UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CÂMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO
DIRETORIA DE PÓS GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

UMA PROPOSTA PARA O CÁLCULO DE ÁREA POR MEIO DE DETERMINANTES USANDO O GEOGEBRA

PATRICIA SPATI

CORNÉLIO PROCÓPIO
2021

PATRICIA SPATI

UMA PROPOSTA PARA O CÁLCULO DE ÁREA POR MEIO DE DETERMINANTES USANDO O GEOGEBRA

A proposal for area calculation through determinants using geogebra

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Orientador: Profa. Dra. Gláucia Maria Bressan

CORNÉLIO PROCÓPIO

2021

PATRICIA SPATI

UMA PROPOSTA PARA O CÁLCULO DE ÁREA POR MEIO DE DETERMINANTES USANDO O GEOGEBRA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Profissional Em Matemática Para A Escola Básica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 03 de Fevereiro de 2021

Prof.a Glaucia Maria Bressan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Andre Luis Machado Martinez, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof.a Lilian Milena Ramos Carvalho, Doutorado - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (Ufms)

Dedico este trabalho à minha mãe Célia Fátima de Souza Spati, aos meus irmãos Felipe Spati e Guilherme Spati e ao meu esposo Márcio José Batista, pela paciência e compreensão diante da minha ausência por conta dos estudos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por ter me proporcionado a oportunidade de cursar e concluir este curso, além da saúde e força para superar as dificuldades e realização desta pesquisa.

Agradeço a minha orientadora Profa. Dra. Glaucia Maria Bressan, pelo apoio, orientação, ensinamentos, dedicação e firmeza nos momentos necessários.

Agradeço à todos os professores do curso pelos ensinamentos e dedicação que contribuiu para o meu enriquecimento intelectual.

Aos colegas de curso, por compartilhar conhecimentos e experiências em minha formação, além da amizade.

Agradeço também à minha família, de modo especial, à minha mãe Célia Fátima de Souza Spati, exemplo de luta e determinação, aos meus irmãos Felipe Spati e Guilherme Spati que sempre acreditaram no meu potencial e ao meu esposo Márcio José Batista, por todo apoio e incentivo em minha vida pessoal e profissional.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro que muito ajudou neste programa de mestrado.

Nenhuma mente que se abre para uma nova ideia voltará a ter o tamanho original.

Albert Einstein (1879-1955).

RESUMO

SPATI, Patricia. **UMA PROPOSTA PARA O CÁLCULO DE ÁREA POR MEIO DE DETERMINANTES USANDO O GEOGEBRA**. . 111 f. Trabalho de Conclusão de Curso – PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta para o cálculo de áreas de polígonos, quando são conhecidas as coordenadas de seus vértices, por meio de Determinantes utilizando o Software GeoGebra. Desta forma, pretende-se contribuir para a aprendizagem de conceitos abordados em sala de aula para alunos da 3ª série do Ensino Médio utilizando tecnologia na sala de aula. Para tanto, são abordados conceitos de Matrizes e Determinantes, algumas de suas aplicações - em especial o estudo de área de polígonos - conceitos de Geometria Analítica e algumas de suas propriedades, sendo esta fundamental para demonstrar a área de polígonos usando determinantes. Além disso, é abordada também a utilização do Software GeoGebra, a fim de mostrar a importância de utilizar as tecnologias como ferramenta de ensino e recurso didático, almejando atingir melhores resultados no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Palavras-chave: Matrizes. Determinantes. Geometria Analítica. Áreas de Polígonos. GeoGebra.

ABSTRACT

SPATI, Patricia. **A PROPOSAL FOR AREA CALCULATION THROUGH DETERMINANTS USING GEOGEBRA**. 111 f. Trabalho de Conclusão de Curso PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

The goal of this work is to present a proposal for the calculation of areas of polygons, when the coordinates of their vertices are known, through Determinants using the GeoGebra Software. In this way, it is intended to contribute to the learning of concepts addressed in the classroom for students of the 3rd grade of High School using technology in the classroom. For that, concepts of Matrices and Determinants are addressed, some of their applications - in particular the study of the area of polygons - concepts of Analytical Geometry and some of its properties, which is fundamental to demonstrate the area of polygons using determinants. In addition, the use of the GeoGebra Software is also addressed, in order to show the importance of using technologies as a teaching tool and didactic resource, aiming to achieve better results in the teaching and learning process of Mathematics.

Keywords: Matrices. Determinants. Analytical Geometry. Polygon areas. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A disciplina de matemática sempre foi tida nas escolas como algo difícil causando em alguns alunos uma certa rejeição, para muitos já se tornou uma aversão, porque talvez o que é ensinado dificilmente é direcionado à prática em seu cotidiano.

Os alunos precisam deixar de ser apenas um ouvinte passivo das explicações para se tornar um agente ativo no seu processo de aprendizagem, vivenciando a construção do seu saber. Conhecer diferentes possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor possa possibilitar aos alunos a construção de seu próprio conhecimento. Ao mesmo tempo, em que dizemos que esta disciplina é muito importante em nossas vidas, devido a sua aplicabilidade, não mostramos muitas vezes suas aplicações.

Neste trabalho, são abordadas algumas atividades que julgamos ser possível inserir na educação básica para o cálculo de áreas por meio de determinantes utilizando o Software GeoGebra, com o intuito de fornecer ao aluno uma visão da utilidade da matemática no mundo real, contribuindo para que o ensino possa se tornar mais interessante e prazeroso, visto que este conteúdo, muitas vezes, é trabalhado apenas de forma teórica, tentando assim, desmistificar o conteúdo de matrizes e determinantes mostrando o quão útil as mesmas são em nosso dia a dia.

Sabemos que há muito tempo a matemática vem deixando de ser considerada simplesmente uma ciência de formalização de estruturas, de teorização, de sistematização e do raciocínio lógico formal. Pois, não há dúvidas de que o processo ensino-aprendizagem é mais eficaz quando o conteúdo tem uma significação maior para o aluno. Sem desconsiderar esses atributos, que possuem sua importância, é fundamental que o conhecimento matemático parta, sempre que possível, de situações concretas vivenciadas pelo aluno, em suas experiências, em suas expectativas e em seus questionamentos diários. Diante desta perspectiva o PCNEM Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (1999) e o PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), retomam e reafirmam o discurso da LDB - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que o ensino da Matemática deve contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

> (...) o ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades: I a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos; II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores; III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico. (...) (LDB 9394/96, em seu Título II Art. 35).

Recentemente, testes de rendimentos aplicados aos alunos pelos Governos, tanto Estadual quanto Federal, tais como a Prova Brasil e o SAEB (Sistema de Avaliação do Ensino

Brasileiro), entre tantos outros, indicam um baixo desempenho e rendimento na área de Matemática, que tem sido apontada como a disciplina que mais contribui, significativamente, na elevação das taxas de retenção. Ressaltemos novamente a LDB (Lei nº 9.394/96), a qual afirma que o ensino médio tem como finalidades centrais tanto a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, quanto o intuito de garantir a continuidade de estudos, seja ele voltado à preparação para o trabalho ou para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e/ou a compreensão dos processos produtivos.

No que concerne ao processo de ensino-aprendizagem de matrizes, podemos inferir que este se caracteriza pela utilização de regras que, de um modo geral, vem se apresentando completamente desvinculadas da realidade dos alunos. Assim como o ensino de matrizes que vem se apresentando em total descompasso com os avanços tecnológicos e com os estudos já realizados e apresentados pela Psicologia Educacional (SANCHES, 2002, p.6).

Conforme o autor citado, percebemos ainda, que poucos são os livros didáticos adequados para auxiliar o ensino de matemática, particularmente de matrizes, dado que muitos apresentam confusões conceituais, linguagem inadequada, raras contextualizações e apenas, exercícios repetitivos, prejudicando assim, o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dos alunos. Esta dificuldade encontrada pelos professores de Matemática deve ser vista como um estímulo, para que estes busquem novos métodos e, sobretudo, novas práticas da utilização de matrizes no cotidiano dos alunos.

Além dos desafios apontados para o ensino público em geral, acredita-se que talvez o ensino da Matemática tenha ainda mais desafios. Comumente é encontrada uma resistência dos alunos quanto a essa área, assim faz-se necessária a busca de novos meios a fim de contribuir para a facilitação do ensino e aprendizagem nas escolas. Vivemos em um rítmo acelerado, com mudanças que são tão rápidas quanto impactantes. O progresso afeta a todos, mesmo que não se queira ou busque por isso. Nesse cenário, a chave do sucesso reside na capacidade de adaptação. Fazer uso da tecnologia na educação já é uma necessidade inadiável, reconhecida por todo profissional do ensino que anda atualizado com as últimas tendências na área. As tecnologias podem não só representar um conjunto de ferramentas auxiliares para o trabalho do professor e dos alunos, como podem abrir novas oportunidades de aprendizagem. Pode-se identificar a docência para o século XXI no professor que é capaz de integrar várias mídias em suas práticas docentes, além das habilidades e dos saberes específicos da sua área.

Crianças e jovens usam as tecnologias com frequência, utilizando diferentes dispositivos para acesso à internet. Diferentes usos já estão incorporados na vida de muitos estudantes, dessa forma é necessário incluir diferentes dispositivos para viabilizar práticas pedagógicas com aplicativos, softwares, buscadores, redes sociais, com a finalidade educacional, para além do uso social.

> Dessa forma, cabe à educação estabelecer diálogos com as práticas culturais dos

> adolescentes e jovens, qualificar crítica e eticamente os usos que eles fazem das tecnologias na direção de uma participação social mais efetiva, que promova experiências com práticas colaborativas e vivências culturais significativas. Além disso, cabe propiciar uma gestão adequada dos riscos e ameaças que possam ser encontrados no ambiente virtual. (SÃO PAULO, 2019, p. 3).

Considerando as competências específicas de Matemática segundo a Base Nacional Comum Curricular, a tecnologia está explicitamente presente nas competências 5 e 6.

> Competência 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados (BRASIL, 2018, p. 267).

> Competência 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados) (BRASIL, 2018, p. 267).

Integrar a tecnologia ao ambiente educacional é uma necessidade que requer planejamento e organização, tendo que ser voltada para o processo de aprendizagem do aluno e as demandas que cada escola possui. Por isso, a modernização da educação deve ser feita com cuidado, para que a tecnologia seja uma ferramenta de auxílio e não de dispersão do aluno. O uso de novas tecnologias no ensino pode ter grande contribuição no aprendizado dos alunos, mas não é garantia de qualidade. Por isso, quando aliada ao processo educacional, oferece uma enorme gama de opções a serem exploradas tanto dentro como fora da sala de aula.

Segundo Costa Junior (2012), as tecnologias de informação e comunicação, propiciam mais condições ao homem para aprimorar-se, já que pode trabalhar à distância, sem a necessidade de se deslocar constantemente, tem acesso à educação continuada ou mesmo à educação básica para aqueles que residem em regiões afastadas ou que tem horários ou locais de trabalho não convencionais e ainda que a educação tradicional não precisa ser substituída por outra, baseada em tecnologia da informação, também o novo não vem necessariamente destruir o velho.

É consenso que são necessárias atitudes em relação à melhoria da educação em todos os sentidos. Ela precisa evoluir em tecnologia, em qualidade e em abrangência. É necessário, portanto, buscar encontrar soluções que utilizem técnicas capazes de ampliar o esforço pedagógico dos professores e dos formadores.

É fundamental refletir sobre os desafios que as tecnologias impõem e, neste cenário global de alterações, não poderíamos excluir a educação escolar. Para uma avaliação mais imparcial dos impactos das tecnologias na cultura contemporânea, devemos compreender a educação como um processo complexo, inacabado e em permanente evolução (ANTÔNIO JUNIOR, 2015).

Com a interatividade da tecnologia a representação dos objetos matemáticos na tela do computador possibilita ao aluno a visualização, representação e a manipulação desses objetos, favorecendo o processo de aprendizagem.

Esse estudo visa à utilização do Software GeoGebra na potencialização do ensino aprendizagem em matemática, de forma significativa e divertida para o aluno. Em especial, trataremos da aplicação do Software no ensino das Matrizes e suas aplicações, possibilitando o estudo de transformações geométricas simples como rotações e translações que podem ser, possivelmente, trabalhados no Ensino Médio, oportunizando a exploração a noção de matrizes e suas operações como também o cálculo de áreas de polígonos utilizando o determinante de uma matriz quadrada de ordem 3.

1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral deste trabalho é apresentar uma proposta para o cálculo de áreas de polígonos, quando são conhecidas as coordenadas de seus vértices, por meio de Determinantes, de forma a utilizar as tecnologias digitais de informação e comunicação, com a utilização do Software e aplicando na sala de aula.

1.2 OBJETIVO ESPECÍFICO

- Compreender o conceito de matriz.
- Interpretar e representar uma tabela como uma matriz.
- Identificar elementos de uma matriz.
- Reconhecer diversos tipos de matrizes.
- Compreender o conceito do Software GeoGebra.
- Compreender e realizar operações com matrizes utilizando o GeoGebra.
- Compreender o conceito de determinante de uma matriz.
- Calcular o determinante de uma matriz de ordens 1, 2 e 3 utilizando o GeoGebra.
- Calcular a área de um polígono utilizando as ferramentas do GeoGebra.
- Calcular a área de um polígono por meio de determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 utizando o GeoGebra.
- Resolver problemas nas diversas áreas que necessitem do uso de matrizes.

1.3 JUSTIFICATIVA

Os alunos estão vivendo em uma era de informações que estão em constante atualização. É perceptível que o aluno atual sente a necessidade de ver em sua escola a mesma tecnologia que faz parte do seu contexto social. Cabe ao professor a inserção das tecnologias em sua prática docente, fazendo dela um instrumento de uso habitual, mostrando que a Matemática trouxe, no decorrer dos anos, inúmeros avanços para a sociedade, ao mesmo tempo que, a utilização das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação TDICs ajudam a compreender fenômenos matemáticos e facilitam o entendimento de situações complexas.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A proposta deste trabalho é o cálculo da área de polígonos por meio de determinantes, visando utilizar o Software GeoGebra, com aplicação na sala de aula. As atividades aqui propostas foram aplicadas aos alunos da 3ª série do Ensino Médio, fazendo primeiramente uma aula teórica sobre os conceitos de matrizes e determinantes e posteriormente realizando as atividades utilizando o GeoGebra no laboratório de informática. Dois questionários foram aplicados, o primeiro, antes da realização da aula teórica, com o objetivo de investigar os conhecimentos adquiridos pelos alunos sobre o tema e da utilização de recursos computacionais durante sua vida estudantil e o segundo questionário, ao final das atividades, a fim de verificar a receptividade das atividades propostas, além de verificar se o uso do GeoGebra influenciou positivamente no processo de ensino e aprendizagem.

No segundo capítulo é apresentado o estado da arte do tema abordado, por meio da citação das principais referências bibliográficas que fundamentam esta investigação.

O capítulo três descreve conceitos de matrizes e determinantes e algumas de suas propriedades, uma vez que o trabalho está fundamentado nas aplicações de determinante, sobretudo, o cálculo de área de polígonos.

No quarto capítulo é apresentado um breve resumo sobre alguns conceitos de Geometria Analítica no plano, haja vista, toda proposta do trabalho ser baseada nas informações das coordenadas dos vértices, a saber: coordenadas no plano, retas no plano, vetores no plano, algumas propriedades e operações com vetores no plano e suas interpretações geométricas.

No capítulo cinco é explorado o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação na aula de Matemática, considerado por muitos um possível contribuinte para uma melhoria do ensino e aprendizagem. Como há um vasto campo de TIC's, é ressaltado o uso do GeoGebra, onde é apresentado o software e suas funções básicas. Após, são apresentados alguns conceitos de Geomentria Analítica, Matrizes e Determinantes que se faz necessário para a realização das atividades, como cálculo de área de polígonos.

Por fim, no capítulo seis, apresentamos a análise dos resultados, de forma conclusiva e detalhada dos questionários e atividades aplicadas aos alunos da terceira série do Ensino Médio. Posteriormente, analisamos as observações feitas durante a execução das mesmas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo tem por objetivo fazer referência aos trabalhos publicados na literatura que fundamentam essa investigação.

O desenvolvimento pessoal é um processo de aprimoramento das capacidades de agir, pensar e atuar no mundo, bem como de atribuir significados e ser percebido e significado pelos outros, aprender a diversidade, situar-se e pertencer. A educação tem de estar a serviço desse desenvolvimento, que coincide com a construção da identidade, da autonomia e da liberdade. Não há liberdade sem possibilidade de escolhas. Escolhas pressupõem um repertório e um quadro de referências que só podem ser garantidos se houver acesso a um amplo conhecimento, assegurado por uma educação geral, articuladora e que transite entre o local e o global (SÃO PAULO, 2012, p. 9).

As competências gerais da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), articula-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores.

> Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva (BRASIL, 2018, p. 9).

O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica devido à sua grande aplicação na sociedade contemporânea e suas potencialidades na formação de cidadãos críticos e cientes de suas responsabilidades sociais.

Em todas as épocas, em todas as culturas, a Matemática e a língua materna constituem dois componentes básicos dos currículos escolares. A Matemática apresenta um universo rico em ideias e objetos específicos, como os números e as operações, as formas geométricas, as relações entre tais temas, sobretudo as métricas. Tais ideias e objetos são fundamentais para a expressão pessoal, a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (SÃO PAULO, 2012, p. 25).

A aproximação entre os conteúdos escolares e o universo da cultura, a valorização das contextualizações e a busca permanente de uma instrumentação crítica para o mundo do trabalho servem, naturalmente, de ponto de partida para a reconfiguração que agora se realiza, tendo em vista os novos passos a serem dados para o enriquecimento da prática pedagógica.

O Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, é um direito de todo cidadão brasileiro, porém a realidade mostra que essa etapa representa um gargalo na garantia do direito à educação. Por isso, é imprescindível reconhecer que as rápidas transformações, em grande parte decorrentes do desenvolvimento tecnológico, atingem diretamente os jovens. Portanto, é fundamental organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo o respeito à pessoa humana e aos seus direitos e mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização.

> Para formar esses jovens como sujeitos críticos, criativos, autônomos e responsáveis, cabe às escolas de Ensino Médio proporcionar experiências para a leitura da realidade, o enfrentamento dos novos desafios da contemporaneidade (sociais, econômicos e ambientais) e a tomada de decisões éticas e fundamentadas. O mundo deve lhes ser apresentado como campo aberto para investigação e intervenção quanto a seus aspectos políticos, sociais, produtivos, ambientais e culturais, de modo que se sintam estimulados a equacionar e resolver questões legadas pelas gerações anteriores - e que se refletem nos contextos atuais - abrindo-se criativamente para o novo. (BRASIL, 2018, p. 463).

As novas tecnologias da informação promovem uma mudança na produção, na organização, no acesso e na disseminação do conhecimento. Cabe a escola preparar o aluno para viver em uma sociedade em que a informação é disseminada em grande velocidade.

A escola deve se adaptar, ser melhorada, ser de fato um local que desperte no aluno a vontade de buscar o conhecimento, a curiosidade e para isso devemos usar todos os meios disponíveis, como jogos, materiais manipuláveis e principalmente a informática. As informações e o conhecimento na atualidade circulam de maneira muito mais dinâmica, a troca de conteúdos e informações foi modificada após o surgimento da era digital.

Índices, pesquisas e estudos mostram que o nível de aprendizado dos alunos na maioria das escolas públicas tem ficado baixo. Diante disso, aparecem vários questionamentos acerca da eficácia do ensino público. Muitas vezes culpam a escola e professores pelos resultados.

Para alguns pesquisadores esta situação vem acontecendo devido à estagnação do sistema de ensino brasileiro, em que o método didático é o mesmo de muitos anos atrás.

Os motivos para as dificuldades do ensino e aprendizagem nas escolas públicas brasileiras vão muito além disso. A Constituição Federal Brasileira (1988) traz em alguns de seus artigos a necessidade de colaboração entre escola e família para o melhor desenvolvimento da educação:

> Art. 205. A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho (BRASIL, 2016, p. 123). [...]

> Art. 227. É dever da família, da sociedade e do Estado assegurar à criança, ao adolescente e ao jovem, com absoluta prioridade, o direito à vida, à saúde, à alimentação, à educação, ao lazer, à profissionalização, à cultura, à dignidade, ao respeito, à liberdade e à convivência familiar e comunitária, além de colocá-los a salvo de toda forma de negligência, discriminação, exploração, violência, crueldade e opressão (BRASIL, 2016, p. 132). [...]

Estruturas precárias também são um agravante para a situação. Escolas que não recebem reformas há anos, falta de carteiras para os alunos, controle do número de cópia das atividades com limite muito baixo, laboratórios de informática que, quando presentes na escola, não possuem quantidade suficiente de computadores para uma aula com a participação de toda uma turma e falta de materiais didáticos, em geral.

Nessa perspectiva, Silva (2019) aponta as dificuldades apresentadas na maior parte do ensino público brasileiro como por exemplo, estruturas precárias das escolas e desvalorização profissional e, ao mesmo tempo o grande avanço e disponibilização da tecnologia.

> Os desafios escolares são muitos e cada vez mais presentes nas variadas escolas. Muitas vezes, fogem do ambiente escolar e estão presentes no âmbito familiar. Tudo isso tem contribuído cada vez mais para as dificuldades e a desmotivação dos alunos no processo de ensino e aprendizagem (SILVA, 2019 p. 21).

A educação tecnológica básica hoje é uma das diretrizes que a LDBEN estabelece para orientar o currículo do Ensino Médio. A lei ainda associa a “compreensão dos fundamentos científicos dos processos produtivos” ao relacionamento entre teoria e prática em cada disciplina do currículo. E tem o sentido de preparar os alunos para viver e conviver em um mundo no qual a tecnologia está cada vez mais presente, no qual a tarja magnética, o celular, o código de barras e outros tantos recursos digitais se incorporam velozmente à vida das pessoas, qualquer que seja sua condição socioeconômica.

As rápidas transformações no mundo do trabalho, o avanço tecnológico configurando a sociedade virtual e os meios de informação e comunicação incidem com bastante força na escola. Diante das mudanças, surgem desafios no campo educacional, que levam a uma nova organização do trabalho docente. Nesta lógica, a formação inicial e continuada de professores se apresenta como uma condição necessária para o desenvolvimento da função docente.

Com o objetivo de analisar as formas com que os conceitos matemáticos são trabalhados no Ensino Médio, Mrotskoski (2019) fez uma análise em livros didáticos, da forma como são tratados os conceitos de Matrizes, Determinantes e Sistemas de Equações Lineares, sendo estes vistos de forma superficial, que traz pouco sentido às definições, propriedades e operações, conceitos estes, apresentados de forma isolada e conclui que relacionar a teoria das Matrizes aos Sistemas Lineares permite que se compreenda muitas de suas propriedades e operações, e a representação geométrica no espaço vetorial, observando as transformações, possibilita a percepção visual do cálculo algébrico.

A matemática hoje é vista pelo alunos como algo muito difícil e que muitas vezes os conteúdos são ensinados de forma mecânica e que os alunos não veem significado naquilo que é ensinado. Pensando nisso, Moraes (2020) e Fonda e Silva (2019) fizeram uma análise nos periódicos disponibilizados nas Plataformas na internet com o objetivo de investigar como conceitos matemáticos é ensinado aos alunos. Moraes (2020), faz um estudo das Metodologias Ativas no ensino da Álgebra Linear. Os resultados apresentados demonstram que as metodologias ativas contribuem para a aproximação entre os estudantes e o professor durante as aulas, o que facilita a mediação deste durante o processo de ensino-aprendizagem nessa disciplina. O autor ressalta que a aplicabilidade das aulas diferenciadas ganhou importantes discussões, pois possibilitam compreender as potencialidades das metodologias ativas de ensino, assim como, a transformação das práticas educacionais no ambiente escolar.

> As metodologias ativas vêm garantir ao ensino da Matemática contribuições que possam ser exploradas, as metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o trabalho coletivo, a criatividade, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios, compreendendo e transformando sua realidade (MORAES, 2020 p. 2).

Fonda e Silva (2019) investigam como é ensinado o conceito de área de triângulos. As pesquisas analisadas mostraram que há a necessidade de diferentes estratégias de ensino que explorem a construção de diversas fórmulas para o cálculo de áreas, especificamente, a de triângulos possibilitando assim uma aprendizagem efetiva do aluno e uma formação adequada de professores inicial e continuada.

As Diretrizes Curriculares Nacional de Educação para o Ensino Médio indicam a importância do uso das tecnologias em sala de aula:

> Concretamente, o projeto político-pedagógico das unidades escolares que ofertam o Ensino Médio deve considerar: VIII - utilização de diferentes mídias como processo de dinamização dos ambientes de aprendizagem e construção de novos saberes (Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio 4/5/2011 - Projetos Políticos Pedagógicos/Cap. VIII).

Assim, a utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação na sala de aula atual tem se tornado muito importante. A necessidade de mudanças no ensino encontra-se na Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

> Há que se considerar, ainda, que a cultura digital tem promovido mudanças sociais significativas nas sociedades contemporâneas. Em decorrência do avanço e da multiplicação das tecnologias de informação e comunicação e do crescente acesso a elas pela maior disponibilidade de computadores, telefones celulares, tablets e afins, os estudantes estão dinamicamente inseridos nessa cultura, não somente como consumidores. Os jovens têm se engajado cada vez mais como protagonistas da cultura digital, envolvendo-se diretamente em novas formas de interação multimidiática e multimodal e de atuação social em rede, que se realizam de modo cada vez mais ágil (BRASIL, 2018, p. 61).

As novas tecnologias da informação e comunicação devem ser vistas como fortes aliadas para uma nova escola na era digital. Essas tecnologias, quando usadas de maneira correta, trazem inúmeros benefícios ao ensino. As aulas se tornam mais atrativas e, consequentemente, os alunos mais interessados.

Diante disso, com o objetivo de buscar novos meios para o ensino da Matemática, Silva (2019) utilizou o software GeoGebra para o estudo de Geometria Analítica. Os resultados mostram que a inclusão das tecnologias de informação e comunicação na aula de Matemática pode se tornar um grande diferencial para a realização de um processo de ensino e aprendizagem mais significativo e prazeroso e que a utilização do software pode contribuir para o ensino e aprendizagem de Geometria da Analítica.

A inserção das tecnologias na sala de aula pode favorecer a visualização das propriedades nas aulas de Matemática, pois o uso das mesmas faz com que um novo mundo se abra ao educando. Dessa maneira o aluno pode compreender melhor a construção do conhecimento e assim produzir significado ao que lhe está sendo apresentado. E assim, fazendo a junção dos conteúdos matemáticos com as tecnologias, pode-se conseguir que os alunos tenham menores dificuldades no aprendizado.

Na Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio, o foco está no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento que permite aos estudantes:

> Usar diversas ferramentas de software e aplicativos para compreender e produzir conteúdos em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática. (BRASIL, 2018, p. 475).

A BNCC reconhece que a educação tem um compromisso com a formação e o desenvolvimento humano, bem como, tem papel complementar para assegurar as aprendizagens essenciais definidas para cada etapa da Educação Básica. Por isso, tem como uma de suas ações:

> Criar e disponibilizar materiais de orientação para os professores, bem como manter processos permanentes de formação docente que possibilitem contínuo aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem. (BRASIL, 2018, p. 17).

Para auxiliar os professores da Educação Básica, Arruda Filho (2019) utiliza do software GeoGebra no ensino de matrizes e algumas de suas aplicações, especialmente das matrizes circulantes e de sua importância do ponto de vista computacional, aos alunos do ensino médio para que estabeleçam relações entre os conteúdos da sala de aula com o mundo real, podendo assim, o desinteresse pela Matemática ser minimizado.

Muitas vezes, é mais conveniente formar grupos ordenados de números que se apresentam dispostos em linhas e colunas. Esses grupos são chamados na matemática de matrizes. Na computação, por exemplo, as matrizes adquiriram grande importância, pois há necessidade de se guardar muita informação. As imagens em uma tela de computador são, na verdade, formadas por pequenos pontos, denominados pixels, que são elementos de uma matriz. Uma imagem de resolução 800×600 tem $800 * 600 = 480000$ pixels em 800 linhas e 600 colunas. As matrizes são largamente utilizadas em aplicação de banco de dados, tão importantes na organização de qualquer empresa; ao realizar um cadastro numa página da internet, os dados vão imediatamente para um banco de dados, que nada mais é do que uma matriz que relaciona as informações de todos cadastros com as respectivas pessoas.

Pensando na importância do estudo de matrizes no cotidiano e nas dificuldades apontadas por Silva (2019) no ensino da matemática, Santana, Macedo, Marcone e Santana (2019) utilizam o Software GeoGebra, com alunos do ensino superior, como estratégia para o ensino de vetores, matrizes, projeções ortogonais e o método de mínimos quadrados com o objetivo de ilustrar graficamente as soluções e realizar cálculos complexos de forma simples, contribuindo para a aprendizagem dos estudantes, fazendo com que novos professores adotem o software como ferramenta para aprimorar suas práticas pedagógicas. Neste sentido, Reis (2020), também com o objetivo de aprofundar a formação do profissional da matemática na Educação Básica, utiliza o Software GeoGebra para o ensino Matrizes e Determinantes, e assim assimilar a teoria e a prática com o uso da tecnologia, contribuindo muito devido a possibilidade de visualização e manipulação das construções geométricas.

Muito se tem falado na importância de investimentos na educação básica, tanto a inicial quanto a continuada, pensando nisso, Cunha (2020) tem como proposta, assim como Reis (2020), o aperfeiçoamento do professor para o uso do Software GeoGebra no ensino de Geometria Analítica e o cálculo de área de triângulos através das coordenadas de seus vértices, utilizando para isso o cálculo de determinantes. Do mesmo modo, Rocha (2019), com a finalidade de elaborar um material de apoio para o uso do professor da Educação Básica, utiliza o Software GeoGebra com o objetivo de promover a aprendizagem significativa dos conceitos e fórmulas de área das figuras planas.

Assim, o processo de formação docente pode estabelecer alternativas que ampliem o desenvolvimento da capacidade de reflexão sobre a própria prática docente, objetivando o aprendizado, a compreensão e a reflexão sobre a realidade social e à docência, buscando, assim, a transformação da realidade do educando.

É importante salientar que, para que haja a inserção das tecnologias na educação é necessário que seja rompido o ensino padronizado e cristalizado, que se possam incorporar meios que promovam a interação de conteúdos e que os futuros professores possam ser protagonistas de uma formação que desenvolva competências e habilidades, condizentes à cultura tecnológica de seu tempo.

Com o avanço da tecnologia, as TIC's estão cada vez mais acessíveis aos professores e às escolas. E cada vez mais acredita-se que sua utilização para o ensino seja de suma importância e grande valia. Mesmo sabendo que somente seu uso não garante um ensino e aprendizagem sem problemas, é um caminho diferente a ser trilhado no sentido de conseguir essas mudanças.

Para o ensino de Matrizes e suas operações e transformações, Silva Neto (2019) utiliza o software Octave como ferramenta no processo de ensino-aprendizagem. A pesquisa foi aplicada em duas salas, uma para alunos do Ensino Superior e outra para alunos da 2ª série do Ensino Médio, a fim de mostrar como as operações com matrizes transformam as figuras planas. Já

Soares (2019) utiliza o Software Scilab com o objetivo de demonstrar a aplicação das matrizes no processamento de imagens e conclui que a matemática se faz presente na manipulação de imagens, e veio colaborar com o estudo da Matriz visto que as aplicações dos filtros sobre as imagens tiveram resultados significativos.

Assim como Cunha (2020) e Reis (2020), Silva Neto (2019) tem como objetivo auxiliar professores na busca de novos métodos de ensinar os mais diversos conteúdos de matemática na tentativa de ampliar os horizontes a respeito da relação da matemática e suas contribuições para a sociedade.

Mesmo que o uso das tecnologias não seja a solução para os problemas de ensino e aprendizagem da Matemática, há indícios de que ela se converterá lentamente em um agente catalisador do processo de mudança na educação matemática. Graças às possibilidades que oferece para manejar dinamicamente os objetos matemáticos, a tecnologia abre espaço para que os estudantes possam viver novas experiências matemáticas, difíceis de conseguir com recursos tradicionais como o lápis e o papel.

A escolha do software deve se fundamentar na proposta pedagógica de matemática da escola, o professor deve escolher um tipo de software adequado para possibilitar que o aluno construa seu conhecimento, sem deixar de lado o profundo domínio que precisa ter tanto do conteúdo abordado como do programa que utilizará.

Paris (2019) utiliza planilhas eletrônicas com o intuito de tornar mais dinâmica e experimental a aplicação das operações relacionadas ao estudo de Matrizes, Estatística e o Processamento Digital de Imagens, buscando assim uma interação entre as tecnologias computacionais que estão ao alcance da maioria da população e utilizando como ferramenta de aprendizagem.

Uma das alternativas de mudança na educação atual é introduzir o uso das tecnologias na escola. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, p. 43). “As tecnologias, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas”. O uso da tecnologia em sala de aula pode ser um forte incremento no processo de ensino-aprendizagem, já que seu uso possibilita ao professor e ao aluno uma nova forma de analisar e resolver problemas.

> [...]Possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem; Permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade Matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo (BRASIL, 1997, p. 43-44).

Os PCNs consideram a Matemática “como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural” (1998, p. 24). Em que completa dizendo que a Matemática - diferente da falácia de boa parte da sociedade, incluindo professores

- é uma ciência viva, tanto no cotidiano quanto nas universidades e centros de pesquisas, nos quais são valorosos instrumentos para solucionar problemas de naturezas distintas.

Além disso, a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algorítmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas.

> Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio - impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver de seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior (BRASIL, 2018, p. 528).

Em todos os trabalhos aqui apresentados observa-se a necessidade de buscar novos métodos de ensino, diferente do tradicional, onde o aluno constroi seu conhecimento com aulas mais dinâmicas, fazendo com que os mesmos desenvolvam sua criatividade, iniciativa, colaboração e não apenas decorar fórmulas.

Diante deste cenário pesquisado na literatura, o objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta para o cálculo de áreas de polígonos por meio de determinantes utilizando o Software GeoGebra e aplicando na sala de aula à 55 alunos da 3ª série do Ensino Médio, sendo 26 da 3ª série A e 29 da 3ª série B da Escola Estadual Professor José Leite Pinheiro da cidade de Cerqueira César, estado de São Paulo.

3 MATRIZES E DETERMINANTES

Neste capítulo, apresentamos as principais definições e propriedades envolvendo matrizes e determinantes. Os conceitos apresentados são descritos com base nas referências: Iezzi e Hazzan (1977), Boldrini, Costa, Figueiredo e Wetzler (1980), Callioli, Domingues e Costa (2003).

3.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

A seguir, apresentamos algumas definições fundamentais para iniciar o estudo de matrizes.

Definição 3.1.1 . *Sejam dois números naturais $m \geq 1$ e $n \geq 1$. Uma matriz real M é uma dupla sequência de números reais distribuídos em m linhas e n colunas, formando uma tabela indicada como*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Pode-se abreviadamente representar uma matriz por:

$M = (a_{ij})$, em que $i \in 1, 2, 3, ..., m$ e $j \in 1, 2, 3, ..., n$ ou ainda $M = (a_{ij})_{n \times m}$.

A matriz $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×4, pois tem 2 linhas e 4 colunas.

3.1.1 Matrizes especiais

Conforme algumas características apresentadas por certas matrizes, elas recebem nomes especiais. A seguir, veremos algumas dessas matrizes particulares.

Definição 3.1.2 . *Matriz quadrada de ordem n é toda matriz do tipo $n \times n$, isto é, é uma matriz que tem igual número de linhas e colunas.*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Denomina-se diagonal principal de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto de elementos que têm os dois índices iguais, isto é:

$$\{a_{ij} | i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}\} \tag{3}$$

Define-se diagonal secundária de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos da matriz que têm a soma dos índices igual a $n + 1$, isto é:

$$\left\{a_{ij} | i + j = n + 1\right\} = \{a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, ..., a_{n1}\} \tag{4}$$

Definição 3.1.3 . *Dizemos que uma matriz quadrada é uma diagonal se todos os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Definição 3.1.4 . *Matriz identidade de ordem n e indica-se por (I_n) é toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1.*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Definição 3.1.5 . *Matriz nula é toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero.*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Definição 3.1.6 . *Matriz linha é toda matriz do tipo $1 \times n$, isto é, é uma matriz que tem uma única linha.*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Definição 3.1.7 . *Matriz coluna é toda matriz do tipo $m \times 1$, isto é, é uma matriz que tem uma única coluna.*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Definição 3.1.8 . *Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, a matriz transposta de A, denotada por a matriz A^t, é a matriz $(b_{ij})_{m \times n}$, onde*

$$b_{ij} = a_{ij}$$

para todo $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.

3.1.2 Operações com matrizes

Definição 3.1.9 (Igualdade de matrizes) . *Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, com $i = 1, 2, 3, ..., m$ e todo j, com $j = 1, 2, 3, ..., n$. Isto significa que para serem iguais duas matrizes devem ser do mesmo tipo e apresentar todos os elementos correspondentes iguais.*

$$\text{Considere as matrizes } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Como as matrizes A e B são do mesmo tipo (3×3), seus elementos correspondentes são:

$$\begin{matrix} a_{11} \text{ e } b_{11} & a_{12} \text{ e } b_{12} & a_{13} \text{ e } b_{13} \\ a_{21} \text{ e } b_{21} & a_{22} \text{ e } b_{22} & a_{23} \text{ e } b_{23} \\ a_{31} \text{ e } b_{31} & a_{32} \text{ e } b_{32} & a_{33} \text{ e } b_{33} \end{matrix} \tag{11}$$

Definição 3.1.10 (Adição de matrizes) . *Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se soma $A + B$ a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i e todo j. Isto significa que a soma de duas matrizes A e B do tipo $m \times n$ é uma matriz C do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.*

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Definição 3.1.11 (Matriz oposta) . *Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se oposta de A e indica-se $-A$ a matriz A' tal que*

$$A + A' = 0$$

Definição 3.1.12 (Subtração de matrizes) . *Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se diferença $A - B$ a matriz soma de A com a oposta de B.*

$$(A - B) = A + (-B)$$

Ou seja,

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Propriedade 3.1.1 . *Para a adição de matrizes acima definida valem as seguintes propriedades:*

(i) *É associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$, $\forall A,B,C \in M_{m \times n}\,\mathbb{R}$;*

(ii) *É comutativa: $A + B = B + A$, $\forall A,B \in M_{m \times n}\mathbb{R}$;*

(iii) *Tem elemento neutro: Existe uma matriz $\bar{O} \in M_{m \times n}\,\mathbb{R}$ tal que $A + \bar{O} = A$, $\forall A \in M_{m \times n}\mathbb{R}$;*

(iv) *Todo elemento tem simétrico: Dada uma matriz $A \in M_{m \times n}\,\mathbb{R}$, existe uma matriz $(-A)$, também $m \times n$, tal que $A + (-A) = 0$.*

Demonstração 3.1.1 . *Seja $A = a_{ij}$, $B = b_{ij}$ e $C = c_{ij}$, então:*

Como a adição de números reais possui as propriedades i, ii, iii e iv, obtemos:

(i) $(A + B) + C = (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})) = (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) = A + (B + C)$.

(ii) $A + B = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = B + A$

(iii) *Seja U uma matriz $m \times n$ tal que $A + U = A$ para qualquer matriz A, $m \times n$. Comparando os elementos correspondentes, temos que $a_{ij} + u_{ij} = a_{ij}$, ou seja, $u_{ij} = 0$, para $i = 1..., m$ e $j = 1..., n$. Portanto, a única matriz que satisfaz à equação acima é a matriz em que todos os seus elementos são iguais a zero. Denotamos esta matriz por $\bar{0}$.*

(iv) *Impondo $A + A' = M = 0$, resulta:*

$a_{ij} + a'_{ij} = 0 \Rightarrow a'_{ij} = -a_{ij}$, *para $\forall i,j$,* *isto é, a simétrica da matriz A para a adição é a matriz A' de mesmo tipo que A, na qual cada elemento é simétrico do correspondente em A.*

Definição 3.1.13 (Multiplicação de uma matriz por um número) . *Dada uma matriz real $A = a_{ij}$, $m \times n$, e dado um número real α, o produto de α por A é a matriz real $m \times n$ dada por:*

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \tag{14}$$

Propriedade 3.1.2 . *Para essa operação que transforma cada par (α, A) de $\mathbb{R} \times M_{m \times n}(\mathbb{R})$ na matriz real $\alpha\, A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, valem as seguintes propriedades:*

(i) $(\alpha\, \beta)A = \alpha(\beta A)$;

(ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

(iii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

(iv) $1A = A$.

Para quaisquer que sejam as matrizes A e B e quaisquer que sejam o números reais α e β.

Demonstração 3.1.2 . *Suponhamos que $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, então:*

(i) $(\alpha\, \beta)A = (\alpha\, \beta)a_{ij} = \alpha(\beta a_{ij}) = \alpha(\beta A)$;

(ii) $(\alpha + \beta)A = ((\alpha + \beta)a_{ij}) = (\alpha.a_{ij} + \beta.a_{ij}) = (\alpha.a_{ij}) + (\beta.a_{ij}) = \alpha A + \beta A$;

(iii) $\alpha(A + B) = \alpha(a_{ij} + b_{ij}) = (\alpha a_{ij}) + (\alpha b_{ij}) = (\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}) = \alpha A + \alpha B$;

(iv) $1.A = 1.a_{ij} = a_{ij} = A$

Definição 3.1.14 (Multiplicação de matrizes) *Consideremos a matriz $A = a_{ij}$ de tipo $m \times n$ e a matriz $B = b_{ij}$ de tipo $n \times p$. O produto $A.B$ (também indicado por AB) é a matriz $m \times p$ cujo termo geral é dado por:*

$$c_{ij} = \sum_{n,j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + a_{i3}.b_{3k}... + a_{in}.b_{nk} \tag{15}$$

Usando a notação de matriz linha e de matriz coluna a definição acima significa que

$$AB = \begin{pmatrix} A^{(1)}.B_{(1)} & \cdots & A^{(1)}.B_{(p)} \\ A^{(2)}.B_{(1)} & \cdots & A^{(2)}.B_{(p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{(m)}.B_{(1)} & ... & A^{(m)}.B_{(p)} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Observação 3.1.1

1. A definição dada garante a existência do produto AB somente se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, pois A é do tipo $m \times n$ e B é do tipo $n \times p$.

2. A definição dada afirma que o produto AB é uma matriz que tem o número de linhas de A e o número de colunas de B, pois $C = AB$ é do tipo $m \times p$.

3. Ainda pela definição, um elemento c_{ik} da matriz AB deve ser obtido pelo procedimento seguinte:

   a) toma-se a linha i da matriz A:
   $\boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad ... \quad a_{in}}$ (n elementos)

   b) toma-se a coluna k da matriz B:
   $\boxed{\begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{matrix}}$ (n elementos)

   c) coloca-se a linha i de A na "vertical"ao lado da coluna k de B conforme esquema:
   $\boxed{\begin{matrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ \vdots \\ a_{in} \end{matrix}}$ e $\boxed{\begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \\ b_{nk} \end{matrix}}$

   d) calculam-se os n produtos dos elementos que ficaram lado a lado conforme esquema:
   $\boxed{\begin{matrix} a_{i1} \times b_{1k} \\ a_{i2} \times b_{2k} \\ a_{i3} \times b_{3k} \\ \vdots \\ a_{in} \times b_{nk} \end{matrix}}$

   e) somam-se esses n produtos, obtendo c_{ik}.

Propriedade 3.1.3 *A multiplicação de matrizes apresenta as seguintes propriedades:*

(i) é associativa: $(AB)C = A(BC)$ *quaisquer que sejam as matrizes* $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{jk})_{n \times p}$ *e* $C = (c_{kl})_{p \times r}$*;*

(ii) é distributiva à direita em relação à adição: $(A + B)C = AC + BC$ *quaisquer que sejam as matrizes* $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ *e* $C = (c_{jk})_{n \times p}$*;*

(iii) é distributiva á esquerda: $C(A + B) = CA + CB$ *quaisquer que sejam o número* k *e as matrizes* $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ *e* $C = (c_{ki})_{p \times m}$*;*

(iv) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ *quaisquer que sejam o número* k *e as matrizes* $A = (a_{ij})_{m \times n}$ *e* $B = (b_{jk})_{n \times p}$.

Demonstração 3.1.3

(i) Fazendo $D = AB = (d_{ik})_{m \times p}$, $E = (AB)C = (e_{il})_{m \times r}$ e $F = BC = (f_{jl})_{n \times r}$, temos:

$e_{il} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik}.c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk}).c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk}.c_{kl}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}.c_{kl}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.f_{jl}$

então, $(AB)C = A(BC)$.

(ii) Fazendo $D = (A + B)C = (d_{ik})_{m \text{ x } n}$, temos:

$d_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij}).c_{jk} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}.c_{jk} + b_{ij}.c_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}.c_{jk}$

então, $(A + B)C = AC + BC$.

(iii) A demonstração é análoga a (II).

(iv) Fazendo $C = kA = (c_{ij})_{m \text{ x } n}$, $D = kB = (d_{jk})_{n \text{ x } p}$ e $E = AB = (e_{ik})_{m \text{ x} p}$, temos:

$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}.b_{jk} = \sum_{j=1}^{n}(k.a_{ij}).b_{jk} = k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk}$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.d_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.(k.b_{jk}) = k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk}$

então, $(kA)B = A(kB) = k(AB)$.

Observação 3.1.2

1. É muito importante notar que a multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, para duas matrizes quaisquer A eB é falso que $AB = BA$ necessariamente.

   a) Há casos em que existe AB e não existe BA. Isto ocorre quando A é $m \times n$, B é $n \times p$ e $m \neq p$:

   $\underbrace{A}_{\text{m} \times \text{n}}$ e $\underbrace{B}_{\text{n} \times \text{p}}$ $\Rightarrow \exists\, AB$

   $\underbrace{B}_{\text{n} \times \text{p}}$ e $\underbrace{A}_{\text{m} \times \text{n}}$ $\Rightarrow \nexists\, BA$

b) Há casos em que existe AB e BA, porém são matrizes de tipos diferentes e, portanto, $AB \neq BA$. Isto ocorre quando A é $m \times$ n,Bn $\times$ mem $\neq$ n:

$\underbrace{A}_{\text{m} \times \text{n}}$ e $\underbrace{B}_{\text{n} \times \text{m}} \Rightarrow \exists \underbrace{AB}_{\text{m} \times \text{m}}$

$\underbrace{B}_{\text{n} \times \text{m}}$ e $\underbrace{A}_{\text{m} \times \text{n}} \Rightarrow \exists \underbrace{BA}_{\text{n} \times \text{n}}$

2. Quando A eB são tais que $AB = BA$, dizemos que A e B comutam. Notemos que uma condição necessária para A e B comutarem é que sejam quadradas e de mesma ordem.

3.2 DETERMINANTE

Nesta seção, apresentamos as definição para o estudo de determinantes.

Definição 3.2.1 . *Quando nos referimos ao determinante, isto é, ao número associado a uma matriz quadrada* $M = a_{ij}$*, escrevemos:*

$$det\ M \text{ ou } |M| \text{ ou } det\ [a_{ij}] \tag{17}$$

Então

$$det\ [a] = a \tag{18}$$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{19}$$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + \\ + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{23}a_{31} \end{matrix} \tag{20}$$

3.2.1 Determinante de uma Matriz de ordem 1

Definição 3.2.2 . *Se* M *é de ordem* $n = 1$*, então* $det\ M$ *é o único elemento de* M*.*

$$M = [a_{ij}] \Rightarrow det\ M = a_{ij} \tag{21}$$

Podemos também indicar o determinante de M *pelo símbolo* $|a_{11}|$*, isto é, colocando uma barra bertical de cada lado de* M*.*

3.2.2 Determinande de uma Matriz de ordem 2

Definição 3.2.3 . *Se M é de ordem $n = 2$, o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \; det\, M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{22}$$

3.2.3 Determinante de uma Matriz de ordem 3

Definição 3.2.4 *Se M é de ordem $n = 3$, isto é,*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

definimos:

$$detM = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a31 + a_{13}.a21.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33} \tag{24}$$

Esse determinante pode ser obtido, usando uma regra prática, conhecida como regra de Sarrus, repetindo as duas primeiras colunas à direita da terceira e calculando o produto das diagonais formadas. Sendo que o produto da diagonal principal, assim como de suas paralelas, permanecerá com o mesmo sinal e o produto da diagonal secundária e suas paralelas mudam de sinal.

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{25}$$

O determinante é a soma dos valores obtidos.

3.2.4 Determinante de uma Matriz de Ordem $n \geq 4$

Apresentaremos nesta subseção um método que permite calcular o determinante de uma matriz de ordem $n \geq 2$, a partir de uma linha ou coluna da matriz, conhecido como Teorema de Laplace.

Para enunciá-lo, são necessárias algumas definições.

Definição 3.2.5 . *Considera-se uma matriz M quadrada, de ordem n, $n \geq 2$ e representada por $M = (a_{ij})_{n \times n}$, onde a_{ij} é um elemento de M. O menor complemento de M pelo elemento a_{ij}*

é o determinante D_{ij} que é um número associado à matriz quadrada proveniente de M, excluindo a linha e a coluna na qual está este elemento a_{ij}. Então, na matriz $M = (a_{ij})_{n \times n}$.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{26}$$

Escolhendo-se o elemento a_{22}, o menor complemento da matriz A por este elemento a_{22} é representado por:

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{27}$$

Definição 3.2.6 . *Sendo $M = (a_{ij})_{n \times n}$ uma matriz quadrada de ordem $n(n \geq 2)$ e a_{ij} um elemento da matriz M, o cafator de a_{ij} é um número real obtido quando se multiplica $(-1)^{i+j}$ pelo menor complementar D_{ij} de a_{ij}, que se representa por M_{ij}. Portanto:*

$$M_{ij} = (-1)^{i+j} \, . \, D_{ij} \tag{28}$$

Considerando-se a matriz quadrada $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$. Para encontrar o cafator M_{11}, faz-se;

$$M_{11} = (-1)^{1+1} \, . \, D_{11} = (-1)^{2} \, . \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{29}$$

Agora, tem-se condições de enunciar o Teorema de Laplace.

Definição 3.2.7 . *Teorema de Laplace: O determinante de uma matriz M, de ordem $n \geq 2$, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.*

Isto é,

a) Se escolhermos a coluna j da matriz $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$, então

$$det\ M = a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \cdots + a_{nj}M_{nj}. \quad (30)$$

b) Se escolhermos a linha i da matriz $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$, então

$$det\ M = a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \cdots + a_{in}M_{in}. \quad (31)$$

Portanto, para calcularmos um determinante, não precisamos necessariamente dos elementos da 1ª coluna e seus cofatores; qualquer outra coluna (ou linha) e seus cofatores permitem seu cálculo.

Para calcularmos o determinante:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad (32)$$

Se escolheros a 3ª linha para seu cálculo, obteremos:

$$det\ M = 3\ .\ M_{31} + \underbrace{0\ .\ M_{32}}_{0} + \underbrace{0\ .\ M_{33}}_{0} + 2\ .\ M_{34} = 3\ .\ M_{31} + 2\ .\ M_{34} \quad (33)$$

e só teremos que calcular dois colfatores, em vez de quatro se usássemos a definição.

Assim, calculando os cofatores M_{31} e M_{34}, temos:

$$M_{31} = (-1)^{3+1}\ .\ D_{31} = (-1)^4\ .\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\ .\ 22 = 22 \quad (34)$$

$$M_{34} = (-1)^{3+4}\ .\ D_{34} = (-1)^7\ .\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\ .\ 16 = -16 \quad (35)$$

Portanto,

$$det\, M = 3\ .\ 22 + 2\ .\ (-16) = 66 - 32 = 34 \tag{36}$$

Concluímos então que, quanto mais zeros houver em uma fila, mais fácil será o cálculo do determinante se usarmos essa fila. Em particular, se a matriz tiver uma fila de zeros, seu determinante será zero.

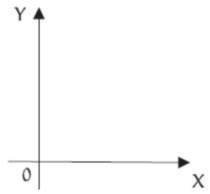
4 FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Neste capítulo, apresentamos uma introdução de coordenadas no plano de modo a representar pontos por pares de números reais e, consequentemente, identificar um polígono por meio de seus vértices, pois, a representação dos pontos através de suas coordenadas permite resolver algebricamente diversos problemas geométricos, abordando também noções de vetores, o que permite estudar vários conceitos geométricos de forma mais simples e direta. Os conceitos apresentados são descritos com base nas referências: Delgado (2013), Lima (2014), Dolce e Pompeo (1993), Muniz Neto (2013) e Iezzi (2005).

4.1 CONCEITOS INICIAIS

Indica-se como $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y), onde x e y são números reais. O número x chama-se a primeira coordenada, o número y a segunda coordenada do par (x, y) e $\mathbb{R}^2$ pode ser representado por um plano como indica o gráfico da Figura 1.

Figura 1 – Um sistema de coordenadas cartesianas.



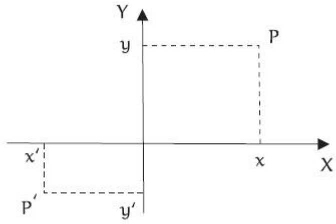
Fonte: Lima (2014).

Um sistema de coordenadas no plano Π consiste num par de eixos perpendiculares OX e OY contidos nesse plano, com a mesma origem O. OX chama-se o eixo das abcissas e OY é o eixo das ordenadas. O sistema é indicado com a notação OXY.

A escolha de um sistema de coordenadas no plano Π permite estabelecer uma correspondência biunívoca $\Pi \to \mathbb{R}^2$. A cada ponto P do plano Π fazemos corresponder um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Os números x e y são as coordenadas do ponto P relativamente ao sistema OXY: x é a abcissa e y é a ordenada de P. As coordenadas x, y do ponto P são definidas do seguinte modo:

Se P estiver sobre o eixo OX, o par ordenado que lhe corresponde é $(x, 0)$, onde x é a coordenada de P no eixo OX. Se P estiver sobre o eixo OY, a ele corresponde o par $(0, y)$, onde y é a coordenada de P nesse eixo. Se P não está em qualquer dos eixos, traçamos por P uma paralela ao eixo OY, a qual corta OX no ponto de coordenada x e uma paralela ao eixo OX, a qual corta OY no ponto de coordenada y. Então x será a abcissa e y a ordenada do ponto P. Noutras palavras, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é o par ordenado de números reais que corresponde ao ponto P.

Figura 2 – As duas coordenadas do ponto P são positivos e as de P’ são negativas.



Fonte: Lima (2014).

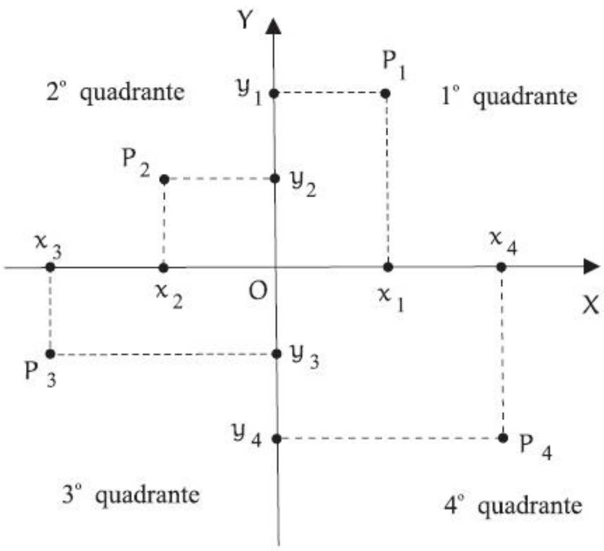
O ponto O, origem do sistema de coordenadas, tem abcissa e ordenada, ambas iguais a zero. Assim, a ele corresponde o par $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Se x é a abcissa e y é a ordenada do ponto P, o ponto P' de coordenadas $(x, 0)$ chama-se a projeção de P sobre o eixo OX enquanto o ponto P'', de coordenada $(0, y)$, é chamado projeção de P sobre o eixo OY, como mostra o gráfico da Figura 2.

Em princípio o plano Π, cujos elementos são pontos, não é a mesma coisa que o conjunto $\mathbb{R}^2$, cujos elementos são pares de números reais. Entretanto, quando fixarmos um sistema de coordenadas em Π, usaremos a correspondência $\Pi \to \mathbb{R}^2$ para identificar cada ponto P do plano com o par ordenado (x, y) que lhe corresponde. Assim, escrevemos $P = (x, y)$ querendo dizer com isto que P é o ponto do plano cuja abcissa é x e cuja ordenada é y.

Os eixos ortogonais OX e OY decompõem o plano Π em quatro regiões, como representado na Figura 3, cada uma das quais se chama um quadrante. O primeiro quadrante é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. O segundo quadrante é formado pelos pontos $P = (x, y)$ com $x \leq 0$ e $y \geq 0$. O terceiro, pelos pontos $P = (x, y)$ com $x \leq 0$ e $y \leq 0$. Finalmente, os pontos $P = (x, y)$ do quarto quadrante são aqueles em que $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

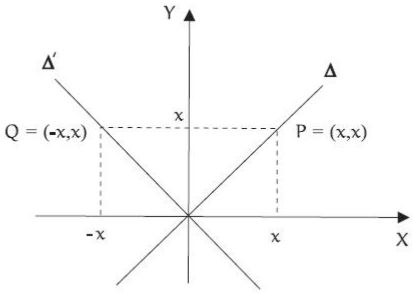
Figura 3 – Coordenadas cartesianas e quadrantes do plano.



Fonte: Lima (2014).

Fixando o sistema de coordenadas OXY no plano Π, o primeiro e o terceiro quadrantes formam dois ângulos retos, opostos pelo vértice. Os pontos $P = (x, y)$ da bissetriz comum desses dois ângulos são, como todos os pontos de uma bissetriz, equidistantes dos lados, logo têm abcissa e ordenada iguais, ambas positivas no primeiro quadrante e ambas negativas no terceiro. Esta reta Δ chama-se diagonal do plano Π relativamente ao sistema OXY. Tem-se portanto $P = (x, y) \in \Delta$ se, e somente se, $x = y$.

Figura 4 – As diagonais do plano.

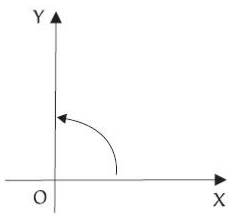


Fonte: Lima (2014).

Analogamente, um ponto $Q = (x, y)$ pertence à bissetriz Δ' comum ao segundo e quarto quadrantes se, e somente se, $x = -y$, assim como representado no gráfico da Figura 4.

Quando se toma no plano um sistema de coordenadas OXY, chama-se sentido positivo de rotação ou sentido anti-horário ao sentido da rotação de $90°$ que leva o semi-eixo positivo OX sobre o semi-eixo positivo OY, como a Figura 5.

Figura 5 – Sentido positivo de rotação.



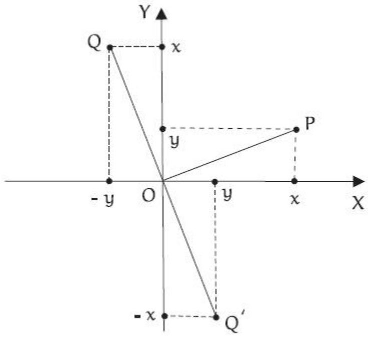
Fonte: Lima (2014).

Dado o ponto $P = (x, y)$, submetamos o segmento de reta OP a uma rotação de $90°$ no sentido positivo em torno do ponto O, obtemos assim o segmento OQ.

A rotação de $90°$ no sentido positivo leva o ponto $(x, 0)$ no ponto $(0, x)$, logo transforma o retângulo que tem diagonal OP e dois lados sobre os eixos, como na Figura 6, no retângulo de diagonal OQ com dois lados sobre os eixos. Segue-se que $Q = (-y, x)$.

Se tivéssemos submetido o segmento OP a uma rotação de -90^0, isto é, de $90°$ no sentido negativo, teríamos obtido o segmento OQ', onde $Q' = (y, -x)$.

Figura 6 – Submetendo o segmento OP à rotação de $\pm 90°$.



Fonte: Lima (2014).

4.2 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Se os pontos $P = (x, y)$ e $Q = (x', y)$ têm a mesma ordentada y então a distância $d = (P, Q)$ entre eles é igual à distância como indicado na Figura 7

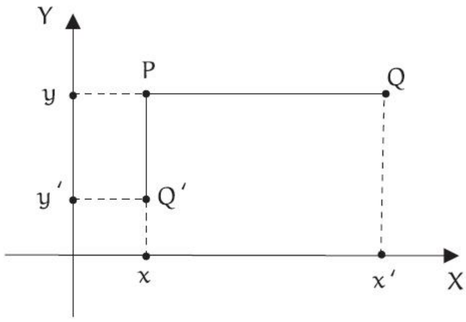
$$d(P,Q) = |x' - x| = \sqrt{(x - x')^2}$$

entre suas projeções sobre o eixo OX. Analogamente, se $P = (x, y)$ e $Q' = (x, y')$ têm a mesma abcissa x então

$$d(P,Q') = |y' - y| = \sqrt{(y - y')^2}$$

que é igual à distância entre as projeções de P e Q sobre o eixo OY como indicado na Figura 7.

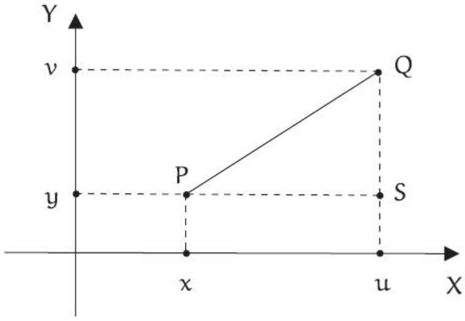
Figura 7 – $d(P,Q) = \sqrt{(x - x')^2}$ **e** $d(P,Q') = \sqrt{(y - y')^2}$**.**



Fonte: Lima (2014).

Se, entretanto, $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ têm abcissas e ordenadas diferentes então, considerando o ponto $S = (u, y)$, vemos que PSQ é um triângulo retângulo cuja hipotenusa é PQ. Como P e S têm a mesma ordenada, enquanto S e Q têm a mesma abcissa, segue-se que $d(P,S) = |x - u|$ e $d(S,Q) = |y - v|$ como indicado na Figura 8

Figura 8 – Obtendo $d(P, Q)$ via Pitágoras.



Fonte: Lima (2014).

Pelo Teorema de Pitágoras, podemos escrever

$$d(P, Q)^2 = d(P, S)^2 + d(S, Q)^2.$$

Portanto,

$$d(P, Q)^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2.$$

Logo,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

Em particular, a distância do ponto $P = (x, y)$ à origem $O = (0, 0)$ é

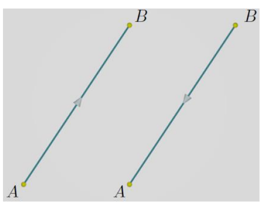
$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

A fórmula da distância entre dois pontos, dada em termos das coordenadas desses pontos, serve de partida para um grande número de resultados da Geometria Analítica.

4.3 EQUIPOLÊNCIA DE SEGMENTOS ORIENTADOS

Seja AB um segmento orientado de origem A e extremidade B. Isto é, no segmento AB estabelecemos um sentido de percurso (orientação) de A para B. Nessa situação, dizemos que o segmento BA está orientado com o sentido de percurso oposto ao do segmento AB como representado na Figura 9.

Figura 9 – Segmentos com sentidos opostos.



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

Definição 4.3.1 . *Dizemos que os segmentos orientados AB e CD são equipolentes, e escrevemos $AB \equiv CD$, quando satisfazem às seguintes três propriedades:*

a) *Têm o mesmo comprimento;*

b) *São paralelos ou colineares;*

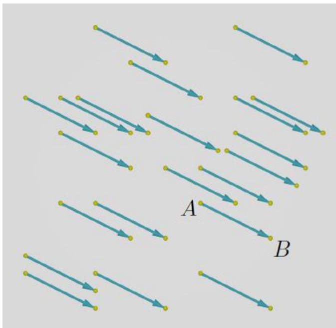
c) *Têm o mesmo sentido.*

4.4 VETORES NO PLANO

A relação de equipolência permite classificar os segmentos orientados do plano mediante a seguinte definição e ilustrado na Figura 10.

Definição 4.4.1 . *Sejam A e B pontos no plano. O vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB. Cada segmento equipolente a AB é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$.*

Figura 10 – Representantes de $\overrightarrow{AB}$.



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

Observação 4.4.1

a) Os segmentos orientados AB e CD são equipolentes se, e somente se, representam o mesmo vetor. Isto é, $AB \equiv CD \Leftrightarrow AB = \overrightarrow{CD}$.

b) Dado um ponto A no plano, o vetor $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{BB}$, qualquer que seja o ponto B no plano.

c) Dado um vetor $\overrightarrow{v}$ e um ponto qualquer C, existe um único ponto D tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$. Isto é, qualquer ponto do plano é origem de um único segmento orientado representante do vetor $\overrightarrow{v}$.

Na prática, os vetores são manipulados através das suas representações em relação a um sistema de eixos ortogonais dado.

Definição 4.4.2 . *Dados $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, os números $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$ são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e escrevemos $\overrightarrow{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.*

Note que, se $AB \equiv CD$, então,

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2) = \overrightarrow{CD}.$$

Isto é, as coordenadas de um vetor são calculadas usando qualquer segmento orientado que o represente.

Temos que se $\overrightarrow{v}$ é um vetor e AB é um dos seus representantes, então existe um único ponto P tal que $\overrightarrow{v} \equiv \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$. Assim, se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $P = (x, y)$:

$$AB \equiv OP \Leftrightarrow (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (x - 0, x - 0) = (x, y)$$

Proposição 4.4.1 . *Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano. Para todo vetor $\overrightarrow{v}$ existem um único ponto P tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$. Além disso, as coordenadas do ponto P coincidem com as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$.*

4.4.1 Operações com vetores

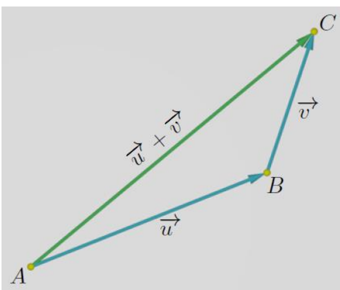
Vamos definir duas operações no conjunto de vetores do plano, uma operação de adição e uma operação de multiplicação de vetores por números reais.

Definição 4.4.3 . *A operação de adição de vetores que a cada par de vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ associa um novo vetor, designado $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e chamado soma dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, como indicado na Figura 11, se define como segue:*

Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, seja C o único ponto tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$. O vetor soma de $\overrightarrow{u}$ com $\overrightarrow{v}$ é o vetor $\overrightarrow{AC}$ é

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}.$$

Figura 11 – Adição $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

Proposição 4.4.2 . *Sejam $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ vetores do plano expressos em termos de coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais fixo OXY, então,*

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Demonstração 4.4.1 . *Sejam* $P = (u_1, u_2)$ *e* $Q = (v_1, v_2)$ *tais que* $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ *e* $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$. *Seja* $S = (w_1, w_2)$ *o ponto tal que* $\vec{v} = \overrightarrow{PS}$.

Obtemos:

$$(v_1 - 0, v_2 - 0) = (w_1 - u_1, w_2 - u_2).$$

Logo,

$$S = (w_1, w_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

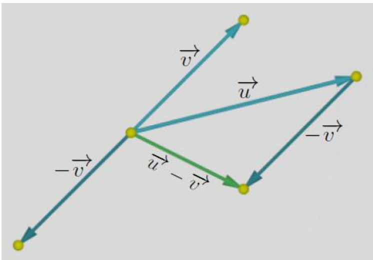
Portanto,

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OS} = (u_1 + u_2, v_1 + v_2).$$

Observação 4.4.2 . *O vetor diferença de* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *é o vetor* $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$, *como indicado na Figura 12. Se* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *e* $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, *então,*

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}.$$

Figura 12 – Diferença $\vec{u} - \vec{v}$**.**



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

Outra operação que definiremos no conjunto de vetores do plano é a operação de multiplicação de vetores por escalares, que a cada vetor $\vec{v}$ e a cada número real $\lambda \in \mathbb{R}$ (também chamado escalar) associa o vetor $\lambda\vec{v}$, chamado produto do escalar λ pelo vetor $\vec{v}$.

Definição 4.4.4 . *O produto de* $\lambda \in \mathbb{R}$ *por* $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ *é o vetor* $\lambda\vec{v} = \lambda\overrightarrow{AB}$, *representado pelo segmento orientado* AC, *tal que:*

a) A, B *e* C *são colineares;*

b) $d(A, C) = |\lambda| d(A, B)$*;*

c) $B = C$ *se* $\lambda = 0$*;*

d) Os segmentos AC *e* AB *têm igual sentido se* $\lambda > 0$, *e sentido opostos se* $\lambda < 0$.

A operação de multiplicar um vetor por um escalar é efetuada usando coordenadas. Vejamos que as coordenadas do vetor $\lambda\vec{v}$ são obtidas das coordenadas de $\vec{v}$ multiplicando pelo escalar λ.

Proposição 4.4.3 . *Sejam* $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *então,* $\lambda\vec{AB} = \vec{AC}$*, onde* $C = (a_1 + \lambda(b_1 - a_1), a_2 + \lambda(b_2 - a_2))$*. Consequentemente,*

$$\lambda\overrightarrow{AB} = (\lambda(b_1 - a_1), \lambda(b_2 - a_2)).$$

Demonstração 4.4.2 . *Seja* $C = (a_1 + \lambda(b_1 - a_1), a_2 + \lambda(b_2 - a_2))$*. É claro que, se* $\lambda = 0$*, então* $C = B$ *e pela Definição 4.4.4, verifica-se que:*

$$\begin{aligned} d(A,C) &= \sqrt{\lambda^2(b_1 - a_1)^2 + \lambda^2(b_2 - a_2)^2} \\ &= |\lambda|\sqrt{(b_1 - a_1)^2(b_2 - a_2)^2} = |\lambda| d(A,B). \end{aligned}$$

Para verificar que os pontos A*,* B *e* C *são colineares, no caso* $\lambda \neq 0$*, começamos observando que:*

$$\begin{aligned} d(B,C) &= \sqrt{((a_1 + \lambda(b_1 - a_1)) - b_1)^2 + ((a_2 + \lambda(b_2 - a_2)) - b_2)^2} \\ &= \sqrt{(\lambda(b_1 - a_1) - (b_1 - a_1))^2 + (\lambda(b_2 - a_2) - (b_2 - a_2))^2} \\ &= \sqrt{(\lambda - 1)^2(b_1 - a_1)^2 + (\lambda - 1)^2(b_2 - a_2)^2} \\ &= |\lambda - 1|\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = |\lambda - 1| d(A,B). \end{aligned}$$

Analisamos os seguintes quatro casos:

Caso 1. $\lambda \in (0,1)$*. Temos* $|\lambda - 1| = 1 - \lambda$ *e:*

$d(A,C) + d(C,B) = \lambda d(A,B) + (1 - \lambda)d(A,B) = d(A,B)$.

Logo, A*,* B *e* C *são colineares e* C *está entre* A *e* B*.*

Caso 2. $\lambda = 1$*. Neste caso,* $C = B$*.*

Caso 3. $\lambda > 1$*. Temos* $|\lambda - 1| = \lambda - 1$ *e:*

$d(A,B) + d(B,C) = d(A,B) + (\lambda - 1)d(A,B) = \lambda d(A,B) = d(A,C)$.

Assim, A*,* B *e* C *são colineares e* B *está entre* A *e* C*.*

Caso 4. $\lambda < 0$*. Como* $|\lambda| = -\lambda > 0$ *e* $|\lambda - 1| = (1 - \lambda)$*, temos:*

$d(C,A) + d(A,B) = -\lambda d(A,B) + d(A,B) = (1 - \lambda)d(A,B) = d(C,B)$,

logo, C*,* A *e* B *são colineares e* A *está entre* C *e* B*.*

Pelo provado acima, as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ coincidem quando $\lambda > 0$, e são opostas quando $\lambda < 0$. Portanto, AB e AC têm o mesmo sentido se $\lambda > 0$ e sentidos opostos se $\lambda < 0$.

Proposição 4.4.4 . *Um ponto* P *pertence à reta* r *que passa pelos pontos* A *e* B *se, e somente se, para algum* $\lambda \in \mathbb{R}$*:*

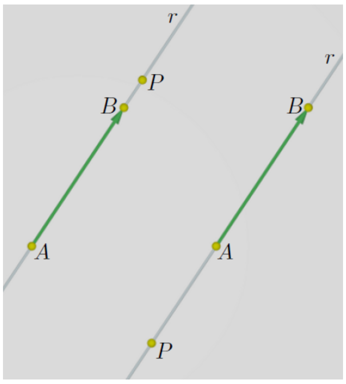
$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}.$$

Demonstração 4.4.3 . *Pela definição da multiplicação de $\lambda \in \mathbb{R}$ pelo vetor $\overrightarrow{AB}$, o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ pertence à reta r.*

Reciprocamente, seja P um ponto pertencente à reta r e seja $\mu = \dfrac{d(A,P)}{d(A,B)}$.

Observando a Figura 13, se o sentido de percurso de A para P coincidir com o sentido de A para B, então $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = \mu$, pois o ponto P é o único ponto da semirreta de origem em A que passa por B tal que $d(A,P) = \mu d(A,B)$. Se o sentido de percurso, ao longo de r, de A para P, for oposto ao sentido de A para B, então $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = -\mu$, pois o ponto P é o único ponto da semirreta de origem A oposta à semirreta de origem A que passa por B tal que $d(A,P) = \mu d(A,B)$.

Figura 13 – Sentido de percurso de A para B.



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

4.4.2 Produto interno

Existe outra operação entre vetores denominada de produto interno ou produto escalar, que associa a cada par de vetores um escalar. Para definir geometricamente o produto interno, é fundamental abordar dois conceitos preliminares, a noção de norma de um vetor e a noção de ângulo entre dois vetores.

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano.

Definição 4.4.5 . *A norma ou comprimento do vetor $\overrightarrow{v}$ é o número $\|\overrightarrow{v}\|$ dado pelo comprimento de um segmento representante de $\overrightarrow{v}$.*

Observação 4.4.3

a) A norma de um vetor independe da escolha do segmento representante.
   Com efeito, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ então $AB \equiv CD$ e, portanto,

$$d(A,B) = d(C,D) = \|\overrightarrow{v}\|.$$

b) Se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, então

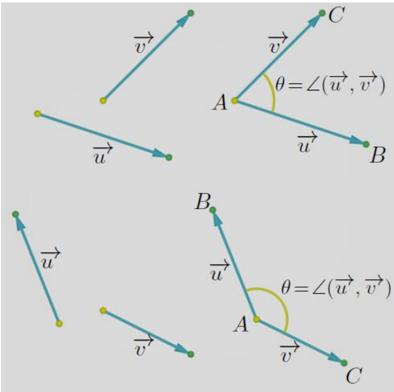
$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

c) Se $P = (x, y)$ é o ponto tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$, então

$$\| \overrightarrow{v} \| = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definição 4.4.6 . *Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores não nulos no plano. Definimos o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ como sendo o menor ângulo entre os segmentos AB e AC representantes de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, respectivamente. Designamos $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ a medida do ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ como mostra a Figura 14.*

Figura 14 – Ângulo entre dois vetores.



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

Observação 4.4.4

a) Medimos os ângulos em radianos ou em graus, onde $\pi \ radianos = 180°$.

b) note que $0 \leqslant \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \leqslant \pi$, equivalentemente, $0° \leqslant \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \leqslant 180°$.

c) Tem-se: $\begin{cases} \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), & \\ \angle(\lambda \overrightarrow{u}, \mu \overrightarrow{v}) = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), & \text{se} \quad \lambda\, \mu > 0. \\ \angle(\lambda \overrightarrow{u}, \mu \overrightarrow{v}) = \pi - \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), & \text{se} \quad \lambda\, \mu < 0. \end{cases}$

Definição 4.4.7 . *O produto interno dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ do plano é o número real $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$, definido da seguinte maneira:*

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \begin{cases} 0, & \textit{se} \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \; \textit{ou} \; \overrightarrow{v} = 0; \\ \| \overrightarrow{u} \| \, \| \overrightarrow{v} \| \cos\,\theta, & \textit{se} \quad \overrightarrow{u} \neq 0, \overrightarrow{v} \neq 0 \; \textit{e} \; \theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}). \end{cases}$$

Na seguinte proposição calcularemos o produto interno entre dois vetores através de suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais.

Proposição 4.4.5 . *Sejam $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$ dois vetores no plano. Então,*

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = a\,\alpha + b\,\beta.$$

Demonstração 4.4.4 . *Se algum dos vetores* $\vec{u}$ *ou* $\vec{v}$ *é nulo, temos* $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ *e, também,* $a\,\alpha + b\,\beta = 0$*. Logo, a identidade é satisfeita.*

Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ *e* $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ *vetores não nulos, com* $P = (a, b)$ *e* $Q = (\alpha, \beta)$*.*

Então,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= \vec{v} - \vec{u} \\ &= (\alpha - a, \beta - b). \end{aligned}$$

Seja $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$*.*

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo $\triangle OPQ$*, obtemos:*

$$\| \vec{v} - \vec{u} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v}^2 - 2\| \vec{u} \| \, \| \vec{v} \| \cos\ \theta.$$

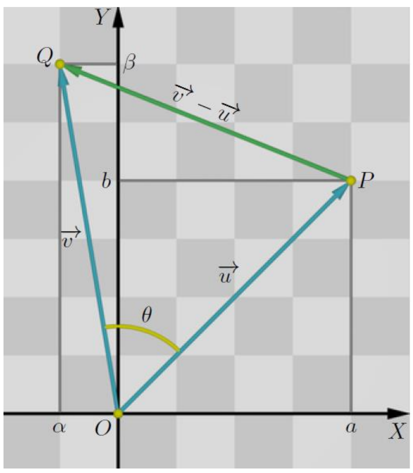
Daí,

$$\begin{aligned} 2\| \vec{u} \| \, \| \vec{v} \| \cos\ \theta &= \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v}^2 - \| \vec{v} - \vec{u} \|^2 \\ &= (a^2 + b^2) + (\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha a + a^2 + \beta^2 - 2\beta b + b^2) \\ &= a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha a - a^2 - \beta^2 + 2\beta b - b^2 \\ &= 2\alpha a + 2\beta b = 2(a\alpha + b\beta). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \| \vec{u} \| \, \| \vec{v} \| \cos\ \theta = a\alpha + b\beta.$$

Figura 15 – Diferença $\vec{v} - \vec{u}$**.**



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

A proposição anterior nos permite medir o ângulo entre dois vetores sabendo apenas suas coordenadas como ilustra a Figura 15.

Definição 4.4.8 . *O vetor $\overrightarrow{u}$ é perpendicular ou ortogonal ao vetor $\overrightarrow{v}$, e escrevemos $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 90°$.*

Os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são ortogonais quando são unitários e ortogonais.

Note que $\overrightarrow{u}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v}$ se, e somente se, $\overrightarrow{v}$ é perpendicular a $\overrightarrow{u}$.

A seguinte proposição é um critério para a perpendicularidade em termos do produto interno.

Proposição 4.4.6 . *Dois vetores são perpendiculares se, e somente se, o seu produto interno é zero.*

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$$

Demonstração 4.4.5 . *Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ e, também, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.*

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ e $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, então,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}|| \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 90°.$$

4.5 EQUAÇÃO DA RETA NO PLANO

Um dos objetivos da Geometria Analítica é obter equações associadas a conjuntos de pontos, estabelecendo assim uma relação entre a Geometria e a Álgebra.

4.5.1 Equação paramétrica da reta

Começaremos nosso estudo algébrico sobre retas no plano com a equação paramétrica da reta. Neste tipo de equação as coordenadas dos pontos pertencentes a uma reta são dadas por expressões do primeiro grau em função de um parâmetro real. Ao variar o valor do parâmetro, encontramos distintos pontos da reta, ou seja, a cada ponto da reta está associado um único parâmetro. Para fins didáticos, dividiremos as equações paramétricas da reta em dois casos: reta que passa por dois pontos e reta que contém um ponto e é paralela a um vetor.

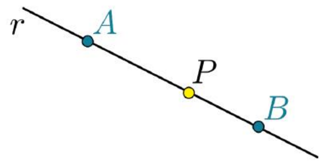
1º Caso: Reta r que passa pelos pontos A e B.

Seja r a reta que passa pelos pontos A e B e seja P um ponto do plano como mostra a Figura 16. Então, pela Proposição 4.4.4, o ponto P pertence à reta r se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$ é múltiplo do vetor $\overrightarrow{AB}$. Isto é, $P \in \mathbb{R}$ se, e somente se, existe um número $t \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AB}}$$

Note que o número t é determinado de forma única pelo ponto P e é chamado de **parâmetro** de P em r.

Figura 16 – Ponto P pertence a r.



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

Assim, para atingir o ponto P na reta r, devemos ir até o ponto A e nos deslocarmos ao longo da reta por $t\ \overrightarrow{AB}$. Escrevemos, então, a equação que determina o ponto P "pela variação do parâmetro t"da seguinte forma,

$$\boxed{r : P = A + t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R}}$$

Esta equação é chamada **equação paramétrica** da reta r.

Se $A = (a, b)$, $B = (a', b')$ e $P = (x, y)$ são as coordenadas dos pontos num sistema de coordenadas dado, então,

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in r \quad &\Longleftrightarrow \quad (x, y) = (a, b) + t(a' - a, b' - b) \text{ para algum } t \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = a + t(a' - a) \\ y = b + t(b' - b) \end{cases} \text{para algum t} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

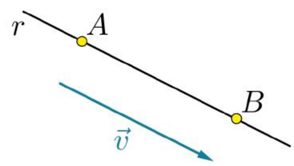
Dizemos que as equações

$$\boxed{r : \begin{cases} x = a + t(a' - a) \\ y = b + t(b' - b) \end{cases} ; \quad \text{t} \in \ \mathbb{R}}$$

são as **equações paramétricas** da reta r.

Definição 4.5.1 . *Dizemos que um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ é paralelo a uma reta r quando, para quaisquer dois pontos $A, B \in r$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é múltiplo do vetor $\overrightarrow{v}$. Nesse caso, escrevemos $\overrightarrow{v} \parallel r$ como representado na Figura 17.*

Figura 17 – Vetor direção da reta r.



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

Um vetor $\overrightarrow{v}$ paralelo a uma reta r é chamado **vetor direção** de r.

Note que se tomarmos dois pontos C e D pertencentes à reta r que passa pelos pontos A e B, então existem $s \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\overrightarrow{AC} = s\,\overrightarrow{AB} \text{ e } \overrightarrow{AD} = t\,\overrightarrow{AB}.$$

Logo,
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = t\,\overrightarrow{AB} - s\,\overrightarrow{AB} = (t-s)\overrightarrow{AB}.$
Assim, existe um $\lambda = t - s \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\overrightarrow{CD} = \lambda\,\overrightarrow{AB},$$

ou seja, dois vetores determinados por pontos pertencentes a uma mesma reta são sempre múltiplos ou paralelos.

2º Caso: Reta r que passa pelo ponto A e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} \neq 0$.
Se r é a reta que passa pelo ponto A e tem direção $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, temos,

$$\begin{aligned} P \in r \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} \text{ é múltiplo de } \overrightarrow{v} \\ &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{v}, \text{para algum } t \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow \quad P = A + t\,\overrightarrow{v}, \text{para algum } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, a equação paramétrica de r é:

$$\boxed{r : P = A + t\overrightarrow{v}, t \in \mathbb{R}}$$

Escrevendo esta equação em coordenadas, temos que se $A = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$, então as equações paramétricas de r, neste caso, são:

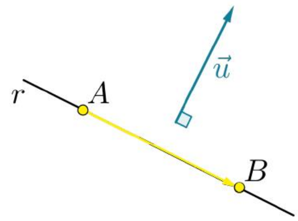
$$\boxed{r : \begin{cases} x = a + \alpha\, t \\ \\ y = b + \beta\, t \end{cases} \; ; \quad t \in \mathbb{R}}$$

4.6 EQUAÇÃO CARTESIANA DA RETA

Nesta seção, vamos utilizar o produto interno para caracterizar algebricamente uma reta normal ou perpendicular a uma direção dada. Desta forma apresentaremos o segundo tipo de equação da reta, a **equação cartesiana**.

Definição 4.6.1 . *Um vetor $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ é* **normal** *ou* **perpendicular** *a uma reta r se $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB}$, quaisquer que sejam os pontos $A, B \in r$.*

Figura 18 – Vetor normal à reta r.



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$ e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{u} = (a, b) \neq \overrightarrow{0}$ como ilustra a Figura 18. Então,

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in r &\iff \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{u} \\ &\iff \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \\ &\iff \langle (x - x_0, y - y_0), (a, b) \rangle = 0 \\ &\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\ &\iff ax + by = ax_0 + by_0 \\ &\iff ax + by = c, \text{ onde } c = ax_0 + by_0. \end{aligned}$$

A equação dada por,

$$\boxed{r : ax + by = c}$$

é chamada **equação cartesiana** *da reta r.*

Diferente das equações paramétricas, neste caso, as coordenadas dos pontos pertencentes à reta se relacionam através de uma única equação. Nesta equação, observamos que os coeficientes a e b de x e y, respectivamente, são as coordenadas do vetor normal $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e que o valor de c é determinado quando se conhece um ponto de r, no caso, o ponto $A = (x_0, y_0)$. Observe também que a e b não podem ser ambos iguais à zero, pois $\overrightarrow{u} = (a, b)$ é um vetor não nulo.

4.7 EQUAÇÃO AFIM OU REDUZIDA DA RETA

Nesta seção estudaremos o terceiro tipo de equação de reta no plano, a **equação afim**.

Considere uma reta $r : ax + by = c$ dada por sua equação cartesiana, onde $\overrightarrow{u} = (a, b) \neq (0, 0)$ é um vetor normal a r.

Vamos verificar que r pode ser reescrita das seguintes formas:

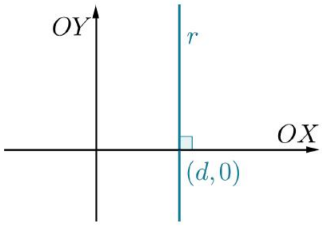
- Se $b = 0$, então um ponto $(x, y) \in r$ se, e somente se, $x = \dfrac{c}{a}$. Ou seja,

$$r = \{(d, y); y \in \mathbb{R}\},$$

onde $d = \dfrac{c}{a}$ (observe que $a \neq 0$).

Uma reta do tipo $r : x = d$ é dita vertical pois, neste caso, r é paralela ao eixo OY ou coincidente com este eixo como representa a Figura 19.

Figura 19 – r é vertical e sua equação é $x = d$.



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

- Se $b \neq 0$, isto é, r é não vertical, então o ponto $(x, y) \in r$ se, e somente se,

$$by = -ax + c \iff y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Ou seja,

$$r = \{(x, mx + n); x \in \mathbb{R}\},$$

onde $m = -\dfrac{a}{b}$ e $n = \dfrac{c}{b}$.

Uma equação do tipo $y = mx + n$ é chamada **equação afim ou reduzida da reta** r.

Provamos assim que toda reta r não vertical se representa por uma equação do 1º grau da forma $y = mx + n$, onde:

- n é a ordenada do ponto onde r intersecta o eixo $-OY$. Se $n = 0$, então r passa pela origem.

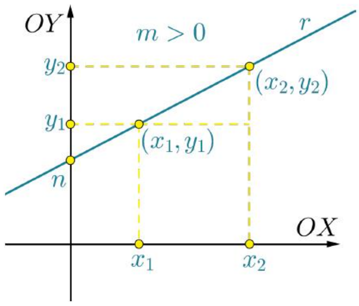
- m é a razão entre o acréscimo de y e o acréscimo de x quando se passa de um ponto a outro sobre a reta. De fato, se $x_0 \neq x_1$, $y_0 = mx_0 + n$ e $y_1 = mx_1 + n$, então,

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(mx_1 + n) - (mx_0 + n)}{x_1 - x_0} = \frac{m(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = m.$$

- O número m chama-se **inclinação ou coeficiente angular da reta** $r : y = mx + n$. Além disso,

  ◇ Se $m > 0$, a função $y = mx + n$ é **crescente**, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 = mx_1 + n < y_2 = mx_2 + n$ como mostra a Figura 20.

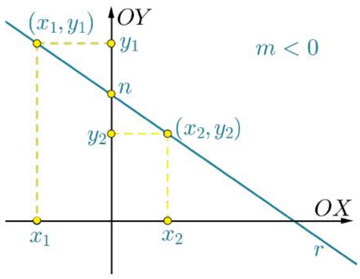
Figura 20 – Para $m > 0$, $y = mx + n$ é crescente.



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

◇ Se $m < 0$, a função $y = mx + n$ é **decrescente**, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 = mx_1 + n > y_2 = mx_2 + n$ como representa a Figura 21.

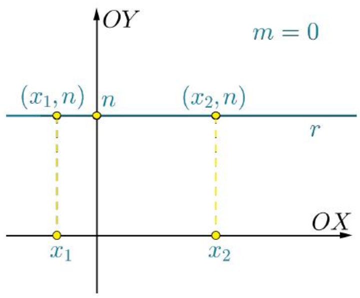
Figura 21 – Para $m < 0$, $y = mx + n$ é decrescente.



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

◇ Se $m = 0$, a função $y = mx + n$ é **constante**, pois $y = n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que $r : y = n$ é uma **reta horizontal** como ilustra a Figura 22.

Figura 22 – Para $m = 0$, $y = mx + n$ é constante.



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

- Seja θ o ângulo que a reta $r : y = mx + n$ faz com o semieixo OX positivo. Então,

$$\boxed{\tan\ \theta = m}$$

4.8 DISTÂNCIA DE UM PONTO A UMA RETA

Dados um ponto P e uma reta r no plano, como visto, é possível calcular a distância de P a cada ponto $P' \in r$. Agora vamos calcular a distância de P à reta r.

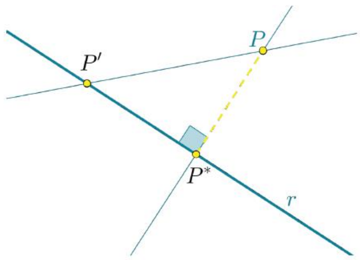
Definição 4.8.1 . *Definimos a* **distância**, $d(P, r)$, *do ponto* P *à reta* r *por*

$$\boxed{d(P, r) = min\{d(P, P')|P' \in r\}}$$

Dizemos que um ponto $P* \in r$ **realiza a distância** *de* P *à reta* r, *se*

$$d(P, P*) \leqslant d(P, P'), \text{ para todo } P' \in r.$$

Figura 23 – $P*$ realiza a distância de P à reta r.



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

Usando o **teorema de Pitágoras** é fácil verificar que o ponto P^* que realiza a distância do ponto P à reta r é o **pé da perpendicular a r que passa pelo ponto P** como representa a Figura 23.

Assim,

$$d(P, r) = min\{d(P, P')|P' \in r\} = d(P, P^*).$$

Teorema 4.8.1 . *Sejam* $r : ax + by = c$ *uma reta e* $P = (x_0, y_0)$ *um ponto no plano. Então a distância de* P *a* r *é dada por*

$$\boxed{d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

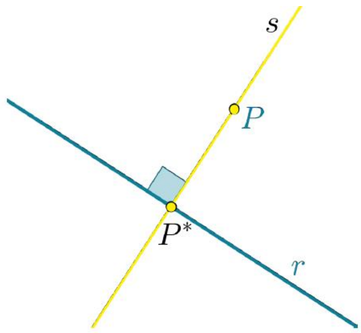
Demonstração 4.8.1 . *Seja* s *a reta perpendicular à reta* $r : ax + by = c$ *que passa pelo ponto* $P = (x_0, y_0)$.

Como $\overrightarrow{u} = (a, b) \perp r$, *temos que* $\overrightarrow{u} \parallel s$. *Logo,*

$$s : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

são as equações paramétricas de s.

Figura 24 – Demonstração do teorema.



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

Seja P^* o pé da perpendicular a r que passa por P, ou seja, $\{P^*\} = r \bigcap s$ como mostra a Figura 24. Então, $P^* = (x_0 + at^*, y_0 + bt^*)$, para algum $t^* \in \mathbb{R}$, e

$$\begin{aligned} & a(x_0 + at^*) + b(y_0 + bt^*) = c \\ \Longleftrightarrow \quad & (a^2 + b^2)t^* + ax_0 + by_0 = c \\ \Longleftrightarrow \quad & t^* = \frac{c - (ax_0 + by_0)}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Como $d(P, r) = d(P, P^*) = ||\overrightarrow{PP^*}||$ e $\overrightarrow{PP^*} = (a, b)t^*$, temos:

$$\begin{aligned} d(P, r) &= |t^*|.||(a, b)|| \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

4.9 POLÍGONOS NO PLANO

Nesta seção abordaremos o cálculo da área de polígonos em função das coordenadas de seus vértices, utilizando a decomposição do polígono em triângulos. Para tanto, apresentaremos algumas definições da Geometria Plana sobre polígonos.

Definição 4.9.1 . *Dada uma sequência de pontos de um plano $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ com $n \geq 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_{n-1}, A_n e A_1, assim como A_n, A_1 e A_2, chama-se polígono à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$.*

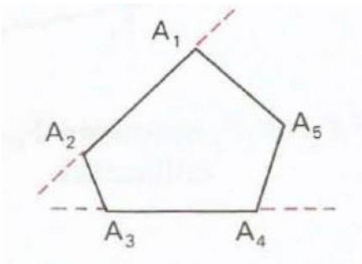
Considerando o polígono $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$, temos que os pontos A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n são os vértices do polígono, os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$ são os lados do polígono e os ângulos $\hat{A}_1 = A_n\hat{A}_1A_2$, $\hat{A}_2 = A_1\hat{A}_2A_3$, ..., $\hat{A}_n = A_{n-1}\hat{A}_nA_1$ são os ângulos do polígono.

Definição 4.9.2 . *Sejam $n \geq 3$ um natural e $A_1, A_2, ..., A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1A_2A_3...A_n$ é um* **polígono convexo** *se, para $1 \leq i \leq n$, a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina.*

Um polígono é convexo se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais $(n-2)$ vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina como apresenta a Figura 25.

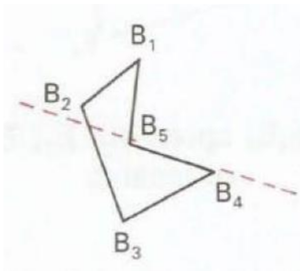
Se um polígono não é polígono convexo, diremos que ele é um polígono côncavo assim como ilustra a Figura 26.

Figura 25 – $A_1A_2A_3A_4A_5$ é um polígono convexo.



Fonte: Dolce e Pompeo (1993).

Figura 26 – $B_1B_2B_3B_4B_5$ é um polígono côncavo.



Fonte: Dolce e Pompeo (1993).

4.10 CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO ENTRE TRÊS PONTOS

Pela Geometria Plana, pontos *colineares* são pontos que pertencem a uma mesma reta como apresenta a Figura 27 ou são *não colineares* quando um dos pontos não pertece a uma mesma reta como ilustra a Figura 28.

Figura 27 – Os ponto A, B eC são colineares.

Fonte: Dolce e Pompeo (1993).

Figura 28 – Os pontos R, S e T não são colineares.

Fonte: Dolce e Pompeo (1993).

Segundo a Geometria Analítica, se A, B e C são pontos distintos do plano, então $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ se, e somente se, A, B e C são colineares.

A seguinte proposição fornece um critério para determinar quando um vetor é múltiplo de outro.

Proposição 4.10.1 . *Um dos vetores $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (a', b')$ é múltiplo do outro se, e somente se,*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} = ab' - ba' = 0 \tag{1}$$

Demonstração 4.10.1 . *Se* $\overrightarrow{u} = \lambda\,\overrightarrow{u}$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{R}$, *temos:*

$$(a', b') = \lambda(a, b) = (\lambda\, a, \lambda\, b)' = \lambda\, a \text{ e } b' = \lambda\, b.$$

Logo, $ab' - ba' = a(\lambda\, b) - b(\lambda\, a) = 0$

Suponhamos que $ab' - ba' = 0$. *Consideremos separadamente os casos* $a \neq 0$ *e* $a = 0$.

Caso $a \neq 0$**:** $ab' - ba' = 0 \implies b' = b\,\dfrac{a'}{a}$. *Logo:*

$$\frac{a'}{a}\overrightarrow{u} = \frac{a'}{a}(a, b) = (\frac{a'}{a}a, \frac{a'}{a}b) = (a', b') = \overrightarrow{v}.$$

Caso $a = 0$**:** $ba' = 0 \implies b = 0$ *ou* $a' = 0$. *Logo:*

$$= \begin{cases} b = 0 \implies \overrightarrow{u} = (0, 0) = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{u} = 0\overrightarrow{v} \\ a' = 0 \text{ e } b \neq 0 \implies (0, b') = \dfrac{b'}{b}(0, b) \implies \overrightarrow{v} = \dfrac{b'}{b}\overrightarrow{u} \end{cases}$$

Em qualquer caso, um dos vetores é múltiplo do outro.

Segue uma proposição, usando determinante, que identificará quando três pontos quaisquer representados em um sistema de coordenadas são colineares ou não.

Proposição 4.10.2 . *Três pontos* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ *e* $C(x_3, y_3)$ *são colineares se, e somente se, suas coordenadas verificam a igualdade:*

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) \tag{2}$$

Demonstração 4.10.2

Se A, B e C são colineares, então $(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$. Pode ocorrer uma das seguintes três situações:

1. Dois dos pontos coincidem $A = B$, por exemplo. Neste caso,

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = 0.(y_3 - y_2) = 0$$

$$(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = (x_3 - x_2).0 = 0$$

2. Os três pontos são distintos e pertencem a uma reta paralela a um dos eixos, paralela ao eixo OX, por exemplo. Neste caso $y_1 = y_2 = y_3$ e daí:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_2 - x_1).0 = 0$$

$$(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = (x_3 - x_2).0 = 0.$$

3. Os três pontos são distintos e pertencem a uma reta não paralela a OX nem a OY. Neste caso, seja r a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, temos:

$$r = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} \text{ e } r = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

e daí $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$ e decorre que:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$$

Por outro lado, se $(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$, então A, B e C são colineares. Pode ocorrer uma das seguintes três situações:

1. $x_3 - x_2 = 0$, ou seja, $x_2 = x_3$. Neste caso, a hipótese fica sendo $(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = 0$ e então,

$$x_2 - x_1 = 0 \text{ ou } y_3 - y_2 = 0$$

Se $x_2 - x_1 = 0$, resulta $x_1 = x_2 = x_3$ e então A, B, C ficam colineares por pertencerem à mesma reta paralela ao eixo OY.
Se $x_3 - y_2 = 0$, resulta $x_2 = x_3$ e $y_2 - y_3$ e então A, B, C ficam colineares porque B e C coincidem.

2. $y_2 - y_1 = 0$, ou seja, $y_1 = y_2$. Neste caso, a hipótese fica sendo $(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = 0$ e então,

$$x_2 - x_1 = 0 \text{ ou } y_3 - y_2 = 0$$

Se $x_2 - x_1 = 0$, resulta $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ e então A, B, C ficam colineares porque A e C coincidem.
Se $y_3 - y_2 = 0$, resulta $y_1 = y_2 = y_3$ e então A, B, C ficam colineares por pertencerem à mesma reta paralela ao eixo OX.

3. $x_3 - x_2 \neq 0$ e $y_2 - y_1 \neq 0$. Neste caso, resulta da hipótese que,

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) \neq 0 \tag{3}$$

e daí vem,

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} \tag{4}$$

Então os triângulos ABD e BCE são retângulos e têm lados proporcionais, logo são semelhantes. Por isso temos $\alpha = \beta$ e resulta que os pontos A, B, C estão alinhados.

A condição para o alinhamento de três pontos,

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) \tag{5}$$

pode ser expressa de outra forma mais simples de memorizar. Vejamos:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = 0$$

$$x_2y_3 - x_2y_2 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_3y_2 + x_3y_1 + x_2y_2 - x_2y_1 = 0$$

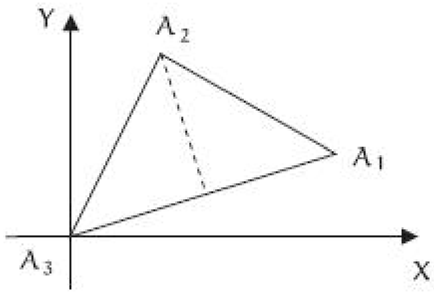
$$x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + (x_2y_3 - x_3y_2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

4.11 ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Consideremos inicialmente um triângulo $A_1A_2A_3$ do qual o vértice $A_3 = (0, 0)$ é a origem como mostra a Figura 29. Sejam $A_1 = (a_1, b_1)$ e $A_2 = (a_2, b_2)$. A numeração dos vértices foi feita de modo em que o lado A_1A_3 não é vertical, isto é, $a_1 \neq 0$.

Figura 29 – A altura é a distância do vértice à base.



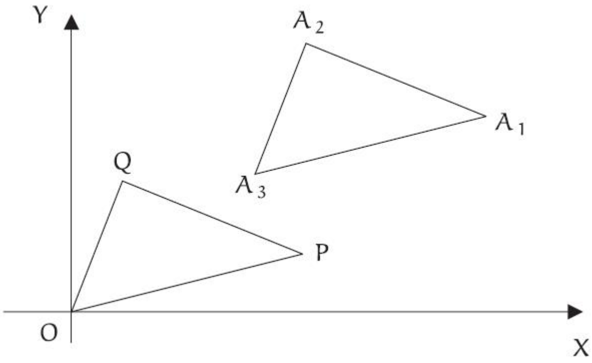
Fonte: Lima (2014).

Seja A_1A_3 a base do triângulo. Assim, a distância de A_2 até a reta A_1A_3 é a sua altura. Como a equação da reta A_1A_3 é $b_1x - a_1y = 0$, temos:

$$\text{Área}(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\frac{|b_1a_2 - a_1b_2|}{\sqrt{b_1^2 + (-a_1)^2}} = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|. \tag{7}$$

No caso geral, temos um triângulo $A_1A_2A_3$ onde os vértices $A_1 = (a_1, b_1)$, $A_2 = (a_2, b_2)$ e $A_3 = (a_3, b_3)$ são pontos quaisquer. A partir da origem O, traçamos os seguimentos OP e OQ, respectivamente equipolentes a A_3A_1 e A_3A_2, logo $P = (\alpha_1, \beta_1)$ e $Q = (\alpha_2, \beta_2)$, com $\alpha_1 = a_1 - a_3$, $\beta_1 = b_1 - b_3$, $\alpha_2 = a_2 - a_3$, $\beta_2 = b_2 - b_3$ como ilustra a Figura 30.

Figura 30 – Uma translação leva o triângulo $A_1A_2A_3$ para a posição PQO.



Fonte: Lima (2014).

Então,

$$\text{Área}(A_1A_2A_3) = \text{Área}(OPQ) = \frac{1}{2}|\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1|. \tag{8}$$

Ou seja,

$$\text{Área}(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2}|(a_1 - a_3)(b_2 - b_3) - (a_2 - a_3)(b_1 - b_3)|. \tag{9}$$

4.12 ÁREA DE UM POLÍGONO CONVEXO

Conhecida a área do triângulo, podemos utilizá-la para obter a área de um polígono qualquer, dividindo-o em triângulos, figura cuja área sabemos calcular. A área do polígono que se encontra será a soma das áreas dos triângulos em que este foi dividido.

Proposição 4.12.1 . *Um polígono convexo $A_1A_2A_3...A_n$ pode ser decomposto em $n-2$ triângulos.*

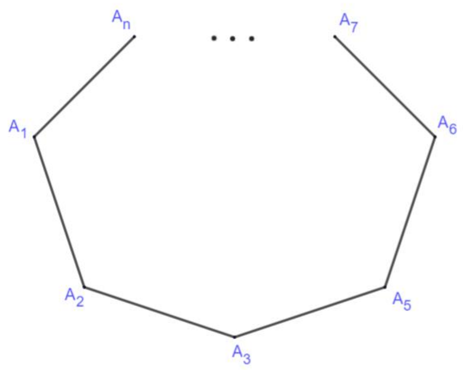
Demonstração 4.12.1 .

Para $n = 3$, não há o que demonstrar.

Para $n = 4$, tem-se os triângulos $A_1A_2A_3$ e $A_1A_3A_4$, ou seja, $2 = 4 - 2$ triângulos.

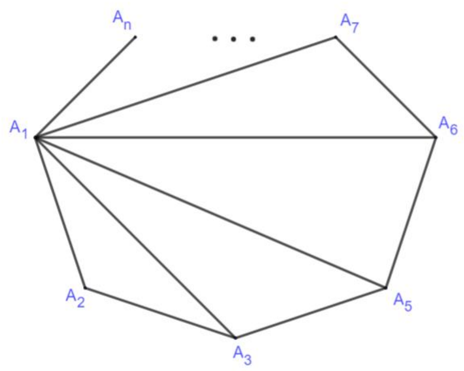
Supondo $n \geq 5$. Unindo o vértice A_1 aos $n-1$ vértices restantes $A_2, A_3, ..., A_n$ obtém-se $n-1$ segmentos; destes, dois são lados A_1A_2 e A_1A_n e os $n-3$ restantes $(A_1A_3, ..., A_1A_{n-1})$ são diagonais. Esse raciocínio é análogo, tomando qualquer outro vértice como referência. Segue que, essas $n-3$ diagonais formarão com os lados $(A_3A_4, ..., A_{n-2}A_{n-1})$, $n-4$ triângulos. Somando com os demais triângulos $A_1A_2A_3$ e $A_1A_{n-1}A_n$, resultará em $n-2$. Provando que um polígono convexo com n lados pode ser decomposto em $n-2$ triângulos.

Figura 31 – Polígono de n lados.



Fonte: Dolce e Pombeo (1993).

Figura 32 – Polígono de n lados dividido em $n-2$ triângulos.



Fonte: Dolce e Pombeo (1993).

Como visto, um polígono convexo pode ser decomposto em triângulos. Sendo assim, a estratégia para calcular sua área é somar todas as áreas dos triângulos resultantes da decomposição como representa a Figura 31 e a Figura 32.

Logo, a área do polígono é dada por:

$$\text{Área}(A_1A_2A_3...A_n) = \text{Área}(A_1A_2A_3) + \text{Área}(A_1A_3A_4) + \text{Área}(A_1A_4A_5) + ... + \text{Área}(A_1A_{n-1}A_n) \quad (10)$$

Com isso, podemos calcular a área de qualquer polígono convexo.

5 TECNOLOGIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA: O SOFTWARE GEOGEBRA

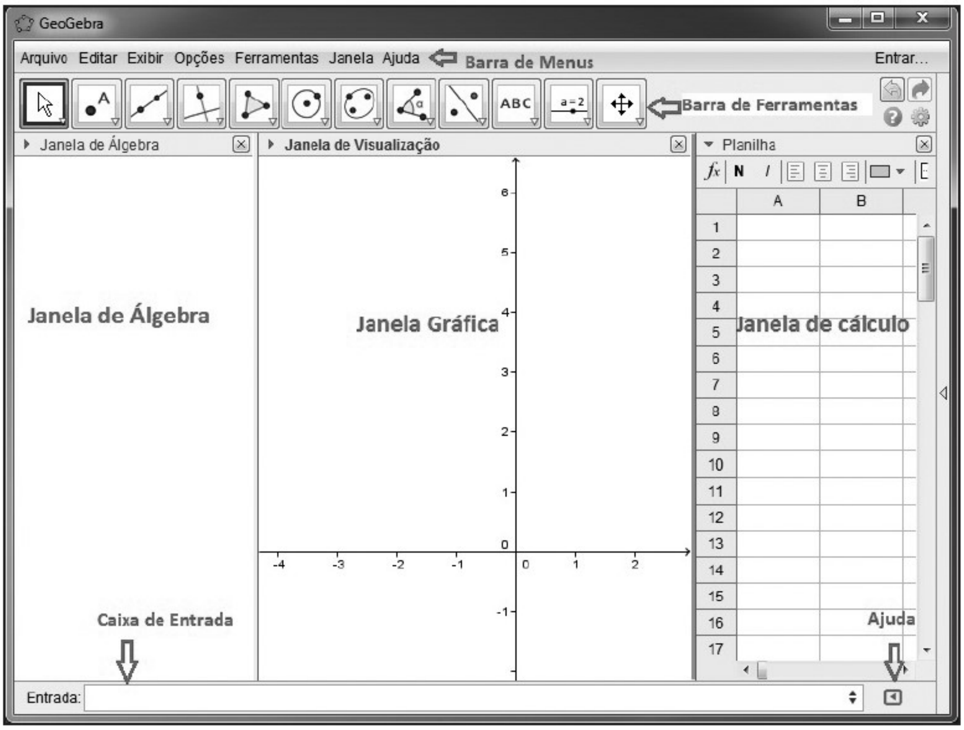
Este capítulo apresenta uma análise introdutória do Software GeoGebra, voltada para a utilização de componentes da ferramenta que possam ajudar a performance de resoluções de problemas que fundamentam essa investigação, tais como os conceitos aqui apresentados tem como base as referências: Araúro e Nóbriga (2010), Basniak e Estevam (2014), Costa Junior (2012), Antônio Júnior (2015), entre outras obras do gênero.

Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. Por um lado, o GeoGebra possui todas as ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas e seções cônicas. Por outro lado, equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica (VENTAVOLI; BORGES; BORGES).

5.1 CONHECENDO O GEOGEBRA

A Figura 33 apresenta a interface do Geogebra.

Figura 33 – A interface do Software GeoGebra.



Fonte: Basniak e Estevam (2014).

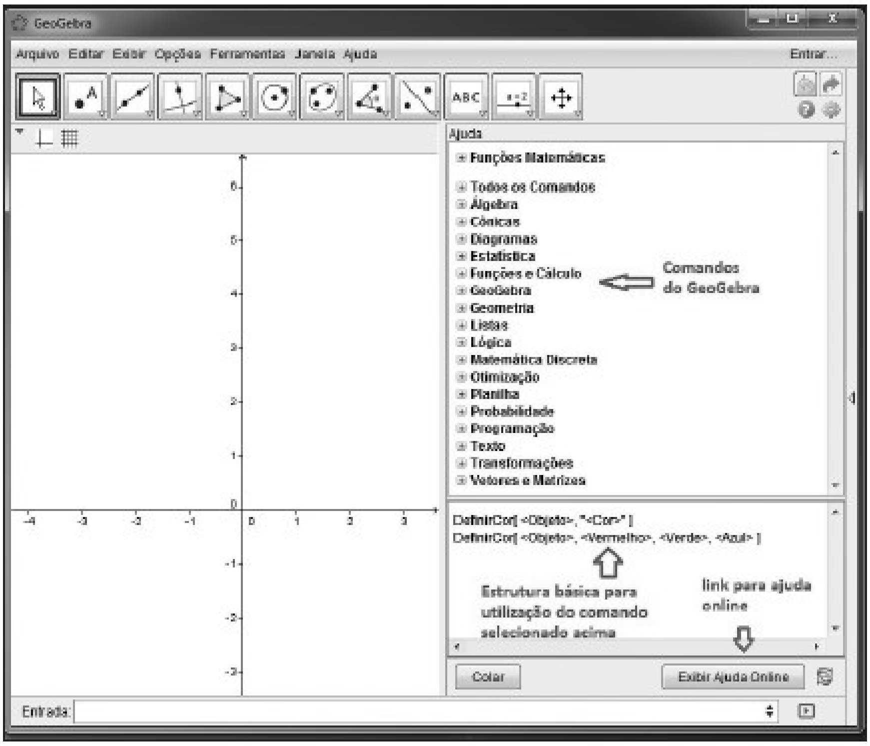
Cada uma das janelas do GeoGebra possibilita diferentes representações de conceitos matemáticos ou formas de explorações, por exemplo, na “Janela Gráfica” ou “Janela de Visualização” podem-se realizar construções geométricas usando apenas o mouse e as ferramentas disponíveis na “Barra de Ferramentas”.

Na “Barra de Ferramentas” estão inúmeras ferramentas para construção de diferentes conceitos geométricos. Cada ícone na barra representa uma caixa de ferramentas que contém um conjunto de ferramentas similares. Para abrir uma dessas caixas de ferramentas, deve-se clicar na pequena flecha situada no canto inferior direito do respectivo ícone. Cada uma das ferramentas pode ser utilizada na janela gráfica, respeitando conceitos matemáticos. Depois de inseridos nesta janela, o GeoGebra converte a construção realizada na forma algébrica e apresenta os resultados na “Janela de Álgebra”.

As mesmas construções criadas utilizando o mouse e as ferramentas podem ser criadas usando a “Caixa de Entrada”. Nesta é possível inserir comandos que, após confirmados com um “Enter”, aparecem na “Janela de Álgebra”. Dependendo da informação digitada também é representada na “Janela Gráfica”, como pontos, funções, etc.

Caso o usuário não conheça os comandos que executam determinadas tarefas, é possível visualizá-los clicando no botão “Ajuda”, localizado no canto inferior direito da tela do GeoGebra como ilustra a Figura 34. Ao clicar nesse ícone é aberta uma lista contendo todos os comandos disponíveis no software e a forma como cada um deve ser usado, além de um link para ajuda online sobre cada um dos comandos nele listado.

Figura 34 – Janela de trabalho do Software GeoGebra.



Fonte: Basniak e Estevam (2014).

O GeoGebra conta ainda com a “Janela de Cálculo”, que é similar às planilhas de cálculos das plataformas Office e BrOffice, respectivamente o “Excel” e o “Calc”. Na “Janela de

Cálculo" do GeoGebra cada célula tem um nome específico que permite identificá-la diretamente e ser utilizada como incógnita nas expressões algébricas. Por exemplo, a célula na coluna A e linha 1 é nomeada A1. Nas células, além dos valores numéricos, podem ser inseridos todo tipo de objetos matemáticos suportados pelo GeoGebra, por exemplo, coordenadas de pontos, expressões, funções e comandos, os quais podem ser plotados na "Janela Gráfica". A janela de cálculos também permite a manipulação de dados e sua posterior análise estatística.

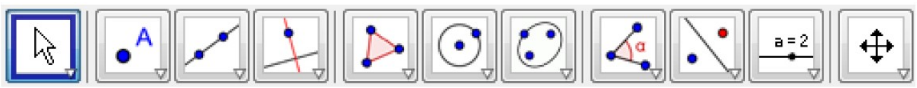
Em se tratando de um software dinâmico, gráficos, álgebra e tabelas são conectados dinamicamente, ou seja, cada elemento que é alterado na janela de álgebra, também sofre alteração na janela gráfica e na de cálculo e vice-versa. Este fato o torna um software com grande potencial para favorecer o processo de ensino e aprendizagem. Por possibilitar o trabalho com diferentes representações e aspectos matemáticos algébricos, geométricos e aritméticos simultaneamente e de forma dinâmica, ele possibilita a elaboração de tarefas exploratórias que proporcionam ao aluno pensar e fazer matemática, de modo a construir e significar ideias matemáticas com certa autonomia, rompendo com o ensino pautado na transmissão de conhecimento.

Contudo, isso envolve necessariamente uma mudança na percepção do professor sobre o processo didático e sobre sua função em meio ao processo de ensino e aprendizagem, já que ele passa a ter a função de estruturar tarefas desafiadoras e que ofereçam as condições para o engajamento do aluno na atividade, enquanto o professor media e provoca esse aluno para que as ideias sejam desencadeadas e articuladas.

5.1.1 A barra de ferramentas do software geogebra

A barra de ferramentas do GeoGebra está dividida em 11 Janelas como a que se apresenta na Figura 35.

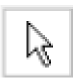
Figura 35 – Barra de ferramentas do Software GeoGebra.



Fonte: Araújo e Nóbriga (2010).

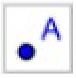
Cada Janela possui várias ferramentas. Para poder visualizar essas ferramentas, basta clicar na parte inferior do ícone. Fazendo isto, o programa abrirá as opções referentes a esta janela.

Apresentamos a seguir as funções de cada uma das 11 ferramentas do software geogebra para a realização das tarefas. As definições aqui apresentadas tem como base a referência (BASNIAK; ESTEVAM, 2014).

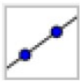


Mover

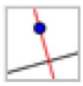
Ferramenta utilizada para arrastar objetos livres. Para isso, clica-se sobre o objeto, segura e arrasta para a posição desejada. Possui a opção de seleção de objetos.

 Novo Ponto

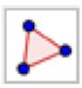
Cria um ponto em um espaço livre, em um objeto ou em uma interseção. No GeoGebra a rotulação é automática, ou seja, ao criar um ponto, automaticamente ele recebe um nome ou rótulo[1]. Essa nomeação se dá usando as letras maiúsculas do nosso alfabeto (A,B,C...). Posteriormente, quando estivermos falando sobre o “CAMPO DE ENTRADA”, você perceberá que existe outra forma de se criar pontos.

 Reta definida por dois pontos

Ativando esta ferramenta, pode-se criar uma reta que passa por dois pontos. Se os pontos já estiverem na área gráfica, basta clicar sobre eles seguidamente. Se os pontos não estiverem na área gráfica, basta criá-los com a ferramenta em questão ativada.

 Reta perpendicular

Com esta ferramenta, pode-se construir uma reta perpendicular a uma reta, semirreta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono. Assim, para se criar uma perpendicular, você deverá clicar sobre um ponto e sobre uma direção (naturalmente representada por qualquer semirreta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono).

 Polígono

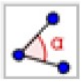
Com esta ferramenta, pode-se construir um polígono de N lados. Ao usar esta ferramenta, deve-se lembrar de que o polígono se fecha com o último clique no primeiro ponto criado.

 Círculo definido pelo centro e um dos seus pontos

Esta ferramenta constrói um círculo a partir de 2 pontos. Em várias situações do livro será solicitada a construção de uma circunferência com centro em algum ponto passando por outro ponto.

 Elipse

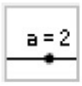
Esta ferramenta constrói uma elipse usando três pontos: dois focos e um terceiro ponto na curva.

 Ângulo

Com esta ferramenta, é possível marcar e medir um ângulo definido por três pontos, onde o segundo ponto clicado é o vértice dele. Você pode também fazer isso, clicando sobre os lados do ângulo. Se o sen-tido dos cliques for anti-horário, o GeoGebra marcará o maior ângulo definido pelos 3 pontos. Se for horário, será construído o menor ângulo.

 Reflexão com relação a uma reta

Esta ferramenta constrói o reflexo (simetria axial) de um objeto (pon-to, círculo, reta, polígono, etc) em relação a uma reta.



Seletor

Um seletor é um pequeno segmento com um ponto que se movimen-ta sobre ele. Com esta ferramenta é possível modificar, de forma di-nâmica, o valor de algum parâmetro. O uso de seletores neste livro será feito, principalmente, no estudo de funções.

 Deslocar eixos

Com esta ferramenta, pode-se mover o sistema de eixos, bem como todos os objetos nele contidos. É ideal para se fazer ajuste com rela-ção à posição dos objetos exibidos na janela de visualização.

5.1.2 O campo de entrada

O Campo de Entrada fica no rodapé da janela do GeoGebra. Através deste campo, é possível operar com o GeoGebra, usando comandos escritos. Praticamente todas as ferramentas da Barra de Ferramentas podem ser acessadas usando comandos escritos.

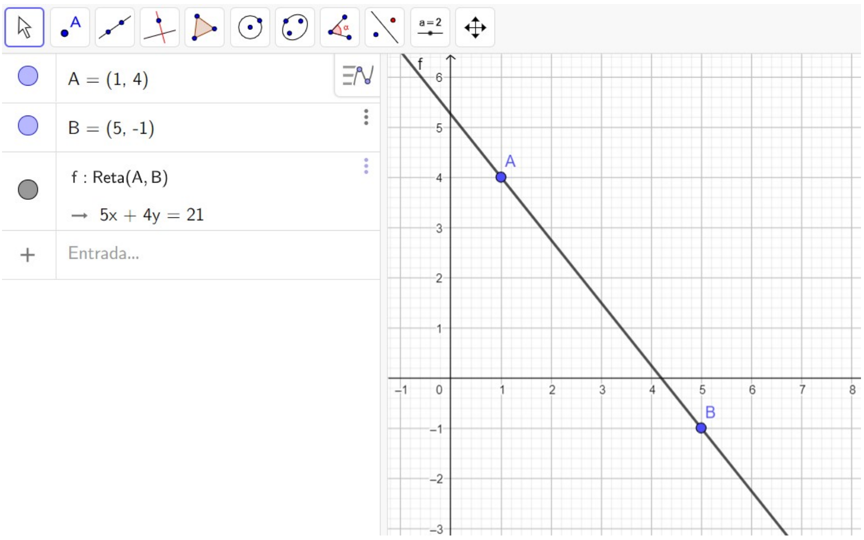
Vale ressaltar que existem comandos acessíveis no “Campo de Entrada” e que não estão na Barra de Ferramentas. Como exemplo, sugerimos que digite no “Campo de entrada” e pressione “Enter”.

- $A = (1, 4)$
- $B = (5, -1)$

- $Reta[A, B]$

Os dois primeiros comandos geram pontos, assim como a ferramenta “Novo Ponto” na “Janela de ferramentas”, a diferença é que pela referida ferramenta o ponto é obtido através de um clique com o mouse e perde em precisão e no “Campo de Entrada”, podemos dizer exatemente onde o ponto aparecerá. O último comando está disponível também através da Barra de Ferramentas, basta clicar sobre este botão e depois sobre os pontos A e B e uma reta por eles passará como representa a Figura 36.

Figura 36 – Comandos da caixa de entrada.



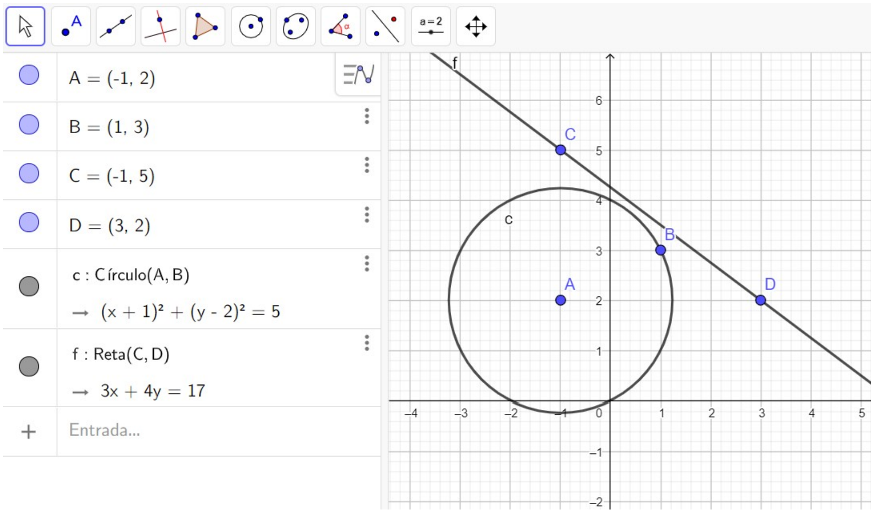
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.1.3 A janela de Álgebra

O GeoGebra inicia, geralmente, com a Janela de Álgebra sendo mostrada na tela. Caso não esteja, pode-se mostrá-la a partir da Barra de Menu, em “Exibir” e marcando a opção “Janela de Álgebra”.

Uma das funções da Janela de Álgebra é exibir as informações algébricas dos objetos que estão na Janela de Visualização. Na Figura 37, há quatro pontos, A, B, C e D na Janela de Visualização. Na Janela de Álgebra, ficam representadas as coordenadas desses pontos. Também há na Janela de Visualização dois outros objetos: uma reta, cujo “nome” é a, e uma circunferência, cujo “nome” é c. Na Janela de Álgebra, vem representado o nome de cada objeto seguido da informação algébrica do mesmo. No caso da reta e da circunferência ele mostra suas equações.

Figura 37 – A janela de álgebra.



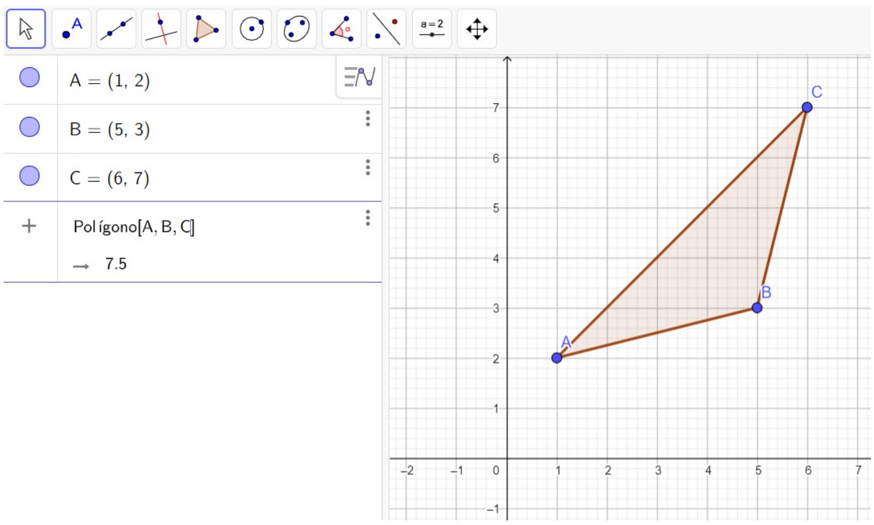
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2 CONSTRUÇÃO DE UM TRIÂNGULO QUALQUER

Para construir um triângulo qualquer, sem levar em conta suas medidas, digite no "Campo de Entrada" e pressione "Enter" como ilustra a Figura 38.

- $A = (1, 2)$
- $B = (5, 3)$
- $B = (6, 7)$
- $Poligono[A, B, C]$

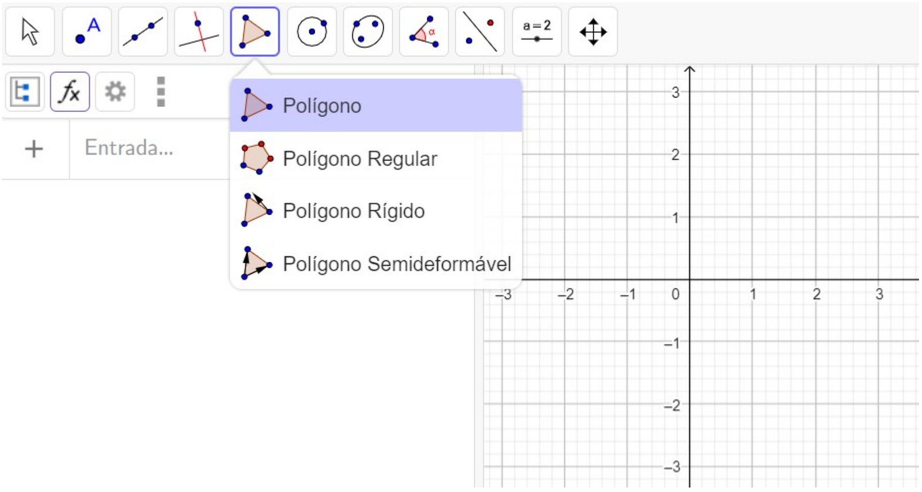
Figura 38 – Construção do triângulo ABC utilizando a caixa de entrada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos também construir o triângulo utilizando a barra de ferramentas, para isso basta clicar em “Polígono”, que está na Janela 5, clicar, na “Janela gráfica”, em três pontos distintos e clicar novamente no 1º ponto como mostra a Figura 39.

Figura 39 – Construção do triângulo ABC utilizando a barra de ferramentas.

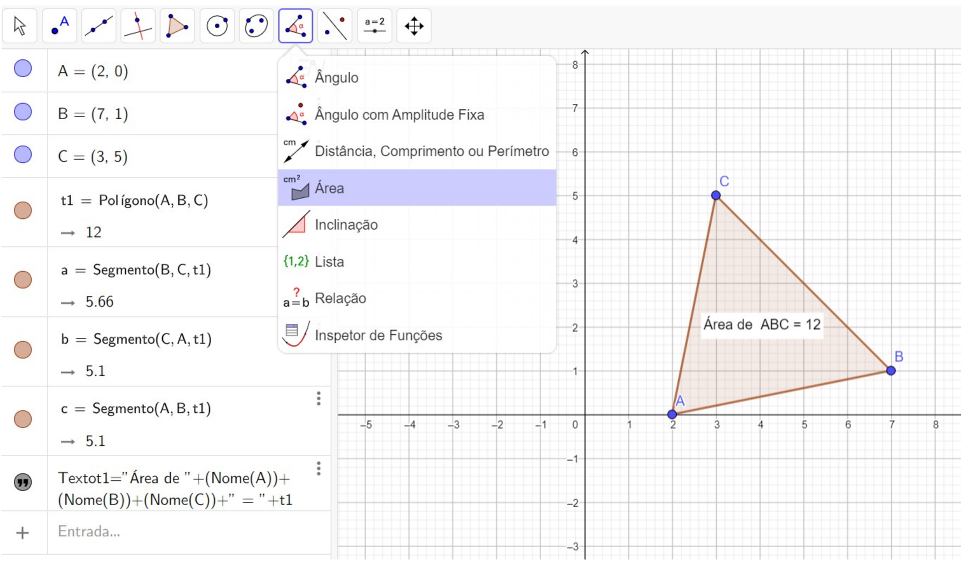


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2.1 A área de um triângulo qualquer

Para calcular a área de um triângulo qualquer utilizando as ferramentas do GeoGebra, basta selecionar a ferramenta “Área”, que está na janela 8, e clicar na figura como representa a Figura 40.

Figura 40 – Área do triângulo ABC.



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3 O ESTUDO DAS MATRIZES NO SOFTWARE GEOGEBRA

Para inserir matrizes no GeoGebra basta digitar no “Campo de Entrada” e pressionar a tecla “Enter”.

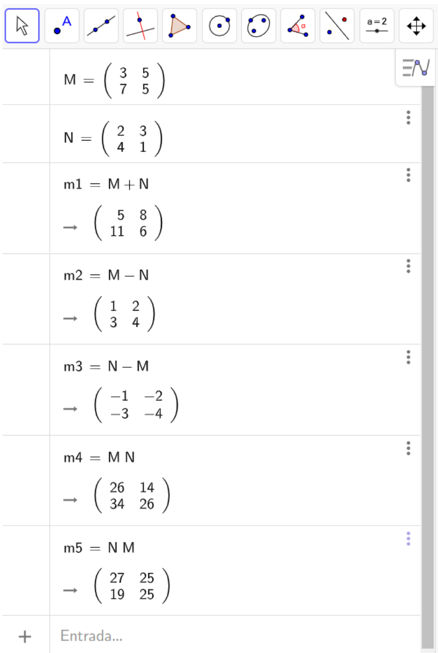
Para que possamos inserir as matrizes $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, e $N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, sendo M e N quadradas de ordem 2, digitamos na janela de entrada.

- $M = \{\{3,5\},\{7,5\}\}$
- $N = \{\{2,3\},\{4,1\}\}$

Podemos efetuar operações com as matrizes M e N utilizando o Software GeoGebra. Vamos aplicar aqui as operações de adição, subtração e multiplicação, para isso, digitamos na "Caixa de Entrada" a matriz desejada e clicamos em "Enter", obtendo assim os resultados dessas operações apresentados na Figura 41.

- $M + N =$
- $M - N =$
- $N - M =$
- $M * N =$
- $N * M =$

Figura 41 – Operações com matrizes utilizando o Software GeoGebra.

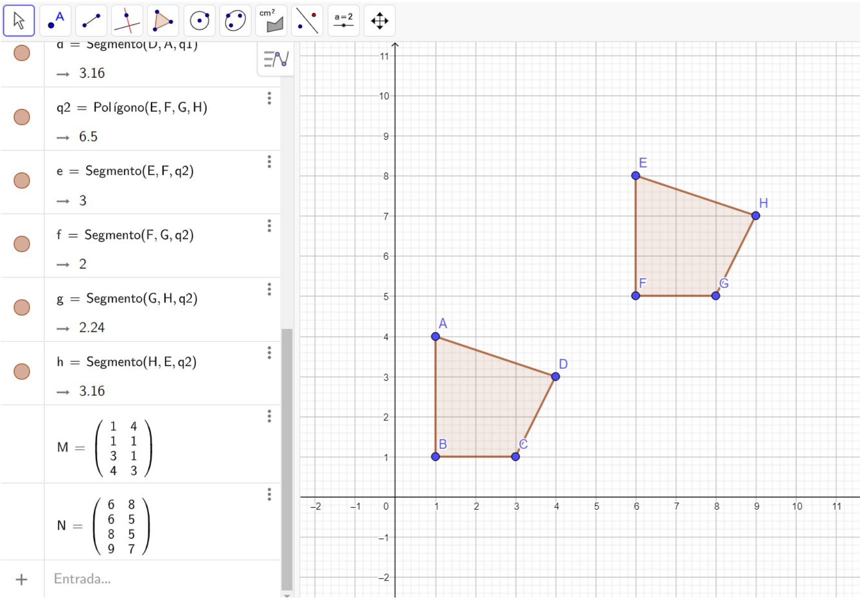


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3.1 Construção de Matrizes através das coordenadas dos vértices do polígono

Considerando os polígonos $ABCD$ e $EFGH$, congruentes, representados na Figura 42, construimos as matrizes M e N, ambas $4x2$, utilizando as coordenadas de seus vértices.

Figura 42 – Construção de matrizes utilizando as coordenadas dos vértices do polígono.

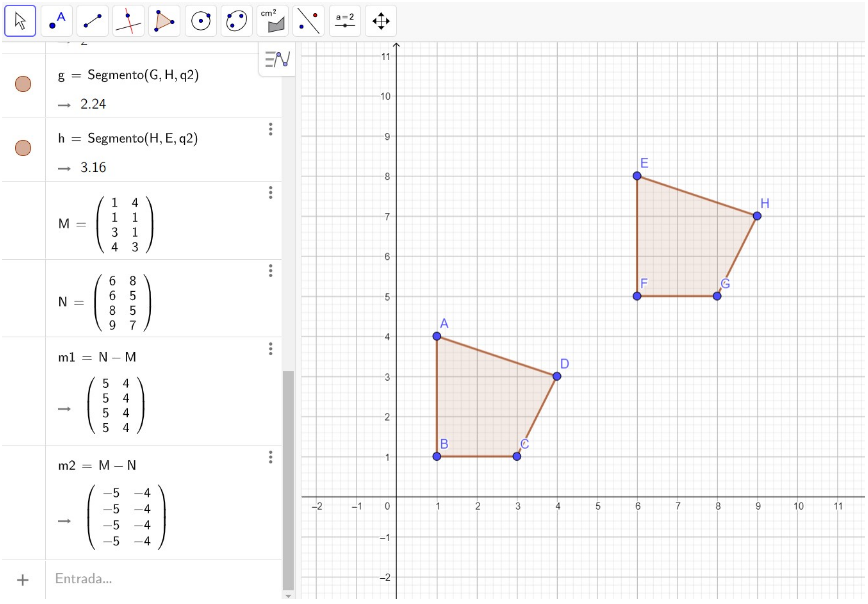


Fonte: Elaborada pelo autor.

O polígono $EFGH$ foi obtido a partir de duas movimentações de $ABCD$, sendo uma na horizontal e outra na vertical. Fazendo a operação $N - M$, obtemos a matriz $m1$, também $4x2$, tal que a primeira coluna é composta pelo número 5 e a segunda coluna pelo número 4, o que significa que o polígono $ABCD$ precisa deslocar 5 unidades para a direita e 4 unidades para cima para coincidir com o polígono $EFGH$, representado na Figura 43.

Fazendo a operação $M - N$, obtemo a matriz $m2$, também $4x2$, sendo que temos o número -5 na primeira coluna e -4 na segunda coluna, ou seja, o polígono $EFGH$ precisa deslocar 5 unidades para a esquerda e 4 unidades para baixo para coincidir com o polígono $ABCD$.

Figura 43 – Translação do Polígono $ABCD$.



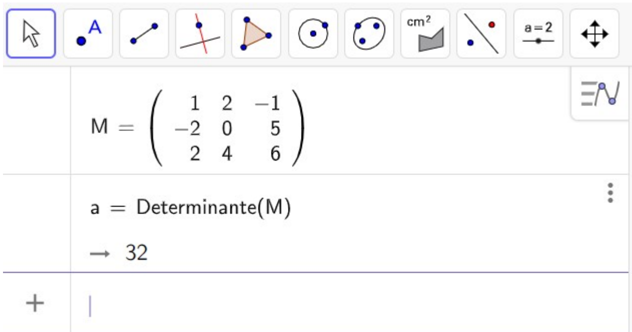
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.4 O CÁLCULO DE DETERMINANTE NO SOTTWARE GEOGEBRA

Podemos calcular o determinante de uma matriz quadrada utilizando o GeoGebra. Para isso, digitamos na “Caixa de Entrada” a matriz e em seguida digitamos “Determinante[“nome da matriz”]”.

Por exemplo, para calcular o determinante da matriz quadrada de ordem 3, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, digitamos na “Caixa de entrada” a matriz A e em seguida, digitamos “Determinante[A]” e pressionamos a tecla “Enter”. O resultado está apresentado na Figura 44.

Figura 44 – Cálculo de determinante de uma matriz quadrada utilizando do Software GeoGebra.



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.5 O CÁLCULO DE ÁREA DE UM TRIÂNGULO POR MEIO DE DETERMINANTE NO SOFTWARE GEOGEBRA

Um método para a obtenção de um determinante bastante prático de ser utilizado consiste no cálculo de áreas de polígonos representados no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas de seus vértices.

Se conhecemos as coordenadas dos vértices de um triângulo representado no plano cartesiano, é possível calcular sua área por intermédio da composição e/ou decomposição de polígonos auxiliares.

Nesse processo é realizada uma série de multiplicações entre resultados de subtrações entre abscissas e entre ordenadas dos pontos A, B e C, além da divisão por 2. As etapas desse cálculo podem ser resumidas em um determinante de ordem 3, formado pelas coordenadas desses pontos, obedecendo à seguinte formatação:

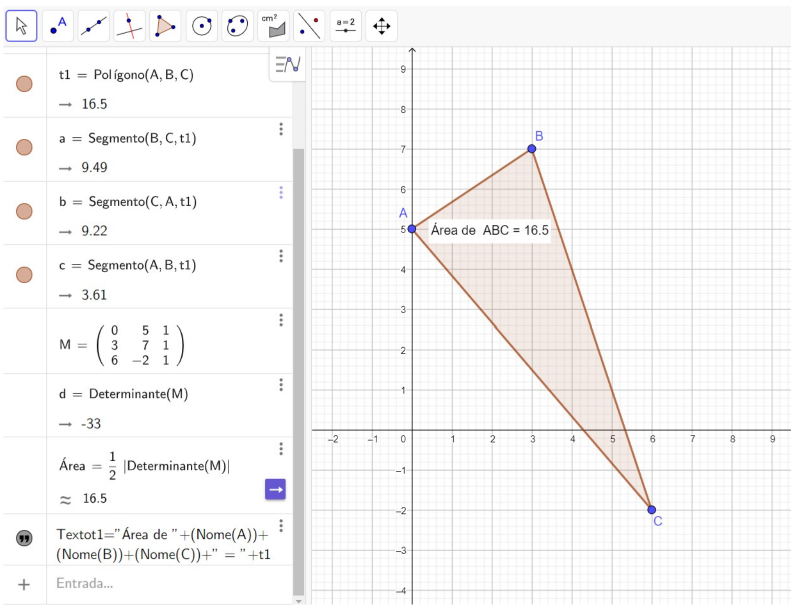
$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \tag{1}$$

Considerando o caso do triângulo de vértices com coordenadas $A(0,5)$, $B(3,7)$ e $C(6,-2)$, temos:

$$\text{Área}_{(ABC)} = \text{metade do valor absoluto de} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

O resultado está apresentado na Figura 45.

Figura 45 – Área do triângulo quando conhecido as coordenadas de seus vértices.

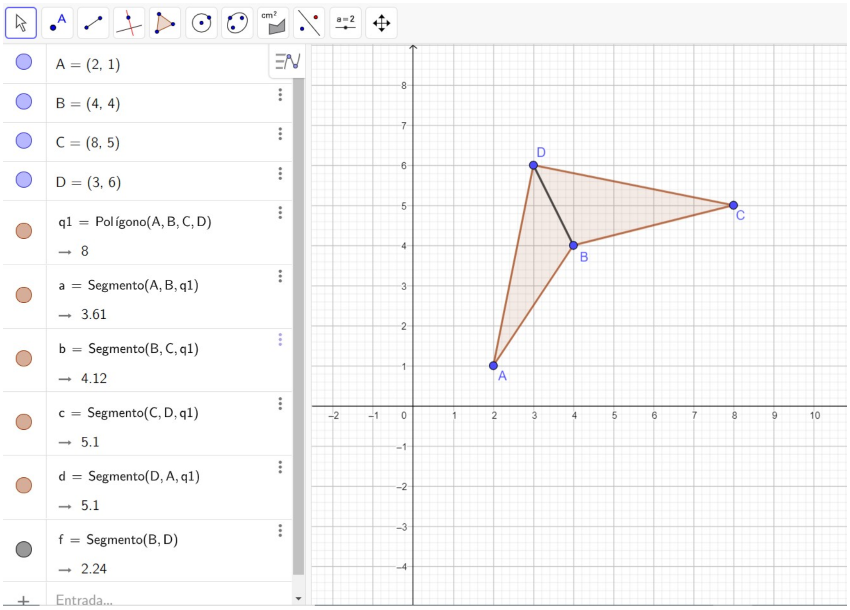


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.5.1 A área de um polígono

A área de um polígono representado no plano cartesiano pode ser calculada a partir das coordenadas de cada vértice, baseando-se no princípio de que um polígono pode ser dividido em vários triângulos, como na Figura 46, em que calcularemos a área do quadrilátero $ABCD$.

Figura 46 – Decomposição do polígono $ABCD$ em triângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dividimos o quadrilátero em dois triângulos, ABD e BCD. A área do quadrilátero $ABCD$ será a soma das áreas dos triângulos ABD e BCD.

$$\text{Área}_{(ABCD)} = \text{Área}_{(ABD)} + \text{Área}_{(BCD)} \tag{3}$$

Como a área do triângulo é

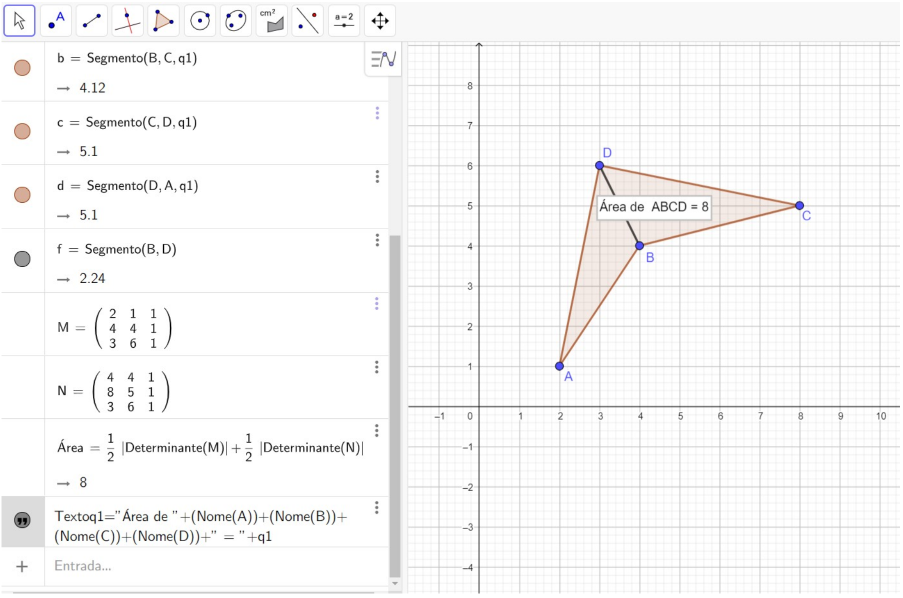
$$\text{Área} = \frac{1}{2}\,|\text{determinante[matriz]}| \tag{4}$$

Temos que, a área do polígono $ABCD$ será dada por:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\,|\text{determinante[M]}| + \frac{1}{2}\,|\text{determinante[N]}(5)$$

A Figura 47 representa o resultado do cálculo da área do Polígono $ABCD$.

Figura 47 – Área de um polígono quando conhecido as coordenadas de seus vértices.



Fonte: Elaborada pelo autor.

6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados de atividades aplicadas a 55 alunos, dentre eles 26 da 3ª série A e 29 da 3ª série B do Ensino Médio da Escola Estadual Professor José Leite Pinheiro da cidade de Cerqueira César, diretoria de ensino região de Avaré, estado de São Paulo, desenvolvidas nos meses de outubro e novembro de 2019.

O trabalho mostra algumas aplicações do cálculo de área de polígonos por meio de determinantes, valorizando o processo de ensino e aprendizagem através da utilização do Software GeoGebra, mostrando um novo paradigma no ensino de matrizes e determinantes em que o aluno deixa de ser mero receptor de conhecimentos e se torna um agente ativo no processo, atuando na construção de seu conhecimento. São apresentados, principalmente, aplicações que contribuem para o entendimento das operações de matrizes, como a soma, subtração e produto, o cálculo de determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 e o cálculo de área de polígonos por meio de determinantes, pois associando matrizes à geometria, aproveita-se de recursos visuais no processo de ensino e aprendizagem.

As atividades aqui propostas estão longe de esgotar as possibilidades de abordagem do assunto, porém tornam possível o conhecimento de matrizes como estruturas de representação desta importante ferramenta de uso computacional, possibilitando um aumento do interesse pela matemática e, consequentemente, uma melhora no aprendizado. Certamente, iniciativas que auxilia a aprendizagem de Matemática é de suma importância e a utilização do Software GeoGebra nas aulas vem propiciar ao aluno um desenvolvimento da aprendizagem de forma atrativa e motivadora.

Para dar início a pesquisa, foi aplicado aos estudantes um questionário com o objetivo de fazer um panorama dos conhecimentos adquiridos pelos alunos sobre o tema e da utilização de recursos computacionais durante sua vida estudantil. Após a realização do questionário, iniciou-se à aula, tendo como apoio as explicações de conceitos do assunto a ser estudado. Assim, na primeira aula foi abordado os conceitos de matrizes e suas operações, e nas aulas seguintes, os alunos realizaram algumas atividades relacionadas ao tema. Com o término da $Atividade\ 1$, desenvolvida na sala de aula, os alunos foram levados ao laboratório de informática, onde realizaram a $Atividade\ 2$ e a $Atividade\ 3$, ambas desenvolvidas com a utilização do Software GeoGebra.

Ao final das atividades, foi aplicado um questionário aos alunos a fim de verificar a receptividade das atividades propostas, além de verificar se o uso do Software GeoGebra influenciou positivamente no processo de ensino e aprendizagem.

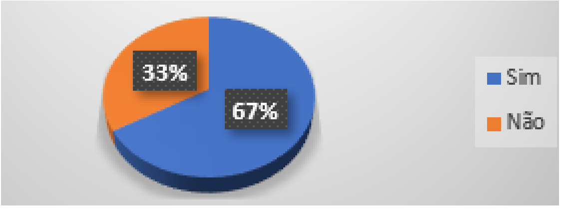
6.1 RESULTADO DO QUESTIONÁRIO 1

O objetivo do primeiro questionário é conhecer a relação dos alunos com a disciplina de Matemática e investigar os conhecimentos prévios dos estudantes relacionados aos recursos computacionais na escola e como esses recursos foram utilizados.

O primeiro questionário é composto por 7 questões cujo resultado são apresentados na Figura 48, Figura 49, Figura 50, Figura 51, Figura 52, Figura 53 e Figura 54.

Questão 1: ***Você tem dificuldade na aprendizagem dos conteúdos de Matemática?***

Figura 48 – Você tem dificuldade na aprendizagem dos conteúdos de Matemática?

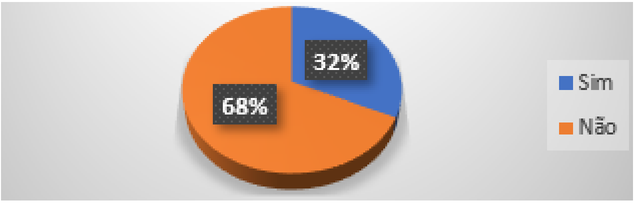


Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 48 apresenta o gráfico em que aponta que a maioria dos alunos, 37 dos 55 estudantes pesquisados, afirmam encontrar alguma dificuldade na aprendizagem de conceitos matemáticos.

Questão 2: ***Você sabe o que é matriz?***

Figura 49 – Você sabe o que é matriz?

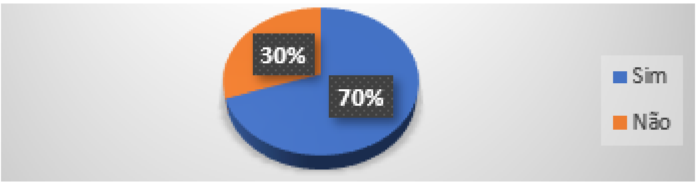


Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 49 observamos que grande parte dos estudantes não apresentam domínio dos conceitos de matrizes. Vale ressaltar que os alunos participantes da pesquisa, já haviam estudado os conceitos abordados. Dentre os alunos pesquisados, 38 deles alegam que já estudaram os conceitos de matrizes, porém não lembram.

Questão 3: ***Você sabe calcular a área de triângulos?***

Figura 50 – Você sabe como calcular a área de triângulos?

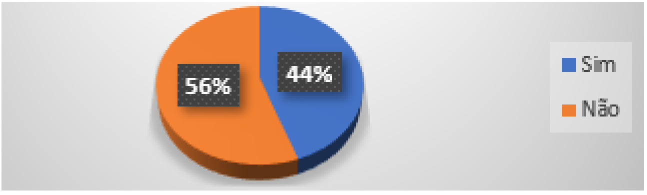


Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando a Figura 50 verificamos que 39 alunos apresentam domínio dos conceitos de área de triângulos, porém, utilizando a fórmula (metade do produto entre base e altura).

Questão 4: ***Você sabe calcular a área de polígonos?***

Figura 51 – Você sabe calcular a área de polígonos?.

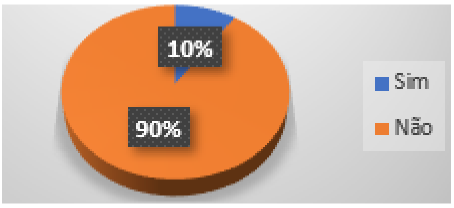


Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com o gráfico representado na Figura 51, 31 alunos não tem conhecimento do cálculo da área de polígonos. Até então, os alunos não haviam utilizado a ideia de dividir o polígono em triângulos e calcular a área separadamente, já que este conceito é conhecido por eles.

Questão 5: ***Você já utilizou determinantes para calcular a área de polígonos?***

Figura 52 – Você já utilizou determinantes para calcular a área de polígonos?

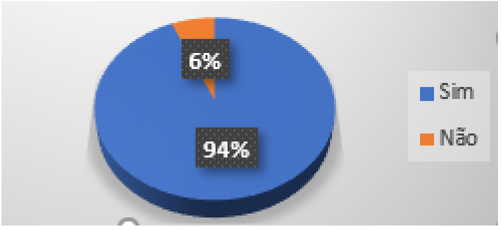


Fonte: Elaborada pelo autor.

O gráfico da Figura 52 mostra que 90% dos alunos desconheciam a técnica de utilizar determinantes para o cálculo de área de polígonos quando conhecidos seus vértices, e embora já estudado, os estudantes que participaram da pesquisa não tinham se apropriado, de modo significativo, dos conceitos de determinantes.

Questão 6: ***Você acredita que o uso do computador pode ajudá-lo(a) a aprender Matemática?***

Figura 53 – Você acredita que o uso do computador pode ajudá-lo(a) a aprender Matemática?



Fonte: Elaborada pelo autor.

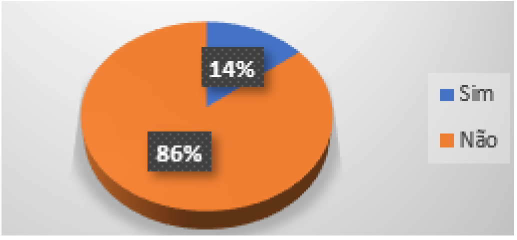
Ao serem questionados sobre a utilização de recursos computacionais nas aulas de matemática, 51 alunos afirmam que a utilização de uma ferramenta computacional pode facilitar o processo de ensino e aprendizagem da matemática, como mostra a Figura 53.

Algumas justificativas para essa resposta merecem destaque. São elas:

- “De maneira correta, usamos para aprender”.
- “Pois a internet já é costume para a nova geração, então usá-la a favor dos estudos seria bom”.
- “A internet possui muitas informações que podem ajudar e facilitar o aprendizado dos alunos”.
- “Muito, pois através do computador conseguimos obter mais informações”.
- “Com o computador é possível utilizar programas que auxiliam no aprendizado de matemática”.
- “Acho que a tecnologia pode auxiliar e muito nos estudos e a aula fica mais dinâmica”.
- “Por ser no computador os alunos desinteressados têm um interesse maior”.
- “Mais facilidade de o aluno prestar atenção com o computador”.
- “O uso da tecnologia facilita no aprendizado”.
- “O jovem se sente atraído pela tecnologia, ficando bem mais fácil aprender com o uso do recurso”.
- “Quando mais nova, jogava games de tabuadas e ajudou bastante”.

Questão 7: ***Você conhece ou já utilizou o software GeoGebra?***

Figura 54 – Você conhece ou já utilizou o software GeoGebra?



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como ilustrado na Figura 54, verificou-se que a ferramenta computacional GeoGebra não era de domínio dos alunos, mas os mesmos afirmam que, por meio da visualização e construção do objeto de estudo, há uma melhor compreensão de conceitos matemáticos.

6.2 ATIVIDADE 1 - APLICAÇÃO DE CONCEITOS DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO

Após a aplicação do questionário inicial, foram apresentadas aos alunos as definições formais de matrizes e suas operações. Em seguida, os alunos realizaram algumas atividades utilizando os conceitos de matrizes, assim como suas operações de adição, subtração e multiplicação, cuja as habilidades são: "***Utilizar elementos de matrizes para organizar e justificar a resolução de situações-problema baseadas em contextos do cotidiano***", "***Relacionar representações geométricas a comandos na linguagem matemática***" e "***Utilizar a notação matricial para representar figuras planas***".

Foram utilizadas aproximadamente 4 aulas de 50 minutos.

Questão 1: A Tabela 1 mostra as notas de três alunos no primeiro bimestre em quatro disciplinas.

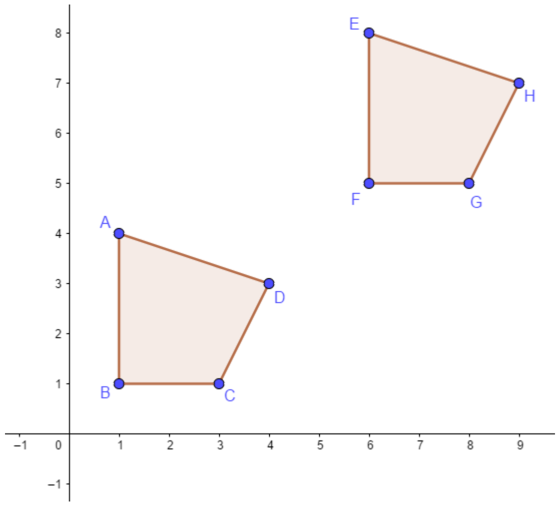
Tabela 1 – Notas de três alunos no primeiro bimestre.

Nome	Matemática	Física	Química	Biologia
Ana	6	4	5	8
Antônio	5	7	5	5
Beatriz	5	6	7	4

Escreva a matriz correspondente a tabela de notas de três alunos no primeiro bimestre.

Questão 2: Observe os polígonos representados no plano cartesiano na Figura 55.

Figura 55 – Polígonos no plano cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os polígonos são congruentes e podemos considerar que o polígono EFGH é uma translação do polígono ABCD, isto é, EFGH foi obtido a partir de duas movimentações de ABCD, sendo uma na horizontal e outra na vertical.

a) Quantas unidades na horizontal e quantas unidades na vertical do polígono ABCD devem ser deslocadas para que, ao final, coincidam com o polígono EFGH?

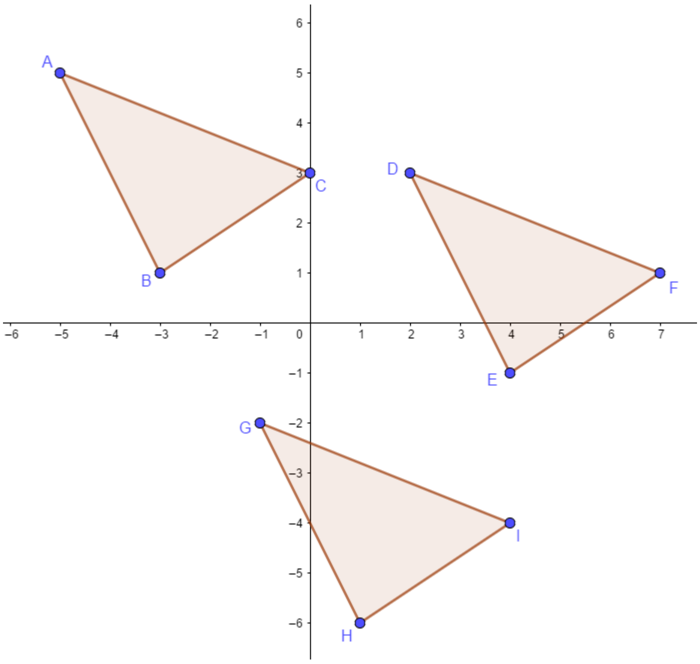
b) Represente em uma matriz A_{4x2} as coordenadas dos vértices do polígono ABCD, de maneira que cada linha da matriz contenha coordenadas de um ponto, com a abscissa na primeira coluna e a ordenada na segunda coluna.

c) Represente em uma matriz B_{4x2} as coordenadas dos vértices do polígono EFGH, de maneira que cada linha da matriz contenha coordenadas de um ponto, com a abscissa na primeira coluna e a ordenada na segunda coluna.

d) Escreva uma matriz C_{4x2} de tal forma que $A + C = B$.

Questão 3: Na representação de um plano cartesiano, conforme Figura 56, podemos observar três triângulos congruentes. O triângulo ABC pode ser transladado até coincidir com o triângulo DEF, que, por sua vez, se transladado, poderá coincidir com o triângulo GHI.

Figura 56 – Triângulos congruentes em um plano cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo autor.

a) Quantas unidades horizontais e quantas unidades verticais são necessárias para uma translação do triângulo ABC, a fim de que, ao final, ele coincida com o triângulo DEF?

b) Quantas unidades horizontais e quantas unidades verticais são necessárias para uma translação do triângulo DEF, a fim de que, ao final, ele coincida com o triângulo GHI?

c) Quantas unidades horizontais e quantas unidades verticais são necessárias para uma translação de triângulo ABC, a fim de que, ao final, ele coincida com o triângulo GHI?

d) Escreva uma matriz 3x2 para cada triângulo, de maneira que cada linha da matriz contenha coordenadas de um vértice do triângulo, com a abscissa na primeira coluna e a ordenada na segunda coluna. Denomine a matriz referente ao triângulo ABC pela letra M, a matriz referente ao triângulo DEF pela letra N, e a matriz referente ao triângulo GHI pela letra P.

e) Escreva uma matriz Q, tal que $M + Q = N$.

f) Escreva uma matriz R, tal que $N + R = P$.

g) Escreva uma matriz T, tal que $M + T = P$.

Questão 4: A Tabela 2 mostra os resultados obtidos, por cinco clubes, no Campeonato Brasileiro de Futebol em 2019.

Tabela 2 – Resultados obtidos no Campeonato Brasileiro de Futebol em 2019.

	Vitórias	Empates	Derrotas
Flamengo	16	4	3
Santos	14	5	5
Palmeiras	13	8	3
Corinthians	11	9	3
São Paulo	10	10	4

Resultado	Pontos
Vitórias	3
Empates	1
Derrotas	0

Calcular quantos pontos cada equipe conquistou até agora e represente os resultados em uma matriz de ordem $5x1$.

Questão 5: Pedro precisa comprar alguns produtos e resolve pesquisar preços em dois supermercados. As Tabelas 3 e 4 mostram os preços pesquisados e com as quantidades que ele precisa.

Tabela 3 – Preços de produtos.

Supermercado	Farinha	Açucar	Leite	Ovos
A	$1,73$	$1,90$	$1,56$	$3,00$
B	$1,76$	$1,24$	$1,72$	$3,94$

Tabela 4 – Quantidade de produtos.

Produto	Quantidade
Farinha	4 kg
Açúcar	3 kg
Leite	3 l
Ovos	1 dúzia

Com base nessas informações, responda:

a) Uma matriz $2x4$ em que esteja registrado os produtos pesquisados por Pedro.

b) Uma matriz $4x1$ em que estejam registradas as quantidades de produtos que Pedro precisa.

c) Uma matriz $2x1$ contendo os preços totais cobrados nos supermercados A e B.

d) Quanto Pedro economizará comprando no supermercado mais barato?

Questão 6: Na confecção há três modelos de camisas (A, B e C) e são usados botões grandes (G) e pequenos (P). O número de botões por modelos é dado na Tabela 6.2.

Tabela 5 – Quantidade de botões por camisa.

	Camisa A	Camisa B	Camisa C
Botões P	3	1	3
Botões G	6	5	5

O número de camisas fabricadas, de cada modelo, nos meses de maio e junho, é dado na Tabela 6.2.

Tabela 6 – Quantidade de camisas fabricadas nos meses de maio e junho.

	Maio	Junho
Camisa A	100	50
Camisa B	50	100
Camisa C	50	50

Nestas condições, determine:

a) Uma matriz $2x3$ em que esteja registrada quantidade de botões pequenos (P) e grandes (G) utilizados nas camisas A, B e C.

b) Uma matriz $3x2$ em que esteja registrada o número total de camisas fabricadas nos meses de maio e junho.

c) Uma matriz $2x2$ em que esteja registrada o total botões usados em maio e junho.

Questão 7: A temperatura corporal de um paciente foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia, durante cinco dias. Cada elemento a_ij da matriz abaixo corresponde à temperatura observada no instante i do dia j.

$$\begin{pmatrix} 35,6 & 36,4 & 38,6 & 38,0 & 36,0 \\ 36,1 & 37,0 & 37,2 & 40,5 & 40,4 \\ 35,5 & 35,7 & 36,1 & 37,0 & 39,2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Determine:

a) O instante e o dia em que o paciente apresentou a maior temperatura.

b) A temperatura média do paciente no terceiro dia de observação.

Questão 8: O proprietário de duas cantinas, em escolas diferentes, deseja contabilizar o consumo dos seguintes produtos: suco de laranja, água mineral, queijo e presunto. Na cantina da escola A são consumidos, por semana, 40 dúzias de laranja, 140 garrafas de água mineral, 15 quilos de queijo e 9 quilos de presunto. Na cantina da escola B são consumidos semanalmente 50 dúzias de laranjas, 120 garrafas de água mineral, 18 quilos de queijo e 10 quilos de presunto. O proprietário das cantinas compra os produtos que revende de dois fornecedores, cujos preços, em reais, são expressos na Tabela 6.2.

Tabela 7 – Consumo de produtos em duas cantinas.

Produtos	Fornecedor 1	Fornecedor 2
1 dúzia de laranja	1,20	1,10
1 garrafa de água mineral	0,80	0,90
1 quilo de queijo	5,00	6,00
1 quilo de presunto	9,00	7,50

Com base nessas informações, determine:

a) Uma matriz $2x4$ em que esteja registrado o consumo semanal dos produtos listados na cantina A e na cantina B.

b) Uma matriz $4x2$ em que estejam registrados os preços praticados pelos fornecedores 1 e 2 para os produtos listados.

c) Uma matriz $2x2$ contendo os preços totais cobrados por fornecedor para cada cantina.

d) Quanto o proprietário economizará comprando sempre no fornecedor mais barato, para os dois restaurantes?

Questão 9: Ao comprar os produtos necessários para fazer uma feijoada, uma dona de casa resolveu pesquisar preços em três supermercados. A matriz P dos preços está representada a seguir; a primeira linha mostra os preços por kg do supermercado A; a segunda, do supermercado B; a terceira, do supermercado C. Esses preços são relativos, respectivamente, aos produtos feijão, linguiça, tomate e cebola.

$$P = \begin{pmatrix} 2,05 & 9,89 & 2,48 & 1,78 \\ 1,93 & 11,02 & 2,00 & 1,60 \\ 1,70 & 10,80 & 2,40 & 1,20 \end{pmatrix} \tag{2}$$

e

$$Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Sabendo que a matriz Q representa as quantidades necessárias, respectivamente, de feijão, linguiça, tomate e cebola, a dona de casa economizará mais se efetuar as compras em qual supermercado?

Questão 10 (ENEM): Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz $4x4$, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, de acordo com a Tabela 6.2.

Tabela 8 – Notas bimestrais.

	1º Bimestre	2º Bimestre	3º Bimestre	4º Bimestre
Matemática	$5,9$	$6,2$	$4,5$	$5,5$
Língua Portuguesa	$6,6$	$7,1$	$6,5$	$8,4$
Geografia	$8,6$	$6,8$	$7,8$	$9,0$
História	$6,2$	$5,6$	$5,9$	$7,7$

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por:

(A)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{4}$$

(B)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \tag{5}$$

(C)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

(D)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

(E)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \tag{8}$$

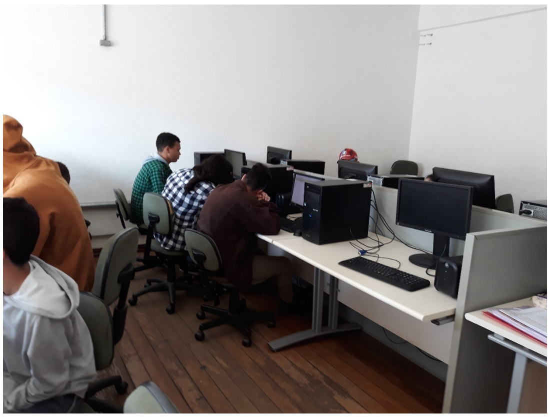
6.3 ATIVIDADE 2 - APLICAÇÃO DOS CONCEITOS DE MATRIZES COM O USO DO GEOGEBRA

Após a aplicação da $Atividade\ 1$, os alunos foram levados ao laboratório de informática para execução da $Atividade\ 2$ com a utilização do Software GeoGebra. Primeiramente foi apresentado o Software, destacando suas principais ferramentas e funções e posteriormente, foram desenvolvidas atividades de modo a facilitar a compreensão dos princípios básicos de funcionamento do Software no ensino de matrizes. No início da atividade os alunos demonstraram muitas dúvidas quanto à execução dos comandos, mas, com o tempo, foram ficando mais interessados com o programa e foram passando dicas uns para os outros, se mostrando muito entusiasmados com a atividade.

O laboratório de informática possuía somente 10 computadores em funcionamento. Diante disso, os alunos formaram grupos para a realização da atividade como representa a Figura 57, a Figura 58, a Figura 59 e a Figura 60.

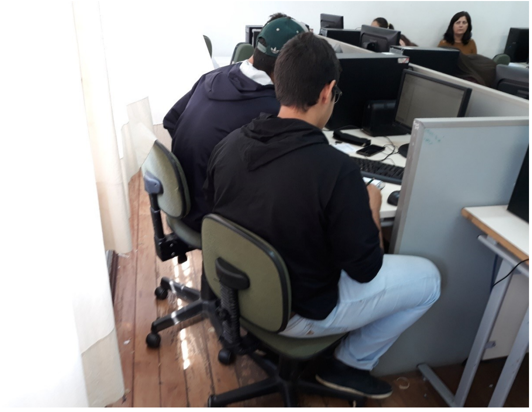
Foram utilizadas 2 aulas para a apresentação do GeoGebra e 4 aulas para a realização da $Atividade\ 2$.

Figura 57 – Realização da atividade no laboratório de informática.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 58 – Realização da atividade no laboratório de informática.

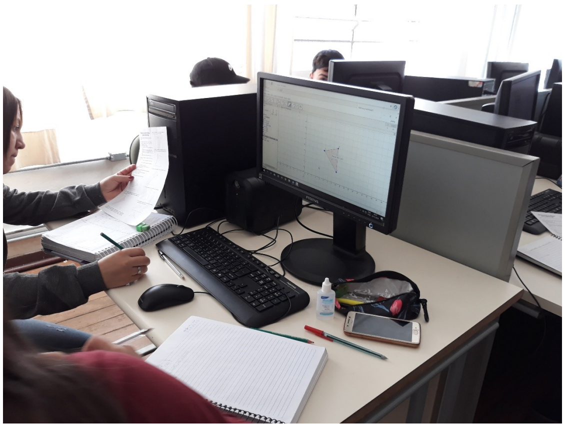


Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 59 – Realização da atividade no laboratório de informática.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 60 – Realização da atividade no laboratório de informática.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Questão 1: Crie, no GeoGebra, as matrizes:

- A, uma matriz do tipo $2\text{x}3$;
- B, uma matriz do tipo $3\text{x}3$;
- C, uma matriz do tipo $2\text{x}3$;
- D, uma matriz do tipo $3\text{x}3$.

a) É possível somar ou subtrair A e B? E com as matrizes A e D, é possível fazer essas operações? Tente fazer essas operações no GeoGebra.

b) A partir do que foi feito no item anterior, qual deve ser a condição para se somar ou subtrair duas matrizes?

c) Qual o resultado da soma entre as matrizes A e C? E a subtração entre elas?

d) Qual o resultado da soma entre as matrizes B e D? E a diferença entre elas?

Questão 2: Escreva no campo de entrada: 3*A, o que aconteceu? E se usarmos outro número?

Questão 3: Aproveitando as mesmas matrizes criadas no exercício anterior, faça o seguinte:

a) Faça com que o programa calcule o determinante da matriz A e da matriz C, o que aconteceu? E se usarmos a matriz D, é possível que o programa calcule o determinante?

b) Qual deve ser a condição para que o programa calcule o determinante de uma matriz?

Questão 4: Agora, vamos usar as matrizes A, B e D.

a) É possível multiplicar a matriz C pela matriz D? E as matrizes B e D, podem ser multiplicadas?

b) E se invertermos as matrizes, a multiplicação continua possível? Isto é, existem os produtos D*C e D*B?

c) Diante do que foi feito nos dois itens anteriores, qual deve ser a condição para que seja possível multiplicar duas matrizes?

d) A multiplicação de matrizes é comutativa?

Questão 5: Agora apague as matrizes dos exercícios anteriores, e crie a matriz A tal que A = {{1,2,3},{-2,0,5},{2,4,6}}.

Use comandos do programa para determinar o valor do determinante de A.

Questão 6: Crie duas matrizes quadradas B e C de mesmo tipo. Calcule, usando o programa, o valor do determinante de B e do determinante de C.

a) Qual o valor do produto (determinante de B).(determinante de C)? Anote!

b) Como você faria para calcular o valor do determinante de B*C, utilizando o programa? Qual foi o resultado encontrado?

c) Levando em conta as respostas dos itens (a) e (b), o que é possível concluir?

6.4 ATIVIDADE 3 - APLICAÇÃO DE ÁREA DE POLÍGONOS USANDO DETERMINANTES

A aplicação da $Atividade\ 3$ também foi executada no laboratório de informática com a utilização do GeoGebra. Os alunos realizaram a construção de triângulos calculando assim suas áreas. As áreas dos triângulos representados no plano cartesiano pode ser calculada a partir das coordenadas de cada vértice, via determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 e logo após compararam os resultados obtidos através da ferramenta “Área” do GeoGebra. Os alunos concluíram que a área do triângulo é a metade do módulo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 3. O cálculo da área de polígonos de 4 lados ou mais foi facilmente calculada, visto que um polígono pode ser dividido em vários triângulos. Foram utilizadas aproximadamente 4 aulas para a realização da $Atividade\ 3$.

Questão 1: Construa no GeoGebra um triângulo qualquer e calcule sua área.

Questão 2: No GeoGebra, construa um triângulo diferente do exercício anterior, e represente em uma matriz, do tipo 3x2, as coordenadas de seus vértices.

a) Calcule a área desse triângulo.

b) É possível calcular o determinante dessa matriz? Por quê?

c) Complete a terceira coluna dessa matriz pelo número 1, formando assim uma matriz quadrada de ordem 3. Agora é possível calcular seu determinante? Se sim, qual o valor?

d) Compare os resultados obtidos nos itens (a) e (c).

Questão 3: Construa, no GeoGebra, um triângulo de vértices A(0,5), B(3,7) e C(6,-2).

a) Determine a área do triângulo ABC.

b) Escreva a matriz representada pelos vértices ABC do triângulo.

c) O que é necessário fazer para calcular o determinate da matriz representada no item (b)? Qual o valor do determinante dessa matriz?

d) Compare os resultados obtidos nos itens (a) e (c).

e) O que podemos concluir?

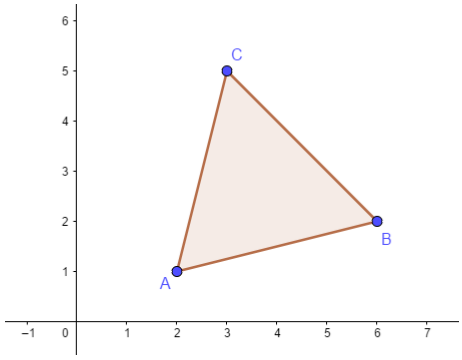
Questão 4: Construa no GeoGebra um triângulo diferente dos anteriores e represente-o em uma matriz.

a) Qual o valor do determinante dessa matriz?

b) Qual a área do triângulo?

Questão 5: Determine a área da superfície do triângulo ABC ilustrado na Figura 61:

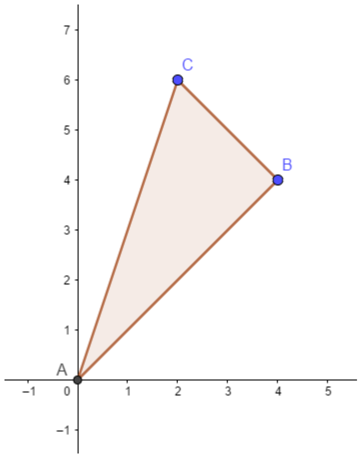
Figura 61 – Área do triângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Questão 6: Qual é a área do triângulo ABC de vértices A(0, 0), B(4, 4) e C(2, 6), representado no sistema de eixos cartesianos da Figura 62?

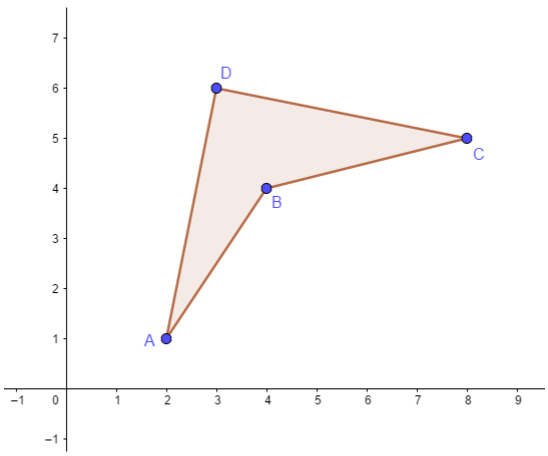
Figura 62 – Área do triângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Questão 7: A área de um polígono representado no plano cartesiano pode ser calculada a partir das coordenadas de cada vértice, baseando-se no princípio de que um polígono pode ser dividido em vários triângulos, como no exemplo da Figura 63, em que calcularemos a área do quadrilátero ABCD.

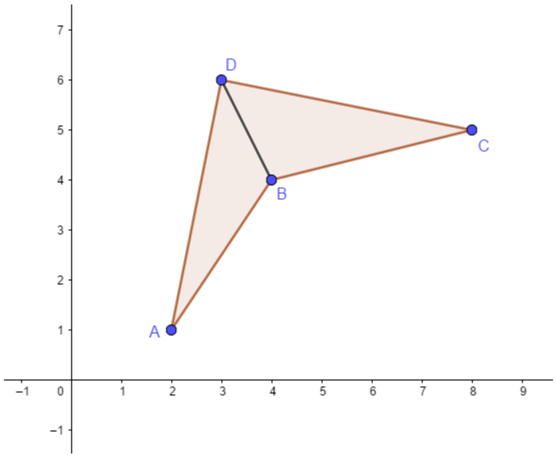
Figura 63 – Área do polígono.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dividiremos o quadrilátero em dois triângulos: ABD e BCD. A área de ABCD será a soma das áreas dos triângulos ABD e BCD, como na Figura 64.

Figura 64 – Área do quadrilátero.



Fonte: Elaborada pelo autor.

a) Calcule, em módulo, o determinante da matriz representada pelos vértices do triângulo ABC.‘

b) Calcule, em módulo, o determinante da matriz representada pelos vértices do triângulo BCD.

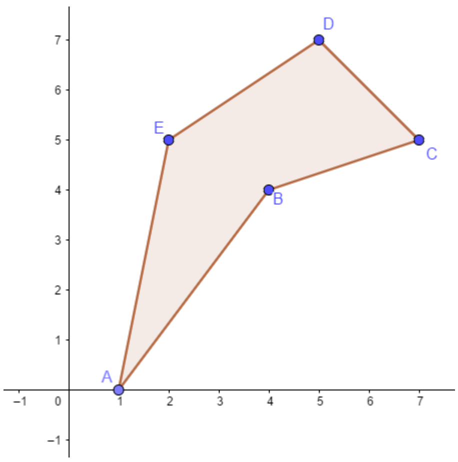
c) Qual a soma dos resultados encontrados nos itens (a) e (b)?

d) Agora, calcule a área do quadrilátero ABCD usando os comandos do GeoGebra.

e) Qual a conclusão que você chegou?

Questão 8: Calcule a área do pentágono ABCDE, representado na Figura 65.

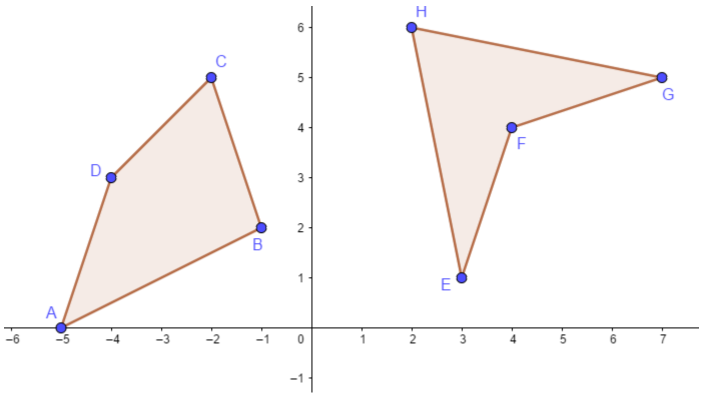
Figura 65 – Área do pentágono.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Questão 9: Qual dos polígonos da Figura 66, ABCD ou EFGH, tem a maior área?

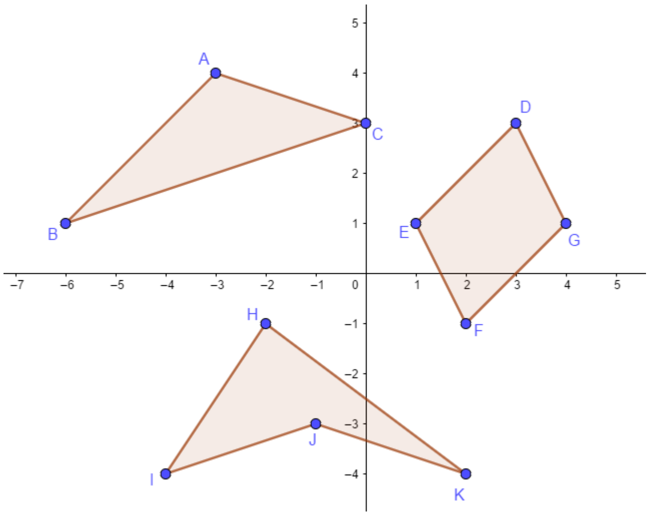
Figura 66 – Polígono com maior área.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Questão 10: Calcule a área dos polígonos ABC, DEFG e HIJK da Figura 67 e responda qual dos polígonos tem a menor área.

Figura 67 – Polígono com menor área.



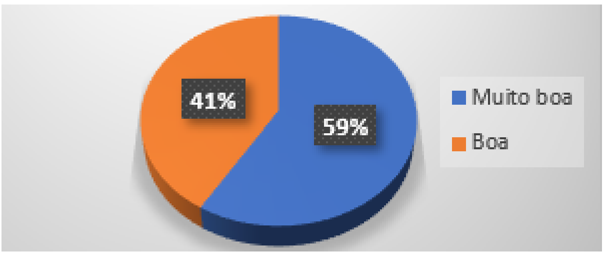
Fonte: Elaborada pelo autor.

6.5 RESULTADO DO QUESTIONÁRIO 2

Após o término da *Atividade* 3 foi aplicado um segundo questionário, que avaliou a execução das atividades propostas cujo resultado está apresentado na Figura 68, Figura 69 e Figura 70.

Questão 1:*Como você classificaria a aula utilizando o GeoGebra que você participou?*

Figura 68 – Como você classificaria a aula utilizando o GeoGebra?

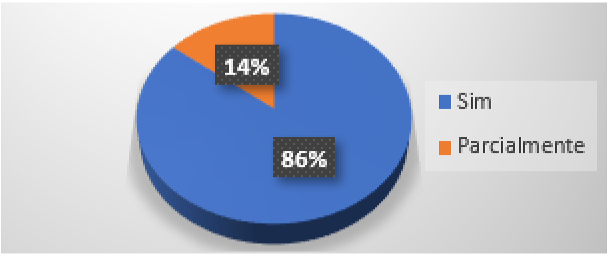


Fonte: Elaborada pelo autor.

Inicialmente foi solicitado que os alunos classificassem as atividades realizadas como “Muito Bom”, “Bom”, “Regular” ou “Ruim”, onde 31 alunos classificaram como “Muito Bom” e 24 alunos classificaram como “Bom”, assim como está representado no gráfico da Figura 68. O que mostra que a proposta foi bem aceita.

Questão 2:*O GeoGebra despertou seu interesse pelo assunto estudado?*

Figura 69 – O GeoGebra despertou seu interesse pelo assunto estudado?



Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com o gráfico representado na Figura 69, 48 alunos responderam que utilizando recursos computacionais como o GeoGebra, os conteúdos são mais fáceis de assimilar, sendo assim o interesse pelo assunto estudado bem maior.

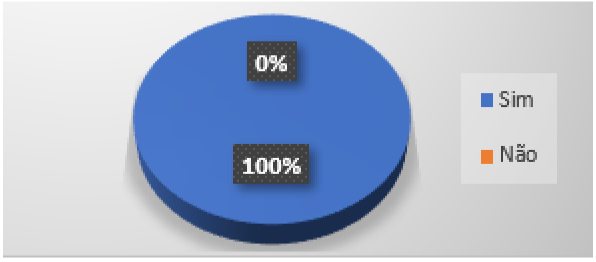
Algumas justificativas merecem ser destacadas. São elas:

- “No começo achei difícil, mas é engenhoso e prático e eu posso dizer que realmente aprendi algo novo”.
- “Despertou meu interesse pela praticidade e consegui aprender o conteúdo”.
- “Uma aula diferenciada é muito mais legal de se aprender”.
- “Com esse material tornou a matéria atrativa e fácil para todos fazer”.
- “Algo novo e interessante, desperta o interesse dos alunos”.
- “Achei mais fácil de aprender as atividades passada em sala de aula”.
- “Toda aula diferenciada é boa e facilita muito despertando o interesse dos alunos”.

- “É uma atividade dinâmica onde podemos por em prática nossos aprendizados”.

Questão 3: ***Você acredita que a utilização do GeoGebra como recurso complementar às aulas tradicionais de Matemática tornaria o conteúdo mais atrativo/compreensível?***

Figura 70 – Você acredita que a utilização do GeoGebra como recurso complementar ás aulas tradicionais de Matemática tornaria o conteúdo mais atrativo/compreensível?



Fonte: Elaborada pelo autor.

Foi questionado se os alunos acreditam que a utilização do Software GeoGebra como recurso complementar às aulas tradicionais de Matemática tornou o conteúdo mais atrativo/compreensível. A resposta a esta pergunta foi unânime, todos responderam que sim como mostra o gráfico da Figura 70.

Algumas justificativas apontadas pelos alunos:

- “Sim, pela facilidade para calcular a área e o determinante”.
- “Sim, pois saímos da rotina e cada vez fazemos algo novo e diferente”.
- “Sim, a aula foge do convencional e passa a ser mais interessante”.
- “Sim, aprendi várias coisas novas”.
- “Ajuda muito nas atividades e fica mais fácil de aprender”.
- “Sim, é mais fácil de calcular”.
- “Foi mais fácil de aprender calcular área de figuras”.
- “A facilidade dos cálculos, aprendi a fazer matriz no GeoGebra”.
- “Facilita as contas complicadas”.

Desta forma, a partir das justificativas apontadas pelos alunos, podemos observar que a utilização do Software GeoGebra tem muito a contribuir com os conceitos aqui apresentados.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho de pesquisa buscou verificar uma forma de utilização do Software GeoGebra como uma ferramenta auxiliar de ensino e aprendizagem de conceitos do Ensino Médio. Diante do exposto, podemos estabelecer algumas considerações importantes em relação ao objeto de estudo pesquisado e ao grupo de alunos que foram sujeitos de pesquisa. Observamos que a ferramenta tecnológica representa um importante recurso para a sala de aula, quando inserido nas aulas de forma planejada .

A pesquisa foi aplicada com alunos da 3ª série do Ensino Médio, abordando conceitos referentes a matrizes, determinantes e área de polígonos via determinantes; conceitos esses trabalhados por meio de um planejamento didático que envolveu o uso do Software GeoGebra como uma ferramenta auxiliar de cada conceito ensinado.

É importante destacar que os alunos participantes da pesquisa já haviam estudado de forma teórica os conceitos abordados, entretanto, durante a aplicação da primeira atividade, observamos que a maioria dos alunos não apresentava domínio dos conceitos de forma significativa. Esta situação foi constatada também com os demais conceitos que foram abordados nas atividades. A utilização da ferramenta computacional GeoGebra também não era de domínio dos alunos, sendo necessária a apresentação das principais janelas do Software antes do início da atividade.

Durante a aplicação das atividades, os alunos foram orientados e suas dúvidas esclarecidas. Desta forma, todos conseguiram resolver as atividades propostas e observamos que os alunos se mantiveram motivados, entusiasmados e comprometidos em aprender a resolver as situações propostas e a verificar, por meio da construção das respostas no Software GeoGebra, o que representava tal imagem ou resultado, assim interpretando e refletindo cada resposta. Vale ressaltar que os alunos se familiarizaram rapidamente com os comandos do Software GeoGebra e, quanto aos recursos próprios do computador, nenhum aluno demonstrou ter dificuldade com a nova ferramenta.

Ao final da aplicação das atividades, ficou evidente que a proposta foi bem sucedida, que os alunos entenderam perfeitamente a utilização de determinantes para calcular a área de polígonos e que o GeoGebra foi fundamental para fortalecer este conhecimento, pois através da utilização deste recurso, os alunos conseguiram realizar suas próprias interpretações e reflexões, sendo assim, o objetivo do trabalho foi atingido.

Este trabalho representa o início para o desenvolvimento de estudos de muitas possibilidades de pesquisar a utilização de softwares matemáticos em sala de aula. Como perspectivas de continuidade desta pesquisa, sugerimos que outros trabalhos sejam realizados com objetivos de acompanhar a aprendizagem matemática com a aplicação de recursos diferenciados a partir das tendências na Educação como, por exemplo, a aplicação do Software GeoGebra na resolução de Sistemas Lineares de duas variáveis para visualização das suas soluções; no estudo das representações gráficas das Funções Afim, Quadrática e Exponencial e de suas transformações e deslocamentos provocados pelos seus coeficientes; no estudo da Geometria com a construção de conceitos, demonstrações de teoremas e propriedades, oportunizando questionamentos, argumentações e deduções, propiciando novas formas de ensinar e aprender de modo a construir e manipular figuras na tela do computador permitindo assim a interação com o objeto de estudo, ampliando então a visão de uma construção feita somente com lápis e papel.

REFERÊNCIAS

ANTÔNIO JÚNIO, Wagner. Educação, tecnologias e cultura digital. Bauru, SP: Edição do Autor, 2015, 42p.
ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de; NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. Aprendendo Matemática com o Geogebra. São Paulo: Editora Exato, 2010, 226p.
ARRUDA FILHO, Edson Pereira. As elegantes matrizes circulantes, 2019. 54p. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal de São João Del Rei, São João Del Rei, 2019. [Orientador: Prof. Dr. José Eloy Ottoni].
BASNIAK, Maria Ivete; ESTEVAM, Everton José Goldini. O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica. Curitiba: Ithala, 2014, 130p.
BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear, 3ª edição, São Paulo: Harper Row do Brasil, 1980.
BORGES NETO, Hermínio. Manual do Geogebra. Disponível em < http://ftp.multimeios.ufc.br/geomeios/geogebra/manual.htm >. Acesso em: 03 nov. 2020.
BRASIL. Constituição (1988). Constituição da República Federativa do Brasil. Brasília, DF: Senado Federal: Centro Gráfico, 1988, 292 p. BRASIL, Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.
BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. LDB - Lei nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília: MEC, 1996.
BRASIL, Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio: bases legais. Brasília: MEC, 1999.
BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 1999.
BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos PCNs. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC, 1997.
BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Brasília: MEC, 1997.
CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. Álgebra Linear e Aplicações, 6a. ed. São Paulo: Editora Atual, 2003, 352p.
COSTA JÚNIOR, Hélio Lemes. Tempos Digitais - ensinando e aprendendo com tecnologia. Porto Velho, RO, Brasil: Edufro - Editora da Universidade Federal de Rondônia, 2012, 113p.
CUNHA, Maria Valdeída do Vale. Geometria Analítica, GeoGebra e atividades dinâmicas - possibilitando um aprendizado significativo no ensino médio, 2020. 66p. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2020. [Orientador: Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira].
DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações. Volume 2. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2012.´p. 96 - 119.
DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. Geometria analítica - Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos da Matemática Elementar 9: Geometria Plana. 7ª edição. São Paulo: Atual, 1993.
FONDA, Caroline Rodrigues da Silva; SILVA, Maria José Ferreira da. Um panorama das pesquisas a respeito de área de triângulos. Revista de Produção Discente em Educação Matemática, São Paulo, v.8, n.1, p. 37-53, 2019.
GEOGEBRA. Estudo de Matrizes e Sistemas Lineares com GeoGebra. Disponível em < https://www.geogebra.org/m/haar5brw >. Acesso em: 03 nov. 2020.
GEOGEBRA. A plataforma Geogebra. Disponível em <

https://www.geogebra.org/m/K8PybR8Rmaterial/H8kRjYdu >. Acesso em: 03 nov. 2020.

HAZZAN, S.; IEZZI, G. Fundamentos da Matemática Elementar 4: Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas. 5ª edição São Paulo: Atual, 2005.

IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar 7: Geometria Analítica. 5ª edição. São Paulo: Atual, 2005.

LEONARDO, Fábio Martins de. Conexões com a Matemática. Volume 2. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2013. p. 196 - 221.

LIMA, Elon Lages. Álgebra Linear. 4 ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2014.

MORAES, Everton de Araújo. Metodologias ativas no ensino da Álgebra Linear: um estado de arte, 2020. 58p. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2020. [Orientador: Prof. Dr. Francisco Esteval da Silva Feitosa].

MROTSKOSKI, Karine Luiz Calegari. Um breve estudo sobre Matrizes: história e aplicações geométricas no contexto da Álgebra do Ensino Médio, 2019. 75p. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2019. [Orientadora: Profa. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves].

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. Geometria - Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

PARIS, Diegas Ivan. Aplicaçõe de Matrizes e Estatística no Processamento, 2019. 98p. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, 2019. [Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Bruno Zanin].

REIS, Manoel Anilton Lima. A utilização do GeoGebra no ensino das Transformações Lineares, 2020. 63p. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2020. [Orientador: Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira].

SANCHES, M.H.F. (2002). Efeitos de uma estratégia diferenciada dos conceitos de matrizes. Dissertação (Mestrado em educação matemática) UNICAMP, São Paulo.

SANTANA, Fabiana Tristão de; MACEDO, Igor Michael Araujo de; MARCONE, Marcos Henrique Fernandes; SANTANA, Fágner Lemos de. Inovação no processo de ensino e aprendizagem de álgebra linear usando o software geogebra. Brazilian Journal of Development, Curitiba, v. 5, n. 9, p. 15095-15105, 2019.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. Deretriz Curricular de Tecnologia e Inovação. São Paulo SEE, 2019.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias - 2ª edição. São Paulo SEE 2012.

SÃO PAULO. Currículo Paulista. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2019.

SILVA NETO, João Rodrigues da. A utilização do software Octave na interpretação geométrica das operações com matrizes no ensino médio. Mossoró, 2019. 77p. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2019. [Orientador: Prof. Dr. Mauricio Zuluaga Martinez].

SILVA, Ana Paula. A utilização do software GeoGebra no ensino de Geometria: uma experiência em uma turma do 3º ano do Ensino Médio, 2019. 86p. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal de São João del Rei, São João del Rei, 2019. [Orientadora: Profa. Dra. Andréia Malacarne].

VENTAVOLI, Fabiola; BORGES, Sebastião; BORGES, Rafael. Matemática Dinâmica: Software Geogebra. 2ª edição. Ministério da Cultura. Fundação Biblioteca Nacional.

8 APÊNDICES

8.1 APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO 1

1. Você tem dificuldade na aprendizagem dos conteúdos de matemática? ( )Sim ( ) Não

2. Você sabe o que é matriz? ( )Sim ( ) Não

Se sua resposta for negativa, responda: Você nunca estudou o assunto ou não se lembra?

3. Você sabe como calcular a área de triângulos? ( )Sim ( ) Não

4. Você sabe calcular a área de um polígono qualquer? ( )Sim ( ) Não

5. Em algum momento da sua vida estudantil, você utilizou determinantes para calcular a área de polígonos? ( )Sim ( ) Não

6. Você acredita que o uso do computador pode ajudá-lo(a) a aprender Matemática? ( )Sim ( ) Não

Justifique:

7. Você conhece ou já utilizou o software GeoGebra? ( )Sim ( ) Não

8.2 APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO 2

1. Como você classificaria as aulas utilizando o GeoGebra que você participou? ( ) Muito boa ( ) Boa ( ) Regular ( ) Ruim

2. O GeoGebra despertou seu interesse pelo assunto estudado? ( ) Sim ( ) Não ( ) Parcialmente

Justifique:

3. Você acredita que a utilização do GeoGebra como recurso complementar às aulas tradicionais de matemática tornaria o conteúdo mais atrativo/compreensível? ( ) Sim ( ) Não

Justifique: