

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

LILLYANE RODRIGUES CINTRA MOURA

**MODELAGEM MATEMÁTICA E CONTROLE DE UM PÊNDULO  
DE FURUTA**

DISSERTAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO  
2021

LILLYANE RODRIGUES CINTRA MOURA

# MODELAGEM MATEMÁTICA E CONTROLE DE UM PÊNDULO DE FURUTA

## Mathematical Modeling and Control of a Furuta Pendulum

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Cornélio Procópio.

Área de concentração: Ciências Mecânicas.

Linha de Pesquisa: Dinâmica de Sistemas Mecânicos.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Mendonça.

Coorientador: Prof. Dr. Marcio Aurelio Furtado Montezuma.

CORNÉLIO PROCÓPIO

2021



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



**Título da Dissertação Nº 053:**

## **“Modelagem Matemática e Controle de um Pêndulo de Furuta”.**

Por

**Lillyane Rodrigues Cintra Moura**

Orientador: **Prof. Dr. Márcio Mendonça**

Coorientador: **Prof. Dr. Marcio Aurelio Furtado Montezuma**

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA** – Área de Concentração: **Ciências Mecânicas**, linha de pesquisa: **Dinâmica de Sistemas Mecânicos**, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PPGEM – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Câmpus Cornélio Procópio, às 14h do dia 19 de AGOSTO de 2021. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos professores:

---

Prof.Dr. Márcio Mendonça  
(Orientador – UTFPR-CP)

---

Prof. Dr. Rodrigo Henrique Cunha Palácios  
(UTFPR-CP)

---

Prof. Dr. Luis Fabiano Barone Martins  
(IFPR – Jacarezinho)

---

Prof. Dr. Marcio Aurelio Furtado Montezuma  
(UTFPR-CP)

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por tudo.

Agradeço também aos meus pais Mauro e Lucinéia, a minha irmã Laeryanne, ao meu irmão de coração Ryan e ao meu esposo Jairo, por todo amor, apoio, incentivo e paciência.

Agradeço ao meu orientador prof. Dr. Márcio Mendonça e ao meu coorientador prof. Dr. Marcio Aurelio Furtado Montezuma pela oportunidade, por todas as orientações e conhecimentos transmitidos, além de todo incentivo.

Agradeço a todos os integrantes do laboratório LaSisC pela amizade, em especial Matheus e Eduardo, que também compartilharam conhecimentos que auxiliaram no desenvolvimento deste projeto.

Agradeço a todos os professores do PPGEM pela qualidade nas aulas ministradas.

Agradeço a todos que de alguma forma colaboraram para o desenvolvimento deste projeto.

Meus agradecimentos também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão de bolsa durante o desenvolvimento do projeto.

*Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota. (Santa Teresa de Calcutá).*

## RESUMO

MOURA, Lillyane Rodrigues Cintra. Modelagem Matemática e Controle de um Pêndulo de Furuta. 2021. 100 f. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

Este trabalho apresenta a dinâmica de um pêndulo de Furuta, também chamado pêndulo invertido rotacional. É um sistema não-linear, instável e que possui dois graus de liberdade. O modelo matemático que representa o sistema em questão é obtido de acordo com duas formulações, de Lagrange e de Newton-Euler. Também é desenvolvida a prototipagem virtual do sistema utilizando o software MSC ADAMS. As técnicas de controle LQR-I e seguidor com realimentação de estados são aplicadas para controlar as posições angulares do braço e do pêndulo, tanto para a modelagem obtida de forma matemática quanto para a modelagem obtida pela prototipagem virtual. As técnicas de controle são implementadas através do software Matlab/Simulink. Em seguida, é feita a análise comparativa entre os modelos obtidos com as formulações de Lagrange, de Newton-Euler e o obtido através da prototipagem virtual. Por fim, são comparados os métodos de controle.

**Palavras-chave:** Pêndulo de Furuta. Modelagem Lagrangeana. Modelagem por Newton-Euler. Sistemas de Controle.

## ABSTRACT

MOURA, Lillyane Rodrigues Cintra. Mathematical Modeling and Control of a Furuta Pendulum. 2021. 100 f. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

This work presents the dynamics of a Furuta pendulum, also called an inverted rotational pendulum. It is a nonlinear, unstable system that has two degrees of freedom. The mathematical model representing the system in question is obtained according to Lagrange and Newton-Euler. The virtual prototyping of the system is also developed using the MSC ADAMS software. The control techniques LQR-I and tracking with state feedback are applied to control the angular positions of the arm, and the pendulum, both for the modeling obtained mathematically and for the modeling obtained by virtual prototyping. Control techniques are implemented using the Matlab/Simulink software. Then, a comparative analysis is made between the models obtained with the formulations of Lagrange, Newton-Euler, and the one obtained through virtual prototyping. Finally, control methods are compared.

**Keywords:** Furuta pendulum. Lagrangian modeling. Newton-Euler modeling. Control systems.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Pêndulo de furuta da fabricante Quanser controlado. . . . .	21
Figura 2 – Diagrama de blocos para controle seguidor. . . . .	31
Figura 3 – Diagrama de blocos do LQR . . . . .	35
Figura 4 – Diagrama de blocos do LQR-I . . . . .	36
Figura 5 – Curva referente à entrada em degrau unitário explicitando as especificações da resposta transitória. . . . .	37
Figura 6 – Esquema braço-pêndulo evidenciando o sistema inercial de referência e a convenção de sentidos positivos dos deslocamentos. . . . .	39
Figura 7 – Esquema braço-pêndulo evidenciando os sistemas de coordenadas. . . . .	39
Figura 8 – Rotação de $\theta_1$ em $\hat{Z}$ (vista superior). . . . .	40
Figura 9 – Rotação de $-90^\circ$ em $\hat{Y}$ (vista lateral). . . . .	40
Figura 10 – Rotação de $180^\circ$ em $\hat{X}$ (vista lateral). . . . .	40
Figura 11 – Rotação de $\theta_2$ em $\hat{Z}$ (vista frontal). . . . .	41
Figura 12 – Círculo de Mohr para momento de inércia. . . . .	44
Figura 13 – Diagrama do sistema mostrando as velocidades angulares e dos centros de massa. . . . .	47
Figura 14 – Variação de altura do pêndulo. . . . .	52
Figura 15 – Forças e torques que agem nos elos e no centro de massa. . . . .	58
Figura 16 – Momento de inércia de massa para uma haste delgada. . . . .	61
Figura 17 – Desenho no Solidworks. . . . .	68
Figura 18 – Configuração das juntas de revolução e torque. . . . .	69
Figura 19 – Diagrama de blocos do controle seguidor para o sistema linear. . . . .	71
Figura 20 – Diagrama de blocos do controle seguidor para o sistema não-linear, pelo Adams. . . . .	72
Figura 21 – Diagrama de blocos do controle seguidor para o sistema não-linear, por formulações. . . . .	72
Figura 22 – Diagrama de blocos do controle seguidor para o sistema linear com perturbação. . . . .	73
Figura 23 – Diagrama de blocos do controle seguidor para o sistema não-linear do Adams com perturbação. . . . .	73
Figura 24 – Diagrama de blocos do controle seguidor para o sistema não-linear das formulações com perturbação. . . . .	74
Figura 25 – Diagrama de blocos do LQR-I para o sistema linear. . . . .	75
Figura 26 – Diagrama de blocos do LQR-I para o sistema não-linear, pelo Adams. . . . .	75
Figura 27 – Diagrama de blocos do LQR-I para o sistema não-linear, por formulações. . . . .	76
Figura 28 – Diagrama de blocos do LQR-I para o sistema linear com perturbação. . . . .	76



Figura 29 – Diagrama de blocos do LQR-I para o sistema não-linear do Adams com perturbação. . . . .	76
Figura 30 – Diagrama de blocos do LQR-I para o sistema não-linear das formulações com perturbação. . . . .	77
Figura 31 – Resultado da aplicação do controle seguidor nas equações lineares e não-lineares. . . . .	79
Figura 32 – Resultado da aplicação do controle LQR-I nas equações lineares e não-lineares.	80
Figura 33 – Resultado da aplicação dos controladores para uma entrada de onda quadrada.	82
Figura 34 – Resultado da aplicação dos controladores para uma entrada de onda senoidal.	83
Figura 35 – Resultado da aplicação dos controladores para uma entrada rampa de fator 1.	84
Figura 36 – Resultado da aplicação dos controladores para uma entrada de onda degrau.	85
Figura 37 – Resultado da aplicação dos controladores para uma entrada de onda degrau com perturbação. . . . .	86
Figura 38 – Diagrama de blocos da planta não-linear. . . . .	95
Figura 39 – Diagrama de blocos do subsistema de obtenção de $\ddot{\theta}_1$ . . . . .	96
Figura 40 – Diagrama de blocos do subsistema de obtenção de $\ddot{\theta}_2$ . . . . .	97

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Descrição dos principais termos utilizados para a modelagem do pêndulo de Furuta. . . . .	38
--	----

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Pontos fixos em torno dos quais é feita a linearização . . . . .	65
Tabela 2 – Dados do pêndulo de Furuta em estudo . . . . .	66
Tabela 3 – Dados do pêndulo de Furuta da fabricante Quanser . . . . .	67
Tabela 4 – Momentos de inércia. . . . .	69
Tabela 5 – NRMSE relacionado às equações, de acordo com o controle seguidor. . . . .	79
Tabela 6 – NRMSE relacionado às equações, de acordo com o controle LQR-I. . . . .	81
Tabela 7 – Comparação dos controladores quanto aos parâmetros da análise transitória. . . . .	85

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAD	<i>Computer Aided Design</i>
CAE	<i>Computer Aided Engineering</i>
CAM	<i>Computer Aided Manufacturing</i>
FSMCF	<i>Fuzzy Sliding Mode Controller with filter</i>
LQG	<i>Linear Quadratic Gaussian</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
LQR-I	<i>LQR com ação integral</i>
MIMO	<i>Multiple-Input and Multiple Output</i>
MFBS	<i>Model-Free Backstepping</i>
NRMSE	<i>Normalized Root Mean Square Error</i>
PD	<i>Proporcional e Derivativo</i>
PID	<i>Proporcional, Integral e Derivativo</i>
RNA	<i>Rede Neural Artificial</i>
SMC	<i>Sliding Mode Control</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{0}$	Matriz de zeros
$a$	Aceleração do centro de massa
$\mathbf{A}$	Matriz de estados para um sistema invariante no tempo
$\mathbf{A}(t)$	Matriz de estados para um sistema variante no tempo
$\bar{\mathbf{A}}$	Matriz de estado do sistema aumentado
$\mathbf{A}_{cl}$	Matriz de estado do sistema em malha fechada
$\mathbf{A}'_{cl}$	Matriz de estado do sistema aumentado em malha fechada
$b$	Amortecimento viscoso
$\mathbf{B}$	Matriz de entrada para um sistema invariante no tempo
$\mathbf{B}(t)$	Matriz de entrada para um sistema variante no tempo
$\bar{\mathbf{B}}$	Matriz de entrada do sistema aumentado
$\mathbf{B}'$	Matriz de entrada do sistema aumentado em malha fechada
$C$	Sistema genérico de coordenadas cartesianas
$\mathbf{C}$	Matriz de saída para um sistema invariante no tempo
$\mathbf{C}(t)$	Matriz de saída para um sistema variante no tempo
$\bar{\mathbf{C}}$	Matriz de saída do sistema aumentado
$d$	Ruído/perturbação
$\mathbf{D}$	Matriz de transmissão direta para um sistema invariante no tempo
$\mathbf{D}(t)$	Matriz de transmissão direta para um sistema variante no tempo
$e$	Ação integral sobre o erro
$\mathbf{E}$	Matriz de seleção das variáveis de saída controladas
$E_c$	Energia cinética
$E_p$	Energia potencial
$E_t$	Energia total

$f$	Força que o elo posterior exerce sobre o elo anterior
$\mathbf{f}$	Função da equação de estado não-linear e variante no tempo
$\mathbf{F}$	Matriz de seleção das variáveis de saída não controladas
$F$	Força agindo no centro de massa
$g$	Aceleração da gravidade
$\mathbf{g}$	Função da equação de saída não-linear e variante no tempo
$h$	Altura
$I$	Tensor de inércia diagonalizado
$I_{xx}$	Momento de inércia principal no eixo $x$
$I_{yy}$	Momento de inércia principal no eixo $y$
$I_{zz}$	Momento de inércia principal no eixo $z$
$II_0$	Momento de inércia de todo o sistema observado em um eixo paralelo aos eixos de centro de massa
$II_1$	Momento de inércia do braço observado em um eixo paralelo ao eixo do seu centro de massa
$II_2$	Momento de inércia do pêndulo observado em um eixo paralelo ao eixo do seu centro de massa
$\mathbf{I}$	Matriz identidade
$J$	Índice de desempenho quadrático
$\mathbf{K}$	Matriz do ganho de realimentação de estado para sistema linear
$\mathbf{K}_1$	Matriz do ganho de realimentação de estado
$\mathbf{K}_2$	Matriz de ganho relativo a integral do erro da realimentação das variáveis de saída controladas
$\bar{\mathbf{K}}$	Matriz do ganho de realimentação de estado do sistema aumentado
$l$	Número de variáveis de saída
$l_1$	Distância entre o início do braço até seu centro de massa
$l_2$	Distância entre o início do pêndulo até seu centro de massa

$L$	Função de Lagrange
$L_1$	Comprimento total do braço
$L_2$	Comprimento total do pêndulo
$m$	Número de variáveis de controle
$m_1$	Massa do braço
$m_2$	Massa do pêndulo
$M_p$	Overshoot
$n$	Número de variáveis de estado e, na formulação de Newton-Euler, número de elos
$\mathbf{n}$	Torque que o elo posterior causa no elo anterior
$N$	Momento
$p$	Número de variáveis de saída controladas
$P$	Distância do elo anterior até o elo seguinte
$P_c$	Distância do elo anterior até o centro de massa seguinte
$\mathbf{P}$	Matriz auxiliar
$q$	Coordenada generalizada
$\dot{q}$	Velocidade generalizada
$Q$	Vetor de torque
$\mathbf{Q}$	Matriz de ponderação de estados no LQR
$\mathbf{r}$	vetor referência
$R$	Matriz de rotação
$\mathbf{R}$	Matriz de ponderação de controle no LQR e matriz de rotação na modelagem
$S$	Ação
$t$	Instante de tempo
$t_d$	Tempo de atraso
$t_p$	Tempo de pico

$t_r$	Tempo de subida
$t_s$	Tempo de acomodação
$T$	Matriz de transformação
$\mathbf{u}$	Vetor de entrada
$v$	Velocidade linear
$v_c$	Velocidade do centro de massa
$\dot{v}_c$	Aceleração do centro de massa
$\mathbf{x}$	Vetor de estado
$\dot{\mathbf{x}}$	Derivada temporal do vetor de estado
$\mathbf{x}'$	Vetor de estado aumentado
$\mathbf{w}$	Vetor de saída controlada
$\mathbf{y}$	Vetor de saída
$z$	Integral do vetor de erro da realimentação de variáveis de saída controladas
$\dot{z}$	Vetor de erro da realimentação de variáveis de saída controladas
$\theta$	Deslocamento angular
$\dot{\theta}$	Derivada de primeira ordem do deslocamento angular
$\ddot{\theta}$	Derivada de segunda ordem do deslocamento angular
$\tau$	Torque
$\lambda$	Autovalor de malha fechada
$\sigma$	Conjunto de autovalores de malha fechada
$\nu$	Conjunto de autovetores de malha fechada
$\phi$	Desvio de posição do pêndulo em relação ao ângulo 0 radiano
$\Phi$	Número de partículas interagentes
$\omega$	Velocidade angular
$\Upsilon_1$	Momento de inércia principal para os eixos $y$ e $z$ do braço
$\Upsilon_2$	Momento de inércia principal para os eixos $y$ e $z$ do pêndulo



$\vartheta$  Matriz auxiliar

$\varsigma$  Matriz auxiliar

## SUMÁRIO

<b>1 – INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
1.1 PÊNULO DE FURUTA	21
1.2 OBJETIVOS	22
1.2.1 Objetivos específicos	22
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	22
<b>2 – REVISÃO DE LITERATURA</b>	<b>24</b>
<b>3 – TEORIA DE CONTROLE</b>	<b>27</b>
3.1 REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS	27
3.2 CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE	28
3.3 CONTROLE SEGUIDOR	28
3.4 REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO	32
3.4.1 Ação integral	35
3.5 ESPECIFICAÇÕES DA RESPOSTA TRANSITÓRIA	36
<b>4 – MODELAGEM MATEMÁTICA</b>	<b>38</b>
4.1 MAPEAMENTO	38
4.2 MOMENTOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA	43
4.3 FORMULAÇÃO DE LAGRANGE	44
4.3.1 Energia cinética	46
4.3.2 Energia potencial	51
4.3.3 Formalismo lagrangeano para o pêndulo de furuta	52
4.4 FORMULAÇÃO DE NEWTON-EULER	53
4.5 SIMPLIFICAÇÕES	60
4.6 LINEARIZAÇÃO	62
<b>5 – PROTOTIPAGEM VIRTUAL</b>	<b>67</b>
<b>6 – CONTROLE DO SISTEMA</b>	<b>71</b>
6.1 CONTROLE SEGUIDOR	71
6.2 CONTROLE LQR-I	74
<b>7 – ANÁLISE DOS RESULTADOS</b>	<b>78</b>
7.1 COMPARAÇÃO ENTRE EQUAÇÕES LINEARES E NÃO-LINEARES	78
7.1.1 Controle seguidor	78
7.1.2 Controle LQR-I	80

7.2	COMPARAÇÃO ENTRE CONTROLE SEGUIDOR E LQR-I . . . . .	81
<b>8</b>	<b>– CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>88</b>
8.1	TRABALHOS FUTUROS . . . . .	88
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>90</b>
	<b>Apêndices . . . . .</b>	<b>94</b>
APÊNDICE A	–Diagrama de blocos do Simulink para o subsistema da planta no modelo não-linear, de acordo com as formulações. . . . .	95
APÊNDICE B	–Diagramas de blocos dos subsistemas responsáveis pela obtenção das acelerações angulares para o diagrama apresentado no Apêndice A . . . . .	96
APÊNDICE C	–Algoritmo para controle seguidor . . . . .	98
APÊNDICE D	–Algoritmo para controle LQR-I . . . . .	100

# 1 INTRODUÇÃO

Ao analisar uma atividade sob a qual quer se ter o controle e observando o que se tem e o que se quer, qualquer variação pode ser enxergada como um erro, a depender do indivíduo observante. Quando isso acontece, automaticamente o indivíduo tende a tomar providências para que esse erro seja reduzido ou extinto. De forma similar, na engenharia existe a preocupação para que estruturas e projetos se comportem conforme o planejado e, por isso, são desenvolvidos diversos sistemas de controle a fim de obter um erro mínimo ou nulo (BOTTURA, 1982).

Um sistema de controle é uma interconexão de componentes que tem por objetivo fazer com que a resposta de saída do processo seja um valor ou ação desejada com bom desempenho, a partir de uma entrada especificada (DORF; BISHOP, 2001). Para medir o desempenho dois pontos são considerados os principais, sendo eles a resposta transitória e o erro em regime permanente. O termo resposta transitória diz respeito à velocidade com que a planta responde ao sistema de controle, pois quando a resposta é muito rápida, a mudança de comportamento é súbita e com isso outros problemas podem ser gerados. No entanto, se a resposta da planta ao sistema de controle é lenta em demasia não faz sentido tê-lo. O erro em regime permanente é quando o controle não é bem projetado ou seus parâmetros não estão corretamente especificados para o meio onde ele está sendo inserido, podendo causar várias adversidades (NISE, 2012; OGATA, 2010).

A construção de sistemas de controle, segundo Nise (2012), ocorre principalmente pelas seguintes razões:

- Amplificação de potência;
- Controle remoto;
- Conveniência da forma de entrada;
- Compensação de perturbações

Para auxiliar a compreensão, cada uma das razões é exemplificada a seguir. Uma antena de radar com baixa potência na entrada requer potência muito maior na saída, isso é resolvido com um amplificador de potência. Sistemas de controle também são aplicáveis em locais de difícil acesso ou que represente algum risco ao ser humano, permitindo assim que uma pessoa consiga controlar remotamente determinado processo. Outro ponto importante é a possibilidade de usar como entrada para um sistema de controle uma variável que lhe seja mais conveniente, para determinados controles de temperatura, por exemplo, a entrada é a posição em um termostato e a saída é o calor. Por fim, sua habilidade em compensar perturbações, como por exemplo o controle de posição e velocidade em sistemas mecânicos mesmo diante de ruído ou distúrbio, é uma outra grande vantagem (NISE, 2012).

Os primeiros relatos de sistemas de controle com realimentação datam de 300 a.C., para controle de nível na Grécia. O sistema usado na época é similar ao utilizado hoje para

nível de água na caixa de descarga de vasos sanitários. Controle de vapor e temperatura só tiveram início muito tempo depois, no século XVII. Já as primeiras tentativas para controle de velocidade datam de 1745, porém só em 1809 é que a ideia inicial foi aprimorada (NISE, 2012).

O conceito tido atualmente para sistemas de controle começou a se formar apenas durante a segunda metade do século XIX, com os termos estabilidade e direção ganhando espaço (NISE, 2012). A engenharia de controle moderno não se limita a nenhuma parte específica de estudo, pelo contrário, é aplicável a todos os ramos da engenharia na mesma proporção (DORF; BISHOP, 2001).

Em um sistema de controle a relação entrada-saída do processo corresponde à ligação causa-efeito e a forma de construir esse sistema pode ser classificado em malha aberta e malha fechada. No primeiro formato é usado um dispositivo de atuação que controla o processo de forma direta sem fazer uso de realimentação. Já no segundo formato é adicionada uma medida da saída real do processo e utilizada para comparação com a resposta desejada, essa medida extraída da saída real e que faz a realimentação do sistema é comumente chamada de sinal de retroação (DORF; BISHOP, 2001).

Para estudar os sistemas de controle é necessário, antes, saber modelar matematicamente sistemas dinâmicos e fazer análise de suas características dinâmicas. A modelagem matemática diz respeito a um grupo de equações que expressem com precisão toda a dinâmica envolvida em um sistema e a esse grupo de equações é dado o nome de modelo. Vale ressaltar que podem existir diversos modelos para um único sistema dinâmico, pois são várias as perspectivas que podem ser consideradas para descrever um sistema e cada uma delas o representa de maneira diferente (OGATA, 2010).

Desde a época de Galileu, um dos mais importantes exemplos de sistema que requer controle dinâmico e que tem sido amplamente estudado é o pêndulo. Seu nome tem origem no latim *pendere*, que quer dizer pendurar. Sua utilização pode se dar tanto para aplicação de conceitos básicos, como por exemplo para demonstrar a conservação de energia em um curso de física, quanto para abordar assuntos avançados, como o movimento caótico. A dinâmica do pêndulo oferece informações importantes para muitos problemas na engenharia relacionados a sistemas de controle e, por isso, outras configurações foram surgindo, como o pêndulo invertido (BOBROW, 2015).

Sistemas de pêndulo invertido compõem uma importante parcela de sistemas mecânicos não-lineares que apresentam problemas idênticos aos encontrados nas aplicações industriais (BAKER; BLACKBURN, 2005). O pêndulo invertido é experimentalmente muito utilizado para aplicação da teoria de controle moderno em propostas educacionais. Ele pode se apresentar com diferentes arquiteturas, sendo uma delas conhecida como pêndulo de Furuta ou também chamada de pêndulo invertido rotacional (FANTONI; LOZANO, 2002).

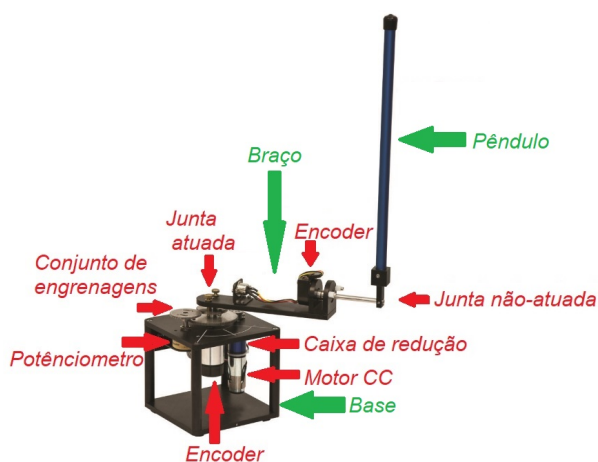
## 1.1 PÊNULO DE FURUTA

O pêndulo de Furuta foi desenvolvido por Katsuhisa Furuta e alguns colaboradores no Instituto de Tecnologia de Tóquio. Com o tempo, se tornou um sistema clássico para estudo das teorias de controle, inspirando trabalhos de diversos pesquisadores ao redor do mundo (BEECH, 2014). É um sistema não-linear, sub-atuado e que possui apenas dois graus de liberdade (RUDRA; BARAI; MAITRA, 2017).

Basicamente, é constituído por três partes principais, sendo elas, base, braço e pêndulo. De modo simplificado, cada uma das partes é explicada a seguir. A base é a parte fixa do sistema e onde se encontra o motor DC. O braço é acoplado à base e seu movimento de rotação no plano horizontal é controlado pelo motor. O pêndulo, por sua vez, é acoplado ao braço e seu movimento rotativo no plano vertical é livre em torno do ponto de acoplamento.

Esse tipo de pêndulo apresenta aplicações e propriedades adequados a laboratórios, por sua simplicidade e porque nele podem ser estudados diversos sistemas mais complexos que façam certas analogias a ele (ANTONIO-CRUZ et al., 2014). Por exemplo, em um estudo que buscava encontrar um controle manual seguro para controle de alta performance em aeronaves, um pêndulo de Furuta foi utilizado para o desenvolvimento do controlador. Uma analogia entre o controle da aeronave e o controle do braço do pêndulo de Furuta, enquanto mantém a estabilidade do pêndulo, foi considerada (AKESSON; ASTROM, 2001). Outro exemplo mais simples é que quando o pêndulo está em sua posição mais elevada ele representa fielmente um modelo simples de guindaste industrial (HAMZA et al., 2016). Além disso, o esforço para se manter em equilíbrio também se assemelha com a necessidade de permanência de um foguete na posição vertical imediatamente após seu lançamento, com o intuito de evitar que o foguete venha a se inclinar ou até a tombar (BOUBAKER, 2012).

Figura 1 – Pêndulo de furuta da fabricante Quanser controlado.



Fonte: Adaptado de Quanser (2020a)

A Figura 1 apresenta um pêndulo de furuta que atualmente é comercializado pela fabricante Quanser e que é referência para a prototipagem virtual realizada neste trabalho.

Vale ressaltar também que o pêndulo apresentado na [Figura 1](#) já está sob efeito de controlador. Além disso, os itens apontados em vermelho correspondem aos principais componentes do sistema e os itens apontados em verde equivalem às três partes principais nas quais o sistema pode ser dividido para tornar mais fácil o ato de citar, para o locutor, e de compreender, para o leitor, ao se fazer referência a uma destas partes em específico.

O controle de sistemas é algo essencial para todo campo da ciência e por esse motivo é desejável que engenheiros e cientistas tenham conhecimento tanto da teoria quanto da prática ([OGATA, 2010](#)). Diante dessa necessidade, para estreitar a relação com sistemas de controle, um sistema dinâmico com vastas aplicações reais se torna algo interessante.

O pêndulo de Furuta mesmo aparentando ser um sistema simples possibilita, com sua não linearidade e seu alto grau de instabilidade, analogias com sistemas complexos ([ANTONIO-CRUZ et al., 2014](#)).

Esta dissertação possui um diferencial em relação a outros trabalhos que é o detalhamento das modelagens por formulações de Lagrange e de Newton-Euler. Ou seja, um maior número de passos é utilizado para facilitar a compreensão dos métodos. Isto se deve ao fato de que este trabalho foi pensado para atingir em especial o público acadêmico, sendo um material ideal para um primeiro contato com esses formalismos tão utilizados. Além disso, é possível citar também a comparação entre os modelos obtidos pelos métodos de Lagrange e Newton-Euler com o modelo obtido por prototipagem virtual utilizando o Adams.

## 1.2 OBJETIVOS

Este trabalho tem por objetivo realizar a modelagem matemática de um pêndulo de Furuta utilizando tanto a formulação de Lagrange quanto a de Newton-Euler, obter o modelo dinâmico por prototipagem e desenvolver os controles LQR-I e seguidor para esse mesmo sistema dinâmico.

### 1.2.1 Objetivos específicos

- Modelar matematicamente o pêndulo de Furuta;
- Obter o modelo dinâmico através dos softwares Solidworks e Adams;
- Comparar as modelagens entre si;
- Desenvolver os controladores seguidor e LQR-I para atuar no sistema, através da plataforma Matlab/Simulink;
- Comparar os métodos de controle

## 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está estruturado em sete capítulos.

O segundo capítulo aborda uma revisão sobre trabalhos relevantes já desenvolvidos relacionados a este.

No terceiro capítulo são apresentados os parâmetros de projeto para cada controlador, bem como a teoria de variáveis de estado.

O quarto capítulo aborda as modelagens matemáticas analíticas.

A modelagem por prototipagem virtual é realizada no capítulo cinco.

O sexto capítulo apresenta o desenvolvimento dos controladores.

A análise dos resultados obtidos com os controladores é mostrada no capítulo sete.

O oitavo capítulo apresenta as conclusões deste trabalho e considerações para trabalhos futuros.



## 2 REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo tem como objetivo, apresentar alguns trabalhos científicos relacionados ao sistema pêndulo de Furuta, com diferentes metodologias. A organização é feita por ordem cronológica.

Um controle seguidor em conjunto com um controle por modos deslizantes (*sliding mode control* - SMC) é proposto em [Kurode, Chalanga e Bandyopadhyay \(2011\)](#) para um pêndulo de Furuta. Um SMC com controle seguidor atua na oscilação responsável por levar a extremidade livre do pêndulo para cima, já que o controle seguidor é feito para seguir uma trajetória de referência. Após essa extremidade livre do pêndulo atingir uma pequena variação angular do ponto desejado, é outro SMC que fica responsável por mantê-lo estável. Resultados experimentais e de simulação mostraram que o método exibiu excelentes recursos de rejeição a perturbações, foi eficiente para o objetivo proposto e que teve desempenho superior em relação a controle PD para oscilação de subida e LQR para estabilização.

No trabalho de [Quyên et al. \(2012\)](#) um pêndulo de Furuta é modelado matematicamente pelo método de Newton-Euler e é implementado um algoritmo de controle por rede neural artificial (RNA) do tipo *feedforward*, que é uma forma de rejeitar distúrbios no sistema de controle em malha fechada já que mede as variáveis de perturbação e toma ações corretivas antes que elas cheguem a afetar o processo. Os dados de entrada e saída do sistema, para treinamento da RNA, são derivados do modelo de sistema do pêndulo com o controlador PID de duas variáveis. O modelo de RNA treinado é testado calculando o erro quadrático médio. Os resultados mostraram que o controlador RNA treinado controlou com sucesso o pêndulo de Furuta e o manteve estável, com erro quadrático médio muito pequeno. Além disso, se ajustou bem quando os parâmetros do sistemas eram alterados.

[Aracil, Acosta e Gordillo \(2013\)](#) implementa uma estratégia de controle híbrida para o pêndulo de Furuta. O método *speed-gradient* é usado para a oscilação até que a extremidade livre do pêndulo esteja próxima do ponto desejado, para isso a lei de controle utiliza a velocidade medida diretamente no braço do pêndulo. Para a estabilização da posição vertical um controlador não linear baseado na abordagem *forwarding* é utilizada, a lei de controle aqui aplicada leva a um estabilizador não linear para o qual a função de Lyapunov gera uma maior estimativa quanto ao domínio de atração, se comparada com a abordagem linear. Essa estimativa é usada como uma forma de comutação na implementação prática, garantindo estabilidade assintótica para o ponto de equilíbrio desejado.

Em [Ramesh, Balamurugan e Venkatesh \(2013\)](#) foram realizados experimentos em tempo-real com o pêndulo de Furuta da fabricante Quanser e a placa de controle dSPACE DS1104 R&D. Essa placa permite a criação de diagrama de blocos do processo no Simulink para realização do controle, fornecendo para este diagrama as variáveis de entrada. Assim, a entrada do sistema é dada através da placa e a saída é obtida por meio do software dSPACE.

A estabilização do sistema é feita por LQR.

Para controle de um pêndulo de Furuta, o trabalho de [Mathew, Rao e Sivakumaran \(2013\)](#) propõe o seguinte método. Um controlador para oscilação baseado em energia, fazendo com que o pêndulo seja controlado de forma que sua energia seja direcionada para um valor igual à posição vertical em estado estacionário. Para estabilização o controle é composto por duas técnicas, sendo elas um controlador de modo deslizante (SMC), que é projetado para estabilizar o pêndulo, e um controlador com realimentação de estado, que é projetado para manter o pêndulo em pé e lidar com distúrbios até um certo ponto. O controlador com realimentação de estado é projetado usando o LQR. Entre o controle de oscilação e o controle para estabilização existe o controlador de modo, que determina quando alternar entre os dois controladores. De acordo com os resultados apresentados, uma oscilação muito mais rápida para a subida da extremidade livre do pêndulo foi obtida usando o controle baseado em energia comparado a um controlador PD. Para estabilização, um sinal de controle mais suave é produzido pelo controlador linear quadrático, no entanto, o SMC fornece mais robustez contra as incertezas dos parâmetros.

Outro projeto de controle para pêndulo de Furuta é desenvolvido em [Aguilar-Avelar e Moreno-Valenzuela \(2015\)](#). O método consiste na soma de duas ações de controle. Uma é derivada da metodologia de *feedback linearization*. A outra é uma compensação baseada em energia derivada da função de energia do sistema, projetada para assegurar o limite final uniforme das trajetórias em malha fechada. Experimentos e simulações numéricas em tempo real, mostraram a viabilidade prática do algoritmo proposto e, ao comparar com um controle seguidor apresentado previamente na literatura, mostrou melhor desempenho.

No trabalho de [Hamza et al. \(2016\)](#) a modelagem matemática do pêndulo de Furuta foi desenvolvida utilizando o método de Kane. Esta metodologia não requer o cálculo de multiplicadores ou forças redundantes. O método de Kane se baseia nas velocidades parciais dos componentes do sistema. Assim, o método de Kane se mostrou mais eficiente do que os métodos de Lagrange e Newton-Euler em termos computacionais.

O trabalho de [Casanova et al. \(2016\)](#) implementa uma estrutura de controle baseada em eventos ao pêndulo de Furuta, é um controle baseado em limite, onde os valores limites são obtidos por meio de técnicas de simulação. O controlador e a planta se comunicam através da interface de rede Ethernet com protocolo TCP/IP. A comparação entre a largura de banda usada pelo loop de controle proposto e um controle convencional sem limitações de largura de banda, que no trabalho em questão é LQR, mostrou como resultado que o método proposto reduziu significativamente a largura de banda consumida, sendo a piora no desempenho insignificante. Ou seja, a estratégia de controle baseada em limite pode ser aplicada a uma planta real com um ganho significativo no consumo de largura de banda

No trabalho de [Wen, Shi e Lu \(2017\)](#) a lei de controle da estabilização do pêndulo de Furuta é projetada com base no teorema de estabilidade de Lyapunov. Para isso é necessário construir a função logarítmica de Lyapunov. Essa função apresentou maior precisão numérica

e maior velocidade de convergência quando comparada à função quadrática usual. A lei de controle projetada pode alcançar o controle de oscilação do pêndulo de Furuta.

É proposto por [Chawla e Singla \(2017\)](#) um controlador em tempo-real usando um novo LQR robusto, que se diferencia do LQR tradicional por ser híbrido de LQR e fuzzy, justamente para melhorar sua robustez. O controlador proposto é um LQR robusto baseado no sistema de inferência neuro-fuzzy adaptativa (LQR-ANFIS). Esse controlador foi implementado em um pêndulo de Furuta no qual, para comparar a robustez entre o controlador proposto e o LQR tradicional, a massa foi alterada algumas vezes. Para essas variações de massa, o controlador proposto se mostrou mais robusto e seu desempenho foi satisfatório para os autores.

Algumas versões de controle por modos deslizantes (SMC) para estabilizar pêndulo de Furuta foram relatadas na literatura mas, de acordo com [Balamurugam, Venkatesh e Varatharajan \(2017\)](#), o sistema é estabilizado com muita vibração. Por esse motivo em seu trabalho é utilizada a união de um controlador fuzzy com um SMC, além de um filtro. A esse método de controle é dado o nome de controlador de modo deslizante difuso com filtro (*Fuzzy sliding mode controller with filter* - FSMCF). Esse tipo de controle filtra componentes de alta frequência na entrada do sistema e com isso os efeitos de vibração são reduzidos sem afetar a dinâmica de malha fechada, como mostraram os resultados obtidos.

No estudo de [Dwivedi, Pandey e Junghare \(2018\)](#) uma estratégia de controle fracionário de dois graus de liberdade (*two degree of freedom fractional order PID* - 2 DOF FOPID) para pêndulo de furuta é proposta. De acordo com os autores, o controlador 1-DOF FOPID, que compreende um único loop de feedback, é incapaz de garantir bom rastreamento e rejeitar perturbações simultaneamente. Por esse motivo o estudo se deu em torno do 2-DOF FOPID. O primeiro controlador dessa metodologia é responsável pela atenuação da perturbação enquanto que o segundo rastreia o ponto de ajuste. Uma comparação quanto ao desempenho do controlador proposto em relação ao controlador de ordem fracionária (1-DOF FOPID) e ao controlador de modo deslizante mostrou que o controlador 2-DOF FOPID obteve desempenho superior quanto a estabilização, rastreamento de trajetória e retrato de fase.

Outro trabalho apresenta um estudo do pêndulo de Furuta através da técnica *Backstepping* de modelo livre (*model-free backstepping* - MFBS). Como o próprio nome já diz, não é necessário conhecer o modelo detalhado do sistema. Para usar a técnica basta fazer uso da estrutura do sistema e das medidas do estado, que já é possível estimar a dinâmica desconhecida. A estabilidade do controle *Backstepping* proposto é comprovado com auxílio das funções de Lyapunov para controles virtuais e reais. O controle proposto foi comparado ao LQR e eles apresentaram desempenho similar ([HUANG et al., 2019](#)).

Em [Hazem, Fotuhi e Bingül \(2020\)](#) as técnicas de controle Fuzzy-LQR e Fuzzy-LQG são implementadas em um pêndulo duplo invertido rotacional. Para modelagem é utilizada a abordagem por Denavit-Hartenberg com Lagrange, além de uma modelagem numérica usando a ferramenta SimMechanics do Matlab. O objetivo é comparar os dois controladores bem como compará-los com os formatos tradicionais, LQR e LQG.

### 3 TEORIA DE CONTROLE

Neste capítulo são abordados os parâmetros e técnicas para cada projeto de controle a ser utilizado, bem como especificações da resposta transitória que permitem a comparação entre os métodos. Além disso, também são explanados a representação em espaço de estados e os termos de controlabilidade e observabilidade. Para controlar o pêndulo de Furuta é proposto que os seguintes métodos sejam utilizados, controle seguidor com realimentação de estados e regulador linear quadrático com ação integral (LQR-I).

Primeiramente, é importante fazer algumas colocações. Uma matriz com dimensão  $m \times n$  é um arranjo ordenado de  $mn$  escalares, sendo que o termo escalar equivale a qualquer variável que pertença ao conjunto de números reais.

#### 3.1 REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS

Em um sistema dinâmico não-linear, ao receber uma entrada  $u$ , o sistema apresenta equação de estado e equação de saída, ambas não-lineares, conforme Equações (1) e (2), respectivamente (OGATA, 2010).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2)$$

De acordo com Ogata (2010), após a linearização das Equações (1) e (2) em torno de um determinado ponto de operação, tem-se que

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (4)$$

Para um sistema invariante no tempo, a representação em espaço de estados tem a seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (6)$$

Sendo,  $\dot{\mathbf{x}}_{[n \times 1]}$  a derivada temporal do vetor de estados,  $\mathbf{A}_{[n \times n]}$  a matriz de estado,  $\mathbf{x}_{[n \times 1]}$  o vetor de estados,  $\mathbf{B}_{[n \times m]}$  a matriz de entrada,  $\mathbf{y}_{[l \times 1]}$  o vetor de saídas medidas,  $\mathbf{C}_{[l \times n]}$  a matriz de saída,  $\mathbf{D}_{[l \times m]}$  a matriz de transmissão direta e  $\mathbf{u}_{[m \times 1]}$  o vetor de entradas ou também

chamado vetor de controle (NISE, 2012; OGATA, 2010). A Equação (5) é chamada equação de estados e corresponde ao grupo de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem com  $n$  variáveis, onde essas variáveis equivalem às variáveis de estado. Já a segunda é chamada equação de saída e equivale à equação algébrica que retrata as variáveis de saída do sistema, relacionando linearmente variáveis de estado e de entrada (NISE, 2012).

### 3.2 CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE

Os termos controlabilidade e observabilidade visam classificar sistemas, de modo que seja fácil a identificação daqueles que apresentem solução completa para o projeto do sistema de controle. Isso porque nem todo sistema físico que possa ser observado e controlado tenha modelo matemático correspondente com essas mesmas características (OGATA, 2010).

Para um sistema ser considerado controlável no instante  $t_0$  é necessário que, utilizando um vetor de controle não limitado, seja possível transferir, em espaço de tempo finito, o sistema de qualquer estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  para qualquer estado final  $\mathbf{x}(t)$  (NISE, 2012; OGATA, 2010).

Para um sistema ser considerado observável no instante  $t_0$  ele deve permitir que, com o sistema em seu estado  $\mathbf{x}(t_0)$ , seja possível prever esse estado através da observação da saída por um intervalo de tempo finito (OGATA, 2010).

### 3.3 CONTROLE SEGUIDOR

De acordo com a definição apresentada na Seção 3.1, ao considerar um número  $p$  de variáveis de saída controlada, uma matriz  $\mathbf{E}_{[p \times n]}$  de seleção das variáveis de saída controladas e uma matriz  $\mathbf{F}_{[(l-p) \times n]}$  de seleção de saída não controladas, obtém-se a representação em espaço de estados para um sistema linearizado MIMO (*Multiple-Input and Multiple Output*) em malha aberta, que é apresentada na Equação (7) para a equação de entrada e na Equação (8) para a equação de saída. O vetor de saída controlada é definido por  $\mathbf{w} = \mathbf{E}\mathbf{x}$  e tem dimensão  $p \times 1$ , isso porque as variáveis de saída que são controladas equivalem aos  $p$  componentes iniciais de  $\mathbf{y}$ . Quando necessário pode haver alteração dos termos de  $\mathbf{y}$  para que a Equação (8) seja verdadeira. A dependência no tempo nos vetores  $\dot{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$  é omitida apenas por conveniência de notação (D'AZZO; HOUPIS, 1995).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (7)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (8)$$

A Equação (9) define matematicamente o controle seguidor com realimentação de estados. Esse tipo de controlador faz com que as variáveis de saída sejam realimentadas a fim de seguir um vetor de referência  $\mathbf{r}_{[p \times 1]}$  (D'AZZO; HOUPIS, 1995).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{w}(t) = \mathbf{r}(t) \quad (9)$$

O projeto do controle seguidor consiste na adição de um vetor comparador e integrador que satisfaça a [Equação \(10\)](#) (D'AZZO; HOUPIS, 1995).

$$\dot{z} = r - w = r - Ex \quad (10)$$

Com base nas equações citadas anteriormente nesta seção, o sistema em malha aberta aumentado é governado pela equação de estado aumentada, apresentada na [Equação \(11\)](#), e pela equação de saída aumentada, mostrada na [Equação \(12\)](#). Os termos  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{I}$  equivalem à matriz de zeros e matriz identidade, respectivamente. (D'AZZO; HOUPIS, 1995).

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} r = \bar{\mathbf{A}}x' + \bar{\mathbf{B}}u + \bar{\mathbf{B}}'r \quad (11)$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{C}}x' \quad (12)$$

Com isso, é possível observar na [Equação \(13\)](#) alguns termos importantes que são evidenciados.

$$x' = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{B}}' = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad (13)$$

O vetor  $x'$  possui dimensão  $(n+p) \times 1$ , a matriz  $\bar{\mathbf{A}}$  tem dimensão  $(n+p) \times (n+p)$ , a matriz  $\bar{\mathbf{B}}$  tem dimensão  $(n+p) \times m$ ,  $\bar{\mathbf{B}}'$  é uma matriz com dimensão  $(n+p) \times p$  e a matriz  $\bar{\mathbf{C}}$  possui dimensão  $l \times (n+p)$  (D'AZZO; HOUPIS, 1995).

A lei de controle a ser aplicada, de acordo com D'Azzo e Houpis (1995), é apresentada na [Equação \(14\)](#).

$$u = \mathbf{K}_1x + \mathbf{K}_2z = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{K}}x' \quad (14)$$

Assim, subentende-se que

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Onde  $\bar{\mathbf{K}}$  é uma matriz de dimensão  $m \times (n+p)$  que representa o ganho de realimentação de estado do sistema aumentado,  $\mathbf{K}_1$  é a matriz do ganho de realimentação dos estados, com dimensão  $m \times n$  e  $\mathbf{K}_2$  é a matriz de ganho relativo à integral do erro da realimentação das variáveis de saída controladas que possui dimensão  $m \times p$  (D'AZZO; HOUPIS, 1995).

A lei de controle citada atribui o espectro desejado de autovalores de malha fechada, se e somente se, o par de matrizes  $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}})$  for controlável. Para que esse requisito seja cumprido basta que o par de matrizes  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  seja controlável e que a [Equação \(16\)](#) seja verdadeira (D'AZZO; HOUPIS, 1995).

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{E} \end{bmatrix} = n + m \quad (16)$$

O par de matrizes  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  é controlável caso a Equação (17) seja verdadeira (D'AZZO; HOUPIS, 1995; LEWIS, 1998; LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012; NISE, 2012; OGATA, 2010).

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = n \quad (17)$$

Se a Equação (16) e a Equação (17) forem satisfeitas significa que há garantia de que as leis de controle utilizadas podem ser sintetizadas de modo que o vetor de saída da malha fechada  $\mathbf{w}$  siga o vetor de referência da entrada  $\mathbf{r}$ .

Fazendo a substituição, de acordo com a Equação (14), do termo  $u$  por  $\bar{\mathbf{K}}\mathbf{x}'$  na Equação (11) tem-se

$$\dot{\mathbf{x}}' = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}' + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}\mathbf{x}' + \bar{\mathbf{B}}'\mathbf{r} \quad (18)$$

que pode ser reescrita como

$$\dot{\mathbf{x}}' = (\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}})\mathbf{x}' + \bar{\mathbf{B}}'\mathbf{r} \quad (19)$$

Com isso, a equação de estado do sistema em malha fechada é apresentado na Equação (20) para a lei de controle da Equação (14) (D'AZZO; HOUPIS, 1995).

$$\dot{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BK}_1 & \mathbf{BK}_2 \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{r} \quad (20)$$

Escrevendo de forma resumida

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}'_{cl}\mathbf{x}' + \mathbf{B}'\mathbf{r} \quad (21)$$

Onde  $\mathbf{A}'_{cl}$  é a matriz de estado e  $\mathbf{B}'$  é a matriz de entrada, ambas do sistema aumentado em malha fechada (D'AZZO; HOUPIS, 1995).

A matriz de ganhos  $\bar{\mathbf{K}}$  pode ser obtida a partir da seleção de autovalores atribuídos à matriz  $\mathbf{A}'_{cl}$  na Equação (21). Além disso, a seleção da matriz de realimentação deve ser feita de maneira que todos os autovalores da matriz de estado da planta em malha fechada se encontrem no semiplano complexo esquerdo. Para a matriz  $\mathbf{A}'_{cl}$  os autovalores se apresentam conforme a Equação (22) e os autovetores conforme a Equação (23) (D'AZZO; HOUPIS, 1995).

$$\sigma(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+m}\} \quad (22)$$

$$\nu(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}) = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n+m}\} \quad (23)$$

Segundo D'Azzo e Houpis (1995), autovalores e autovetores se relacionam conforme a Equação (24)

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \nu_i = \lambda_i \nu_i \quad (24)$$

que pode ser reescrita na forma da Equação (25)

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} - \lambda_i \mathbf{I} \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_i \\ g_i \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n + m \quad (25)$$

onde  $\lambda_i$  é o autovalor,  $I$  é a matriz identidade,  $\nu_i$  é o autovetor,  $0$  é a matriz de zeros e

$$g_i = \bar{K}\nu_i \tag{26}$$

Para que a Equação (25) seja satisfeita é necessário que o vetor  $[\nu_i^T g_i^T]^T$  pertença ao *kernel* de  $\bar{S}(\lambda_i)$ , representado na Equação (27). A notação  $ker\bar{S}(\lambda_i)$  define o espaço nulo para o qual todos os vetores  $[\nu_i^T g_i^T]^T$  satisfazem a Equação (25) (D'AZZO; HOUPIS, 1995).

$$\bar{S}(\lambda_i) = [\bar{A} - \lambda_i I \bar{B}], \text{ para } i = 1, 2, \dots, n + m \tag{27}$$

Reescrevendo a Equação (26)

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}\nu_1 & \bar{K}\nu_2 & \dots & \bar{K}\nu_{n+m} \end{bmatrix} \tag{28}$$

pode se obter a matriz do ganho de realimentação  $\bar{K}$ , que é apresentada na Equação (29).

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_{n+m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_{n+m} \end{bmatrix}^{-1} \tag{29}$$

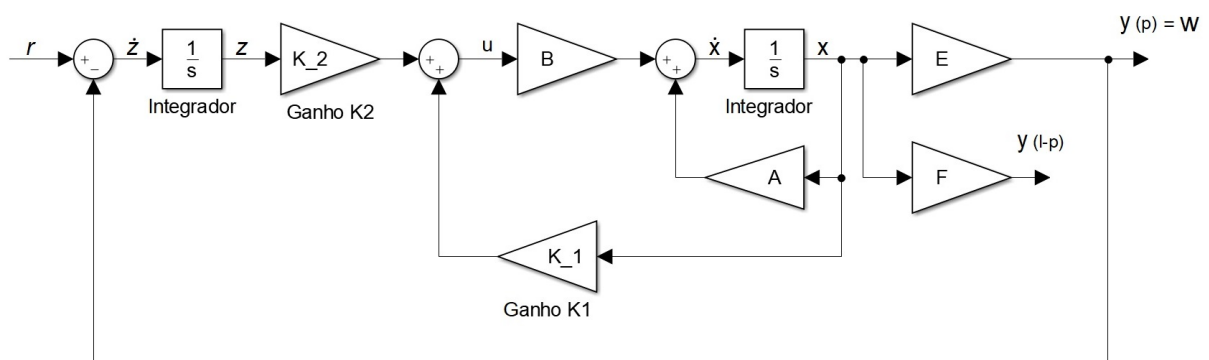
Escrevendo a Equação (29) de forma resumida

$$\bar{K} = GV^{-1} \tag{30}$$

Os autovalores podem repetir valores em um número de vezes igual ao número de entradas do sistema, devido à dimensão do espaço nulo ser igual à do número de entradas. Cada autovalor repetido se associa a um vetor da base do espaço nulo. Sendo assim, é garantida a existência de  $V^{-1}$ , pois as colunas da matriz  $V$  permanecem linearmente independentes (D'AZZO; HOUPIS, 1995).

O diagrama de blocos do controle seguidor por realimentação de estados pode ser visualizado na Figura 2.

Figura 2 – Diagrama de blocos para controle seguidor.



Fonte: Adaptada de D'Azzo e Houpis (1995)



### 3.4 REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

Pertence ao grupo de controladores conhecido como controle ótimo, que equivale a projetos de controle para sistemas dinâmicos multivariáveis que buscam a minimização de um determinado índice de desempenho (ABREU, 2008). No caso do Regulador Linear Quadrático (LQR), o que deve ser minimizado é o índice de desempenho quadrático  $J$ , que pode ser entendido como uma função de energia que quanto menor for, menos energia é necessária ao sistema em malha fechada (LEWIS, 1998). Assim sendo, o LQR visa projetar uma matriz do ganho de realimentação de estado  $\mathbf{K}$  que minimize o índice  $J$ . Para encontrar esse ganho  $\mathbf{K}$ , primeiramente é necessário definir o índice de desempenho ótimo e em seguida resolver a equação de Riccati (ALIAS, 2013).

De acordo com a representação em espaço de estados, apresentada na Seção 3.1, para um sistema linear, invariante no tempo em malha aberta, a descrição é

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (31)$$

e

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (32)$$

onde a dependência do tempo nos vetores  $\dot{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$  é omitida apenas por conveniência de notação (ALIAS, 2013). Além disso, a condição inicial é  $\mathbf{x}(0)$  (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012).

Assumindo que todos os estados são mensuráveis, a lei de controle que permite determinar a matriz do ganho de realimentação  $\mathbf{K}$ , de forma a minimizar o índice  $J$  é expressa na Equação (33) (ALIAS, 2013; LEWIS, 1998).

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (33)$$

De acordo com Lewis (1998), substituindo a Equação (33) na Equação (31), a equação de estado em malha fechada torna-se

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \quad (34)$$

Escrevendo de forma resumida

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_{cl})\mathbf{x} \quad (35)$$

onde  $\mathbf{A}_{cl}$  é a matriz de estado do sistema em malha fechada.

Para o projeto ótimo de um controle por realimentação de estado, o índice de desempenho quadrático  $J$  é definido conforme a Equação (36) (LEWIS, 1998).

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} dt \quad (36)$$

Na Equação (36), as matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  são estipuladas pelo projetista e, com isso, é possível obter diferentes respostas para um mesmo sistema em malha fechada a depender

dos valores utilizados.  $\mathbf{Q}$  corresponde à matriz de ponderação de estados, deve ser positiva semi-definida e possuir dimensão  $(n \times n)$ . Caso  $\mathbf{Q}$  selecionada seja uma matriz diagonal, seus termos devem ser positivos e pode conter alguns zeros na diagonal principal. O termo  $\mathbf{R}$  equivale à matriz de ponderação do controle, deve ser positiva definida, inversível e com dimensão  $(m \times m)$ . Caso  $\mathbf{R}$  selecionada seja uma matriz diagonal, seus termos devem ser todos positivos. Desta forma, o resultado escalar de  $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$  é sempre positivo ou zero e o resultado escalar de  $\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}$  é sempre positivo, para qualquer função de  $\mathbf{x}(t)$  em cada instante  $t$ . Quanto maior o valor de  $\mathbf{R}$ , menos esforço é solicitado para controle e quanto maior os valores de  $\mathbf{Q}$ , mais rápido os estados decaem para zero, ou seja, os pólos de  $\mathbf{A}_{cl}$  se localizam mais à esquerda do semiplano complexo esquerdo à medida que se aumentam os valores da matriz  $\mathbf{Q}$ . Como  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$  são pesos de  $J$ , é desejável que não apresentem valores muito altos, pois influenciam diretamente no valor final de  $J$  (LEWIS, 1998).

Ao substituir a Equação (33) na Equação (36), obtém-se o índice de desempenho quadrático  $J$  em função da matriz do ganho de realimentação de estado  $\mathbf{K}$  (LEWIS, 1998).

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt \quad (37)$$

Supondo a existência de uma matriz constante  $\mathbf{P}$ , presente na Equação (38), é possível determinar a matriz do ganho de realimentação de estados  $\mathbf{K}$  (LEWIS, 1998).

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} \quad (38)$$

Pode-se considerar que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável, de maneira que  $\mathbf{x}(t)$  desapareça com o tempo, ou seja,  $\mathbf{x}(\infty) \rightarrow 0$  (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012). Desta forma, como a equação do índice  $J$  é calculada através de uma integral infinita de  $\mathbf{x}(t)$ , que por facilidade de notação omite o termo  $(t)$ ,  $J$  diminui à medida que  $t$  aumenta e  $\mathbf{x}$  decresce, assim  $J$  é minimizado por  $t$  ir para infinito na integral. Assim é garantida a estabilidade do sistema. Após essa consideração e substituindo a Equação (38) na Equação (37) pode-se chegar na Equação (39). Essa equação determina o valor mínimo do índice de desempenho quadrático  $J$  (LEWIS, 1998).

$$J = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) dt = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (39)$$

Resolvendo a derivada presente no lado esquerdo da igualdade na Equação (38) têm-se a Equação (40) (LEWIS, 1998).

$$\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{x} = 0 \quad (40)$$

Ao substituir a Equação (34) na Equação (40), de maneira que se cumpra a suposição feita na Equação (38), o resultado obtido é apresentado na Equação (41).

$$(\mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T \mathbf{K}^T) \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{x} = 0 \quad (41)$$

Simplificando a [Equação \(41\)](#) encontra-se a [Equação \(42\)](#) (LEWIS, 1998).

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{B}^T \mathbf{K}^T \mathbf{P} + \mathbf{A} \mathbf{P} - \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} = 0 \quad (42)$$

Como a [Equação \(42\)](#) deve ser verdadeira para qualquer valor de  $\mathbf{x}$ , a parte entre parênteses pode ser igualada a zero, conforme [Equação \(43\)](#) (LEWIS, 1998).

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{B}^T \mathbf{K}^T \mathbf{P} + \mathbf{A} \mathbf{P} - \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} = 0 \quad (43)$$

Devido a certa complexidade para a determinação da matriz de realimentação de estados  $\mathbf{K}$ , a solução é suposta na [Equação \(44\)](#) (LEWIS, 1998).

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (44)$$

Fazendo a substituição da [Equação \(44\)](#) na [Equação \(43\)](#), bem como algumas simplificações, pode-se obter a equação quadrática matricial, conhecida por equação algébrica de Riccati, expressada na [Equação \(45\)](#). Essa equação pode ser resolvida para  $\mathbf{P}$  dadas as matrizes de estado  $\mathbf{A}$ , de entrada  $\mathbf{B}$ , de ponderação de estados  $\mathbf{Q}$  e de ponderação do controle  $\mathbf{R}$  (LEWIS, 1998).

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = 0 \quad (45)$$

Se o sistema for estável, vai sempre existir uma matriz  $\mathbf{P}$  positiva definida que satisfaça a [Equação \(45\)](#) (OGATA, 2010).

Para que uma matriz  $\mathbf{P}$  positiva definida exista é necessário que as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\sqrt{\mathbf{Q}}$  formem um par observável e que  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sejam um par controlável. As matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\sqrt{\mathbf{Q}}$  formam um par observável se a [Equação \(46\)](#) for verdadeira (LEWIS, 1998; LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012). As matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  formam um par controlável caso a [Equação \(47\)](#) seja verdadeira, como já citado na [Seção 3.3](#) (LEWIS, 1998; LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012; NISE, 2012; OGATA, 2010).

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{Q}} \\ \sqrt{\mathbf{Q}} \mathbf{A} \\ \sqrt{\mathbf{Q}} \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \sqrt{\mathbf{Q}} \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (46)$$

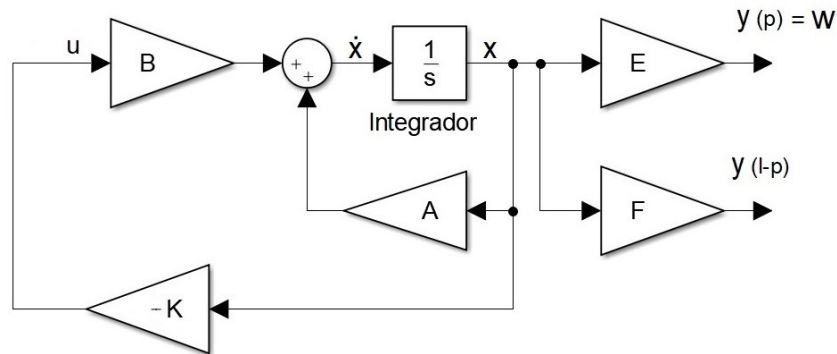
$$\text{posto} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A} \mathbf{B} & \mathbf{A}^2 \mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} = n \quad (47)$$

Com o valor de  $\mathbf{P}$  obtido, pode-se substituir seu valor na [Equação \(44\)](#) para determinar a matriz do ganho de realimentação de estados  $\mathbf{K}$ .

O diagrama de blocos do LQR é mostrado na [Figura 3](#)

O objetivo do controle LQR é que o estado  $\mathbf{x}$  seja levado a zero gastando a menor energia possível, enquanto que o objetivo do controle seguidor é fazer com que um determinado valor de referência seja seguido pelo estado controlável.

Figura 3 – Diagrama de blocos do LQR



Fonte: Autoria Própria

### 3.4.1 Ação integral

Para o LQR a lei de controle aplicada é vinculada apenas a um regulador proporcional multivariável. Assim, caso seja desejado que o estado controlável siga uma determinada referência é necessário que uma nova realimentação seja feita na estrutura do controlador, bem como a introdução de um novo regulador. A nova realimentação é usada para cálculo de erro  $e(t)$  entre a resposta do sistema e o sinal de referência. Para inserção da nova forma de regulação visando o fim do problema com erro em regime permanente, o sistema é aumentado. Desta forma, é adicionada uma ação integral do erro  $e(t)$  ao controle em malha fechada (TANG; XIAO; LI, 2017).

Na Equação (48) é apresentado o vetor integrador  $\dot{z}$  que compara a referência e a saída do sistema e que será adicionado à planta (MALKAPURE; CHIDAMBARAM, 2014).

$$\dot{z} = e = r - y \quad (48)$$

Sabendo, através da Equação (32), que  $E$  é a saída controlável e acrescentando o novo vetor integrador à Equação (31), temos a equação aumentada do sistema (MALKAPURE; CHIDAMBARAM, 2014).

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r = \bar{A}x' + \bar{B}u + \bar{B}'r \quad (49)$$

A lei de controle para o sistema aumentado é dada por

$$u = - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = -\bar{K}x' \quad (50)$$

De acordo com Malkapure e Chidambaram (2014), a derivada temporal do vetor de estado aumentado em malha fechada é obtida substituindo a Equação (50) na Equação (49).

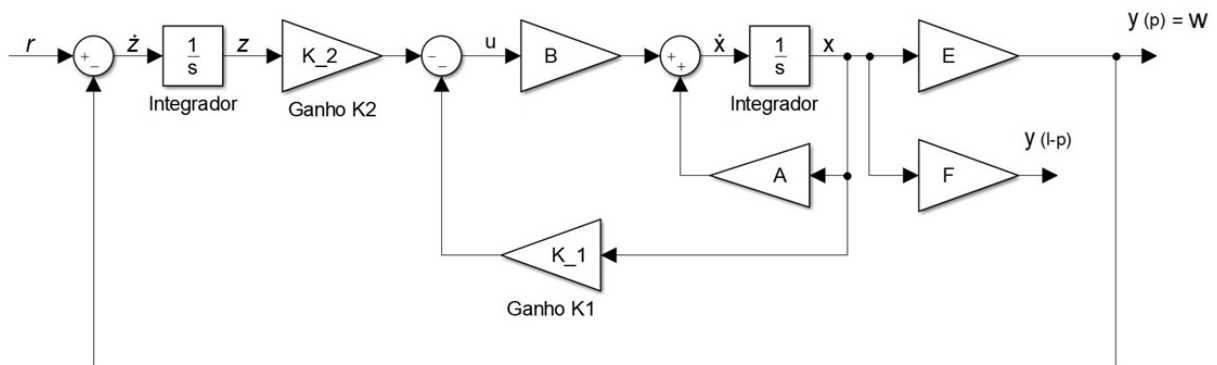
$$\dot{x}' = (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})x' + \bar{B}'r \quad (51)$$

Assim, para o LQR com ação integral a matriz de estado do sistema aumentado em malha fechada é dada por

$$A'_{cl} = \bar{A} - \bar{B}\bar{K} \quad (52)$$

O diagrama de blocos para o controle LQR com ação integral (LQR-I) é muito similar ao diagrama para controle seguidor, já que ambos utilizam a realimentação dos estados. Na Figura 4 é apresentada a estrutura em blocos do controle LQR-I.

Figura 4 – Diagrama de blocos do LQR-I



Fonte: Autoria Própria

A técnica LQR encontra a matriz de ganho  $K$  enquanto que o LQR-I, ao se utilizar as matrizes aumentadas  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$ , obtém a matriz do ganho de realimentação aumentada  $\bar{K}$ , que equivale à junção dos termos  $K_1$  e  $K_2$  em uma única matriz, ou seja,  $\bar{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$ .

### 3.5 ESPECIFICAÇÕES DA RESPOSTA TRANSITÓRIA

O desempenho de um sistema de controle é, geralmente, especificado em relação à resposta transitória a uma entrada em degrau unitário. Essa resposta transitória vai depender das condições iniciais do sistema. Para comparação das características de resposta de vários sistemas é conveniente aplicar uma condição inicial padrão, que no caso é a do sistema em repouso, com a variável de saída e suas derivadas sendo zero.

Geralmente, a resposta transitória de um sistema de controle possui características que podem ser observadas a partir das seguintes especificações: tempo de atraso, tempo de subida, tempo de pico, máximo sobressinal e tempo de acomodação (OGATA, 2010).

O tempo de atraso  $t_d$  (delay time) é o tempo necessário para a resposta alcançar a metade do seu valor final pela primeira vez.

O tempo de subida  $t_r$  (rise time) se refere ao tempo para que a resposta atinja uma porcentagem do valor final. Segundo Ogata (2010), para um sistema subamortecido normalmente é utilizado o tempo de subida de 0% a 100%.

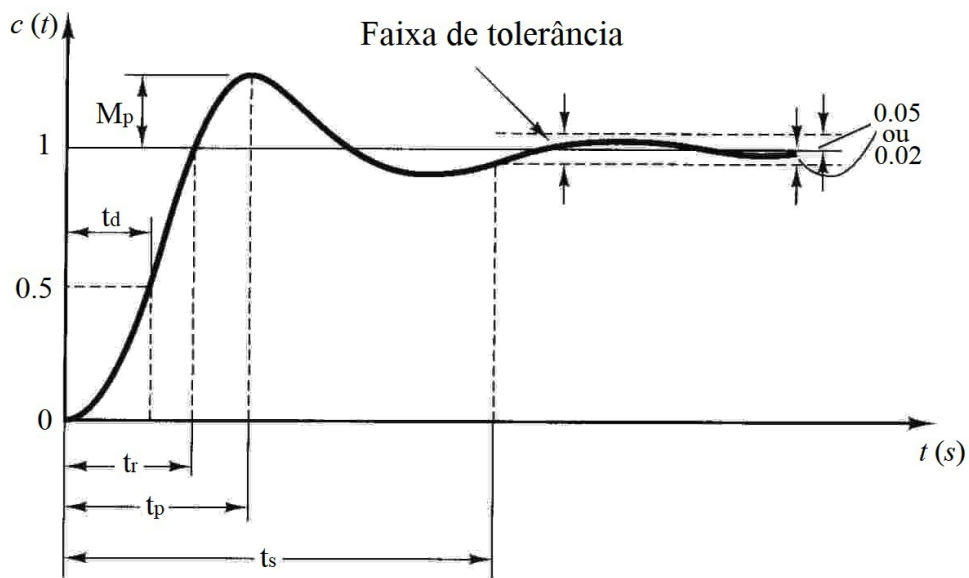
A resposta alcança o primeiro pico de sobressinal no tempo de pico  $t_p$  (peak time).

A estabilidade relativa do sistema pode ser diretamente observada a partir do valor máximo do sobressinal em porcentagem  $M_p$  (*overshoot*). Esse termo faz referência ao maior valor de pico na curva de resposta.

O tempo de acomodação  $t_s$  (*settling time*) é o tempo gasto para que a curva de resposta alcance valores em uma determinada faixa em torno do valor final, geralmente de 2% ou 5%.

Os termos acima explicados podem ser visualizados na [Figura 5](#) e obtidos diretamente pelo Matlab/Simulink.

Figura 5 – Curva referente à entrada em degrau unitário explicitando as especificações da resposta transitória.



Fonte: Adaptada de [Ogata \(2010\)](#).

## 4 MODELAGEM MATEMÁTICA

O conjunto de equações que descreve com precisão, ou consideravelmente bem, a dinâmica de um sistema dinâmico é chamado modelo matemático do sistema. Por depender de diferentes considerações que podem ser levadas em conta, diversos modelos matemáticos podem satisfazer um único sistema dinâmico (OGATA, 2010).

Neste trabalho, o modelo matemático do pêndulo de furuta é obtido por duas formulações distintas desenvolvidas em paralelo, a formulação de Lagrange, que trabalha com as energias do sistema, e a formulação de Newton-Euler, que trabalha com as forças e deslocamentos do sistema e é um método iterativo.

No Quadro 1 são apresentados os principais termos referentes ao pêndulo de furuta e que são úteis na modelagem do sistema.

Quadro 1 – Descrição dos principais termos utilizados para a modelagem do pêndulo de Furuta.

Variável	Descrição	Unidade
$\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0$	Sistema de coordenadas 0 (sistema de referência)	-
$\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1$	Sistema de coordenadas 1	-
$\hat{x}_{1'}, \hat{y}_{1'}, \hat{z}_{1'}$	Sistema de coordenadas 1'	-
$\hat{x}_{1''}, \hat{y}_{1''}, \hat{z}_{1''}$	Sistema de coordenadas 1''	-
$\hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{z}_2$	Sistema de coordenadas 2	-
$m_1$	Massa do braço	kg
$m_2$	Massa do pêndulo	kg
$L_1$	Comprimento do braço	m
$L_2$	Comprimento do pêndulo	m
$l_1$	Comprimento do ponto de rotação do braço até o seu centro de massa	m
$l_2$	Comprim. do ponto de rotação do pêndulo até o seu centro de massa	m
$b_1$	Amortecimento viscoso para o braço	N.ms/rad
$b_2$	Amortecimento viscoso para o pêndulo	N.ms/rad
$\theta_1$	Deslocamento angular do braço	Radianos
$\theta_2$	Deslocamento angular do pêndulo	Radianos
$\tau_1$	Torque que o motor DC aplica no braço	N.m

Fonte: Autoria própria

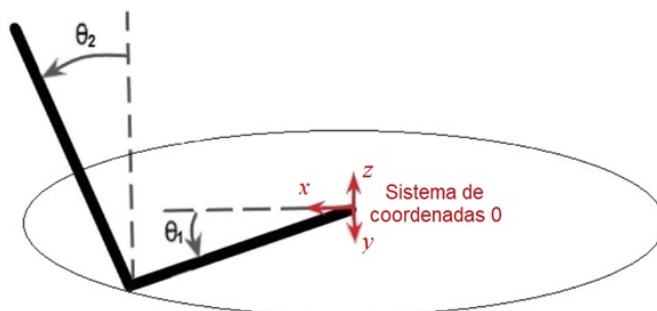
O desenvolvimento deste capítulo tem como base o trabalho de Cazzolato e Prime (2011) e o livro de Craig (2012).

### 4.1 MAPEAMENTO

Para ambas as formulações faz-se necessário, primeiramente, a localização do sistema dinâmico no espaço. Para isso, a Figura 6 evidencia o sistema inercial de referência (sistema de

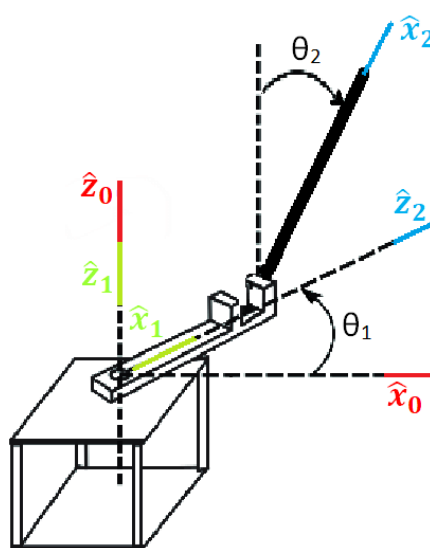
coordenadas  $\{0\}$ ) e os sentidos positivos dos deslocamentos do pêndulo de Furuta, enquanto que a [Figura 7](#) mostra os principais sistemas de coordenadas utilizados.

Figura 6 – Esquema braço-pêndulo evidenciando o sistema inercial de referência e a convenção de sentidos positivos dos deslocamentos.



Fonte: Autoria Própria

Figura 7 – Esquema braço-pêndulo evidenciando os sistemas de coordenadas.



Fonte: Adaptada de [Scaciota et al. \(2019\)](#)

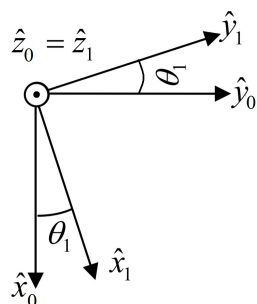
Foram utilizados quatro sistemas de coordenadas, além do sistema de coordenadas, sendo que o sistema  $\{1\}$  coincide com o sistema inercial de referência  $\{0\}$  quando  $\theta_1=0$ . Para descrever o deslocamento do braço, é necessário rotacionar, em  $\theta_1$ , o eixo  $\hat{Z}$  do sistema  $\{0\}$  para um sistema de coordenadas  $\{1\}$ , conforme a [Figura 8](#).

Na [Figura 9](#) pode-se observar a rotação de  $-90^\circ$  em torno do eixo  $\hat{Y}$ , além de uma translação com magnitude  $L_1$ , para levar o sistema  $\{1\}$  para o sistema de coordenadas  $\{1'\}$ .

O sistema  $\{1'\}$  deve ser rotacionado em  $180^\circ$  em torno do eixo  $\hat{X}$  para que possa ser reescrito no sistema de coordenadas  $\{1''\}$ . Na [Figura 10](#) é apresentada uma ilustração do sistema de coordenadas  $\{1''\}$ .

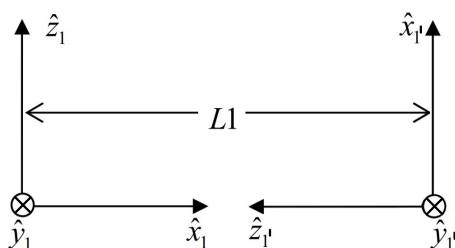


Figura 8 – Rotação de  $\theta_1$  em  $\hat{Z}$  (vista superior).



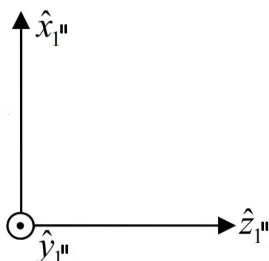
Fonte: Adaptada de [Dulley e Machado \(2003\)](#)

Figura 9 – Rotação de  $-90^\circ$  em  $\hat{Y}$  (vista lateral).



Fonte: Adaptada de [Dulley e Machado \(2003\)](#)

Figura 10 – Rotação de  $180^\circ$  em  $\hat{X}$  (vista lateral).



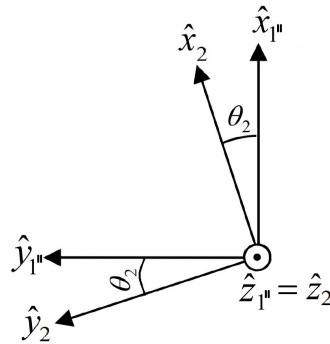
Fonte: Adaptada de [Dulley e Machado \(2003\)](#)

O deslocamento angular observado no pêndulo é descrito a partir da rotação de  $\theta_2$  no eixo  $\hat{Z}$  do sistema  $\{1''\}$ , levando-o para o sistema de coordenadas  $\{2\}$ , conforme a [Figura 11](#). Para todos os casos deve-se analisar o sentido positivo da rotação.

Para rotacionar o sistema de coordenadas  $\{0\}$  e levá-lo até o sistema de coordenadas  $\{2\}$ , é necessário encontrar as matrizes de rotação de cada sistema de coordenadas.

Cada uma das matrizes de rotação é fruto de produto escalar de um par de vetores unitários, como mostrado na [Equação \(53\)](#). Como o produto escalar de dois vetores unitários resulta no cosseno do ângulo formado entre eles, os componentes das matrizes rotacionais são

Figura 11 – Rotação de  $\theta_2$  em  $\hat{Z}$  (vista frontal).



Fonte: Adaptada de [Dulley e Machado \(2003\)](#)

muitas vezes chamados de cossenos direcionais.

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} \quad (53)$$

As linhas da matriz expressa na [Equação \(53\)](#) são os vetores unitários do sistema de coordenadas {A} escritos no sistema de coordenadas {B}. Ou seja,

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B\hat{X}_A^T \\ {}^B\hat{Y}_A^T \\ {}^B\hat{Z}_A^T \end{bmatrix} \quad (54)$$

Isso permite afirmar que a matriz de rotação do sistema {B} para sua descrição no sistema {A} é igual à matriz de rotação transposta do sistema {A} para sua descrição no sistema {B}, e vice-versa.

$$\begin{aligned} {}^A_B R &= {}^B_A R^{-1} = {}^B_A R^T \\ {}^B_A R &= {}^A_B R^{-1} = {}^A_B R^T \end{aligned} \quad (55)$$

As matrizes que descrevem as rotações do pêndulo de furuta são obtidas, neste trabalho, utilizando os ângulos de Euler. Nessa representação, as rotações são realizadas nos eixos do sistema de coordenadas em movimento e ocorrem com um ângulo  $\alpha$  no eixo  $\hat{Z}$ , com um ângulo  $\beta$  no eixo  $\hat{Y}$  e com ângulo  $\gamma$  no eixo  $\hat{X}$ . A ordem das matrizes de rotação na multiplicação deve obedecer a ordem em que os eixos são rotacionados. Cada rotação leva em consideração a posição atualizada do eixo a ser rotacionado. A matriz de rotação pelos ângulos Z-Y-X de Euler é dada pela multiplicação das três matrizes de rotação, referentes aos três eixos considerados com os respectivos ângulos ([CRAIG, 2012](#)).

$${}^A_B R_{Z'Y'X'} = R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_X(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & 0 \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \text{sen}(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\text{sen}(\gamma) \\ 0 & \text{sen}(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \quad (56)$$

Como a [Equação \(56\)](#) leva do sistema de coordenadas de número maior para o de número menor e, neste trabalho, o sentido escolhido vai do sistema de coordenadas de número menor para o de número maior é necessário aplicar a [Equação \(55\)](#), ou seja, deve ser calculada a transposta ou a inversa da matriz encontrada na [Equação \(53\)](#) para se obter a matriz desejada. Montando a matriz de rotação que descreve o movimento do braço, pela [Figura 8](#), é possível perceber que há uma rotação de  $\theta_1$  no eixo  $\hat{Z}$ . Assim,

$${}^0_1 R_{Z'Y'X'} = R_Z(\theta_1) R_Y(0^\circ) R_X(0^\circ) \quad (57)$$

Aplicando a [Equação \(55\)](#),

$${}^1_0 R_{Z'Y'X'} = {}^0_1 R_{Z'Y'X'}^T = \text{Transposta}[R_Z(\theta_1) \cdot R_Y(0^\circ) \cdot R_X(0^\circ)] \quad (58)$$

Resultando em:

$${}^1_0 R_{Z'Y'X'} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \text{sen}(\theta_1) & 0 \\ -\text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (59)$$

A seguir a [Equação \(56\)](#) é aplicada para encontrar a matriz de rotação que descreve o movimento do pêndulo. Aqui, o ângulo  $\theta_1$  é considerado igual a  $0^\circ$ , ou seja, o sistema de coordenadas  $\{1\}$  é coincidente com o sistema de coordenadas  $\{0\}$ , isso porque a posição inicial do braço ( $\theta_1$ ), independente de qual ângulo seja, vai passar a influenciar o pêndulo da mesma maneira que se fosse  $0^\circ$ . Então, é feito o cálculo da matriz de rotação que leva o sistema de coordenadas  $\{1\}$  para o sistema de coordenadas  $\{2\}$ .

$${}^2_1 R = {}^2_{1''} R \cdot {}^1''_1 R \cdot {}^1'_1 R \quad (60)$$

Aplicando então os ângulos de Euler e sabendo que por esse cálculo o sistema de coordenadas em movimento é escrito em relação ao sistema de coordenadas fixo, é necessário observar os ângulos que permitem escrever o sistema  $\{2\}$  em relação ao sistema  $\{1\}$  para, só depois, finalmente conseguir escrever  ${}^2_1 R$ .

$${}^2_1 R_{Y'X'Z'} = {}^1_2 R_{Y'X'Z'}^T = \text{Transposta}[R_Y(-90^\circ) \cdot R_X(180^\circ) \cdot R_Z(\theta_2)] \quad (61)$$

Resultando em

$${}^2_1 R_{Y'X'Z'} = \begin{bmatrix} 0 & -\text{sen}(\theta_2) & \cos(\theta_2) \\ 0 & -\cos(\theta_2) & -\text{sen}(\theta_2) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

Considerando translação e rotação, as matrizes de transformação referentes à descrição dos sistemas  $\{0\}$  no sistema de coordenadas  $\{1\}$  e  $\{1\}$  no sistema de coordenadas  $\{2\}$  são, respectivamente:

$${}^1_0T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \text{sen}(\theta_1) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$${}^2_1T = \begin{bmatrix} 0 & -\text{sen}(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & -\cos(\theta_2) & -\text{sen}(\theta_2) & L_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Lembrando que a matriz de transformação é uma construção que une, de forma geral, translação e rotação na forma de uma única matriz.

## 4.2 MOMENTOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA

São nove os termos capazes de caracterizar totalmente as propriedade inerciais de um corpo, sendo que seis deles são independentes entre si. Essas propriedades inerciais podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (65)$$

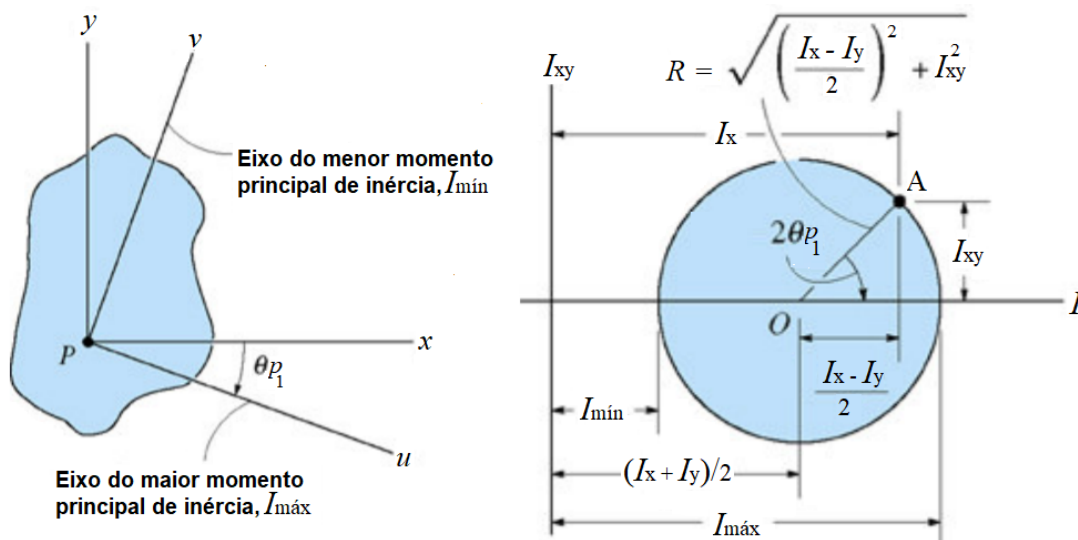
Essa forma de apresentação das propriedade inerciais de um corpo é conhecida por tensor de inércia. Em geral, para cada ponto  $O$  é possível especificar uma única orientação para os eixos coordenados capaz de anular os produtos de inércia. Para isso basta construir o chamado círculo de Mohr, com seu centro no ponto  $(a, O)$  e sendo  $a = (I_x + I_y)/2$ . O objetivo é encontrar os momentos principais de inércia que são calculados em relação aos eixos principais (HIBBELER, 2005).

Na [Figura 12](#) é possível observar os principais dados utilizados para a montagem do círculo de Mohr. Neste exemplo, admite-se que os termos  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_{xy}$  são constantes e que se deseja transformá-los nos momentos principais de inércia, por outro lado é considerado que  $I_u$  e  $I_v$  são variáveis.

Os momentos principais de inércia  $I_{max}$  e  $I_{min}$  são identificados ao observar os pontos onde o círculo intercepta a abscissa.  $I_{xy}$  pode ser tanto positivo quanto negativo (HIBBELER, 2005).

No caso do sistema em estudo neste trabalho, os termos que se deseja transformar nos momentos principais de inércia são  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  e  $I_{zz}$ . Assim, pode-se reescrever o tensor de inércia conforme a [Equação \(66\)](#) para o tensor de inércia do braço e como [Equação \(67\)](#) para

Figura 12 – Círculo de Mohr para momento de inércia.



Fonte: Adaptada de Hibbeler (2005)

o tensor de inércia do pêndulo.

$$I_1 = \begin{bmatrix} I_{1xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{1yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{1zz} \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} I_{2xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2zz} \end{bmatrix} \quad (67)$$

É dito que o tensor de inércia está diagonalizado quando se é escrito com valores diferentes de zero apenas os três termos dos momentos de inércia principais (HIBBELER, 2005).

### 4.3 FORMULAÇÃO DE LAGRANGE

Para um sistema com  $n$  graus de liberdade, há  $n$  variáveis independentes que variam com o tempo e são chamadas coordenadas generalizadas. Geralmente, essas variáveis são representadas da seguinte forma:  $q_1, q_2, \dots, q_i$ . Ao derivar no tempo as coordenadas generalizadas tem-se como resultado as velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$  (VILLATE, 2019). A função de Lagrange, também conhecida como lagrangeana, é definida como sendo uma configuração dependente das coordenadas generalizadas, das velocidades generalizadas e do tempo, que resulta no mesmo valor que a diferença entre as energias cinética e potencial, conforme Equação (68) (AGUIAR, 2011).

$$L(q, \dot{q}, t) = E_c - E_p \quad (68)$$

A partir do princípio variacional de Hamilton pode ser obtida a equação de Lagrange. O princípio de Hamilton é considerado o mais geral e também o mais famoso princípio variacional da Mecânica, além disso também é citado como sendo um dos que possuem aplicação mais simples (JÚNIOR, 2011; TREDNICK, 2005; AGUIAR, 2011).

O princípio variacional de Hamilton diz que considerando qualquer trajetória pelas quais um sistema dinâmico pode se deslocar de um ponto a outro (sendo esses pontos fixos), dentro de um determinado intervalo de tempo, a trajetória escolhida pelo sistema é aquela que minimiza a integral de tempo da diferença entre as energias cinética e potencial (AIUTA, 2003). Em outras palavras, a ação  $S$  é mínima, ou estacionária no caso de sistemas conservativos, sempre que os pontos inicial e final da trajetória forem fixos, conforme Equação (69).  $S$  é uma grandeza que possui dimensões de energia  $\times$  tempo ou comprimento  $\times$  momento (AGUIAR, 2011).

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (69)$$

Para a utilização deste princípio é necessário que os vínculos do sistema sejam holônomos. Sabendo que os vínculos são limitações de configurações possíveis de deslocamento com relação às coordenadas de posição e velocidade das partículas do sistema, considerando o sistema genérico de coordenadas cartesianas  $C_1, C_2, \dots, C_\Phi$ , onde  $\Phi$  é o número de partículas interagentes, os vínculos são chamados holônomos caso consigam descrever o posicionamento do sistema apenas considerando deslocamento, seja este ângulo, comprimento, etc, podendo ser escritos como na Equação (70). Em outras palavras, caso as coordenadas consigam definir completamente a configuração do sistema, dando a localização de cada partícula interagente num dado instante  $t$ , ele pode ser dito com vínculos holônomos (AGUIAR, 2011).

$$f(C_1, C_2, \dots, C_\Phi, t) = 0 \quad (70)$$

De acordo com este princípio, o caminho escolhido por um sistema para ir de um determinado ponto inicial até um final, é sempre aquele que torna nula a primeira variação de  $S$ . Ao impor que o primeiro valor para  $S$  seja nulo já é obtida a equação de Lagrange (AGUIAR, 2011; AIUTA, 2003).

$$\frac{\partial(\partial L)}{\partial t(\partial \dot{q}_i)} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (71)$$

No entanto, para sistemas com vínculos não-holônomos há a possibilidade de algumas manipulações matemáticas para que possa ser possível estender a aplicação do princípio de Hamilton. Para isso, faz-se necessário o uso de multiplicadores de Lagrange. Basicamente, são removidos os vínculos e aplicadas forças externas de maneira que se obtenha o mesmo movimento. Após uma série de cálculos, a equação de Lagrange resultante é mostrada na Equação (72) (AGUIAR, 2011).

$$\frac{\partial(\partial L)}{\partial t(\partial \dot{q}_i)} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (72)$$

onde  $Q$  é uma força externa.

O princípio de Hamilton e o formalismo lagrangeano não levam em consideração sistemas dissipativos. Por isso, caso seja necessária a inserção de algum termo dissipativo na equação de Lagrange é preciso introduzir a chamada função de dissipação de Rayleigh, que pode adicionar um termo relativo a amortecimento viscoso, por exemplo (SANTOS, 2012).

Desta forma, a equação de Lagrange pode ser escrita em um formato mais geral, adicionando uma força oriunda dos vínculos não-holônomo, que podem ser torques ou forças translacionais, e um termo de dissipação, conforme Equação (73) (SANTOS, 2012; TREDNICK, 2005).

$$\frac{\partial(\partial L)}{\partial t(\partial \dot{q}_i)} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + b_i \dot{q}_i = Q_i \quad (73)$$

Para este trabalho,  $b$  é o amortecimento viscoso e  $Q$  é o torque.

A fim de facilitar a compreensão, alguns termos da Equação (73) são expandidos a seguir.

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (77)$$

A aplicação dos multiplicadores de Lagrange e da função de dissipação de Rayleigh não são totalmente descritas e nem possuem equações deduzidas devido aos extensos cálculos aplicados, disposição dessas deduções em livros e por não ser o foco de estudo deste trabalho.

Conhecendo o formato da lagrangeana é possível perceber que o primeiro passo para conseguir encontrar a equação de movimento do pêndulo de Furuta é calcular as energias cinética e potencial.

#### 4.3.1 Energia cinética

Para a energia cinética o cálculo é feito de maneira a somar a energia resultante do movimento linear com a energia resultante do movimento angular, pois para o sistema em estudo há velocidade linear ( $v$ ) e velocidade angular ( $\omega$ ).

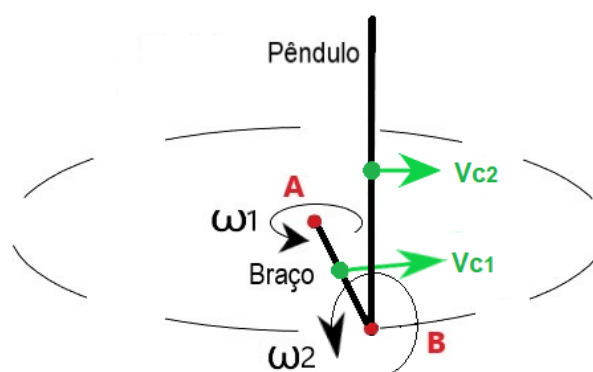
Assim, a energia cinética é calculada por:

$$E_c = \frac{m \cdot v_c^2}{2} + \frac{I \cdot \omega^2}{2} \quad (78)$$

Os termos  $m$  e  $I$  são constantes e correspondem, respectivamente, à massa e momento de inércia principal. Por outro lado  $v_c$  e  $\omega$  precisam ser calculados, sendo  $v_c$  a velocidade linear do centro de massa e  $\omega$  a velocidade angular.

Antes dos cálculos das velocidades é necessário observar os pontos do pêndulo de Furuta que são importantes para o cálculo das velocidades para que possam ser encontradas as posições. A Figura 13 ilustra esses pontos. Os pontos A e B correspondem às juntas base-braço e braço-pêndulo, respectivamente.

Figura 13 – Diagrama do sistema mostrando as velocidades angulares e dos centros de massa.



Fonte: Autoria própria

A velocidade angular  $\omega$  é a taxa temporal de variação na posição angular. Então, ocorre uma variação  $d\theta$  para cada intervalo de tempo  $dt$ , ou seja, a velocidade angular equivale à derivada do deslocamento angular em relação ao tempo. A unidade de medida é geralmente rad/s (HIBBELER, 2011). Isso é válido quando a diferença de um sistema de coordenadas para o outro é apenas o deslocamento angular, com as origens sendo coincidentes.

Para sistemas onde há mais que uma velocidade rotacional agindo sobre um elo, a soma dessas velocidades pode acontecer quando os vetores  $\omega$  puderem ser escritos com relação a um mesmo sistema de coordenadas. Desta forma, a velocidade angular do elo atual  $i+1$  é igual à velocidade angular do elo anterior  $i$  multiplicado pela matriz de rotação, que leva a velocidade  $\omega_i$  do sistema de coordenadas  $\{i\}$  para o sistema de coordenadas  $\{i+1\}$ , após essa multiplicação é então possível adicionar a componente causada pela velocidade angular do elo atual  $i+1$ , componente esta que é formada pela multiplicação da velocidade  $\dot{\theta}_{i+1}$  pelo vetor que representa o eixo  $\hat{Z}$ , que sofre rotação já que é por padrão o eixo ao longo do elo. A velocidade angular do elo atual  $i+1$  pode ser escrita com relação ao sistema de coordenadas  $\{i+1\}$ , segundo Craig (2012), da seguinte forma

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (79)$$



sendo

$$\dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = {}^{i+1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (80)$$

Para o pêndulo de Furuta existem duas velocidades angulares, uma em torno da junta A e outra em torno da junta B (Figura 13), que aqui são chamadas  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , respectivamente. Para  $\omega_1$ , representada no sistema de coordenadas  $\{1\}$ ,

$${}^1\omega_1 = {}^1_0 R \cdot {}^0\omega_0 + \dot{\theta}_1 \cdot {}^1\hat{Z}_1 \quad (81)$$

A Equação (84) zera seu primeiro termo já que não existe velocidade angular atuando no sistema de coordenadas  $\{0\}$ . Assim,

$${}^1\omega_1 = 0 + \dot{\theta}_1 \cdot {}^1\hat{Z}_1 \quad (82)$$

$${}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (83)$$

A velocidade angular  $\omega_2$  sofre influência de  $\omega_1$ , então nenhum termo é nulo na Equação (79). Representando a velocidade angular  $\omega_2$  no sistema de coordenadas  $\{2\}$ , a aplicação da Equação (79) fica

$${}^2\omega_2 = {}^2_1 R \cdot {}^1\omega_1 + \dot{\theta}_2 \cdot {}^2\hat{Z}_2 \quad (84)$$

$${}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2) \\ -\dot{\theta}_1 \text{sen}(\theta_2) \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (85)$$

A velocidade linear em um determinado ponto pode ser gerada por várias situações como, por exemplo, a partir de uma rotação a certa distância do ponto em questão. Neste caso, a velocidade linear é calculada por meio de um produto vetorial entre a velocidade angular e a distância do eixo de rotação até o ponto. Esse exemplo se aplica ao pêndulo de Furuta, porém para analisar o sistema como um todo é necessário levar em conta todas as velocidades lineares atuantes. Para cada elo é importante considerar a velocidade linear do elo anterior, pois ela influencia os movimentos seguintes.

Assim, a velocidade linear do elo  $i+1$  para a origem do sistema de coordenadas  $\{i+1\}$  é igual à velocidade linear do sistema de coordenadas  $\{i\}$  acrescido com um termo gerado pela velocidade angular no elo  $i$  e, para levar essa velocidade do sistema de coordenadas  $\{i\}$  para o sistema de coordenadas  $\{i+1\}$ , em seguida deve ser feita a multiplicação do resultado obtido pela matriz de rotação  ${}^i_{i+1}R$  (CRAIG, 2012).

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^i_{i+1} R ({}^i v_i + {}^i \omega_i \times P) \quad (86)$$

onde  $P$  é o vetor posição (vai do elo  $i$  até o elo  $i+1$ ).

Desta forma, como são desejadas as velocidades lineares dos centros de massa, o início dos cálculos se dá na junta base-braço e prossegue até o centro de massa do pêndulo.

Para a junta base-braço (ponto A da [Figura 13](#)), sabendo que a base é a peça anterior à junta e não possui velocidade alguma, pode-se concluir que não há velocidade linear para as origens dos sistemas de coordenadas  $\{0\}$  e  $\{1\}$ .

$${}^0v_0 = {}^0_{0-1} R ({}^{0-1}v_{0-1} + {}^{0-1}\omega_{0-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \quad (87)$$

$${}^1v_1 = {}^1_0 R ({}^0v_0 + {}^0\omega_0 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \quad (88)$$

$${}^0v_0 = {}^1v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (89)$$

A velocidade linear do centro de massa do braço ( $v_{c1}$  da [Figura 13](#)) é a próxima a ser calculada. Ela deve ser escrita no sistema de coordenadas  $\{1\}$ , pois o braço se desloca rotacionalmente e o sistema que está em movimento é o  $\{1\}$  e não o  $\{0\}$ . No ponto anterior, na junta base-braço do sistema de coordenadas  $\{1\}$ , há velocidade angular  $\omega_1$ , como já mostrado na [Figura 13](#). Como  $v_1$  e  $\omega_1$  já estão no sistema de coordenadas no qual é desejado que  $v_{c1}$  esteja, não é preciso realizar a multiplicação pela matriz de rotação, pois a conversão de um sistema para outro já foi feita individualmente para cada velocidade na [Equação \(84\)](#) e na [Equação \(88\)](#). Assim,

$${}^1v_{c1} = {}^1v_1 + {}^1\omega_1 \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (90)$$

$${}^1v_{c1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1 l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (91)$$

O próximo ponto onde a velocidade linear deve ser encontrada é na junta braço-pêndulo. Como a velocidade encontrada aqui deve ser utilizada na sequência para calcular a velocidade linear do centro de massa do pêndulo no sistema de coordenadas  $\{2\}$ , então para essa junta o cálculo já é feito no sistema de coordenadas  $\{2\}$  a fim de facilitar os cálculos seguintes. Note que existem apenas dois elos para o pêndulo de frente, um na junta base-braço e outro na junta braço-pêndulo, então as velocidades linear e angular utilizadas para o cálculo da velocidade linear da junta braço-pêndulo (elo 2) deve-se levar em conta as velocidades da junta

base-braço (elo 1), já que a velocidade linear do centro de massa do braço só foi encontrada por ser requerida para o cálculo da energia cinética e não por ser fundamental para calcular a velocidade do próximo elo visto que ela própria não se encontra em um elo. Desta forma, a velocidade linear na junta braço-pêndulo é dada por

$${}^2v_2 = {}^2R({}^1v_1 + {}^1\omega_1 \times \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \quad (92)$$

$${}^2v_2 = \begin{bmatrix} -L_1\dot{\theta}_1 \text{sen}(\theta_2) \\ -L_1\dot{\theta}_1 \text{cos}(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (93)$$

Conhecendo a velocidade da junta braço-pêndulo no sistema de coordenadas  $\{2\}$  é possível calcular a velocidade linear do centro de massa do pêndulo,  $v_{c2}$ , no sistema de coordenadas  $\{2\}$  sem precisar multiplicar pela matriz de rotação  ${}^2R_1$ .

$${}^2v_{c2} = {}^2v_2 + {}^2\omega_2 \times \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (94)$$

$${}^2v_{c2} = \begin{bmatrix} -L_1\dot{\theta}_1 \text{sen}(\theta_2) \\ l_2\dot{\theta}_2 - L_1\dot{\theta}_1 \text{cos}(\theta_2) \\ l_2\dot{\theta}_1 \text{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (95)$$

A partir destes resultados e utilizando a [Equação \(78\)](#), é possível calcular as energias cinéticas do braço e do pêndulo para, em seguida, calcular a energia cinética total do pêndulo de furuta.

- Para o braço

$$E_{c1} = \frac{m_1 \cdot v_{c1}^2}{2} + \frac{I_1 \cdot \omega_1^2}{2} \quad (96)$$

Mas, para possibilitar os cálculos, é necessário reescrever como

$$E_{c1} = \frac{m_1 \cdot v_{c1}^T \cdot v_{c1}}{2} + \frac{\omega_1^T \cdot I_1 \cdot \omega_1}{2} \quad (97)$$

Assim, a energia cinética do braço é

$$E_{c1} = \frac{m_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 \cdot l_1^2}{2} + \frac{I_{1zz} \cdot \dot{\theta}_1^2}{2} \quad (98)$$

- Para o pêndulo

$$E_{c2} = \frac{m_2 \cdot v_{c2}^2}{2} + \frac{I_2 \cdot \omega_2^2}{2} \quad (99)$$

Reescrevendo

$$Ec_2 = \frac{m_2 \cdot v_{c2}^T \cdot v_{c2}}{2} + \frac{\omega_2^T \cdot I_2 \cdot \omega_2}{2} \quad (100)$$

Sendo assim, a energia cinética para o pêndulo é

$$Ec_2 = \frac{1}{2} [((I_{2zz} + l_2^2 m_2) \dot{\theta}_2^2 - 2L_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + (I_{2xx} + L_1^2 m_2) \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_2) + (I_{2yy} + (L_1^2 + l_2^2) m_2) \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_2))] \quad (101)$$

A energia cinética total é

$$Ec_{total} = Ec_1 + Ec_2 \quad (102)$$

$$Ec_{total} = \frac{1}{2} [I_{1ZZ} \dot{\theta}_1^2 + m_1 \dot{\theta}_1^2 l_1^2 + I_{2zz} \dot{\theta}_2^2 + I_{2xx} \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_2) + I_{2yy} \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_2) + (L_1^2 m_2 + l_2^2 m_2) \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_2) - 2L_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + L_1^2 m_2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_2) + (l_2^2 m_2) \dot{\theta}_2^2] \quad (103)$$

#### 4.3.2 Energia potencial

A equação geral da energia potencial é

$$Ep = mg\Delta h \quad (104)$$

onde  $m$  é a massa,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\Delta h$  é a variação da altura.

- Para o braço

A altura do braço não se altera já que ele não possui nenhuma movimentação verticalmente. Então, ao aplicar a [Equação \(104\)](#) para o centro de massa do braço o resultado obtido é

$$Ep_1 = m_1 g 0 \quad (105)$$

$$Ep_1 = 0[\text{Joules}] \quad (106)$$

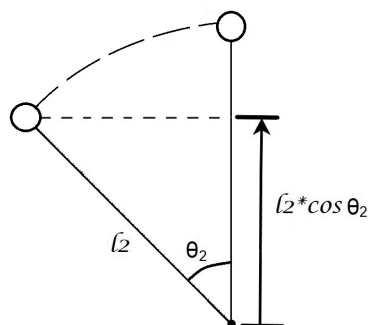
- Para o pêndulo

O movimento do pêndulo é rotacional e ocorre na direção vertical, portanto há variação de altura. A [Figura 14](#) ilustra como acontece essa variação na altura do centro de massa.

Observando a imagem acima e de acordo com [Faria \(2015\)](#), é possível concluir que a variação de altura do centro de massa do pêndulo equivale a

$$\Delta h = l_2 \cos(\theta_2) \quad (107)$$

Figura 14 – Variação de altura do pêndulo.



Fonte: Autoria própria

Aplicando na [Equação \(104\)](#), a energia potencial do centro de massa do pêndulo é

$$Ep_2 = m_2 g l_2 \cos(\theta_2) \quad (108)$$

Com isso, a energia potencial total do pêndulo de Furuta é

$$Ep_{total} = Ep_1 + Ep_2 \quad (109)$$

$$Ep_{total} = m_2 g l_2 \cos(\theta_2) \quad (110)$$

### 4.3.3 Formalismo lagrangeano para o pêndulo de furuta

Sabendo que a lagrangeana é a diferença entre as energias cinética e potencial, é possível agora encontrá-la. Aplicando a [Equação \(68\)](#), o resultado é

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} [I_{1zz} \dot{\theta}_1^2 + m_1 \dot{\theta}_1^2 l_1^2 + I_{2zz} \dot{\theta}_2^2 + m_2 \dot{\theta}_2^2 l_2^2 - 2l_2 m_2 (g + L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \cos(\theta_2) + (I_{2xx} + L_1^2 m_2) \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_2) + (I_{2yy} + (L_1^2 + l_2^2) m_2) \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_2)] \quad (111)$$

Utilizando a lagrangeana para calcular as derivadas da [Equação \(73\)](#):

- Derivadas primárias

$$-\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (112)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -(l_2 m_2 (g + L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) - (I_{2xx} - I_{2yy} - l_2^2 m_2) \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2)) \sin(\theta_2) \quad (113)$$

- Derivadas secundárias

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= I_{1zz} \ddot{\theta}_1 + l_1^2 m_1 \ddot{\theta}_1 + L_1^2 m_2 \ddot{\theta}_1 - L_1 l_2 m_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + I_{2xx} \ddot{\theta}_1 \cos^2(\theta_2) + \\ &L_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_2^2 \text{sen}(\theta_2) + I_{2yy} \dot{\theta}_1 \text{sen}^2(\theta_2) + l_2^2 m_2 \dot{\theta}_1 \text{sen}^2(\theta_2) - I_{2xx} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}(2\theta_2) + \\ &I_{2yy} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}(2\theta_2) + l_2^2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}(2\theta_2) \end{aligned} \quad (114)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = I_{2zz} \ddot{\theta}_2 + l_2^2 m_2 \ddot{\theta}_2 - L_1 l_2 m_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) + L_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2) \quad (115)$$

Assim, a equação de movimento do pêndulo de furuta pelo formalismo lagrangeano da [Equação \(73\)](#) é

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \dot{\theta}_1 + I_{1zz} \ddot{\theta}_1 + l_1^2 m_1 \ddot{\theta}_1 + L_1^2 m_2 \ddot{\theta}_1 - L_1 l_2 m_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + I_{2xx} \ddot{\theta}_1 \cos^2(\theta_2) + \\ L_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_2^2 \text{sen}(\theta_2) + (I_{2yy} + l_2^2 m_2) \dot{\theta}_1 \text{sen}^2(\theta_2) - I_{2xx} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}(2\theta_2) + \\ I_{2yy} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}(2\theta_2) + l_2^2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}(2\theta_2) \\ b_2 \dot{\theta}_2 + I_{2zz} \ddot{\theta}_2 + l_2^2 m_2 \ddot{\theta}_2 - L_1 l_2 m_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) - gl_2 m_2 \text{sen}(\theta_2) + \\ (I_{2xx} - I_{2yy} - l_2^2 m_2) \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \text{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (116)$$

#### 4.4 FORMULAÇÃO DE NEWTON-EULER

Outra forma de encontrar a equação de movimento do pêndulo de furuta é através das forças e momentos que agem no sistema. Para isso, é necessário utilizar a segunda lei de Newton em conjunto com a equação de Euler para momento.

A equação da segunda lei de Newton afirma que a força resultante  $F$  que age sobre um corpo é igual ao produto da massa  $m$  pela aceleração  $\dot{v}_c$  do centro de massa do corpo ([CRAIG, 2012](#)).

$$F = m \dot{v}_c \quad (117)$$

A equação de Euler para momento afirma que em um corpo com velocidade angular  $\omega$  e aceleração angular  $\dot{\omega}$ , o momento  $N$  que gera esse movimento é dado por

$${}^i N_i = {}^i I_i \dot{\omega}_i + {}^i \omega_i \times {}^i I_i \omega_i \quad (118)$$

onde,  ${}^i I$  corresponde ao tensor de inércia do corpo no sistema de coordenadas  $\{i\}$  ([CRAIG, 2012](#)).

Iniciando os cálculos pela equação de Newton, é necessário encontrar a aceleração linear nos centros de massa do braço e do pêndulo para, somente em seguida, conseguir solucionar a [Equação \(117\)](#). Porém, cada velocidade linear desse sistema é gerada a partir de uma velocidade angular a uma distância  $l$  do centro de massa onde a velocidade linear é

desejada, então não há como calcular diretamente as acelerações lineares. Assim, os cálculos devem partir das velocidades angulares.

As velocidades angulares podem ser resgatadas da [Subseção 4.3.1](#). Assim, as velocidades angulares aplicadas nesta formulação são as mesmas obtidas nas Equações (83) e (85) para  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , respectivamente.

A propagação da aceleração angular de um elo a outro pode ser mensurada da seguinte forma. Supondo que o sistema  $\{i+1\}$  é rotacionado em relação ao sistema  $\{i\}$  com  $\dot{\theta}_{i+1}$  escrito em  $\{i+1\}$  e que o sistema  $\{i\}$  está girando em relação a  $\{i-1\}$  com  $\omega_i$  escrito no sistema de coordenadas  $\{i\}$ , sabe-se que a [Equação \(79\)](#), apresentada na [Subseção 4.3.1](#) expressa a propagação da velocidade angular elo a elo. Como a taxa de variação de velocidade no tempo equivale à derivada da velocidade com relação ao tempo, ao realizar a derivada da [Equação \(79\)](#) e somar com um novo componente causado pela aceleração rotacional na junta  $i+1$ , o resultado obtido é

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^i{}^{i+1}\mathbf{R}^i\dot{\omega}_i + {}^i{}^{i+1}\mathbf{R}^i\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (119)$$

O Primeiro termo é a aceleração angular do elo anterior rotacionado do sistema de coordenadas  $\{i\}$  para o sistema de coordenadas  $\{i+1\}$ . O segundo termo é o produto vetorial entre as velocidades angulares em elos diferentes, resultando na aceleração por elas causada. O terceiro termo é a aceleração ocasionada pela derivada segunda do deslocamento aplicado no elo atual, já que a aceleração é a taxa de variação temporal da velocidade e a velocidade é a taxa de variação temporal do deslocamento. Assim,

$${}^1\dot{\omega}_1 = {}_0^1\mathbf{R}^0\dot{\omega}_0 + {}_0^1\mathbf{R}^0\omega_0 \times \dot{\theta}_1 {}^1\hat{Z}_1 + \ddot{\theta}_1 {}^1\hat{Z}_1 \quad (120)$$

$${}^1\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (121)$$

e

$${}^2\dot{\omega}_2 = {}_1^2\mathbf{R}^1\dot{\omega}_1 + {}_1^2\mathbf{R}^1\omega_1 \times \dot{\theta}_2 {}^2\hat{Z}_2 + \ddot{\theta}_2 {}^2\hat{Z}_2 \quad (122)$$

$${}^2\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2) \\ -\ddot{\theta}_1 \text{sen}(\theta_2) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (123)$$

A aceleração linear em cada elo (pontos A e B da [Figura 13](#)), sendo que cada elo também é ponto de origem de cada sistema de coordenadas, pode ser encontrada por meio da seguinte equação.

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^i{}^{i+1}\mathbf{R}^i[\dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1}) + {}^i \dot{v}_i] \quad (124)$$

O primeiro termo diz respeito à aceleração linear gerada a partir da aceleração angular do elo anterior a uma distância determinada pelo vetor P, ou seja, aceleração tangencial. Assim como uma velocidade angular em um elo anterior a uma determinada distância do próximo elo gera uma velocidade linear no próximo elo, o mesmo ocorre ao se tratar de aceleração, resultando então, no primeiro termo da [Equação \(124\)](#). O segundo termo diz respeito à aceleração centrípeta. Por definição,  $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$ . Como, também, é possível escrever a aceleração em função da velocidade angular, conforme explicado para o primeiro termo, ocorre  $a = \omega \times \frac{ds}{dt} = \omega \times v$ , onde  $ds$  é o deslocamento ocorrido de um ponto a outro linearmente. O terceiro e último termo adiciona a aceleração linear que já existia no elo anterior ([CRAIG, 2012](#)).

Para a junta base-braço, a aceleração linear é

$${}^1\dot{v}_1 = {}^1R[{}^0\dot{\omega}_0 \times {}^0P_1 + {}^0\omega_0 \times ({}^0\omega_0 \times {}^0P_1) + {}^0\dot{v}_0] \quad (125)$$

O termo  ${}^0\dot{v}_0$  é a aceleração existente na junta base-braço. O efeito da gravidade é incluído por meio da inserção de uma aceleração da estrutura da base com intensidade  $g$ , no sentido oposto ao da gravidade. Assim, a base está sofrendo uma aceleração para cima com exatamente  $g$  de intensidade, neutralizando a aceleração que a gravidade está aplicando no sistema. Desta forma, a aceleração linear causada pela ação da gravidade na junta base-braço é

$${}^0\dot{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (126)$$

Aplicando isso na [Equação \(125\)](#)

$${}^1\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (127)$$

Para a junta braço-pêndulo, a aceleração linear é

$${}^2\dot{v}_2 = {}^2R[{}^1\dot{\omega}_1 \times {}^1P_2 + {}^1\omega_1 \times ({}^1\omega_1 \times {}^1P_2) + {}^1\dot{v}_1] \quad (128)$$

$${}^2\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} g \cos(\theta_2) - L_1\ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2) \\ -L_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) - g \sin(\theta_2) \\ -L_1\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \quad (129)$$

As acelerações lineares dos centros de massa podem ser encontradas através de uma equação similar à [Equação \(124\)](#). A diferença da [Equação \(130\)](#) para a [Equação \(124\)](#) é que não é necessário alterar os sistemas de coordenadas, pois as variáveis já estão nos sistemas desejados, e o vetor P agora deve ser trocado pelo vetor  $P_c$ , devido à mudança do ponto de



interesse da aceleração. O vetor  $Pc$  é responsável pela ligação entre o elo anterior até o centro de massa seguinte.

$${}^i\dot{v}_{ci} = {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i Pc_i + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i Pc_i) + {}^i\dot{v}_i \quad (130)$$

Para o centro de massa do braço,

$${}^1\dot{v}_{c1} = {}^1\dot{\omega}_1 \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + {}^1\omega_1 \times ({}^1\omega_1 \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) + {}^1\dot{v}_1 \quad (131)$$

o resultado obtido é

$${}^1\dot{v}_{c1} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 \\ l_1\ddot{\theta}_1 \\ g \end{bmatrix} \quad (132)$$

Para o centro de massa do pêndulo

$${}^2\dot{v}_{c2} = {}^2\dot{\omega}_2 \times \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + {}^2\omega_2 \times ({}^2\omega_2 \times \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) + {}^2\dot{v}_2 \quad (133)$$

resultando em

$${}^2\dot{v}_{c2} = \begin{bmatrix} -l_2\dot{\theta}_2^2 + g \cos(\theta_2) - \dot{\theta}_1^2 l_2 \sin^2(\theta_2) - \ddot{\theta}_1 L_1 \sin(\theta_2) \\ l_2\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_2) - g \sin(\theta_2) - l_2\dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) \\ -L_1\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_2 l_2 \cos(\theta_2) + l_2\ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (134)$$

Com todos os dados necessários já calculados, é possível agora solucionar as Equações (117) e (118). Essas duas equações calculam as forças e momentos nos centros de massa, que são influenciados pelos elos anteriores.

O vetor força agindo no centro de massa do braço é

$${}^1F_1 = m_1\dot{v}_{c1} \quad (135)$$

$${}^1F_1 = m_1 \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 \\ l_1\ddot{\theta}_1 \\ g \end{bmatrix} \quad (136)$$

No centro de massa do pêndulo, a força é

$${}^2F_2 = m_2\dot{v}_{c2} \quad (137)$$

$${}^2F_2 = m_2 \begin{bmatrix} -l_2\dot{\theta}_2^2 + g \cos(\theta_2) - \dot{\theta}_1^2 l_2 \sin^2(\theta_2) - \ddot{\theta}_1 L_1 \sin(\theta_2) \\ l_2\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_2) - g \sin(\theta_2) - l_2\dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) \\ -L_1\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 l_2 \cos(\theta_2) + l_2\ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (138)$$

Aplicando na [Equação \(118\)](#) as velocidades calculadas, para o braço tem-se que

$${}^1N_1 = {}^1I_1 {}^1\dot{\omega}_1 + {}^1\omega_1 \times {}^1I_1 {}^1\omega_1 \quad (139)$$

$${}^1N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{1zz}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (140)$$

e para o pêndulo

$${}^2N_2 = {}^2I_2 {}^2\dot{\omega}_2 + {}^2\omega_2 \times {}^2I_2 {}^2\omega_2 \quad (141)$$

$${}^2N_2 = \begin{bmatrix} I_{2yy}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - I_{2zz}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) + I_{2xx}(\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)) \\ I_{2xx}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - I_{2zz}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + I_{2yy}(-\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2)) \\ I_{2zz}\ddot{\theta}_2 + I_{2xx}\dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) - I_{2yy}\dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (142)$$

Após encontrar as forças e momentos nos centros de massa, que sofrem influência dos elos anteriores, devem ser feitos os cálculos para as forças e momentos que elos posteriores causam nos anteriores. Vale lembrar que o elo 1 (ponto A da [Figura 13](#)) é base-braço, o elo 2 (ponto B da [Figura 13](#)) é braço-pêndulo e a extremidade livre do pêndulo é, momentaneamente, considerado elo 3. A [Equação \(143\)](#) calcula a força e a [Equação \(144\)](#) calcula o torque, que o elo posterior exerce sobre o elo anterior, respectivamente. Essas equações são avaliadas elo a elo, iniciando pelo elo n e indo em direção à base do pêndulo.

$${}^i f_i = {}^i_{i+1} R^{i+1} f_{i+1} + {}^i F_i \quad (143)$$

$${}^i n_i = {}^i N_i + {}^i_{i+1} R^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{C_i} \times {}^i F_i + {}^i P_{i+1} \times {}^i_{i+1} R^{i+1} f_{i+1} \quad (144)$$

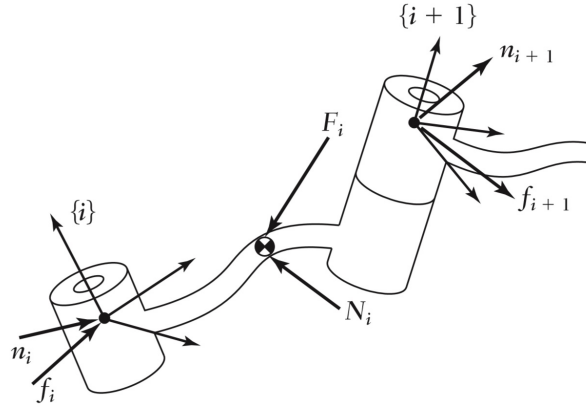
As forças e torques em cada elo e no centro de massa são representados na [Figura 15](#) a fim de facilitar a compreensão dos termos utilizados na [Equação \(143\)](#) e na [Equação \(144\)](#).

Analizando a influência que o “elo 3” exerce no elo 2

$${}^2 f_2 = {}^2_3 R^3 f_3 + {}^2 F_2 \quad (145)$$

$${}^2 n_2 = {}^2 N_2 + {}^2_3 R^3 n_3 + {}^2 P_{C_2} \times {}^2 F_2 + {}^2 P_3 \times {}^2_3 R^3 f_3 \quad (146)$$

Figura 15 – Forças e torques que agem nos elos e no centro de massa.



Fonte: Craig (2012)

Como o elo 3 na realidade não é um elo, pois é uma extremidade livre, não há uma força  $f_3$  e nem um torque  $n_3$  agindo, então

$${}^2f_2 = {}^2F_2 \quad (147)$$

$${}^2f_2 = m_2 \begin{bmatrix} -l_2\dot{\theta}_2^2 + g \cos(\theta_2) - \dot{\theta}_1^2 l_2 \sin^2(\theta_2) - \ddot{\theta}_1 L_1 \sin(\theta_2) \\ l_2\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_2) - g \sin(\theta_2) - l_2\dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) \\ -L_1\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 l_2 \cos(\theta_2) + l_2\ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (148)$$

e

$${}^2n_2 = {}^2N_2 + {}^2P_{C_2} \times {}^2F_2 \quad (149)$$

$${}^2n_2 = \begin{bmatrix} I_{2yy}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - I_{2zz}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) + I_{2xx}(\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)) \\ L_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_1^2 + I_{2xx}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - I_{2zz}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - 2l_2^2 m_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \\ -l_2^2 m_2 \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2) + I_{2yy}(-\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2)) \\ I_{2zz}\ddot{\theta}_2 + l_2^2 m_2 \ddot{\theta}_2 - L_1 l_2 m_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) - g l_2 m_2 \sin(\theta_2) + I_{2xx}\dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) \\ -I_{2yy}\dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) - l_2^2 m_2 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (150)$$

Observando a influência que o elo 2 exerce sobre o elo 1, verifica-se que é necessário adotar a matriz  ${}^2_1R^T$  para  ${}^1_2R$ , pois o sentido desejado é o oposto. Então

$${}^1f_1 = {}^1_2R^2f_2 + {}^1F_1 \quad (151)$$

$${}^1f_1 = \begin{bmatrix} -l_1m_1\dot{\theta}_1^2 + m_2(-L_1\dot{\theta}_1^2 + 2l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + l_2\ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2)) \\ l_1m_1\ddot{\theta}_1 - m_2 \cos(\theta_2)(l_2\ddot{\theta}_2 - L_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) - g \sin(\theta_2) - l_2\dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2)) \\ -m_2 \sin(\theta_2)(-l_2\dot{\theta}_2^2 + g \cos(\theta_2) - L_1\ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2) - l_2\dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_2)) \\ gm_1 - m_2 \sin(\theta_2)(l_2\ddot{\theta}_2 - L_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) - g \sin(\theta_2) - l_2\dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2)) \\ +m_2 \cos(\theta_2)(-l_2\dot{\theta}_2^2 + g \cos(\theta_2) - L_1\ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2) - l_2\dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_2)) \end{bmatrix} \quad (152)$$

e

$${}^1n_1 = {}^1N_1 + {}^1_2R^2n_2 + {}^1P_{c_1} \times {}^1F_1 + {}^1P_2 \times {}^1_2R^2f_2 \quad (153)$$

$${}^1n_1 = \begin{bmatrix} (I_{2zz} + l_2^2m_2)\ddot{\theta}_2 - gl_2m_2 \sin(\theta_2) - \cos(\theta_2)(L_1l_2m_2\ddot{\theta}_1 - (I_{2xx} - I_{2yy}) \\ -l_2^2m_2)\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2)) \\ -gl_1m_1 - gL_1m_2 + I_{2zz}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + l_2^2m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - (I_{2xx} - I_{2yy} - l_2^2m_2) \\ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(2\theta_2) + L_1l_2m_2\ddot{\theta}_2 \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)(L_1l_2m_2(-\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \\ +(-I_{2xx} + I_{2yy} + l_2^2m_2)\ddot{\theta}_1 \sin\theta_2) \\ \frac{1}{2}(2I_{1zz}\ddot{\theta}_1 + I_{2xx}\ddot{\theta}_1 + I_{2yy}\ddot{\theta}_1 + 2l_1^2m_1\ddot{\theta}_1 + 2L_1^2m_2\ddot{\theta}_1 + l_2^2m_2\ddot{\theta}_1 - \\ 2L_1l_2m_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + (I_{2xx} - I_{2yy} - l_2^2m_2)\ddot{\theta}_1 \cos(2\theta_2) + \\ 2L_1l_2m_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2) - 2I_{2xx}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) + 2I_{2yy}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) + \\ 2l_2^2m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2)) \end{bmatrix} \quad (154)$$

Os torques das juntas podem ser encontrados utilizando a componente Z do torque aplicado por um elo ao seu vizinho, pois para girar o braço e o pêndulo é necessário girar o eixo z, que por padrão é o eixo ao longo da junta. Desta forma,

$$\tau_i = {}^i n_i^T {}^i \hat{Z}_i \quad (155)$$

Resolvendo a equação anterior para a junta base-braço (elo 1) e fazendo algumas simplificações, o torque é

$$\tau_1 = {}^1 n_1^T {}^1 \hat{Z}_1 \quad (156)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 = & b_1\dot{\theta}_1 + I_{1zz}\ddot{\theta}_1 + l_1^2m_1\ddot{\theta}_1 + L_1^2m_2\ddot{\theta}_1 - L_1l_2m_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + I_{2xx}\ddot{\theta}_1 \cos^2(\theta_2) \\ & + L_1l_2m_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2) + (I_{2yy} + l_2^2m_2)\ddot{\theta}_1 \sin^2(\theta_2) - I_{2xx}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) + \\ & I_{2yy}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) + l_2^2m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) \end{aligned} \quad (157)$$

Para a junta braço-pêndulo (elo 2) o torque encontrado após simplificações é

$$\tau_2 = {}^2\mathbf{n}_2^T {}^2\hat{Z}_2 \quad (158)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & b_2\ddot{\theta}_2 + I_{2zz}\ddot{\theta}_2 + l_2^2 m_2 \ddot{\theta}_2 - L_1 l_2 m_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) - gl_2 m_2 \text{sen}(\theta_2) + \\ & I_{2xx} \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \text{sen}(\theta_2) - I_{2yy} \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \text{sen}(\theta_2) - l_2^2 m_2 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \text{sen}(\theta_2) \end{aligned} \quad (159)$$

Unindo os resultados, a equação de movimento é

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \dot{\theta}_1 + I_{1zz} \ddot{\theta}_1 + l_1^2 m_1 \ddot{\theta}_1 + L_1^2 m_2 \ddot{\theta}_1 - L_1 l_2 m_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + I_{2xx} \dot{\theta}_1 \cos^2(\theta_2) \\ + L_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_2^2 \text{sen}(\theta_2) + (I_{2yy} + l_2^2 m_2) \dot{\theta}_1 \text{sen}^2(\theta_2) - I_{2xx} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}(2\theta_2) + \\ I_{2yy} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}(2\theta_2) + l_2^2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}(2\theta_2) \\ b_2 \ddot{\theta}_2 + I_{2zz} \ddot{\theta}_2 + l_2^2 m_2 \ddot{\theta}_2 - L_1 l_2 m_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) - gl_2 m_2 \text{sen}(\theta_2) + \\ I_{2xx} \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \text{sen}(\theta_2) - I_{2yy} \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \text{sen}(\theta_2) - l_2^2 m_2 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \text{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (160)$$

Assim, a equação de movimento do pêndulo de furuta encontrada pelo formalismo de Newton-Euler é idêntica à equação obtida pelo formalismo Lagrangeano.

#### 4.5 SIMPLIFICAÇÕES

A equação de movimento encontrada pode ser simplificada baseando-se em considerações relevantes e que são mencionadas a seguir.

- Quanto aos momentos de inércia:

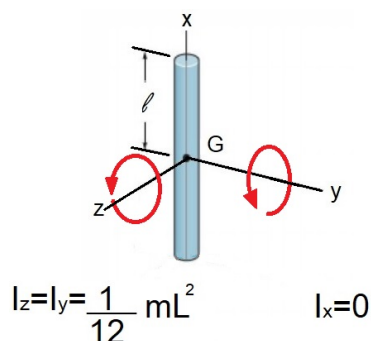
A maioria dos modelos de pêndulo de furuta apresentam uma estrutura similar, sendo braço e pêndulo hastes delgadas. Neste trabalho vamos considerar o pêndulo de furuta em estudo como sendo um desses modelos, já que a versão da fabricante Quanser utilizada para teste computacional do sistema de controle possui essa característica.

Para formas geométricas comuns existem equações tabeladas referentes aos momentos de inércia. Na [Figura 16](#) são apresentadas as equações para o momento de inércia de massa em cada eixo, para uma haste delgada. É importante lembrar que o momento de inércia é a resistência à rotação em torno de um eixo.

É possível notar na [Figura 16](#) que em dois dos eixos o momento de inércia permanece o mesmo e que para o eixo ao longo da haste o momento de inércia de massa pode ser considerado nulo devido à sua insignificância em relação aos outros dois, para uma haste delgada.

Desta forma, na equação de movimento os termos  $I_{1xx}$  e  $I_{2xx}$  devem ser substituídos por zero e os termos  $I_{yy}$  e  $I_{zz}$  devem ser igualados. Assim, para facilitar, a partir de agora são usados os termos  $\Upsilon_1$  e  $\Upsilon_2$  que equivalem, respectivamente, a  $\Upsilon_1 = I_{1yy} = I_{1zz}$  e  $\Upsilon_2 = I_{2yy} = I_{2zz}$ .

Figura 16 – Momento de inércia de massa para uma haste delgada.



Fonte: Adaptada de [Hibbeler \(2011\)](#)

- Quanto ao teorema dos eixos paralelos:

O teorema dos eixos paralelos enuncia uma relação entre o momento de inércia observado em um eixo que atravessa o centro de massa do objeto, o momento de inércia observado em um eixo paralelo ao que atravessa o centro de massa, e a distância  $Pc$  entre os dois eixos. Assim, através desse teorema torna-se possível transferir o momento de inércia de um corpo em relação ao eixo que corta seu centro de massa  $G$  para um outro eixo que passe por outra parte do objeto ([HIBBELER, 2011](#)). Como o centro de rotação do braço e do pêndulo se dá em suas extremidades e não coincide com o centro de massa, esse teorema deve ser aplicado.

Considerando que a origem de  $x', y', z'$  coincide com o centro de massa do corpo e que a origem de  $x, y, z$  coincide com a origem do ponto onde está localizada a rotação do corpo, as equações do teorema dos eixos paralelos são escritas, de acordo com [Hibbeler \(2011\)](#), como

$$\begin{aligned}
 II_x &= Ix' + m(Pc_x)^2 \\
 II_y &= Iy' + m(Pc_y)^2 \\
 II_z &= Iz' + m(Pc_z)^2
 \end{aligned} \tag{161}$$

Aplicando o teorema no sistema em estudo,

$$\begin{aligned}
 II_1 &= \Upsilon_1 + m_1(l_1)^2 \\
 II_2 &= \Upsilon_2 + m_2(l_2)^2
 \end{aligned} \tag{162}$$

Além disso, para o sistema como um todo, considerando o pêndulo na posição desejada de  $0^\circ$ , o teorema dos eixos paralelos relaciona o braço e o pêndulo com o eixo do motor da seguinte forma

$$II_0 = \Upsilon_1 + m_1(l_1)^2 + m_2(L_1)^2 \tag{163}$$

Na [Equação \(163\)](#) os dois primeiros termos se referem ao momento de inércia do braço ao ser rotacionado pelo eixo do motor que não se encontra em seu centro de massa, ou seja, é o  $II_1$ . O terceiro e último termo é equivalente ao momento de inércia do pêndulo que também está sendo rotacionado pelo motor a uma distância  $L_1$  do seu centro de massa.

Como o teorema dos eixos paralelos está visivelmente aparente na equação de movimento do sistema, são utilizados a partir de agora os termos  $II_1$ ,  $II_2$  e  $II_0$  a fim de diminuir o número de termos e facilitar os cálculos.

#### 4.6 LINEARIZAÇÃO

Sistemas dinâmicos em geral apresentam equações diferenciais não-lineares de ordem elevada para se descrever, sendo essas equações de difícil solução. Além disso, as técnicas de controle de sistemas não-lineares são muito complexas e na maioria das vezes não se justificam, já que controladores lineares geralmente atuam bem mesmo para os sistemas não-lineares quando linearizados. Portanto, linearizar esses sistemas é um passo importante e como na linearização é feito o estudo do comportamento de uma função em torno de um determinado ponto fixo, é utilizada a expansão em série de Taylor (D'AZZO; HOUPIS, 1995) que, no formato aqui aplicado, é uma técnica conhecida como matriz Jacobiana, uma matriz de derivadas parciais onde posteriormente se aplica os valores do ponto fixo desejado às equações obtidas. A combinação dessa técnica com a representação em espaço de estados faz com que a equação diferencial de ordem  $n$  seja transformada em um sistema de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem.

Aplicando a representação em espaço de estados, explanada na [Seção 3.1](#), no sistema em estudo, tem-se que o vetor de estados  $\mathbf{x}$  é composto pelos ângulos ( $\theta$ ) do braço, do pêndulo e suas velocidades ( $\dot{\theta}$ ), conforme [Equação \(164\)](#), e o vetor de entrada  $\mathbf{u}$  é composto apenas pelo torque  $\tau_1$ , conforme [Equação \(165\)](#), já que na junta braço-pêndulo não há motor atuando.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (164)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \tau_1 \end{bmatrix} \quad (165)$$

Sendo o termo  $\dot{\mathbf{x}}$  a derivada do vetor de estados, ele é escrito como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (166)$$

Assim, utilizando a [Equação \(166\)](#) para a [Equação \(167\)](#)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (167)$$

e sabendo que o sistema é invariante no tempo, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_1 &= f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{\theta}_1 \\
 \dot{\theta}_2 &= f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{\theta}_2 \\
 \ddot{\theta}_1 &= f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = ? \\
 \ddot{\theta}_2 &= f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = ?
 \end{aligned} \tag{168}$$

Os termos  $\dot{\theta}_1$  e  $\dot{\theta}_2$  são obtidos no vetor de estados, já os termos  $\ddot{\theta}_1$  e  $\ddot{\theta}_2$  são obtidos a partir da equação de movimento. Por isso, a partir de agora é feito o isolamento desses termos na [Equação \(160\)](#) para que seja possível concluir a [Equação \(168\)](#).

Fazendo uma pequena revisão sobre vetores e utilizando para isso as matrizes auxiliares  $\vartheta$  e  $\varsigma$ , a relação a ser utilizada para isolar os termos em questão é a seguinte:

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{[2 \times 2]} \ddot{\theta}_{[2 \times 1]} &= \varsigma_{[2 \times 1]} \\
 \ddot{\theta}_{[2 \times 1]} &= \vartheta_{[2 \times 2]}^{-1} \varsigma_{[2 \times 1]}
 \end{aligned} \tag{169}$$

Substituindo os termos da [Equação \(169\)](#) pelos encontrados na [Equação \(160\)](#)

$$\begin{bmatrix} II_0 + II_2 \sin^2(\theta_2) & -L_1 l_2 m_2 \cos(\theta_2) \\ -L_1 l_2 m_2 \cos(\theta_2) & II_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 - b_1 \dot{\theta}_1 - L_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2) - \\ II_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) \\ \tau_2 - b_2 \dot{\theta}_2 + g l_2 m_2 \sin(\theta_2) + \\ \frac{1}{2} II_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2) \end{bmatrix} \tag{170}$$

Resolvendo

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-2b_1 II_2 \dot{\theta}_1 + 2II_2 \tau_1 - 2II_2 L_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2) + 2L_1 l_2 m_2 \cos(\theta_2)(-b_2 \dot{\theta}_2 + \tau_2 + II_2 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2)) + g L_1 l_2^2 m_2^2 \sin(2\theta_2) - 2II_2^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2))}{2(-L_1^2 l_2^2 m_2^2 \cos^2(\theta_2) + II_2 (II_0 + II_2 \sin^2(\theta_2)))} \\ \frac{(-b_2 \dot{\theta}_2 + \tau_2 + (g l_2 m_2 + II_2 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2)) \sin(\theta_2) (II_0 + II_2 \sin^2(\theta_2)) - L_1 l_2 m_2 \cos(\theta_2) (b_1 \dot{\theta}_1 - \tau_1 + L_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2) + II_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2)))}{-L_1^2 l_2^2 m_2^2 \cos^2(\theta_2) + II_2 (II_0 + II_2 \sin^2(\theta_2))} \end{bmatrix} \tag{171}$$

Os dois termos encontrados acima são os que faltavam na [Equação \(168\)](#). Agora, com a equação citada concluída, é possível dar início aos cálculos para encontrar os termos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  da equação de estados da representação em espaço de estados, mostrada na [Equação \(172\)](#).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{172}$$



Para conhecer as matrizes de estado  $A$  e de entrada  $B$  é aplicado o método da matriz Jacobiana, onde se calcula a derivada parcial da [Equação \(173\)](#) em relação ao vetor de estados, para matriz  $A$ , e em relação ao vetor de entrada, para a matriz  $B$  (D'AZZO; HOUPIS, 1995).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (173)$$

Assim, para a matriz  $A$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (174)$$

e para a matriz  $B$ :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_n} \end{bmatrix} \quad (175)$$

Com isso, os termos  $A$  e  $B$  da equação de estado para o pêndulo de Furuta são

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \dot{\theta}_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \dot{\theta}_2} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \dot{\theta}_2} \\ \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \dot{\theta}_2} \end{bmatrix} \quad (176)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \tau_1} \end{bmatrix} \quad (177)$$

O termo  $B$  se tornou um vetor, ao invés de matriz, devido ao vetor de entrada  $u$  ser composto por apenas um termo.

Com os termos  $A$  e  $B$  da representação em espaço de estados já equacionados, dá-se início ao processo de substituição dos pontos fixos apresentados na [Tabela 1](#) nas equações dos dois termos.

O ângulo de 0 radiano para o pêndulo significa que ele está com sua extremidade livre na parte mais alta de sua trajetória. Em outras palavras, com o sistema em repouso (sem a

Tabela 1 – Pontos fixos em torno dos quais é feita a linearização.

Variável	Valor Aplicado
$\theta_1$	0
$\theta_2$	0
$\dot{\theta}_1$	0
$\dot{\theta}_2$	0
$\tau_1$	$\tau$
$\tau_2$	0

Fonte: Autoria própria

aplicação de torque), o pêndulo na posição vertical para baixo apresenta ângulo de  $\pi$  radianos. Com a substituição, os termos obtidos são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{gL_1l_2^2m_2^2}{II_0II_2-L_1^2l_2^2m_2^2} & \frac{-b_1II_2}{II_0II_2-L_1^2l_2^2m_2^2} & \frac{-b_2L_1l_2m_2}{II_0II_2-L_1^2l_2^2m_2^2} \\ 0 & \frac{gII_0l_2m_2}{II_0II_2-L_1^2l_2^2m_2^2} & \frac{-b_1L_1l_2m_2}{II_0II_2-L_1^2l_2^2m_2^2} & \frac{-b_2II_0}{II_0II_2-L_1^2l_2^2m_2^2} \end{bmatrix} \quad (178)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{II_2}{II_0II_2-L_1^2l_2^2m_2^2} \\ \frac{L_1l_2m_2}{II_0II_2-L_1^2l_2^2m_2^2} \end{bmatrix} \quad (179)$$

Vamos considerar que o sistema permanece em regime linear sempre que o pêndulo permanecer dentro de um intervalo muito pequeno de ângulos próximo da posição desejada. Esse desvio de posição do pêndulo em relação ao equilíbrio é representado por  $\phi$ . Fazendo essa consideração temos que

$$\cos(\theta_2) = \cos(0 + \phi) \approx 1 \quad (180)$$

$$\text{sen}(\theta_2) = \text{sen}(0 + \phi) \approx \phi \quad (181)$$

Assim, como o sistema foi linearizado com a posição do pêndulo em 0 rad o que deve ser controlado é o ângulo  $\phi$  de modo que esteja o mais próximo de 0.

Para valores numéricos nas matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , os termos foram substituídos pelos dados apresentados na Tabela 2. Esses valores foram extraídos do software SolidWorks a partir de projeto inspirado no modelo de pêndulo de Furuta da fabricante Quanser. Os momentos de inércia considerados para  $\Upsilon_1$  e  $\Upsilon_2$  foram, respectivamente,  $I_{1zz}$  e  $I_{2zz}$ . Isso porque, de acordo com o projeto no Solidworks, os momentos de inércia no eixo z eram maiores que os momentos de inércia em y. O amortecimento viscoso foi desconsiderado no sistema.

Tabela 2 – Dados do pêndulo de Furuta em estudo.

Variável	Valor Aplicado	Unidade
$g$	9.80665	$m/s^2$
$L_1$	0.216	m
$m_1$	0.2570	kg
$l_1$	0.07735	m
$\Upsilon_1$	0.0015035059	$kg.m^2$
$L_2$	0.33703	m
$m_2$	0.127	kg
$l_2$	0.16375	m
$\Upsilon_2$	0.0016185800	$kg.m^2$

Fonte: Quanser (2011) , Quanser (2020b) e arquivo próprio do Solidworks.

Com a substituição nos termos, os resultados para as matrizes  $A$  e  $B$  obtidos foram

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 36.8369 & 0 & 0 \\ 0 & 73.53 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (182)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 202.016 \\ 180.625 \end{bmatrix} \quad (183)$$

A matriz  $C$  é igual à matriz identidade, pois a saída mede diretamente todos os estados do sistema. Então,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (184)$$

A matriz de transmissão direta, termo  $D$  da equação de saída, expressa a influência instantânea que as entradas exercem nas saídas. Geralmente essa influência é nula nos sistemas físicos devido ao tempo de reação do sistema não ser instantâneo, ou seja, para que a entrada cause uma variação na saída costuma haver um tempo não nulo de reação que torna os termos da matriz de transmissão direta nulos. Como para o pêndulo de Furuta o vetor de entradas  $u$  possui apenas um termo, para concordar em dimensionamento,  $D$  precisa ser um vetor. Assim,

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (185)$$

## 5 PROTOTIPAGEM VIRTUAL

Se denomina prototipagem o processo de elaboração de protótipos e seu nome deriva da palavra grega *prototypon*, que quer dizer primeira forma. Esse processo pode ser classificado segundo o tipo de representação aplicado, que pode ser físico (modelo palpável) ou analítico (modelo virtual) (MÜLLER; SAFFARO, 2011).

Basicamente, a prototipagem virtual envolve principalmente três tecnologias, sendo elas CAD (*Design Aided Computer*), CAM (*Manufacturing Aided Computer*) e CAE (*Engineering Aided Computer*) (CARVALHO; CAMEIRA, 2016). A primeira delas tem foco na criação e otimização de projetos, por isso um software CAD geralmente possui desde ferramentas para desenho de geometria básica até complexa, além disso, os projetos desenvolvidos através da tecnologia CAD podem ser considerados como ponto inicial para as tecnologias CAM e CAE. A tecnologia CAM trabalha com planejamento, controle e gerenciamento de operações de manufatura. Simulação e análise comportamental do objeto de estudo é feito pela tecnologia CAE (SILVA, 2011).

O método de prototipagem virtual aqui empregado é realizado utilizando os softwares SolidWorks, como ferramenta de desenho do sistema (aplicação da tecnologia CAD), e ADAMS, para análise, modelagem e cossimulação (aplicação da tecnologia CAE).

Para o desenho, o pêndulo de Furuta da fabricante Quanser foi utilizado como modelo para determinação dos principais dados. A Figura 1, na Seção 1.1, mostra o pêndulo modelo e a Tabela 3 indica os seus dados relevantes para este trabalho.

Tabela 3 – Dados do pêndulo de Furuta da fabricante Quanser.

Variável	Valor Aplicado	Unidade
Dimensão da base	0.015x0.015x0.018	m
Massa da base	1.2	kg
Comprimento do braço	0.0216	m
Massa do braço	0.2570	kg
Comprimento do pêndulo	0.0337	m
Massa do pêndulo	0.127	kg
Raio da engrenagem de 24 dentes	$6.35 \times 10^{-3}$	m
Raio das engrenagens de 72 dentes	0.019	m
Raio da engrenagem de 120 dentes	0.032	m
Massa da engrenagem de 24 dentes	0.005	kg
Massa (individual) das engrenagens de 72 dentes	0.03	kg
Massa da engrenagem de 120 dentes	0.083	kg

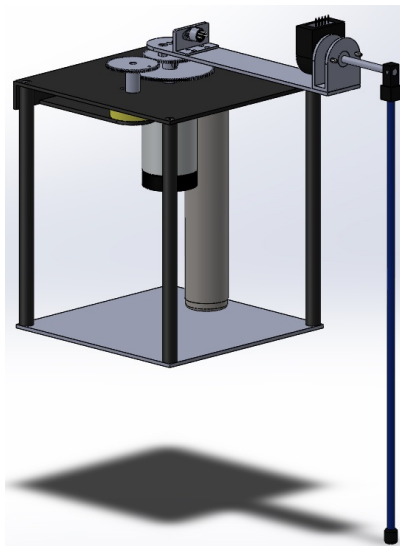
Fonte: Quanser (2011) e Quanser (2020b).

A montagem principal, desenvolvida no SolidWorks, é constituída por 5 corpos rígidos devido à movimentação necessária na simulação, sendo elas aqui chamadas de base, braço,

pêndulo, engrenagem do potenciômetro e engrenagem motora. Para cada uma delas, são obtidas as propriedades de massa, momento de inércia e centro de massa no próprio SolidWorks ou, quando especificadas pelo manual da Quanser, esses valores substituem os do SolidWorks.

A [Figura 17](#) mostra o desenho do sistema desenvolvido no SolidWorks.

Figura 17 – Desenho no Solidworks.



Fonte: Autoria própria

Após a conclusão do desenho e da configuração dos dados para cada corpo rígido da montagem, o passo seguinte é a exportação de cada uma delas para o ADAMS utilizando para isso o formato parasolid, que é comum aos dois softwares.

Para importação no ADAMS, o pêndulo de Furuta foi dividido conforme suas principais partes mencionadas na [Seção 1.1](#), sendo elas base, braço e pêndulo. O primeiro corpo rígido da montagem que deve ser importado no ADAMS é aquele que deverá ser acoplado ao *ground*. Assim, a base foi inserida impedindo que os outros corpos rígidos a serem importados fiquem soltos no espaço. O braço deve então ser importado e se relacionar com a base por meio de uma junta rotacional. Por último deve ser feita a importação do corpo rígido pêndulo, que se relaciona com o braço também por meio de uma junta rotacional. Para cada corpo rígido importado, é necessário configurar as propriedades de massa de acordo com os valores do SolidWorks. Como para a prototipagem virtual não há nenhuma simplificação a ser feita em relação aos momentos de inércia, todos os valores fornecidos pelo SolidWorks são considerados. Esses valores são apresentados na [Tabela 4](#).

Além disso, deve ser imposta uma força referente ao torque no eixo de rotação do braço. Na [Figura 18](#) podem ser visualizados os posicionamentos das juntas de revolução e o torque.

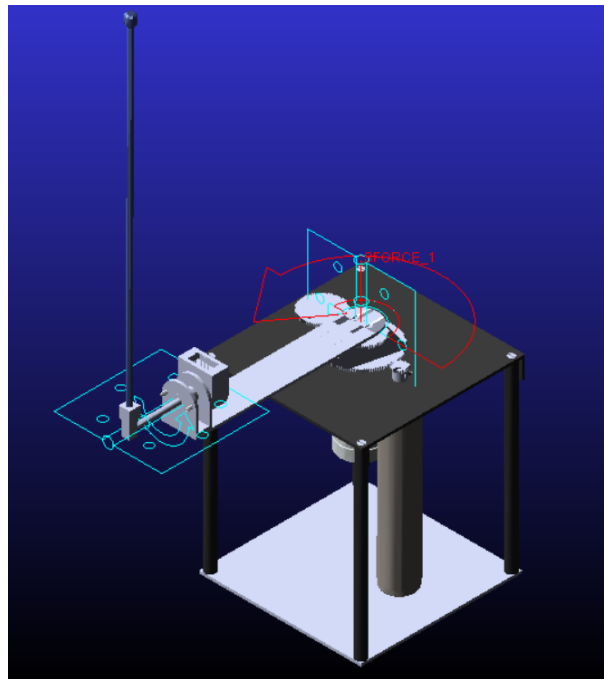
O próximo passo é configurar as variáveis de saída e de controle do sistema. As variáveis de saídas são as posições angulares do braço ( $y_1$ ) e do pêndulo ( $y_2$ ), em conjunto

Tabela 4 – Momentos de inércia.

Corpo Rígido	Variável	Valor Aplicado	Unidade
Base	$I_{0xx}$	0.0052009650	kg.m <sup>2</sup>
Base	$I_{0yy}$	0.0084575369	kg.m <sup>2</sup>
Base	$I_{0zz}$	0.0085763545	kg.m <sup>2</sup>
Braço	$I_{1xx}$	0.0001470087	kg.m <sup>2</sup>
Braço	$I_{1yy}$	0.0014052893	kg.m <sup>2</sup>
Braço	$I_{1zz}$	0.0015035059	kg.m <sup>2</sup>
Pêndulo	$I_{2xx}$	0.0000256293	kg.m <sup>2</sup>
Pêndulo	$I_{2yy}$	0.0015940991	kg.m <sup>2</sup>
Pêndulo	$I_{2zz}$	0.0016185800	kg.m <sup>2</sup>

Fonte: Arquivo próprio do Solidworks.

Figura 18 – Configuração das juntas de revolução e torque.



Fonte: Autoria própria

com as velocidades angulares do braço ( $y_3$ ) e do pêndulo ( $y_4$ ). A variável de controle é o torque ( $u$ ).

A modelagem do sistema é obtida a partir da análise linear. Essa análise permite encontrar o modelo matemático do sistema na representação de espaço de estados. Para isso é preciso escolher a ordem das variáveis para os vetores de saída e de controle. Neste trabalho, a ordem escolhida foi a mesma utilizada para a configuração das variáveis, sendo elas, posições angulares do braço ( $y_1$ ) e do pêndulo ( $y_2$ ), velocidades angulares do braço ( $y_3$ ) e do pêndulo ( $y_4$ ). Como a variável de controle é composta por apenas um torque, ela será sempre ( $u$ ). A análise linear foi feita utilizando a linearização em torno do ângulo de 0 radiano tanto para  $\theta_1$

quanto para  $\theta_2$ . As matrizes obtidas para o modelo em espaço de estados foram:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -6.4e-15 & 0 & 37.7345 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6.3e-15 & 0 & 74.7420 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (186)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 205.6364 \\ 0 \\ 185.0149 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (187)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6.1e-17 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6.1e-17 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (188)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (189)$$

## 6 CONTROLE DO SISTEMA

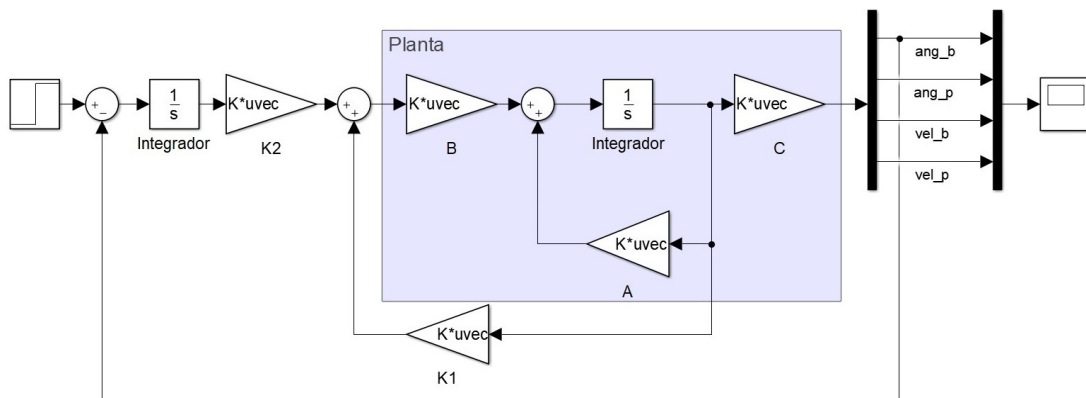
Este capítulo aborda a implementação das técnicas de controle seguidor e LQR utilizadas no pêndulo de Furuta em estudo, lembrando que o objetivo do controlador é manter o pêndulo estável na posição angular de 0 radiano (extremidade livre totalmente para cima). O controle do pêndulo é feito de maneira indireta já que apenas o braço permite que lhe seja definido um valor para deslocamento. Assim, um determinado valor é atribuído para o deslocamento angular do braço e os outros estados vão para zero. O ambiente utilizado para desenvolvimento do controlador foi a plataforma Matlab/Simulink e o controle é aplicado considerando que braço e pêndulo iniciam em 0 radiano.

Vale recordar que as variáveis de saída a serem observadas são o ângulo do braço  $\theta_1$ , o ângulo do pêndulo  $\theta_2$ , a velocidade do braço  $\dot{\theta}_1$  e a velocidade do pêndulo  $\dot{\theta}_2$ .

### 6.1 CONTROLE SEGUIDOR

São apresentados, a seguir, os diagramas de blocos para a técnica de controle seguidor aplicada ao pêndulo de Furuta. Sendo que, o diagrama da [Figura 19](#) é para o modelo linear e os diagramas das [Figuras 20 e 21](#) são para os modelos não-lineares obtidos com a prototipagem virtual e com as formulações, respectivamente.

Figura 19 – Diagrama de blocos do controle seguidor para o sistema linear.



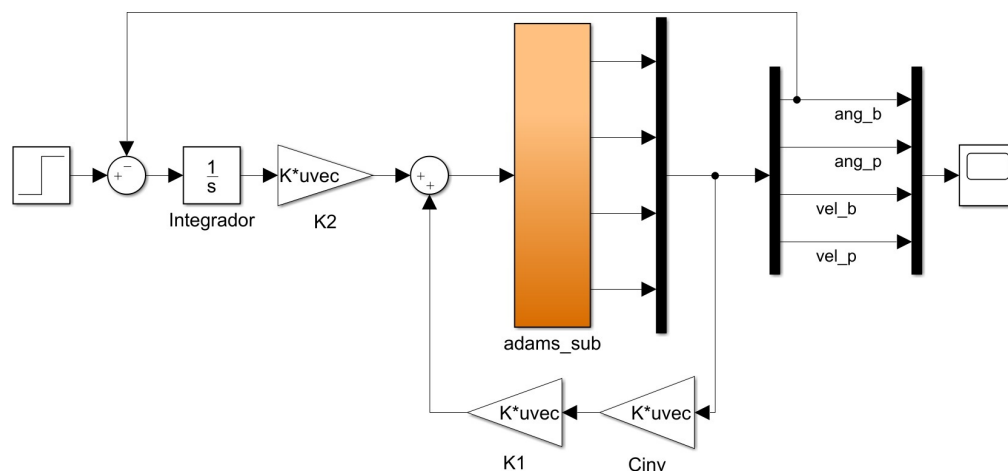
Fonte: Autoria própria

Nos diagramas, um bloco step é colocado no início levando de 0 para  $\pi/3$  radianos o ângulo de referência do braço. Em seguida, a posição angular atualizada do braço é subtraída do valor de referência e esse resultado é então encaminhado para receber os ganhos e agir na planta.

O subsistema que aparece na [Figura 21](#) é exposto no [Apêndice A](#). Dentro dele há dois outros subsistemas que são mostrados no [Apêndice B](#).

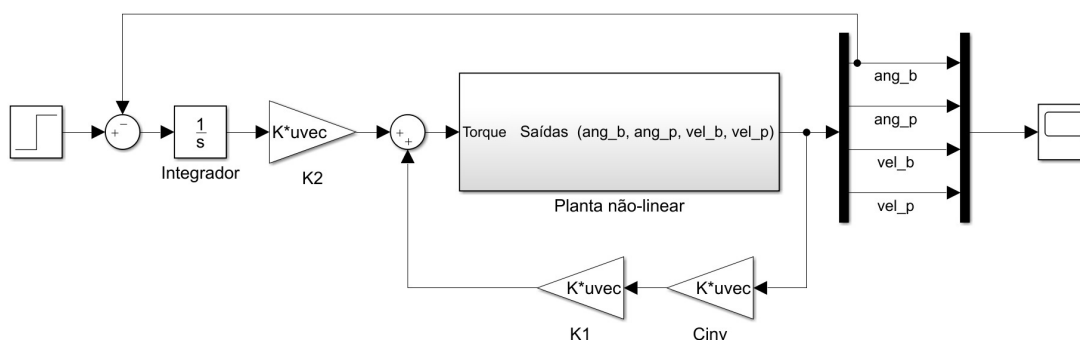


Figura 20 – Diagrama de blocos do controle seguidor para o sistema não-linear, pelo Adams.



Fonte: Autoria própria

Figura 21 – Diagrama de blocos do controle seguidor para o sistema não-linear, por formulações.



Fonte: Autoria própria

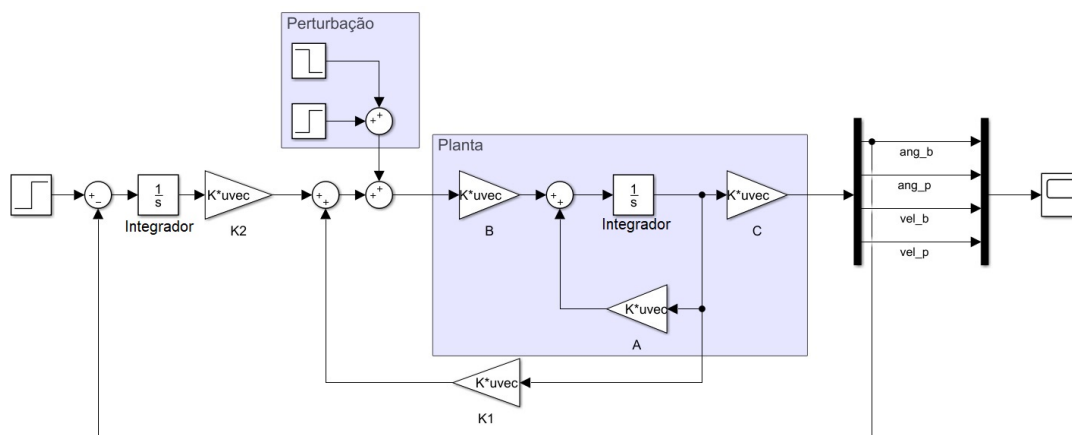
O controlador também foi testado frente a uma perturbação aplicada ao sistema, com a finalidade de verificar sua robustez.

É possível entender essa perturbação como um segundo torque que é adicionado ao braço e ligeiramente cessado. O diferencial da estrutura de blocos, neste caso, é justamente a inclusão de uma fonte de perturbação. No instante  $t = 4$  segundos é adicionado o valor de 0.3 N.m na ação de controle do sistema e em seguida, no instante  $t = 4.2$  segundos, é somado o valor de  $-0.3$  N.m na ação de controle. Esse valor de 0.3 N.m para o torque da perturbação foi escolhido dentre um intervalo de valores possíveis e que não ultrapassariam a capacidade do motor e dos controladores. Para o pêndulo de Furuta o motor não precisa atender valores muito altos de torque, podemos mencionar, por exemplo, que o máximo torque suportado para o pêndulo de Furuta da Quanser é de 0.642 N.m. Desta forma, o máximo torque suportado pelos controladores desenvolvidos nesta dissertação é de 0.74 N.m, que ocorre para levar o braço e o pêndulo de volta para as posições desejadas quando o torque por perturbação é 0.45 N.m.

O diagrama de blocos do controle seguidor aplicado ao sistema linear com perturbação

pode ser visto na [Figura 22](#).

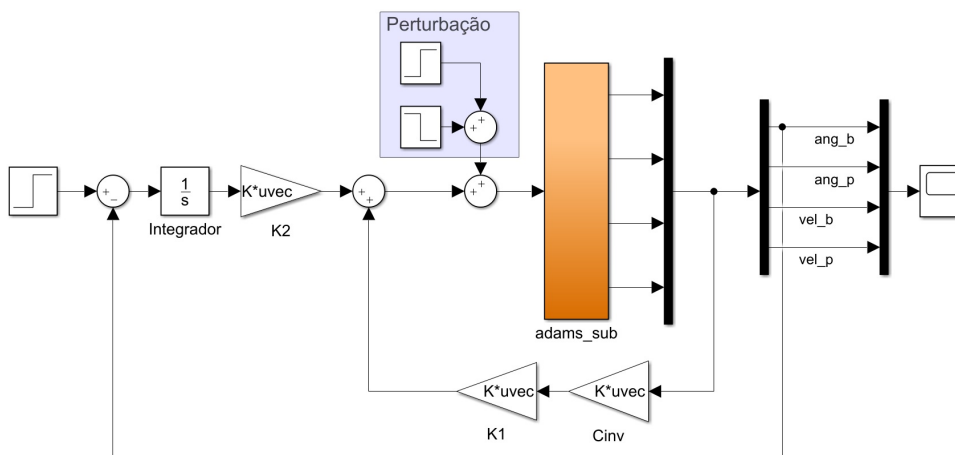
Figura 22 – Diagrama de blocos do controle seguidor para o sistema linear com perturbação.



Fonte: Autoria própria

Para o sistema não-linear com perturbação, os diagramas de blocos são mostrados nas Figuras [23](#), para modelo por prototipagem virtual, e [24](#) para modelo obtido com as formulações.

Figura 23 – Diagrama de blocos do controle seguidor para o sistema não-linear do Adams com perturbação.



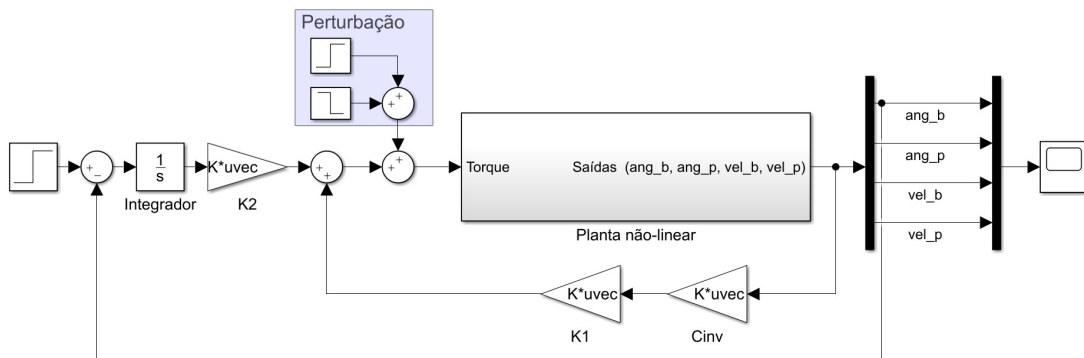
Fonte: Autoria própria

Para o controle seguidor, os ganhos foram calculados por meio do algoritmo apresentado no [Apêndice C](#). A escolha dos autovalores se deu por testes com valores aleatórios, comparando o desempenho do sistema com o controlador. Os autovalores atribuídos foram escolhidos de forma que resultassem em ganhos pequenos, mas capazes de realizar o controle tanto para o modelo obtido com o ADAMS, como para o modelo encontrado com as formulações. Então, os valores inseridos como autovalores foram  $-4$ ,  $-4.2$ ,  $-4.4$ ,  $-4.6$  e  $-4.8$ .

Assim, os ganhos obtidos foram:

- Para as matrizes obtidas com as formulações de Lagrange e Newton-Euler

Figura 24 – Diagrama de blocos do controle seguidor para o sistema não-linear das formulações com perturbação.



Fonte: Autoria própria

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0.2271 & -1.7318 & 0.1085 & -0.2431 \end{bmatrix} \quad (190)$$

e

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -0.1990 \end{bmatrix} \quad (191)$$

- Para as matrizes obtidas com a prototipagem virtual

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0.1060 & 0.2220 & -0.2367 & -1.6961 \end{bmatrix} \quad (192)$$

e

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -0.1946 \end{bmatrix} \quad (193)$$

Para o cálculo dos ganhos pelas matrizes do ADAMS basta tirar os símbolos % das primeiras matrizes do [Apêndice C](#) e comentar *A*, *B*, *C* e *D* secundárias.

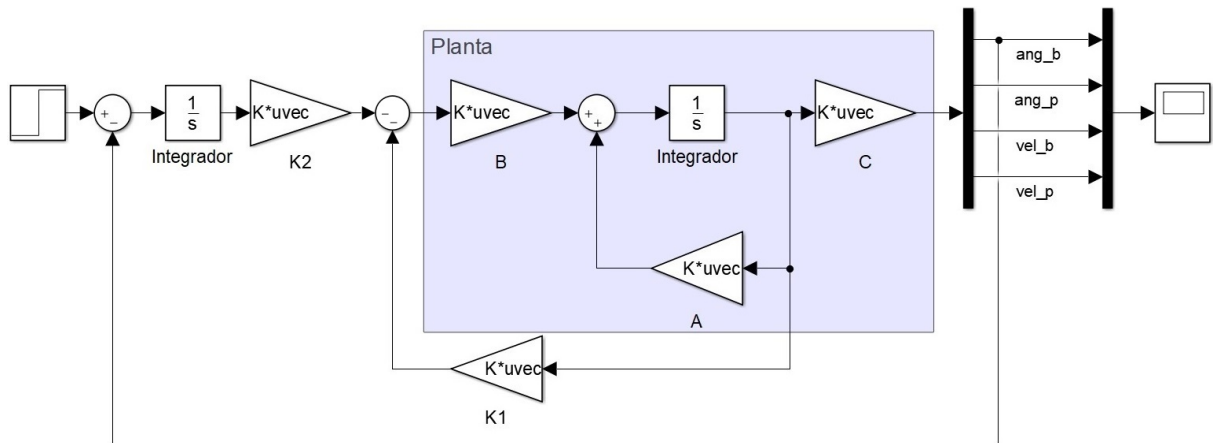
## 6.2 CONTROLE LQR-I

Os ganhos foram calculados por meio do algoritmo apresentado no [Apêndice D](#). Os diagramas de blocos para a técnica de controle LQR-I aplicada ao pêndulo de Furuta se assemelham muito aos diagramas da técnica seguidor, alterando apenas o sinal dos ganhos. Isso pode ser visualizado a seguir, onde todos os diagramas de blocos para o LQR-I são apresentados.

Na [Figura 25](#) é mostrado o diagrama de blocos do LQR-I para o sistema linear, tanto para o modelo encontrado com as formulações quanto para o modelo obtido com a prototipagem virtual.

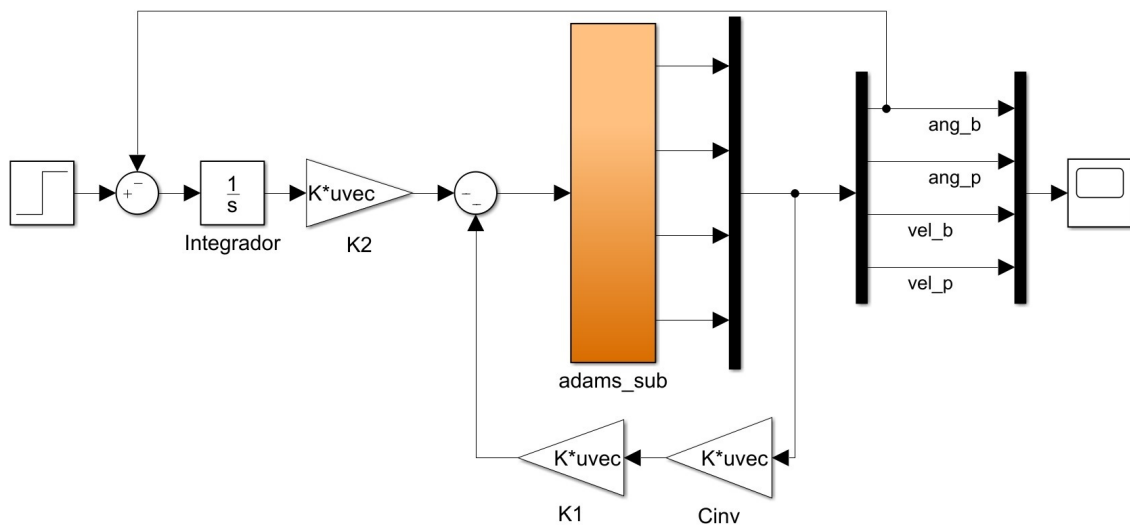
Considerando o sistema não-linear, o diagrama de blocos para o modelo obtido com a prototipagem virtual é apresentado na [Figura 26](#), enquanto que o diagrama do modelo encontrado por meio das formulações é mostrado na [Figura 27](#).

Figura 25 – Diagrama de blocos do LQR-I para o sistema linear.



Fonte: Autoria própria

Figura 26 – Diagrama de blocos do LQR-I para o sistema não-linear, pelo Adams.



Fonte: Autoria própria

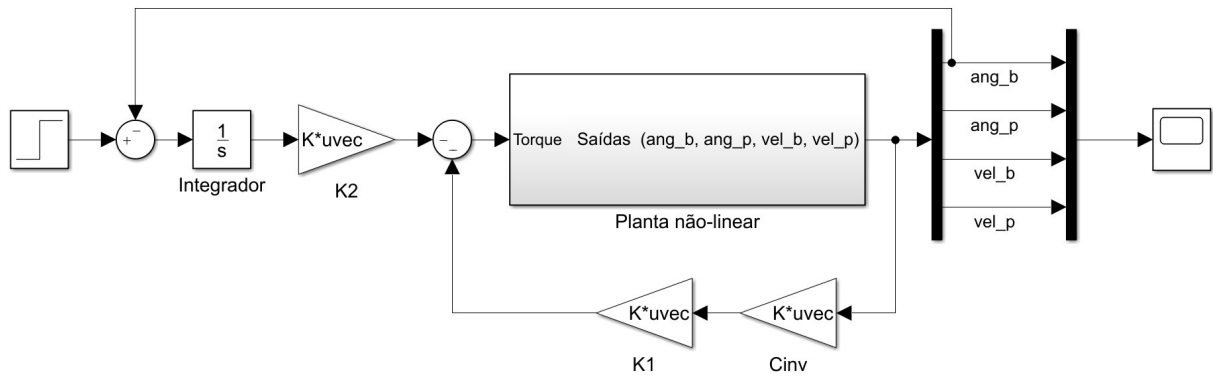
Para ser possível fazer as mesmas análises nos dois controladores utilizados neste trabalho, também é feita a imposição de uma perturbação no sistema a ser controlado por meio da técnica LQR-I.

Sendo assim, fazendo as mesmas considerações que foram feitas na [Seção 6.1](#) quanto a perturbação, o diagrama de blocos do LQR-I para o sistema linear é mostrado na [Figura 28](#).

Por outro lado, nas [Figuras 29 e 30](#) podem ser visualizados os diagramas de blocos da técnica LQR-I para o sistema não-linear, sendo que a [Figura 29](#) é para o modelo obtido com a prototipagem virtual e que a [Figura 30](#) é para o modelo encontrado com as formulações de Lagrange e de Newton-Euler.

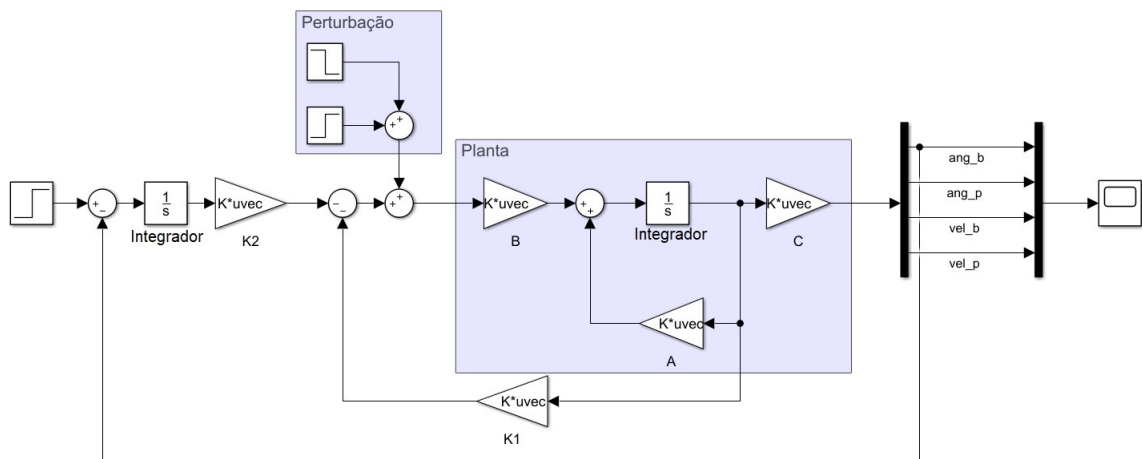
A obtenção dos ganhos se deu a partir de testes com valores aleatórios para as variáveis Q e R da técnica LQR-I. Era esperado que essas variáveis apresentassem valores pequenos, pois

Figura 27 – Diagrama de blocos do LQR-I para o sistema não-linear, por formulações.



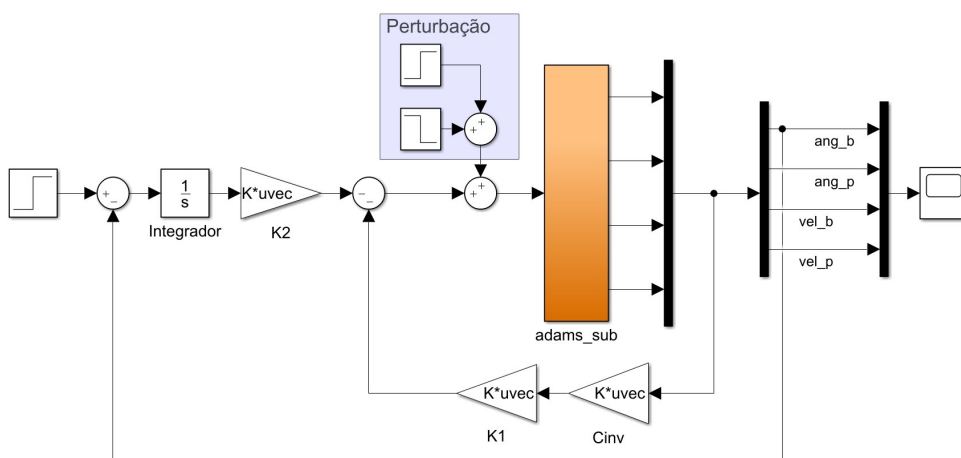
Fonte: Autoria própria

Figura 28 – Diagrama de blocos do LQR-I para o sistema linear com perturbação.



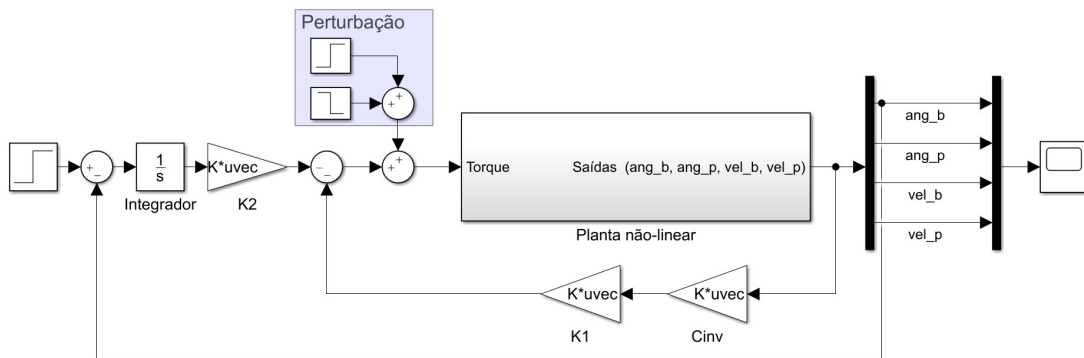
Fonte: Autoria própria

Figura 29 – Diagrama de blocos do LQR-I para o sistema não-linear do Adams com perturbação.



Fonte: Autoria própria

Figura 30 – Diagrama de blocos do LQR-I para o sistema não-linear das formulações com perturbação.



Fonte: Autoria própria

só assim conseguiriam minimizar o índice de desempenho quadrático. Com isso, foram feitos testes para identificar valores que melhor se adequassem ao projeto, gerando ganhos pequenos e capazes de controlar o sistema. Os valores que apresentaram melhores resultados e que são utilizados neste trabalho são mostrados a seguir.

$$Q = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1e-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1e-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (194)$$

$$R = [15] \quad (195)$$

Com os valores apresentados para Q e R, os autovalores encontrados são  $-2.5834 + 3.9166i$ ,  $-2.5834 - 3.9166i$ ,  $-9.3798 + 0.0000i$ ,  $-8.0587 + 0.0000i$  e  $-4.1159 + 0.0000i$ , enquanto que os ganhos obtidos foram:

- Para as matrizes obtidas com as formulações de Lagrange e Newton-Euler

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.5778 & 2.5781 & -0.2044 & 0.3749 \end{bmatrix} \quad (196)$$

e

$$K_2 = [0.8165] \quad (197)$$

- Para as matrizes obtidas com a prototipagem virtual

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.2044 & -0.5784 & 0.3717 & 2.5642 \end{bmatrix} \quad (198)$$

e

$$K_2 = [0.8165] \quad (199)$$

## 7 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados para a aplicação das técnicas de controle seguidor com realimentação de estado e LQR com ação integral nas equações do pêndulo de Furuta. Os controladores são comparados, bem como as equações lineares e não-lineares. O controle é aplicado direto no ponto onde se deseja que o pêndulo seja mantido. Assim, o ângulo  $\theta_2$  tem sua posição inicial em 0 radiano e deve se manter estável nessa mesma posição, independente da variação no ângulo  $\theta_1$  ou perturbações no sistema. É considerado que todos os estados iniciam em zero.

### 7.1 COMPARAÇÃO ENTRE EQUAÇÕES LINEARES E NÃO-LINEARES

A seguir, as equações são comparadas a partir de cada um dos controladores aplicados, alterando a posição desejada para o braço nos valores  $\pi/3$ ,  $\pi/2$ ,  $\pi$  e  $2\pi/3$ .

A comparação dos resultados é feita visualmente por meio de gráficos e numericamente através do critério da raiz do erro quadrático médio normalizado NRMSE (*Normalized Root Mean Square Error*), que tem seu cálculo mostrado na [Equação \(200\)](#) da acordo com ([MATHWORKS, 2021](#)). Por esse critério é observada a diferença entre a curva obtida e a curva de referência, sendo que quanto mais próxima a curva obtida está da curva de referência, mais próximo de 1 é o valor do NRMSE.

$$NRMSE = 1 - \frac{\|ref - y\|}{\|ref - média(ref)\|} \quad (200)$$

Na equação acima, considere  $ref$  como sendo valores da curva de referência e  $y$  valores das curvas obtidas de acordo com cada modelagem, ambos os termos observados no braço do pêndulo de Furuta.

Para facilitar a obtenção do NRMSE, o Matlab possui a função "goodnessOfFit" que efetua os cálculos diretamente.

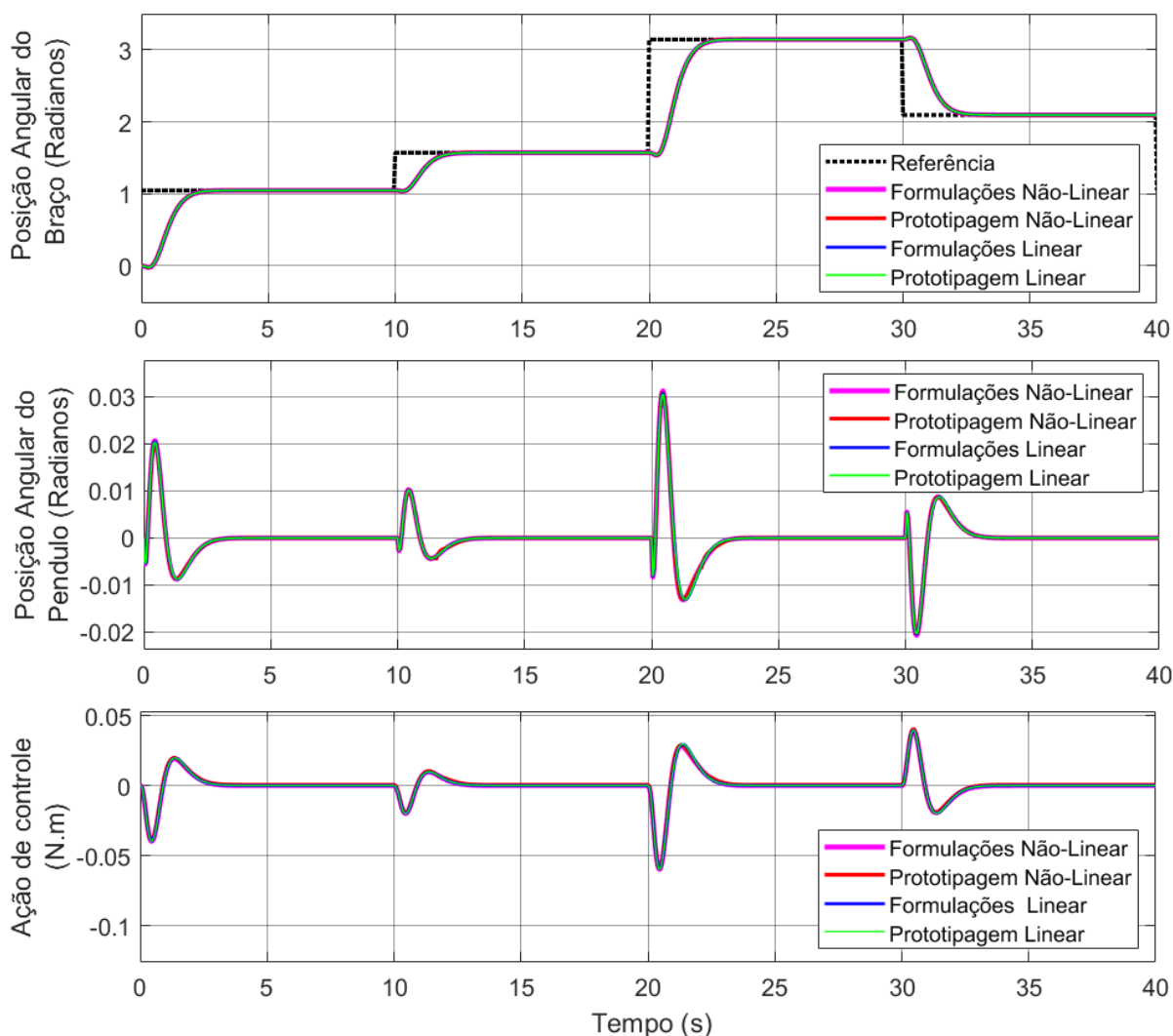
Vale lembrar que as equações a serem comparadas são: equação linear obtida por formulações, equação linear obtida por prototipagem virtual, equação não-linear encontrada com as formulações e equação não-linear encontrada por prototipagem virtual.

Os resultados das comparações estão divididos em subseções com a finalidade de melhorar a organização do trabalho.

#### 7.1.1 Controle seguidor

Para o controle seguidor, a [Figura 31](#) mostra a variação da posição angular do braço e a reação que é gerada na posição angular do pêndulo, além de apresentar o esforço necessário da ação de controle para levar o braço para as posições desejadas.

Figura 31 – Resultado da aplicação do controle seguidor nas equações lineares e não-lineares.



Fonte: Autoria própria

A Tabela 5 mostrada os valores do NRMSE com base no primeiro gráfico da Figura 31.

Tabela 5 – NRMSE relacionado às equações, de acordo com o controle seguidor.

Equacionamento	NRMSE
Linear por formulações	0.5542
Linear por prototipagem virtual	0.5543
Não-linear por formulações	0.5545
Não-linear por prototipagem virtual	0.5548

Fonte: Autoria própria.

É nítido na Figura 31 e pelos valores da Tabela 5 que as equações por diferentes modelagens responderam de forma parecida aos deslocamentos impostos e ao controlador. O

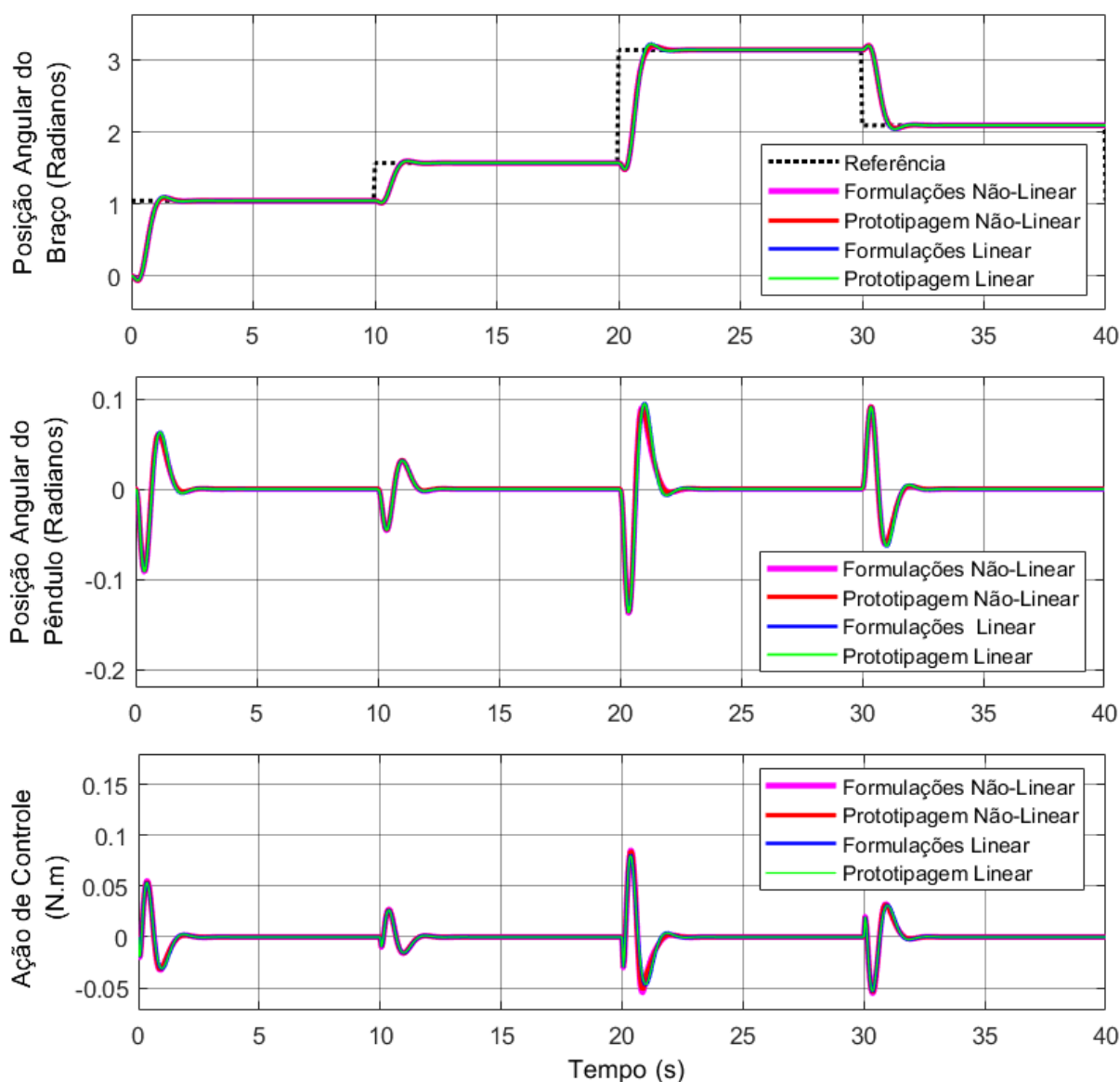


tempo que o sistema leva para reagir a cada variação da posição do braço é o que justifica o NRMSE entre as curvas das modelagens e a de referência.

### 7.1.2 Controle LQR-I

A [Figura 32](#) mostra o comportamento das equações frente às variações impostas na posição desejada para o braço, quando em conjunto com a aplicação do controlador LQR com ação integral.

Figura 32 – Resultado da aplicação do controle LQR-I nas equações lineares e não-lineares.



Fonte: Autoria própria

Os valores do NRMSE para o deslocamento do braço são mostrados na [Tabela 6](#).

Para a análise com o controlador LQR-I as modelagens lineares e não-lineares reagiram com um pouco mais de diferença do que na análise anterior a esta. Aqui elas ficam próximas,

Tabela 6 – NRMSE relacionado às equações, de acordo com o controle LQR-I.

Equacionamento	NRMSE
Linear por formulações	0.5960
Linear por prototipagem virtual	0.5963
Não-linear por formulações	0.5989
Não-linear por prototipagem virtual	0.5987

Fonte: Autoria própria.

mas uma pequena diferença pode ser observada quando o braço vai se deslocar pela terceira vez, entre os instantes  $t = 20s$  e  $t = 25s$ . Embora haja essa diferença entre as respostas, os valores para NRMSE são próximos, se diferenciando na terceira casa decimal. Em geral, pode-se dizer que as curvas se comportam de forma semelhante, já que se aproximam da referência com NRMSE parecidos.

A distância do valor ideal 1 para os valores obtidos de NRMSE se justificam pelo mesmo motivo que na análise anterior, o tempo de reação do sistema.

## 7.2 COMPARAÇÃO ENTRE CONTROLE SEGUIDOR E LQR-I

Uma das formas de comparar os controladores é observar o comportamento do sistema com controle frente a entradas padrão, ou seja, de onda quadrada, senoidal, rampa e degrau. Essa forma de comparação pode ser feita através de inspeção visual e é uma das formas utilizadas neste trabalho.

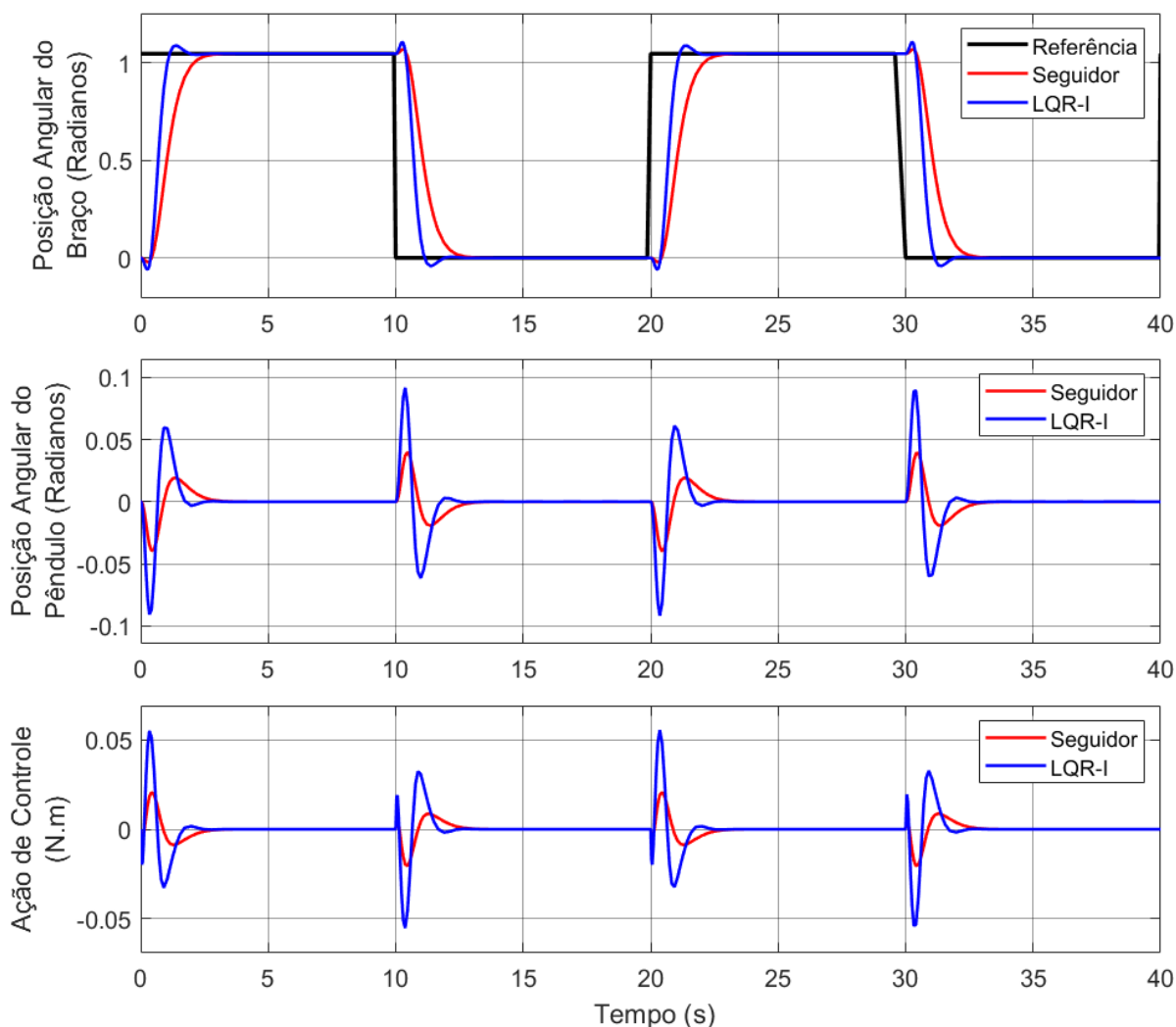
Por outro lado, há a necessidade de observar as diferenças entre os métodos de controle de forma numérica e não somente visual.

Então, para fins de comparação numérica, foram utilizados os parâmetros da resposta transitória. Nesse método é considerada a condição inicial padrão (variáveis de saída e suas derivadas sendo iguais a zero) e o degrau unitário é aplicado no deslocamento angular do braço, que é a única saída que permite a atribuição de valores diretamente. Para o tempo de subida foi considerado o tempo gasto entre 0 e 100%. A tolerância admitida para o tempo de acomodação foi de 0,02.

Primeiramente, é mostrada a comparação através das entradas padrão, considerando sempre o modelo não-linear. Os gráficos obtidos como resposta são apresentados entre as Figuras 33 e 36.

Na Figura 33 é mostrada a comparação entre os controladores seguidor e LQR-I para entrada de onda quadrada, que alterna entre os valores 0 e  $\pi/3$  radianos. É possível perceber que com o controle LQR-I o sistema alcança os valores da referência de forma mais rápida, mas como consequência o deslocamento angular do pêndulo e a ação de controle requerida são maiores, podendo atingir mais que o dobro do que esses termos alcançam com o controle seguidor. Em ambos os casos, os controladores cumprem as expectativas, pois levam o braço

Figura 33 – Resultado da aplicação dos controladores para uma entrada de onda quadrada.

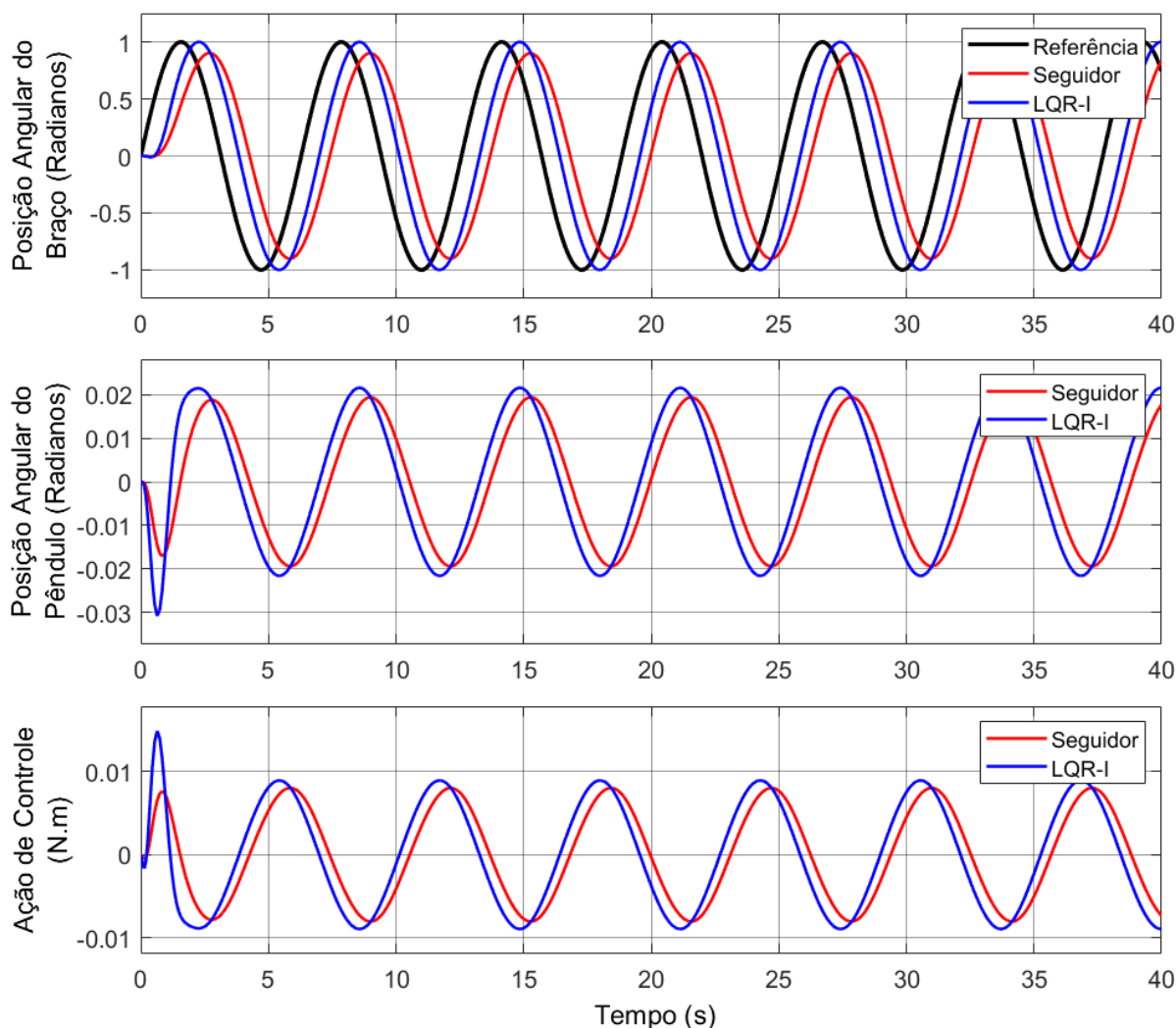


Fonte: Autoria própria

para posições dadas como referência ao mesmo tempo em que mantém o pêndulo quase estável, com deslocamento angular apresentando valores inferiores a 0.1 radianos.

Na [Figura 34](#) é imposta como referência uma entrada senoidal com valor de amplitude sendo 1 radiano. Fica muito evidente o tempo de reação para cada sistema de controle, sendo que o seguidor requer um tempo maior que o LQR-I para assimilar a referência e tentar acompanhá-la. É possível notar também que o deslocamento do braço no pêndulo de Furuta com o seguidor sequer alcança os valores máximo e mínimo atingido pela referência, já o LQR-I alcança esses valores devido ao *overshoot* que ele apresenta mais significativo que o seguidor de acordo com as características escolhidas para cada um neste trabalho. Para entrada do tipo senoidal, o controlador LQR-I fica visivelmente mais atrativo que o comparado seguidor, ainda que a variação na posição angular do pêndulo seja maior, podendo chegar a 0.03 radianos contra os 0.02 radianos do controle seguidor. Ainda sobre esse tipo de entrada padrão, o maior esforço de todo o sistema para o controlador LQR-I é requerido no início do processo, gerando

Figura 34 – Resultado da aplicação dos controladores para uma entrada de onda senoidal.



Fonte: Autoria própria

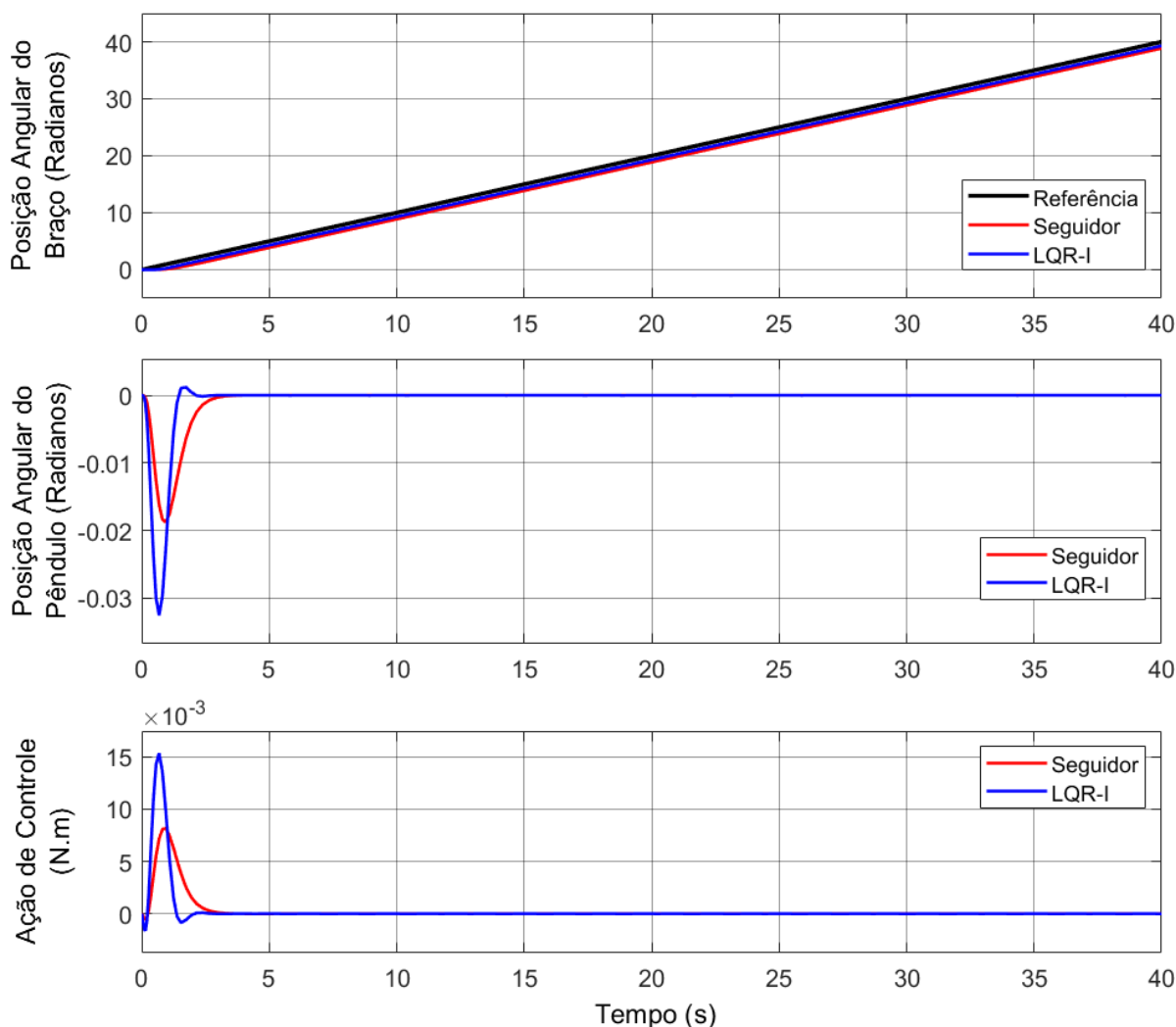
nos primeiros instantes um pico tanto no gráfico do deslocamento angular do pêndulo quanto no gráfico da ação de controle. Por outro lado, o controlador do tipo seguidor não apresenta nenhum pico expressivo em relação aos demais.

Uma entrada do tipo rampa com fator igual a 1 é colocada como referência para o braço do pêndulo de Furuta e o resultado pode ser conferido na [Figura 35](#). Com esse tipo de entrada, para o gráfico do deslocamento angular do braço, a diferença entre os controladores é sutil. Porém, ao observar esse primeiro gráfico minuciosamente é possível perceber que o controle LQR-I ainda se mostra um pouco mais próximo da curva de referência que o sistema com controle seguidor. No caso dos outros dois gráficos, a resposta do sistema com controle LQR-I apresenta picos com valores superiores aos obtidos com o controle seguidor, mas mesmo assim são valores pequenos, chegando a ser da ordem de  $10^{-3}$  o pico no gráfico da ação de controle.

O maior esforço requerido do sistema para esse tipo de entrada ocorre nos instantes

iniciais para ambos os tipos de controle, enquanto que no restante do tempo o valor que se faz necessário na ação de controle para que o braço siga a referência e para manter o pêndulo próximo da posição de 0 radiano é quase nulo.

Figura 35 – Resultado da aplicação dos controladores para uma entrada rampa de fator 1.

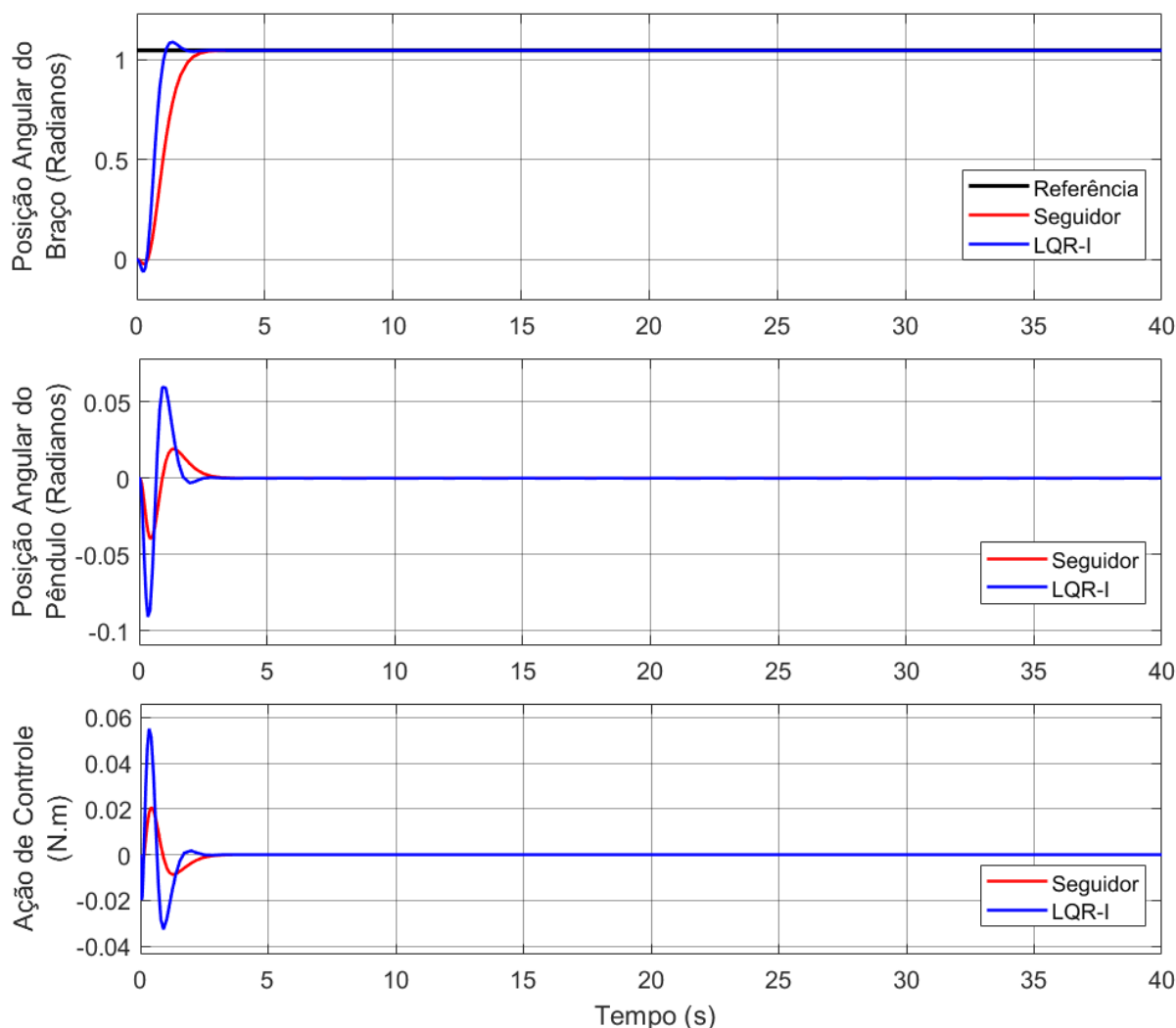


Fonte: Autoria própria

A [Figura 36](#) mostra os resultados obtidos para uma entrada degrau com valor inicial igual a 0 radiano e final de  $\pi/3$  radianos. O sistema com controle LQR-I é o primeiro a se estabilizar na posição de referência. Como o sistema com controle seguidor demora mais para alcançar e se estabilizar na posição de referência, é normal que a variação no deslocamento angular do pêndulo e na ação de controle sejam inferiores às encontradas para o sistema com controle LQR-I.

Conforme mencionado no início da [Seção 7.2](#), uma comparação numérica entre os dois controladores utilizados se faz necessária e por isso, neste trabalho, é realizada a comparação a partir dos parâmetros da resposta transitória. Desta forma, os valores para os parâmetros foram retirados do primeiro gráfico da [Figura 36](#), já que se faz necessário para esse tipo de

Figura 36 – Resultado da aplicação dos controladores para uma entrada de onda degrau.



Fonte: Autoria própria

análise uma entrada degrau.

Os valores encontrados para os parâmetros  $M_p$ ,  $t_r$ ,  $t_p$ ,  $t_s$  e  $t_d$  são informados na Tabela 7.

Tabela 7 – Comparação dos controladores quanto aos parâmetros da análise transitória.

Parâmetro	$M_p(\%)$	$t_r(s)$	$t_p(s)$	$t_s(s)$	$t_d(s)$
Seguidor	0.515	3.870	4.747	4.75	1.049
LQR-I	3.846	1.136	1.399	2.460	0.696

Fonte: Autoria própria.

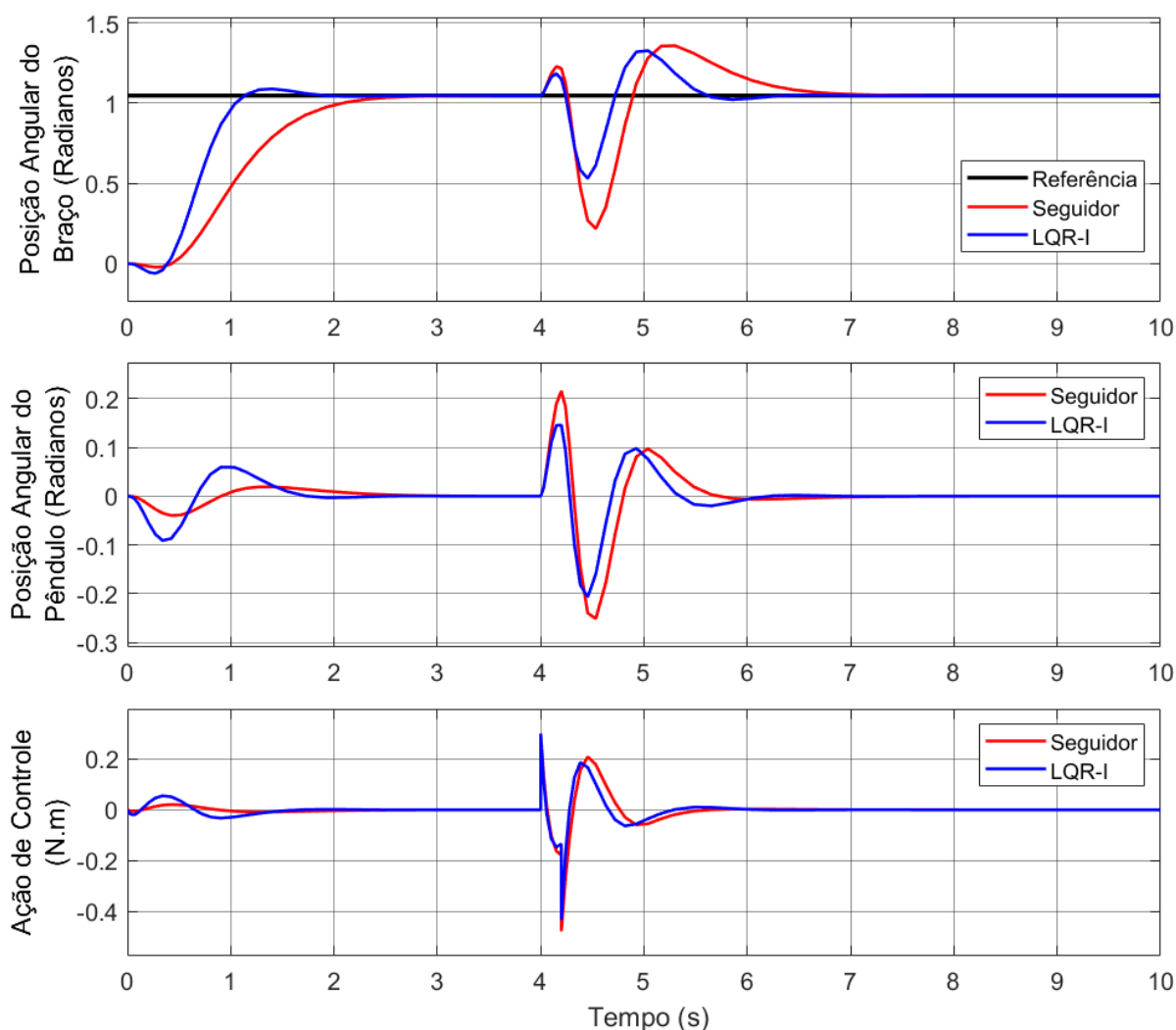
De acordo com os valores observados nos parâmetros da Tabela 7 pode-se perceber como o sistema de controle LQR-I foi mais rápido para alcançar a referência e se estabilizar. O valor de  $M_p$  foi muito inferior para o controle seguidor, mas sendo o tempo de acomodação

quase o dobro do apresentado pelo outro controlador, ele acaba ficando em desvantagem.

É possível perceber que nas diferentes situações simuladas a posição angular do pêndulo e a ação de controle permanecem com oscilações pequenas, demonstrando que os controladores conseguem manter o pêndulo muito próximo da posição desejada ao mesmo tempo em que requerem pouco do motor.

Conforme visto na [Figura 36](#), o sistema se mantém estável após a acomodação. Assim, a [Figura 37](#) mostra o resultado da aplicação dos controladores apenas nos dez segundos iniciais para que fique mais visível as reações a uma entrada degrau com perturbação de 0.3 N.m, sem que nenhuma informação relevante seja prejudicada.

Figura 37 – Resultado da aplicação dos controladores para uma entrada de onda degrau com perturbação.



Fonte: Autoria própria

É notável na [Figura 37](#) como a curva com o controle LQR-I se estabiliza na referência antes da curva de resposta do controle seguidor. Também é possível observar que os dois controladores respondem bem às variações que atingem o sistema, conseguindo sempre voltar

a manter a estabilidade desejada.

Simulações semelhantes às da [Seção 7.1](#), com o braço se deslocando para as posições  $\pi/3$ ,  $\pi/2$ ,  $\pi$  e  $2\pi/3$ , porém com tempo de variação no valor da referência sendo de 4 segundos, foram gravadas e podem ser vistas no link: <https://youtu.be/pErJT0losto>.



## 8 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou a modelagem de um pêndulo de Furuta desenvolvida por meio da utilização de três métodos, sendo eles, o método analítico pela formulação de Lagrange, o método também analítico pela formulação de Newton-Euler e o método de prototipagem virtual. Além disso, as técnicas de controle seguidor com realimentação de estados e LQR com ação integral foram implementadas nos modelos obtidos.

As modelagens analíticas se mostraram um tanto complicadas devido às muitas análises físicas necessárias e apresentaram resultados idênticos. Ou seja, tanto a análise das energias quanto a análise vetorial das forças resultaram em um mesmo modelo dinâmico.

Por outro lado, a modelagem por prototipagem virtual se mostrou com menor complexidade, já que todas as análises são feitas pelo próprio software após o usuário importar a planta, sem ser necessário deduzir equações. Para essa modelagem, a construção do protótipo 3D se deu no software SolidWorks. O software MSC ADAMS foi responsável por toda a análise necessária e, enfim, pela geração dos modelos linear e não-linear do sistema.

Os modelos analíticos não coincidiram com o modelo obtido com a prototipagem virtual, mas se aproximaram muito. De forma que os valores para NRMSE ficaram idênticos até a terceira casa decimal. A diferença encontrada se deve a fatores considerados pelo ADAMS e que foram desconsiderados no método analítico, como por exemplo os momentos principais de inércia no eixo  $x$ , além de simplificações. Outra diferença é devido à definição nos estados na linearização dos modelos na prototipagem virtual e no modelo por formulações. No entanto, com todas essas razões para que os modelos analíticos e por prototipagem apresentem diferenças e sendo a variação nos valores tão pequena, pode-se dizer, com base no modelo por prototipagem, que os modelos analíticos estão corretos.

As técnicas de controle seguidor e LQR-I são projetadas para controle da posição angular do braço de modo a manter o pêndulo sempre com sua extremidade livre para cima e pode-se dizer que os resultados foram satisfatórios. Ao deslocar o braço, o pêndulo sofre uma variação na sua posição, mas consegue voltar para a posição desejada. Também foi testada a robustez dos controladores frente a uma perturbação aplicada ao sistema e as duas técnicas de controle se mostraram eficientes.

### 8.1 TRABALHOS FUTUROS

Nesta seção se encontram atividades que não foram realizadas neste trabalho, mas que trariam melhorias significativas a este.

1. Melhorar o desempenho dos controladores LQR-I e seguidor;
2. Desenvolver o sistema físico do pêndulo de Furuta;
3. Implementar os controladores no sistema físico e comparar os resultados com os modelos

da prototipagem virtual e analíticos.

## Referências

- ABREU, I. S. **Controle inteligente LQR neuro-genético para alocação de autoestrutura em sistemas dinâmicos multivariáveis**. 2008. 247 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2008. Citado na página 32.
- AGUIAR, M. A. M. **Tópicos de mecânica clássica**. 1. ed. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.
- AGUILAR-AVELAR, C.; MORENO-VALENZUELA, J. A composite controller for trajectory tracking applied to the furuta pendulum. **ISA Transactions**, v. 57, p. 286–294, 2015. Citado na página 25.
- AIUTA, P. **Mecânica clássica II: principio de Hamilton - dinamica lagrangeana e hamiltoniana**. 2003. Disponível em: <[http://jararaca.ufsm.br/websites/petfisica/download/Arquivos/Capitulo\\_7.pdf](http://jararaca.ufsm.br/websites/petfisica/download/Arquivos/Capitulo_7.pdf)>. Acesso em: 28 de maio de 2020. Citado na página 45.
- AKESSON, J.; ASTROM, K. J. Safe manual control of the furuta pendulum. **Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications**, p. 890–895, 2001. Citado na página 21.
- ALIAS, N. A. B. **Linear quadratic regulator (LQR) controller design for inverted pendulum**. 2013. 93 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Elétrica) — University Tun Hussein Onn Malaysia, Parit Raja, 2013. Citado na página 32.
- ANTONIO-CRUZ, M. et al. Modeling and construction of a furuta pendulum prototype. **Proceedings - 2014 IEEE International Conference on Mechatronics, Electronics, and Automotive Engineering, ICMEAE**, p. 98–103, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- ARACIL, J.; ACOSTA, J. A.; GORDILLO, F. A nonlinear hybrid controller for swinging-up and stabilizing the furuta pendulum. **Control Engineering Practice**, v. 21, n. 8, p. 989–993, 2013. Citado na página 24.
- BAKER, G. J.; BLACKBURN, J. A. **The pendulum: a case study in physics**. New York: Oxford University Press, 2005. Citado na página 20.
- BALAMURUGAM, S.; VENKATESH, P.; VARATHARAJAN, M. Fuzzy sliding-mode control with low pass filter to reduce chattering effect: an experimental validation on quanser strip. **2016 First International Conference on Micro and Nano Technologies, Modelling and Simulation**, p. 1693–1703, 2017. Citado na página 26.
- BEECH, M. **The pendulum paradigm: variations on a theme and the measure of heaven and earth**. 1. ed. Boca Raton: BrownWalker Press, 2014. Citado na página 21.
- BOBROW, F. **Controle de um pêndulo invertido com 6 graus de liberdade e rodas de reação**. 2015. 105 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Elétrica) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015. Citado na página 20.
- BOTTURA, C. P. **Princípios de controle e servomecanismos**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois S.A., 1982. Citado na página 19.

- BOUBAKER, O. The inverted pendulum: A fundamental benchmark in control theory and robotics. **International Conference on Education and e-Learning Innovations**, 2012. Citado na página 21.
- CARVALHO, J. G. G.; CAMEIRA, R. F. O desenvolvimento de protótipos nas indústrias: uma visão geral e perspectivas futuras. **XXXVI Encontro Nacional de Engenharia de Produção**, p. 10, 2016. Citado na página 67.
- CASANOVA, V. et al. Control of the rotary inverted pendulum through threshold-based communication. **ISA Transactions**, v. 62, p. 357–366, 2016. Citado na página 25.
- CAZZOLATO, B.; PRIME, Z. On the dynamics of the furuta pendulum. **Hindawi Publishing Corporation**, 2011. Citado na página 38.
- CHAWLA, I.; SINGLA, A. Real-time control of single rotary inverted pendulum using robust lqr-based anfis controller. **International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation**, 2017. Citado na página 26.
- CRAIG, J. J. **Robótica**. 3. ed. São Paulo, SP: Pearson Education do Brasil, 2012. Citado 7 vezes nas páginas 38, 41, 47, 48, 53, 55 e 58.
- D'AZZO, J. J.; HOUPIIS, C. H. **Linear control system analysis and design: conventional and modern**. 4. ed. New York: McGraw-Hill, 1995. Citado 6 vezes nas páginas 28, 29, 30, 31, 62 e 64.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle moderno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- DULLEY, L. P.; MACHADO, G. C. S. **Elevação e estabilização vertical do pêndulo Invertido rotacional**. 2003. 68 f. Monografia (Relatório Final) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- DWIVEDI, P.; PANDEY, S.; JUNGHARE, A. Robust and novel two degree of freedom fractional controller based on two-loop topology for inverted pendulum. **ISA Transactions**, 2018. Citado na página 26.
- FANTONI, I.; LOZANO, R. **Non-linear control for underactuated mechanical systems**. London: Springer-Verlag, 2002. Citado na página 20.
- FARIA, L. M. **Modelagem e controle do pêndulo invertido rotacional ou pêndulo de furuta**. 68 p. Dissertação (Trabalho de Conclusão de curso em Engenharia Elétrica) — Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais- CEFET, Belo Horizonte, 2015. Citado na página 51.
- HAMZA, M. F. et al. Application of kane's method for dynamic modeling of rotary inverted pendulum system. **2016 First International Conference on Micro and Nano Technologies, Modelling and Simulation**, p. 27–32, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 25.
- HAZEM, Z. B.; FOTUHI, M. J.; BINGÜL, Z. Development of a fuzzy-lqr and fuzzy-lqg stability control for a double link rotary inverted pendulum. **Journal of the Franklin Institute**, 2020. Citado na página 26.
- HIBBELER, R. C. **Estática: mecânica para engenharia**. 10. ed. São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.

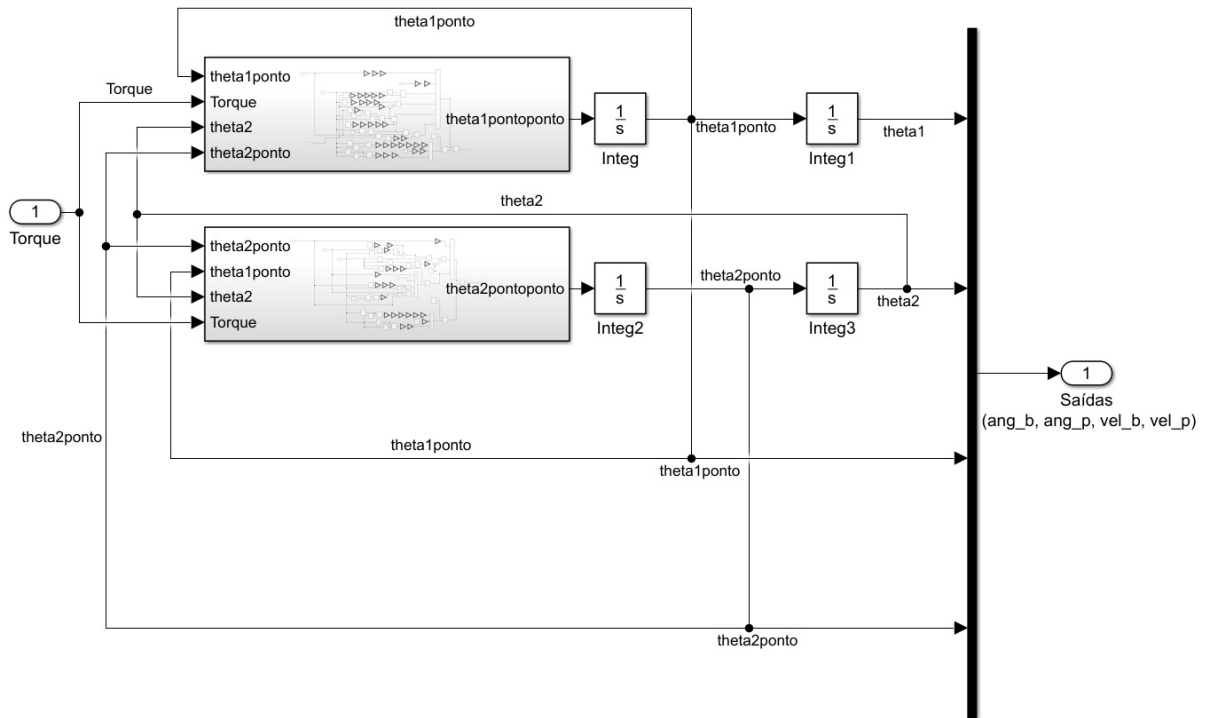
- HIBBELER, R. C. **Dinâmica: mecânica para engenharia**. 12. ed. São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 61.
- HUANG, J. et al. Control of rotary inverted pendulum using model-free backstepping technique. **IEEE Access**, v. 7, p. 96965–96973, 2019. Citado na página 26.
- JÚNIOR, O. P. **Filosofia da física clássica**. 1. ed. São Paulo: USP, 2011. Citado na página 45.
- KURODE, S.; CHALANGA, A.; BANDYOPADHYAY, B. Swing-up and stabilization of rotary inverted pendulum using sliding modes. **Proceedings of the 18th World Congress The International Federation of Automatic Control**, p. 10685–10690, 2011. Citado na página 24.
- LEWIS, F. L. **Linear quadratic regulator (LQR) state feedback design**. 1998. Disponível em: <<http://www.uta.edu/utari/acs/Lectures/lqr.pdf>>. Acesso em: 31 de julho de 2014. Citado 4 vezes nas páginas 30, 32, 33 e 34.
- LEWIS, F. L.; VRABIE, D. L.; SYRMOS, V. L. **Optimal control**. 3. ed. Hoboken, Nova Jersey: John Wiley e Sons, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 30, 32, 33 e 34.
- MALKAPURE, H. G.; CHIDAMBARAM, M. Comparison of two methods of incorporating an integral action in linear quadratic regulator. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 47, n. 1, 2014. Citado na página 35.
- MATHEW, N. J.; RAO, K. K.; SIVAKUMARAN, N. Swing-up and stabilization control of rotary inverted pendulum. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 46, n. 32, p. 654–659, 2013. ISSN 1474-6670. Citado na página 25.
- MATHWORKS. **goodnessOfFit**. 2021. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/ident/ref/goodnessoffit.html>>. Acesso em: 16 de fevereiro de 2021. Citado na página 78.
- MÜLLER, A. L.; SAFFARO, F. A. A prototipagem virtual para o detalhamento de projetos na construção civil. **Ambiente Construído**, v. 11, p. 105–121, 2011. Citado na página 67.
- NISE, N. S. **Engenharia de sistemas de controle**. 6. ed. Pomona: LTC, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 19, 20, 28, 30 e 34.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall, 2010. Citado 10 vezes nas páginas 19, 20, 22, 27, 28, 30, 34, 36, 37 e 38.
- QUANSER. **User manual: SRV02 rotary servo base unit**: Set up and configuration. [S.l.], 2011. 23 p. Disponível em: <<https://nps.edu/documents/105873337/0/SRV02+Base+Unit+User+Manual.pdf/ce50a48e-d169-4652-a9df-ae979af10094>>. Acesso em: 12 de dezembro de 2019. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 67.
- QUANSER. **Products**. 2020. Disponível em: <<https://www.quanser.com/products/>>. Acesso em: 28 de maio de 2020. Citado na página 21.
- QUANSER. **Products**. 2020. Disponível em: <<https://www.quanser.com/products/rotary-inverted-pendulum/>>. Acesso em: 12 de dezembro de 2019. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 67.

- QUYEN, N. D. et al. Rotary inverted pendulum and control of rotary inverted pendulum by artificial neural network. **Proc. Natl. Conf. Theory Phys.**, p. 243–249, 2012. Citado na página 24.
- RAMESH, R.; BALAMURUGAN, S.; VENKATESH, P. Real-time servo motor control of single rotary inverted pendulum using dspace. **International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE)**, v. 3, p. 2231–2307, 2013. Citado na página 24.
- RUDRA, S.; BARAI, R.; MAITRA, M. **Block Backstepping Design of Nonlinear State Feedback Control Law for Underactuated Mechanical Systems**. 1. ed. Singapore: Springer, 2017. Citado na página 21.
- SANTOS, L. R. dos. **Conservação de momento angular em sistemas mecânicos dissipativos**. 59 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012. Citado na página 46.
- SCACIOTA, R. et al. Minimization of energy consumption per bit using an average dwell-time approach for wireless networked control systems. **IEEE Access**, 2019. Citado na página 39.
- SILVA, F. D. M. **O CAD aplicado ao projeto do produto: o ponto de vista dos designers industriais**. 2011. 130 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011. Citado na página 67.
- TANG, Y.-R.; XIAO, X.; LI, Y. Nonlinear dynamic modeling and hybrid control design with dynamic compensator for a small-scale uav quadrotor. **Measurements**, v. 109, p. 51–64, 2017. Citado na página 35.
- TREDNNICK, M. R. A. da C. **Modelagem e controle de estruturas espaciais flexíveis**. 81 f. Dissertação (Exame de Qualificação de Doutorado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.
- VILLATE, J. E. **Dinâmica e sistemas dinâmicos**. 5. ed. Portugal: Universidade do Porto, 2019. Citado na página 44.
- WEN, J.; SHI, Y.; LU, X. Robust and novel two degree of freedom fractional controller based on two-loop topology for inverted pendulum. **Hindawi - Journal of Control Science and Engineering**, 2017. Citado na página 25.

## Apêndices

**APÊNDICE A – Diagrama de blocos do Simulink para o subsistema da planta no modelo não-linear, de acordo com as formulações.**

Figura 38 – Diagrama de blocos da planta não-linear.

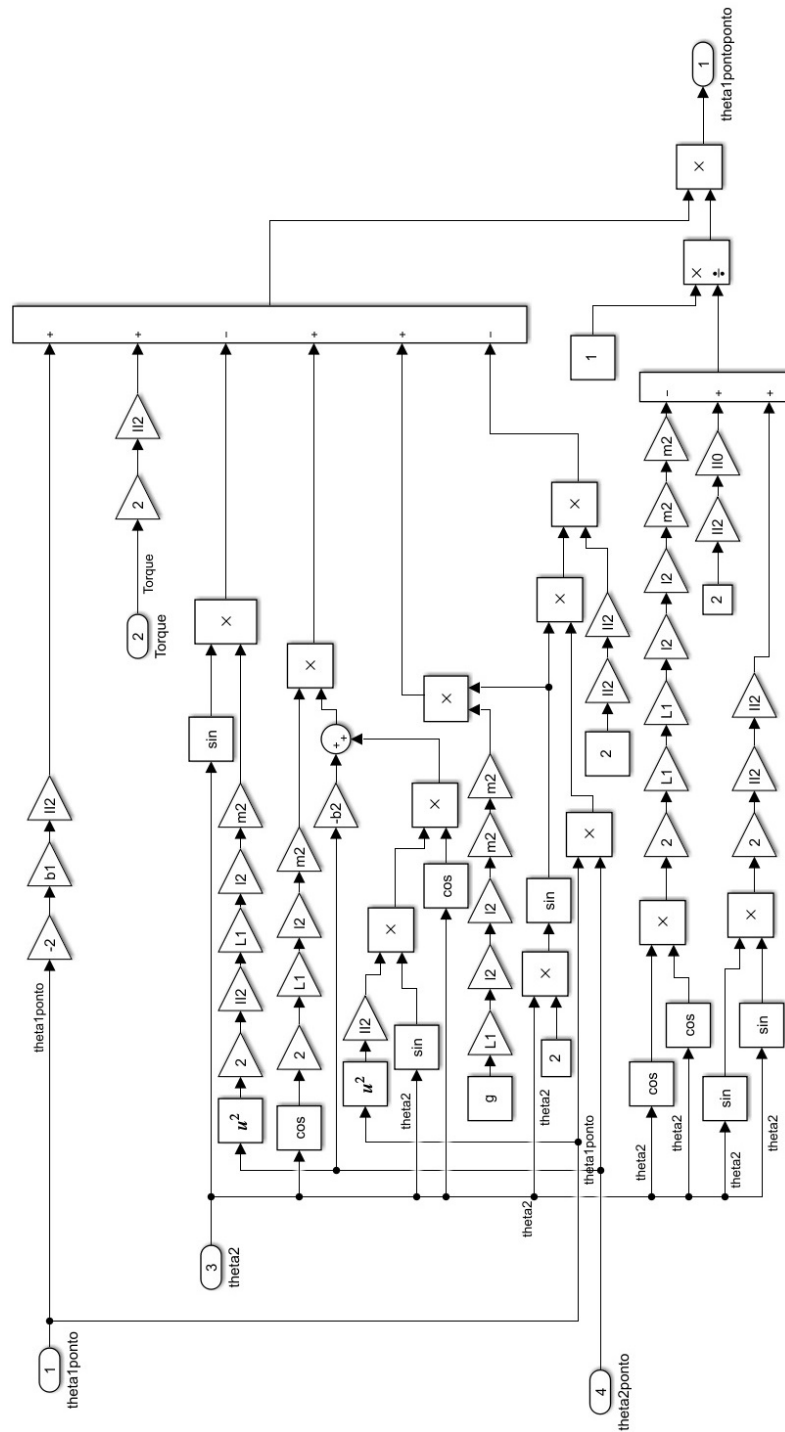


Fonte: Autoria Própria



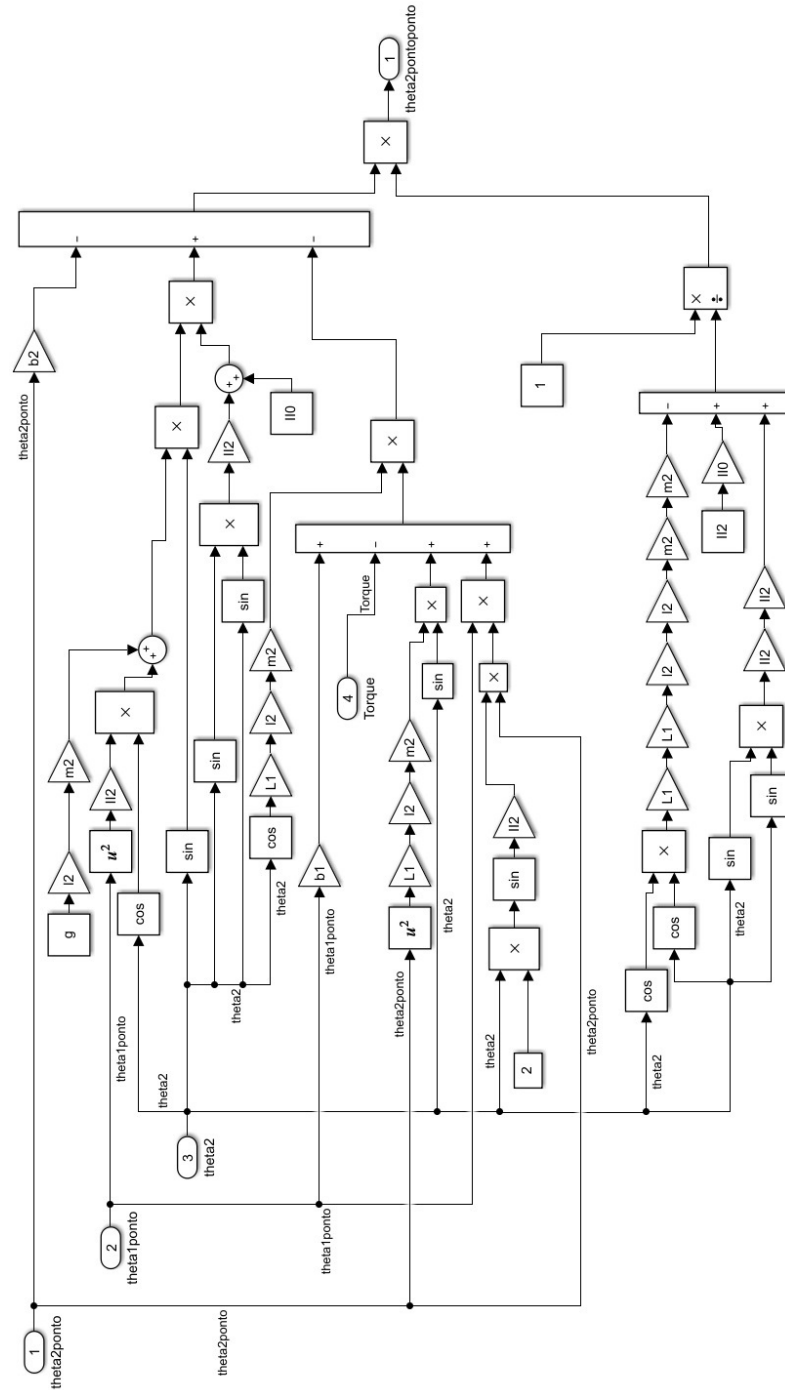
**APÊNDICE B – Diagramas de blocos dos subsistemas responsáveis pela obtenção das acelerações angulares para o diagrama apresentado no Apêndice A**

Figura 39 – Diagrama de blocos do subsistema de obtenção de  $\ddot{\theta}_1$ .



Fonte: Autoria Própria

Figura 40 – Diagrama de blocos do subsistema de obtenção de  $\ddot{\theta}_2$ .



Fonte: Autoria Própria

## APÊNDICE C – Algoritmo para controle seguidor

```

% Matrizes Adams Linear
%A = load('Controla');
%B = load('Controlb');
%C = load('Controlc');
%D = load('Controld');

% Matrizes Formulações de Lagrange e de Newton-Euler Linear
A=[0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 -36.8369 0 0; 0 -73.53 0 0];
B=[0; 0; 202.016; 180.625];
C=eye(4);
D=zeros(4,1);

% Variáveis auxiliares
E= C(1,:);
n = length(A);
m = size(B,2);
p = size(E,1);

% Matrizes Abarra e Bbarra
Abarra = [A zeros(n,p); -E zeros(p)];
Bbarra = [B;zeros(p,m)];

% Condição de controlabilidade
if rank(ctrb(A,B)) ≈= n then
    error('O par de matrizes (A,B) não é controlável!');
end
if rank([B A; zeros(p,m) -E]) ≈= n+p then
    error('O par de matrizes (Abarra,Bbarra) não é controlável!');
end

% Autovalores atribuídos
l1=-4;
l2=-4.2;
l3=-4.4;
l4=-4.6;
l5=-4.8;

% Cálculo dos ganhos  $K_1$  e  $K_2$ 
s1=[Abarra-l1*eye(5) Bbarra];
s2=[Abarra-l2*eye(5) Bbarra];
s3=[Abarra-l3*eye(5) Bbarra];

```

```
s4=[Abarra-l4*eye(5) Bbarra];
s5=[Abarra-l5*eye(5) Bbarra];
```

```
r1=rref(s1);
r2=rref(s2);
r3=rref(s3);
r4=rref(s4);
r5=rref(s5);
```

```
a1=[r1;zeros(1,6)];
a2=[r2;zeros(1,6)];
a3=[r3;zeros(1,6)];
a4=[r4;zeros(1,6)];
a5=[r5;zeros(1,6)];
```

```
for i = 6 do
```

```
    a1(i,i)=-1;
    a2(i,i)=-1;
    a3(i,i)=-1;
    a4(i,i)=-1;
    a5(i,i)=-1;
```

```
end
```

```
v(:,1)=a1(1:5,6)/(a1(1,6));
v(:,2)=a2(1:5,6)/(a2(1,6));
v(:,3)=a3(1:5,6)/(a3(1,6));
v(:,4)=a4(1:5,6)/(a4(1,6));
v(:,5)=a5(1:5,6)/(a5(1,6));
```

```
g(:,1)=a1(6,6)/(a1(1,6));
g(:,2)=a2(6,6)/(a2(1,6));
g(:,3)=a3(6,6)/(a3(1,6));
g(:,4)=a4(6,6)/(a4(1,6));
g(:,5)=a5(6,6)/(a5(1,6));
```

```
Kbarra=g*inv(v);
```

```
K1 = Kbarra(:,1:n);
```

```
K2 = Kbarra(:,n+1:end);
```

## APÊNDICE D – Algoritmo para controle LQR-I

```

% Matrizes Adams Linear
%A = load('Controla');
%B = load('Controlb');
%C = load('Controlc');
%D = load('Controld');

% Matrizes Formulações de Lagrange e de Newton-Euler Linear
A=[0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 -36.8369 0 0; 0 -73.53 0 0];
B=[0; 0; 202.016; 180.625];
C=eye(4);
D=zeros(4,1);

% Q e R atribuídos
Q=[0.001 0 0 0 0; 0 0.01 0 0 0; 0 0 1e-4 0 0; 0 0 0 1e-4 0; 0 0 0 0 10];
R=15;

% Variáveis auxiliares
E= C(1,:);
n = length(A);
m = size(B,2);
p = size(E,1);

% Matrizes Abarra e Bbarra
Abarra = [A zeros(n,p); -E zeros(p)];
Bbarra = [B; zeros(p,m)];

% Condição de controlabilidade
if rank([B A; zeros(p,m) -E]) ≈= n+p then
    error('O par de matrizes (Abarra,Bbarra) não é controlável!');
end

% Cálculo dos ganhos K1 e K2
[K,S,E] = lqr(Abarra,Bbarra,Q,R);
K1 = K(:,1:n);
K2 = K(:,n+1:end);

```