano que possam servir de debate e reflexão a situações sociais e econômicas, ou seja, tarefas de caráter investigativo com potencialidades para desenvolver o Pensamento Matemático Avançado - PMA.

Por conseguinte, esta pesquisa abrange algumas reflexões do Pensamento Matemático Avançado, pautadas no estudo de Dreyfus (2002), com o objetivo de: *Evidenciar e discutir indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado mobilizados por estudantes do ensino médio ao desenvolver tarefas investigativas*. Para orientar nossas análises delineamos as seguintes questões norteadoras:

1. Que processos de representação se fazem presentes quando alunos da 2ª série do Ensino Médio desenvolvem tarefas investigativas?
2. Que processos de abstração são evidenciados no desenvolvimento de tarefas investigativas por alunos da 2ª série do Ensino Médio?

Os instrumentos de pesquisa foram aplicados no primeiro semestre de 2022 em uma turma da 2ª série do Ensino Médio, no componente curricular de Educação Financeira em um colégio público do estado do Paraná. Desenvolvemos três Tarefas Investigativas, em uma análise qualitativa de cunho interpretativo com a intenção de trazer reflexões no âmbito da educação financeira e suas potencialidades para desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, ampliando conceitos matemáticos, o pensamento crítico e a consciência sobre as ações dos estudantes.

Esta dissertação está estruturada em quatro capítulos, além desta introdução:

- no capítulo 1 apresentamos o quadro teórico no qual nos pautamos para estudo e discussão de nossa pesquisa, baseado em Ponte (2003), Ponte, Brocardo e Oliveira (2015), Ferruzzi, Borsoi e Silva (2021) e Sasseron (2015) para tratar do ensino por investigação e de Tarefas Investigativas e Dreyfus (2002) como referencial teórico para estudo do Pensamento Matemático Avançado;
- no capítulo 2 contemplamos os aspectos metodológicos, apresentando o contexto da investigação, os sujeitos de pesquisa, os encaminhamentos da coleta de dados, a metodologia escolhida, o instrumento e sua aplicação e a apresentação do Produto Educacional;
- no capítulo 3 é apresentada a análise das três Tarefas Investigativas, em que abarcamos os objetivos da tarefa, a resolução dos estudantes e como evidenciamos indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado, nas análises local de cada tarefa, bem como a análise global das três tarefas;
- no capítulo 4 trazemos as considerações finais, conclusões e reflexões acerca da nossa investigação.

O texto é finalizado com as referências utilizadas no corpo do texto e os apêndices.

Neste contexto, organizamos o produto educacional “*Tarefas Investigativas para a Educação Financeira: alguns encaminhamentos*”, com o objetivo de auxiliar professores que pretendem utilizar esse tipo de tarefa para evidenciar nos estudantes os processos do Pensamento Matemático Avançado mobilizados por eles.

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentamos os fundamentos teóricos que subsidiam o desenvolvimento de nossa pesquisa. No tópico 1.1 tratamos do ensino por investigação na matemática caracterizando Tarefas Investigativas. No tópico 1.2 apresentamos pesquisas relacionadas ao Pensamento Matemático Avançado e o quadro teórico do Pensamento Matemático Avançado com base em Dreyfus (2002).

1.1 Ensino por Investigação

No contexto da sala de aula, de modo geral, vivemos uma preocupação constante: como ensinar matemática de forma significativa e atraente para estudantes que vivem numa era digital, com contato frequente com um banco de informações? Essa problemática se tornou cada vez maior com o passar dos anos. Como afirmam Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021):

Até pouco tempo, apresentar um conceito científico, um procedimento e resolução de exercícios ou uma definição era considerada sinônimo de ensinar. Este entendimento possuía um significado socialmente apropriado, em um determinado espaço de tempo, considerando que as informações eram pouco acessíveis e limitadas a um número restrito de indivíduos (FERRUZZI; BORSSOI; SILVA, 2021, p. 2).

Atualmente ensinar matemática não é a mais fácil das tarefas, para tanto, é necessário desvincular-se do ensino tradicional e investigar práticas pedagógicas mais atraentes para o contexto de ensino. Geralmente a prática realizada no ensino tradicional é a realização de uma ampla lista de exercícios de fixação, propondo métodos de resolução de forma mecânica sem sentido para o estudante, que apenas memoriza não entendendo a relevância destes exercícios para seu cotidiano. Para Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021), esse tipo de prática em sua maioria serve para “treinar” conceitos já abordados em sala de aula com os estudantes e consolidar conhecimentos. Neste contexto:

É notório que, normalmente, as aulas de matemática são centradas no professor, que expõe os conteúdos na lousa ou utiliza o projetor multimídia. O docente “passa o conhecimento”, faz demonstrações, expõe propriedades e regras, muitas vezes, sem oportunizar algum tipo de questionamento ou permitir inferência dos alunos. Sob essas condições, não há espaços para reflexão e discussão (ZUIN; FERREIRA, 2018, p. 88).

Todavia, entendemos que é importante o professor considerar uma prática adequada ao assunto e objetivo que pretende alcançar, como mobilizar diferentes pensamentos na mente dos estudantes. Desta forma, “[...] uma determinada prática pedagógica pode ser mais adequada para trabalhar determinado conteúdo e pode não ser para outro” (FERRUZZI; BORSSOI;

SILVA, 2021, p. 3), além disso as práticas pedagógicas podem favorecer o raciocínio e reflexão do indivíduo.

Dentre as diferentes metodologias que podem ser utilizadas no ensino da matemática, abordamos nesta pesquisa o Ensino por Investigação, mais especificamente Tarefas Investigativas. Mas em que consiste a ação de investigar? Corroboramos com Ponte (2003) que investigar não significa necessariamente lidar com problemas na fronteira do conhecimento nem com problemas de grande dificuldade, mas significa, trabalhar a partir de questões que nos interessam, que sejam desafiadoras, e que no seu desenvolvimento organizado conseguimos clarificar e chegar a uma solução.

Para Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021), o Ensino por Investigação não se trata de uma prática pedagógica, mas uma abordagem didática que abrange diversas práticas pedagógicas em que o estudante não é apenas um sujeito passivo. “É com foco em uma proposta diferenciada para a sala de aula, colocando o aluno como agente ativo da aprendizagem, que um trabalho investigativo pode colaborar para conduzir discussões produtivas, propiciando uma aprendizagem mais efetiva” (FERREIRA; ZUIN, 2018, p. 88).

Grandy e Duschl (2007) defendem que o ensino por investigação ganha espaço nos currículos pelos objetivos de levar os estudantes a realizarem investigação e propiciar entre os estudantes uma compreensão sobre o que seja a investigação.

Sasseron (2015) entende que o ensino por investigação extravasa o âmbito de uma metodologia de ensino apropriada apenas a certos conteúdos e temas, podendo ser utilizada em diferentes aulas, metodologias e conteúdos. Esses encaminhamentos também são considerados por Silva, Vertuan e Silva (2018). Os autores apontam em seus estudos a vinculação do ensino por investigação em uma atividade de modelagem matemática, em que “as configurações para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, possibilitam criar um ambiente investigativo próprio daquele permeado no ensino por investigação” (SILVA; VERTUAN; SILVA, 2018, p. 55) para abordar conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral com estudantes de Licenciatura em Química que fazem uso de conceitos e procedimentos próprios daqueles estudados no curso. Nesse entendimento, o ensino por investigação pode ser tratado com diferentes abordagens, integrado a outras metodologias e diferentes disciplinas.

Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021) caracterizam o ensino por investigação como uma tendência que abrange uma série de práticas de ensino ativas. Sasseron (2015) configura o ensino por investigação como uma abordagem didática, que pode estar associada a qualquer recurso de ensino desde que o processo de investigação seja colocado em prática e realizado pelos estudantes com a mediação do professor. Nesse sentido entendemos o ensino por

investigação como uma “abordagem didática”, que se configura pelo seu caráter investigativo e pelos encaminhamentos que podem ser feitos pelo professor.

Fonseca (2008), ao abarcar o ensino por investigação, dá ênfase ao papel do professor que deve ter bem claro em elencar qual é sua meta, o que pretende atingir com seus estudantes, se pretende que entendam o que está sendo ensinado. Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021) concordam que o papel do professor se estende por todo o processo com a finalidade de atingir os diferentes modos de aprendizagens dos estudantes e diferentes tópicos de estudos. Os encaminhamentos do professor podem ser derivados de suas metas e, a partir disto, propor investigações que surjam de “[...] uma forma natural ao trabalhar em muitos tópicos da matemática e permitir que os estudantes usem conceitos, representações, ideias e procedimentos que já conhecem” (PONTE, 2020, p. 5). Um encaminhamento importante do professor é levantar questionamentos e hipóteses que

valorizem pequenas ações do trabalho e compreenda a importância de colocá-las em destaque como, por exemplo, os pequenos erros e/ou imprecisões manifestados pelos estudantes, as hipóteses originadas em conhecimentos anteriores e na experiência de sua turma, as relações em desenvolvimento (SASSERON, 2015, p. 58).

Todavia corroboramos com as assertivas de Ponte (2020, p. 5) de que o “professor precisa encontrar um ponto de equilíbrio entre seguir ordenadamente a sequência planejada de perguntas e avaliar resultados imprevistos das investigações dos alunos que podem promover ainda mais o seu desenvolvimento matemático”. Neste sentido, ao propor uma Tarefa Investigativa, Ponte (2020) apresenta algumas questões que devem ser feitas pelo professor na organização da tarefa, incluindo a tomada de decisões relacionadas ao tempo, organização e gerenciamento da turma, como:

- por quanto tempo a turma trabalhará nisso?
- os trabalhos serão feitos individualmente, em pequenos grupos ou a turma inteira?
- como os alunos obterão *feedback* sobre a tarefa realizada?

Para Ponte (2020), ao fazer isso, o professor participa de todo o processo formulando objetivos, metodologias e estratégias, reformulando por meio da reflexão sobre a prática. Ao entregar uma tarefa “[...] o objetivo do professor é envolver os alunos” (PONTE, 2020, p. 5) em sua resolução. Durante a resolução da tarefa, o professor deve apoiar as investigações, enquanto os estudantes fazem perguntas, não fornecendo respostas prontas, mas estimulando-os a buscar informações a fim de justificar as soluções encontradas. Seguindo esses procedimentos, “[...] O professor deve revelar de forma consistente uma atitude investigativa

na aula para ter uma influência positiva na curiosidade dos estudantes” (PONTE, 2020, p. 5).

Desse modo, entendemos que o encaminhamento do professor não se limita a uma sequência que deve ser seguida à risca, seus encaminhamentos ao iniciar uma tarefa, ao realizar uma introdução que podemos considerar como convite, já é o início das ações feitas pelo professor para tornar a Tarefa Investigativa e no decorrer do desenvolvimento da tarefa o professor deve promover discussões que possibilitem ao aluno investigar a situação. Ponte (2020) apresenta um termo que muito reflete nos encaminhamentos do professor a “flexibilidade” para conduzir uma Tarefa Investigativa.

No entanto, para que a Tarefa realmente seja de caráter investigativo, também é preciso atenção às ações realizadas pelos estudantes. Nesse momento podemos levantar um questionamento: será que os estudantes estão envolvidos na resolução da Tarefa? A participação ativa dos estudantes pode ser uma resposta à proposta para desenvolvimento da atividade, “[...] conduzidos pela sua própria curiosidade, interesse e capacidade para compreender uma observação ou resolver um problema” (BAPTISTA, 2010, p. 92). Assim, quando os estudantes estão envolvidos em uma tarefa investigativa

podem reconhecer problemas e usar estratégias pessoais, coerentes com os procedimentos da ciência, na sua resolução; desenvolver a capacidade para planejar experiências que permita verificar uma hipótese, assim como usar a observação; colaborar em grupo na planificação e execução dos trabalhos; participar ordeiramente e ativamente nos debates, dando argumentos e respeitando as ideias dos outros; realizar os trabalhos de laboratório com ordem, limpeza e segurança; ter uma atitude crítica; elaborar documentos escritos sobre os resultados obtidos, usando de forma correta a linguagem própria e a científica (BAPTISTA, 2010, p. 91-92).

Neste sentido, como apregoam Skovsmose (2000) e Zompero e Laburú (2011), o ensino se caracteriza como investigativo se os alunos aceitam o convite para investigar, é necessário o interesse por parte deles, para que, assim, possam investigar a situação com perseverança, testar conjecturas, procurar com atenção, indagar e buscar provas para suas descobertas. Esse ambiente investigativo é chamado por Skovsmose (2000), de *cenário para investigação*, porém a realização da investigação depende da aceitação dos estudantes.

Cabe ao professor despertar o interesse dos estudantes com a apresentação do tema, uma introdução que pode contribuir “[...] para que o trabalho progrida mais depressa” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006, p. 28). Porém é necessário por parte do professor cuidado para que não limite o aluno com direcionamentos como “o que é para fazer”. Esse encaminhamento poderá “condicionar a exploração a realizar pelos alunos” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006, p. 28).

Para Oliveira, Segurado e Ponte (1996), para que uma tarefa possa ser caracterizada como investigativa, é necessário que ela seja desafiadora e que os métodos de resolução e as respostas não aconteçam de imediato, como ocorrem em exercícios. Na literatura há caracterizações para problemas e exercícios. Para Ponte (2005), problema abrange sempre um grau de dificuldade notável, um problema pode ser excessivamente difícil levando o aluno a desistir rapidamente, no entanto, se o problema for excessivamente acessível, então não será um problema, mas, sim um exercício.

Por fim, outra característica citada por Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021) é a possibilidade de a tarefa propor elaboração de conjecturas, testes e provas ou demonstrações, esta busca proporcionar o desenvolvimento da capacidade de observação, síntese e generalização. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), neste momento:

[...] os alunos são levados a começar a gerar (mais) dados e a organizá-los, e só depois começam a conseguir formular questões. Por vezes, as conjecturas surgem logo na sequência da manipulação desses dados. Por sua vez, o surgimento de conjecturas leva à necessidade de fazer testes, o que poderá exigir que sejam gerados ainda mais dados (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2006, p. 31).

Desta forma, o ensino por investigação envolve a participação efetiva do professor e o envolvimento ativo por parte dos estudantes que, a partir do aceite ao convite, se deparam com situações desafiadoras, possibilitando o desenvolvimento de diferentes processos cognitivos, entre eles os propostos por Dreyfus para o Pensamento Matemático Avançado.

Considerando o exposto, podemos representar por meio de um esquema (Figura 1) os elementos pertencentes a uma Tarefa Investigativa caracterizada no contexto do ensino por investigação em que se faz necessária a figura do professor na seleção ou elaboração de uma tarefa.

Figura 1 - Características da Tarefa no contexto do ensino por investigação



Fonte: Autoras (baseado em Ferruzzi, Borssoi e Silva, 2021).

Assim, cada elemento representado no esquema possui uma característica essencial para possibilitar a tarefa no contexto do ensino por investigação. O convite é o momento em que o

professor apresenta a situação, neste momento ele observa o aceite dos estudantes para a investigação, seu aceite ou a rejeição da proposta. A situação-problema é o elemento que pode influenciar o aceite dos estudantes, a partir da situação que é proposta, que pode ser para ele um problema ou não. A partir da situação-problema e do aceite para participar ativamente da tarefa, os estudantes passam a formular questões ou não, elaborar conjecturas, sendo esse momento oportuno de diferentes representações e pensamentos matemáticos com o propósito de justificar sua solução.

Para Ponte (2003), a Tarefa Investigativa tem como objetivo trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, designando uma poderosa metáfora educativa. Neste contexto, “o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação dos seus resultados e na sua discussão e argumentação com os colegas e o professor” (PONTE, 2003, p. 10).

Baptista (2010), subsidiada em Wellington (2000), ressalta que existem diferentes tipos de Tarefas Investigativas, conforme grau de abertura e de orientação. Algumas possuem uma resposta correta, outras não; algumas podem demorar semanas ou meses, outras apenas minutos; algumas possuem situações abstratas e outras partem de situações reais. As diferentes dimensões de tarefas foram representadas por Baptista (2010) em um esquema como apresentado na Figura 2.

Figura 2 - Dimensão da tarefa



Fonte: Autoras (adaptado de Baptista, 2010).

As dimensões mostradas na Figura 2 não são independentes, como orienta Baptista (2010):

O primeiro, de professor ativo para aluno ativo, indica uma situação contínua com dois extremos. Num dos extremos, os alunos colocam as questões que orientam as suas investigações, no outro extremo, é o professor que coloca essas questões. O segundo, abertas para fechadas, representa também uma situação contínua onde existem dois extremos. Num deles, as atividades de investigação têm apenas um caminho a seguir, possibilitando a existência de uma só solução. No outro, existem várias respostas para as questões levantadas e vários caminhos a seguir. Por último, no terceiro eixo, num dos extremos, têm-se atividades diretas e estruturadas, enquanto o outro diz respeito a atividades indiretas e não estruturadas (BAPTISTA, 2010, p. 94).


Considerando o ensino por investigação apresentamos como exemplo propostas de algumas tarefas caracterizadas por “Tarefas Investigativas”. Vale ressaltar que essas tarefas não foram analisadas e discutidas nesta pesquisa, foram implementadas pela professora pesquisadora no ano de 2021, analisadas e discutidas em artigos para eventos e serviram como ensaio para esta investigação. A discussão das tarefas será pautada em Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021) e Baptista (2010).

A proposta de tarefa apresentada no Quadro 1 pode ser considerada como fechada, pois possui apenas uma resposta correta, é estruturada, então podemos considerar seu grau de investigação como fechado.

Quadro 1 - Proposta de Tarefa Investigativa: Vincos em uma fita

Imagine uma longa e fina tira de papel esticada. Agora dobre no meio de modo que a ponta da extrema direita fique junto com a ponta da extrema esquerda. Pressione para formar vinco. Repita esta operação na nova fita mais quatro vezes.

- Quantos vincos existem?
- Quantos vincos haverá se a operação for repetida 10 vezes?
- Quantas dobras haverá se a operação for repetida n vezes?



Fonte: Mota et al. (2021, p. 6).

Observe que a primeira questão já possui uma resposta, dada como correta, a forma como o estudante chegará à solução é indiferente neste caso, ele poderá fazer as dobras em papel, imaginar as dobras (sem o auxílio do material concreto), realizar cálculos matemáticos, utilizar software entre outros meios, porém encontra uma resposta. Em relação aos sujeitos, podemos considerar o estudante como sujeito ativo durante o desenvolvimento da tarefa. Mesmo com uma situação de investigação mais fechada (com uma resposta correta), os estudantes podem utilizar diferentes métodos para encontrar a solução. No que tange às orientações, o professor pode fazer a introdução da tarefa como considerada por Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021), que consiste em uma característica do ensino por investigação, que corresponde ao momento do convite aos estudantes. Após esse momento, o professor pode observar e deixar os estudantes seguirem os caminhos que melhor satisfaçam a situação, podem descobrir por meio de testes, conjecturas e demonstração, como chegar na solução da tarefa. A tarefa é considerada como investigativa, por ser um problema para o estudante, neste caso ele não consegue chegar de imediato à solução.

Esta tarefa (Quadro 1) foi desenvolvida em diferentes turmas do ensino médio, porém nenhuma das turmas conseguiu resolvê-la em menos de uma aula. Além disso, a tarefa estimulou o desenvolvimento de diferentes conceitos, proporcionando diferentes pensamentos.

A proposta apresentada no Quadro 2 tem como objetivo abordar uma tarefa mais aberta, menos estruturada.

Quadro 2 - Proposta de Tarefa Investigativa: Sequência de losangos

Observe a sequência de figuras a seguir:

Fig.1 Fig.2 Fig.3 ... Fig.n

- Você observou algum padrão? Investigue.

Fonte: Autoras.

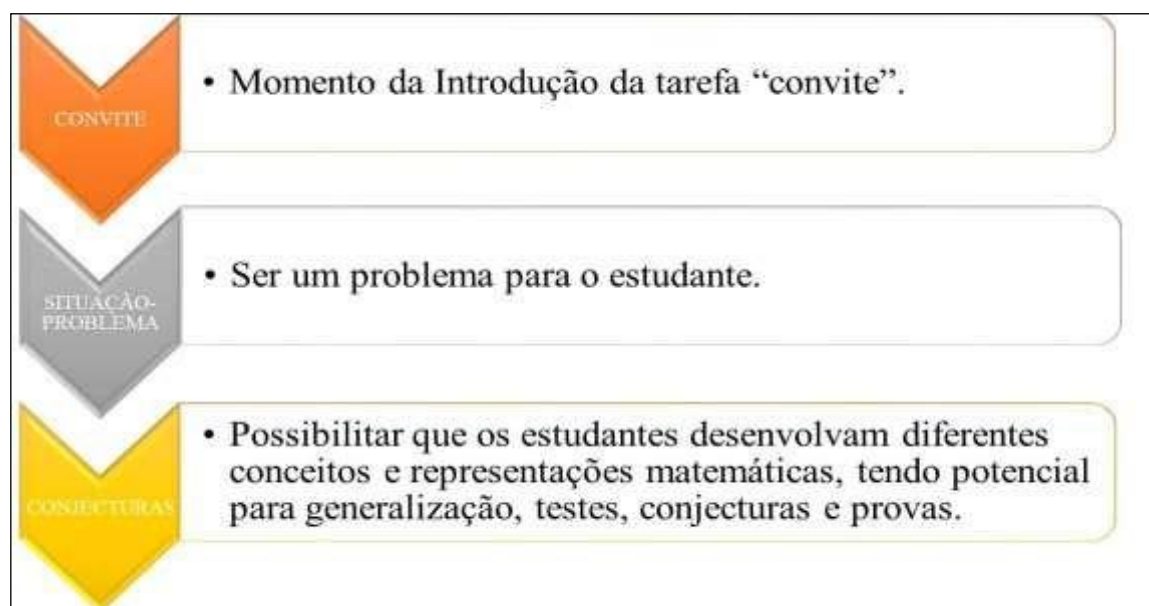
Consideramos a proposta de tarefa supracitada como menos estruturada do que a apresentada no Quadro 1. Nesta tarefa, o professor não estrutura o que espera do estudante, há menos questionamentos apresentados no corpo do texto. Para esta mesma tarefa estudantes podem encontrar diferentes soluções, alguns podem se prender em investigar a quantidade de losangos em cada figura, sua proporção, outros podem investigar a quantidade de losangos em cada linha, ou em cada coluna, ficando aberta para investigação. Dependendo dos conhecimentos prévios, os estudantes podem fazer representações gráficas, tabulares, aplicar conceitos, utilizar planilhas, etc. É evidente que para a investigação ocorrer de fato depende dos encaminhamentos do professor, qual será seu suporte e condução para que os estudantes investiguem a situação. Esta tarefa pode permitir que os estudantes desenvolvam diferentes processos cognitivos.

Podemos considerar que esta tarefa tem potencialidades para ser caracterizada como tarefa investigativa, pois os estudantes não encontraram de antemão uma solução. A mesma tarefa também foi aplicada no primeiro e terceiros anos do ensino médio e os estudantes levaram

aproximadamente 50 minutos para chegar a uma conclusão sobre a solução, já que esta não possui apenas uma resposta correta.

Em uma discussão geral, referente às propostas de tarefas investigativas (Quadro 1 e Quadro 2), ambas foram desenvolvidas³ pela pesquisadora em diferentes turmas do ensino médio e podemos considerá-las como investigativas, pois possuem algumas características em comum, conforme apresentado no esquema da Figura 3.

Figura 3 - Características das Tarefas



Fonte: Autoras.

Há de se considerar que devemos priorizar, na seleção das tarefas, os encaminhamentos dados aos estudantes, em que o professor tem um papel essencial para tornar a Tarefa Investigativa ou não. Permitir que os estudantes discutam, analisem, façam reflexões, escolham diferentes caminhos para a solução, pode favorecer diferentes representações matemáticas e os objetivos da aprendizagem podem ser alcançados de diversas formas, entre elas, tornar a aula mais atrativa e desafiadora. Além disso, as tarefas investigativas proporcionam um apelo “[...] à imaginação e à criatividade, requerendo capacidades que se situam muito para além do cálculo e da memorização de definições e procedimentos” (PONTE, 2003, p. 14).

Para o desenvolvimento desta pesquisa as tarefas são fundamentadas no componente curricular de Educação Financeira. Com isso, articulamos Tarefas Investigativas a temas vinculados ao contexto dos estudantes, que os mesmos tenham conhecimento sobre o tema e possam refletir sobre o assunto abordado. De modo geral, tais tarefas têm como

³ As propostas de tarefas desenvolvidas, não foram discutidas nas análises e discussão deste trabalho, foram ensaios para a respectiva pesquisa.

temáticas assuntos que abordam a situação econômica dos brasileiros como taxas, juros e condições de pagamento que afetam o orçamento. Com isso, entendemos que a articulação das tarefas, de certo modo, se aproxima de uma sequência de ensino investigativa. Segundo Sasseron (2015, p. 59), “[...] uma sequência de ensino investigativa é o encadeamento de atividades e aulas em que um tema é colocado em investigação e as relações entre esse tema, conceitos, práticas e relações com outras esferas sociais e de conhecimento possam ser trabalhados”.

Considerando um cenário investigativo, procuramos temáticas que possibilitassem aos estudantes um pensamento crítico e que sejam conscientes de suas ações, podemos dizer que esses objetivos estão em consonância com a Educação Financeira. Para Silva, Canedo e Vaz (2016), a Educação Financeira no ensino médio tem grande potencial e vai além da formação financeira, contribuindo com a formação matemática e com o desenvolvimento de cidadãos mais críticos e comprometidos com a sociedade ao seu redor. Além disso, a Educação Financeira promove “[...] conhecimentos e informações sobre comportamentos básicos que contribuem para melhorar a qualidade de vida das pessoas e de suas comunidades” (BCB, 2013; ENEF, 2017).

Subsidiadas em temáticas relativas à Educação Financeira e com a intenção de investigar sobre o Pensamento Matemática Avançado, segundo Dreyfus (2002) na Educação Básica, apresentamos no tópico seguinte o quadro teórico que lançamos mão em nossos estudos, no qual destacamos pesquisas relacionadas ao tema e características do PMA.

1.2 Pensamento Matemático Avançado

De início, tratamos de discussões acerca do Pensamento Matemático Avançado, recorrendo de estudos realizados por pesquisadores como David Tall e Tommy Dreyfus, ambos versam sobre a teoria em uma perspectiva cognitiva. Os dois autores propõem diferentes abordagens em relação ao Pensamento Matemático Avançado, diante disso, não é possível uma única definição.

Para Tall (2002), a transição da matemática elementar para a matemática avançada propõe a reconstrução cognitiva e a abstração, que ocorre através de deduções. Com isso, a mudança para o Pensamento Matemático Avançado envolve uma transição difícil. Logo, o autor defende que o pensamento matemático está presente especialmente no ensino superior.

Tall (1991) distingue o Pensamento Matemático Elementar do Pensamento Matemático Avançado pela passagem do descrever para o definir, convencer para provas lógicas baseadas

em definições. Domingos (2003) considera que o Pensamento Matemático Elementar:

Foca-se essencialmente na descrição dos objectos feita apenas com base nas suas propriedades concretas e na sua manipulação experiencial. Também parte dos processos de representação e abstração que, no nível de ensino estudado, apresentam um grau de complexidade baixo (DOMINGOS, 2003, p. 79).

Contudo, Dreyfus (1991) considera que processos do Pensamento Matemático Avançado podem estar presentes no Pensamento Elementar. A distinção entre os dois tipos de pensamento está na complexidade e na forma como se lida com ela. Para o autor não existe uma distinção clara entre os processos de Pensamento Elementar e Avançado, porém considera que o Pensamento Matemático Avançado é caracterizado pelo processo de abstração, ou seja, por meio da representação e da abstração podemos passar de um nível de pensamento para outro e, desta forma, administrar a complexidade crescente que se verifica na passagem de um modo de pensamento para o outro.

Em consonância com Dreyfus (1991), acreditamos que tópicos do Pensamento Matemático Avançado podem estar presentes no pensamento dos estudantes do ensino médio, por exemplo. Assim como o autor, entendemos que a complexidade está em como o indivíduo lida com as respectivas situações, por exemplo, o que é complexo para um estudante do ensino médio pode ser uma situação natural sem complexidade para um estudante de nível superior. Compreendemos que diferentes processos cognitivos podem ser mobilizados nos estudantes conforme a complexidade da tarefa, exigindo do estudante um esforço cognitivo maior. No próximo tópico tratamos do Pensamento Matemático segundo perspectivas de Tommy Dreyfus.

1.2.1 O Pensamento Matemático Avançado segundo Dreyfus

Para subsidiar nosso quadro teórico relativo ao Pensamento Matemático Avançado, buscamos uma definição segundo a perspectiva de Dreyfus (2002). Esse autor caracteriza o Pensamento Matemático Avançado com uma lista de processos em interação, ressalta também a importância do professor de matemática estar consciente desses processos para compreender algumas dificuldades que seus alunos apresentam. Neste ponto concordamos com o autor, o professor que tem conhecimento sobre os processos envolvidos no pensamento do estudante, consegue compreender quais as dificuldades apresentadas e como auxiliá-los na resolução das tarefas em que estão envolvidos. Com isso o professor pode propiciar aos estudantes tarefas que estimulem/favoreçam o Pensamento Matemático Avançado.

Para o autor, estudiosos estariam interessados nos processos envolvidos no

aprendizado da Matemática Avançada pelo fato de ganhar conhecimento teórico básico sobre o que está acontecendo na cabeça do estudante. Durante a realização de uma tarefa, processos cognitivos interagem, mas quais pensamentos a mente do estudante apresenta? Como estes interagem entre si? Quais pensamentos não são possíveis observar? Questões como essas podem surgir durante a análise da resolução da tarefa de um estudante. Como o professor pode auxiliá-lo ou entender quando não compreende quais são os processos de pensamento que podem ser mobilizados pelos seus estudantes? Essas e outras perguntas podem ser analisadas após a compreensão dos processos do Pensamento Matemático Avançado.

O autor também comenta sobre a importância na escolha de tarefas que estimulem e promovam no estudante a interação entre os processos cognitivos. “A reflexão sobre a própria experiência matemática é de particular importância na resolução de problemas não-triviais” (ao contrário de exercícios comuns) (DREYFUS, 2002, p. 25). As tarefas propostas em nosso trabalho são investigativas com o propósito de estimular os estudantes a desenvolverem o Pensamento Matemático Avançado e analisar os processos envolvidos na resolução. Nesta pesquisa na elaboração de cada Tarefa ou adaptação das mesmas, fomos guiadas pelas perspectivas do ensino por investigação e processos do Pensamento Matemático Avançado que poderiam ser desenvolvidos pelos estudantes ao resolver a tarefa, ou seja, na elaboração de cada tarefa houve uma intenção de desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado.

Para Dreyfus não há uma distinção clara entre muitos processos de pensamento matemático elementar ou avançado, muitos dos processos a serem considerados já estão presentes no pensamento de crianças sobre conceitos matemáticos básicos, não sendo usados exclusivamente em matemática avançada.

Uma característica distinta para o autor entre o pensamento matemático elementar e o avançado é a complexidade e como elas são abordadas. Para isso ele cita dois processos: representação e abstração. Por meio da representação e da abstração, pode-se mover de um nível de detalhamento para outro e assim administrar a complexidade (DREYFUS, 2002). Segundo Dreyfus (2002), os processos envolvidos são matemáticos e psicológicos, e em muitos casos são os dois:

Quando você constrói um gráfico de uma função, você está executando um processo matemático, seguindo certas regras que podem ser enunciadas em linguagem matemática; ao mesmo tempo, de qualquer modo, você está gerando uma imagem mental daquele gráfico; em outras palavras, você está visualizando a função de um modo que mais tarde poderá ajudá-lo a raciocinar sobre função. As imagens mentais e matemáticas estão intimamente ligadas aqui. Nenhuma pode surgir sem a outra, e elas são, de fato, geradas pelo mesmo processo; são respectivamente os aspectos matemáticos e mentais do processo. Uma ligação semelhante entre matemática e psicologia existe com relação a outros processos de Pensamento Matemático

Avançado. De fato, é precisamente esta ligação que faz os processos interessantes e relevantes para a compreensão do aprendizado e pensamento em matemática avançada (DREYFUS, 2002, p. 26, tradução nossa).

Dreyfus, em seus estudos, distingue os processos do Pensamento Matemático Avançado pelos dois processos de representação e abstração. Segundo seus pressupostos, é como se os processos fossem divididos em subprocessos.

O processo de representação tem um papel muito importante na Matemática (DREYFUS, 2002), sendo dividido em i) representação simbólica, mental, visualização e intuição, ii) mudança de representações e tradução e a iii) modelação. No processo da abstração encontra-se a i) generalização e a ii) sintetização. Dreyfus considera a generalização e a sintetização como pré-requisitos para a abstração, considerado por ele o nível mais avançado do Pensamento Matemático.

Dreyfus divide o processo de representação em: representação simbólica, representação mental, visualização e intuição. Para ele, representar um conceito significa gerar um exemplo, um espécime, uma imagem. Uma representação simbólica é externamente escrita ou falada, geralmente com o objetivo de tornar a comunicação sobre o conceito mais fácil, já a representação mental se refere a esquemas ou modelos internos de referência que a pessoa usa para interagir com o mundo externo. Isso ocorre quando pensamos naquela parte específica do mundo e pode variar de pessoa para pessoa.

Você já perguntou a matemáticos atuando em diferentes áreas o que vem a suas mentes quando eles pensam em funções? Quando você pergunta a professores e estudantes essas diferenças não se tornam apenas mais pronunciadas, mas também muito mais importantes. Por exemplo, a noção de um estudante de uma função pode estar limitada a processos (de computação ou mapeamento), enquanto o professor ensinando integrais indefinidas pode pensar na função integral como um objeto a ser transformado. Tais discrepâncias facilmente levam a situações em que estudantes são incapazes de compreender seus professores (DREYFUS, 2002, p. 31 tradução nossa).

Dreyfus (2002) considera que as representações mentais surgem das concretas, é a base para aprender e pensar matemática. Uma pessoa pode criar uma única ou várias representações mentais concorrentes para o mesmo conceito matemático.

A visualização é um processo pelo qual as representações mentais ganham forma. Um exemplo utilizado por Dreyfus são as funções: “os gráficos que são um desses objetos, fórmulas algébricas são outro, diagramas de setas e tabelas de valores” (DREYFUS, 2002, p. 31, tradução nossa). Segundo o autor, uma representação é rica se ela tem muitos aspectos ligados a determinado conceito. Uma representação é considerada desvalida se tem poucos elementos para permitir a flexibilidade em resolver problemas. Para Dreyfus várias representações mentais para o mesmo conceito podem complementar umas às outras e, finalmente, serem integradas

em uma única representação para aquele conceito.

Para Klaiber (2019), em consonância com Dreyfus (2002), um processo que possui estreita relação com a visualização é a intuição. Dreyfus (2002) considera que aprender pela intuição, pela cognição direta imediata, sem evidência do pensamento racional tem um papel crucial em qualquer sequência de processos a começar pela descoberta. O autor apresenta o seguinte exemplo em que se evidencia o processo de intuição

[...] interessado na descrição intrínseca de curvas em termos de curvatura (g) e extensão do arco (s), estive recentemente olhando elipses; baseada no periódico aumento e redução da curvatura quando acontecendo em torno da elipse, minha intuição visual me disse que uma boa tentativa seria uma função trigonométrica na forma $g=A+B\cos(ks)$ com constantes apropriadas A , B e k . A propósito, foi logo provado que essa intuição estava errada por uma análise mais detalhada que incluiu averificação de casos específicos (DREYFUS, 2002, p. 40 tradução nossa).

Desta forma, a intuição está relacionada a conceitos e procedimentos já estudados pelos estudantes em que utilizam seus pré-requisitos para solucionar problemas.

Embora seja importante ter várias representações de um conceito, sua existência por si mesma não é suficiente para permitir o uso flexível do conceito na solução de um problema. É preciso habilidade de alternar de uma representação para outra, quando a outra é mais eficiente para o próximo passo que se deseja tomar. Alternar entre as representações está associado com o processo de representação. A alternância deve sempre ser realizada entre representações existentes, ou seja, mudar de uma representação de um conceito matemático para outra (DREYFUS, 2002). Para o autor, o processo de mudança de representação está intimamente ligado à tradução. Tradução é ir de uma formulação de enunciado ou problema matemático a outra.

A modelação, segundo Dreyfus, significa construir uma estrutura ou teoria matemática que incorpore características essenciais do objeto, sistema ou processo a ser descrito. A modelação pode ser usada para estudar o comportamento do objeto ou processo que está sendo modelado (DREYFUS, 2002).

Dreyfus caracteriza processo de representação e modelação como até certo ponto análogos, mas em outro nível. Na modelação, a situação ou sistema é físico e o modelo é matemático; na representação o objeto a ser representado é a estrutura matemática e o modelo é uma estrutura mental. Deste modo, a representação está relacionada ao modelo matemático como o modelo matemático está relacionado ao sistema físico.

Para Dreyfus (2002), o processo mais importante do Pensamento Matemático Avançado é a abstração. Se um estudante desenvolve a habilidade de fazer conscientemente abstrações de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado de pensamento

matemático. Generalizar é derivar ou induzir de casos particulares, para identificar pontos em comum, para expandir os domínios da validade (DREYFUS, 2002).

Dreyfus apresenta um exemplo para a generalização, visto que um estudante pode saber pela sua própria experiência que uma equação linear com uma variável possui uma única solução e que a maioria dos sistemas de duas ou três equações lineares com duas ou três variáveis possuem uma única solução. Neste caso, ele pode generalizar para um sistema de n equações lineares em n variáveis. Contudo, com a orientação apropriada, ele pode ser conduzido a examinar o significado de a maioria para $n = 2$ e $n = 3$, com isso formular uma condição apropriada e generalizar a situação para $n > 3$. O autor destaca que neste processo é necessário identificar o que as condições para $n = 2$ e $n = 3$ têm em comum, raciocinar e por fim estabelecer que o domínio da conclusão tem uma solução única que pode ser estendido para a representação geral n . Assim, o autor considera esse exemplo importante na medida em que estabelece um resultado para grandes números de casos. Para Zazkis, Liljedahl e Chernoff (2008) formular uma generalização matemática pertinente representa uma tarefa desafiante.

Neste sentido Mata-Pereira e Ponte (2013) consideram que:

Para que os alunos desenvolvam estratégias que conduzam à formulação de generalizações válidas e adequadas, é necessário um trabalho continuado ao longo do seu percurso escolar. Nomeadamente, é necessário que seja promovida e compreendida a transição entre generalizações baseadas maioritariamente em casos particulares e observações empíricas e generalizações baseadas em propriedades ou conceitos matemáticos (MATA-PEREIRA; PONTE, 2013, p. 19).

Assim, pode-se considerar a generalização como a busca por um padrão ou regularidade, ou seja, “a procura e a observação de padrões conduz à elaboração de conjeturas e muitas das vezes à generalização [...]” (VALE, 2013, p. 69).

Sintetizar significa combinar ou compor partes de tal modo que elas formem um todo. Para Dreyfus poucos estudantes têm acesso a sintetização, pois professores acabam fazendo essa tarefa. O autor apresenta como exemplo um estudante de álgebra linear que aprende um número considerável de fatos isolados sobre ortogonalização de vetores, diagonalização de matrizes, transformações de bases, soluções de sistemas de equações lineares, entre outros, mais tarde no processo de aprendizagem espera-se que todos esses fatos não-relacionados se mesquem numa só imagem, na qual eles são incluídos e inter-relacionados.

No entanto, o autor destaca a importância de o professor propor aos estudantes problemas relevantes, que por muitas vezes estão ausentes, propondo aos estudantes exercícios padrões que não requerem síntese. Além disso, o autor destaca que estudantes do ensino médio que vão bem em matemática, acreditam que resolver um problema de matemática normalmente

levaria um minuto e não mais que dez, consideram importante a memorização para o sucesso em matemática. O que se pondera é que a síntese está presente na mente do professor e ausente na mente do estudante. Para Bertolazzi (2012) as capacidades de generalizar e sintetizar requerem uma visão dinâmica da matemática.

O processo de abstração está intimamente relacionado à generalização. Um dos principais estímulos para a abstração é a natureza geral dos resultados que podem ser obtidos. Um outro estímulo é o alcance da síntese. É possível descrever de maneira unificada um vasto número de situações que até aqui têm sido consideradas separadamente e independentes umas das outras, mas nem generalizar nem sintetizar exercem as difíceis demandas cognitivas dos estudantes como a abstração. A generalização geralmente envolve uma expansão da estrutura do indivíduo, enquanto se espera que a abstração envolva uma reconstrução mental:

Na transição de números reais para complexos, atingimos a generalização através da não insistência na ordem, mas continuamos trabalhando com objetos que são representados explicitamente usando números que podemos somar e multiplicar de um modo familiar. De um modo semelhante, um estudante pode bem aprender sobre as conexões entre cálculos de matriz e transformações de simetria plana ou espacial como transformações de eixos ou grupos de pontos cristalográficos sem renunciar a sua realização concreta explícita. A abstração, entretanto, requer desistir exatamente dessa explicitação: o estudante deve focalizar nas relações que existem entre os números para ser capaz de compreender o que é um campo, mais do que nos próprios números, e de modo semelhante para outras noções como função, grupo e espaço vetorial (DREYFUS, 2002, p. 36, tradução nossa).

O autor afirma que a abstração é um processo construtivo dependente da capacidade de isolar as propriedades e de relações entre objetos matemáticos. Tal atividade mental separa os conceitos abstratos daqueles que são irrelevantes no contexto pretendido, a estrutura se torna importante, enquanto detalhes irrelevantes são omitidos, reduzindo a complexidade da situação.

Dessa forma, um problema aberto pode levar os estudantes a abstrair partindo de muitos casos ou apenas um. Para o autor, ter vários exemplos permitirá aos estudantes identificar pontos em comum, esse é um caminho para o professor focalizar a atenção nas propriedades e relações que são importantes para a abstração pretendida e isso pode funcionar muito bem se a quantidade de informação na descrição detalhada da estrutura interna dos exemplos é limitada. Se os exemplos são muito complexos pode ser difícil atingir a focalização, então, algumas vezes é viável abstrair a partir de um único caso. Esse único caso precisa ser escolhido de modo que as propriedades e relações tenham alguma evidência, sendo úteis na atividade em que o estudante está engajado. A experiência em fazer abstrações pode ser um fator relevante para estudantes que já tenham uma boa noção do conceito que está sendo estudado, não dependendo necessariamente de muitos exemplos, antes de serem capazes de compreender uma definição.

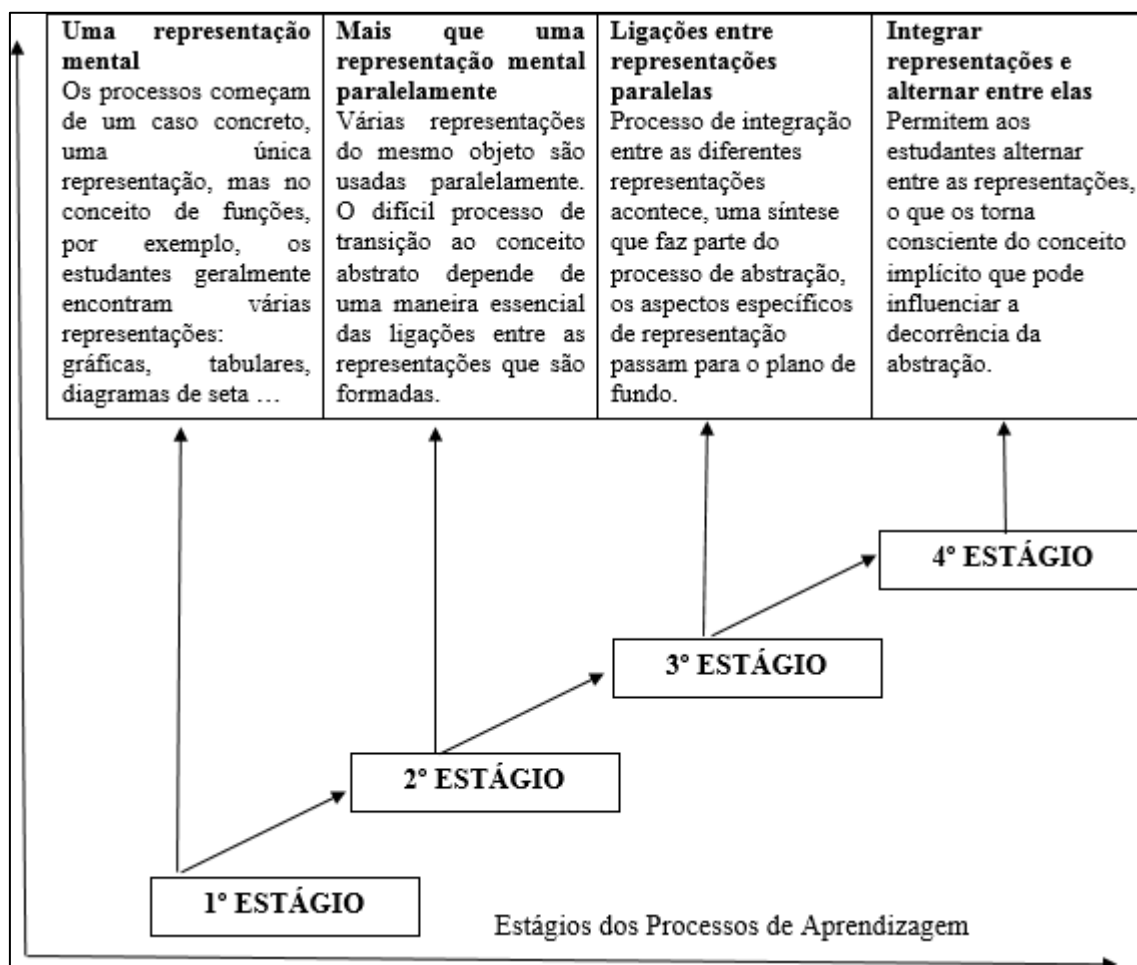
Em pesquisa realizada por Klaiber *et al.* (2019, p. 63), foi evidenciado que poucos estudantes manifestam processos de abstração, “[...] processo esse tão necessário para a aprendizagem de conteúdos matemáticos avançados [...]”. Diante disso, entendemos que conceitos devem ser propostos com o objetivo de estimular o processo de abstração, em que

[...] permite que, além de utilizar regras e manipulações em álgebra e aritmética com sucesso, por exemplo, o estudante tenha habilidades em desenvolver relações entre os conceitos que estão sendo trabalhados em uma determinada situação, assim como, realizar conexões com outros conceitos em diferentes contextos (KLAIBER *et al.*, 2019, p. 50).

Dreyfus sustenta que os processos de representação e abstração estão ligados, porém em direções opostas: de um lado um conceito pode ser abstraído de várias representações, de outro as representações são sempre representações de alguns conceitos mais abstratos. Quando uma única representação de um conceito é usada, a atenção pode ser focalizada apenas nela ao invés do objeto abstrato, mas quando várias representações são consideradas paralelamente, a relação com o conceito abstrato implícito se torna importante.

Segundo Dreyfus, o pensamento de matemáticos e estudantes de matemática é fortalecido se esses são capazes de focalizar mentalmente em uma determinada representação como a visual, e ser mais fortalecidos quando alcançam várias representações paralelamente. Neste caso há uma complementaridade entre os aspectos matemáticos e os cognitivos da representação de estruturas matemáticas, então processos de aprendizado podem ser vistos. Neste sentido, Dreyfus apresenta quatro estágios como mostra o esquema na Figura 4. No esquema, as setas indicam a forma que os estágios podem ocorrer na mente do estudante. Após os quatro estágios relacionados, o estudante passa a ter pensamento abstrato do conceito tratado.

Figura 4 - Estágios dos Processos de Aprendizagem

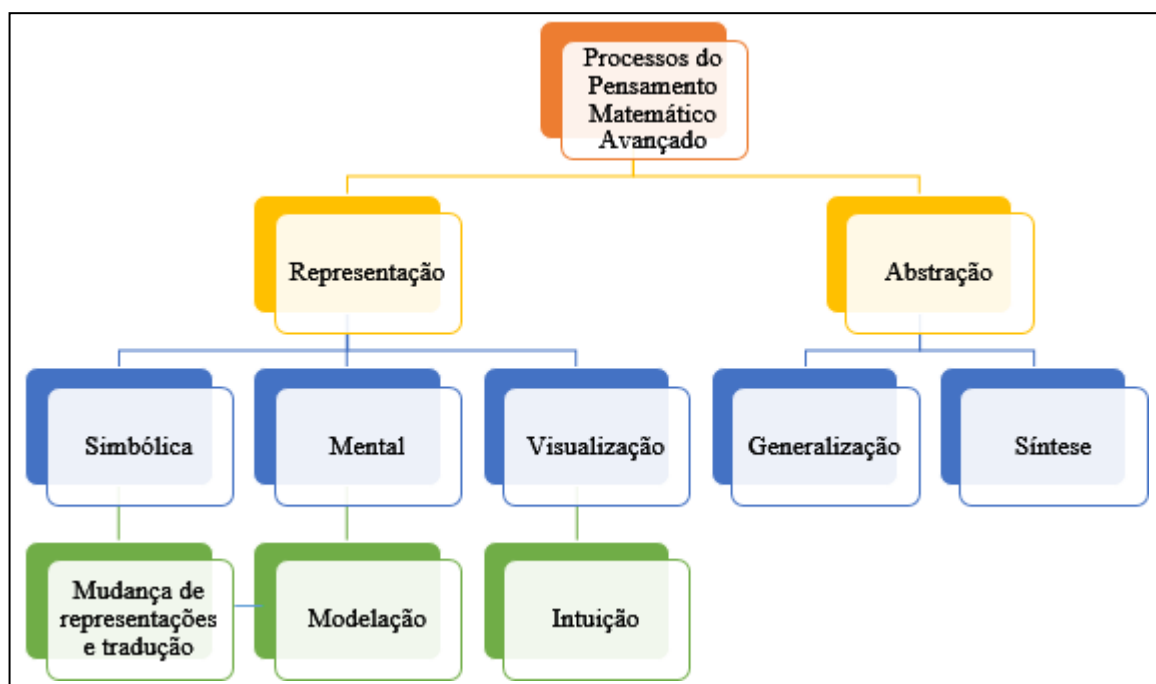


Fonte: Autoras (baseado em Dreyfus, 2002).

Os processos de representação e abstração são considerados por Dreyfus os mais importantes do Pensamento Matemático Avançado, porém ocorrem outros processos de ligações. Em nosso trabalho, como já citado, daremos ênfase nos processos de representação e abstração.

A Figura 5 mostra a interação dos processos do Pensamento Matemático Avançado segundo o autor.

Figura 5 – Interação dos Processos do Pensamento Matemático Avançado



Fonte: Autoras (baseado em Dreyfus, 2002).

De modo geral, os estudantes precisam compreender as interações entre os processos de representar e abstrair para atingir a meta principal do Pensamento Matemático Avançado (abstração). Acreditamos que os estudantes ao mobilizarem os processos do Pensamento Matemático Avançado conseguem fazer uma análise e reflexão, tendo consciência das semelhanças entre a situação proposta e suas experiências. No entanto, o professor deve ter cuidado nos encaminhamentos e na seleção da tarefa.

Por conseguinte, tratamos de pesquisas relacionadas ao Pensamento Matemático Avançado nos últimos anos.

1.2.2 Pesquisas relacionadas ao Pensamento Matemático Avançado

Em um levantamento bibliográfico inicial no portal da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), catálogo de teses e dissertações presentes no link <http://www.capes.gov.br/> (Acesso em 15 de abril de 2022), foram encontrados 21 trabalhos que tratam do Pensamento Matemático Avançado nos períodos de 2017 a 2021. Para essa busca utilizamos as palavras-chaves: “Pensamento Matemático Avançado”. O que percebemos é que a maioria das pesquisas encontradas investigam o Pensamento Matemático Avançado no ensino superior ou em cursos de formação para professores. Dreyfus (2002) defende que o Pensamento Matemático Avançado não é apenas mobilizado em estudantes de nível superior, mas também

em estudantes da educação básica. Neste tópico discorreremos sobre algumas teses e dissertações produzidas no período de 2017 a 2021 sobre o Pensamento Matemático Avançado (Quadro 3), com o propósito de justificar a relevância desta pesquisa e discutir como a temática vem sendo investigada nos últimos anos.

Quadro 3 - Teses e dissertações sobre o Pensamento Matemático Avançado

Autor, ano Tipo de trabalho	Título	Sujeitos da pesquisa	Objetivos
Júnior, 2021. Dissertação	O Princípio da Casa Dos Pombos: Uma Aplicação da Modelagem Matemática no Ensino	Alunos do 8º ano de uma escola particular.	Investigar as implicações da aplicação de uma sequência de ensino sobre o Princípio da Casa dos Pombos (PCP) na aprendizagem de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental.
Ferreira, 2021. Tese	Compreensão do conceito De Limite por alunos de Cursos de Ciências Exatas	Alunos de Cursos de Ciências Exatas.	Analisar a compreensão do conceito de limite de função de uma variável real por alunos de cursos de Ciências Exatas de uma universidade pública.
Kirnev, 2019. Tese	Um estudo da mobilização de processos mentais entre o Pensamento Matemático Elementar e o Pensamento Matemático Avançado	Graduandos em Matemática.	Investigar a mobilização de processos mentais entre o Pensamento Matemático Elementar e o Pensamento Matemático Avançado.
Lopes, 2019. Dissertação	Formação e reelaboração de imagens e definições de conceito relacionadas ao ensino de vetores em Geometria Analítica	Sete discentes do curso de Licenciatura em Matemática.	Analisar qual a contribuição de atividades de Geometria Analítica para a formação de imagens de conceito e reelaboração da definição de conceito relacionadas a vetores com estudantes de Licenciatura em Matemática.
Schaun, 2019. Dissertação	As Representações Tridimensionais das Superfícies Quádricas na Disciplina de Cálculo com Realidade Aumentada	Estudantes da Universidade Federal de Pelotas nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral no Espaço Tridimensional.	Investigar a utilização da Realidade Aumentada para compreensão das representações gráficas em três dimensões de superfícies quádricas.

Klaiber, 2019. Tese	Introdução à Álgebra Linear em um curso de licenciatura em química: o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado por meio de uma Experiência de Ensino	Estudantes de um curso de Licenciatura em Química na Disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear.	Investigar indícios de desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado em produções escritas de estudantes do primeiro semestre de um curso de Licenciatura em Química em uma disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, por meio da realização de uma Experiência de Ensino.
Fontenele, 2018. Tese	Contribuições da Sequência Fedathi para o Desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado: Uma Análise da Mediação Docente em aulas de Álgebra Linear	Docentes da disciplina de Álgebra Linear; Alunos de Licenciatura e Grupos de estudos com alunos de Licenciatura.	Analisar a influência da mediação docente, preconizada pela Sequência Fedathi, no desenvolvimento do PMA de alunos de licenciatura em aulas de Álgebra Linear.
Messias, 2018. Tese	Teorias Cognitivas do Pensamento Matemático Avançado e o Processo de Construção do Conhecimento: Um Estudo envolvendo os Conceitos de Limite e Continuidade	Estudantes de um curso de licenciatura em matemática.	Conjecturar sobre que estruturas e mecanismos mentais precisam ser construídos por um indivíduo de modo a possibilitá-lo compreender efetivamente os conceitos de limite e continuidade de uma função.
Jorge, 2017. Dissertação	Teoria de Conjuntos: Processos Manifestados do Pensamento Matemático Avançado	Estudantes do curso de licenciatura em matemática.	Verificar tarefas desenvolvidas por estudantes do curso de licenciatura em matemática com a intenção de identificar os processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) em relação à Teoria de Conjuntos.

Fonte: autoras.

Ao realizar uma análise dos trabalhos apresentados evidenciamos que o Pensamento Matemático Avançado vem sendo investigado com frequência, porém a maioria dos trabalhos são direcionados para o ensino superior. Frente a este cenário, acreditamos na necessidade de pesquisas voltadas a evidenciar e também desenvolver Pensamento Matemático Avançado na educação básica, principalmente no ensino médio.

A pesquisa de Júnior (2021) investiga as implicações da aplicação de uma sequência de

ensino sobre o Princípio da Casa dos Pombos (PCP) na aprendizagem de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental. Como base teórica se apoia na Modelagem Matemática, pela perspectiva de Bassanezi e Biembengut e para tratar do Pensamento Matemático Avançado se apoia em Tall e Vinner. A pesquisa é de cunho qualitativo, os sujeitos de pesquisa são alunos do 8º ano de uma escola particular, no interior do estado de São Paulo. A pesquisa foi realizada no de 2020 frente à pandemia. Para a pesquisa, Júnior (2021) escolheu o conteúdo de análise combinatória, elaborando uma sequência de ensino sobre o Princípio da Casa dos Pombos (PCP). A pesquisa aponta que os estudantes desenvolveram alguns indícios de Pensamento Matemático Avançado como: visão global, holística, modelos mentais e visualização.

Jorge (2017) busca verificar as tarefas desenvolvidas por estudantes do curso de licenciatura em matemática com a intenção de identificar os processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) em relação à teoria de conjuntos. A pesquisa é exploratória de cunho interpretativo com 21 estudantes da disciplina de estruturas algébricas, inserida num curso de 2º ano de matemática. O pesquisador concluiu, por meio das análises dos registros escritos dos estudantes, que a maior parte dos alunos não atingiu todas as características presentes no Pensamento Matemático Avançado. Entretanto, a maior parte atingiu as características de representação, ou seja, a maioria dos estudantes não apresentou indícios de estar em nível mais avançado de pensamento, apenas dois estudantes conseguiram revelar característica da abstração.

A tese de Klaiber (2019) investiga indícios de desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado em produções escritas de estudantes do primeiro semestre de um curso de Licenciatura em Química em uma disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, por meio da realização de uma Experiência de Ensino. Para estudo e discussão do Pensamento Matemático Avançado, a autora pauta nas abordagens de Dreyfus (2002) e Dreyfus e Eisenberg (1996), com base na metodologia de ensino-aprendizagem exploratório, desenvolvendo uma trajetória de ensino. Como procedimento metodológico, utilizou o estudo qualitativo, as análises foram feitas de forma descritiva e priorizavam o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado. Para a pesquisa foram selecionados conteúdos de matrizes e sistemas de equações lineares. Com base nesses conteúdos, foram planejadas tarefas e discussões em sala de aula, antecipando erros e dificuldades dos estudantes. Nessa abordagem metodológica de experiência de ensino foi utilizada a metodologia do *design research*. A experiência de ensino é composta por nove episódios em uma turma de 25 ingressantes de um curso de Licenciatura em Química, na disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear.

Para análise dos processos do Pensamento Matemático Avançado, Klaiber (2019)

utilizou um quadro (aqui representado no Quadro 4) fundamentado em Dreyfus (2002) e Dreyfus e Eisenberg (1996), organizando habilidades e procedimentos relacionados ao Pensamento Matemático Avançado, com o objetivo de inferir sobre os processos em produção escrita dos estudantes. Em nossa pesquisa utilizamos o quadro - Critérios para identificação dos processos do Pensamento Matemático Avançado - PMA (KLAIBER, 2019, adaptado), como inspiração na elaboração das Tarefas Investigativas e na análise do desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado.

Quadro 4 - Critérios para identificação dos processos do PMA

PROCESSOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO		
	Características segundo Dreyfus e Eisenberg (1996) e Dreyfus (2002)	Habilidades/Procedimentos esperados/examinados/considerados nas resoluções
Representação Simbólica	<ul style="list-style-type: none"> - Comunicação de forma escrita ou falada, por meio de símbolos e sinais, do conhecimento sobre um determinado conceito matemático. - Notações matemáticas, por meio das quais ideias complexas ou processos mentais podem ser fragmentados e representados por notações físicas. 	<ul style="list-style-type: none"> - Utilizar símbolos e/ou notações matemáticas para representar conceitos ou objetos matemáticos; e/ou - Compreender o significado de símbolos ou notações matemáticas na representação/interpretação de uma situação matemática.
Representação Mental	<ul style="list-style-type: none"> - Esquemas ou quadros de referências criados internamente pelo indivíduo para lidar com o mundo exterior. - Forma como o indivíduo enxerga um conceito. <p>Pode ser gerada por meio da visualização.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Associar conceitos ou objetos matemáticos com operações algébricas ou aritméticas e métodos de resolução.
Visualização	<ul style="list-style-type: none"> - Imagem mental de um conceito. <p>Processo pelo qual as representações mentais podem vir a ser.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Auxilia na geração e gerenciamento da imagem de uma situação problemática, ela está intimamente ligada à análise e exploração do problema. 	<ul style="list-style-type: none"> - Gerar alguma imagem mental de um conceito e externalizá-la por meio de esboços ou esquemas para representar e/ou compreender situações matemáticas, analisar e explorar problemas.
Intuição	<ul style="list-style-type: none"> - É produto das imagens conceituais dos estudantes, assim, à medida que o estudante adquire mais experiência, ele passa de intuições iniciais, baseadas em suas matemáticas pré-formais, para intuições formais, mais refinadas. 	<ul style="list-style-type: none"> - Utilizar conhecimentos matemáticos prévios para examinar situações matemáticas desconhecidas.

Mudança de representação e tradução	- O indivíduo se movimenta entre as diversas representações e sabe mudar de representações em contextos diferentes, escolhendo a(s) representação(ões) mais eficiente(s).	- Transitar entre diferentes representações matemáticas de um mesmo conceito ou objeto matemático e escolher a(s) representação(ões) mais eficiente(s).
Modelação	- Na modelação, o sistema externo é físico e o modelo matemático é uma estrutura mental, ou seja, consiste na representação matemática de um processo ou objeto não matemático. - Semelhante ao processo de representação mental (análogos).	- Construir ou adequar um modelo matemático a partir dos dados do enunciado da questão para estudar o comportamento de um processo.
Generalização	- Consiste na transição de casos particulares para casos gerais, é derivar ou induzir a partir de casos particulares, identificar pontos em comum, expandir domínios de validade. - Nem sempre inclui a formação de um conceito.	- Reconhecer conceitos e objetos matemáticos obtidos a partir de resultados gerais; e/ou - Induzir, a partir de casos particulares, obtendo resultados/métodos genéricos.
Analogia	- Encontrar semelhanças entre casos específicos, abordando outros casos de forma análoga, até formular casos mais gerais. - A compreensão profunda de analogias possibilita aos estudantes transitar de casos mais gerais aos mais específicos ou de casos específicos aos gerais.	- Abordar situações matemáticas semelhantes de forma análoga; e/ou - Encontrar semelhanças entre casos específicos.
Síntese	- Consiste em combinar ou compor as partes do conhecimento de forma a constituir um todo que, muitas vezes, equivale a mais do que a soma de suas partes. - Separar as propriedades e relações comuns do objeto dos aspectos específicos da representação para formar o conceito abstrato.	- Utilizar conceitos e conteúdos matemáticos diversos para analisar e interpretar uma situação matemática; e - Estabelecer relações entre propriedades e conceitos matemáticos.

Fonte: Klaiber (2019).

A pesquisa de Klaiber (2019) aponta que, de modo geral, os estudantes mobilizaram processos do Pensamento Matemático Avançado de acordo com cada episódio de ensino.

Pesquisas como de Klaiber (2019), Júnior (2021) e Jorge (2017), mostram a necessidade de tratar do Pensamento Matemático Avançado na educação básica, pois acreditamos que tarefas possam estimular processos de pensamento matemático contribuindo com o ensino de matemática em séries posteriores, assim “[...] a transição da matemática elementar para a matemática avançada será menos repentina e, possivelmente, menos penosa” (ELIAS; BARBOSA; SAVIOLI, 2011, p. 3). Nossa pesquisa não trata da transição da matemática

elementar para a matemática avançada, não é nosso foco, porém destacamos a importância de favorecer o Pensamento Matemático Avançado em níveis da educação básica a fim de minimizar as dificuldades encontradas em estudantes de nível superior.

No próximo capítulo tratamos dos aspectos metodológicos, destacando o contexto de investigação, os encaminhamentos da coleta de dados, a metodologia escolhida e os instrumentos de análise.

2. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo tem como objetivo descrever e justificar as opções metodológicas utilizadas nesta investigação. No tópico 2.1 apresentamos o contexto de pesquisa bem como os sujeitos integrantes. Em seguida, no tópico 2.2, tratamos dos procedimentos de estudo, apresentando as técnicas utilizadas na coleta dos dados, a introdução das Tarefas Investigativas, o desenvolvimento e organização. No tópico 2.3 discorremos sobre a abordagem qualitativa enquanto metodologia de investigação, as principais características e os métodos de coleta de dados. Por fim, no tópico 2.4 apresentamos o Produto Educacional.

2.1 Contexto de Pesquisa

A investigação iniciou-se no segundo semestre de 2021 numa turma da 1ª série do Ensino Médio, no componente curricular de Matemática, em que a professora (pesquisadora) também ministrava o componente curricular de Educação Financeira em um colégio público situado na cidade de Cornélio Procopio, no estado do Paraná. Em 2021, a pesquisadora trabalhava com seus alunos no modelo híbrido, proposto pelo governo do Estado, devido à pandemia por Covid-19. Na ocasião, os alunos foram familiarizados com tarefas investigativas em que desenvolveram as propostas apresentadas no Quadro 1. Considerando nossos interesses, os dados coletados nessa ocasião não foram analisados e discutidos nesta pesquisa.

Em 2022, a professora (pesquisadora) continuou ministrando aulas para a mesma turma, agora na 2ª série do Ensino Médio, porém somente como professora no componente curricular de Educação Financeira. Tendo em vista o trabalho do ano anterior, a pesquisadora já tinha conhecimento do contexto dos estudantes, as dificuldades e compreensão sobre os pré-requisitos em relação à Educação Financeira, bem como ao envolvimento com tarefas investigativas. Neste sentido, optamos por manter os sujeitos da pesquisa.

A turma da 2ª série do Ensino Médio, que fez parte da investigação, é composta por 34 estudantes, destes 23 foram alunos anteriormente da mesma turma, ou seja, do grupo de investigação e tiveram aulas com a professora nas aulas de Matemática e Educação Financeira, 8 estudantes faziam parte de uma outra turma que foi desmembrada, mas tiveram contato com a pesquisadora como professora da turma somente no componente curricular de Matemática e 3 estudantes ingressaram este ano no colégio, sendo que um destes veio da Colômbia.

Os estudantes desta turma, em sua maioria, pertencem a uma classe social baixa, muitos têm problemas familiares relacionados a drogas e álcool. Mesmo fazendo parte deste contexto

familiar, a turma no geral é participativa, porém, agitada, alguns estudantes apresentam dificuldades na aprendizagem o que dificulta sua participação na discussão das tarefas, no entanto, são comprometidos.

No ano de 2021, o componente curricular de Educação Financeira passou a fazer parte da Matriz Curricular do Ensino Médio em todas as séries, desde então, os estudantes têm uma aula semanal de 50 minutos.

A Proposta Pedagógica Curricular de Educação Financeira - PPC⁴ (2021, p. 2) define que a Educação Financeira “é o processo de aprendizagem que envolve conhecer os processos de planejamento financeiro, provendo conhecimentos e informações sobre comportamentos básicos que contribuem para melhorar a qualidade de vida das pessoas e de suas comunidades”. Neste entorno, escolhemos a Educação Financeira por ser um componente curricular que possibilita analisar diferentes processos cognitivos dos estudantes, a partir da discussão e da reflexão sobre temáticas que permeiam seu cotidiano. O Banco Central do Brasil (BCB) (2011), defende que a Educação Financeira é um instrumento para promover o desenvolvimento econômico e social.

Segundo a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF):

A educação financeira não se resume a um conjunto de saberes puramente matemáticos ou de instrumentos de cálculo. Está amparada em áreas complexas como a Psicologia Econômica e a Economia Comportamental, e por isso acessar educação financeira é provocar mudanças de comportamento, por meio da leitura de realidade, do planejamento de vida, da prevenção e da realização individual e coletiva (ENEF, 2020, p. 33).

No entanto, para o desenvolvimento das tarefas, consideramos a aula semanal de 50 minutos. Porém, as aulas nesta turma no ano de 2022 ocorreram sempre na primeira aula de sexta-feira e, devido à rotina da escola, acabaram-se que perdendo alguns minutos, porque a equipe pedagógica e diretiva, utiliza alguns minutos para a oração e informações. Devido a este fato, a pesquisadora recorreu a algumas aulas de outra professora em outros dias para conclusão das tarefas.

Após a apresentação do contexto de pesquisa, no próximo tópico abordamos os procedimentos de estudo.

2.2 Procedimento de Estudo

⁴ A PPC é um documento da instituição de ensino que fundamenta e sistematiza a organização do conhecimento no currículo. Disponível em: <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br>. Acesso em 10 mai de 2022.

Para obtenção das informações, foram desenvolvidas três Tarefas Investigativas que contemplaram temáticas que envolveram a Educação Financeira. As tarefas foram construídas com o apoio do livro didático⁵ e seguindo a perspectiva do Ensino por Investigação, a fim de tornar as Tarefas de caráter Investigativo e com potencialidades para desenvolver o Pensamento Matemático Avançado. Os dados coletados e analisados compreenderam as transcrições das gravações em áudios e gravações de vídeo, bem como os registros escritos dos estudantes. Os registros escritos dos estudantes foram coletados ao término de cada aula, para que não houvesse problemas no extravio. A organização dos dados foi iniciada na produção dos mesmos e foi reorganizada durante todo o processo de análise.

A partir destas coletas, nossas análises se encadearam no sentido de trazer resultados e reflexões sobre o objetivo de: *evidenciar e discutir indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado mobilizados por estudantes do ensino médio ao desenvolver tarefas investigativas*. De modo a subsidiar nossas análises, colocando foco nos aspectos do PMA, nos orientamos pelas questões norteadoras:

1. Que processos de representação se fazem presentes quando alunos da 2ª série do Ensino Médio desenvolvem Tarefas Investigativas?
2. Que processos de abstração são evidenciados no desenvolvimento de Tarefas Investigativas por alunos da 2ª série do Ensino Médio?

A coleta de dados aconteceu de forma presencial durante o primeiro semestre de 2022, iniciando-se em 18 de fevereiro e com término no dia 01 de julho. No total foram desenvolvidas três Tarefas Investigativas.

Para a elaboração das tarefas foram propostas temáticas que fizessem parte do contexto dos estudantes com o objetivo de desencadear diferentes processos cognitivos, análise crítica e reflexão sobre suas ações. Entretanto, durante o desenvolvimento das tarefas, foi feita uma análise dos registros escritos dos estudantes, a fim de planejar as próximas tarefas e as possíveis intervenções, como ausência de registros, conjecturas, justificativas que pudessem promover processos como a abstração.

A coleta de dados iniciou-se após o consentimento para desenvolvimento das atividades no colégio e fornecimento do Termo de Cessão de uso de Imagem⁶, disponibilizado pelo

⁵ O livro didático adotado e utilizado para elaboração da tarefa foi “Cenários para Investigação: Humanidades e Matemática em contexto”. Disponível em : <https://saber.com.br/obras/PNLD/PNLD_2021_OBJETIVO_2/Obra-e99850b2-f814-49e1-8553-a7a660924afa/e99850b2-f814-49e1-8553-a7a660924afa.pdf>. Acesso em: 02 fev de 2022.

⁶ O termo de Cessão de uso de Imagem é assinado pelos responsáveis no ato da matrícula e encontra-se disponível no apêndice A.

colégio, e Termo de autorização para realização da pesquisa⁷, assinado pelo diretor. No intuito de manter em anonimato os nomes dos estudantes, utilizamos os símbolos E1, para o primeiro estudante da lista de chamada, E2 para o segundo estudante de acordo com lista e assim sucessivamente. De forma geral, as tarefas investigativas foram desenvolvidas em grupos. Para nos referirmos aos grupos utilizamos letras do alfabeto: A, B, C, D... Em alguns momentos utilizamos a sigla T1 para nos referir a Tarefa 1, T2 para a Tarefa 2 e T3 para a Tarefa 3.

No Quadro 5 apresentamos as temáticas de cada tarefa desenvolvida, bem como a sua organização.

Quadro 5 - Tarefas desenvolvidas

Tarefa	Temática	Organização
Tarefa 1 (T1)	Compra do Aparelho de Celular	18/02/2022 - Introdução da tarefa. 25/02/2022 - Iniciação da resolução. 04/03/2022 - Continuação das resoluções. 11/03/2022 – Conclusão da tarefa.
Tarefa 2 (T2)	Preço do gás e energia elétrica	08/04/2022 - Introdução da tarefa e apresentação do tema para pesquisa. 29/04/2022 - Apresentação dos dados pesquisados e início das resoluções. 13/05/2022 - Continuação das resoluções. 20/05/2022 - Continuação das resoluções. 21/05/2022 – Conclusão da tarefa.
Tarefa 3 (T3)	Quanto vale o salário mínimo?	10/06/2022 - Introdução da tarefa, apresentação do tema. 24/06/2022 - Resolução da tarefa. 01/07/2022 - Conclusão da tarefa.

Fonte: Autoras.

A temática da Tarefa 1 “Compra do Aparelho de Celular” emergiu após análise da turma e dos assuntos abordados pelos estudantes durante as aulas de Educação Financeira. A maiorias dos estudantes tem celular e durante a aula conversam sobre preços, modelos e outros assuntos relacionados. Notando o interesse dos estudantes por essa temática, elaboramos uma tarefa que abrangesse esse tema, além de possuir características de uma Tarefa Investigativa, conforme apresentado no Quadro 6.

⁷ O termo de Autorização para realização da pesquisa encontra-se disponível no apêndice B.

Quadro 6 - T1 “Compra do Aparelho de Celular”

<i>PENSEM NA SEGUINTE SITUAÇÃO ...</i>	
Você precisa comprar um aparelho Celular, porém não tem dinheiro suficiente para a compra de um novo aparelho e para pagá-lo à vista.	
1.	Diante da situação apresentada, qual sua primeira ação?
2.	O que vocês acham de fazer um orçamento/pesquisa de preços do aparelho celular? Não esqueçam de indicar a fonte pesquisada.
3.	Quais condições de pagamento podem ser propostas?
4.	Qual condição vocês acreditam ser mais vantajosa?
5.	Façam uma simulação detalhada, com o máximo de registros possíveis, diferentes representações para justificar suas escolhas de pagamento.
6.	A qual conclusão vocês chegaram?

Fonte: Autoras.

Para a resolução da tarefa, os estudantes foram divididos em grupos. A escolha dos integrantes dos grupos foi feita pelos próprios estudantes que iam se organizando conforme suas afinidades, no entanto, quando necessário a professora interviu para que não ficasse algum estudante de fora. Sendo assim, se organizaram em 4 grupos com 5 alunos, 2 grupos com 4 alunos e 1 grupo com 6 alunos, totalizando 7 grupos. Na realização desta tarefa, a turma contava com 33 estudantes. No Quadro 7 é apresentada a organização dos grupos para desenvolvimento da tarefa 1- Compra do Aparelho de Celular.

Quadro 7 - Organização dos grupos “Tarefa 1”

Grupo	Estudantes
A	E1, E9, E10, E13 e E19
B	E6, E20, E25 e E32
C	E5, E8, E14, E30 e E33
D	E11, E26, E27 e E31
E	E4, E7, E12, E15, E16 e E28
F	E2, E17, E18, E21 e E24
G	E3, E22, E23, E29 e E34

Fonte: Autoras.

Já a temática da Tarefa 2 “Preço do gás e energia” emergiu após as análises dos assuntos abordados em Educação Financeira, entre eles a inflação. Com o intuito de discutir sobre o tema, pensamos em itens que estivessem presentes no cotidiano dos alunos, então optamos pela problemática referente aos preços de gás de cozinha e energia elétrica, conforme estrutura organizada e apresentada no Quadro 8.

Quadro 8 - T2 “Preço do gás e energia elétrica”

1. Observe a charge abaixo. Depois, responda às questões:



ALVES. Hora do Café. 14 nov. 2017. Disponível em: <https://fotografia.folha.uol.com.br/galerias/1582815303586029-hora-do-cafe-novembro-de-2017>. Acesso em: 31 mar.2022.

- O valor do preço de quais produtos ou serviços foi utilizado pelo artista para abordar a alta da inflação?
- O que significa dizer que esses produtos afetam o orçamento familiar?
- Pesquise os preços desses itens em março de 2017 a 2022.
- Com base em sua pesquisa, o que você pode concluir com os resultados encontrados?
- Com base nestas informações você consegue estimar o valor para 2023?

Obs: Não esqueçam de indicar a fonte de pesquisa.

Fonte: adaptado do livro didático - Cenários para investigação: humanidade e matemática em contexto, 2020.

Para o desenvolvimento desta tarefa, os estudantes foram divididos em 6 grupos de 4 estudantes e dois grupos com 5 estudantes, totalizando 8 grupos, porém a escolha dos integrantes de cada grupo foi feita pela professora, que manteve alguns estudantes e fez algumas alterações em decorrência das conversas paralelas de alguns e problemas de relacionamento entre eles. Nesta tarefa participaram 33 estudantes, pois um estava de atestado médico, não participando das aulas presencialmente. O Quadro 9 apresenta a organização dos grupos referente à tarefa 2 - Preço do gás e energia elétrica.

Quadro 9 - Organização dos grupos “Tarefa 2”

Grupo	Estudantes
A	E1, E3, E13 e E19
B	E5, E6, E20, E25 e E32
C	E8, E10, E21 e E22
D	E2, E27, E26 e E31
E	E14, E16, E29 e E33
F	E12, E15, E17 e E34

G	E11, E28, E30 e E35
H	E7, E18, E23 e E24

Fonte: Autoras.

Para finalizar a sequência de tarefas, propusemos a Tarefa 3 - “Quanto vale o salário mínimo?” – com o objetivo de abordar assuntos relacionados ao salário mínimo. A temática explora o salário mínimo, os impostos cobrados do trabalhador como INSS e IRPF, além dos impostos a tarefa aborda o custo da cesta básica. A Tarefa 3 tem caráter investigativo, não traz questões fechadas, permitindo aos estudantes diferentes resoluções e abordagens, conforme estrutura apresentada no Quadro 10.

Quadro 10 - T3 “Quanto vale o salário mínimo?”

Quanto vale o salário mínimo?	
<p>O artigo 7º da Constituição Federal de 1988 prevê que o salário mínimo possa atender às necessidades vitais básicas do trabalhador e de sua família, incluindo moradia, saúde, educação, lazer e transporte, e não apenas às suas necessidades alimentares básicas.</p> <p>Em fevereiro de 2020, quando o valor do salário mínimo bruto em vigor era de R\$ 1.045,00, o custo da cesta básica de alimentos, segundo dados do Dieese, comprometia 46,91% do valor do salário mínimo líquido. Para verificar quanto o valor de uma cesta básica de alimentos compromete do valor do salário mínimo líquido, pode-se calcular quanto o valor dessa cesta básica de alimentos representa, em porcentagem, do total desse salário mínimo líquido.</p> <p>Em grupos, façam o que se pede.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Considerando o que vocês já sabem sobre salário bruto e salário líquido, desconto de INSS e de IRPF, calculem qual era o valor do salário mínimo líquido em março de 2020. 2. Pesquisem na internet o valor do salário mínimo atual (2022) e calculem também o valor líquido do valor pesquisado. 3. Pesquisem, também, o valor mais recente do custo da cesta básica de alimentos (segundo o Dieese) e, em seguida, com base no valor do salário mínimo atual que vocês já calcularam, respondam: <ol style="list-style-type: none"> a) Quanto a cesta básica compromete do salário mínimo? b) Considerando as experiências pessoais de vocês e da família de vocês, formulem hipóteses e debatam se o valor do salário mínimo atual atende às necessidades vitais básicas de um trabalhador e de sua família, conforme determina o artigo 7º da Constituição. 	

Fonte: adaptado do livro didático - Cenários para investigação: humanidade e matemática em contexto, 2020.

Para resolução desta tarefa, a turma foi dividida em grupos. O Quadro 11 apresenta a organização dos grupos.

Quadro 11 - Organização do grupo “Tarefa 3”

Grupo	Estudantes
A	E1, E9, E13 e E19

B	E4, E11, E23 e E35
C	E8, E10, E12 e E21
D	E18, E24, E26, E27 e E31
E	E2, E3, E17 e E30
F	E7, E22, E26 e E32
G	E12, E14, E29 e E33
H	E6, E15, E20, E25 e E34

Fonte: Autoras.

Para análise e discussão dos processos de Pensamento Matemático Avançado evidenciados nas resoluções das tarefas, nos inspiramos no Quadro - Critérios para identificação dos processos do Pensamento Matemático Avançado⁸, no entanto, fizemos adaptações conforme o esperado por cada tarefa e o contexto de pesquisa, orientadas pelos estudos de Dreyfus (2002), conforme Quadro 12.

Quadro 12 - Parâmetros para identificação dos processos do PMA

PROCESSOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO - PMA			
	Características do PMA	Habilidades/Procedimentos esperados nas resoluções das tarefas	Representações/esquemas/símbolos esperados no contexto das tarefas
REPRESENTAÇÃO			
Representação Simbólica	<ul style="list-style-type: none"> - Comunicação de forma escrita ou falada, por meio de símbolos e sinais; - Notações matemáticas, por meio das quais ideias complexas ou processos mentais podem ser fragmentados e representados por notações físicas. 	<ul style="list-style-type: none"> - Utilizar símbolos e/ou notações matemáticas para representar conceitos objetos matemáticos; e/ou - Compreender o significado de símbolos ou notações matemáticas na representação/interpretação de uma situação matemática. 	<ul style="list-style-type: none"> - Utilizar notações para se referir à porcentagem, juros simples, juros compostos (Tarefa 1), regra de três e razão (Tarefa 2 e 3). - Apresentar cálculos referentes à porcentagem, juros simples, juros compostos (Tarefa 1), regra de três e razão (Tarefa 2 e 3).

⁸ O Quadro Critérios para identificação dos processos do PMA já foi apresentado na íntegra no capítulo 1, tópico 1.2.2.

Representação Mental	<ul style="list-style-type: none"> - Esquemas ou quadros de referências criados internamente pelo indivíduo para lidar com o mundo exterior. - Forma como o indivíduo enxerga um conceito. - Pode ser gerada por meio da visualização. 	<ul style="list-style-type: none"> - Associar conceitos ou objetos matemáticos com operações algébricas ou aritméticas e métodos de resolução. 	<ul style="list-style-type: none"> - Associar condições de pagamento à porcentagem, juros simples, juros compostos, pagamentos a vista ou a prazo, parcelado com ou sem acréscimo (Tarefa 1). - Associar os dados pesquisados pelos estudantes, com aumento/redução de preços, comprometimento do salário com cada item (gás e energia) com porcentagem (Tarefa 2); - Relacionar o cálculo do desconto do INSS e o comprometimento do salário com a cesta básica com: regra de três, números decimais ou razão (Tarefa 3). - Por exemplo: como o estudante “enxerga” ou “relaciona” o conceito de juros, quais esquemas, quadros, imagens, são criados por ele internamente.
Visualização	<ul style="list-style-type: none"> - Imagem mental de um conceito. - Processo pelo qual as representações mentais podem vir a ser. - Auxilia na geração e gerenciamento da imagem de uma situação problemática, ela está intimamente ligada à análise e exploração do problema. 	<ul style="list-style-type: none"> - Gerar alguma imagem mental de um conceito e externalizá-la por meio de esboços ou esquemas para representar e/ou compreender situações matemáticas, analisar e explorar problemas. 	<ul style="list-style-type: none"> - Apresentar imagens (esboços, desenhos, esquemas, etc) para análise e exploração da situação-problema; - Externalizar, por meio de esboços, a imagem mental gerada como forma para resolver ou explorar a situação.

Intuição	<p>- É produto das imagens conceituais dos estudantes, assim, à medida que o estudante adquire mais experiência, ele passa de intuições iniciais, baseadas em matemáticas pré-formais, para intuições formais, mais refinadas.</p>	<p>- Utilizar conhecimentos matemáticos prévios para examinar situações matemáticas desconhecidas.</p>	<p>- Utilizar conhecimentos prévios para resolver a situação a ser investigada, por meio de: regra de três ou razão para cálculo do percentual, juros simples e juros compostos para as simulações das condições de pagamento, razão ou regra de três para analisar o aumento/diminuição dos valores e comprometimento do salário com gás, energia ou com o valor da cesta básica e números decimais para o cálculo da porcentagem do desconto do INSS.</p>
Mudança de representação e tradução	<p>- O indivíduo se movimenta entre as diversas representações e sabe mudar de representações em contextos diferentes, escolhendo a(s) representação(ões) mais eficiente(s).</p>	<p>- Transitar entre diferentes representações matemáticas de um mesmo conceito ou objeto matemático e escolher a(s) representação(ões) mais eficiente(s).</p>	<p>- Transitar por distintas representações matemáticas de um conceito/objeto matemático para analisar ou explorar uma situação como: registro aritmético para registro algébrico, para registro tabular e registro gráfico; - Traduzir as informações ou dados coletados para uma linguagem matemática; - Utilizar mais de um conceito ou procedimento para resolver a questão; - Utilizar diferentes formas de representar porcentagem como: fração para número decimal.</p>

Modelação	<ul style="list-style-type: none"> - Na modelação o sistema externo é físico e o modelo matemático é uma estrutura mental, ou seja, consiste na representação matemática de um processo ou objeto não matemático. - Semelhante ao processo de representação mental(análogos). 	<ul style="list-style-type: none"> - Construir ou adequar um modelo matemático a partir dos dados do enunciado da questão para estudar o comportamento de um processo. 	<p>A partir da situação proposta, criar/adaptar um modelo para:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Simular diferentes condições de pagamento; - Calcular um valor referência para a energia; - Analisar o aumento/diminuição nos valores do gás e energia ou o comprometimento do salário com cada item (gás e energia). - Calcular o valor do desconto do INSS ou comprometimento do salário mínimo com a cesta básica.
ABSTRAÇÃO			
Generalização	<ul style="list-style-type: none"> - Consiste na transição de casos particulares para casos gerais, é derivar ou induzir a partir de casos particulares, identificar pontos em comum, expandir domínios de validade. - Nem sempre inclui a formação de um conceito. 	<ul style="list-style-type: none"> - Reconhecer conceitos e objetos matemáticos obtidos a partir de resultados gerais; e/ou - Induzir, a partir de casos particulares, obtendo resultados/métodos genéricos. 	<ul style="list-style-type: none"> - Utilizar notações/expressões algébricas que se referem à identificação de um padrão para calcular as diferentes condições de pagamento, calcular aumento/diminuição de valores, comprometimento do salário com cada item, calcular o desconto do INSS e calcular o comprometimento do salário mínimo com a cesta básica.

Síntese	<ul style="list-style-type: none"> - Consiste em combinar ou compor as partes do conhecimento de forma a constituir um todo que, muitas vezes, equivale a mais do que a soma de suas partes. - Separar as propriedades e relações comuns do objeto dos aspectos específicos da representação para formar o conceito abstrato. 	<ul style="list-style-type: none"> - Utilizar conceitos e conteúdos matemáticos diversos para analisar e interpretar uma situação matemática; e - Estabelecer relações entre propriedades e conceitos matemáticos. 	<ul style="list-style-type: none"> - Evidenciar uma função afim ou exponencial ao representar a situação por meio das expressões de juros simples e juros compostos ou por meio dos gráficos; - Estabelecer conexões com conceitos já estudados anteriormente no Componente Curricular de Educação Financeira ou outro componente curricular; - Relacionar os gráficos de aumento ou diminuição dos valores do gás e energia ou comprometimento do salário com cada item com conceito de funções; - Relacionar as tarefas com situações abordadas nas tarefas anteriores.
---------	---	--	---

Fonte: Autoras (adaptado de Klaiber, 2019).

Os dados foram coletados por meio dos registros escritos dos estudantes, fotos, gravação em áudio e vídeo. Sendo assim, os instrumentos de coleta de dados foram:

- registros escritos, com as resoluções das tarefas;
- fotos capturadas por meio do aparelho celular da professora e dos próprios estudantes e por *prints* de alguns momentos dos vídeos;
- gravações de áudio por meio de gravadores de voz (cedidos pelo programa de mestrado) e pelos aparelhos de celulares da professora e dos estudantes.

Para a investigação nesta turma, a professora explicou sobre sua pesquisa e o motivo pelo qual estava filmando e gravando. Em consonância com a pesquisa, os próprios estudantes colaboraram com a coleta de dados, ajudando com as gravações em áudio, feitas pelos celulares dos próprios estudantes e enviadas para a professora no término de cada aula pelo *WhatsApp*, *Bluetooth*, ou compartilhadas pelo *Google Drive*.

2.3 Metodologia

Considerando que a presente pesquisa tem como *objetivo Evidenciar e discutir indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado mobilizados por estudantes do ensino médio ao desenvolver tarefas investigativas*, optamos pela pesquisa qualitativa de cunho

interpretativo. Segundo Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa possui cinco características principais:

1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal, os materiais registrados são revistos na sua totalidade pelo investigador, sendo o entendimento que este tem deles o instrumento-chave de análise, além disso, os investigadores frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto.
2. A investigação qualitativa é descritiva, ou seja, os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação de modo a analisá-los em toda sua riqueza.
3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que pelos resultados ou produtos. As estratégias qualitativas mostram o modo como as expectativas se traduzem nas atividades, procedimentos e interações diários.
4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. Não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente, ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando. Para um investigador qualitativo que planeie elaborar uma teoria sobre seu objeto de estudo, a direção desta só se começa a estabelecer após a recolha dos dados e o passar do tempo.
5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Assim, para Bogdan e Biklen (1994), a condução de uma investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre os investigadores e os sujeitos, abordados pelo pesquisador de uma forma neutra. Em consonância com esta metodologia, acreditamos ser mais apropriada para análise dos dados, pois para nossa pesquisa, a análise de todo material é importante se fazendo necessária uma interpretação dos dados, no intuito de identificar características do Pensamento Matemático Avançado. A abordagem qualitativa é caracterizada por “tentar dar sentido ou interpretar os fenômenos em termos dos significados que as pessoas trazem para eles” (DENZIN; LINCOLN, 1994, p. 2).

Embasadas na perspectiva de Bogdan e Biklen (1994), a coleta de dados aconteceu na sala de aula de um colégio público, numa turma da 2ª série do ensino médio, onde foram coletados os dados através de gravação em áudio, gravações em vídeos, utilizados em alguns momentos e os registros escritos dos estudantes. Para Alves-Mazzotti e Gewandszajder (2001) dispor de diferentes procedimentos e instrumentos para produzir dados auxilia na confiabilidade

dos resultados na pesquisa qualitativa.

Sendo assim, os dados recolhidos, juntamente com os procedimentos de coleta são denominados “[...] por qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas [...]” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 16).

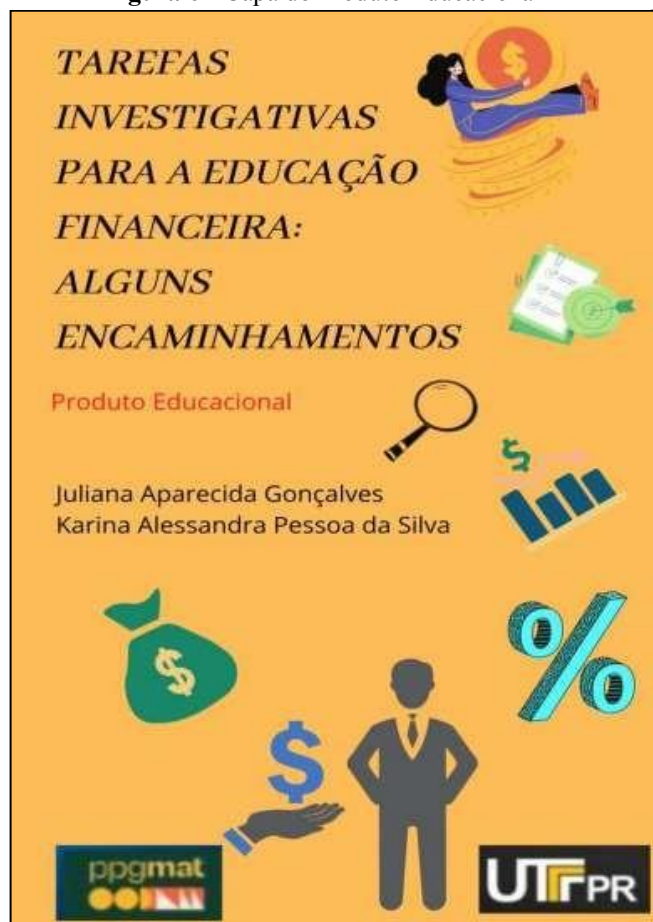
2.4 Sobre o Produto Educacional

Uma das características e exigências do Mestrado Profissional é a elaboração de um Produto Educacional, que tem por finalidade apresentar resultados de uma pesquisa, “[...] deve ser elaborado com o intuito de responder a uma pergunta/problema oriunda do campo de prática profissional, podendo ser um artefato real ou virtual, ou ainda, um processo” (BESSEMER; TREFFINGER, 1981).

Pensando em uma proposta para professores que pretendem utilizar Tarefas Investigativas em suas aulas, elaboramos o Produto Educacional intitulado “*Tarefas Investigativas para a Educação Financeira: alguns encaminhamentos*”. O Produto Educacional é composto por três sugestões de Tarefas Investigativas, envolvendo temáticas do componente curricular de Educação Financeira, com encaminhamentos, com o objetivo de auxiliar professores em sua prática.

O Produto Educacional conta com cinco seções: Apresentação; Ensino por Investigação; Educação Financeira; Três tarefas investigativas: alguns encaminhamentos e as considerações finais. Este material está disponível no Repositório Institucional da Universidade Tecnológica do Paraná (RIUT), no site < <http://portal.utfpr.edu.br/cursos/coordenacoes/stricto-sensu/ppg-mat>>. Na Figura 6 apresentamos a capa do Produto Educacional.

Figura 6 - Capa do Produto Educacional



Fonte: Autoras.

Acreditamos que esse material possa auxiliar professores em sua prática, disponibilizando tarefas com temáticas que colaboram com atividades em grupo que proporcione uma análise e reflexão sobre cada assunto e mobilize nos estudantes diferentes processos cognitivos.

No próximo capítulo, tratamos das descrições das tarefas e análises dos dados, inferências e discussões realizadas a partir dos registros escritos e transcrições de áudios referentes a cada tarefa.

3. DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS DADOS

Apresentamos neste capítulo a descrição das três Tarefas, bem como as análises e as discussões dos dados coletados por meio dos registros escritos, transcrições dos áudios e gravações em vídeos, à luz da análise qualitativa de cunho interpretativo a fim de *evidenciar e discutir indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado mobilizados por estudantes do ensino médio ao desenvolver tarefas investigativas*.

As análises são subsidiadas no referencial teórico apresentado no capítulo 2, as inferências relativas aos registros e discussões dos estudantes são pautadas no Quadro 12 - Parâmetros para identificação dos processos do PMA, baseado em Klaiber (2019).

Para a análise local de cada tarefa, nos debruçamos sobre os dados com o intuito de trazer reflexões para as questões norteadoras:

1. Que processos de representação se fazem presentes quando alunos da 2ª série do Ensino Médio desenvolvem tarefas investigativas?
2. Que processos de abstração são evidenciados no desenvolvimento de tarefas investigativas por alunos da 2ª série do Ensino Médio?

Nos tópicos 3.1, 3.2 e 3.3 trazemos a introdução de cada tarefa, discorremos sobre as análises dos registros e áudios de cada grupo e tratamos da análise local de cada tarefa. Por fim, no tópico 3.4 tratamos da análise global das três tarefas apresentando um quadro síntese dos processos do PMA manifestados nas três tarefas.

3.1 Descrição e Análise da Tarefa 1 “Compra do Aparelho de Celular”

A escolha da situação emergiu após análise de temas do interesse dos estudantes. Durante as aulas de Educação Financeira, a professora observou quais temas seriam de interesse coletivo para abordar em uma Tarefa Investigativa. No decorrer das aulas, a professora notou conversas entre os estudantes sobre aparelho celular, comentários como: *Estou precisando comprar um celular! Como está caro o aparelho celular! O meu aparelho não funciona mais!*, eram frequentes entre eles. A partir desta situação a professora propôs a tarefa “Compra do Aparelho Celular” que se iniciou no dia 18 de fevereiro de 2022 e finalizou no dia 11 de março de 2022⁹.

De forma geral, no início do ano letivo, é proposto aos professores da rede pública do estado o nivelamento de conteúdo. Com isso, planejamos uma tarefa que pudesse abordar

⁹ O cronograma da tarefa foi apresentado no capítulo 2 aspectos metodológicos, tópico 2.2, Quadro 5.

conteúdos presentes no plano de nivelamento¹⁰, com uma abordagem diferenciada que permite observar os conhecimentos prévios dos estudantes e uma revisão sobre os assuntos. Além disso, consideramos as dificuldades que poderiam surgir no desenvolvimento da tarefa visto que os alunos estavam retornando das férias e o retorno de alguns estudantes presencialmente, já que em 2021, em parte do ano, as aulas foram realizadas remotamente¹¹ devido à pandemia por Covid-19.

A tarefa se configurou a partir de um tema de interesse dos alunos – compra de aparelho celular –, e tem características de Tarefas Investigativas como apontadas por Ferruzzi, Borsoi e Silva (2021), pois é aberta, em que os estudantes pesquisaram o preço do aparelho celular e a opção de compra. Além disso, a tarefa se apresentou como um problema para os estudantes no qual não conseguiram responder de imediato a situação-problema, necessitando das discussões em grupos e a mediação da professora.

O intuito do desenvolvimento da tarefa foi, a partir de uma análise crítica e reflexiva, que os estudantes elaborassem diferentes simulações referentes às condições de pagamentos propostas por lojas virtuais, físicas ou compras feitas de maneira informal (direto com terceiros). Por meio dessa ação, os alunos poderiam apresentar condições de pagamento fazendo-se uso de conceitos já estudados como porcentagem, juros simples e juros compostos. A partir das condições de pagamento (simulações) escolhidas pelo grupo, seriam solicitadas justificativas para a escolha, fazendo-se uso de diferentes representações e argumentações.

No dia 18 de fevereiro foi realizada uma introdução do tema para a turma, se configurando em um convite para a resolução, por meio de conversas. Neste momento não foi apresentada a tarefa por completo, apenas a abordagem do tema. Skovsmose (2000) e Zompero e Laburú (2011) ressaltam a importância do aceite dos estudantes em relação ao tema proposto.

No dia 25 de fevereiro, a professora retomou o tema da tarefa e entregou as informações em uma folha de sulfite como apresentado no Quadro 13.




¹⁰ O plano de nivelamento encontra-se no Anexo A.

¹¹ Nosso objetivo aqui não é tratar do modo de ensino remoto, porém esclarecer que na elaboração da tarefa pensamos em todo contexto, inclusive neste aspecto.

Quadro 13 - TAREFA 1 “Compra do Aparelho de Celular”

PENSEM NA SEGUINTE SITUAÇÃO ...

Você precisa comprar um aparelho Celular, porém não tem dinheiro suficiente para a compra de um novo aparelho e para pagá-lo à vista.

1. Diante da situação apresentada, qual sua primeira ação?
2. O que vocês acham de fazer um orçamento/pesquisa de preços do aparelho celular? Não esqueçam de indicar a fonte pesquisada.
3. Quais condições de pagamento podem ser propostas?
4. Qual condição vocês acreditam ser mais vantajosa?
5. Façam uma simulação detalhada, com o máximo de registros possíveis, diferentes representações para justificar suas escolhas de pagamento.
6. A qual conclusão vocês chegaram?

Fonte: Autoras.

De modo a evidenciar sobre o que os alunos já sabiam do tema e também dos conteúdos matemáticos que poderiam se fazer presentes, a professora projetou a tarefa em slides para toda a turma (Figura 7), levantou alguns questionamentos com o objetivo de observar quais respostas seriam apresentadas pelos estudantes e quais relações poderiam ser estabelecidas com os conteúdos já estudados. Dreyfus (2002) comenta que a síntese geralmente é apresentada pelo professor e não pelo estudante, havendo assim, uma necessidade de o professor permitir e estimular que o estudante construa sua própria síntese.

Figura 7 - Momento da introdução da Tarefa 1



Fonte: Arquivo da professora.

Nos primeiros questionamentos, os estudantes não estabeleceram conexões com os assuntos esperados, mas relembrou outros conceitos, conforme excerto a seguir:

Professora: *Quando fala em condições, o que vem à cabeça de vocês?*

E2: *O quê? Eu não lembro nada não!*

Professora: *Como assim? Pensem um pouco!*

E13: *A gente aprendeu sobre formas de investimentos, sobre tipos de investidores, essas coisas assim.*

Com o questionamento esperava-se que os estudantes estabelecessem relações como: economia nos gastos, pesquisas de preços, o que não foi apresentado no momento da introdução da tarefa. Para isso, a professora foi questionando sobre quais conceitos poderiam ser utilizados para resolver a situação, porém não mencionou neste momento quais seriam, esperando que os estudantes estabelecessem conexões com conceitos já estudados anteriormente.

Finalizando o momento da introdução, a professora solicitou que fossem formados os grupos. Em nossa investigação, levamos em consideração, para as análises, os dados produzidos por dois grupos, grupos A e D (Quadro 14), devido à qualidade dos áudios sem ruídos encaminhados pelos estudantes.

Quadro 14 - Organização dos grupos analisados – Tarefa 1

Grupo	Estudantes
A	E1, E9, E10, E13 e E19
D	E11, E26, E27 e E31

Fonte: Autoras.

Nos próximos tópicos 3.1.1 (análise do desenvolvimento da tarefa 1 - grupo A) e 3.1.2 (análise do desenvolvimento da tarefa 1 - grupo D), são apresentadas as discussões realizadas pelos grupos, as resoluções da tarefa bem como as inferências feitas ao Pensamento Matemático Avançado.

3.1.1 Análise do desenvolvimento da Tarefa 1 - grupo A

O grupo A iniciou as discussões abordando o conceito que poderiam utilizar para resolver a tarefa, sendo possível evidenciar algumas conexões com os conteúdos já estudados ou com situações presentes no contexto dos estudantes, conforme excertos transcritos a seguir:

E13: *Podemos usar juros.*

E1: *Juros? Como assim?*

E13: *Podemos usar porcentagem.*

De acordo com o excerto podemos inferir que a **E13** fez uma representação mental da situação estabelecendo conexão com o conceito de juros. Para responder aos questionamentos de **E1**, a **E13** relacionou o conteúdo de juros à porcentagem. Dreyfus (2002) denota a representação mental como uma forma que o indivíduo ‘enxerga’ um conceito, a partir dos já estudados enquanto um processo de intuição. Para Dreyfus (2002), a aprendizagem pela intuição possui papel central, em qualquer sequência de processos do pensamento, que começa a partir da descoberta na resolução de um problema matemático. De fato, **E13** revelou ter a intuição de que as condições de pagamento, de certo modo, podiam ser associadas a juros.

Com isso, o grupo A iniciou uma discussão referente às formas como fariam para conseguir o dinheiro para a compra do aparelho celular, sendo essa a primeira ação do grupo “conseguir o dinheiro”, destacando conceitos como juros relacionados ao empréstimo e à entrada que pode ser de um terço. A discussão ocorreu conforme excerto a seguir:

***E1:** A **E10** disse: fazer um empréstimo (risos). E depois como vai fazer para pagar o empréstimo, os juros?*

***E13:** Professora, eu estava pensando de escrever que essa pessoa estava recebendo o seguro desemprego e aqui não está falando que ela não tem dinheiro nenhum, apenas que não tem dinheiro suficiente, então posso colocar aqui nesta situação, que a pessoa tem **um terço** do valor, e ela vai esperar tipo a parcela do seguro desemprego, para poder chegar no valor aproximado e aí então juntar o dinheiro que precisava ou pegar emprestado.*

Neste momento, a **E13** conseguiu representar a situação por meio de símbolos – a pessoa tem um terço –, que nesse caso ocorreu por meio da fala, porém o grupo não fez uso dessa abordagem matemática para resolver o problema. Para Dreyfus (2002) a representação simbólica ocorre pela comunicação escrita ou falada, por meio de símbolos.

Dando continuidade ao desenvolvimento da tarefa, os estudantes continuaram discutindo uma situação para prever como seria o pagamento utilizando fatos reais do contexto deles e simulações de situações, como pedir um vale no emprego para compra do aparelho celular, estabelecer um valor de entrada, bem como a venda de um produto para a compra do aparelho, como mostra o excerto:

***E1:** E agora, eu escrevi que tenho uns R\$ 330,00 e a gente já tinha R\$ 100,00... Aí vai faltar R\$ 480,00 aí vai faltar R\$259,00, vou refazer minhas contas...*

***E13:** Aí fala então, você separou algumas coisas que você não usava mais [se referindo a uma possível venda de um produto – vaper – para complementar o valor].*

Com as informações definidas, o grupo respondeu a primeira questão da tarefa (Diante da situação apresentada, qual sua primeira ação?), informando os procedimentos para conseguir efetuar o pagamento do aparelho celular, conforme mostra a Figura 8.

Figura 8 - Resposta à questão 1 “Grupo A”

EU ACABEI PEDINDO UM VALE PARA O MEU PATRÃO DE 330,00
E EU JÁ TINHA 100,00, EU TINHA UM VAPOR NO VALOR DE 300,00, QUE
EU ACABEI VENDENDO ELE, E CONSEGUI TOTAL DE 730,00

Fonte: Relatório do grupo A.

A resposta apresentada não está equivocada, porém, da forma como foi apresentada não permitiu a ação estabelecida na questão 2 (O que vocês acham de fazer um orçamento/pesquisa de preços do aparelho celular? Não esqueçam de indicar a fonte pesquisada.), como realizar uma consulta de preços. Porém, considerando essa questão, os estudantes se atentaram ao fato da pesquisa e realizaram uma consulta de preços utilizando os próprios celulares, como mostra a Figura 9.

Figura 9 - Momento da pesquisa “Grupo A”



Fonte: Arquivo da professora.

A escolha do valor aconteceu após manifestações de justificativas para selecionar o melhor aparelho, fazendo comparações e analisando quesitos como: preço baixo e qualidade. O excerto transcrito a seguir mostra algumas discussões desse momento:

E13: Tá! Eu vi um aqui! Ele tá R\$ 699,00, tem um de R\$ 800,00 também e outro de R\$ 600,00.

E1: Coloca ali um de R\$600,00.

E9: Quanto?

E13: Para ser exata: R\$669,67, aí você coloca em cima que ele é semi-novo, ele foi reformado.

E9: Mas um celular reformado, é fria!

E13: Se não, a gente vai ter que ficar emprestando dinheiro, do vizinho para poder pagar.

E1: O primeiro é quase a mesma coisa, e o preço é maior.

E13: E ainda é usado. Ele não foi reformado.

E1: O preço dele é R\$ 978,00

E19: Vamos no mais barato mesmo.

As discussões revelaram que os estudantes iniciaram uma estrutura da resolução da tarefa apresentando, por meio da representação simbólica, as informações necessárias,

definindo o valor do aparelho celular em R\$ 669,67 (Figura 10). Para Dreyfus (2002), a representação por meio de símbolos é importante, no entanto, deve envolver relações entre o signo¹² e o significado.

Figura 10 - Valor do aparelho de celular “Grupo A”



Fonte: Relatório do grupo A.

Além da definição do valor (representação simbólica), o grupo apresentou uma representação diferente do valor, por meio da expressão $(6 \cdot 122,65)$ acrescido de 10% ou 5%, sinalizando indicativos de resposta para a questão 3 (Quais condições de pagamento podem ser propostas?). Por meio desse procedimento, os alunos manifestaram indícios de mudança de representação, característica do PMA. Segundo Dreyfus (2002), a mudança de representação se trata da alternância de uma representação para outra, quando a outra é mais eficiente para o próximo passo que se deseja tomar. O próximo passo na tarefa investigativa foram os cálculos para a obtenção do valor final do aparelho de celular, de modo a considerar a condição mais vantajosa.

Desse modo, as discussões do grupo se direcionaram com a intenção de trazer resultados para a questão 4 (Qual condição vocês acreditam ser mais vantajosa?). A primeira discussão foi permeada por considerações relativas ao pagamento utilizando o cartão de crédito com o tipo de juros simples, enfatizando que, de forma geral, em compras parceladas por estabelecimentos comerciais, por meio do cartão de crédito, os juros cobrados são menores. Com isso, os alunos do grupo estabeleceram relações com os conteúdos já vistos em Educação Financeira.

Quando a professora questionou sobre como realizar os cálculos de juros simples e juros compostos, a aluna **E13** já apresentou a diferença entre os dois tipos de juros, justificando sua escolha antes de realizar o cálculo:

Professora: *Que tipo de juros foi? Vocês se lembram dos tipos de juros?*

E13: *Mais ou menos. Eu lembro que tem juros simples e compostos.*

Professora: *Vocês já pensaram em fazer o cálculo de cada um deles?*

¹² Signos (símbolos matemáticos) são elementos que representam quantidades, situações, objetos ou conjuntos.

E13: O nosso é juros simples, porque ele não tem tipo (pausa), conforme todo mês ele continua o mesmo. Ele é juros simples, porque ele não aumenta, ele continua 10% sobre o valor das parcelas, a gente só vai adicionar 10%.

Além de estabelecer a relação do menor juros para a compra com o cartão de crédito, o grupo relacionou juros compostos com uma compra informal, ou seja, o valor de juros a ser cobrado neste tipo de transação é maior, tais conclusões estão presentes no excerto a seguir:

E13: Aqui professora, perguntou sobre as propostas aí eu falei que ia ser no cartão, mas que tinha proposta de parcelar no dinheiro com juros compostos de 5%.

Neste excerto, podemos inferir que a **E13** fez uma representação mental da situação, pois associou a situação proposta com o conceito de juros simples e juros compostos, indicando assim, uma possível visualização da situação. Segundo Dreyfus (2002), a visualização é uma imagem mental de um conceito, processo pelo qual as representações mentais podem vir a ser. Após a visualização da situação, mediada pela **E13**, o grupo definiu algumas informações para o estudo das condições de pagamento e as possíveis simulações para testes e conjecturas, de modo a abarcar a questão 5 (Façam uma simulação detalhada, com o máximo de registros possíveis, diferentes representações para justificar sua escolha de pagamento.). Ponte (2003, p. 17) entende “[...] a formulação de conjecturas, um dos aspectos mais importantes do processo de investigação”, visto que subsidiará a obtenção de uma solução para o que está sendo investigado. As informações definidas pelo grupo estavam relacionadas à quantidade de parcelas e os meses a serem pagos pelo aparelho celular, conforme informações presentes no excerto a seguir:

*E13: Aí você coloca que vai ser pago no cartão e parcelado em 6 x, com acréscimo de juros.
[...] acho interessante colocar mês a mês, estamos em fevereiro então seria: março, abril, maio, junho, julho e agosto. Terminaríamos de pagar em agosto.*

Com base nessas informações propostas pelo grupo, iniciou-se uma investigação dos dados a fim de justificar a melhor condição de pagamento. Nesta fase houve uma exploração das informações em que, no contexto de uma tarefa investigativa, “[...] os alunos vão planejar a resolução do problema, investigar os materiais que necessitam, recolher e organizar os dados, experimentar e preparar experiências futuras” (BAPTISTA, 2010, p. 98).

No intuito de justificar a escolha, o grupo fez os cálculos referentes às condições de pagamento, porém apresentaram dúvidas em relação aos procedimentos para a obtenção dos resultados e das expressões matemáticas, conforme diálogos apresentados no excerto a seguir:

*E13: Ai, não lembramos muito bem da fórmula dos juros compostos, lembro alguma coisa sobre o montante.
Professora: Do montante? Ham! E não tem relação?*

E13: Então, eu acho que lembro!

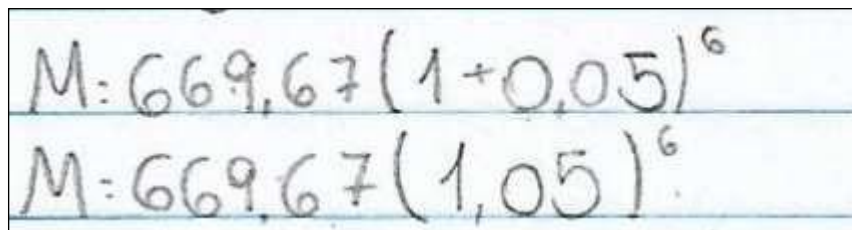
Professora: Tudo bem, se vocês conseguirem relacionar os juros compostos com sua expressão.

E13: Então, seria m de montante, c de capital e esse [apontando para a expressão] é o que mesmo?

Professora: Taxa.

A **E13** estabeleceu uma relação com juros compostos, porém não se recordava como realizar o cálculo. Após mediação da professora, a **E13** formulou uma expressão, com base em seus conhecimentos prévios e na expressão geral de juros compostos, para o conceito a ser estudado ($M(x) = 669,67 (1 + 0,05)^x$) em que M representa o montante a ser pago (em reais) no tempo x (em meses). Neste momento percebe-se uma mudança de representação, abordando-se diferentes formas de se referir à taxa representada por 5% que pode ser um número decimal 0,05 ou um número fracionário $5/100$. O grupo, todavia, utilizou a representação decimal, conforme mostra a Figura 11, apresentando a manifestação de mudança de representação, por se tratar de maneiras diferentes de tratar do mesmo objeto de estudo, característica do Pensamento Matemático Avançado.

Figura 11 - Resposta à questão 5 - Representação decimal da taxa na expressão algébrica de juros compostos “Grupo A”



The image shows two lines of handwritten mathematical formulas. The top line is $M = 669,67 (1 + 0,05)^6$ and the bottom line is $M = 669,67 (1,05)^6$. The formulas are written in blue ink on a white background with a horizontal line separating the two lines.

Fonte: Relatório do grupo A.

A comunicação ocorreu conforme excerto abaixo:

E13: Eu lembro que tinha que fazer alguma coisa com a taxa.

E19: Dividir por cem, ou colocar sobre cem. Você não lembra? É isso né professora?

Professora: Isso, você pode utilizar essas formas para representar a taxa.

E13: Vocês se lembram né? Se eu esquecer de algum detalhe vocês me lembram.

E1: Já vamos fazendo na folha.

E13: Olha! Montante igual capital, espera aí! Coloca aí embaixo capital, coloca igual R\$ 669,67, um mais 0,06, não! Não vai ser dividido em seis, é 0,05, aí ...

No excerto supracitado podemos evidenciar o processo de mudança de representação e tradução. Para Flôres, Fonseca e Bisognin (2020), a mudança de representação e tradução pode ocorrer tanto da representação fracionária para a decimal, quanto nas representações fracionárias equivalentes.

O grupo também apresentou dificuldades na representação da taxa, ao calcular os juros compostos, não relacionando o expoente à quantidade de meses e confundindo a forma de calcular uma potência, conforme excerto a seguir:

E13: [...] aqui 0,50, mas em cima é o seis, porque o pontinho abaixo é os juros, as parcelas, aí você vai resolver primeiro o que está entre parênteses.

E19: Ham!

E13: Aí você une 1 com 0,05 e fica 1,05. Isso... Aí você vai elevar a seis.

E19: Acho que você faz dividido por seis, né E10!E10: Oi eu acho que...

E1: Ou ele vezes ele seis vezes?

E13: É porque geralmente, quando é sobre um número ...

E1: Acho que é ele vezes ele, seis vezes mesmo.

E13: Acho que não, porque ...

E10: Acho que não! Mas não é o valor de cada parcela?

E13: Então, não sei se achamos o valor das parcelas ou total.

E10: Eu acho que é o valor das parcelas, porque no final nós temos que colocar o resultado, nós vamos pagar em seis meses.

E13: É.

E10: Acho que deveríamos fazer primeiro mês a quantia que nós vamos pagar, segundo mês, até chegar no sexto mês. E aí somar todo resultado.

E13: Mas com juros simples sai só os juros, mas nos juros compostos sai o montante o problema é esse.

No entanto, o grupo continuou as abordagens e construiu uma representação mental, discutindo uma provável organização dos dados mês a mês e visualizou a situação a partir da construção de um gráfico, mobilizando característica do Pensamento Matemático Avançado. Esta característica pode ser evidenciada no excerto abaixo:

E13: Vejam se os juros ele dá cem reais se é juros composto no próximo mês acrescenta 5%, acho que do valor anterior.

E19: Aí ele vai aumentando.

E13: Aí ele vai aumentando, já nos juros simples é o mesmo valor da parcela todo mês.

E1: Como é para fazer? Não estou entendendo.

E19: É! Pega o valor do aparelho vezes 1,05 elevado a 6.

E10: Então aqui é elevado a um, aqui elevado a dois, elevado a três e mês a mês vai dar o valor, ou seja, um resultado diferente. Aqui é o valor dos juros. E aí podemos montar um gráfico.

[...]

E10: Os cálculos já terminaram, mas a visualização da situação acho interessante pela tabela e o gráfico.

Com intuito de organizar as informações, já com os valores calculados, os integrantes do grupo A sugeriram a construção de tabelas e gráficos a fim de visualizar a situação. Para Mariotti e Pesci (1994), a visualização é o pensar baseado em imagens. A organização dos dados após os cálculos, ocorreu em duas tabelas distintas, representando as simulações por meio do juros simples e juros compostos, conforme Figura 12.

Figura 12 - Resposta à questão 5 - Organização em tabela “Grupo A”

Juros simples		Juros compostos		
	Juros	Meses	Montante	Juros
1º mês	33,48	1º mês	702,45	33,78
2º mês	66,97	2º mês	738,31	68,64
3º mês	100,45	3º mês	775,27	105,55
4º mês	133,93	4º mês	813,98	144,31
5º mês	167,42	5º mês	854,68	185,01
6º mês	200,90	6º mês	897,42	227,75

Fonte: Relatório do grupo A.

Na organização dos dados, o grupo A apresentou os valores referentes a cada mês, utilizando o valor de R\$ 669,67 como o valor total do aparelho. Nas discussões, os estudantes cogitaram dar um valor de entrada, porém nos registros não constou o valor de entrada na tabela e nos cálculos para os valores referidos. Podemos conjecturar que os alunos, ao discutirem sobre a situação, estabeleceram algumas ações e procedimentos que foram abandonados, conforme avançaram no desenvolvimento da tarefa.

Ao analisarmos os valores apresentados na tabela de juros simples, evidenciamos que os alunos realizaram corretamente os cálculos. Porém, em relação à tabela dos juros compostos, o grupo cometeu um erro no valor do primeiro mês, apresentando o valor de R\$ 702,45 como montante, R\$ 33,78 de juros, sendo que o correto é R\$ 703,15 de montante e R\$ 33,48 de juros. Os valores dos outros meses estão corretos. Neste registro foi possível evidenciar processos do pensamento matemático como: representação simbólica, representação mental, visualização, mudança de representação.

Além disso, o grupo representou a situação por meio de duas expressões matemáticas para cálculo dos juros, representadas na Figura 13.

Figura 13 - Resposta à questão 5 – Expressões Matemáticas “Grupo A”

The image shows two handwritten mathematical formulas on lined paper. The first formula is $J = 669,67 \cdot 0,05 \cdot x$ and the second formula is $M = 669,67 (1 + 0,05)^x$.

Fonte: Relatório do grupo A.

Considerando as expressões utilizadas pelo grupo A, evidenciamos que foram utilizadas expressões já vistas anteriormente pelos estudantes, o que não possibilitou a construção ou adequação de um modelo matemático, mas reconheceram os conceitos de juros simples e compostos, por meio da intuição, apresentando indícios de Pensamento Matemático

Avançado (Dreyfus, 2002).

A partir das tabelas, podemos evidenciar uma mudança de representação dos registros – da tabela para o gráfico. Nesta fase identificaram-se alguns processos de Pensamento Matemático Avançado como a visualização, mudança de representações e tradução (DREYFUS, 2002). Porém as discussões indicaram dificuldades na construção dos gráficos:

E13: Agora professora, queremos montar o gráfico, igual a gente fazia ano passado, nós fizemos bastante, quando estudamos função. Eu lembro que a gente fazia tabela, parecida com essas que estamos fazendo agora e depois representarmos num gráfico.

Professora: Mas você acha que essa situação tem a ver com função?

E13: Então professora, vamos tentar fazer o gráfico, mas até aqui, está lembrando, mas estamos confusas em como podemos fazer o gráfico. Porque lembro dos lados que eram positivos e negativos.

Professora: Ham, e o que mais vocês lembram?

E19: De unir os pontos.

Professora: Era assim mesmo. Quanto aos números positivos e negativos, algum cálculo de vocês deu um número negativo?

E13: Não, então eu acho que não precisa, né?

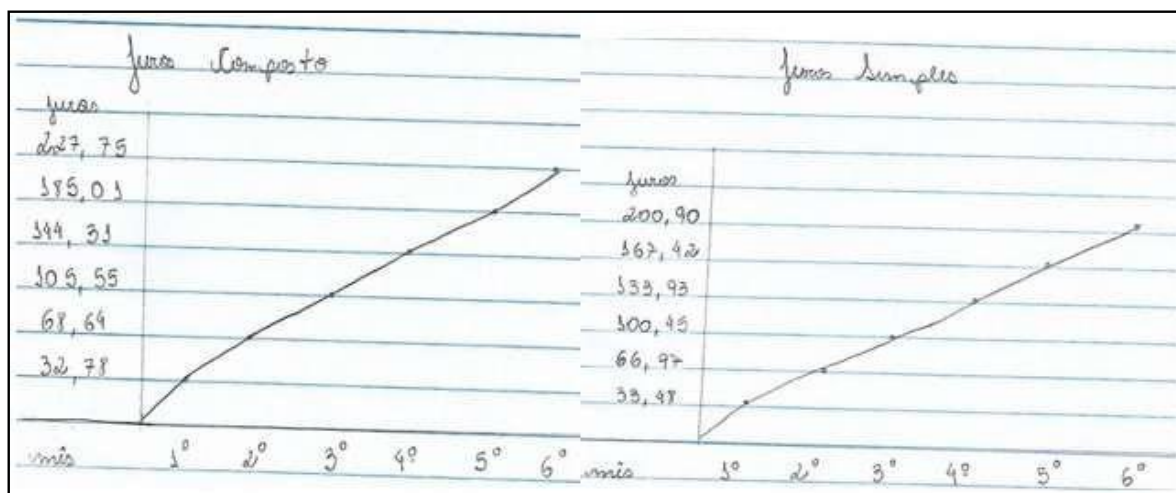
Professora: Isso mesmo, não precisa.

E13: Uma dúvida na hora de representar no gráfico, na coluna a gente coloca o juros ou o montante? (se referindo ao eixo y)

Professora: O que vocês preferem, qual é o melhor para representar a situação, ou seja, para poder comparar as condições propostas por vocês?

No momento da dúvida em relação à construção dos gráficos, a **E13** apresentou indícios de uma síntese, relacionando os juros compostos e simples com uma função, porém essa síntese poderia ter sido feita a partir dos dados e das expressões de juros simples e juros compostos, observando os expoentes de cada expressão. Isso denota que uma representação gráfica (Figura 14) possibilita a visualização do comportamento de cada valor de acordo com as condições de pagamento.

Figura 14 - Resposta à questão 5 - Gráfico “Grupo A”



Fonte: Relatório do grupo A.

Na construção do gráfico, o grupo não utilizou uma escala que permitisse visualizar corretamente o tipo de função, ou o comportamento da função, porém a professora entrevistou, a fim de mobilizar nos estudantes uma possível síntese, como mostra o excerto abaixo:

Professora: Observe que vocês não utilizaram uma escala na construção do gráfico.

E13: Não, professora. Utilizamos a linha do caderno.

Professora: Então, se não tivessem utilizado a linha como seria esse gráfico? Observe que os dois parecem estar em linha reta, será que os dois são em linha reta?

E13: Não professora, seria mais uma curva crescente?

Professora: Sim. E que tipo de função é?

E13: Me parece aquela função de linha reta e a outra uma função exponencial, só não me lembro se falamos que se é crescente ou decrescente.

E19: Acho que falávamos sim. Mas não lembro de juros.

Com a construção do gráfico referente aos dados apresentados em cada tabela da Figura 12, os estudantes conseguiram estabelecer uma relação com os tipos de função já estudados na disciplina de matemática no ano anterior. Ou seja, a visualização do comportamento dos gráficos permitiu ao grupo realizar uma síntese da situação, relacionando os gráficos de juros simples e juros compostos com os conceitos de função linear e função exponencial, respectivamente, processo considerado por Dreyfus, um pré-requisito para a abstração, conforme Figura 15.

Figura 15 - Resposta à questão 5 - Síntese “Grupo A”

A função de juros compostos é exponencial porque segue as características e obviamente a fórmula é basicamente uma potência

A função de juros simples é linear e faz parte da equação de 1º grau

Fonte: Relatório do grupo A.

Para Dreyfus (2002), a síntese consiste em compor as partes do conhecimento de forma a construir um todo que, muitas vezes, equivale mais que a soma de suas partes. Klaiber (2019) considera que a síntese pode ocorrer com a utilização de conceitos matemáticos diversos para analisar e interpretar uma situação matemática.

Com base nos cálculos, o grupo A apresentou uma conclusão de que a simulação do pagamento com o cartão no sistema dos juros simples é a mais vantajosa, comparando valores, benefícios e condições de pagamento (Questão 6: A qual conclusão vocês chegaram?). Para a compra informal por meio do sistema de juros compostos, os alunos justificaram como um valor maior em que compararam com a simulação dos juros simples e agregaram com o contexto, como um valor que não poderiam se comprometer em pagar, apresentando uma consciência financeira. Porém, no último trecho não apresentaram uma justificativa coerente aos cálculos apresentados. No entanto, uma síntese foi apresentada pelo grupo no término da construção do gráfico apresentado na Figura 14. A Figura 16 apresenta a conclusão elaborada pelo grupo.

Figura 16 - Resposta à questão 6 - “Grupo A”

Chegamos a conclusão que a opção mais vantajosa seria pagar com o cartão à juros simples e que fizemos comparações de valores, benefícios e condições de pagamento chegamos a melhor forma de comprar.

Parcelar no dinheiro seria um valor muito maior do que se pedisse me comprometer a pagar.

Pois com um juros simples de ~~0,05%~~ ^{0,05%} daria no total o valor de R\$39,90 reais, que com o juros compostos de 5% teríamos pago esse valor no 2º mês.

Fonte: Relatório do grupo A.

Com a conclusão da tarefa 1 foi possível evidenciar alguns aspectos do PMA com relação à representação e à abstração presentes nas ações e resoluções do Grupo A. Com relação aos processos de representação foi possível evidenciar representação simbólica, pois, os estudantes utilizaram símbolos e expressões matemáticas como do juros simples e juros compostos; representação mental, associaram o conceito de porcentagem e juros à situação; visualização, pois, geraram uma imagem mental da situação proposta e expressaram por meio de símbolos, expressões, esboços, tabelas e gráficos para explorar a situação; intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos prévios para resolver as questões; mudança de representação e tradução, quando utilizaram mais de uma forma de resolver a situação por meio de duas

expressões de juros simples e juros compostos analisando a situação que melhor satisfazia a situação-problema. Com relação aos processos de abstração foi possível evidenciar a síntese, ao relacionar o esboço dos gráficos às funções afim e exponencial.

3.1.2 Análise do desenvolvimento da Tarefa 1 - grupo D

O grupo D iniciou a resolução da tarefa fazendo uma reflexão da situação utilizando conceitos já estudados em Educação Financeira. Para isso, descartou a realização de um empréstimo relacionado a dívidas e guardar dinheiro também não seria uma boa opção devido ao tempo, então sugeriram como ação vender o aparelho antigo para pagar parte do valor, conforme discussão apresentada no excerto abaixo:

E31: Então, vamos lá! Empréstimo não poderia ser uma boa opção, pois pode conter dívidas. Guardar dinheiro, não podemos esperar muito tempo, pois o celular está com problemas. Vender o smartphone seria uma ótima opção.

O E31 começou a discussão com o grupo apresentando soluções para a situação, levantando pontos importantes, como economia dos gastos e fazendo articulações com situações reais, com o objetivo de compreender a situação e encontrar soluções para a situação proposta. Apresentando como solução à primeira questão (Diante da situação apresentada, qual sua primeira ação?), os estudantes consideraram a ação de realizar uma pesquisa de preços utilizando como critérios preço e qualidade, como mostra a Figura 17:

Figura 17 - Resposta à questão 1 - “Grupo D”

Pesquisar e procurar por mais opções em custo e com boa qualidade

Fonte: Relatório do grupo D.

Após responder à primeira questão, o grupo voltou às suas discussões em relação ao valor do aparelho celular e às condições de pagamento de acordo com os valores fornecidos na consulta, conforme excerto do grupo D a seguir:

E31: Então vender o smartphone seria uma ótima opção para dar de entrada, então chegamos à conclusão que vender o smartphone antigo seria mais vantajoso, porém não paga todo o valor.

Professora: Oi! O que vocês estão pensando? Já escolheram o aparelho?

E31: Já!

Professora: Qual o valor do aparelho?

E31: R\$230,00

Professora: Que celular barato!

E31: Sim, mas é usado.

Professora: Tudo bem! E vocês pensaram como pagar?

E31: Vamos dar uma entrada, vendendo o celular antigo e com o dinheiro do celular antigo, nós vamos dar uma entrada e aí o que ficar nós vamos parcelar.

Professora: E deste valor que será parcelado, o valor ficará o mesmo ou terá um acréscimo?

E27: Terá um acréscimo.

Professora: E o acréscimo como foi feito para calcular?

E31: Não, nós vamos calcular ainda.

Professora: Vocês sabem em quantas vezes vão parcelar?

E31: Não, ainda não, a gente tá colocando as opções.

E31: Nossa gente, eu tinha esquecido esse negócio de acréscimo.

Na discussão do grupo D, o estudante **E31** comenta sobre uma possível entrada, revelando que pensou nos benefícios que uma entrada pode proporcionar. Porém, quando a professora fala sobre “acrécimo” o **E27** comentou que terá acréscimo e o **E31** não estabeleceu uma relação da situação com acréscimo.

Neste momento, a professora esperava com a pergunta (se o valor terá um acréscimo?) que os estudantes estabelecessem relação com o conceito de juros realizando uma representação mental do conceito. Dreyfus (2002) destaca este processo como uma forma interna criada pelo indivíduo para lidar com o mundo externo, porém esta característica não pode ser evidenciada a partir dos diálogos realizados entre os integrantes do grupo e a professora.

Em seguida, os estudantes elencaram questões como valores para o aparelho celular fazendo uma consulta de preços em diferentes sites, abordaram questões referentes às quantidades de parcelas relacionadas ao valor total do aparelho, assunto que já foi tratado em Educação Financeira como o comprometimento da renda com pequenas parcelas. O grupo se atentou ao enunciado da questão com o objetivo de esclarecer o que é um orçamento relacionado com anotações feitas no caderno e valores que “cabem no bolso”. Tais discussões também permitiram aos estudantes estabelecer relações com conceitos já presentes no cotidiano, conforme excerto transcrito a seguir:

E27: Se é R\$230,00, temos que vender o celular por quanto?

E26: Uns R\$280,00.

E31: Que R\$280,00, o que!

E26: Vamos ter que parcelar R\$230,00 (risos).

E31: Vamos ver os preços do aparelho celular aqui no site do “Magalu”.

E26: É! Vamos ver, parcelar R\$ 230,00 é pouco.

E27: Acho que é meio que um valor que cabe no bolso.

E31: Tá! E aí?

E27: No caso acho que é tipo o que a gente viu ali, parcelado, quantas vezes você vai parcelar, quanto que vai vender o celular antigo, para poder dar de entrada, entendeu?

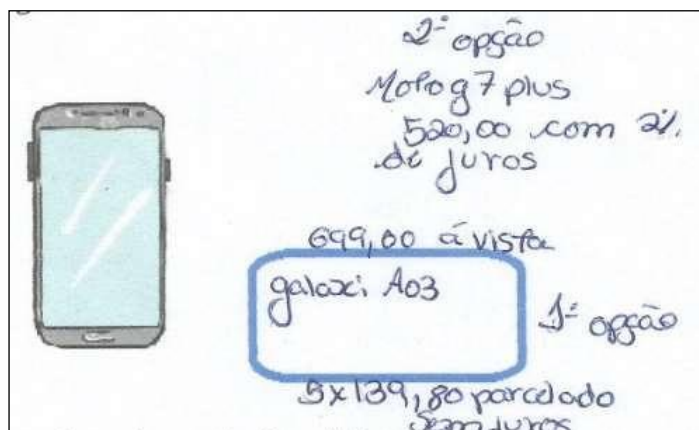
E31: Tá mais...

E27: Fazer umas anotações no caderno, um orçamento, com valores que cabem no bolso.

As discussões permearam o grupo até a definição do valor do aparelho, ou seja, até

estabelecer o objeto matemático a ser estudado por meio da representação simbólica (Figura 18). Para Bianchini e Machado (2013) a função da representação simbólica é geralmente de facilitar a comunicação de um conceito.

Figura 18 - Valor do aparelho de celular - “Grupo D”



Fonte: Relatório do grupo D.

Por meio da resposta apresentada pelo grupo (Figura 18) foi possível evidenciar características do processo de mudança de representação, em que o valor R\$ 699,00 foi representado por $5 \cdot 139,80$. Para Dreyfus (1991), uma pessoa pode realizar diferentes representações e esta manifestação é estritamente importante na matemática, embora seja importante ter várias representações de um conceito, a sua existência por si só, não é suficiente para tornar flexível o seu uso, é necessário que tenha um significado associado ao objeto a ser estudado, é preciso que uma representação esteja ligada a outras.

Com a pesquisa realizada em um site de compras, fica evidente que o valor inicialmente sugerido pelo grupo (R\$ 230,00) se mostrou muito inferior e, com isso, mudaram as estratégias de compra.

De posse das informações, o grupo iniciou uma discussão e resolução das possíveis condições de pagamento definindo duas simulações: a 1ª referiu-se ao pagamento à vista no valor de R\$ 699,00 sem juros, em uma loja virtual, já a 2ª opção referiu-se ao pagamento à prazo com o acréscimo de 2% de juros como foi apresentado na Figura 18.

O grupo prosseguiu as discussões referentes às conjecturas a serem formadas. Para isso utilizaram a 1ª opção de R\$ 699,00 como referência, estabeleceram um valor de entrada de R\$ 310,00 e o restante foi parcelado em 5 vezes. Porém, durante a discussão, os estudantes apresentaram dúvidas relativas à resolução da situação, conforme excerto a seguir:

E31: Agora faz: 700 menos 310, [...] agora a gente parcela em 3 vezes sem juros,

parcela aí.

E27: Ah! Tem que parcelar esse negócio, então dá para fazer aquela conta “coisada” do valor do celular, valor que vai ser parcelado, e o valor que a gente vendeu, só vai faltar o valor que a gente vai dar.

E31: Regra de três?

E27: É! Para gente descobrir o valor que vamos ter que dar no celular. Também daria né?

E31: Seria mais fácil...

E26: Pegar o valor do celular e diminuir com o que a gente deu de entrada, entendeu?

E27: [...] então, trezentos e noventa ...

E31: Dividido em três vezes.

E27: Cento e trinta!

E31: Isso! Cento e trinta! [...] aí pronto. Três vezes ou cinco vezes?

E26: Faz aí em cinco para ver quanto vai dar.

E27: Em cinco? Setenta e oito reais.

E26: Ah! Acho melhor em três! Porque sofre para ficar pagando 78 reais...

No excerto supracitado, evidenciamos que o grupo apresentou discussões sobre o cálculo da parcela, a **E27** sugeriu como solução utilizar a regra de três para obter o valor a ser parcelado, não sendo a operação correta para a situação. Com a ajuda da **E31** e da **E26** chegou-se a uma representação mental da situação, uma intuição do conceito a ser utilizado e uma possível visualização. Segundo Flôres, Fonseca e Bisognin (2020), a visualização é o processo que possibilita a existência das representações mentais, ou seja, a situação começou a ganhar forma.

O grupo continuou a discussão referindo-se aos valores das parcelas em que realizou o cálculo, adicionando a taxa de 2% a cada parcela, conforme excerto transcrito a seguir:

E31: Então daí fica cento e trinta. Então foi parcelado em três vezes de R\$130,00.

E31: Sim, vamos aumentar 2%.

E26: Março também?

E31: Março não! Nós vamos ver se vai continuar aumentando 2% do valor ou se vai tipo ser 2% para todos os meses.

E27: Não!

E31: Se for 2% para todos os meses, a parcela seria 120 reais

E27: Como assim 120 todos os meses?

E31: É... Dois por cento todo mês.

E27: Dá o mesmo valor, só muda o mês!

Na discussão, os estudantes não se atentaram ao erro cometido, pois, consideraram que o valor de 2% de R\$ 130,00 resulta em R\$ 120,00 como comentado pela **E31**. Neste momento, a professora entrevistou, conforme excerto abaixo:

Professora: Como vocês calcularam o acréscimo?

E27: Com dois 2%.

Professora: Mas como vocês fizeram o cálculo dos 2%?

E31: Com juros simples.

Professora: Mas revejam então esse resultado! E teria uma outra forma de calcular esses juros?

E31: Juros composto?

Professora: Isso seria uma outra forma. Se achar interessante, coloquem!

E31: Beleza! Professora, aí podemos colocar qual é mais viável?

Professora: Sim.

E31: Vamos nos organizar então gente!

Após a intervenção da professora, os estudantes iniciaram uma abordagem sobre o assunto de juros simples e compostos e fizeram uma correção do cálculo de 2%, conforme excerto a seguir:

E27: Vou tentar fazer o negócio aqui, para arrumar o que a professora pediu, mas acho que não vai dar certo (risos).

E31: Mas aqui não tem que fazer 370 dividido por quatro? E a professora pediu para rever... então vamos calcular dois por cento do resultado, com juros compostos e não a juros simples.

Com isso, iniciou-se uma organização da representação mental, característica do Pensamento Matemático Avançado. Para Klaiber (2019), a representação pode estar associada a objetos matemáticos com operações algébricas e aritméticas. Neste caso, o grupo optou pelo procedimento do juro composto descartando a estrutura anterior formada por meio do juro simples, o que revelou que o grupo mobilizou novamente processo da intuição. Para Bussmann, Klaiber e Silva (2017), o processo de intuição pode ser evidenciado quando estudantes recorrem a procedimentos ou métodos já estudados por eles, ou seja, utiliza a intuição para resolver uma situação.

Após a definição dos procedimentos a serem utilizados, a discussão pautou-se nos cálculos sobre o valor de R\$ 520,00 no aparelho de celular usado, comprado em uma rede social a juros compostos. Para a realização do cálculo dos juros compostos, os estudantes utilizaram o valor das parcelas, conforme indicado no excerto:

E3: Mas aqui não tem que fazer 370 dividido por quatro?

E26: Deu de entrada 370 reais?

E31: Não!

E31: Tô terminando de fazer os cálculos dos juros compostos. Vai dar trezentos e setenta dividido por quatro, e aí esse resultado a gente faz elevado por quatro. Noventa e dois e cinquenta. [...] no segundo mês, a gente vai pagar, noventa e quatro e trinta e cinco.

E26: No segundo mês e agora vamos para o terceiro mês, já que no primeiro foi a entrada.

E31: Aí a gente faz noventa e dois de novo né?

E26: A única coisa que a gente muda é o tempo!

Os valores de cada parcela, após as discussões foram apresentados pelas expressões algébricas, conforme registro da Figura 19:

Figura 19 - Resposta à questão 5 - Generalização - "Grupo D"

$M = c(1+i)^1$ $M = 370(1+0,02)^1$ $M = 370 \cdot (1,02)^1$ $M = 370 \cdot 1,02$	$M = c(1+i)^1$ $M = 92,50(1+0,02)^1$ $M = 92,50 \cdot (1,02)^1$ $M = 94,35$ <p>2º mês</p>
$M = c \cdot (1+i)^2$ $M = 92,50(1+0,02)^2$ $M = 92,50 \cdot 1,0404$ $M = 96,23$ <p>3º mês</p>	$M = c \cdot (1+i)^3$ $M = 92,50(1+0,02)^3$ $M = 92,50(1,061208)$ $M = 98,16$
$M = c(1+i)^4$ $M = 92,50(1+0,02)^4$ $M = 92,50 \cdot 1,08243216$ $M = 100,12$	

Fonte: Relatório do grupo D.

Durante as discussões do grupo D, foi possível evidenciar a dificuldade em utilizar diferentes representações, por exemplo, não discutiram a representação da taxa ao empregar a expressão dos juros compostos ou seu expoente, todavia, conseguiram relacionar o tempo (expoente) a cada mês, encontrando valores mês a mês. Outro fator que nos chamou a atenção foi o fato do grupo não se atentar sobre o valor da parcela como referência, não fazendo testes com o valor total a ser parcelado. Segundo Ponte (2003, p. 2), “as conjecturas que resistirem a vários testes vão ganhando credibilidade, estimulando a realização de uma prova que, se for conseguida, lhes conferirá validade matemática”.

Todavia, a fim de responder à questão 5 (Façam uma simulação detalhada, com o máximo de registros possíveis, diferentes representações para justificar sua escolha de pagamento) o grupo organizou os dados em tabela (Figura 20). Para isso, o grupo D considerou o valor de R\$ 699,00 para a compra do aparelho novo pelo site direto da loja, com um valor de entrada de R\$ 200,00 e o restante do valor pago em 4 vezes sem juros. A segunda tabela, apresentada na Figura 20, destaca outra forma de representar a situação por meio dos juros compostos, considerando o valor de R\$ 520,00 para um aparelho usado encontrado em um site de rede social, em que estabeleceram o valor de R\$ 150,00 como entrada e o restante foi parcelado em 4 vezes com acréscimo de 2% ao mês sobre o valor da parcela de R\$ 92,50. Porém, ao analisarmos esse registro evidenciamos um equívoco cometido pelo grupo, visto que, ao calcular os juros, os estudantes utilizaram como referência o valor das parcelas, porém o correto seria o valor total a ser parcelado de R\$ 370,00.

Figura 20 - Resposta à questão 5 - Organização em tabela - "Grupo D"

I				
	Meses (sem juros)			
Valor Total	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril
699 reais	200,00	124,75	124,75	124,75
			Maior 124,75	simulação de magazine Luiza

II				
	Meses (juros compostos)			
Valor Total	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril
520,00	150,00	94,35	96,23	98,16
		(com juros 2%)	(com juros 2%)	(com juros 2%)
	Maior 100,12	simulação do Saabook (as duas saíram 758,86 reais com os juros).		

Fonte: Relatório do grupo D.

Considerando a qualidade da imagem apresentada na Figura 20, na Figura 21 foi realizada uma digitação dos resultados apresentados pelos alunos.

Figura 21 - Transcrição da resposta à questão 5 - Organização em tabela - “Grupo D”

Sem juros				
Meses				
Valor total	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril
699 reais	200,00	124,75	124,75	124,75
		Maio	Simulação do Magazine Luiza	
		124,75		
Juros compostos				
Meses				
Valor Total	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril
520,00	150,00	94,35 (com juros de 2%)	96,23 (com juros de 2%)	98,16 (com juros de 2%)
		Maio	↓ Simulação do Facebook (Ao todo sairá 758,86 reais com o juros)	
		100,12		

Fonte: Relatório do grupo D.

Sendo assim, o grupo D utilizou a expressão do juro composto ($M(t) = 92,50 (1 + 0,02)^t$) como procedimento para uma das simulações, neste caso, utilizou-se conceitos estudados anteriormente para resolver a questão a partir dos dados fornecidos pelo próprio grupo e do contexto da tarefa, na sequência, utilizou a expressão como meio de representar a situação, porém, não satisfaz a solução correta da situação, pois o cálculo da expressão deveria levar como base o valor a ser parcelado de R\$ 370,00, e o valor utilizado para referência do grupo foi de R\$ 92,50. No início do cálculo, os estudantes utilizaram a expressão correta, no entanto refutaram a expressão utilizada e exploraram o padrão a partir do valor de R\$ 92,50.

A professora entrevistou fazendo apontamentos sobre o valor utilizado para o cálculo do montante, destacando que, ao calcular os juros, o valor a ser utilizado deveria ser o valor total da dívida, porém não foi solicitado que os estudantes alterassem a resposta. No intuito de realizar diferentes representações, o grupo optou pela mudança de representação da tabela para o gráfico, porém os estudantes apresentaram dificuldades na elaboração do gráfico e recorreram à internet para realizar pesquisas de modo a sanar as dúvidas, conforme excerto a seguir:

E31: A gente pula uma linha para cada valor ou duas linhas?

E26: Mas como você está fazendo? Embaixo são os meses, é isso?

E31: Sim.

E11: Então tem que olhar os valores, tipo...

E26: E vai aumentando na mesma proporção.

E11: É esses espacinhos.

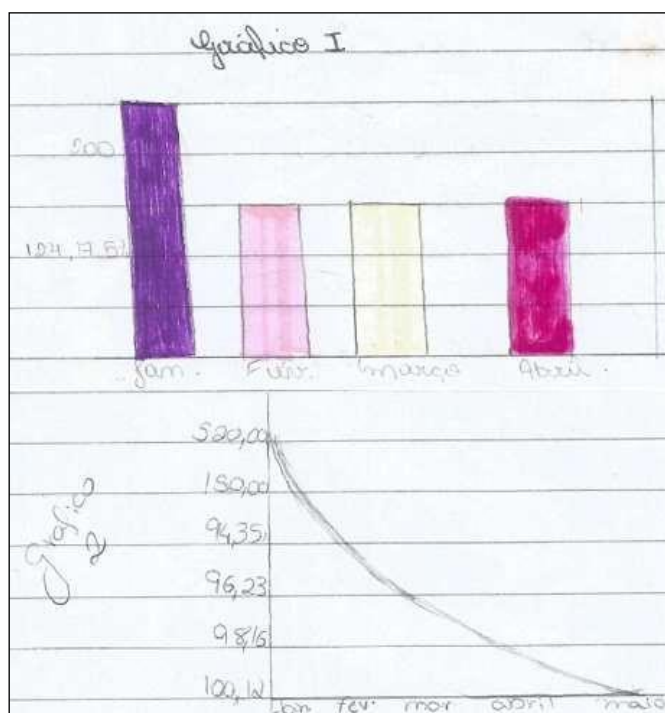
E27: É vai fazendo ele no gráfico cartesiano.

E31: Faz o x e y. Mas tipo não dá para montar do outro jeito?

E27: Faz esse assim e o outro a gente faz usando o plano cartesiano.
 E31: Humm. Pesquisa aí, tipos de gráficos.
 E27: Tem desse, esse parece ser mais fácil, redondo.
 E26: Ah! Sei lá, estranho.
 E27: Mas parece ser bem mais fácil.
 E26: Mas tem porcentagem.
 E27: É!
 E11: É! A não ser que coloque a porcentagem, tipo entrada...
 E31: Entrada cinquenta por cento?
 E11: É, isso.
 E31: [...] então podemos fazer qualquer gráfico. E esse daqui?
 E27: Acho que dá para fazer um gráfico normal.

Os estudantes começaram a relacionar o objeto em estudo com o plano cartesiano, porém não estabeleceram relação com função, construindo um gráfico de barras para a primeira simulação e o gráfico de linhas para a simulação por meio dos juros compostos. No entanto, o gráfico que representou os juros compostos está errado, utilizando o valor de R\$ 520,00 no eixo das ordenadas, além disso o gráfico é decrescente. Os estudantes não observaram o comportamento do gráfico, não identificando o erro cometido, como mostra a Figura 22.

Figura 22 - Resposta à questão 5 - Gráfico - “Grupo D”



Fonte: Relatório do grupo D.

Com a representação do gráfico, a professora mostrou aos grupos os erros cometidos, fazendo apontamentos em relação à distribuição dos valores no eixo y, conforme excerto a seguir:

Professora: Vocês observaram o gráfico de vocês?

E31: O que professora?

Professora: No eixo vertical – y, vocês colocaram como primeiro valor 100,12 e depois a cima colocaram valores menores, chegando a 520.

E27: É mesmo!

E31: E agora, já finalizamos a tarefa!

Professora: Podem até deixar, mas fiquem atentos na elaboração do gráfico, outro ponto importante é valor de 520 ele resulta dos cálculos, é o valor total do aparelho, então, não deveria estar constando no gráfico.

E31: Verdade! Por isso que o gráfico foi descendo.

Mesmo observando os erros cometidos, a professora não solicitou aos alunos que alterassem a resposta, seu objetivo foi ao término da atividade fazer apontamentos sobre a resolução e nas próximas tarefas observar o desenvolvimento dos estudantes. Esperávamos, ao final da questão, que os estudantes mobilizassem o processo de síntese, possibilitando uma abstração da situação, realizando uma análise geral da tarefa ou da questão, interligando a conclusões que foram construídas durante a tarefa ou estabelecendo relações com outros conceitos. Para Klaiber (2019), a síntese corresponde a separar propriedades e relações comuns do objeto dos seus aspectos específicos da representação para constituir o conceito abstrato.

Em resposta à questão 6 (a qual conclusão vocês chegaram?), o grupo D realizou uma comparação entre as condições propostas pelas simulações, justificando qual a opção mais vantajosa, destacando pontos já estudados em Educação Financeira como valor, durabilidade e qualidade de um produto, porém não relacionou a situação com conceitos já estudados, como funções, conforme resposta apresentada na Figura 23.

Figura 23 - Resposta à questão 6 - “Grupo D”

Preferimos a conclusão de que na loja Magazini a opção seria a melhor opção, por ser mais barato o produto e ter uma qualidade boa. Enquanto no Facebook os celulares que por vista são usados e muitas das vezes são caros, tanto com juros e com preço normal comprando em lojas. Entendo melhor, o aparelho usado tem somente a diferença de R\$ 80,00 reais do aparelho novo com o juros composto.

Fonte: Relatório do grupo D.

De modo geral, o objetivo para o desenvolvimento da tarefa era que os estudantes mobilizassem diferentes representações e indícios de abstração, porém foi possível evidenciar diferentes processos de representação como: representação simbólica, representação mental e visualização. Com relação à mudança de representação e tradução, o grupo revelou

dificuldades, apresentando o gráfico de segmento incorreto, dificultando uma síntese geral da situação. Enfim, no término não evidenciamos processos de abstração, pois o grupo não conseguiu estabelecer conexões consistentes com conceitos já estudados, como juros simples, juros compostos e suas funções.

Todas as intervenções da professora foram feitas durante as discussões dos grupos e na entrega da tarefa para que os estudantes dessem continuidade, com isso foram feitos os apontamentos em relação aos erros e acertos cometidos. No término da tarefa, a professora passou em cada grupo fazendo um apanhado geral das resoluções e, em relação aos erros cometidos pelo grupo D, a professora falou sobre o valor utilizado para o cálculo dos juros compostos e o erro cometido no gráfico. Os estudantes do grupo D reconheceram o erro, porém, não foi solicitado que alterassem as respostas, com o objetivo de analisar o que havia sido feito pelos estudantes até o momento e suas principais dificuldades. No entanto, a professora poderia ter auxiliado os estudantes no momento em que percebeu os erros, retomando ao cálculo de juros compostos, além disso, poderia ter elaborado um gráfico juntamente com toda a turma ou com o grupo, lembrando a construção no plano cartesiano. Vale destacar que é importante requerer dos alunos a retomada dos registros e correções dos erros apontados em aulas futuras.

3.1.3 Análise local dos processos do PMA nos grupos A e D na Tarefa 1

Ao final da tarefa 1 “Compra do aparelho de Celular”, inferimos alguns Processos do Pensamento Matemático Avançado, com ênfase nos processos de representação (representação simbólica, representação mental, visualização, mudança de representação e tradução), abstração (síntese e generalização), evidenciados na coleta de dados apoiando-nos no Quadro 12 baseado em Klaiber (2019) e na análise qualitativa de cunho interpretativo.

No Quadro 15 apresentamos uma síntese dos processos do Pensamento Matemático Avançado, mobilizados pelos dois grupos A e D bem como nossas conclusões sobre quais processos foram mobilizados pelos estudantes ao desenvolver a tarefa investigativa.

Quadro 15 - Síntese dos processos do PMA mobilizados na Tarefa 1

Processos do PMA	Grupo A	Grupo D
REPRESENTAÇÃO		
Representação Simbólica	X	X
Representação Mental	X	X
Visualização	X	X

Intuição	X	X
Mudança de Representação e Tradução	X	-
Modelação	-	-
ABSTRAÇÃO		
Generalização	-	-
Síntese	X	-

Fonte: Autoras.

De acordo com o Quadro 15, podemos evidenciar que os dois grupos A e D mobilizaram processos de representação como: representação simbólica, representação mental e visualização, porém os processos de mudança de representação e tradução não foram mobilizados pelos estudantes do grupo D. Os resultados apresentados se aproximaram de pesquisas relacionadas ao Pensamento Matemático Avançado como de Klaiber (2019) que faz um comparativo do 1º em relação ao 9º episódio em que os estudantes do curso de licenciatura em Química apresentaram uma evolução no processo de mudança de representação e tradução.

Quanto à mobilização do processo de modelação não foi possível evidenciar nos grupos A e D. Vale ressaltar que, embora a tarefa possibilite a mobilização do processo de modelação, essa não é uma condição para a resolução da mesma, logo, os estudantes podem não ter modelado por uma limitação da própria tarefa. Neste sentido, a pesquisa de Gereti e Savioli (2015) apresenta que apenas dois estudantes manifestaram o processo de modelação ao se tratar do conceito da área de um paralelogramo, questão do ENADE (2008), já em relação à questão que trata de conceitos como probabilidade, questão do ENADE (2011) nenhum aluno mobilizou o processo de modelação.

Quanto aos processos de abstração, apenas o grupo A mobilizou indícios deste processo, apresentando uma síntese da situação e relacionando a conceitos matemáticos como esperávamos até o término da tarefa. Vale destacar que mesmo que o grupo D não tenha mobilizado esse processo, teve um esforço, mesmo que com registros simples, em procurar uma forma de resolver e de abstrair. Para Dreyfus (2002), a síntese permite descrever de maneira unificada um vasto número de situações que têm sido consideradas separadamente e independentemente uma das outras, no entanto, generalizar e sintetizar não são tão difíceis como as exigências da abstração.

Com relação à generalização não foi possível evidenciar indícios desse processo, pois os dois grupos (A e D) utilizam conceitos já estudados a fim de representar a situação, com expressões de juros simples e juros compostos, todavia, os dois grupos se esforçaram para

encontrar uma expressão mesmo que equivocada como a resolução apresentada pelo grupo D, sinalizando o comprometimento dos grupos em resolver a situação. Para Dreyfus (2002) o processo de abstração está intimamente ligado à generalização, sendo assim, podemos inferir que os grupos A e D não mobilizaram este processo.

O que podemos evidenciar, assim como Klaiber (2020, p. 57) é que a aprendizagem “[...] por meio da representação e da abstração torna-se uma atividade criativa, que promove a reflexão crítica a respeito dos conhecimentos, e não apenas a reprodução de métodos e esquemas prontos transmitidos pelo professor”. Neste sentido, acreditamos que a natureza da tarefa pode ter favorecido o desenvolvimento de diferentes representações, porém, para Loughran, Berry e Mulhall (2006, *apud* Baptista, 2010), no desenvolvimento de atividades investigativas, os estudantes sentem dificuldades, sendo essencial que o professor esteja atento e os ajude a ultrapassá-las. Em nossa investigação, entendemos que essa dificuldade foi permeada também devido à quebra da rotina a que os alunos estavam habituados, pois a maioria sentia confortável com o ensino centrado no professor.

Enfim, podemos inferir que a tarefa investigativa permitiu evidenciar diferentes processos do Pensamento Matemático Avançado, porém se faz necessário analisar outros grupos e outras tarefas para evidenciar e analisar de modo mais amplo os processos envolvidos. Vale ressaltar, que as pesquisas aqui mencionadas como comparativos para análise bem como o Quadro 12, que utilizamos para análises, são referentes a estudantes de nível superior. No entanto, Dreyfus (2002) ressalta que a diferença entre os pensamentos está na complexidade como se lida com ela, por meio da abstração e representação pode-se mover de um nível para outro e assim administrar a complexidade.

3.2 Descrição e Análise da Tarefa 2 “Preço do gás e energia”

A Tarefa “Preço do gás e energia” configurou-se após a professora analisar as possibilidades para tratar de temas contidos no planejamento curricular de Educação Financeira como porcentagem, aumento e diminuição de preços e inflação. Além dos conteúdos, procuramos elaborar uma tarefa de caráter investigativo que, a partir do convite da professora, os estudantes pudessem investigar os dados pesquisados e utilizar conceitos já estudados ou conhecer conceitos novos, a partir de temas que estivessem presentes em seu cotidiano.

Para Ponte (2005), as tarefas de natureza mais desafiante como as investigativas, são indispensáveis para que os alunos tenham uma efetiva experiência matemática, sendo necessária a proposta de tarefas enquadradas em contextos da realidade.

Ao planejar a tarefa, a priori, buscamos evidenciar quais processos do Pensamento Matemático poderiam ser manifestados pelos estudantes em sua resolução, nos apoiando nos estudos de Dreyfus (2002) e no Quadro 12 adaptado de Klaiber (2019).

A tarefa foi iniciada no dia 08 de março de 2022 e concluída no dia 21 de maio de 2022, em um total de 5 aulas. Vale ressaltar que, por motivos de organização da escola, parte do horário das aulas foi comprometida para recados feitos pela direção e oração, sendo assim, nem todas as aulas tiveram 50 minutos para o desenvolvimento da tarefa. De modo geral, a dinâmica utilizada pela direção levou de 10 a 15 minutos em cada aula.

Antes de fazer o convite para iniciar o desenvolvimento da tarefa, a professora trabalhou com o texto: O que há por trás das variações dos preços¹³. No decorrer da leitura, a professora fez questionamento como: *Por que um produto que custava um valor no mês passado neste mês pode estar outro valor? Quais produtos sofreram constantes alterações de preços nos últimos dias ou meses?* Durante os questionamentos, os estudantes apresentaram como resposta: Inflação e deram como exemplo o preço da gasolina e o litro de óleo de soja que sofreram constantes variações de preços no início de 2022.

Os questionamentos tiveram o objetivo de a professora ‘sondar’ o interesse dos estudantes pelo tema. Após a leitura e as discussões sobre o texto, a professora apresentou a tarefa à turma, por meio de slides. Essa ação permitiu a realização do convite para que a situação fosse investigada. De acordo com Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021), com o aceite dos estudantes, a situação se configurou em um problema para eles, ou seja, tratou-se de uma situação desafiadora. Para tanto, a professora não fez a leitura de toda a tarefa apenas da charge (Figura 24) e notou o interesse dos estudantes ao falar sobre a alta de preço sobre os itens: energia elétrica e do botijão de gás.

¹³ O texto consta no livro: “Cenários para Investigação: Humanidades e Matemática em contexto”. Disponível em link: https://saber.com.br/obras/PNLD/PNLD_2021_OBJETIVO_2/Obra-e99850b2-f814-49e1-8553-a7a660924afa/e99850b2-f814-49e1-8553-a7a660924afa.pdf. Acesso em: 17/02/2022.

Figura 24 - Charge da "Tarefa 2"



Fonte: ALVES. Hora do Café. 14 nov. 2017. Disponível em: <https://fotografia.folha.uol.com.br/galerias/1582815303586029-hora-do-cafe-novembro-de-2017>. Acesso em: 31mar. 2022.

A professora deixou os estudantes opinarem sobre a alta do preço desses itens com o objetivo de evidenciar os conhecimentos prévios sobre o tema, como mostra o excerto a seguir:

E13: Porque ele está mudando seu valor constantemente e é uma das coisas que mais se utiliza, e geralmente se não me engano, é um recurso (pausa) como é o nome do recurso mesmo? (ela pergunta para um colega). Ah! É um recurso finito basicamente, geralmente quando é assim, tende a esgotar mais rápido.

Professora: Muito bem! Todos concordam com E13?

E29: Eu concordo e também tem a questão da inflação que você comentou!

Pelas discussões, entendemos que os estudantes mostraram interesse pelo tema e buscaram embasamento para argumentar suas respostas. A Figura 25 ilustra o momento da introdução da tarefa feita à turma.

Figura 25 - Momento da introdução da Tarefa 2



Fonte: Arquivo da professora.

Em seguida, a professora falou sobre a organização da turma, propondo alterações em alguns grupos devido ao comprometimento na realização da tarefa anterior (Compra do Aparelho de Celular) e a pedido dos estudantes que tiveram conflitos com alguns integrantes do grupo em outros momentos e outras disciplinas, deste modo, a professora aceitou realizar as modificações, a fim de evitar durante a realização da tarefa ou durante a aula um desconforto ou conflito dos estudantes. Em continuidade à nossa investigação, analisamos os dados dos grupos A e D, com a alteração de alguns integrantes dos grupos como indicado no Quadro 16.

Quadro 16 - Organização dos grupos analisados – Tarefa 2

Grupo	Estudantes
A	E1, E3, E13 e E19
D	E11, E26, E27 e E31

Fonte: Autoras.

Com a organização dos grupos e a introdução da tarefa, a professora propôs a realização de uma pesquisa sobre os preços do gás e da energia elétrica nos anos de 2017 a 2022, com a finalidade de agilizar o andamento da tarefa, devido ao número de aulas de Educação Financeira e aos feriados que ocorreriam entre as aulas. Ao solicitar a pesquisa os estudantes levantaram questionamentos, como mostra o excerto abaixo:

E13: Os valores da energia podem ser retirados do talão?

Professora: Pode, só prestem atenção nos valores apresentados.

E29: Posso pegar da internet?

Professora: Sim, só não se esqueçam de indicar a fonte.

Após os questionamentos, a professora comentou sobre como os dados poderiam ser apresentados, sendo manuscritos ou digitados e entregues na próxima aula para início da resolução da tarefa. Além disso, a professora orientou sobre os cuidados em relação ao valor da energia elétrica que é dada em kWh (quilowatts hora).

A tarefa impressa em folha sulfite foi entregue aos grupos no dia 29 de março de 2022 para que fosse iniciada sua resolução (Quadro 17), já com os dados coletados. Os grupos F e G não haviam feito a pesquisa solicitada, neste caso a professora pesquisou com eles na sala de aula: utilizou o seu próprio telefone celular para pesquisa de preços do gás e disponibilizou talões de energia elétrica de sua residência.

Quadro 17 - TAREFA 2 “Preço do gás e energia”

1. Observe a charge abaixo. Depois, responda às questões:



ALVES. Hora do Café. 14 nov. 2017. Disponível em:
<https://fotografia.folha.uol.com.br/galerias/1582815303586029-hora-do-cafe-novembro-de-2017>.
 Acesso em: 31 mar.2022.

- O valor do preço de quais produtos ou serviços foi utilizado pelo artista para abordar a alta da inflação?
- O que significa dizer que esses produtos afetam o orçamento familiar?
- Pesquise os preços desses itens em março de 2017 a 2022.
- Com base em sua pesquisa, o que vocês podem concluir com os resultados encontrados.
- Com base nestas informações vocês conseguem estimar o valor para 2023.

Obs: Não esqueçam de indicar a fonte de pesquisa.

Fonte: Adaptado do livro didático - Cenários para investigação: humanidade e matemática em contexto, 2020.

A Figura 26 mostra os grupos organizados e a professora orientando um dos grupos e observando os dados coletados.

Figura 26 - Momento da iniciação da resolução da Tarefa 2



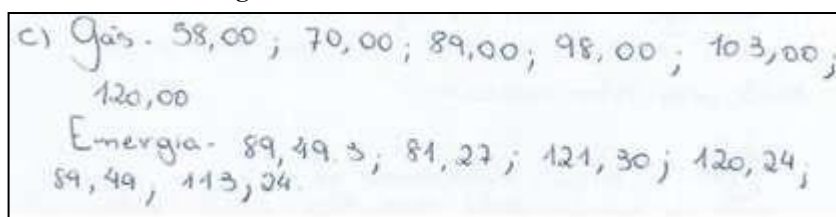
Fonte: Arquivo da professora.

Nos tópicos 3.2.1 e 3.2.2 são apresentadas as descrições e análises do desenvolvimento da tarefa 2 - grupos A e D.

3.2.1 Análise do desenvolvimento da Tarefa 2 - grupo A

O grupo A iniciou a resolução da tarefa justificando os dados coletados nos quais foram feitos arredondamentos nos valores referentes ao gás e à energia. Desta forma, o grupo não registrou valores com os centavos, porém, ao observar os dados coletados a professora percebeu que o grupo apresentou como valor do kWh (quilowatts hora) o total da fatura nos respectivos anos e não o valor do kWh. A Figura 27 apresenta os dados coletados pelo grupo.

Figura 27 - Coleta dos dados “Tarefa 2”



Fonte: Relatório do grupo A.

Percebendo o equívoco do grupo a professora entrevistou, como mostra o excerto abaixo:

Professora: Você tirou do talão esses valores?

E13: Foi, da casa do E3.

Professora: Então, se são do E3 fica fácil.

E13: Por que?

Professora: Porque você consegue olhar. (Pausa, esperando que alguém do grupo saiba responder). Pensem um pouquinho.

E13: Tem que tirar as taxas, os impostos aquelas coisas primeiro, aquelas informações em relação ao acréscimo que tem do valor.

Professora: Você pode tirar. Ai irá sobrar o valor só do Kwh? Ou o imposto está embutido no valor unitário do Kwh? Por exemplo: você tirou as taxas, ficou R\$ 90,00, e esse que ficou é o valor de 1 Kwh?

E13: Não, é o valor geral do usado no mês sem os impostos.

Professora: E então como vocês irão descobrir o valor de 1 Kwh? Como vocês fariam?

E13: A gente pega o valor e pode dividir pelo valor Kwh.

Professora: Então, vocês podem fazer isso com cada um dos valores. Para vocês descobrirem o valor do kWh sem as tarifas. Entenderam? Porque quando você analisar o valor do talão para fazer um comparativo, não conseguimos dizer se teve um aumento ou diminuição.

E13: Não, está mais ligado ao que a pessoa gasta no mês.

Professora: Isso, muito bem! Quando você faz uma média do valor você consegue notar o aumento e a diminuição do valor. Façam isso!

No excerto, podemos inferir que a professora buscou auxiliar o grupo para que utilizassem valores como referência para iniciar a investigação. Podemos evidenciar que a cada ação dos estudantes, a professora fazia um questionamento, para que o grupo encontrasse uma solução para a situação. No ensino por investigação o “professor possibilita que os seus alunos desenvolvam atividades de investigação e desempenhem um papel ativo” (Baptista, 2010, p.

89). Desta forma, a professora auxiliou na compreensão dos procedimentos a serem realizados pelos estudantes e esperou que mobilizassem processos relacionados ao Pensamento Matemático Avançado, como representação mental dos procedimentos ou conceitos que seriam utilizados por meio da intuição. Para Baptista (2010, p. 107) é “necessário que o professor promova um ambiente que ajude os seus alunos a estruturar o seu pensamento e a adquirir confiança no trabalho que estão a desenvolver”.

A resposta para a questão c (Pesquise os preços desses itens em março de 2017 a 2022) foi organizada em quadros, como mostra a Figura 28.

Figura 28 - Resposta à questão c - T2 “Grupo A”

GÁS - mês de Março		
Ano	R\$	
2017	68,00	} 23%
2018	70,00	
2019	89,00	
2020	96,00	
2021	303,00	
2022	320,00	

ENERGIA				
Ano	R\$	Total Suficiente	Consumo/dia	kWh
2017	326,46	328 kWh	9,27 kWh	0,938
2018	357,74	375 kWh	9,83 kWh	0,934
2019	362,39	374 kWh	9,94 kWh	0,797
2020	379,04	396 kWh	6,32 kWh	0,790
2021	393,86	206 kWh	6,65 kWh	0,578
2022	249,88	254 kWh	8,47 kWh	0,794

Fonte: Relatório do grupo A.

O quadro foi reorganizado pelo grupo após a intervenção da professora em relação ao valor apresentado da energia elétrica, sendo ele o valor total da fatura o que implicaria na análise dos dados. Para isso, os estudantes acrescentaram uma coluna com o valor do kWh (Figura 28). No excerto a seguir evidenciamos considerações dos alunos sobre a nova organização:

E13: Ó! A gente tirou o valor da energia do seu talão, lá deve ter mais ou menos, o valor do Kwh, então vamos olhar no talão é mais fácil tirar os impostos e dividir pelo consumo para descobrir o valor unitário do kWh. Faz aí uma coluna para o kWh.

E1: Na fatura já tem, o valor unitário! Mas tem mais de um valor na fatura!

E13: Então vamos pegar desses valores o do médio em todos, sem considerar a bandeira.

Professora: Pode sim, neste caso vocês estão trabalhando com o quê?

E13: Com o valor e não com o consumo.

Inferimos que o grupo mobilizou processos de mudança de representação e tradução, ao perceber a necessidade de construir uma tabela e acrescentar mais uma coluna para representar

os novos dados. Com isso, os estudantes mostraram uma diferente representação do objeto de estudo, ou situação abordada por eles. Para Dreyfus (2002), muitas representações mentais concorrentes de um conceito podem coexistir na mente de uma pessoa e, com isso observar as vantagens dessas diferentes situações matemáticas. Deste modo, várias representações mentais para o mesmo conceito podem complementar umas às outras e, finalmente, serem integradas em uma única representação para aquele conceito.

Após a organização na tabela (Figura 28), os estudantes iniciaram a discussão com relação à questão d (Com base em sua pesquisa, o que vocês podem concluir com os resultados encontrados), que deixa em aberto quais aspectos os alunos gostariam de investigar. Para Ponte (2005, p. 8) uma “tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas”. Considerando a natureza da questão, os alunos poderiam investigar aumento e diminuição desses itens em percentual, fazer comparativos em relação ao salário mínimo, proporção de aumento de um item para outro, dentre outros aspectos. Além disso, para a resolução desta questão os estudantes poderiam elaborar conjecturas, sendo esta uma das características citadas por Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021) como característica do ensino por investigação.

O grupo A decidiu analisar quanto um trabalhador compromete do seu salário com o gás e com a energia elétrica, como mostra o excerto a seguir:

Professora: *O que vocês estão fazendo?*

E1: *Estamos agora na letra d.* **Professora:** *E o que vocês concluíram?* **E13:** *Ainda não analisamos.*

Professora: *E o que vocês irão analisar?*

E13: *Eu acho interessante analisar quanto do salário é comprometido com o gás e com a energia elétrica.*

E3: *Por mim pode ser.*

Professora: *Já pensaram em como fazer isso?*

E13: *Então professora, estou com uma dúvida. Como pegamos do talão do E3 o valor do kWh penso que fica vago já que está em centavos.*

E13: *Pesquisa aí E1 os valores do salário mínimo de 2017 a 2022.*

E1: *Tá! 2017 era R\$937,00.*

E19: *Só?*

E1: *Quantos anos atrás né. 2018 - R\$954,00, 2019 - R\$998,00, 2020 - 1039,00 aqui aparece dois valores, vamos usar o primeiro, 2017 - R\$ 1100,00 e 2022 - R\$ 1212,00.*

Na discussão, após a definição do que seria investigado pelo grupo, os estudantes iniciaram uma representação mental de como poderiam encontrar um valor para analisar os gastos com a energia elétrica. Para a resolução, consideraram o valor do kWh como sendo uma variável a cada ano (VL) e a média de consumo de uma família brasileira de 152,2 kWh após uma consulta na internet, utilizando como palavras-chaves “média de consumo em kWh de uma família brasileira”. Com esse encaminhamento foi possível evidenciar indícios de processos de

intuição. Para Klaiber (2019), esse processo pode ser identificado quando se utiliza conhecimentos prévios para resolver uma questão. O excerto a seguir subsidiou essa inferência:

E13: E se pegarmos o valor que ele gasta por mês e multiplicar pelo valor do kWh?

Professora: Pode ser, mas isso você justifica depois no seu trabalho.

E13: Podemos pesquisar quanto se consome em uma família?

E1: E a gente encontra?

Professora: Acho que sim, vocês podem fazer uma pesquisa.

E13: Pesquisa aí E3!

E3: Aqui dois valores um deles é 152,2.

E13: Pode ser professora?

Professora: Pode. Analisem com calma!

De modo a encontrar uma solução para o cálculo do valor do kWh, o grupo A formulou uma expressão que poderia ser utilizada em todos os anos (2017 a 2022) como parâmetro para a análise dos dados e uma possível generalização para a primeira situação a ser investigada. Podemos inferir que, neste momento, o grupo apresentou indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado como: modelação e generalização. Para Henriques (2010), a modelação refere-se à procura de uma representação matemática para um objeto, no qual o modelo matemático ganha então o estatuto de uma representação da situação. Domingos (2003, p. 62) denota a generalização “quando um indivíduo aprende a aplicar um esquema existente a uma vasta coleção de fenômenos, podemos dizer que o esquema foi generalizado. Isto pode ocorrer porque o sujeito está atento à vasta aplicabilidade do esquema”. A Figura 29 mostra o registro feito pelos estudantes após determinarem um modelo $V_F = 152,2KW$, em que V_F representa o valor final (em reais) de acordo com a KW valor do quilowatt hora de cada ano.

Figura 29 - Resposta à questão d - T2 “Grupo A” - Modelação

The image shows a handwritten list of calculations for energy consumption in kWh for the years 2017 to 2022. Each year's calculation is the product of a monthly consumption value and 152.2. A generalization formula is written to the right: $KW \cdot 152,2 = V_F$.

2017	0,588	152,2	=	89,4936	≈
2018	0,534	152,2	=	81,2748	≈
2019	0,797	152,2	=	121,30	≈
2020	0,790	152,2	=	120,24	≈
2021	0,588	152,2	=	89,49	≈
2022	0,744	152,2	=	113,24	≈

Generalização
 $KW \cdot 152,2 = V_F$

Fonte: Relatório do grupo A.

O excerto abaixo mostra o diálogo da professora com o grupo em que definiu como investigar o comprometimento do salário mínimo para pagamento de energia elétrica e gás de cozinha:

E13: Podemos utilizar a regra de três para saber quanto do salário é comprometido?

Professora: Podem sim. Esse valor será dado em quê?

E19: Percentual.

Professora: Entendi. Mas existe outra forma de calcular em percentual?

E13: Eu acho que sim. Lembro que porcentagem significa por cem.

Professora: Certo, e um número sobre cem é o que?

E1: Fração?

Professora: Isso. Será que dá para usar fração para calcular o percentual do salário que é comprometido?

E13: Com fração? Acho que sim. Por exemplo: geralmente usamos quantos partes foram pintadas, certo?

Professora: Sim, e?

E13: Então queremos saber quanto do salário é comprometido, então a fração seria o valor que será comprometido sobre o total de partes?

Professora: E o que seria essas partes?

E1: Partes do salário.

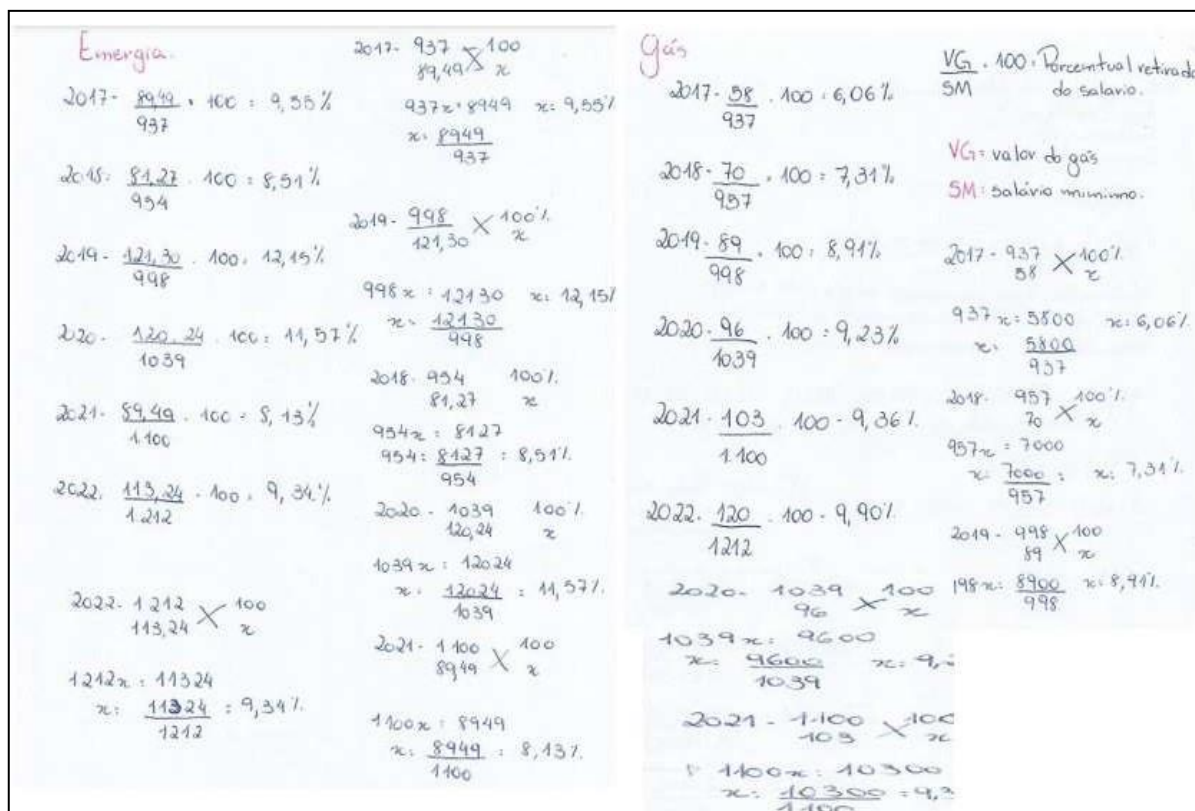
E13: No caso partes seria comprometida de um total do salário.

Professora: Isso, vão discutindo e resolvendo para ver como seria.

Podemos evidenciar, que inicialmente, para calcular quanto do salário mínimo era comprometido com gás e energia elétrica, o grupo fez uma representação mental da situação associando a regra de três. Para Dreyfus (2002), a representação mental indica uma forma de como interagir com o mundo exterior, quando pensamos ou falamos de um objeto matemático ou processo. Neste caso, o grupo associou a proporção do salário que se utiliza para pagamento desses itens com porcentagem, a partir de seus conhecimentos prévios. Neste momento, podemos evidenciar novamente indícios do processo de intuição.

A intervenção da professora teve como objetivo desenvolver processos do Pensamento Matemático Avançado como mudança de representação e tradução. Para Dreyfus (2002) é importante ter várias representações de um conceito, porém sua existência por si mesma não é suficiente para permitir o uso flexível do conceito na solução de um problema, a menos que as várias representações sejam ligadas fortemente, sendo assim, é necessário habilidade para alternar de uma representação para outra. A Figura 30 mostra a resolução dos estudantes apresentando duas maneiras diferentes de calcular o comprometimento do salário com cada item.

Figura 30 - Resposta à questão d - T2 “Grupo A” - Mudança de representação e tradução



Fonte: Relatório do grupo A.

No Quadro 18 estão organizados os anos de 2017 a 2022 com os respectivos valores dos salários e o percentual comprometido com cada item, de acordo com os cálculos feitos pelo grupo A (Figura 30).

Quadro 18 - Comprometimento do salário (%)

Ano	Salário	Comprometimento com gás (%)	Comprometimento com energia (%)
2017	R\$ 937,00	6,06	9,55
2018	R\$ 954,00	7,31	8,51
2019	R\$ 998,00	8,91	12,15
2020	R\$ 1039,00	9,23	11,57
2021	R\$ 1100,00	9,36	8,13
2022	R\$ 1212,00	9,9	9,34

Fonte: Autoras.

No decorrer da resolução, os estudantes discutiram sobre as diferentes representações do objeto a ser estudado (quanto do salário é comprometido com os dois itens – gás e energia), conforme excerto abaixo:

E13: Na fração chegamos a um resultado mais rápido.

E1: Só que na regra de três eu consigo entender melhor, o que é cada valor.

E13: Sim, mas na fração também!

E19: Eu também prefiro pela regra de três.

E13: Mas a fração é sempre a mesma coisa, é o que queremos ver, quanto do salário é comprometido.

Na resolução da questão, os estudantes tiveram o auxílio da professora na identificação de um padrão, o que já foi evidenciado pela **E13** ao dizer para o grupo que sempre estavam fazendo a mesma coisa, ou seja, a identificação de um padrão. Dreyfus (2002) considera generalizar como derivar ou induzir a partir de casos particulares, para encontrar pontos em comum, expandir domínios de validade. Sendo assim, com os cálculos utilizados para determinar a proporção do salário mínimo nos últimos seis anos com os itens de gás e energia, o grupo A criou uma expressão por meio de símbolos para modelar a situação e enfim generalizar, como mostra o excerto abaixo:

Professora: Mas isso daqui pode ser uma forma de generalizar. Vejam o que está alterando aqui?

E13: O valor da fatura.

Professora: Ok, e o que é esse valor que vocês estão repetindo em todos os cálculos.

E13: O valor do salário mínimo.

E1: Isso, o valor do salário mínimo daquele ano. Que é o todo da fração.

Professora: Vocês estão fazendo o quê sempre?

E13: Calculando o percentual sobre o salário mínimo. Montamos a fração com o valor da energia ou do gás pelo salário.

Professora: Além de disso, vocês estão fazendo outra coisa?

E13: Dividindo.

Professora: E depois?

E13: Agora não sei. E1 o que estamos fazendo mesmo no final?

E1: Multiplicando por cem.

Professora: Por quê? Isso em todos os casos?

E13: Sim professora, porque você falou que quando temos um número com vírgula podemos multiplicar por cem para dar em percentual. Então podemos dizer que generalizamos?

Professora: Sim.

E13: Então podemos utilizar símbolos ou letras?

Professora: Podem sim. Qualquer coisa façam uma legenda para que eu possa entender.

Após a discussão, os estudantes fizeram o registro referente à generalização (Figura 31), além disso, o grupo A utilizou a expressão “generalizamos”, o que nos mostrou familiaridade com a tarefa e com os processos do Pensamento Matemático Avançado. Isso se deve aos diálogos durante as discussões do grupo e as intervenções da professora. Gereti (2014) identifica a generalização ao longo das resoluções quando utilizadas notações algébricas que representam a generalidade das propriedades a serem provadas.

Figura 31 - Resposta à questão d - T2 “Grupo A” - Generalização

Handwritten mathematical formulas and definitions:

$$\frac{VG}{SM} \cdot 100 = \text{Porcentual retirado do salario.}$$

$$\frac{VL}{SM} \cdot 100 = \text{Porcentual retirado do Salario minimo.}$$

VG = valor do gás
 SM = salário mínimo.
 VL = valor da energia
 SM = Salário mínimo.

Fonte: Relatório do grupo A.

Após representar a situação por meio de dois procedimentos e generalizar, os estudantes fizeram o esboço do gráfico (Figura 32) para visualizar e analisar os dados obtidos nesta investigação. Desta forma, o grupo mobilizou indícios do processo de mudança de representação e tradução, pois, representou e transitou entre as duas representações: algébricas e gráfica. “Para resolver um problema o estudante precisará utilizar pelo menos duas representações além de transferir informações para outra” (MARINS, 2014, p. 28). O excerto abaixo mostra o momento em que os estudantes decidiram construir o gráfico da situação.

E13: Eu acho interessante fazermos um gráfico.

E19: Também acho.

Professora: Mas, por que o gráfico?

E13: Porque assim conseguimos visualizar melhor esses aumentos ou diminuição do valor do gás e da energia e até para ajudar a justificar esse aumento de 2023.

Professora: Tudo bem, então! (professora sai)

E13: Eu tinha visto um gráfico bem legal.

E3: Temos que fazer um para cada?

E13: Sim. Mas um que conseguimos ver esses aumentos e diminuição, porque após os cálculos fica ruim de analisar com um gráfico ou com a tabela fica mais fácil.

E1: Precisa da tabela?

E13: Acho que não!

Após a definição da construção do gráfico, sem o apoio da tabela, o grupo iniciou outra discussão referente aos valores que seriam utilizados no gráfico, como mostra o excerto abaixo.

E1: Então esse gráfico será da energia?

E13: Não, esse será o salário. Da energia será outro. Mas vai fazendo 940, 960, entendeu?

E1: Obrigada!

E13: Professora, antes íamos fazer um gráfico só para ver o salário mínimo o gás em relação, mas eu acho que vai ficar meio complicado na hora de fazer.

Professora: Faça do jeito que vocês acham mais fácil de analisar.

E13: Coloca aí 1220!

E1: Porque se é 1212?

E13: Mas aí você só faz um pouco mais para baixo.

E19: O que?

E13: Faz 1220 na hora de colocar a coisa e, porque nenhum deles irá ficar certinho, coloca 1220 bem em cima da risca, e o risco um pouco para baixo, é que se arredondar fica mais fácil do que picado.

E1: Esse aqui.

E13: Aí, esse daí é da energia, só vou dar uma olhadinha aqui. Da energia, **E19** o que você acha coloca valor desse?

E19: É porque parte dos cálculos foram baseados nesse.

E13: Aí coloca esses valores.

E1: Aí vai arredondar todos centavos?

E13: Não vai tipo (pausa) arredonda para o mais próximo só para ficar mais fácil.

E1: Aqui embaixo vai colocar os anos.

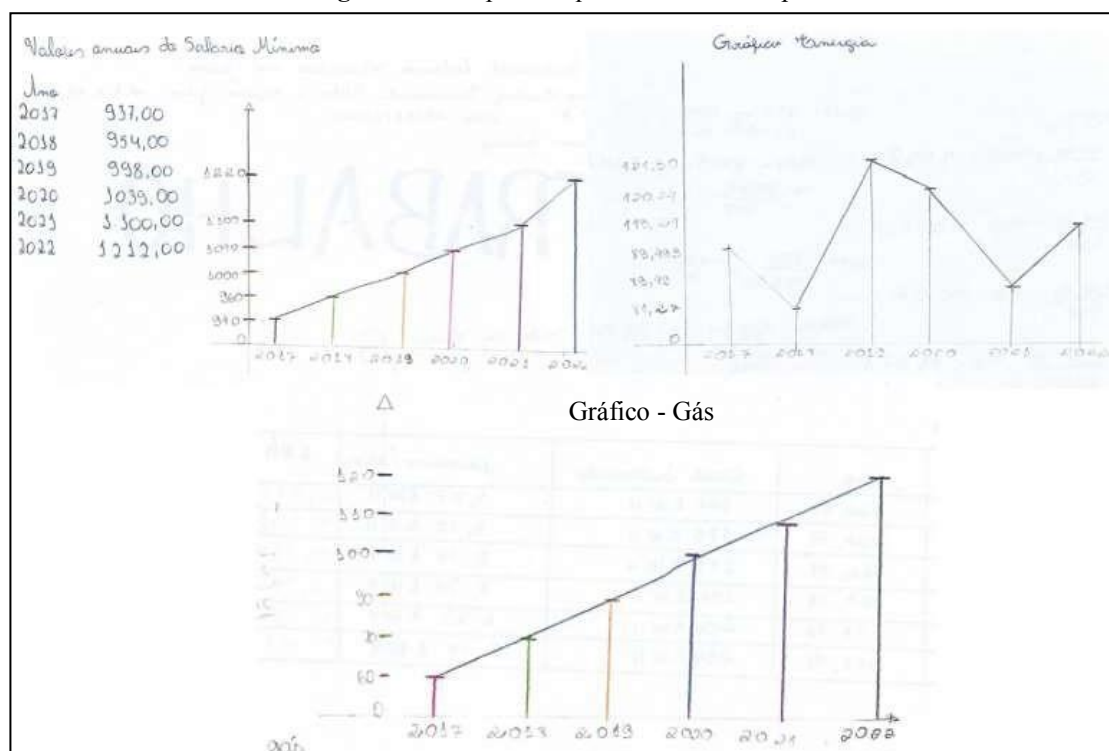
E13: É. Acho que todos eles estão em anos né?

E1: Todos eles de 2017 a 2020, né?

E13: Até 2022.

No excerto podemos identificar uma representação mental da situação por meio da construção mental dos estudantes que fazem uma visualização da situação com a construção do gráfico. Além disso, a **E13** propôs ao grupo uma forma de organizar os valores do salário (Faz 1220 na hora de colocar a coisa e, porque nenhum deles irá ficar certinho, coloca 1220 bem em cima da risca, e o risco um pouco para baixo, é que se arredondar fica mais fácil do que picado). Dreyfus e Eisenberg (1996) consideram que a visualização auxilia na geração e gerenciamento da imagem de uma situação problemática, ligada à análise e exploração do problema agindo como uma ferramenta versátil para o raciocínio matemático dos estudantes. Neste caso, verificou-se a necessidade dos estudantes para analisar os resultados obtidos por eles, porém ficou evidente a dificuldade da **E1** em compreender o arredondamento feito pela **E13** para “facilitar” a construção do gráfico. A Figura 32 mostra o registro feito pelo grupo.

Figura 32 - Resposta à questão d - T2 “Grupo A”



Fonte: Relatório do grupo A.

Após a construção do gráfico, a professora fez questionamentos, a fim de evidenciar quais processos poderiam estar associados a essa ação, conforme excerto a seguir:

Professora: Já construíram o gráfico?

E1: Já professora.

E13: Olha professora, o salário sempre aumenta?

Professora: Sim, e pelo gráfico dá para perceber em qual período ele aumenta mais?

E13: De 2021 para 2022?

Professora: Pelo gráfico parece que sim.

E13: De 2017 a 2018 aumentou bem pouco. **Professora:** Mas você observou isso pelo gráfico? **E1:** É melhor para ver...

E13: Eu também acho.

Professora: Vocês utilizaram uma escala para construção do gráfico?

E19: Acho que não!

E13: Só fomos colocando os valores do salário para ter uma base.

Professora: Se vocês tivessem usado uma escala certinha poderiam fazer relações com outros conceitos.

E13: Função né?

Professora: Sim.

E13: Olhando assim parece uma função exponencial.

Professora: Porquê?

E13: Por não ser exatamente reta, me lembra aquelas curvas da função exponencial. (se referindo ao gráfico do salário).

Professora: E da energia?

E1: Em algumas partes me lembra função quadrática, só que usamos a régua para fazer os pontos.

E13: Em alguns períodos sim.

Professora: Por quê?

E13: A curva para cima que forma de 2018 a 2019.

Professora: Tem outra?

E19: Tem. De 2019 a 2022.

E13: Mas de 2019 a 2020 não me parece fazer parte de uma curva, talvez pela escala que a professora comentou. Os valores ficam oscilando é difícil de definir.

Professora: Sim, em outro momento com a ajuda da professora de matemática podemos levar vocês no laboratório para fazer uso do Geogebra.¹⁴ E do gás o que vocês observam?

E13: Olhando assim, linha reta.

Professora: Como se chama mesmo, função?

E1: Do 2º grau!

E19: Do 1º?

Professora: Linha reta é uma função do primeiro é linha reta, mas esse é em linha reta?

E13: Talvez a escala também influencia, mas olhando parece ser do 1º grau.

Professora: Mas os cálculos que vocês fizeram, foi referente ao salário comprometido, que relação isso tem com o gráfico?

E13: Até pensamos em fazer junto para comparar a quantia do salário, mas resolvemos fazer separado. É que o gráfico pode mostrar em que anos esses valores comprometiam mais, só que no cálculo a gente sabe certinho.

Professora: Se vocês tivessem utilizado o percentual no cálculo ficaria melhor?

E1: Sim.

¹⁴ O uso do Geogebra não foi possível durante o desenvolvimento da tarefa 2, devido ao tempo de duração da resolução da tarefa e o agendamento do laboratório de informática, que estava comprometido para uso das plataformas de Inglês Paraná e do Matific. No entanto, foi conversado com a professora de Matemática, que se interessou pela dinâmica e os alunos seriam levados assim que o laboratório estivesse disponível.

No excerto podemos evidenciar indícios de uma síntese, quando os estudantes relacionaram o gráfico construído com conteúdo já estudados nas aulas de matemática, porém não conseguiram analisar com mais clareza devido à falta de uma escala na construção do gráfico. “A síntese começa com o ato consciente de juntar as ideias na fase inicial seguindo uma atividade mais intuitiva, na qual o subconsciente atua de forma recíproca entre o conceito imagem até uma força relacionar o conceito à consciência” [...] (MENEZES; NETO, 2018, p. 32).

Na questão e (Com base nestas informações vocês conseguem estimar o valor para 2023) o grupo iniciou uma discussão referente a possíveis valores para o ano de 2023. Para isso, os estudantes fizeram previsões sobre os valores de acordo com a análise dos anos anteriores, estimando um valor para o próximo ano de acordo com o percentual de aumento dos últimos. O excerto a seguir mostra a discussão e a intervenção da professora com o objetivo de estimular o grupo a analisar a situação e os possíveis fatores que poderiam influenciar no aumento ou diminuição dos itens (gás e energia) conforme visto nas aulas de Educação Financeira:

E13: Professora, estamos com dúvida da questão e!

Professora: Vocês observaram os valores?

E13: Sim. Pega a folha com a E1 que dá para observar certinho pelos gráficos e com os cálculos.

Professora: Como vocês podem estimar um valor para 2023? Quanto será que vocês acham que irá aumentar ou diminuir? Observem o que está acontecendo com cada item. O que vocês vão fazer? É uma discussão que pode ser feita no grupo, com todos. Para quanto você acredita que irá o preço do gás?

E13: Acho que bastante professora, pensar que existem vários fatores que podem influenciar.

Professora: Pensem nessas situações, discutam. Analisem os aumentos.

E13: Professora, minha mãe foi comprar gás e já pagou cento e quarenta, olha o aumento. Eu acho que irá aumentar bastante em 2023.

E3: Acho que aumenta uns 20%.

Deste modo, os estudantes não encontraram um padrão ou regularidade para estimar o valor desses itens para 2023, utilizaram como justificativas casos particulares do contexto real, sem formular uma expressão para calcular o valor do ano subsequente. Nos diálogos, percebeu-se dificuldades do grupo em resolver a questão e fazer comparações com anos anteriores, porém a **E1** iniciou uma expressão quando relacionou que o aumento será sobre R\$ 140,00, como mostra o excerto:

E19: Mas o que é para gente fazer mesmo?

E13: Estimar quanto irá ser o valor em 2023. E também temos que justificar porque estará nesse valor em 2023.

E1: É um chute?

E13: É, mas é tipo uma previsão que temos que argumentar não é qualquer chute.

E1: O gás vai ter que considerar que já está a cento e quarenta e poucos. Vamos ter de calcular em cima deste valor, tipo, mais 140.

E13: A quanto a gente acha que chega o gás?

E1: Uns 155.

E13: Acho que não.

E19: Mas é até o ano que vem! Eu acho que chega sim E13.E13: É então, eu acho que chega a 190.

E19: É uns 190!

E1: Será que ela tá falando no final do ano que vem ou no começo do ano?

E13: Estamos falando do mês de março.

E1: Acho que é um preço bom.

E13: Acho que é uns cento e noventa, porque ô! Porque no começo do mês estava 120 e em maio já está 140, ou pode ser que aumente até mais.

E1: Uns 197 pura aí! Porque redondinho, redondinho, não vai ser.

E13: Ô vamos colocar uns 190. Ok? A gente tem que parar para pensar que nem estamos no meio do ano ainda.

E1: Não.

E13: Deixa eu dar uma olhada aqui.

E1: O que.

E13: No gráfico. Olha, aqui em 2017 mas olha o único que não subiu tanto foi de 2019 a 2020 e 2020 a 2021 agora de 2021 a 2022 já aumentou, é isso que temos que observar também.

E13: Então vocês acham que chegam a 190? 180? 160?

E3: Eu acho que chega a uns 180.

E1: Eu acho que chega até uns 195?

E13: E você E19? Você acha que o gás no mês de março do ano que vem, estará quanto?

E19: Acho que 180.

E13: 180?

E19: É!

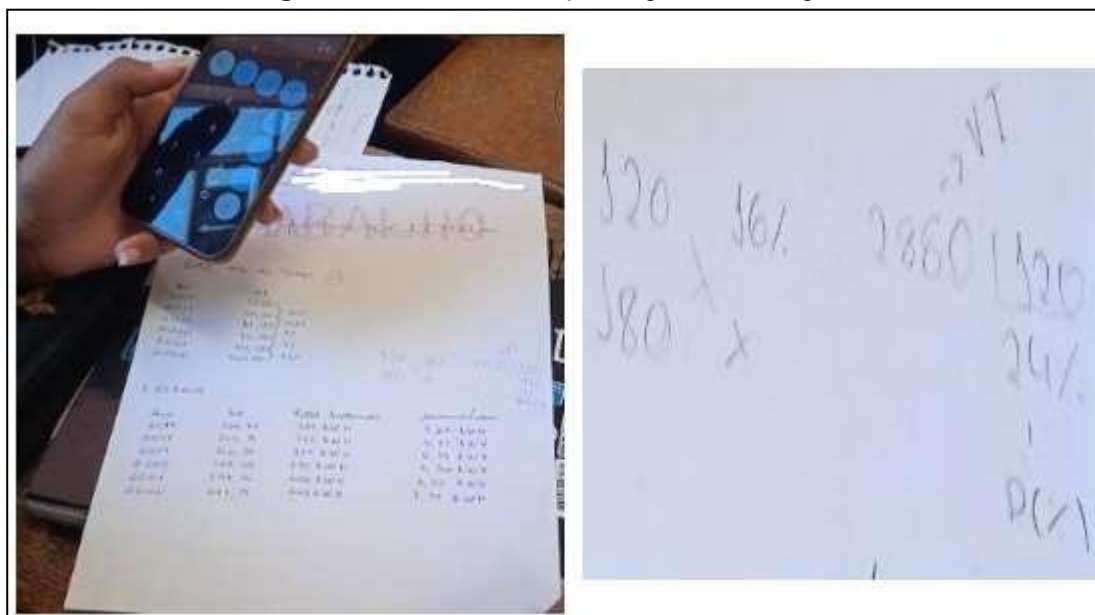
E13: Ah então vamos, 180 ou 190?

E1: 180.

E13: É quase dobrar o valor não, aqui tá dando 25,3 %. Aqui professora a gente acha que vai estar mais ou menos uns cento e oitenta reais, levando em consideração o valor que está de 140 reais, achando o valor que vai estar em maio do ano que vem, está dando uns 24% a mais. Multiplicando o valor que vai estar pelo valor que está, dividido por 120.

A Figura 33 mostra o momento em que a **E13** encontrou o valor de 24% a mais em relação ao valor do botijão de gás, para isso utilizou uma regra de três em que relacionou o valor de R\$ 120,00 a 16% (o valor de 16% utilizado na regra de três refere-se ao valor do aumento de 2021 para 2022 - de R\$ 103,00 para R\$ 120,00) e R\$ 180,00 (valor estimado pelo grupo) e x encontrando o valor de 24%.

Figura 33 - Momento resolução da questão e - Grupo A



Fonte: Arquivo da professora.

Após a discussão e o cálculo feito pelo grupo, os estudantes refutaram a conjectura e iniciaram outro raciocínio referente à questão e. No intuito de solucionar o problema, continuou-se utilizando como procedimento para resolução a regra de três. Com isso, podemos inferir que os estudantes fizeram uma representação mental da situação por meio da regra de três, em que mobilizaram indícios do Pensamento Matemático Avançado, como mostra o excerto:

E19: Regra de três E3! é igual a 1800 dividido por cento e vinte.

E1: Você ligou? (se referindo a multiplicação cruzada) **E19:** Divide agora por 120!

E13 o **E3** fez e daria 15%. **E3:** Então esse seria o gás?

E1: De 2020 para 2021 vai aumentar 16%.

E13: E19, olha aqui! Deste para este aumentou (pausa). Esse estava vinte e um e para este de baixo aumentou vinte e sete. Então não tem tanta diferença.

E1: As pessoas também podem fazer um protesto para não aumentar tanto!

E13: E outra, a gente está se baseando em 2022 no caso, no mês três estava cento e vinte e agora já está cento e quarenta, o gás entendeu? Imagina que 2023, em março de 2023 já vai estar em uns cento e oitenta!

E13: Professora!

Professora: Oi!

E1: O E3 ajudou a fazer o cálculo.

Professora: Certo!

E13: Nós achamos que em março de 2023 o gás estará em cento e oitenta.

Professora: Por quê?

E13: Olha professora, em março de 2022 o gás estava cento e vinte agora já está cento e quarenta, nós estamos aproximando em percentual que é de 16% em menos de dois meses, imagina no mês de março de 2023, entendeu?

Professora: Então vocês acham que terá um aumento de 24%?

E13: É! Foi o E3 que fez a conta. E estamos fazendo uma generalização aqui.

Professora: (Conferindo o cálculo) Olha não será 24% não!

E3: Nossa acho que coloquei errado mesmo.

E13: Vai ser 50%.

Professora: De aumento né?

E13: É.

Com a intervenção da professora, o grupo corrigiu o erro e chegou a uma solução para a questão. Porém, os estudantes apresentaram apenas a resolução (pelo método da regra de três) para estimar o valor do gás, com relação à energia apresentaram uma justificativa em decorrência do término da aula. A Figura 34 mostra a resolução feita pelo grupo.

Figura 34 - Resposta à questão e - T2 “Grupo A”

e) Energia → 270,00, porque só houve aumento durante todos os meses e até em março de 2023 pode estar esse valor.

Gás → Porque observando os fatos o gás no mês de março 2022 estava 120 e no mês maio já passou para 140 mostrando isso em percentual ficaria:

$$12,85\% \rightarrow 140 - 180$$

$$16\% \rightarrow 120 - 140$$

$$50\% \rightarrow 120 - 180$$

Gás

$$\begin{array}{r} 120 - 100 \\ 180 - x \end{array} \quad 120x = \frac{18000}{120} = 150 - 100 = \boxed{50\%}$$

$$\begin{array}{r} 120 - 100 \\ 140 - x \end{array} \quad 120x = 14.000$$

$$116 - 100 = \boxed{16}$$

Fonte: Relatório do grupo A.

Nota-se que os estudantes não encontraram uma expressão ou modelo matemático para determinar o valor para 2023. Eles analisaram as informações coletadas, estimaram um possível valor (R\$180,00) e utilizaram a regra de três para considerar qual será o aumento, chegando a 50%. Consideraram o aumento do gás de R\$ 120,00 para R\$ 140,00, valores correspondentes aos meses de março e maio, que consiste a 16% de aumento e o valor de R\$ 120,00 para R\$ 180,00 aumento estipulado por eles para 2023.

As análises da tarefa 2 nos possibilitaram evidenciar aspectos do PMA relacionados à representação e abstrações presentes nas discussões e resoluções apresentadas pelo grupo A, de acordo com o Quadro 12. Com relação à totalidade da tarefa (Grupo A) foi possível evidenciar

processos de representação simbólica, representação mental, visualização, intuição, mudança de representação e tradução e modelação. Com relação aos processos de abstração foi possível inferir que os estudantes mobilizaram indícios do processo de generalização e síntese.

No próximo tópico 3.2.2 analisamos a resolução da tarefa 2 “Preço do gás e energia” do grupo D.

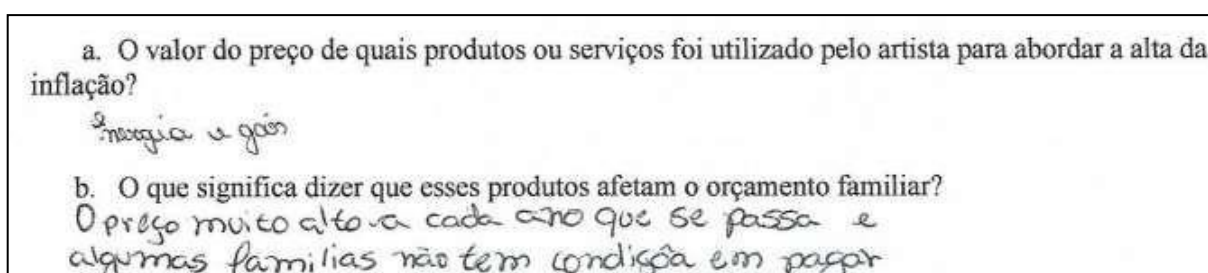
3.2.2 Análise do desenvolvimento da Tarefa 2 - grupo D

O grupo D iniciou a tarefa discutindo a resolução das letras a e b (O valor do preço de quais produtos ou serviços foi utilizado pelo artista para abordar a alta da inflação? O que significa dizer que esses produtos afetam o orçamento familiar?). Para formular uma resposta, os estudantes discutiram sobre o tema, utilizando suas opiniões de acordo com o contexto real de cada um. Para Ponte (2005) uma tarefa investigativa pode surgir num contexto real. O excerto abaixo mostra o início da discussão realizada pelo grupo.

E2: Preço muito alto!
E27: É um preço muito alto, e muita gente não consegue pagar.
E31: Vamos reformulando. O preço é muito alto ...
E26: Realmente, a cada ano que passa e algumas famílias...
E31: Não têm condições de pagar, por isso o nosso país vive em crise.
E27: Sim.
E31: Mas vamos ser objetivos nas respostas!

Deste modo, o grupo registrou suas conclusões referentes às questões a e b como mostra a Figura 35.

Figura 35 - Resposta à questão a e b - T2 “Grupo D”



Fonte: Relatório do grupo D.

Para responder às questões, os estudantes não utilizaram diretamente conteúdos abordados durante as aulas, utilizaram seus conhecimentos pessoais sobre o assunto e partiram dos dados coletados por eles, de modo que passaram a abordar considerações para a letra d (Com base em sua pesquisa, o que vocês podem concluir com os resultados encontrados). Para isso, consideraram os dados coletados e organizados em uma tabela, como mostra a Figura 36.

Figura 36 - Momento da análise dos dados - Grupo D



Fonte: Arquivo da professora.

A princípio, o grupo D se pautou em analisar apenas os dados que registraram na pesquisa sem se apoiar nos cálculos para responder a letra d. De modo a evidenciar a mobilização de PMA, a professora fez algumas intervenções:

E2: *Que a inflação está muito alta.*

E31: *Que a cada ano que passa vem aumentando. Porque tipo, tudo aumenta, é óbvio.*

E27: *Óbvio.[...]*

Professora: *Como está o andamento da tarefa?*

E26: *Estamos fazendo a letra d.*

E31: *É professora! Estamos concluindo que tudo aumentou, olha os dados!*

Professora: *Todos os itens aumentaram em todos os anos? Vocês observaram bem? Como vocês podem justificar esse aumento, apenas com os dados organizados em tabelas? Em relação a que isso vêm aumentando?*

E31: *É mesmo! Teve uma diminuição da energia.*

Professora: *O que vocês gostariam de analisar desses dados pesquisados por vocês?*

E31: *Os aumentos e diminuições das coisas? Acho que poderíamos ver quanto aumentou em cada ano, para poder concluir. Podemos professora?*

Professora: *Sim. E como vocês farão isso?*

E27: *Vamos pensar professora!*

A professora interferiu no grupo, para que assim, os estudantes pudessem iniciar a investigação, formulando conjecturas a fim de buscar explicações para suas respostas e promover a discussão no grupo. Para Baptista (2010, p. 90), quando os estudantes se envolvem em tarefas de investigação “identificam um problema, usando um pensamento lógico e crítico e considerando explicações alternativas”.

Assim como o grupo A, os estudantes do grupo D coletaram o total da fatura nos diferentes anos e não o valor do kWh. Dessa forma, a professora chamou a atenção do grupo para que utilizassem também um valor como referência porque o valor da fatura está relacionado também ao consumo, o que iria interferir na conclusão sobre os aumentos e

diminuições nos preços dos itens, como mostra o excerto:

E31: Professora, não entendi muito bem como funciona esses valores da energia.

Professora: O talão de energia ele é assim, o valor a ser pago depende do valor a ser gasto, se você gastar até 20 kWh é um valor, se você gasta de 20 a 40 é outro valor, e ele vai alterando os valores, de acordo com os gastos de uma pessoa ou família e também tem a taxa de iluminação pública e mais os impostos essas taxas. Se vocês querem fazer uma simulação do valor do kWh médio de uma família, vocês pegaram o valor unitário do kWh ou o valor da fatura?

E31: Pegamos o valor da fatura.

Professora: Dá fatura total?

E31: Sim.

Professora: Você viu quanto foi gasto naquele mês em kWh?

E31: Não.

Professora: Porque assim, você consegue tirar um valor médio de cada mês, já com taxas e iluminação pública embutidos. Vamos supor que o talão de energia tenha dado R\$88,00 e lá no consumo deu que você gastou 150 kWh, como vocês fariam para descobrir mais ou menos o valor do kWh? Incluindo impostos, taxas? Por exemplo você gastou R\$88,00 de fatura e gastou 150 kWh, como você faria para saber em média quanto está um kWh?

E31: Não é dividido?

Professora: Isso. Como seria essa divisão?

E31: Acho que o consumo de R\$88,00 por 150 kWh.

Professora: Isso, mas para realizar esse cálculo você teria que ter o talão aqui, mas você não trouxe o talão né? Para podermos olhar.

E31: Na verdade eu não fiz nem olhando o talão, fui pegando; o preço da energia no mês tal do ano tal aí tinha ...

Professora: Você foi pegando da sua casa?

E31: Não dá internet, do talão da internet. Só que lá só aparecia só o valor, sabe. Não aparecia nem kWh nem nada. Tinha desfocado sabe.

Professora: Entendi. Então vamos ver se descobrimos os valores unitários do kWh para ter um parâmetro para análise de vocês.

E31: Empresta seu talão professora?

Professora: Empresto!

E27: Que bom.

Segundo estudos discutidos por Ponte (2003), para muitos estudantes, as tarefas de investigação constituem uma experiência nova, no entanto, devidamente apoiados pelo professor e com a continuação do trabalho, conseguem compreender, pelo menos em termos gerais, o que é uma investigação e o papel que lhes cabe assumir. Assim, podemos destacar o papel do professor no desenvolvimento da Tarefa Investigativa, que percorreu desde a elaboração, a preparação dos materiais e as intervenções durante a resolução das tarefas. Neste aspecto Ponte (2003) afirma que o papel do professor é o de orientador procurando motivar e incentivar os estudantes e dar-lhes espaço para fazerem a sua matemática; e as tarefas, para além de levar os estudantes a aprender, devem também ajudar a criar um ambiente de aprendizagem estimulante. Nesta perspectiva, a professora antecipadamente já imaginou os contratempos que poderiam ocorrer durante o desenvolvimento da tarefa, principalmente atrelados à pesquisa que os estudantes deveriam realizar e trazer os dados na próxima aula. Com isso, a professora levou talões de energia de 2017 a 2022 e efetuou uma pesquisa na internet

referente ao preço do gás, caso algum grupo não levasse ou trouxesse poucas informações ou informações equivocadas, para auxiliar no encaminhamento da tarefa, pois a falta desses dados poderiam prejudicar no sua execução. Neste mesmo sentido, Baptista (2010) ressalta a importância do professor na inclusão da tarefa de investigação e é “[...] igualmente importante um bom domínio dos materiais e recursos que podem ser usados como apoio à atividade” (BAPTISTA, 2010, p. 104).

Após a intervenção, os estudantes iniciaram uma discussão sobre quais métodos poderiam ser utilizados para calcular o percentual de aumento e diminuição dos itens de gás e energia como escolha feita pelo grupo. O excerto abaixo mostra o momento em que o grupo discute sobre a utilização da regra de três como método para solucionar o problema.

E31: Podemos encontrar a porcentagem, pela regra de três, mas como?

E27: A porcentagem é dividida por cem né?

E31: Aham.

E27: Então acho que dá para fazer assim ô! É igual o que eu estava falando, só que eu estava falando invertido. Fazer tipo assim, pega esse valor e coloca cem por cento na frente e aí a gente pega o valor debaixo e coloca aqui o “x”, no valor de “x”, vamos descobrir a porcentagem. Entendeu?

E31: Sim.

E27: Dá para gente tentar fazer desse jeito.

A31: A porcentagem aqui então será cem por cento...

E27: E aqui R\$ 55,68.

E31: Quantos por centos vai dá então?

E27: É!

E31: De cinquenta e cinco ...

E27: Esse negócio de dinheiro, é muito difícil de fazer.

E31: Aqui vai ficar vezes cem?

E27: Quanto?

E31: Vezes?

E27: Como?

E31: Cinquenta e cinco reais e sessenta e oito vezes cem, resulta em?

E27: Cinco mil, quinhentos e sessenta e oito.

E31: Tá. Agora a gente vai fazer “x” é igual a cinco mil, quinhentos e sessenta e oito ... nossa! Cento e dezenove por cento? A não ser que subiu dezenove por cento né, impossível, porque cento e dezenove é muita coisa.

Na discussão sobre como resolver por regra de três, o grupo encontrou dificuldades na construção da regra de três já que não tinha visto na aula de Educação Financeira cálculo de aumento ou desconto em percentual. No entanto, chegou a um resultado maior que cem, pois utilizou todo o valor do botijão de gás do ano seguinte e não a diferença de aumento. Porém podemos considerar que o grupo, entendeu que havia algum equívoco no desenvolvimento da resolução, conforme afirmou E31 (*[...] impossível, porque cento e dezenove é muita coisa*).

Frente à situação, houve uma intervenção da professora, “uma das questões mais complexas que envolve o papel do professor é a sua intervenção na construção e validação do conhecimento dos alunos” (PONTE, 1998, p. 8), pois, em uma Tarefa Investigativa “fazer boas

perguntas é essencial para saber o que os alunos estão a pensar” (PONTE, 1998, p. 14). Sendo assim, a professora buscou auxiliar o grupo com questionamentos, que permitissem compreender as dificuldades do grupo e de forma que o trabalho progredisse. Para Ponte (1998) o professor pode adotar estratégias: não interferir no trabalho dos estudantes, interferir de forma discreta e rápida ou dedicar uma atenção considerável a um estudante ou grupo. A intervenção da professora ocorreu, como mostra o excerto abaixo:

E31: Professora! Professora! Nosso cálculo ultrapassou cem por cento! E o valor não dobrou de um ano para outro.

Professora: Deixa eu ver como vocês fizeram! Vocês utilizaram o valor total do botijão. Vocês pretendem calcular o valor anterior com o aumento ou só o percentual do aumento?

E31: Só o aumento, mas, como assim? Calcular a diferença para colocar na regra de três?

Professora: Pode ser uma maneira ou continua fazendo como vocês fizeram só que retiram desse percentual o valor que corresponde ao valor anterior.

E26: Está complicado.

E31: Não E26! Esse valor anterior acho que é os 100%, não é professora?

Professora: Isso mesmo.

Por meio do excerto supracitado inferimos que o grupo mobilizou indícios de representação simbólica ao representar por meio de símbolos matemáticos a situação, representação mental ao relacionar a situação com porcentagem e regra de três, intuição ao utilizar os conhecimentos prévios para resolver a questão. Para Dreyfus (2002) uma boa compreensão matemática significa uma rica representação de conceitos, exemplos, contraexemplos, aplicações e outros. Para o autor, as representações podem estar presentes tanto na matemática elementar quanto na matemática avançada.

Após a definição da resolução, o grupo retornou a discussão de como seria feito o cálculo da energia, que requereu mais procedimentos matemáticos. Para isso, a professora deu sugestões para que o grupo chegasse a uma representação da situação, como mostra o excerto:

E31: Estamos com dificuldade em calcular a energia. A E13 [do grupo A] comentou que utilizou o valor do meio do talão, também podemos?

Professora: Podem. E vocês vão utilizar o valor que está aí para calcular?

E27: Acho complicado trabalhar com esse monte de casa depois da vírgula.

Professora: Vocês podem arredondar. Como vocês querem analisar o aumento ou diminuição desses valores, vocês podem utilizar esse valor mesmo.

E31: Professora, se fizéssemos uma simulação do talão?

Professora: Vocês falam utilizar um valor da fatura?

E31: Isso.

Professora: Podem. Qual seria o valor do consumo?

E26: Dá para pesquisar: quanto um brasileiro consome? Professora: Podem. Após a pesquisa, como encontrariam um valor? E31: Então!

E27: Complicou!

Professora: Pensem assim, qual o valor do kwh? O valor da fatura está relacionado com o que?

E26: Uma família consome 152,2 kWh, vamos arredondar para 152.

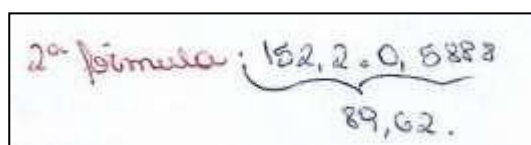
E31: Não vamos usar assim. Professora então se uma família gasta um kWh gasta

tanto se gasta dois é tanto, 152 kWh é tanto?

Professora: *Isso mesmo, comecem a calcular, façam o registro.*

Com o objetivo de responder à questão, os estudantes recorreram à **E13** que pertencia ao grupo A para auxiliar no cálculo do valor médio da energia, que seria um dos valores apresentados na fatura, porém apresentaram dúvidas em como encontrar o valor para calcular o aumento ou diminuição dos valores referentes aos últimos seis anos. No diálogo feito pelo grupo D podemos evidenciar que os estudantes não determinaram uma expressão para calcular o valor para a energia (valor médio de consumo de uma família multiplicado pelo valor do kWh de cada ano). Com isso, não conseguiram expressar algebricamente o padrão encontrado, como mostra a Figura 37.

Figura 37 - Resposta à questão d - T2 “Grupo D”



Handwritten mathematical expression: $2^{\text{a}} \text{ fórmula: } 152,2 \cdot 0,5883 = 89,62.$

Fonte: Relatório do grupo D.

Analisando o registro feito pelo grupo, podemos evidenciar que os estudantes mobilizaram indícios de modelação e generalização para o padrão encontrado para o cálculo da energia elétrica, já que a mesma expressão foi utilizada para encontrar o valor da energia de 2017 a 2022. Dreyfus (2002) considera que geralmente a modelação está associada à representação matemática a um objeto não matemático. No entanto, no Pensamento Matemático Avançado, a modelação refere-se à construção de uma estrutura matemática ou teoria que apresenta características fundamentais do objeto do sistema. Notou-se que a **E31** observou um padrão referente ao cálculo do valor da fatura de energia (*Professora então se uma família gasta um kWh gasta tanto se gasta dois é tanto, 152 kWh é tanto?*), porém, não conseguiu expressar algebricamente o modelo utilizado como referência. Isso pode ter ocorrido, por não sentir a necessidade de expressar algebricamente, ou pela dificuldade de utilizar letras e símbolos para representar o modelo encontrado. No entanto, a professora neste momento poderia ter auxiliado o grupo a encontrar uma representação algébrica do padrão observado ou ter ajudado os estudantes a compreender e dar mais ênfase aos padrões ou métodos usados por eles para resolver problemas. A intervenção da professora não aconteceu, porque pelo diálogo ela achou que os estudantes iriam conseguir representar algebricamente e não percebeu durante a aula que os estudantes não tinham progredido neste sentido.

Diante das considerações sobre o valor do kWh, os estudantes inseriram essa ‘nova’ informação no quadro que construíram para a energia, conforme mostra a Figura 38.

Figura 38 - Organização em tabela - Resposta à questão d - T2 “Grupo D”

Preço do botijão de gás		Preço da conta de Luz	
(De 2017 até 2022)		(De 2017 até 2022)	
março/ 2017	R\$ 55,68	março/2017	R\$ 89,02
março/ 2018	R\$ 66,79	março/2018	R\$ 81,29
março/ 2019	R\$ 69,17	março/2019	R\$ 121,20
março/ 2020	R\$ 69,94	março/2020	R\$ 120,31
março/ 2021	R\$ 83,16	março/2021	R\$ 99,49
março/ 2022	R\$ 102,51	março/2022	R\$ 113,24

		KWh (valor)
março/2017	R\$ 89,02	0,5888 -
março/2018	R\$ 81,29	0,534 -
março/2019	R\$ 121,20	0,797
março/2020	R\$ 120,31	0,7905
março/2021	R\$ 99,49	0,588
março/2022	R\$ 113,24	0,7447

Fonte: Relatório do grupo D.

A partir das novas informações sobre a energia elétrica, os estudantes retomaram o cálculo do percentual de aumento e diminuição. Após a conclusão dos cálculos, a professora entrevistou, questionando sobre como procederam e propôs uma outra maneira de calcular o aumento ou diminuição de um produto. Neste momento, esperava-se que os estudantes encontrassem outra maneira de representar a situação mobilizando o processo de mudança de representação e tradução. Para Dreyfus (2002), os processos que os professores esperam provocar no estudante não acontecem por si mesmo ou, se acontecem, não são necessariamente conscientes por parte dos estudantes, sendo assim, é necessária uma intervenção do professor. O excerto a seguir mostra a intervenção da professora:

Professora: Terminaram?

E31: Acho que sim.

Professora: Conferiram os cálculos?

E26: Estamos conferindo.

Professora: Vocês conhecem outra forma de encontrar o valor do aumento e diminuição desses valores?

E31: Agora de imediato não!

Professora: Então pensem um pouco, discutam sobre esse assunto.

E27: Ok!

E31: Gente e agora? Como podemos fazer?

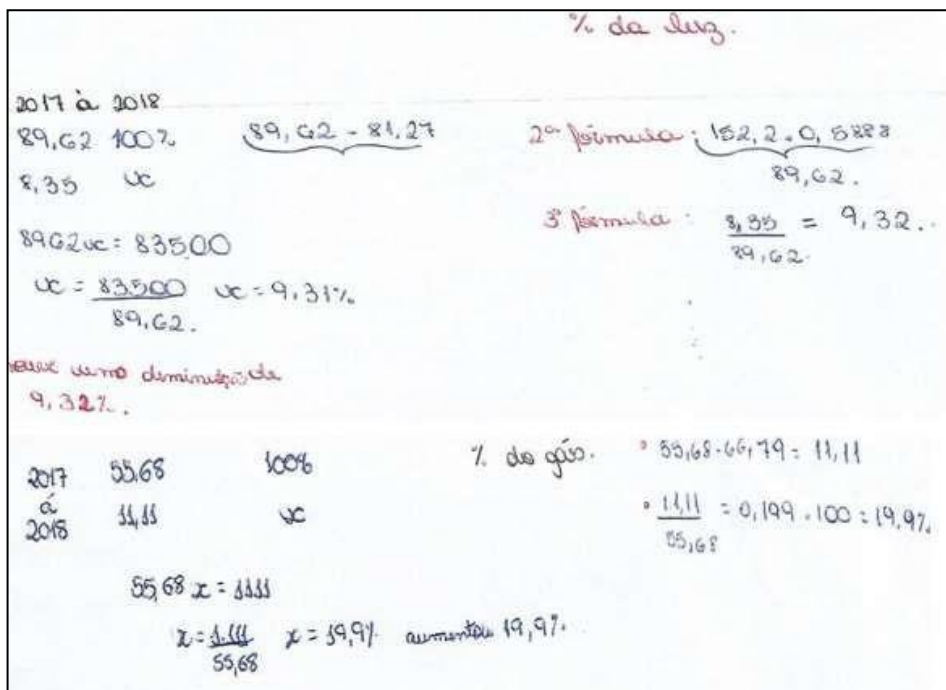
E26: Podemos pensar numa maneira mais prática, para não demorar muito.

E27: Então! Como é que podemos fazer?

E31: Gente e se tentarmos por fração. Vamos tentar montar, então.

Com isso, o grupo D iniciou uma nova resolução da questão com outra forma de representação na qual chegou a uma razão, apresentando duas representações da situação – regra de três e razão -, como mostra a Figura 39.

Figura 39 - Resposta à questão d - T2 "Grupo D"



Fonte: Relatório do grupo D.

As representações apresentadas na Figura 39 indicam que os estudantes mobilizaram indícios de mudança de representação, característica do Pensamento Matemático Avançado. Para Marins (2014), a mudança de representação e tradução ocorre nas diferentes representações do mesmo conceito. No entanto, a professora questionou os estudantes sobre as duas maneiras distintas de representar a situação, conforme excerto abaixo:

Professora: Vocês conseguiram resolver de uma outra maneira a situação?

E27: Sim.

E31: Começamos pela fração e chegamos no percentual multiplicando por cem.

Professora: Fizeram isso em todas?

E26: Sim.

Professora: E conseguem compreender as duas?

E31: Sim professora. Estamos mais acostumados a resolver pela regra de três, mas a fração vai direto.

Professora: Vocês utilizaram uma razão para calcular e transformaram em porcentagem.

E31: Dos dois jeitos chegamos no mesmo valor.

Professora: Ok! E agora? Vocês podem representar de outra forma?

E31: Tabela?

Professora: Pode ser, tem mais alguma?

E37: Faz o gráfico E31.

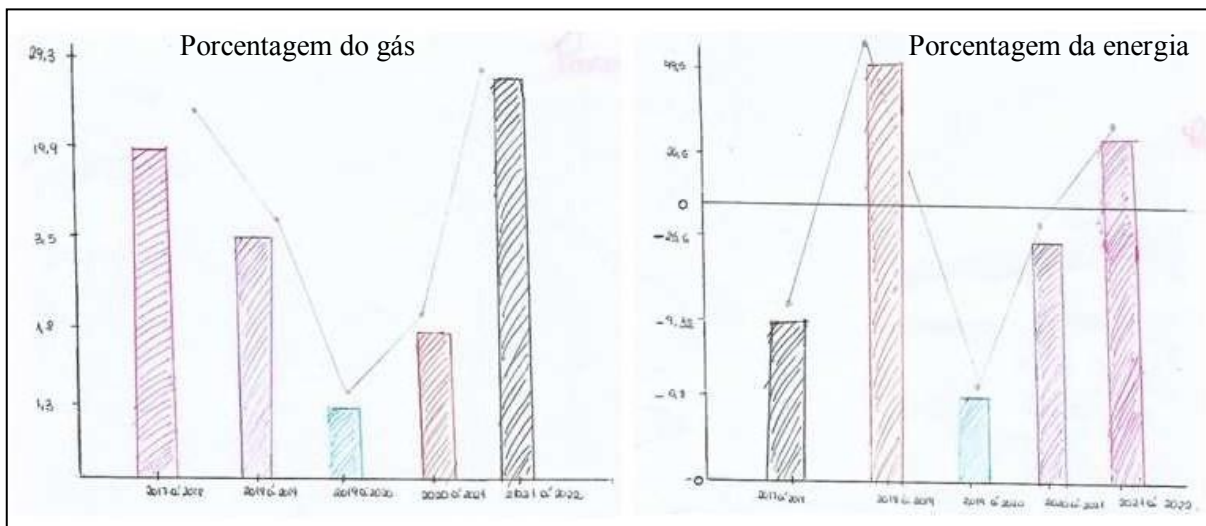
E31: É mesmo, vai dá para ver certinho esses aumentos.

Professora: Se for útil, podem sim.

E27: Eu acho mais fácil de analisar, eu gosto de ver as coisas pelo gráfico.

Após o registro feito pelo grupo D, os estudantes decidiram organizar os dados por meio de um gráfico, como mostrou o excerto supracitado e, então, iniciaram a construção dos gráficos com o objetivo de analisar os valores encontrados (Figura 40).

Figura 40 - Gráficos - Resposta à questão d - T2 “Grupo D”



Fonte: Relatório do grupo D.

Ao analisar o registro do grupo D, a professora identificou um erro em relação ao aumento e à diminuição dos valores na energia elétrica. O erro foi recorrente a dificuldade de organizar os valores correspondentes a diminuição dos preços, que poderia ser expressa por números negativos, já que ao organizar os valores como está na Figura 40, parece ser um aumento em percentual e não a diminuição de preço o que confundiu o grupo na construção do gráfico, como mostra o excerto abaixo:

Professora: Como vocês distribuíram os valores no gráfico?

E31: Desta vez iniciamos do menor para o maior, como você falou no outro trabalho.

Professora: Vocês deram a mesma distância para todos os pontos?

E31: Sim.

Professora: Mas o valor que aumenta de um número para outro é o mesmo?

E31: Não, professora!

Professora: Vocês têm que começar a utilizar uma escala no gráfico, desta forma é difícil analisar o comportamento do gráfico. No gráfico da energia vocês utilizaram dois zeros?

E31: Sim, professora.

E27: Eu falei para ela fazer abaixo do zero professora os números negativos.

Professora: Seria o correto.

E27: Pode deixar que eu faço E31. **Professora:** Vocês já viram zero negativo? **E31:** Não.

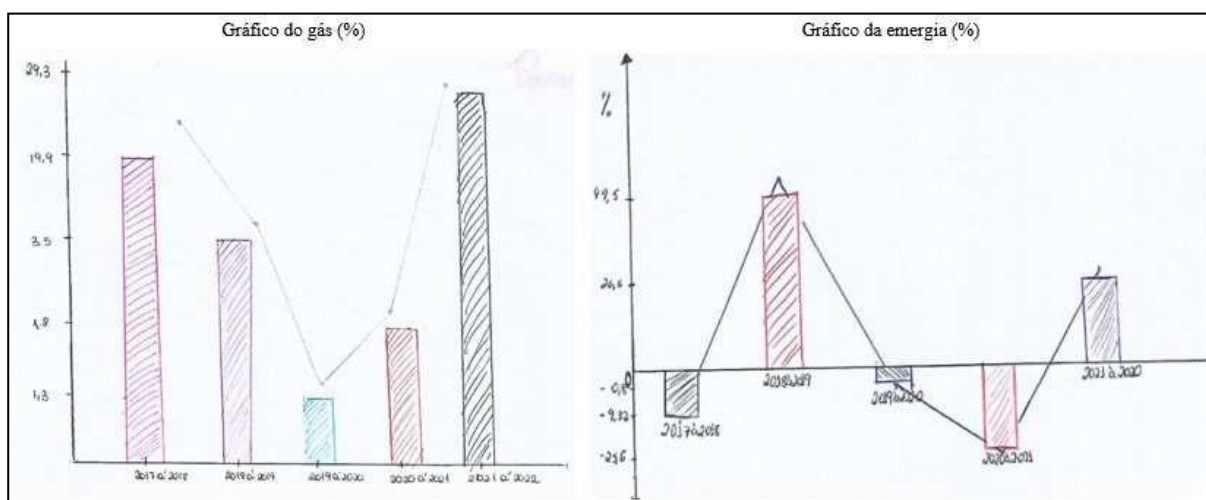
Professora: E porque aqui no gráfico tem um zero negativo, o que ele representa?

E31: Me confundi professora, o zero é neutro.

Professora: Sim, então você não pode utilizar sinal para representar.

Com a interação com a professora, o grupo refez os registros e apresentou um novo gráfico para a energia, porém novamente não utilizaram uma escala. Com relação ao erro cometido apresentaram as barras acima de zero para os aumentos dos valores e abaixo de zero para a diminuição dos valores, como mostra a Figura 41.

Figura 41 - Gráficos - Resposta à questão d - T2 “Grupo D”

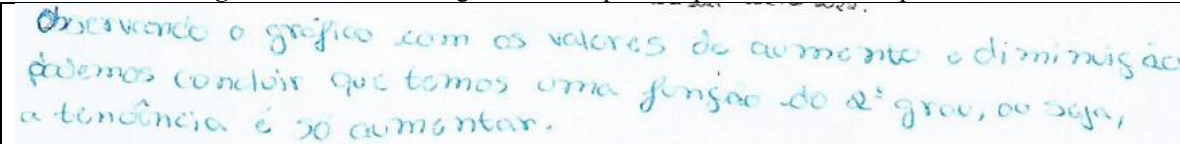


Fonte: Relatório do grupo D.

Após a construção das diferentes representações, podemos inferir que, mesmo com os equívocos e falta de cuidado para as escalas nos gráficos, os estudantes mobilizaram indícios de mudança de representações e tradução. Para Henriques (2010, p. 105), “os estudantes têm que se familiarizar com uma diversidade de representações e devem ser capazes de as usar, de forma flexível”. Assim, “o uso de diferentes representações depende da familiaridade dos alunos isoladamente com cada uma dessas representações, no entanto, é necessário primeiro que os estudantes compreendam a forma da representação, como codifica a informação e como se relaciona com o domínio que representa” (HENRIQUES, 2010, p. 105). Em seguida, “com o aumento da sua compreensão, tornam-se menos dependentes do tipo de representação e tornam-se mais capazes de moverem-se entre diferentes tipos de representações” (HENRIQUES, 2010, p. 105).

Com o intuito de observar as relações que o grupo estabeleceu com conceitos já estudados a professora solicitou a análise dos gráficos construídos. Em resposta à solicitação, o grupo apresentou como resposta um registro escrito (Figura 42).

Figura 42 - Análise dos gráficos - Resposta à questão d - T2 “Grupo D”


<p>Observando o gráfico com os valores do aumento e diminuição, podemos concluir que temos uma função do 2º grau, ou seja, a tendência é só aumentar.</p>

Fonte: Relatório do grupo D.

O registro escrito identificou que o grupo relacionou o gráfico com uma função polinomial do 2º grau, justificando pela tendência em aumentar. Deste modo, compreendemos que os estudantes visualizaram a situação por meio do gráfico e utilizaram um conceito já estudado anteriormente por eles, no entanto não analisaram o intervalo em que a função foi decrescente e não justificaram, apenas relataram que a tendência é a aumentar.

Assim, como o grupo A, os integrantes do grupo D apresentaram dificuldades em trabalhar com escala no gráfico o que prejudicou a análise e reflexão sobre os resultados apresentados. Com isso, não foi possível evidenciar indícios de uma síntese por parte dos estudantes. Para Dreyfus (2002), geralmente o ensino em matemática é realizado em etapas, os conceitos são estudados separados, e essa junção, por muitas vezes, é feita pelo professor. Essa fusão dos conceitos é denominada de síntese: “Um estudante que consegue fazer as conexões de conceitos matemáticos já estudados para resolver um problema ou compreender um novo objeto matemático está fazendo uma síntese” (MARINS, 2014, p. 37).

Em resposta à letra e (Com base nestas informações vocês conseguem estimar o valor para 2023), o grupo iniciou a discussão com base nos valores encontrados da tabela e em suas experiências pessoais, conforme excerto a seguir:

E31: Olha a energia, aumentou bastante no mês de março.

E27: O gás sempre aumenta de 10 reais, 20 reais para cima. Porque eu percebi assim ô, lá no mercado que eu trabalho, antes estava cento e trinta e agora tá cento e trinta e sete.

E31: Acho que um cento e cinquenta do gás.

E26: Mas tem bastante tempo para 2023.

E27: Mas depende né, tem votação esse ano, se tiver subindo muito até lá dá uns... daí deixa eu ver, uns cento e cinquenta quase duzentos reais.

E31: E a energia uns duzentos e vinte no mês.

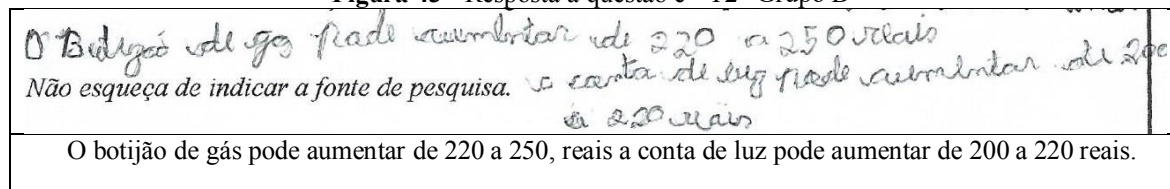
E27: Está aumentando o valor das taxas.

E31: Podemos colocar duzentos e vinte mínimos ...

E27: Coloca que o botijão de gás pode aumentar até uns R\$ 200,00 e a conta de luz até R\$250,00. E2 você escreve aqui: O botijão de gás pode aumentar de R\$150,00 a R\$200,00, a energia pode ser de 220 a 250 reais. Aí você coloca aqui, a conta de luz pode aumentar de R\$200,00 ... até R\$200,00 a R\$220,00.

Para responder à questão os estudantes não utilizaram uma expressão ou um cálculo para justificar, apenas escreveram os valores que estimaram de acordo com os dados apresentados por eles, como mostra a Figura 43.

Figura 43 - Resposta à questão e - T2 “Grupo D”



Fonte: Relatório do grupo D.

Ao término da tarefa 2 foi possível evidenciar indícios do Pensamento Matemático Avançado como: representação e abstração. Inferimos que os estudantes mobilizaram os processos de representação simbólica, pois utilizaram símbolos e notações para representar a situação; representação mental, pois relacionaram o aumento e redução dos valores de cada item com porcentagem, regra de três e razão; visualização, pois conseguiram expressar por meio de símbolos e esboços o objeto matemático; intuição, pois utilizaram conceitos já estudados para resolver a tarefa; mudança de representação e tradução, o grupo conseguiu resolver a situação por meio de dois procedimentos matemáticos e representaram a situação por meio de: expressão algébrica ou aritmética, tabular e gráfica; e modelação, pois criaram um modelo para calcular o valor da fatura como referência. Quanto aos processos de abstração inferimos que os estudantes mobilizaram processos de generalização, pois utilizaram uma expressão para cálculo do valor de referência da energia elétrica e encontraram um padrão para o cálculo de aumento e redução dos valores, porém não alcançaram uma síntese consistente dos conceitos já estudados.

3.2.3 Análise local dos processos do PMA nos grupos A e D na Tarefa 2

Com a conclusão da Tarefa 2 “Preço do gás e energia”, inferimos que os estudantes mobilizaram processos do Pensamento Matemático Avançado. Com relação aos processos de representação evidenciamos a representação simbólica, a representação mental, a visualização, a intuição, a mudança de representação e a tradução e modelação. Já com relação aos processos de abstração foram evidenciados processos de generalização e síntese, pautadas no Quadro 12 de Klaiber (2019) e na análise qualitativa de cunho interpretativo, conforme apresentado no Quadro 19.

Quadro 19 - Síntese dos processos do PMA mobilizados na T2

Processos do PMA	Grupo A	Grupo D
REPRESENTAÇÃO		
Representação Simbólica	X	X
Representação Mental	X	X
Visualização	X	X
Intuição	X	X
Mudança de Representação e Tradução	X	X
Modelação	X	X
ABSTRAÇÃO		
Generalização	X	X
Síntese	X	-

Fonte: Autoras.

Com base no Quadro 19, podemos concluir que os dois grupos mobilizaram processos do Pensamento Matemático Avançado. O processo de representação pode ser evidenciado nas análises das discussões e resoluções da T2 pelos dois grupos A e D em que ambos mobilizaram processos de representação simbólica, pois utilizaram símbolos matemáticos para expressar a situação proposta; representação mental, na qual associaram a situação com conceitos matemáticos com operações algébricas, aritméticas ou métodos de resolução; visualização tendo em vista que os dois grupos construíram uma imagem mental da situação e externalizaram por meio de esboços e esquemas para compreender ou analisar a situação, explorando o problema proposto; intuição, pois, utilizaram conhecimentos prévios como fração, porcentagem e regra de três para solucionar o problema; mudança de representação e tradução, pois, transitaram de uma representação a outra com o intuito de analisar a situação inicial proposta por cada grupo, representação algébrica, aritmética, representação gráfica e tabular; modelação, a partir da situação estipulada por cada grupo para investigação criaram modelos para satisfazer a situação. Para Dreyfus (2002, *apud* BUSSMANN; KLAIBER; SILVA, 2017, p. 5) “o sucesso na aprendizagem da Matemática pode ocorrer quando conseguimos construir diversos tipos de representação”.

Quanto aos processos de abstração, o grupo A mobilizou a generalização e a síntese já o grupo D mobilizou a generalização, não alcançando a síntese dos objetos em estudo. Dreyfus (2002) afirma que em algumas situações é necessário fazer com que os estudantes construam vários exemplos, identifiquem pontos em comum, sendo função do professor chamar a atenção

para as relações das propriedades necessárias para abstrair. Neste sentido, entendemos o importante papel do professor em auxiliar os estudantes neste processo, estimulando o desenvolvimento dos processos do Pensamento Matemático Avançado, como a abstração.

Ao analisar as resoluções da tarefa investigativa para os estudantes, podemos considerar que auxiliaram no desenvolvimento de diferentes processos do Pensamento Matemático Avançado. Sendo assim, as tarefas “[...] devem ser variadas e suficientemente ricas para permitirem explorações e investigações que conduzam os alunos a desenvolver as suas capacidades de raciocínio e à compreensão de novos conceitos” (HENRIQUES, 2010, p. 400). Bussmann, Klaiber e Silva (2017, p. 12) ressaltam que as investigações podem “estimular a formulação de questões (pois são abertas) e exigem um maior esforço cognitivo para que partes do conhecimento sejam combinadas formando o conceito como um todo. Nesse caso, essas tarefas podem contemplar todos os processos do PMA”.

Para tanto, damos continuidade à nossa investigação, analisando a tarefa 3 “Quanto vale o salário mínimo”. No tópico 3.3 apresentamos a abordagem da tarefa, os encaminhamentos e organização, no tópico 3.3.1 e 3.3.2 tratamos das análises referentes aos grupos A e D e no tópico 3.3.3 discorremos sobre a análise local dos processos do Pensamento Matemático Avançado nos grupos A e D.

3.3 Descrição e Análise da Tarefa 3 “Quanto vale o Salário Mínimo?”

Assim, como as outras tarefas apresentadas neste trabalho, a tarefa 3 intitulada “Quanto vale o salário mínimo? Tem natureza investigativa, com o objetivo de mobilizar diferentes processos do pensamento matemático. Para Ponte (2005, p. 17), as investigações “são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas, etc”.

A terceira tarefa é mais fechada, porém com grau de desafio. Ponte (2005, p. 17) difere tarefas de exploração de tarefa investigativa pelo grau de desafio: “Se o aluno puder começar a trabalhar desde logo, sem muito planeamento, estaremos perante uma tarefa de exploração. Caso contrário, será talvez melhor falar em tarefa de investigação”. Nesta perspectiva, procuramos configurar uma tarefa investigativa, com base em um tema que contemplasse o componente curricular de Educação Financeira. Para dar sequência à nossa pesquisa e o planejamento escolar, abordamos nesta tarefa assuntos relacionados à Previdência Social, os impostos cobrados do trabalhador como IRPF. Além dos impostos, a tarefa aborda o custo da

cesta básica.

A tarefa foi adaptada do livro “Cenários para investigação: Humanidades e Matemática em contexto” (PAULUSSI; GRASSMANN, 2020), e consideramos como sequência a um tema do contexto dos estudantes. No desenvolvimento da tarefa 2 (Compra do aparelho de celular), percebemos o interesse dos estudantes pelo tema e seu empenho em discutir e investigar questões que abordavam a situação econômica do brasileiro.

A tarefa iniciou-se no dia 10 de junho de 2022 e foi finalizada no dia 07 de julho de 2022, totalizando 3 horas/aula. O tempo para a resolução da tarefa 3 diminuiu em relação às outras tarefas, isso pode estar relacionada à natureza ou mesmo à familiaridade dos alunos. Helena Fonseca (2002, p. 183) considera que estudantes ao iniciar uma tarefa investigativa mostram dificuldades em investigar, “a pouco e pouco, [os alunos] foram ganhando familiaridade com o trabalho proposto e passaram a saber investigar e a ter gosto por fazê-lo”.

A professora iniciou a tarefa, fazendo uma leitura sobre um texto que aborda o artigo 7º da Constituição Federal¹⁵. Neste momento levantou questionamentos como:

- Vocês sabem o que é Constituição Federal?
- Vocês conheciam este artigo?
- Quais são as necessidades vitais básicas de um trabalhador?

Durante os questionamentos, alguns estudantes disseram já ter conhecimento sobre o que é a Constituição Federal (CF), porém a maioria respondeu não se lembrar ou não ter conhecimentos. Com relação ao terceiro questionamento, os alunos responderam quais são as necessidades básicas de uma pessoa ou família e deram exemplos como: alimentação, saúde, transporte, educação entre outros. Com isso, a professora notou o interesse dos estudantes e os convidou a investigar a situação. Para Ponte *et al.* (1998), a introdução da tarefa é o ponto de partida em que se apresenta uma questão bem definida, para que os estudantes possam definir o caminho a seguir.

Vale ressaltar que, na aula anterior, a professora trabalhou com a turma o tema Previdência Social e os impostos cobrados sobre o salário, além de discutir sobre os termos salário bruto e salário líquido, porém não informou como é realizado o cálculo, somente apresentou uma tabela¹⁶ referente aos descontos de INSS. A tabela foi passada na lousa para que os estudantes tivessem em mãos para consulta no dia da realização da tarefa.

Após a discussão, a professora começou a organizar os grupos. De início, foi proposta

¹⁵ O texto encontra-se disponível no Quadro 21.

¹⁶ A tabela apresentada à turma também está disponível no livro didático - Cenários para investigação: humanidade ematemática em contexto, 2020 e é apresentada no Apêndice C.

a continuidade dos grupos, mantendo os mesmos integrantes, porém, alguns estudantes pediram para trocar. Observando os motivos de cada grupo, a professora aceitou algumas alterações, de modo a manter o interesse da turma pelo tema, o que poderia gerar um desconforto no desenvolvimento da tarefa.

Dando continuidade à nossa investigação, optamos por manter os grupos em que a maioria dos integrantes estivesse nas análises das tarefas anteriores, conforme mostrado no Quadro 20.

Quadro 20 - Organização dos grupos analisados “Tarefa 3”

Grupo	Estudantes
A	E1, E9, E13 e E19
D	E18, E24, E26, E27 e E31

Fonte: Autoras.

Após a organização dos grupos, a professora orientou em relação aos materiais que poderiam ser utilizados como telefone celular para realizar a pesquisa e calculadoras para conferir os cálculos. Em seguida, entregou as tarefas impressas em folha sulfite como apresentado no Quadro 21.

Quadro 21 - TAREFA 3 “Quanto vale o salário mínimo?”

Quanto vale o salário mínimo?

O artigo 7º da Constituição Federal de 1988 prevê que o salário mínimo possa atender às necessidades vitais básicas do trabalhador e de sua família, incluindo moradia, saúde, educação, lazer e transporte, e não apenas às suas necessidades alimentares básicas.

Em fevereiro de 2020, quando o valor do salário mínimo bruto em vigor era de R\$ 1.045,00, o custo da cesta básica de alimentos, segundo dados do Dieese, comprometia 46,91% do valor do salário mínimo líquido. Para verificar quanto o valor de uma cesta básica de alimentos compromete do valor do salário mínimo líquido, pode-se calcular quanto o valor dessa cesta básica de alimentos representa, em porcentagem, do total desse salário mínimo líquido.

Em grupos, façam o que se pede.

1. Considerando o que vocês já sabem sobre salário bruto e salário líquido, desconto de INSS e de IRPF, calculem qual era o valor do salário mínimo líquido em março de 2020.
2. Pesquisem na internet o valor do salário mínimo atual (2022) e calculem também o valor líquido do valor pesquisado.
3. Pesquisem, também, o valor mais recente do custo da cesta básica de alimentos (segundo o Dieese) e, em seguida, com base no valor do salário mínimo atual que vocês já calcularam, respondam:

a) Quanto a cesta básica compromete do salário mínimo?

b) Considerando as experiências pessoais de vocês e da família de vocês, formule hipóteses e debatam se o valor do salário mínimo atual atende às necessidades vitais básicas de um trabalhador e de sua família, conforme determina o artigo 7º da Constituição.

Dieese. Custo da cesta básica aumenta em 10 capitais. Disponível em:

<https://www.dieese.org.br/analisecestabasica/2022/202204cestabasica.pdf>. Acesso em: 28 maio. 2022.

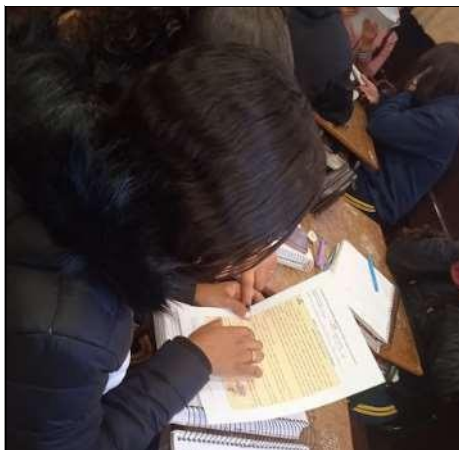
Fonte: Adaptado do livro didático - Cenários para investigação: humanidade e matemática em contexto, 2020.

Nos tópicos 3.3.1 e 3.3.2 tratamos das análises do desenvolvimento da tarefa 3 pelos grupos A e D em seguida, apresentamos uma síntese da análise local dos processos do Pensamento Matemático Avançado nos grupos A e D.

3.3.1 Análise do desenvolvimento da Tarefa 3 - grupo A

O grupo A iniciou a resolução da tarefa com uma leitura e discussão sobre o assunto proposto, como mostra a Figura 44.

Figura 44 - Leitura da Tarefa 3 “Grupo A”



Fonte: Arquivo da professora.

Após a leitura da tarefa, o grupo A decidiu pesquisar o preço da cesta básica, informação necessária para iniciar o desenvolvimento da questão 3 (Pesquisem, também, o valor mais recente do custo da cesta básica de alimentos (segundo o Dieese)), conforme excerto transcrito a seguir:

E13: Vamos pesquisar o valor!

E9: O valor é 701,59.

E1: Cinquenta e nove?

E9: É, cinquenta e nove centavos.

E13: É E9 é isso mesmo. Então vamos lá!

Para realizar a pesquisa, o grupo utilizou o próprio aparelho celular, encontrando o valor de R\$701,59, valor da cesta básica na capital do Paraná, Curitiba, as informações foram coletadas, no link disponível na tarefa segundo Dieese. A Figura 45 mostra o momento da consulta feita pelo grupo.

Figura 45 - Momento da pesquisa - T3 “Grupo A”



Fonte: Arquivo da professora.

Tendo as informações em mãos para responder à questão 3, os estudantes iniciaram uma discussão sobre a questão 1 (Considerando o que vocês já sabem sobre salário bruto e salário líquido, desconto de INSS e de IRPF, calculem qual era o valor do salário líquido em março de 2020), como mostra os excertos abaixo:

E13: Professora essa 1 aqui, é para fazer o desconto?

Professora: O que pede a questão?

E13: O salário líquido.

Professora: E o salário líquido é após o desconto?

E13: Sim, o que sai livre. Agora calcula o INSS menos o salário e IRPF?

Professora: Dentro de um salário mínimo tem o desconto do imposto de renda?

E13: Não!

E9: Acho que o salário mínimo é 1045, descontando tudo!

Professora: Será? Agora vejam a questão está se referindo a qual salário mínimo?

E9: De 2020.

E13: Ah, de 2020! Está no texto o salário.

Professora: Sim, mas esse salário que consta no texto é o quê?

E13: Bruto?

Professora: Sim!

E9: Pesquisei aqui e não tem desconto de Imposto de Renda.

As discussões feitas pelo grupo e a professora apontaram uma incerteza em relação ao valor de R\$1045,00 em que a **E9** considerou como sendo o salário líquido, porém a **E13** fez uma nova leitura do texto introdutório da tarefa e verificou que esse valor corresponde ao salário bruto. Com o valor do salário bruto de 2020, o grupo abordou o cálculo do INSS, com base na tabela fornecida pela professora na aula anterior.

Com base nas informações da tabela e o enunciado da questão o grupo se atentou ao cálculo do desconto do INSS, relacionando-o com a regra de três, conforme excertos transcritos abaixo:

E13: Essa folha aí do cálculo, vamos ver como é feito o desconto, podemos ver que é por faixa salarial, então, não podemos calcular sobre todo valor de acordo com a tabela.

E9: Mas no 1045?

E1: É! De acordo com a tabela é 7,5%. E13: Esse sim. Então vamos calcular.

E9: Como?

E13: Por regra de três, acho melhor.

E19: Eu também.

E1: Então é dos primeiros mil e quarenta e cinco como está na tabela.

O excerto mostra o momento em que o grupo fez uma representação mental por meio da intuição. Para Bussmann, Klaiber e Silva (2017, p. 12) os estudantes utilizaram “[...] a intuição para desenvolver uma estratégia de resolução, propiciando a criação de esquemas e quadros de referências (representação mental)”. Após a representação mental, o grupo analisou como seria o cálculo do percentual sobre o salário, além disso, a professora interveio no diálogo do grupo a fim de observar as diferentes representações que poderiam ser feitas do percentual, como decimal e por meio de frações, conforme excertos transcritos abaixo:

Professora: Fizeram?

E13: Sim

Professora: O que vocês fizeram?

E13: Regra de três.

Professora: Vejam se sete por cento pode ser representado de que forma?

E13: Nossa, eu não lembro direito.

E19: Fração!

Professora: Fração de denominador?

E13: Cem!

Professora: Então representa aí. E de qual forma?

E13: A fração pode ser transformada em número decimal?

Professora: Então, como ficaria?

E13: Usa aquela regra E19 das casas para direita!

E19: Não lembro, prefiro dividir.

E13: Professora não é só andar duas casas, aí ficaria tipo 0,075.

Professora: Que legal, conseguiram representar de três maneiras diferentes. Percebo que a maioria das vezes vocês utilizam regra de três para calcular porcentagem porquê?

E1: É mais fácil.

E13: É professora, parece que eu consigo raciocinar melhor!

A professora propôs aos estudantes, após a apresentação de duas formas distintas de representar a porcentagem 7,5%, que buscassem uma forma diferente de responder ao problema, como mostra os excertos abaixo:

Professora: Vejo que vocês já resolveram o problema, por meio da regra três.

E13: Sim, professora.

Professora: Mas tem outra forma de resolver?

E13: Na outra tarefa utilizamos a fração.

Professora: Também! Mas tem outra forma?

E13: Nossa professora, querendo complicar! (risos)

Professora: Vamos! Qual outra forma de calcular?

E13: Professora, olhando aqui as diferentes formas de representar 7,5% lembrei do juros simples e compostos, que dividíamos a taxa por cem.

Professora: Ok!

E13: E aqui você pediu para fazer o mesmo aí multipliquei por 1045 e deu o mesmo valor de R\$78,38!

Professora: Como você fez isso?

E13: Eu pensei assim, vou usar esses valores que a professora pediu para transformar (risos) e relacionei com as taxas dos juros, toda vez dividíamos por cem, só que quando você perguntou não lembrava.

E1: E deu certinho, professora! Olha.

E19: Está correto, professora? **Professora:** Sim! O que vocês acharam? **E1:** Bem mais fácil!

E13: Dá para montar uma expressão, fica mais fácil, é o salário bruto, mesmo o nosso cálculo com o 0,075 do salário já dá o salário líquido.

Desta forma, o grupo respondeu a primeira questão da tarefa apresentando como resposta o registro escrito (Figura 46).

Figura 46 - Resolução da questão 1 - T3 “Grupo A”

Handwritten work showing calculations for salary liquidation. The work includes the formula $SL - (0,075 SL) = SB$ and the calculation $1045 - (0,075 \cdot 1045) = 966,6$. A table shows the relationship between percentages and values:

100%	1045	100%	7837,5
7,5%	x	x	7837,5

The final calculation shows $1045,00 - 78,38 = 966,62$. A note at the bottom states: "No salário mínimo não é descontado IRPF".

Fonte: Relatório do grupo A.

No registro podemos inferir que o grupo mobilizou indícios do processo de visualização, “[...] pois ela permite a transformação de um processo mental em algo que pode ser visto (BUSSMANN; KLAIBER; SILVA, 2017, p. 5). Além disso, podemos evidenciar processos como generalização e mudança de representação e tradução. No entanto, ao representar o modelo para generalizar, o grupo apresentou símbolos incorretos dizendo que o salário líquido é menos 0,075 do próprio salário líquido que resulta no salário bruto. Porém, no excerto anterior o grupo expressou corretamente o padrão observado e então a generalização: *Dá para montar uma expressão, fica mais fácil, é o salário bruto, mesmo o nosso cálculo com o 0,075 do salário já dá o salário líquido.*

Após responder a primeira questão, o grupo direcionou a atenção para a questão 2 (Pesquise na internet o valor do salário mínimo atual (2022) e calculem também o valor líquido do valor pesquisado). A discussão pautou-se em como realizar o cálculo já que o valor do salário mínimo é acima de R\$ 1045,00, conforme o excerto a seguir:

E13: Temos que prestar atenção agora!

E1: Porque? **E13:** Na tabela. **E1:** O que têm?

E19: Os valores né? Agora o salário já não é mais 1045.

E13: Sim, pelo que entendi aqui na tabela é faixa salarial, do valor do salário de 1212, você consegue, dos primeiros 1045 você vai descontar tanto, do restante você vai descontar tanto.

E19: Como assim?

E13: Você vai fazer 7,5 aí o salário muda, então você vai colocar dois aqui 1045, vai ser descontado tanto, aí você vai ver o restante que sobra desse valor. Espera... empresta aqui para eu ver.

E1: Faz regra de três, para descobrir o valor líquido.

E13: Então vai, 1212 menos 1045 resta (pausa) enfim, você vai fazer essa conta de menos aí o 1045 já está aqui na questão 1, com o que sobrar aqui embaixo você vai descontar 9% se não atingir, por exemplo, mais de 2089, só vai fazer essa daqui entendeu? (Se referindo aos valores da tabela), e o que sobrar daqui de 1212 menos 1045, você só vai calcular até aqui.

E19: Vamos representar de outra forma?

E13: Acho que sim, ficou bom do outro jeito e dá para verificar os cálculos.

E1: Eu vou fazer pela regra.

E13: Ok! Depois eu faço com o número decimal, já transforma aí!

No excerto podemos identificar aspectos do Pensamento Matemático Avançado como representação simbólica, pois os estudantes expressaram a situação por meio de símbolos matemáticos e notações matemáticas, ao usar símbolos de percentual e números para expressar a situação; representação mental, pois, associaram a situação a um conceito matemático como, número decimal e regra de três; intuição, pois utilizaram conceitos já estudados afim de responder a questão; e visualização, pois conseguiram expressar no papel por meio dos símbolos e expressões o que estava sendo discutido pelo grupo, processos pelo qual a imagem mental ganhou forma, para análise e exploração do problema. Após a discussão, o grupo apresentou como resposta à questão 2 o registro representado na Figura 47.

Figura 47 - Resolução da questão 2 - T3 "Grupo A"

2) O valor é R\$ 1212,00

$$100\% = 16\% \quad 100x = 1703$$

$$91 - x \quad x = \frac{1703}{100} = 17,03$$

$$\frac{9}{100} = \frac{0,09 \cdot 167 = 15,03}{100}$$

$$\frac{1212}{100} - \frac{93,49}{100} = 1118,59 \rightarrow \text{salário líquido}$$

$$1212 = [(1045 \cdot 0,075) + (1212 - 1045) \cdot 0,09] \cdot \frac{100}{100}$$

1212 100% — 1045
- 1045 7,5% — x
167

100x = 7837,5
x = 7837,5 = 78,375

Fonte: Relatório do grupo A.

Pelo registro foi possível evidenciar que os estudantes novamente representaram a situação por meio de dois procedimentos: regra de três e com a multiplicação da porcentagem transformada em número decimal. A fim de generalizar a situação, encontraram um padrão por meio da expressão aritmética: $1212 - [(1045 \cdot 0,075) + (1212 - 1045) \cdot 0,09] =$, porém não chegam a uma expressão algébrica, como mostra o excerto abaixo:

Professora: *Como vocês montaram a expressão?*

E19: *A E13 observou os valores que não mudam nos dois métodos.*

Professora: *Como assim.*

E13: *O 1212 é o salário, dele tiramos 0,075 de 1045 depois do restante para chegar no 1045 tiramos 0,09 aí temos o valor já com o desconto.*

Professora: *Por que os colchetes?*

E13: *Íamos usar os parênteses, mas ia ficar muito repetitivo.*

O grupo chegou a uma expressão para representar a situação sem o auxílio da professora, representando a situação inicial em uma linguagem matemática, podemos inferir que o grupo mobilizou indícios de tradução. Para Bussmann, Klaiber e Silva (2017, p. 12), a tradução é um subprocesso da representação e pode ocorrer da “[...] tradução de um enunciado em linguagem natural para linguagem matemática”.

Para a questão 3 (Pesquise, também, o valor mais recente do custo da cesta básica de alimentos (segundo o Dieese) e, em seguida, com base no valor do salário mínimo atual que vocês já calcularam, respondam: a) Quanto a cesta básica compromete do salário mínimo? b) Considerando as experiências pessoais de vocês e da família de vocês, formule hipóteses e debatam se o valor do salário mínimo atual atende às necessidades vitais básicas de um trabalhador e de sua família, conforme determina o artigo 7º da Constituição), com a leitura do enunciado, o grupo realizou um cálculo para identificar quanto sobra de salário mínimo, obtendo R\$ 417,00. Em seguida, para abordar a letra b, utilizaram exemplos do contexto familiar de cada um, como mostra o excerto abaixo:

E13: *Com certeza não!*

E1: *Não, a minha mãe tem que trabalhar em dois empregos!*

E13: *Por que é uma pessoa que recebe um salário mínimo, se ela gastar 701 reais e cinquenta e nove centavos só de cesta básica, o valor que sobra para ela mal dá para ... (interrompida)*

E19: *Sobra quatrocentos e dezessete, aluguel, água, que mais?*

E13: *Internet.*

E1: *Gás, fora que o gás está cento e ...*

E9: *Cento e ...*

E1: *Cento e trinta e alguma coisa, lembra que a gente viu já na aula?*

E13: *Olha disso aqui, quatrocentos e dezessete, vamos tirar...*

E19: *Fora as despesas pessoais.*

E13: *Quatrocentos e dezessete ...*

E1: *Isso depende de quantas pessoas têm na família ...*

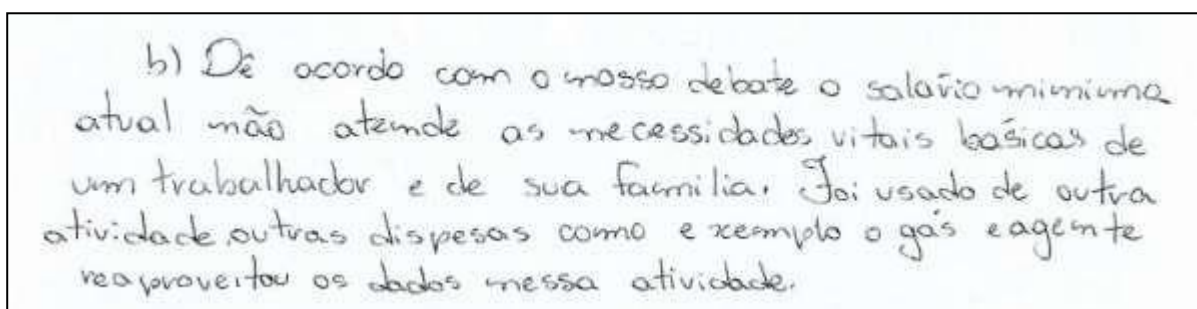
E13: *Vamos tirar só cento e trinta.*

E1: *Porque só dependendo disso a conta de água e luz bem alta. (se referindo ao número de pessoas na casa)*

E13: O que uma pessoa faz com trezentos e vinte e sete reais? Se tirar o valor do gás?
E1: Não paga nem o aluguel.
E9: Não mesmo.
E19: Meu pai paga de aluguel seiscentos e cinquenta.
E1: Meu pai paga setecentos de aluguel.
E13: Eu pago trezentos e cinquenta de aluguel mais a água oitenta reais, ou seja, já dá quatrocentos e trinta fechado.
E9: E a luz?
E13: Exatamente, fora a luz. Sem contar o restante da despesa né? Eu vou ter água para tomar banho, mais não vou ter um sabonete para tomar banho.
E1: Aham. A minha mãe paga quatrocentos e cinquenta de aluguel cem de água e cem de luz.
E13: Isso sem contar uma pessoa que tem filho, despesa com médico...
E9: Fraldas. E13: Leite!! E19: Remédio.
E13: Tipo que não vem na cesta básica. A gente ganha do governo, mas nem todo mundo que realmente precisa ganha do governo, tem muita gente que ganha do governo mesmo, e vende lá na rodoviária velha, mas também tem gente precisando, que não consegue a cesta básica. E é mais ou menos isso, não vai uma pessoa trabalhar não para ver! Nossa senhora, até porque, geralmente, quando uma pessoa ganha um salário mínimo, o salário mínimo não é só para ela.

No diálogo entre os integrantes do grupo, há um debate sobre quanto sobra do salário descontando o valor da cesta básica e outros itens, considerados por eles essenciais para uma família. Além disso, os alunos debateram questões financeiras que afetam suas famílias, utilizando exemplos da tarefa 2 (Preço do gás e energia), para auxiliar na discussão do grupo, pautando nestes dados para justificar sua resposta, como mostra a Figura 48.

Figura 48 - Resolução da questão 3 letra b - T3 "Grupo A"



b) De acordo com o nosso debate o salário mínimo atual não atende as necessidades vitais básicas de um trabalhador e de sua família. Foi usado de outra atividade outras despesas como exemplo o gás e a gente reaproveitou os dados nessa atividade.

Fonte: Relatório do grupo A.

Após a resolução da letra b, o grupo retomou a discussão relativa à letra a e analisou como responder à questão, a dúvida se pautou no significado do termo “quanto compromete do salário mínimo”, conforme excerto transcrito:

E13: Mas acho que a resposta não é quanto sobra do salário, é quanto é comprometido.
E1: Também acho.
E19: Não é tão simples assim.
E13: Professora, é para colocarmos aqui quanto é comprometido com a cesta básica?
Professora: Isso mesmo, quanto do salário é comprometido?
E1: Não é só diminuir, né?
Professora: Vocês acham que isso seria suficiente para responder a questão?

E13: Não. Podemos fazer assim: do salário comprometemos 50% por exemplo com a cesta?

Professora: Vocês acham que seria uma resposta considerável, para a questão?

E19: Sim.

E1: Mas usamos qual salário? Líquido ou bruto?

E13: Líquido né, não podemos comprometer um valor que a pessoa não pega em mãos já que é descontado da pessoa.

Professora: Coerente E13! Podem responder.

E1: Regra de três?

E13: Vamos usar a fração, razão. O valor da cesta sobre o valor do salário líquido. Ô! Já estou craque, dá até para montar. (pausa para os cálculos) Aqui acho que pode arredondar para sessenta e três né?

E19: Sessenta e dois, não é?

E13: Não, acho que arredondando fica sessenta e três por cento. Dá sessenta e dois sete dois como o próximo é um número maior que cinco vai arredondar para três.

E1: Eu coloquei assim, primeiro a cesta você quer que troque?

E13: Não, está certo assim. É só para eu enxergar gente, eu estou meio cega. E ainda trabalhei até às quatro e pouco da manhã então eu ainda estou com sono. O símbolo de aproximadamente é aquele tiozinho né?

E1: É!

E13: Em cima do sinal de igual?

E1: Sim.

Para responder a questão (letra a), os estudantes fizeram uma representação mental da situação, associando a questão à razão, representando a situação por meio de porcentagem. Deste modo, podemos inferir que os estudantes novamente mobilizaram indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado como representação simbólica, representação mental, intuição, modelação, pois utilizaram a partir de um conceito uma expressão para responder a questão ($\frac{C.B}{S.B} = \%$), generalizando a situação, como mostra a Figura 49 com o registro do grupo.

Figura 49 - Resolução da questão 3 - letra a - T3 “Grupo A”

3) a) O valor da cesta básica em 2022 é de R\$ 701,59

$$\begin{array}{r} 1118,59 \\ - 701,59 \\ \hline 417,00 \end{array}$$

$$\frac{C.B.: 701,59}{S.B. 1118,59} \approx 63\%$$

Razão

Fonte: Relatório do grupo A.

No registro, a professora observou novamente que os estudantes utilizaram o símbolo S.B para se referir a salário líquido, no entanto, relacionaram o símbolo ao valor de R\$ 1118,59 que corresponde ao salário líquido.

Com o término da tarefa, a professora, na outra aula, levou à sala as tarefas e discutiu alguns pontos em comum com toda a turma, com relação aos erros cometidos pelos grupos, ou a confusão na representação simbólica dos termos “salário bruto” e “salário líquido”. O grupo

A visualizou o erro, porém a professora não solicitou que alterasse a resposta, apenas alertou a turma, pois, a dúvida estava se realmente tinham compreendido o que é salário líquido e salário bruto. O grupo afirmou ser apenas um equívoco da **E1** ao representar a expressão, no entanto, a professora explicou novamente para a turma o que é salário bruto e salário líquido.

Ao final da tarefa foi possível evidenciar características do Pensamento Matemático Avançado como representação e abstração. Com relação aos processos de representação, inferimos que os estudantes mobilizaram processos de representação simbólica (expressaram por meio de símbolos ou notações para responder as questões), representação mental (associaram conceitos matemáticos com expressões algébricas ou aritméticas e métodos de resolução como: regra de três, razão, percentual e outros), visualização (representaram a situação por meio de esboços ou esquemas para solucionar o problema), intuição (utilizaram conhecimentos prévios para solucionar o problema), mudança de representação e tradução (representaram a situação de diferentes formas e transitaram entre as representações, conseguiram traduzir o enunciado de uma linguagem natural para uma linguagem matemática), modelação (a partir dos dados fornecidos e coletados por eles, adequaram ou construíram um modelo para estudar um processo ou objeto).

Com relação aos processos de abstração, inferimos que os estudantes mobilizaram processos de generalização (induziram, a partir de casos particulares, obtendo resultados ou métodos genéricos, por meio de expressões, a fim de generalizar a situação). Podemos inferir que os estudantes mobilizaram indícios de síntese, ao relacionar a tarefa com conceitos já estudados, conectando com abordagens da tarefa anterior, abstraindo de situações do cotidiano, porém, notou-se uma defasagem em relação a conceitos matemáticos, se concentrando principalmente em fazer uso da regra de três.

3.3.2 Análise do desenvolvimento da Tarefa 3 - grupo D

O grupo D iniciou a resolução da tarefa realizando uma pesquisa acerca do valor do salário mínimo de 2022, dado que foi utilizado para responder à questão 2 (Pesquisem na internet o valor do salário mínimo atual (2022) e calculem também o valor líquido do valor pesquisado), conforme transcrição a seguir:

E31: Em março né E18?

E18: Sim

E31: Salário mínimo atual...

E28: De 2022.

E27: Mil duzentos e doze. E31: Aqui ô, tá falando.

E27: O mesmo que tá aqui ô!

E18: Mas o salário mínimo agora não é R\$1100,00?

E27: Não! Um mil duzentos e doze.

Após a pesquisa, o grupo fez uma leitura da questão 3 (Pesquisem, também, o valor mais recente do custo da cesta básica de alimentos (segundo o Dieese) e, em seguida, com base no valor do salário mínimo atual que vocês já calcularam, respondam: a) Quanto a cesta básica compromete do salário mínimo? b) Considerando as experiências pessoais de vocês e da família de vocês, formule hipóteses e debatam se o valor do salário mínimo atual atende às necessidades vitais básicas de um trabalhador e de sua família, conforme determina o artigo 7º da Constituição).

Com o intuito de responder à questão, o grupo discutiu sobre quais valores seriam utilizados para analisar o preço da cesta básica, salário líquido ou salário bruto. Além disso, os alunos associaram a situação proposta na tarefa com situações do cotidiano, como mostra o excerto a seguir:

E31: Essa três aqui, letra a: Quanto a cesta básica compromete do salário mínimo? Eu tenho que utilizar esse valor aqui?

Professora: Observe a questão! O valor da cesta básica é referente a qual ano?

E31: Ah tá, 2022! Então professora!

Professora: Qual o valor que a pessoa ganha?

E31: Então professora, a pessoa não ganha os um mil duzentos e doze né?

Professora: O que acontece?

E31: Tem esses descontos de INSS e imposto de Renda.

Professora: Com isso vocês terão o salário que a família recebe?

E28: É verdade professora. Minha mãe não ganha um mil duzentos e doze, ela falou que chega próximo do um mil e cem.

Professora: E por que isso acontece?

E24: Por causa desses descontos. Eu acho um absurdo!

Professora: Mas vocês sabem que esses descontos são revertidos em benefícios para a população?

E24: No caso o INSS, serve para aposentadoria.

E31: Você já comentou também nas aulas sobre educação, transporte e outros.

Professora: Sim! O importante é que vocês tenham consciência que quando você vai em um emprego e falam um salário, vocês não receberão aquele salário integral.

E18: Terão os descontos. Imagina se uma pessoa compromete todo o salário e não sabe quanto é o desconto?

Professora: Será que isso pode acontecer?

E31: Eu acho que sim, eu mesma achei que receberia os mil duzentos e doze.

Professora: Por isso a importância de saber calcular os descontos, para não comprometer todo salário que você nem ganha.

E28: Tenho que falar isso para minha irmã, ela começou a trabalhar numa loja de calçados semana passada. Mas ela não irá ganhar esse salário.

Neste excerto, evidenciamos que os estudantes relacionaram a situação com o contexto da realidade. Esse momento foi oportuno de modo que evidenciamos diferentes conhecimentos utilizados, por exemplo por E38, para ajudar em uma situação do seu cotidiano. Neste contexto, entendemos que a discussão feita pelo grupo foi essencial para o desenvolvimento de diferentes pensamentos, ou seja, sem a discussão “[...] a investigação perderia todo o sentido, pois é com o confronto dos resultados que os alunos terão a oportunidade de desenvolver todas as potencialidades do trabalho investigativo” (COLLI; OMODEI, 2016, p. 17).

Diante das abordagens sobre o que é salário líquido e salário bruto, os estudantes responderam à questão 1 (Considerando o que vocês já sabem sobre salário bruto e salário líquido, desconto de INSS e de IRPF, calculem qual era o valor do salário mínimo líquido em março de 2020), como mostra o registro representado na Figura 50.

Figura 50 - Resolução da questão 1 - T3 “Grupo D”

Handwritten work showing calculations for net salary. The work includes a proportion: $100\% - 1045 \rightarrow 7,5 x$. Below this, a calculation is shown: $1045 \cdot \frac{7,5}{100} = 78,375$. The final result is $x = 48,346$. There are also notes about 'salário líquido' and 'salário bruto'.

Fonte: Relatório do grupo D.

No registro, podemos inferir que o grupo mobilizou indícios dos processos do Pensamento Matemático Avançado, como representação simbólica, representação mental, intuição e visualização, no entanto, não conseguiu associar à situação mais do que uma representação. Na resolução utilizaram a regra de três para solucionar o problema, calculando o valor do desconto do INSS sobre o salário de R\$1045,00. Ao tentar expressar, por meio da razão, não conseguiu finalizar o cálculo. Com isso, não conseguiu mobilizar processos como mudança de representação e tradução. Dreyfus (2002) considera que a mudança de representação e tradução significa ter várias representações de um mesmo conceito e saber utilizá-las, em conjunto, interligadas e quando necessário mudar para uma representação mais eficiente.

Após responder a primeira questão, o grupo discutiu como responder à questão 2, em que pudemos evidenciar dificuldades em compreender a tabela para o cálculo do INSS, conforme excerto a seguir:

E31: Mas professora, estamos fazendo aqui, olha calculamos já sobre 1045, agora estamos com dificuldades na questão 2, sobre o valor de 1212.

Professora: Para resolver utilizem a tabela que eu passei para vocês, porém com a atual hoje dá uma diferença. De acordo com o texto vamos seguir a tabela de 2020.

E31: Mas aqui está 7,5% de 1045 e o 1212? Porque depois já aparece 9%, não tô

vendo 1212 na tabela.

Professora: Então, mas veja esses valores são referentes a faixa salarial. Como vocês pensam em calcular?

E31: 9% de 1212?

Professora: Olhando a tabela dá essa impressão, mas não. O percentual ele segue aqueles valores, por exemplo, o 7,5% é até 1045.

E31: Então calculamos nos primeiros 1045 os 7,5%?

Professora: Sim

E24: Então temos que pegar 1212 descontar 1045.

Professora: Para quê?

E31: Porque desse valor já foi calculado.

Professora: E agora?

E28: Sei lá! Está muito difícil!

E31: Professora, não é tipo, desta diferença que calcula os 9%?

Professora: Está certo, agora façam o cálculo, tentem responder à questão de maneiras diferentes.

E24: Ok!

Com a definição de como seria o procedimento para responder à questão 2, o grupo iniciou o registro da resolução, como mostra a Figura 51:

Figura 51 - Momento do registro da questão 2 – T3 “Grupo D”



Fonte: arquivo da professora

Mesmo com a intervenção da professora o grupo não conseguiu representar a solução da questão de diferentes formas, como mostra a Figura 52, em que o grupo iniciou a representação da situação de outra maneira diferente para o cálculo de 7,5% e 9%, porém não concluiu o cálculo. No entanto, podemos evidenciar que os integrantes do grupo mobilizaram indícios de Pensamento Matemático Avançado como representação simbólica, representação mental, intuição e visualização. Para Menezes e Neto (2018, p. 30) “no momento da criação de possibilidades por parte dos alunos, faz-se importante a não interferência do docente, sendo atuante apenas caso seja interpelado, quando motivará os discentes por meio de perguntas, objetivando melhores representações visuais para que, em conjunto com o conhecimento prévio, possam estabelecer nexos de causa entre o que foi instigado e o que já se sabe”.

Figura 52 - Resolução da questão 2 - T3 “Grupo D”

$100 \times 16\%$
 $9 \quad x$
 $100x = 9 \cdot 16 = 1503$
 $x = \frac{1503}{100} = 15,03$
 $\frac{9}{167} \cdot 100 =$
 $\frac{1212}{1212} - 18,34 - 15,03 =$
 $1178,6$
 Salário líquido
 $\frac{115}{1212} \cdot 100 =$

Fonte: Relatório do grupo D.

Finalizando a questão 2, o grupo realizou uma pesquisa com o objetivo de encontrar o valor da cesta básica como solicitado na questão 3, conforme excerto:

E31: Eu vou pesquisar o valor da cesta básica, o valor ...

E28: Será que é caro?

E24: O que se faz com um salário que se ganha?

E28: É muito pouco. Não é esse valor aqui não né?

E27: Pior que é!

E28: Nossa, R\$ 729,37? (se referindo ao valor da cesta básica)

Com o dado coletado, os estudantes iniciaram a resolução da questão, discutiram sobre quais valores seriam utilizados para respondê-la e o procedimento necessário, conforme excerto transcrito abaixo:

E24: Para calcular a cesta pega o valor de 1212?

E31: Não gente! Tem que pegar o salário depois dos descontos, aí pega o valor da cesta e divide pelo salário líquido não bruto, a pessoa não recebe os 1212, daí vai dar um número por exemplo, 0,7.

E24: O e E31 quanto é o desconto mesmo?

E31: 7,5%

E24: Ah tá! E31, eu tirei o valor e sobrou trezentos e noventa e um reais e sessenta e nove centavos.

E31: Agora para saber quanto compromete, pega o salário da cesta e divide pelo salário.

E24: O que?

E31: Para saber quanto é gasto, comprometido!

Após a estrutura mental ser definida, o grupo registrou a resposta utilizando a razão, transformando o resultado em porcentagem, no entanto cometeu mais um equívoco, encontrando o valor de R\$ 1121,00 para o salário líquido diferente do resultado apresentado na questão 2. Porém, ao fazer o arredondamento, conseguiu obter um resultado coerente em porcentagem, como mostra a Figura 53.

Figura 53 - Resolução da questão 3 - letra a - T3 “Grupo D”

Handwritten calculations showing a subtraction of 1121 from 725,34 (representing 7232 - 5,11) to arrive at 64,7% (approx. 65%). A separate calculation shows 397,69 minus 1,53 (desconto) resulting in 153,34 (R\$). A list of values includes 'Valor do gás: 130,0', '729,34', and 'Energia: 113,34'.

Fonte: Relatório do grupo D.

Mesmo com os equívocos do grupo, podemos evidenciar indícios de Pensamento Matemático Avançado como: representação simbólica, representação mental, intuição e visualização. Para Henriques (2010, p. 81) “as representações podem ser uma combinação de alguma coisa escrita no papel, alguma coisa existente na forma de objetos físicos ou um arranjo de ideias cuidadosamente construídas na mente de um indivíduo”.

Em seguida, os estudantes iniciaram uma discussão para a resolução da letra b, abordando questões pessoais do contexto dos estudantes e informações da tarefa 2 (Preço do gás e energia), como mostra o excerto abaixo:

E31: A letra b, considerando as experiências pessoais de vocês e da família de vocês, formule hipóteses e debatam se o valor atual atende às necessidades vitais básicas de um trabalhador e de sua família? Será que é suficiente?

E18: Não.

Professora: Porquê?

E24: Muito pouco professora, e quem paga aluguel, que tem que comprar remédio, não dá.

E31: Uma família não tem gastos só com a cesta básica e só ela compromete mais da metade de um salário 65%.

E28: Tem luz, água.

E24: Gás! Vocês lembram desses valores, do trabalho?

E31: Sim. Nem dá para guardar dinheiro, você fala em investir durante a aula, mas olha só nem sobra.

Professora: O que mais pode interferir?

E28: Os números de pessoas na casa podem aumentar os gastos e também podem contribuir, no meu caso eu trabalho fora e ajudo minha mãe.

Professora: Vocês podem usar esses argumentos para responder à questão. Registrem tudo!

E27: Ok!

O diálogo feito pelo grupo e a professora mostrou uma conexão do grupo com os dados da questão anterior, com conteúdos estudados nas aulas de Educação Financeira como investimento. Desta forma, o grupo resolveu a última questão da tarefa apresentando como resposta o registro da Figura 54.

Figura 54 - Resolução da questão 3 - letra b - T3 "Grupo D"

b) Considerando nossas questões familiares, um salário mínimo não consegue sanar por (nossas) necessidades todas

Trabalhador A.	Salários	V.T	Moradores
2	1212	2424	5

Se descontarmos o valor de INSS + valor da C.B, para 5 moradores, concluímos o valor de R\$ 783,58, o que não sustenta uma casa e uma família.

b) Considerando nossas questões familiares, um salário mínimo não consegue sanar por todas necessidades.

Trabalhador R.	Salários	V.T	Moradores
2	1212	2424	5

Se descontarmos o valor do INSS + o valor da C.B, para 5 moradores, concluímos o valor de R\$ 783,50 o que não sustenta uma casa ou uma família.

Fonte: Relatório do grupo D.

No registro e nas discussões do grupo, podemos inferir que os estudantes iniciaram uma síntese da situação, relacionando a questão b com a questão a, além de estabelecer conexões com temas estudados em Educação Financeira como Investimento e abstraiu da situação proposta para casos específicos do contexto dos estudantes. No entanto, verificou-se que os estudantes utilizaram o valor de R\$ 783,50 e não justificaram o valor apresentado, porém, podemos notar que o valor de R\$ 783,50, registrado pelo grupo, equivale aos R\$ 397,69 (Figura 53) que sobra de um salário líquido multiplicado por dois ($R\$ 397,69 \cdot 2 = R\$ 783,50$), por se tratar de dois salários mínimos como renda de uma família. Vale ressaltar que o diálogo feito com a professora pode ter contribuído com o desenvolvimento deste processo. Segundo Dreyfus (1991), sintetizar significa compor ou combinar partes de tal forma que elas formem um todo, uma entidade, é a junção de todos fatos que acabam por se fundir numa imagem simples no seio da qual todos eles estão compreendidos e inter-relacionados.

Desta forma, na outra aula, a professora também apontou ao grupo os erros cometidos,

bem como ressaltou a importância de diferentes representações para analisar os resultados. Os erros mais específicos foram apresentados para o grupo e os comentários em comum com os outros grupos foram expostos para toda a turma.

Em análise da tarefa feita pelo grupo D, podemos inferir que os estudantes mobilizaram indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado como representação simbólica (representaram a situação proposta por meio de símbolos e expressões), representação mental (relacionaram as questões com conceitos), intuição (utilizaram conceitos estudados anteriormente para resolução da tarefa), visualização (criaram uma representação mental e conseguiram transmitir para o papel “ver”). Com relação à mudança de representação e à tradução, os estudantes tentaram formular diferentes formas de responder à tarefa, porém não concluíram os cálculos, utilizaram diferentes conceitos para responder as questões 1 e 3, sendo regra de três e razão, porém, não transitaram entre essas representações.

Em relação à abstração, o grupo não mobilizou processos de generalização, o que pode estar estreitamente ligado ao tempo para resolução da tarefa, no entanto, apresentaram uma síntese da situação.

3.3.3 Análise local dos processos do PMA nos grupos A e D na Tarefa 3

No final da tarefa 3 “Quanto vale o salário mínimo?”, inferimos alguns processos do Pensamento Matemático Avançado, com relação aos processos de representação e abstração, apoiando-se no Quadro 12 baseado em Klaiber (2019), nas referências apontadas e na pesquisa qualitativa de cunho interpretativo.

Para discutir e analisar os processos mobilizados pelos grupos no término da tarefa, apresentamos novamente o Quadro 22 – Síntese dos processos do PMA mobilizados na tarefa 3, pelos grupos A e D, em seguida as conclusões sobre os processos mobilizados pelos estudantes ao desenvolver a tarefa investigativa.

Quadro 22 - Síntese dos processos do PMA mobilizados na Tarefa 3

Processos do PMA	Grupo A	Grupo D
REPRESENTAÇÃO		
Representação Simbólica	X	X
Representação Mental	X	X
Visualização	X	X
Intuição	X	X

Mudança de Representação e Tradução	X	-
Modelação	X	-
ABSTRAÇÃO		
Generalização	X	-
Síntese	X	X

Fonte: Autoras.

De acordo com o Quadro 22, podemos inferir que os dois grupos mobilizaram indícios dos processos de representação como: representação simbólica, pois utilizaram símbolos ou expressões para representar a situação proposta; representação mental, pois, associaram a situação com operações algébricas ou aritméticas como razão ou regra de três; visualização, relacionaram as questões com esquemas, quadros, para explorar ou responder a tarefa; intuição, pois, utilizaram conhecimentos prévios para responder o solicitado. A mudança de representação e a tradução foram mobilizados apenas pelo grupo A, pois representaram de diferentes formas a mesma questão e transitaram entre elas, com a intervenção da professora; o processo de modelação foi mobilizado pelo grupo A pois encontraram um modelo para calcular o desconto do INSS e o valor do salário comprometido.

Pesquisas como de Henriques (2010, p. 389) apontam a “variedade de representações que os alunos são capazes de utilizar, associadas às diferentes funções que desempenham na exploração das tarefas de investigação propostas”. A mesma autora considera que os estudantes têm a tendência em utilizar as representações algébricas, mesmo quando conhecem ou têm à disposição outras representações: “Só quando este modo de representação não permite encontrar soluções ou quando são solicitados a apresentar estratégias alternativas de resolução é que recorrem a outras representações” (HENRIQUES, 2010, p. 389).

Com relação aos processos de abstração foi possível evidenciar indícios nos grupos A e D. O grupo A indentificou um padrão, representando por meio de uma expressão algébrica, generalizando o padrão observado, induzindo casos particulares, para casos mais gerais; o processo de síntese pode ser evidenciado no grupo A, pois utilizaram conceitos já estudados e situações do cotidiano, estabelecendo relações com a tarefa, com o objetivo de argumentar suas respostas. Já o grupo D não reconheceu um padrão utilizado para solucionar as questões. Com relação à síntese o grupo D mobilizou indícios, pois nas expressões utilizadas mencionou situações e conteúdos já abordados, com o auxílio da professora. Para Dreyfus (2002), por muitas vezes a síntese não acontece em sala de aula, pois os professores constroem as sequências, a fim de facilitar a compreensão por parte dos estudantes. Em alguns casos, os

professores iniciam um conceito novo já relacionando com situações do cotidiano ou com conceitos estudados. Assim, a síntese permite a “possibilidade de estabelecer conexões entre os assuntos da própria disciplina e dessa forma experienciar a evolução do pensamento matemático dando a oportunidade de elaborar questionamentos e podendo até, em alguns momentos, instigar a curiosidade dos estudantes a respeito do conteúdo matemático” (BUSSMANN; KLAIBER; SILVA, 2017, p. 6).

Concluimos, assim, que a tarefa 3 permitiu o desenvolvimento de processos do Pensamento Matemático Avançado, processos relacionados à abstração e representação.

Com o intuito de responder nossa questão de pesquisa no tópico 3.4 abordamos uma análise global das três tarefas, inferindo de modo geral sobre os processos mobilizados pelos estudantes.

3.4 Análise Global das Três Tarefas

Na análise local de cada tarefa, por meio de quadro síntese dos resultados (Quadros 15, 19, e 22), visamos informações para subsidiar nossa análise global. Sendo assim, neste tópico após finalizadas a descrição do desenvolvimento e a análise local das tarefas focamos nossas reflexões no nosso objetivo de pesquisa: *Evidenciar e discutir indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado mobilizados por estudantes do ensino médio ao desenvolver tarefas investigativas.*

A análise local de cada tarefa (1, 2 e 3) nos possibilitou evidenciar que processos de representação e abstração se fizeram presentes quando alunos da 2ª série do Ensino Médio desenvolveram tarefas investigativas.

Na análise local da Tarefa 1 “Compra do Aparelho de Celular”, foram revelados indícios do Pensamento Matemático Avançado, o interesse pela tarefa por parte dos estudantes e a intervenção da professora puderam ter contribuído para a mobilização dos processos do Pensamento Matemático Avançado. Deste modo, corroboramos com Bussmann, Klaiber e Silva (2017, p. 12) sobre “a importância do professor a fim de que este possa proporcionar e mobilizar intervenções durante a ação docente, tendo como objetivo maximizar a aprendizagem dos estudantes”.

Na análise local da Tarefa 2 “Preço do gás e energia”, evidenciamos mais processos relacionados a abstração, isso ocorreu devido à natureza da tarefa a qual permitiu um grau maior de complexidade e investigação dos estudantes, promovendo diferentes resultados e

objetos de estudo. Para Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021), uma tarefa pode ser considerada aberta, quando não fornece pista alguma do que se pretende encontrar e, neste sentido, pode possibilitar uma série de soluções.

Já na análise local da Tarefa 3 “Quanto vale o salário mínimo? ”, observamos um maior interesse pelo tema, principalmente por se tratar de questões financeiras que estão presentes no contexto real dos estudantes. Ponte (2003) considera que as investigações podem desenvolver nos estudantes diferentes capacidades de ler e interpretar a realidade.

Também foi possível perceber um progresso dos estudantes nos processos do Pensamento Matemático Avançado, devido à familiaridade com este tipo de tarefas, “[...] com uma experiência prolongada na realização de investigações, a maioria dos alunos evidencia progressos significativos na ultrapassagem destas dificuldades [...] (PONTE, 2003, p. 29), pois, por si próprios já foram sugerindo diferentes formas de representar uma situação, como: tabela, gráfico e diferentes soluções para resolver uma questão; além de fazer uma análise mais crítica da situação, com base nos conceitos já estudados. As discussões dos grupos também mostraram que os estudantes retomaram temas abordados nas tarefas anteriores (*Cento e trinta e alguma coisa, lembra que a gente viu já na aula?*), para auxiliar na análise e justificação de suas respostas.

Finalizadas as análises locais das tarefas, propomos um Quadro síntese (Quadro 23), no qual organizamos os processos do Pensamento Matemático Avançado, segundo Dreyfus (2002), mobilizados nas tarefas 1, 2 e 3 bem como, indícios do Pensamento Matemático Avançado revelados pelos grupos A e D, pautadas no Quadro 12 adaptado de Klaiber (2019), em seguida, discorreremos alguns comentários com base no Quadro síntese 23.

Quadro 23 - Síntese dos processos do PMA mobilizados nas três tarefas

Processos do PMA (Dreyfus, 2002)	Indícios do PMA (Klaiber, 2019)	Tarefa	Grupo
Representação Simbólica	Os dois grupos A e D utilizam símbolos ou notações matemáticas para representar as situações, por meio de expressões e símbolos matemáticos.	1	A e D
		2	A e D
		3	A e D
Representação Mental	Associam as situações com operações aritméticas, algébricas ou métodos/procedimentos para resolução.	1	A e D
		2	A e D
		3	A e D
Visualização	Externaliza por meio de esboços, gráficos, criação de quadros ou esquemas para representar ou explorar uma situação.	1	A e D
		2	A e D
		3	A e D
Intuição	Utilizam seus conhecimentos prévios sobre: juros simples e juros compostos, porcentagem, regra de três e razão para resolver as tarefas.	1	A e D
		2	A e D
		3	A e D
Mudança de Representação e Tradução	Apenas o grupo A conseguiu mudar de representação corretamente na tarefa 1, já que o gráfico representado pelo grupo D estava incorreto. Na tarefa 2, os dois grupos representam de diferentes formas a questão e analisam cada uma delas. Já na tarefa 3 apenas o grupo A consegue representar a situação de formas diferentes e transita de uma linguagem natural para uma linguagem algébrica da situação inicial.	1	A
		2	A e D
		3	A
Modelação	Na tarefa 1, nenhum dos grupos apresentam um modelo, apenas utilizam procedimentos para resolução. Na tarefa 2, com a intervenção da professora os dois grupos A e D, criam um modelo matemático a partir da situação para iniciar uma investigação. Já na tarefa 3, apenas o grupo A consegue formular um modelo algébrico para o cálculo do desconto do INSS.	1	nenhum
		2	A e D
		3	A
Generalização	Na tarefa 1, nenhum dos grupos apresentam uma generalização da situação, apenas utilizam conhecimentos prévios para solucionar a questão. Na tarefa 2, os dois grupos generalizam a situação por meio de expressões, induzindo de casos particulares a casos gerais. Já na tarefa 3, o grupo A observa um padrão ao calcular o desconto do INSS por faixa salarial e elabora uma expressão dos casos particulares, generalizando a situação.	1	nenhum
		2	A e D
		3	A
Síntese	Na tarefa 1 e 2 apenas o grupo A conseguiu mobilizar indícios de síntese, pois relacionam gráficos com as funções afim e exponencial corretamente, argumenta os aumentos e diminuição dos itens com base em conceitos já estudados anteriormente. Na tarefa 3 os dois grupos A e D mobilizam indícios de uma síntese, pois relacionam uma tarefa com a outra como esperado, ou seja, combinam partes do conhecimento num todo.	1	A
		2	A
		3	A e D

Fonte: Autoras.

Identificamos no Quadro 23, que os grupos A e D mobilizaram processos de representação simbólica, representação mental, intuição e visualização nas três tarefas. Os processos de mudança de representação, tradução e modelação foram mais frequentes no grupo A. Quanto aos processos de abstração (generalização e síntese), foram mobilizados pelos dois grupos indícios de generalização na tarefa 2 e indícios de uma síntese na tarefa 3 pelos dois grupos (A e D). Observamos que no término das três tarefas o grupo A mobilizou processos de abstração nas três tarefas.

Desta forma, “ter conhecimento de teorias que versam sobre como ocorre o desenvolvimento do pensamento matemático nos indivíduos é essencial para oportunizar momentos de reflexão a fim de propiciar intervenções em sala de aula com o intuito de potencializar a aprendizagem dos estudantes” (BUSSMANN; KLAIBER; SILVA, 2017, p. 2).

De modo geral, o desenvolvimento das Tarefas Investigativas, implementadas no componente Curricular de Educação Financeira, contribuiu para evidenciar processos do Pensamento Matemático Avançado, bem como estimular o interesse da turma pela aula, argumentação e reflexão referente ao tema.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo evidenciar e discutir indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado mobilizados por estudantes do ensino médio ao desenvolver tarefas investigativas. Para isso, delineamos as seguintes questões norteadoras:

1. Que processos de representação se fazem presentes quando alunos da 2ª série do Ensino Médio desenvolvem tarefas investigativas?
2. Que processos de abstração são evidenciados no desenvolvimento de tarefas investigativas por alunos da 2ª série do Ensino Médio?

Tendo em conta nosso objetivo, bem como as questões norteadoras, desenvolvemos três Tarefas Investigativas no primeiro semestre de 2022, no componente curricular de Educação Financeira. Desse modo, a sequência de três Tarefas Investigativas tinha temáticas relacionadas à Educação Financeira com temas contemplados no planejamento escolar e com situações que estivessem no contexto dos estudantes, proporcionando a reflexão sobre as ações – Compra do aparelho de Celular; Preço do gás e energia e Quanto vale o salário mínimo? Além disso, as Tarefas foram elaboradas ou adaptadas de acordo com a perspectiva do ensino por investigação, segundo estudos de Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021), Ponte (2003), Ponte Brocardo e Oliveira (2015) e Sasseron (2015), objetivando desencadear indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado.

Os sujeitos participantes desta pesquisa são estudantes da 2ª série do Ensino Médio, de um colégio público localizado no norte do Paraná. A análise qualitativa de cunho interpretativo levou em consideração os registros escritos, os áudios e os vídeos produzidos no desenvolvimento das tarefas de dois grupos denominados A (com 5 estudantes) e D (formado por 5 estudantes).

Para alcançar nosso objetivo, fizemos algumas reflexões sobre o Pensamento Matemático Avançado, pautadas em Dreyfus (2002). Para análise e discussão dos dados utilizamos o Quadro de Klaiber (2019) – Parâmetros para identificação dos processos do PMA – cuja síntese apresentamos no capítulo 3 (Quadro 12).

Evidenciamos, durante o desenvolvimento das tarefas, o envolvimento dos estudantes, as dificuldades encontradas e a familiarização com tarefas investigativas. Na Tarefa 3 – “Quanto vale o Salário Mínimo” –, os estudantes já foram encaminhando de forma mais autônoma a resolução, proporcionando um diálogo sobre as temáticas e conexões entre as tarefas já desenvolvidas anteriormente, além de por si próprios sugerirem diferentes representações para a situação-problema proposta. O tempo gasto na resolução da tarefa

também diminuiu em comparação com as outras, o que nos mostra que propor tarefas de natureza investigativa pode auxiliar na aprendizagem dos estudantes, bem como no desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado.

Com a descrição das atividades e análises dos dados coletados por meio das transcrições dos áudios, gravações em vídeos e dos registros escritos das resoluções de cada tarefa, foi possível chegar a algumas reflexões e conclusões acerca da problemática desta pesquisa.

Diante disso, evidenciamos a mobilização de todos os processos do Pensamento Matemático Avançado – representação simbólica, representação mental, visualização, intuição, mudança de representação e tradução, modelação, generalização e síntese – no término da sequência das três Tarefas Investigativas, de acordo com o Quadro 23.

Os processos de representação – representação simbólica, representação mental, visualização e intuição – foram evidenciados nas três tarefas, pois os dois grupos (A e D) conseguiram representar por meio de símbolos a situação, fazendo uma representação mental, por meio da intuição e a visualização da situação. “A representação de um conceito matemático, e mais que isso, a utilização de várias representações para um mesmo conceito matemático podem contribuir para a compreensão de um objeto matemático [...]” (BUSSMANN; KLAIBER; SILVA, 2017, p. 2), o que está em consonância com a pesquisa de Bianchini e Machado (2013) em que mostram que a maioria dos professores destacaram os processos de representação como sendo importantes para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado. Assim, acreditamos que trabalhar com tarefas com potencial para mobilizar esses processos, devem se fazer presentes no contexto da sala de aula, para contribuir com o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado. Na Figura 55 apresentamos alguns recortes das tarefas 1, 2 e 3, em que evidenciamos os processos de representação simbólica, representação mental, visualização e intuição.

Figura 55 - Evidência dos Processos de Representação

Tarefa 1

Representação Mental, Intuição

$$M = C(1+i)^x$$

$$M = 669,67(1+0,05)^6$$

Representação simbólica

$$M = 669,67(1,05)^6$$

Representação Mental, Visualização

Meses	Montante	Juros
1º mês	702,45	32,78
2º mês	738,31	35,86
3º mês	775,22	103,55
4º mês	813,98	144,31
5º mês	853,68	185,01
6º mês	897,42	227,75

(Registro - Grupo A)

Tarefa 2

2011 à 2012

89,62 100%

9,35 %

89,62uc = 835,00

uc = $\frac{13500}{89,62}$ uc = 9,31%

Representação Mental, Intuição

2ª fórmula: $\frac{152,2 \cdot 9,32}{89,62}$

3ª fórmula: $\frac{9,35}{89,62} = 9,32$

Representação

Visualização

(Registro - Grupo D)

Tarefa 3

100 x 16%

9 x

100 x 9,10% = 9,10

$x = \frac{1603}{100} = 15,03$

Representação mental, Intuição

Representação simbólica

Visualização

Salário líquido

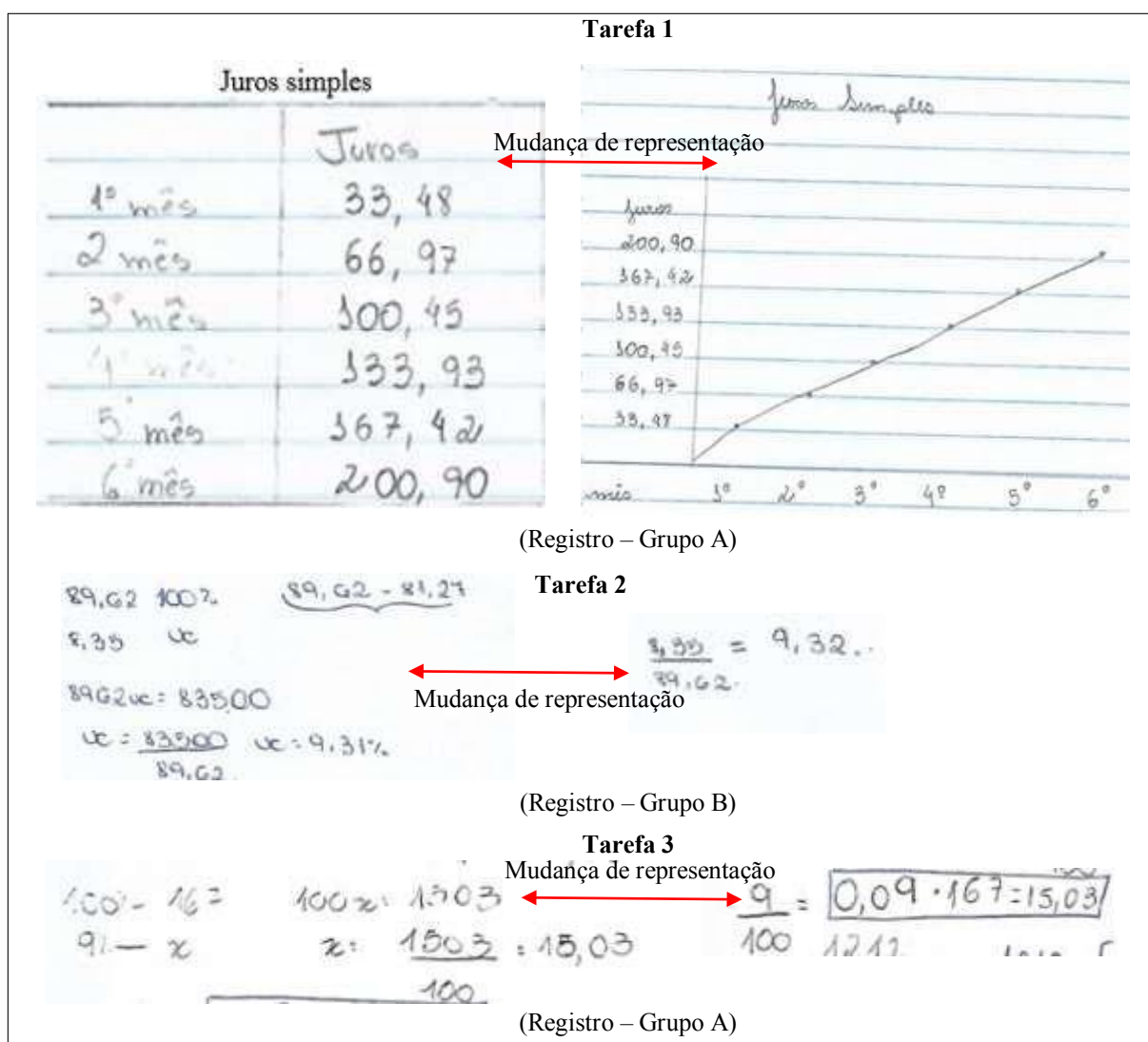
(Registro - Grupo D)

Fonte: Arquivo da professora.

O processo de mudança de representação e tradução foi mobilizado pelos dois grupos (A e D) na tarefa 2. Já nas tarefas 1 e 3, esse processo foi mobilizado apenas pelo grupo A, o que nos mostra a necessidade de propor mais tarefas de natureza investigativa, ou outras que

mobilizem esse processo. Tais considerações se aproximaram dos resultados da pesquisa de Klaiber (2019) que evidenciou que, mesmo que diferentes representações para a exploração de uma situação matemática não tenham se tornado uma prática recorrente dos estudantes durante a trajetória de aprendizagem, eles se conscientizaram da importância de tal prática na resolução de tarefas matemáticas. As mesmas conscientizações emergiram dos estudantes desta pesquisa ao final das três tarefas, pois pretendiam continuar representando a situação proposta na Tarefa 3 “Preço do gás e energia”, com um gráfico, porém, não foi possível devido ao tempo. No entanto, foi se criando um hábito de se representar de diferentes formas a situação em investigação. Neste sentido, Klaiber (2019) defende que tal prática deve “ser estimulada pelos professores desde as séries iniciais, para que os estudantes se habituem a ela” (KLAIBER, 2019, p. 297). A Figura 56 apresenta recortes de registros dos alunos em que evidenciamos processos de mudança de representação.

Figura 56 - Evidência dos Processos de Mudança de representação

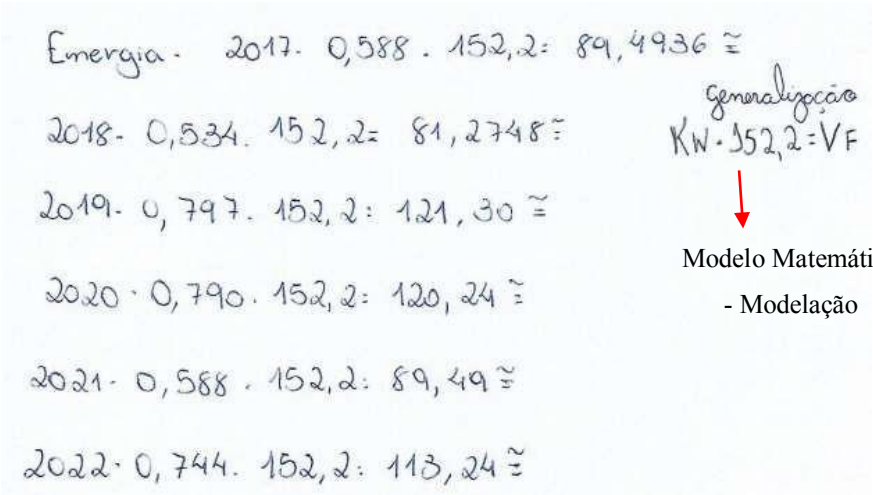


Fonte: Arquivo da professora.

Em relação ao processo de modelação, evidenciamos que nenhum grupo o mobilizou na tarefa 1, sendo mobilizado na tarefa 2 pelos dois grupos e na tarefa 3 apenas pelo grupo A. Para Marins (2014), “a modelação é um processo, o qual tem o objetivo de construir um modelo que incorpore as características de um objeto ou situação física a fim de representá-lo matematicamente” (MARINS, 2014, p. 35). A pesquisa de Marins (2014) revela que de treze estudantes do curso de bacharelado em matemática, três mobilizaram processo de modelação ao final das nove tarefas relacionadas ao conceito de transformações lineares. Fica evidente que os estudantes possuem dificuldades em construir um modelo matemático para a situação em estudo. Neste caso, há uma necessidade de trabalhar com os estudantes o comportamento do objeto em estudo a fim de construir ou adequar um modelo matemático. A Figura 57 mostra recortes das tarefas 2 e 3 com evidências dos processos de modelação.

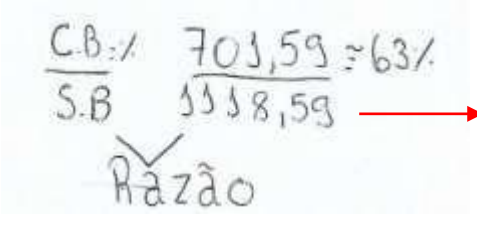
Figura 57 - Evidência dos Processos de Modelação

Tarefa 2



(Registro – Grupo A)

Tarefa 3



(Registro – Grupo A)

Fonte: Arquivo da professora.

Quanto aos processos envolvendo a abstração (síntese e generalização), nenhum dos grupos mobilizaram indícios de generalização na tarefa 1, enquanto na tarefa 2 os grupos (A e D) mobilizaram indícios de generalização, na tarefa 3 foi mobilizado apenas pelo grupo A. Para Ervynck (1991), a criatividade matemática deve resultar de uma interação de elementos

como a compreensão, intuição, reorientação em direção ao que é importante, generalização e capacidade de se destacar nos traços principais. Já o processo de síntese foi evidenciado pelos grupos A e D na tarefa 3, enquanto na tarefa 1 e 2 foi mobilizado apenas pelo grupo A. Consideramos que este processo precisa ser estimulado pelo professor, propondo diálogos e tarefas que propiciem a síntese. Para Dreyfus (2002), a síntese por muitas vezes é feita pelo professor que, no intuito de ajudar os estudantes, acaba fazendo um resumo, faz as conexões e relações do conceito e, por vez, isso inclui algumas síntese. Bianchini e Machado (2013) revelam que das seis duplas de professores, que investigaram em sua pesquisa, apenas cinco se referiram ao processo de abstração, sendo que três citaram sobre a síntese e dois citaram sobre a generalização, desta forma, concluem que é necessário dar mais atenção ao processo de abstrair. A Figura 58 traz alguns recortes das três tarefas em que se evidencia os processos de abstração.

Figura 58 - Evidência dos Processos de Abstração

Tarefa 1

A função de juros composto é exponencial porque segue as características e obviamente a fórmula é basicamente uma potência

A função de juros simples é linear e faz parte da equação de 1º grau

→ Síntese

(Registro – Grupo A)

Tarefa 2

152,20, 8888
89,62.

→ Generalização

(Registro – Grupo D)

Tarefa 3

C.B.:/ 703,59 ≈ 63%
S.B 5538,59

→ Generalização

Razão

b) De acordo com o nosso debate o salário mínimo atual não atende as necessidades vitais básicas de um trabalhador e de sua família. Foi usado de outra atividade, outras despesas como exemplo o gás e agente reaproveitou os dados nessa atividade.

→ Síntese

(Registro – Grupo A)

Fonte: Arquivo da professora.

Nesta perspectiva, compreendemos a importância de professores conhecerem os processos do Pensamento Matemático Avançado, para assim, contribuir com seus desenvolvimentos.

Percebemos, com nossas análises, as dificuldades encontradas pelos estudantes ao tentar elaborar diferentes representações para a situação proposta, porém, no decorrer do desenvolvimento das três Tarefas Investigativas, os estudantes foram se familiarizando, desenvolvendo, assim, diferentes representações, sendo necessário menos intervenções da professora.

Destacamos também que alguns indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado não foram mobilizados pelos estudantes. De modo geral, consideramos que essa não mobilização pode ter ocorrido por falta de conhecimentos prévios ou dificuldades com operações matemáticas, tais como: construção de gráficos (escala, construção no plano cartesiano), expressão algébrica, porcentagem e fórmula dos juros compostos. Outro fator que interferiu na sequência das tarefas ou resolução de forma efetiva, foi o tempo de duração das aulas, pois parte delas era comprometida com recados da equipe diretiva. Porém, mesmo com esses fatores, os estudantes se empenharam na resolução das tarefas, mostrando progresso nos registros escritos e nas comunicações entre os grupos.

Fica evidente que, além de estarem mais familiarizados com as Tarefas Investigativas, os estudantes já conhecem e identificam parte dos processos do Pensamento Matemático Avançado, quando reconhecem processos como generalização e citam diferentes formas de representar uma situação (*Os cálculos já terminaram, mas a visualização da situação acho interessante pela tabela e o gráfico. Eu acho interessante fazermos um gráfico. Vamos representar de outra forma?*). Para Marins (2014, p. 163) é preciso deixar “claro aos estudantes quais são esses processos que estão acontecendo em sua aprendizagem e podem potencializar sua aprendizagem”. Em consonância com Dreyfus (2002), os Processos do Pensamento Matemático Avançado não acontecem por si mesmos e, se acontecem, não são necessariamente conscientes por parte dos estudantes. Com isso, complementamos que o papel do professor é necessário em todos os processos.

Portanto, os resultados desta pesquisa apontaram que Tarefas Investigativas contribuem para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, mais especificamente, processos de representação e abstração com estudantes da 2ª série do Ensino Médio no componente curricular de Educação Financeira.

Em análise às pesquisas citadas no Quadro 3, que subsidiaram a nossa investigação, podemos evidenciar que as desenvolvidas por Ferreira (2021), Kirnev (2019), Lopes (2019)

Schaun (2019), Klaiber (2019), Fortenele (2018), Messias (2018) e Jorge (2017) tratam do Pensamento Matemático Avançado no ensino superior e a pesquisa de Júnior (2019) aborda o Pensamento Matemático Avançado no ensino fundamental. O tocante de nossa investigação se concentra no contexto do Ensino Médio. Além disso, nosso foco se aloca em tarefas investigativas no âmbito da Educação Financeira, diferente das pesquisas mencionadas que versam sobre conteúdos matemáticos.

Esta pesquisa apresentou algumas limitações referentes à duração de cada aula, pois, uma hora aula por semana já não é suficiente para trabalhar todos os conceitos de Educação Financeira, principalmente quando os alunos apresentam dificuldades também nos conceitos matemáticos e parte da aula ainda era comprometida com recados e oração (rotina da escola). Além disso, no primeiro semestre de 2022, alguns feriados ocorreram na sexta-feira, o que comprometeu na sequência de resolução das tarefas. Outra dificuldade foi em relação ao barulho da turma, pois a turma é numerosa, com 34 estudantes, desta forma alguns áudios ficaram incompreensíveis para fazer as transcrições. O que nos chamou a atenção também foi a dificuldade de alguns alunos em conceitos matemáticos ou de Educação Financeira, que foram trabalhados durante à pandemia por Covid-19, pois, o que para alguns foi intuição, para outros foi uma descoberta, já que não participaram ativamente das aulas remotas.

Fruto desta pesquisa, elaboramos um produto educacional intitulado “Tarefas Investigativas para a Educação Financeira: alguns encaminhamentos”, composto pelas três Tarefas Investigativas analisadas e discutidas nesta pesquisa. Convidamos o leitor a conhecer este material que apresenta alguns encaminhamentos para auxiliar professores em sua prática, na implementação de Tarefas Investigativas.

Além desta pesquisa, deixamos exposto nosso anseio em futuras investigações que contemplem o Pensamento Matemático Avançado na educação básica, em especial com tarefas de natureza investigativa. Acreditamos, que ainda há muito a investigar, principalmente as dificuldades dos estudantes em relação aos conceitos matemáticos e o papel do professor no desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, já que o papel do professor nesta investigação não foi nossa principal abordagem. Uma outra inquietação diz respeito à dificuldade dos estudantes em sintetizar uma situação ou conceito, quais os desafios enfrentados pelos estudantes ao realizar uma síntese. A transição da matemática elementar para a matemática avançada, também é um tema de interesse para futuras pesquisas, pois, compreendemos a importância de favorecer o Pensamento Matemático Avançado em níveis da educação básica com o intuito de minimizar as dificuldades encontradas por estudantes de nível superior.

Nossos objetivos foram evidenciados pela análise dos dados e pelas reflexões realizadas ao longo desta pesquisa, mas temos a consciência de que outras investigações podem ser desenvolvidas para ampliar e sistematizar as abordagens aqui utilizadas, considerando inclusive dados de toda a turma seja trabalhando em grupo ou de forma individual.

REFERÊNCIAS

- ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. O método nas Ciências Sociais. In: ALVES, A. J. M. **O método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa**. Parte I. 2a . ed. São Paulo: Editora Pioneira, p. 107–188, 2001.
- ALVES, T. C. **Por que enferrujou?:** uma proposta investigativa para o ensino de reações de oxidação e redução. 2018.
- ARCI JUNIOR, João. **O princípio da casa dos pombos: uma aplicação da modelagem matemática no ensino**. 2021. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2021. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/15470>. Acesso em: 15/04/2022.
- BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Caderno de Educação Financeira - Gestão de Finanças Pessoais**. Brasília, 2013. Disponível em: < <http://www.bcb.gov.br> >. Acesso em: 25/02/22.
- BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Relatório de Inclusão Financeira**. Brasília, n. 2, 2011. Disponível em: < <http://www.bcb.gov.br/Nor/reincfin/RIF2011.pdf> >. Acesso em: 06/05/22.
- BAPTISTA, M. L. M. **Concepção e implementação de actividades de investigação:** um estudo com professores de física e química do ensino básico. Tese de Doutorado Universidade de Lisboa, 2010.
- BERTOLAZZI, K. S. **Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de licenciatura em matemática sobre sistemas de equações lineares**. 2012. Tese de Doutorado. Dissertação de mestrado–Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.
- BESSEMER, S. P.; TREFFINGER, D. J. Analysis of creative products: review and synthesis. **The Journal of Creative Behavior**, v. 15, n. 3, p. 158-178. 1981.
- BIANCHINI, B., MACHADO, S. Reflexões de professores de matemática sobre os processos do pensamento matemático avançado. In: Congresso Iberoamericano de Educación Matemática, VII. **Anais...** Montevideo, Uruguai, 2013.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.
- BRASIL. **Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF)**. Vida e dinheiro. 2020. Disponível em: <http://www.vidaedinheiro.gov.br/>. Acesso em: 08/04/2022.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC - 2ª versão**. Brasília, DF, 2018.
- BRASIL. **Plano Diretor (ENEF)**, 2017. Disponível em: <http://www.vidaedinheiro.gov.br/>. Acesso em: 09/05/22.
- BUSSMANN, C. J. C.; KLAIBER, M. A.; SILVA, D. P. Processos mentais de Dreyfus e o Ensino Exploratório: discussão e possível intervenção em sala de aula. In: **ENCONTRO**

PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14, 2017. Cascavel. Anais. Cascavel: Unioeste, 2017. p. 1-13.

CARVALHO, D. N. **Objeto de aprendizagem digital como proposta de ensino por Investigação em Biologia**. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG 2017.

COLI, A. D.; OMODEI, L. B. C. **Investigação matemática como recurso metodológico para o ensino de números inteiros - uma experiência com o 7º ano**. Dentro: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. OS Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2016. Curitiba: SEED/PR, 2016. v. 1. (Cadernos PDE). Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_unespar-apucarana_andreiadellicolli.pdf. Acesso em: 15/07/2022.

DENZIN N. K.; LINCOLN Y. S. **Handbook of qualitative research**. Thousand Oaks: Sage, 1994.

DOMINGOS, A. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados: a Matemática no ensino superior**. 2003. Tese. (Doutorado em Ciências de Educação) – Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova Lisboa, Lisboa, 2003.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. *In*: TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 2002. p. 25-41.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. *In* D. Tall (Ed.), **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, p. 25-41, 1991.

DREYFUS, T.; EISENBERG, T. On Different Facets of Mathematical Thinking. *In*: STERNBERG, R. J.; BEN-ZEEV; T. (Eds.). **The nature of mathematical thinking**. USA: Lawrence Erlbaum Associates, 1996. p. 253-284.

ELIAS, H. R.; BARBOSA, L. N. S. C.; SAVIOLI, A. M. D. Matemática elementar e avançada em livros didáticos: o conceito dos números naturais. *In*: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife, 2011.

ERVYNCK, G. Mathematical creativity. *In* D. TALL, D. (Ed.). **Advanced mathematical thinking** (pp. 42-53). Dordrecht: Kluwer, 1991.

FERREIRA, R. D. **Compreensão do conceito de limite por alunos de cursos de Ciências Exatas**. 2021. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021.

FERRUZZI, E. C.; BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P. Investigação Matemática em foco: Evidenciando possibilidade para sala de aula. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 11, 2021.

FLÔRES, M. V; FONSECA, J. A.; BISOGNIN, E. Processos do Pensamento matemático

avanzado revelados nas resoluções de tarefas envolvendo números racionais. **Ensino da Matemática em Debate**, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 217–238, 2020.

FONSECA, H. Aprender a ensinar Investigando. In GTI (Ed.), **Reflectir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa: APM, p. 177-188, 2002.

FONSECA, T. M. M. **Ensinar e Aprender: Pensando a prática pedagógica**. Ponta Grossa: SEED/PR, 2008.

FONTENELE, F. C. F.. **Contribuições da Sequência Fedathi para o desenvolvimento Do Pensamento Matemático Avançado: Uma Análise da Mediação docente em aulas de Álgebra Linear**. 2018. 192 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza 2018.

GERETI, L. C. V. **Processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados em resoluções de questões do ENADE**. 2014. 139f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

GERETI, L. C. V.; SAVIOLI, A. M. P. D. Processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados em resoluções de questões do ENADE. **Bolema**. Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 206-222, 2015.

GRANDY, R. E.; DUSCHL, R. A. Reconsidering the character and role of inquiry in schools: Analysis of a conference. **Science and Education**, v. 16, p. 141-166, 2007.

HENRIQUES, A. **O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação**. 2010. 462 f. Tese (Doutoramento em Educação, Didática da Matemática Instituto de Educação, Universidade de Lisboa), Lisboa, 2010.

JORGE, J. L. **Teoria de Conjuntos: Processos Manifestados do Pensamento Matemático Avançado**. 2017. 135 f. Dissertação (Mestrado em Ensino De Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina – UEL/PR, Londrina 2017.

JÚNIOR, J. A. **O princípio da casa dos pombos: uma aplicação da modelagem matemática no ensino**. 2021. 110 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) - Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, São Carlos 2021.

KIRNEV, D. C. B. **Um Estudo Da Mobilização De Processos Mentais Entre O Pensamento Matemático Elementar E O Pensamento Matemático Avançado**. Tese de doutorado. 2019. 164 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina – UEL/PR, Londrina. 2019.

KLAIBER, M. A. **Introdução à Álgebra Linear em um curso de licenciatura em química: o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado por meio de uma Experiência de Ensino**. 2019. 329 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina – UEL/PR, Londrina. 2019.

KLAIBER, M. A.; SAVIOLI, A. M. P. D. **Potencialidades de uma trajetória de aprendizagem para a compreensão de conteúdos de matrizes e sistemas de equações**

lineares em um curso de licenciatura em química. Revista Paranaense de educação matemática, [S. l.], v. 9, n. 19, p. 11–27, 2020. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6233>. Acesso em: 04/04/2022.

KLAIBER, M. A.; SOUZA, M. L.; MARTELOZO, D. P. DA S.; SAVIOLI, A. M. P. DAS D. Desenvolvendo o processo de abstração por meio de uma experiência de ensino. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 2, p. 48-65, 3 jun. 2019.

LOPES, L. M. L. **Formação e reelaboração de imagens e definições de conceito relacionadas ao ensino de vetores em geometria analítica.** Dissertação de Mestrado. 2019. 100 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Juiz de Fora/MG. 2019.

MARINS, A. S. **Pensamento Matemático Avançado em tarefas envolvendo Transformações Lineares.** 2014. 170 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

MARINS, A. S., SAVIOLI, A. M. P. D. **Pensamento matemático avançado manifestado em tarefas envolvendo transformações lineares.** Revista Ciência e Educação. Bauru, v. 22, n. 2, p. 489-504, 2016.

MARIOTTI, A.; PESCI, A. Visualization in teaching-learning situations. *In Proceedings of 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 22). Lisboa, 1994.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. D. Desenvolvendo o raciocínio matemático: Generalização e justificação no estudo das inequações. **Boletim do GEPEN**, v. 62, p. 17-31, 2013.

MENEZES, D. B.; BORGES NETO, H. Pensamento Matemático Avançado: Origem e Características. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 4, n. 10, p. 26–35, 2018. DOI: 10.30938/bocehm.v4i10.45. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/45>. Acesso em: 04/02/2022.

MESSIAS, M. A. V. F. **Teorias Cognitivas do Pensamento Matemático Avançado e o processo de Construção do Conhecimento: Um Estudo envolvendo os Conceitos de Limite e Continuidade.** 2018. 185 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.

MITCHELMORE, M. C.. **O papel da abstração e da generalização no desenvolvimento do conhecimento matemático.** 2002.

MOREIRA, M. A. **O que é afinal aprendizagem significativa?** Revista cultural La Laguna Espanha, 2012. Disponível em: <http://moreira.if.ufrgs.br/oqueeafinal.pdf>. Acesso em: 22/05/22.

MOTA, J. B.; GONÇALVES, J. A.; FERRUZZI, E. C.; BORSSOI, A. H. A Utilização de Recursos Tecnológicos na Implementação da Investigação Matemática em Aulas Remotas. **EPTEM - Encontro Paranaense de Tecnologia em Educação Matemática.** 2021.

OLIVEIRA, H. M.; SEGURADO, M. I.; PONTE, J. P. **Explorar, Investigar e Discutir na Aula de Matemática**. Lisboa, 1996. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto9.PDF>. Acesso em: 22/05/22.

PAULUSSI, B.; GRASSMANN, J. **Cenários Para Investigação: Humanidades e Matemática em Contexto**. 1ª edição, São Paulo, Ática, 2020.

PINTO, D. M. R.; PIRES, M. A. L. M. O ensino da matemática e sua função na formação do indivíduo e de sua cidadania na educação. **REMATEC**, v. 14, n. 32, p. 118-130, 27 dez. 2019.

PONTE, J. P. Didática da matemática e o trabalho do professor. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 3, n. 3, 11 nov. 2020.

PONTE, J. P. Gestão Curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, p.11-34, 2005.

PONTE, J. P. Investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, 2, p. 93-169, 2003.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDAS, J. M.; FERREIRA, C. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. **Quadrante**, [S. l.], v. 7, n. 2, p. 41–70, 1999. DOI: 10.48489/quadrante.22709. Disponível em: <https://quadrante.apm.pt/article/view/22709>. Acesso em: 10/03/2022.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; CUNHA, H. M.; SEGURADO, M.I. **Histórias de Investigações Matemáticas**. Lisboa: IIE, 1998. Disponível em: www.researchgate.net/publication/261178171_Historias_de_investigacoes_matematica Acesso em: 04/03/2022.

SASSERON, L. H. Alfabetização científica, ensino por investigação e argumentação: relações entre ciências da natureza e escola. **Revista Ensaio**, Belo Horizonte, v. 17, n. especial, p. 49-67, nov. 2015.

SASSERON, L. H.; DUSCH, R. A. Ensino de ciências e as Práticas epistêmicas: o papel do professor e o engajamento dos estudantes. **Investigações em Ensino de Ciências**, 21, p. 52-67, 2016.

SCARPA, D. L.; CAMPOS, N. F. Potencialidades do ensino de Biologia por Investigação. **Estudos Avançados** [online]. v. 32, n. 94. p. 25-41, 2018.

SCHAUN, T. T. **As Representações Tridimensionais das Superfícies Quádricas na Disciplina de Cálculo com Realidade Aumentada**. 2019. 90 f. Dissertação (Mestrado em

Educação Matemática). Universidade Federal De Pelotas, Pelotas, 2019.

SILVA, A. C. T.; MORTIMER, E. F. As estratégias enunciativas de uma professora de química e o engajamento disciplinar produtivo dos alunos em atividades investigativas. **Revista Brasileira De Pesquisa Em Educação Em Ciências**, V. 11, n. 2, p. 117–138, 2012.

SILVA, A. C.; SEKI, J. T. P.; SILVA, K. A. P. Antecipação e Encaminhamento de uma Atividade de Modelagem Matemática no Contexto de Aulas de Educação Financeira. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13. p. 73-83, 2020.

SILVA, M. B; GEROLIN, E. C., TRIVELATO, S. L. F. A Importância da Autonomia dos Estudantes para a Ocorrência de Práticas Epistêmicas no Ensino por Investigação. **Revista Brasileira De Pesquisa Em Educação Em Ciências**, v. 18, n. 3, p. 905–933, 2018.

SILVA, D. M. V.; CANEDO JUNIOR, N. R.; Vaz, R. F. N. Uma experiência vivida com estudantes do ensino médio: reflexões sobre Educação Financeira à luz da Educação Matemática Crítica. **BoEM**, v. 4, n. 7, p. 82-100, 2016.

SILVA, K. A. P; VERTUAN, R. E.; SILVA, J. M. G. Ensino por investigação nas aulas de Matemática do curso de licenciatura em Química. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Belém, v. 14, n. 31, p. 54-72, nov. 2018.

SKOVSMOSE, O. Cenários de investigação. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro (SP), n.14, p. 66-91, 2000.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. *In*: TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, p. 3-21, 1991.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. *In*: TALL, D. (Org.), **Advanced mathematical thinking** (pp.61-75). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 2002.

TALL, D. **Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Plenary Lecture, Conference of the International Group for the Psychology of Learning Mathematics**. Recife Brazil, v. 1, p. 161-175, 1995.

VALE, I. Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Matemática**, v. 8, n. 2, p. 64-81, 2013.

VIEIRA, W.; SOUZA, V. H. G.; IMAFUKU, R. S. A interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais e o desenvolvimento de processos do pensamento matemático avançado na aprendizagem matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 10, n. 3, p. 228-236, 2017.

WELLINGTON, J. **Teaching and learning secondary science: Contemporary issues and practical approaches**. London and New York: Routledge, 2000.

ZAZKIS, R.; CHERNOFF, E. What makes a counterexample exemplary?. **Educational Studies in Mathematics**, v. 68, p. 196-208, 2008.

ZOMPERO, A. F.; LABURÚ, C. E. Atividades investigativas no ensino de ciências: aspectos

históricos e diferentes abordagens. **Ensaio: pesquisa em educação em ciências**, Belo Horizonte, v. 13, n. 3, p. 67-80, 2011.

ZUIN, E. & FERREIRA, A. **Introdução do conceito de derivada a partir da Investigação Matemática. Boletim Online de Educação Matemática**, v. 6. p. 82-102, 2018.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CESSÃO DE USO DE IMAGEM

TERMO DE CESSÃO DE USO DE IMAGEM

Nos termos do artigo 49 da Lei nº 9.610/1998 e da Lei nº 13.709/2018, por este instrumento o(a) Sr(a), - _____ RG nº _____, CPF _____, residente e domiciliado no endereço _____, bairro, cidade _____, na qualidade de responsável titular do(a) menor _____, doravante denominado CEDENTE, cede gratuitamente, pelo prazo indeterminado e de modo absoluto, para utilização da Secretaria de Estado da Educação e do Esporte do Paraná, nesta ocasião denominada CESSIONÁRIO(A), o direito de uso de imagem, áudio, vídeo e/ou produção textual para fins pedagógicos.

O CEDENTE, fica ciente de que o material cedido pode ser publicado nas mídias impressas, WEB (Facebok, Whatsapp, Instagan, TIK TOK) e televisivas. Esta cessão afasta o CEDENTE e seus herdeiros de receberem qualquer espécie de indenização ou compensação em virtude do uso e administração do material, inclusive requerer o contido no art. 247 da Lei nº 8.069 de 13 de julho de 1990 - Estatuto da Criança e do Adolescente.

O(A) CESSIONÁRIO(A), por sua vez, compromete-se a utilizar o material descrito para produção didático-pedagógica, formação e em casos de sem fins lucrativos.

Local: _____, _____ de _____ de 20__.

Assinatura do(a) Responsável

Legal RG: _____

CPF: _____

APÊNDICE B - TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA REALIZAÇÃO DA PESQUISA**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA REALIZAÇÃO DA PESQUISA**

Senhor diretor,

Eu, Juliana Aparecida Gonçalves, RG N° 12.623185-7, estudante do Programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática, UTFPR, Câmpus Londrina/Cornélio Procópio e professor de Educação Financeira no Colégio Estadual _____, venho por meio deste, solicitar autorização para a realização da pesquisa sobre O pensamento Matemático Avançado em Tarefas Investigativas no referido colégio. A pesquisa será conduzida na 2ª série do Ensino Médio e terá a participação dos estudantes no desenvolvimento de Tarefas Investigativas. A coleta de que subsidiará a pesquisa será realizada por meio de gravações de áudio e visual e registros escritos dos estudantes, sendo assegurado o sigilo da identidade dos participantes. A pesquisa está sendo desenvolvida sob orientação da professora Dra. Karina Alessandra Pessoa da Silva.

Em caso de dúvida a equipe pedagógica do colégio poderá entrar em contato com a orientadora pelo e-mail karinasilva@utfpr.edu.br.

Cornélio Procópio, 11 de fevereiro de 2022.

Nome completo e assinatura do diretor

APÊNDICE C – TABELA CONTRIBUIÇÃO AO INSS**Contribuição ao INSS: tabela para empregado, empregado doméstico e trabalhador avulso a partir de 1º de março de 2020***

Salário de contribuição (R\$)	Alíquota
Até R\$ 1045,00	7,5%
De R\$ 1045,01 a R\$ 2 089,60	9%
De R\$ 2 089,61 a R\$ 3 134,40	12%
De R\$ 3 134,41 a R\$ 6 101,06	14%

Fonte: BRASIL. Ministério da Economia. Instituto Nacional do Seguro Social (INSS). *Tabela de contribuição mensal*. Disponível em: <https://www.inss.gov.br/servicos-do-inss/calculo-da-guia-da-previdencia-social-gps/tabela-de-contribuicao-mensal>. Acesso em: 9 jul. 2020.

* As alíquotas apresentadas na tabela não se aplicam a servidores públicos.

ANEXOS

ANEXO A – PLANO DE NIVELAMENTO

Disciplina: EDUCAÇÃO FINANCEIRA		Série: 2º ano B
Professora: JULIANA APARECIDA GONÇALVES		
Conteúdos Essenciais (Currículo Priorizado)	Aulas	
	1	Noções de porcentagem
	2	Noções sobre juros
Objetivos:	<ul style="list-style-type: none"> • Resolver situações problemas envolvendo cálculo de descontos e aumentos. • Compreender o conceito de juros simples e juros compostos. 	
Encaminhamentos Metodológicos:	<p>Levando-se em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes, os Objetivos de Aprendizagem e as relações com os conteúdos, os encaminhamentos metodológicos serão organizados da seguinte maneira:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Apresentação e objetivos da aula: apresentar o tema aos estudantes e o objetivo da aula. 2. Retomada: fazer uma revisão sobre o tema relacionando com situações do cotidiano para que possa fazer significado no seu dia a dia. 3- Leitura coletiva e individual. 4- aula expositiva – dialogada 5- Implementar Tarefas Investigativas 	
Avaliação:	<p>Diagnóstica inicial e final: Observação da participação ATIVA do aluno nas atividades propostas. * Participação durante a aula e empenho no desenvolvimento da Tarefa proposta prevalecendo a avaliação QUALITATIVA.</p>	
Referências:	<p>BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2017. PARANÁ. Superintendência da Educação. Departamento de Educação Básica. Referencial Curricular do Paraná: princípios, direitos e orientações. Curitiba, 2018. PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Currículo Priorizado. Curitiba: SEED/PR, 2021 PARANÁ – SEED, Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática, Curitiba, 2008</p>	

ANEXO B – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al.* Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. *ACTIO*, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657>. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Pensamento Matemático Avançado em tarefas investigativas desenvolvidas no Ensino Médio
Título do Produto/Processo Educacional	Tarefas Investigativas para a Educação Financeira: alguns encaminhamentos
Autores do Produto/Processo Educacional	Discente: Juliana Aparecida Gonçalves
	Orientador/Orientadora: Karina Alessandra Pessoa da Silva
	Outros (se houver):
Data da Defesa	30/09/2022

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)

Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.

Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação.

*Apenas um item pode ser marcado.

Linhas de Pesquisa do PPGMAT:

L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade);

L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no

() Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

(X) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

<p><i>Ensino de Matemática</i> (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).</p>	
<p>Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p> <p>A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. <p>Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.</p>	<p><input type="checkbox"/> PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa.</p> <p><input type="checkbox"/> PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).</p> <p><input type="checkbox"/> PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).</p>
<p>Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.</u></p>	<p><input type="checkbox"/> Local</p> <p><input type="checkbox"/> Regional</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Nacional</p> <p><input type="checkbox"/> Internacional</p> <p>Justificativa (<i>obrigatória</i>): Levando em consideração o contexto nacional em que a temática do PE foi empreendido, entendemos que a abrangência é nacional.</p>
<p>Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho).</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p>	<p><input type="checkbox"/> PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto).</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.</p>

<p>Área impactada</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p>	<p><input type="checkbox"/> Econômica;</p> <p><input type="checkbox"/> Saúde;</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Ensino;</p> <p><input type="checkbox"/> Cultural;</p> <p><input type="checkbox"/> Ambiental;</p> <p><input type="checkbox"/> Científica;</p> <p><input type="checkbox"/> Aprendizagem.</p>								
<p>Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE.</p> <p><u>*Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.</u></p>	<p><input checked="" type="checkbox"/> O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação.</p> <p><input type="checkbox"/> Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.</p>								
<p>Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.</p>	<p><input type="checkbox"/> PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito).</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos).</p> <p><input type="checkbox"/> PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).</p>								
<p>Membros da banca examinadora de defesa</p>									
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 60%;">Nome</th> <th style="width: 40%;">Instituição</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Karina Alessandra Pessoa da Silva</td> <td>UTFPR</td> </tr> <tr> <td>Leticia Barcaro Celeste Omodei</td> <td>UNESPAR</td> </tr> <tr> <td>Michelle Andrade Klaidier</td> <td>UTFPR</td> </tr> </tbody> </table>		Nome	Instituição	Karina Alessandra Pessoa da Silva	UTFPR	Leticia Barcaro Celeste Omodei	UNESPAR	Michelle Andrade Klaidier	UTFPR
Nome	Instituição								
Karina Alessandra Pessoa da Silva	UTFPR								
Leticia Barcaro Celeste Omodei	UNESPAR								
Michelle Andrade Klaidier	UTFPR								