

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

JULIO YUZO YASSUDA

**CONTROLE ROBUSTO $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ DE DADOS AMOSTRADOS APLICADO A UM
SISTEMA HELICÓPTERO 2-DOF MODELADO POR QUASI-LPV**

DISSERTAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2021

JULIO YUZO YASSUDA

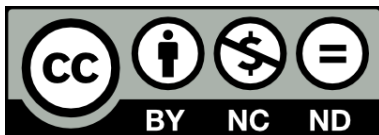
CONTROLE ROBUSTO $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ DE DADOS AMOSTRADOS APLICADO A UM SISTEMA HELICÓPTERO 2-DOF MODELADO POR QUASI-LPV

Trabalho de dissertação de mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito para obtenção do grau de "Mestre em Engenharia Elétrica".

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari

CORNÉLIO PROCÓPIO

2021



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

Esta licença permite *download* e compartilhamento do trabalho desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es), sem a possibilidade de alterá-lo ou utilizá-lo para fins comerciais. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



**Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Cornélio Procópio**



JULIO YUZO YASSUDA

**CONTROLE ROBUSTO H2/H-INFINITO DE DADOS AMOSTRADOS APLICADO A UM SISTEMA
HELICÓPTERO 2-DOF MODELADO POR QUASI-LPV**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Sistemas Eletrônicos Industriais.

Data de aprovação: 30 de Agosto de 2021

Prof Cristiano Marcos Agulhari, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Bruno Augusto Angelico, Doutorado - Usp-Universidade de São Paulo

Prof Emerson Ravazzi Pires Da Silva, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 30/08/2021.

RESUMO

Neste trabalho, é apresentado o desenvolvimento de um controlador de dados amostrados aplicado a um sistema helicóptero com dois graus de liberdade. Esse sistema possui dinâmica não-linear, sendo modelado neste trabalho na forma quasi-LPV, permitindo a utilização de condições convexas para determinação dos controladores desejados. A metodologia utilizada possui robustez garantida pela norma \mathcal{H}_∞ para o controle das posições do sistema, sendo robusto à variação da taxa de amostragem, ruídos e perturbações. Além disso, como critério de desempenho foi utilizado em conjunto a norma \mathcal{H}_2 , que é uma das contribuições deste trabalho. Para a análise e validação do método proposto, foram realizadas simulações computacionais variando a taxa de amostragem e introduzindo perturbações ao sistema.

Palavras-chave: Controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de dados amostrados. Helicóptero 2-DOF. Sistema quasi-LPV. Sistemas não-lineares.

ABSTRACT

In this work, the development of sampled-data controller is shown, applied to a two-degree of freedom helicopter. This system has a non-linear dynamic, being modeled in this work in the quasi-LPV form, allowing the utilization of convex conditions to determine the desired controllers. The used methodology assure the robustness through \mathcal{H}_∞ norm bounds, where the position control is robust to sample rate variation, noises and disturbance. Furthermore, as a performance criterion, a \mathcal{H}_2 standard was used, which is one of the contributions of this work. For analysis and validation of the proposed method, computational simulations were performed by varying the sample rate and adding disturbances to the system.

Keywords: Sampled Data Control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Helicopter 2-DOF. LPV system. Nonlinear system.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Malha fechada do sistema não-linear de dados amostrados modelado por LPV. Fonte: Adaptado Hooshmandi, 2020.	14
Figura 2 – Função dente de serra. Fonte: Autoria Própria, 2021.	15
Figura 3 – Quanser Helicóptero 2-DOF. Fonte: Quanser, 2012.	36
Figura 4 – Modelo Helicóptero 2-DOF. Fonte: Quanser, 2012.	37
Figura 5 – Aproximação da 1 ^a e 2 ^a Equação. Fonte: Autoria Própria.	42
Figura 6 – Aproximação da 3 ^a , 4 ^a e 5 ^a Equação. Fonte: Autoria Própria.	42
Figura 7 – Sistema com realimentação de estados com seguidor de referência. Fonte: Autoria Própria.	43
Figura 8 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema sem o sinal exógeno. Fonte: Autoria Própria.	48
Figura 9 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema com o sinal exógeno. Fonte: Autoria Própria.	49
Figura 10 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema sem sinal exógeno. Fonte: Autoria Própria.	50
Figura 11 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema com sinal exógeno. Fonte: Autoria Própria.	50
Figura 12 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema do Teste de Robustez com $T = 0,04s$. Fonte: Autoria Própria.	52
Figura 13 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema do Teste de Robustez com $T = 0,02s$. Fonte: Autoria Própria.	52
Figura 14 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema do Teste de Desempenho com $T = 0,04s$. Fonte: Autoria Própria.	53
Figura 15 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema do Teste de Desempenho com $T = 0,02s$. Fonte: Autoria Própria.	53

Figura 16 – Sinal de Controle Seccionado Teste Robustez $T = 0,04s$.	
Fonte: Autoria Própria.	54
Figura 17 – Sinal de Controle Seccionado Teste Robustez $T = 0,02s$.	
Fonte: Autoria Própria.	54
Figura 18 – Sinal de Controle Seccionado Teste Desempenho $T = 0,04s$.	
Fonte: Autoria Própria.	55
Figura 19 – Sinal de Controle Seccionado Teste Robustez $T = 0,02s$.	
Fonte: Autoria Própria.	55
Figura 20 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema do Teste de Robustez com $T = 0,5s$.	
Fonte: Autoria Própria.	56
Figura 21 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema do Teste de Desempenho com $T = 0,5s$.	
Fonte: Autoria Própria.	56

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LTI	<i>Linear Time Invariant</i>
LMI	<i>Linear Matrix Inequalities</i>
LPV	<i>Linear Parameter Varying</i>
2-DOF	<i>Two Degree of Freedom</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Justificativa	10
1.2	Objetivo	11
1.3	Objetivos Específicos	11
1.4	Metodologia	11
1.5	Organização do Trabalho	11
2	SISTEMA DE DADOS AMOSTRADOS	13
2.1	Definição	13
2.2	Estabilidade Assintótica	17
2.3	Análise de Custo do ganho L_2	21
2.4	Síntese do Controlador \mathcal{H}_∞	23
2.5	Síntese do Capítulo	27
3	CONTROLADOR ROBUSTO \mathcal{H}_2	28
3.1	Análise de custo do ganho J_2	28
3.2	Síntese do Controlador \mathcal{H}_2	30
4	MODELAGEM DO SISTEMA	36
4.1	Helicóptero 2-DOF	36
4.2	Equação de Lagrange	37
5	DESENVOLVIMENTO	40
5.1	Modelo quasi-LPV 2-DOF	40
6	ENSAIOS REALIZADOS	45
6.1	Teste de Robustez	45
6.2	Teste de Desempenho	46
6.3	Teste da variação do período de amostragem	47
7	RESULTADOS	48
7.1	Teste de robustez	48
7.2	Teste de Desempenho	49
7.3	Teste da Variação do Período de amostragem	51
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	57

REFERÊNCIAS 59

1 INTRODUÇÃO

Na área de controle clássico, os processos considerados são lineares e invariantes no tempo (LTI), sendo possível a aplicação das técnicas de controle existentes e consolidadas na literatura, tanto no tempo contínuo, como discreto (OGATA, 2010). Entretanto, na prática existem muitos sistemas que apresentam comportamento não-linear nos quais, muitas vezes, técnicas de controle LTI não são precisamente válidas. Dessa forma, uma abordagem consiste em considerar que o modelo pode ser representado por um sistema linear com parâmetros variantes no tempo (LPV), cuja dependência temporal é descrita por uma dependência paramétrica variante no tempo (OLIVEIRA, 2000). Assim, para os sistemas não-lineares os parâmetros podem ser dependentes dos estados, sendo portanto denominados de sistemas quasi-LPV (HUANG; JADBABAIE, 1999).

Dessa forma, técnicas de controle para sistemas LPV ou quasi-LPV têm recebido uma atenção especial, tanto no desenvolvimento de novas estratégias, como em aplicações práticas. Como exemplo pode-se citar a técnica de controle preditivo para sistemas multi-LPV proposto por Yue e Su (2019), que consiste em utilizar vários sistemas LPV para descrever o modelo e, para cada LPV, é projetado um controlador que são comutados por uma lei de comutação. Um controlador robusto para sistemas LPV com atrasos é proposto por Nejem, Bouzizi e Bouani (2018), em que os parâmetros são dependentes dos estados do sistema. Já Rahme, Meskin e Mohammadpour (2018) propõem um observador adaptativo de modo deslizante que é utilizado para diagnosticar falhas do atuador, devido a imperfeições na medição para sistemas modelados por LPV. No campo prático, pode-se citar trabalhos tais como o controle de realimentação de estados para um sistema de estacionamento automatizado proposto por Alcalá, Facerías e Puig (2020), em que a cinemática do sistema é representada por LPV. Outro exemplo é o controle LPV para aerogeradores operando sob ventos fortes proposto por Djamaï (2019), que consiste em regular a velocidade do gerador para trabalhar em condições nominais aliviando as tensões induzidas na estrutura da torre. Por sua vez, Najarzadeh et al. (2021) propõem um modelo LPV para controle e prevenção de surto do vírus da influenza através da vacinação e tratamento antiviral.

Outro campo de aplicação de sistemas LPV é o de controle de dados amostrados, em que o comportamento da planta está no tempo contínuo e a atualização do sinal de controle é de forma discreta (PALMEIRAS; SILVA.; FLORES, 2018). A abordagem de controle de dados amostrados modelados por LPV tem aumentado com o tempo, devido à necessidade prática de implementação das técnicas LPV com o uso de microcontroladores (LOPES et al., 2020). Podem-se citar trabalhos como a aplicação de controle amostrado para sistemas LPV com parâmetros dependentes da função de Lyapunov que é proposta

por Tan e Grigoriadis (2000), em que os estados do sistema e o intervalo de amostragem dependem de parâmetros variantes no tempo. Para sistemas com atraso variável nos estados, Ramezanifar, Mohammadpour e Grigoriadis (2014) desenvolvem, a partir da combinação da dinâmica de tempo contínuo da planta e a de tempo discreto do controlador, a ideia de sistemas híbridos com atraso nos estados. Já Zhang et al. (2019) utiliza desigualdade clássica de Halanay para análise de estabilidade assintótica do sistema de malha fechada com a amostragem variando com o tempo.

Assim, percebe-se a constante utilização de controle de dados amostrados modelados por LPV, devido à sua grande versatilidade para o controle de sistemas não-lineares com parâmetros variantes no tempo, tanto no desenvolvimento de novas técnicas, quanto na aplicação prática. Dentre as aplicações práticas, pode-se citar Fujimoto (2000) que utiliza controle de dados amostrado para o controle de posição de um sistema de servo-motores de um robô manipulador. A aplicação para controle de voo de uma aeronave F-18, proposto por Sakthivel et al. (2015), considera a presença de atrasos de tempo aleatórios na amostragem, ocasionando falhas nos atuadores. Já Cheng et al. (2016) utiliza tal estratégia para o controle de nível de um sistema de 4 tanques sujeitos a atrasos de ocorrência aleatória.

Desse modo, um sistema em particular em que tal estratégia de controle pode ser aplicada é o sistema do helicóptero com dois graus de liberdade (2-DOF). Tal sistema, considerado por exemplo em Vishnupriyan, Manoharan e Ramalakshmi (2014), apresenta dois graus de liberdade e consiste em uma viga articulada com um motor em cada uma de suas extremidades fixados perpendicularmente. Sua dinâmica não-linear torna a aplicação de controle amostrado modelado por LPV favorável. Além disso, vale ressaltar a importância de projetar controladores que considerem perturbações, incertezas e problemas advindos do controlador de dados amostrados para o helicóptero, por se tratar de um sistema complexo a ser controlado. Assim, neste trabalho, será apresentada uma metodologia de controle de dados amostrados para o sistema helicóptero 2-DOF, além da modelagem quasi-LPV do sistema para tal aplicação. No trabalho as seguintes notações são utilizadas: I para matriz identidade, \star para indicar matriz bloco simétrico. $(\cdot)^T$ para matriz transposta, o operador hermitiano definido por $A^H = A + A^T$ e S^n para o conjunto de matrizes simétricas de dimensão n .

1.1 JUSTIFICATIVA

Conforme apresentado, as estratégias de controle de dados amostrados utilizando a abordagem LPV têm ganhado ênfase na área de controle de sistemas não-lineares tanto no desenvolvimento de novas estratégias, quanto em simulações e aplicações práticas em sistemas reais, sendo possível a modelagem da dependência de parâmetros variantes no tempo.

Assim, o presente trabalho traz contribuições para a área de controle, uma vez que

propõe a aplicação de uma estratégia de controle de dados amostrado em uma sistema helicóptero 2-DOF, com a realização da análise e validação de tal estratégia.

1.2 OBJETIVO

O trabalho tem como objetivo aplicar a estratégia de controle robusto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de dados amostrados em um sistema não-linear descrito por um modelo quasi-LPV. Tal estratégia será aplicada em um sistema Helicóptero 2-DOF considerando a modelagem lagrangiana para a determinação da sua dinâmica.

1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Modelar o sistema helicóptero 2-DOF na representação quasi-LPV;
- Estudar e implementar o conjunto de LMIs necessárias para a síntese do controlador robusto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de dados amostrados modelados por quasi-LPV;
- Obter o controlador robusto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de dados amostrados;
- Implementar e simular o sistema controlado por meio do software MATLAB;
- Avaliar o desempenho do controlador sintonizado.

1.4 METODOLOGIA

Conforme mencionado anteriormente, o trabalho a ser desenvolvido é embasado no estudo de controlador robusto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de dados amostrados modelados por sistemas quasi-LPV. Assim, inicialmente foi realizada uma pesquisa bibliográfica referente a controladores robustos $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de dados amostrados.

Posteriormente, foi realizado o estudo do sistema Helicóptero 2-DOF e sua modelagem não-linear da dinâmica do sistema através do modelo quasi-LPV. Ademais, a partir da modelagem quasi-LPV do sistema foi implementado o controlador robusto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de dados amostrados.

Após a obtenção do controlador, prosseguiu-se para a implementação do sistema no software MATLAB e a simulação do mesmo. Por fim, foi elaborada a documentação técnica do trabalho, expondo o desenvolvimento e os resultados obtidos neste trabalho.

1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este documento é dividido em mais sete capítulos além desta introdução, os quais são:

- Capítulo 2 - Apresenta a teoria sistema de dados amostrados, além da condição de síntese do controlador robusto de dados amostrados para a norma \mathcal{H}_∞ a ser utilizado neste trabalho;
- Capítulo 3 - Apresenta a condição de síntese do controlador robusto de dados amostrados para a norma \mathcal{H}_2 , além do algoritmo utilizado para a síntese minimizando as normas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, sendo esta, uma contribuição do trabalho;
- Capítulo 4 - Demonstra a modelagem do sistema Helicóptero 2-DOF através das equações diferenciais no formato de espaço de estados;
- Capítulo 5 - Desenvolve a modelagem quasi-LPV do sistema 2-DOF, além de apresentar a representação da dinâmica do sistema;
- Capítulo 6 - Apresenta os ensaios realizados para avaliar o desempenho do controlador proposto, além da síntese do controlador para cada caso;
- Capítulo 7 - Apresenta os resultados obtidos por meio da simulação do modelo proposto;
- Capítulo 8 - Traz as conclusões do trabalho, bem como perspectivas para o aprimoramento desse trabalho.

2 SISTEMA DE DADOS AMOSTRADOS

O controlador de dados amostrados modelado por LPV tem grande aplicação na área de sistemas não lineares. Neste trabalho, será utilizado um controlador de dados amostrados modelado por LPV, cuja condição de síntese não-convexa é transformada em uma condição bilinear pela introdução de uma variável de folga (HOOSHMANDI et al., 2020). Tal condição bilinear é então resolvida pela aplicação de um procedimento iterativo, descrito no decorrer do trabalho.

2.1 DEFINIÇÃO

Considere o sistema não-linear descrito através do sistema de equação diferenciais ordinárias representado pela Equação (1)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), w(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t))\end{aligned}\tag{1}$$

em que f e h são campos vetoriais que representam a dinâmica do sistema, $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ são os estados, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ as entradas de controle, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ as entradas exógenas (ruídos não mensuráveis que geram distúrbios no processo) e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ as saídas do sistema.

Utilizando a abordagem de modelo LPV apresentada por Gaspar et al. (2017) para o sistema não-linear descrito na Equação (1), e considerando que todos os estados de $x(t)$ estão disponíveis para leitura, obtém-se a representação quasi-LPV do sistema apresentado na Equação (2).

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\eta(t))x(t) + B_w(\eta(t))w(t) + B_u(\eta(t))u(t) \\ y(t) &= x(t) \\ z(t) &= C_z(\eta(t))x(t) + D_{zw}(\eta(t))w(t) + D_{zu}(\eta(t))u(t) \\ z_2(t) &= C_{2z}(\eta(t))x(t) + D_{2zw}(\eta(t))w(t) + D_{2zu}(\eta(t))u(t)\end{aligned}\tag{2}$$

A variável $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ está relacionada à robustez do sistema e $z_2(t) \in \mathbb{R}^{n_{z2}}$ esta relacionado ao desempenho, elementos que são as saídas desejadas do sistema.

As matrizes do sistema são funções reais contínuas que variam no tempo de acordo com o vetor $\eta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_\eta}$, e podem ser polinomialmente dependentes dos parâmetros. O vetor de parâmetros varia continuamente e assume-se que $\eta(t)$ e sua derivada são limitadas. Assim, o espaço de parâmetros convexo pode ser definido de acordo com a Equação (3)

$$\Phi := \left\{ \eta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_\eta} \mid \eta(t) \in \Delta_\eta, \dot{\eta}(t) \in \Delta_{\dot{\eta}} \right\}\tag{3}$$

onde Δ_η e $\Delta_{\dot{\eta}}$ são os conjuntos dos parâmetros admissíveis e suas derivadas, respectivamente. Além disso, considere que Δ_η e $\Delta_{\dot{\eta}}$ são conjuntos convexos compactos, como apresentado na Equação (4).

$$\begin{aligned}\Delta_\eta &= \left\{ \eta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_\eta} \mid \underline{\alpha}_i \leq \eta_i(t) \leq \bar{\alpha}_i, i = 1, \dots, n_\eta \right\} \\ \Delta_{\dot{\eta}} &= \left\{ \dot{\eta} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_\eta} \mid -v_i \leq \dot{\eta}_i(t) \leq v_i, i = 1, \dots, n_\eta \right\}\end{aligned}\quad (4)$$

em que $\underline{\alpha}_i$, $\bar{\alpha}_i$, $-v_i$ e v_i são os limitantes inferiores e superiores do conjunto de parâmetros variáveis e suas derivadas respectivamente.

Considere agora que o sistema LPV (3) é submetido a um sistema realimentado de controle sujeito a efeitos de amostragem, como ilustrado na Figura 1.

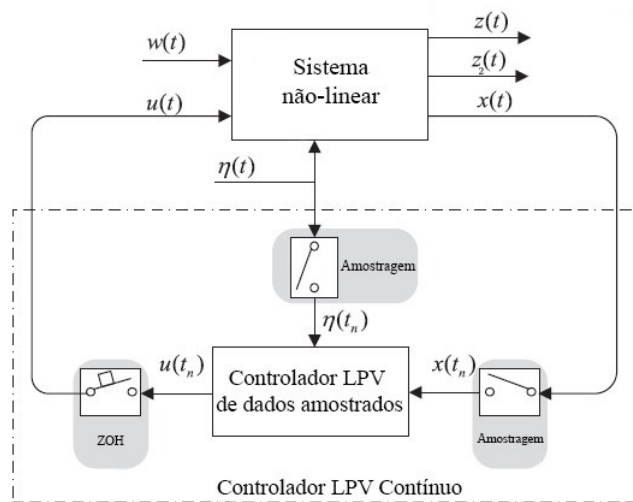


Figura 1 – Malha fechada do sistema não-linear de dados amostrados modelado por LPV. Fonte: Adaptado Hooshmandi, 2020.

A estrutura de controle considerada utiliza os estados do sistema e a medição de parâmetros em instante de amostragens t_n , $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo a condição apresentada na Equação (5).

$$0 < t_1 < \dots < t_n < \dots, T_n = t_{n+1} - t_n \leq \bar{T} \quad (5)$$

É importante ressaltar que a amostragem não precisa ser periódica e \bar{T} indica o maior intervalo de amostragem. Além disso, a saída do controlador é atualizada a cada instante de amostragem com base no vetor de estados e dos parâmetros LPV correspondentes. Então, o sinal de controle será constante por partes e pode ser visto na Equação (6).

$$u(t) = u(t_n) = K(\eta(t_n))x(t_n), \quad t_n \leq t < t_{n+1} \quad (6)$$

Uma das maneiras de modelar os dados amostrados é considerar que o sistema está submetido a efeitos de atraso. Para tanto, considere a função indicadora definida por

$$\tau(t) = t - t_n \quad \text{para } t \in [t_n, t_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N} \quad (7)$$

em que $\tau(t)$ denota o tempo decorrido desde o último instante de amostragem. Assim, o atraso induzido é uma função dente de serra que tem derivada igual a um ($\dot{\tau}(t) = 1$) em quase todos os instantes. A Figura 2 ilustra a função $\tau(t)$.

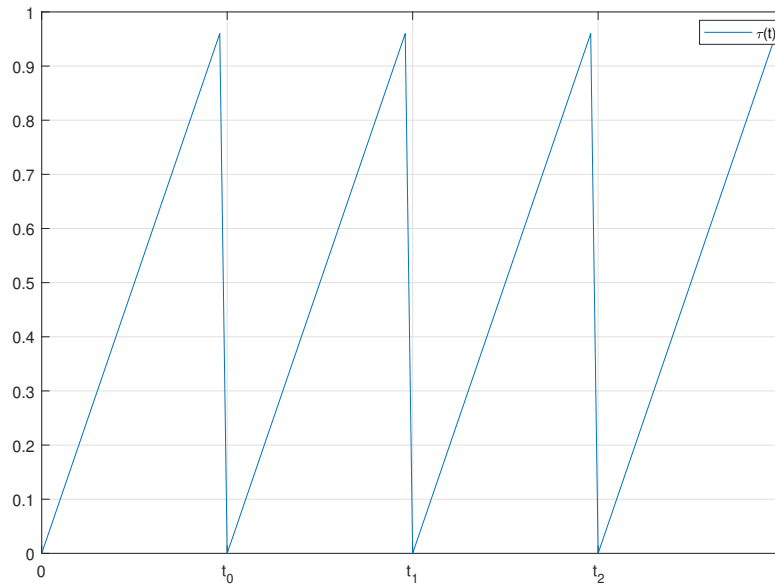


Figura 2 – Função dente de serra.

Fonte: Autoria Própria, 2021.

Dessa maneira, substituindo as Equações (6) e (7) na Equação (2), obtém-se o sistema controlado de malha fechada apresentado na Equação (8).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\eta(t))x(t) + B_w(\eta(t))w(t) + B_u(\eta(t))K(\eta(t - \tau(t)))x(t - \tau(t)) \\ y(t) &= x(t) \\ z(t) &= C_z(\eta(t))x(t) + D_{zw}(\eta(t))w(t) + D_{zu}(\eta(t))K(\eta(t - \tau(t)))x(t - \tau(t)) \\ z_2(t) &= C_{2z}(\eta(t))x(t) + D_{2zw}(\eta(t))w(t) + D_{2zu}(\eta(t))K(\eta(t - \tau(t)))x(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (8)$$

Nota-se que as incertezas entre o sistema real, no tempo contínuo, e o utilizado com parâmetros constantes por partes, dependem do intervalo de amostragem e da taxa de variação dos parâmetros. Dessa maneira, o objetivo é considerar o impacto da incerteza no

desempenho do sistema controlado descrito pela Equação (8). Considerando $|\dot{\eta}(t)| \leq v_i$ e utilizando o teorema do valor médio, obtêm-se:

$$|\eta_i(t) - \eta_i(t_n)| \leq v_i \tau(t) \quad (9)$$

Assim, a seguinte relação entre o sistema real no tempo contínuo e o medido com parâmetros constante por partes é obtido e apresentado na Equação (10).

$$\eta_i(t) = \eta_i(t - \tau(t)) + \Delta_i(t), \quad |\Delta_i(t)| \leq v_i \bar{T} \quad (10)$$

Como $\dot{\eta}_i(t) = \dot{\Delta}_i(t)$, então:

$$-v_i \leq \dot{\Delta}_i(t) \leq v_i, \quad i = 1, \dots, n_\eta \quad (11)$$

As matrizes do sistema em malha aberta na Equação (2) dependem apenas do valor real do parâmetro $\eta_i(t)$. No entanto, de acordo com a Equação (10), pode-se transferir a incerteza sobre os parâmetros medidos do controlador para os parâmetros reais da planta. Neste caso, as matrizes do sistema de malha aberta dependem das incertezas e do valor dos parâmetros medidos. Dessa forma, para uma representação uniforme, é agregado o vetor de incertezas e o atraso induzido em um novo vetor com parâmetros definidos de acordo com a Equação (12).

$$\rho(t) = [\eta_1(t - \tau(t)), \dots, \eta_{n_\eta}(t - \tau(t)), \Delta_1(t), \dots, \Delta_{n_\eta}(t)] \quad (12)$$

O sistema considerado é, então, denotado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B_w(\rho(t))w(t) + B_u(\rho(t))K(\rho(t))x(t - \tau(t)) \\ z(t) &= C_z(\rho(t))x(t) + D_{zw}(\rho(t))w(t) + D_{zu}(\rho(t))K(\rho(t))x(t - \tau(t)) \\ z_2(t) &= C_{z_2}(\rho(t))x(t) + D_{2zw}(\rho(t))w(t) + D_{2zu}(\rho(t))K(\rho(t))x(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (13)$$

Logo, o sistema de dados amostrados apresentado na Equação (8) corresponde ao sistema apresentado na Equação (13) sobre o novo espaço de parâmetros definido como:

$$\Theta := \left\{ \rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times n_\eta} \mid \rho(t) \in \Delta_\rho, \dot{\rho}(t) \in \Delta_{\dot{\rho}} \right\} \quad (14)$$

sendo Δ_ρ e $\Delta_{\dot{\rho}}$ poliedros convexos do novo vetor de parâmetros e sua taxa de variação, respectivamente.

Assim, uma vez que todos os parâmetros e suas incertezas (com suas respectivas taxas de variação) são modelados de maneira que variem dentro do conjunto convexo Θ ,

é definido a seguir o problema de controle de dados amostrados por LPV associado ao sistema apresentado na Equação (13).

Problema 1 *Suponha que os parâmetros variantes no tempo $\eta(t)$ são fornecidos como $\eta(t_n)$ com incerteza $\Delta(t)$. Para um dado escalar positivo γ , encontre um controlador de dados amostrados modelado por LPV na forma da Equação (6) que, para quaisquer parâmetros $\rho \in \Theta$ e tempo de amostragem aperiódica menor que $\bar{T} > 0$, estabilize o sistema de malha fechada apresentado na Equação (13) e satisfaça a seguinte condição:*

$$\sup_{\rho \in \Theta} \sup_{w \in L_2} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma \quad (15)$$

sendo o ganho L_2 o espaço de funções $z : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo $\|z\|_2 < \infty$ com $\|z\|_2$ definido pela Equação (16).

$$\|z\|_2 := \left[\int_0^\infty z^T(t) z(t) dt \right]^{0.5} \quad (16)$$

2.2 ESTABILIDADE ASSINTÓTICA

Para garantir a estabilidade do sistema de malha fechada para o intervalo de amostragem aperiódica menor que $\bar{T} > 0$, é apresentado o Lema 1, que é um resultado importante para a demonstração do Teorema 1 apresentado posteriormente.

Lema 1 *(Desigualdade de Jensen)(BRIAT, 2011) Considere um vetor $z(\cdot)$ integrável em U , com medida de Lebesgue $\mu(U)$, a matriz real $\mathbb{R} = \mathbb{R}^T > 0$, e o vetor $w(\cdot)$ verificando $-\int_U z(s) ds \leq Mw(\cdot)$, para alguma matriz conhecida M . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *A seguinte desigualdade*

$$-\int_U z^T(s) Rz(s) ds \leq -\mu(U)^{-1} w^T M^T R M w \quad (17)$$

vale para todo $z(\cdot)$ e $w(\cdot)$ satisfazendo a condição da Equação (17).

(2) *Existe uma matriz N tal que a desigualdade*

$$-\int_U z^T(s) Rz(s) ds \leq w^T Q(N) w \quad (18)$$

vale para todo $w(\cdot)$, $z(\cdot)$ satisfazendo a condição apresentado na Equação (18), sendo $Q(N)$ dado na Equação (19).

$$Q(N) = N^T M + M^T N + \mu(U) N^T R^{-1} N \quad (19)$$

No Teorema 1 a seguir, é apresentada a condição de análise de estabilidade do sistema da Equação (13), a ser utilizada para o desenvolvimento da condição de síntese.

Teorema 1 (HOOSHMANDI et al., 2020) *Se existirem matrizes positivas simétricas $P(\rho) \in S_+^n$, $E(\rho) \in S_+^{2n}$, uma matriz simétrica $X_1(\rho) \in S^n$, uma matriz constante $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $U(\rho) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ que satisfaçam as Equações (20), (21) e (22)*

$$[I \ 0]^T P(\rho) [I \ 0] + \bar{T}X(\rho) > 0 \quad (20)$$

$$\Pi_1(\rho) + \bar{T}\Pi_2(\rho) < 0 \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_1(\rho) + \bar{T}\Pi_3(\rho) & \bar{T}U(\rho) \\ \star & -\bar{T}E(\rho) \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

para todo $\rho(t) \in \Theta$, sendo

$$\begin{aligned} \Pi_1(\rho) &= S_1^T P(\rho) S_2 + S_2^T P(\rho) S_1 + S_2^T \dot{P}(\rho) S_2 - X(\rho) + (U(\rho) W)^H \\ \Pi_2(\rho) &= S_3^T X(\rho) + X(\rho) S_3 + \dot{X}(\rho) + S_4^T E(\rho) S_4 \\ \Pi_3(\rho) &= (U(\rho) W_T)^H \\ S_1 &= \begin{bmatrix} A(\rho) & B_u(\rho) K(\rho) \end{bmatrix} \\ S_2 &= \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \\ S_3 &= \begin{bmatrix} A(\rho) & B_u K(\rho) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ S_4 &= \begin{bmatrix} A(\rho) & B_u K(\rho) \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ X(\rho) &= \begin{bmatrix} X_1(\rho) & X_2 - X_1(\rho) \\ \star & X_1(\rho) - X_2 - X_2^T \end{bmatrix} \\ W &= \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ W_T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

então o sistema apresentado na Equação (13) com $w = 0$ é assintoticamente estável para qualquer valor do tempo de amostragem menor que \bar{T} .

Prova 1 Considere o seguinte tempo e o parâmetro dependente da função Lyapunov Krasovskii (LKF).

$$\begin{aligned}
V(t) &= V_1(t) + V_2(t) + V_3(t), \quad t \in [t_n, t_{n+1}) \\
V_1(t) &= x^T(t) P(\rho) x(t) \\
V_2(t) &= (t_{n+1} - t) \int_{t_n}^t \begin{bmatrix} \dot{x}(q) \\ x(t_n) \end{bmatrix}^T E(\rho) \begin{bmatrix} \dot{x}(q) \\ x(t_n) \end{bmatrix} dq \\
V_3(t) &= (t_{n+1} - t) \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t_n) \end{bmatrix}^T X(\rho) \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t_n) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{24}$$

Primeiramente, é necessário garantir a positividade de $V(t)$. O termo $V_2(t)$ é positivo pois $E(\rho) \in S_+^{2n}$. É possível ver que a positividade da soma $V_1(t) + V_3(t)$ é equivalente à Equação (25)

$$\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}^T P(\rho) \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + (t_n - t) X(\rho) > 0, \quad t \in [t_n, t_{n+1}) \tag{25}$$

que é satisfeita se a condição (20) for válida.

Assim, existe um escalar positivo β tal que

$$V(t) > \beta \|x(t)\|^2 \tag{26}$$

O segundo passo consiste em analisar se a LKF não é incrementada nos momentos que ocorrem os saltos ($t_n = t$) (FRIDMAN, 2010). O primeiro termo ($V_1(t)$) está na forma quadrática, portanto é contínuo. Os termos da integral são contínuos entre dois instantes de amostragem. Ainda, devido à estrutura de $X(\rho)$ dada na Equação (23), $V_3(t) = 0$ quando $x(t) = x(t_n)$. Dessa maneira, a seguinte condição é válida.

$$\lim_{t \rightarrow t_n^-} V(t) \geq V(t_n) \tag{27}$$

Para que o sistema da Equação (13) seja assintoticamente estável, é suficiente demonstrar que a derivada da LKF $V(t)$ é definida negativa no intervalo $t \in (t_n, t_{n+1})$.

Derivando $V(t)$, têm-se:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) \\
\dot{V}_1(t) &= \dot{x}^T(t) P(\rho) x(t) + x(t) P(\rho) \dot{x}^T(t) + x^T(t) \dot{P}(\rho) x(t) \\
\dot{V}_2(t) &= - \int_{t_n}^t \begin{bmatrix} \dot{x}(q) \\ x(t_n) \end{bmatrix}^T E(\rho) \begin{bmatrix} \dot{x}(q) \\ x(t_n) \end{bmatrix} dq + (t_{n+1} - t) \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t_n) \end{bmatrix}^T E(\rho) \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t_n) \end{bmatrix} \\
\dot{V}_3(t) &= - \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t_n) \end{bmatrix}^T X(\rho) \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t_n) \end{bmatrix} + (t_{n+1} - t) \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ 0 \end{bmatrix}^T X(\rho) \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t_n) \end{bmatrix} \\
&\quad + (t_{n+1} - t) \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t_n) \end{bmatrix}^T X(\rho) \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ 0 \end{bmatrix} + (t_{n+1} - t) \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t_n) \end{bmatrix}^T \dot{X}(\rho) \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t_n) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{28}$$

Considere o vetor $z(t) = [\dot{x}^T(t) x^T(t_n)]^T$ satisfazendo:

$$\int_{t_n}^t z(q) dq = (W + \tau(t) W_t) \xi(t) \tag{29}$$

com $\xi(t) = [x^T(t) x^T(t_n)]^T$. De acordo com o Lema 1, o seguinte limite é obtido:

$$\begin{aligned}
- \int_{t_n}^t \begin{bmatrix} \dot{x}(q) \\ x(t_n) \end{bmatrix}^T E(\rho) \begin{bmatrix} \dot{x}(q) \\ x(t_n) \end{bmatrix} dq &\leq \xi^T(t) \left((U(\rho) (W + \tau(t) W_t))^H \right. \\
&\quad \left. + \tau(t) U(\rho) E^{-1}(\rho) U^T(\rho) \right) \xi(t)
\end{aligned} \tag{30}$$

Reescrevendo a Equação (30) na Equação (28), têm-se:

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T(t) \left(\Pi_1(\rho) + (t_{n+1} - t) \Pi_2(\rho) + \tau(t) \Pi_3(\rho) + \tau(t) U(\rho) E^{-1}(\rho) U^T(\rho) \right) \xi(t) \tag{31}$$

Uma vez que a Equação (31) é dependente de t , então para $t = t_n$, e utilizando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994) na Equação (22), implica que existe um escalar positivo δ que satisfaz:

$$\dot{V}(t) < -\delta \|x(t)\|^2 \tag{32}$$

Se as condições (20), (21) e (22) forem válidas, então existe um LKF na forma da Equação (24) que satisfaz as Equações (26), (27) e (32). Assim, o sistema de malha fechada (13) com período de amostragem periódico ou aperiódico menor que $\bar{T} > 0$, é assintoticamente estável, completando a prova.

2.3 ANÁLISE DE CUSTO DO GANHO L_2

Na análise de custo, o ganho L_2 e as derivadas das condições na forma de LMIs para sistemas de dados amostrados modelado por LPV são considerados. Tal análise será importante para o desenvolvimento da síntese do controlador posteriormente. Assim, considere o Teorema 2 apresentado a seguir.

Teorema 2 (HOOSHMANDI et al., 2020) *Considere que o sistema LPV na Equação (13) seja assintoticamente estável. Então, a condição da Equação (15) com $\gamma > 0$ é satisfeita para qualquer variação do período de amostragem menor que $\bar{T} > 0$, supondo as condições iniciais nulas, se existirem matrizes definidas positivas $P(\rho) \in S_+^n$, $E(\rho) \in S_+^{2n}$, uma matriz simétrica $X_1(\rho) \in S^n$, uma matriz constante $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $U(\rho) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ tal que para todo $\rho \in \Theta$, existe uma solução factível para as seguintes LMIs*

$$\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}^T P(\rho) \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + \bar{T}X(\rho) > 0 \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Pi}_1(\rho) + \bar{T}\bar{\Pi}_2(\rho) & \Phi \\ * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Pi}_1(\rho) + \bar{T}\bar{\Pi}_3(\rho) & \bar{T}S_3^T U(\rho) & \Phi(\rho) \\ * & -\bar{T}E(\rho) & 0 \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

sendo

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}_1(\rho) &= \left(S_1^T P(\rho) S_2 \right)^H + S_2^T \dot{P}(\rho) S_2 - \bar{X}(\rho) + \left(S_3^T U(\rho) W \right)^H \\
\bar{\Pi}_2(\rho) &= S_4^T E(\rho) S_4 + \left(S_5^T X(\rho) S_3 \right)^H + \dot{X}(\rho) \\
\bar{\Pi}_3(\rho) &= \left(S_3^T U(\rho) W_t \right)^H \\
S_1 &= \begin{bmatrix} A(\rho) & B_u(\rho) & K(\rho) & B_w(\rho) \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
S_3 &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} I & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
W_t &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \\
S_4 &= \begin{bmatrix} A(\rho) & B_u(\rho) & K(\rho) & B_w(\rho) \\ 0 & & I & 0 \end{bmatrix} \\
X(\rho) &= \begin{bmatrix} X_1(\rho) & X_2 - X_1(\rho) \\ \star & X_1(\rho) - X_2 - X_2^T \end{bmatrix} \\
S_5 &= \begin{bmatrix} A(\rho) & B_u(\rho) & K(\rho) & B_w(\rho) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\bar{X}(\rho) &= \begin{bmatrix} X(\rho) & 0 \\ 0 & \gamma I \end{bmatrix} \\
\Phi(\rho) &= \left[C_z(\rho) \quad D_{zu}(\rho) K(\rho) \quad D_{zw}(\rho) \right]^T
\end{aligned} \tag{36}$$

Prova 2 Aplicando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994) nas Equações (34) e (35), obtém-se:

$$\bar{\Pi}_1(\rho) + \bar{T} \bar{\Pi}_2(\rho) + \frac{1}{\gamma} \Phi(\rho) \Phi^T(\rho) < 0 \tag{37}$$

$$\bar{\Pi}_1(\rho) + \bar{T} \bar{\Pi}_3(\rho) + \bar{T} S_3^T U(\rho) E^{-1}(\rho) U(\rho) S_3 + \frac{1}{\gamma} \Phi(\rho) \Phi^T(\rho) < 0 \tag{38}$$

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado na Equação (31) e combinando as Equações (37) e (38), tem-se:

$$\begin{aligned}
&\bar{\Pi}_1(\rho) + (t_{n+1} - t) \bar{\Pi}_2(\rho) + \tau(t) \bar{\Pi}_3(\rho) + \frac{1}{\gamma} \Phi(\rho) \Phi^T(\rho) \\
&\quad + \tau(t) S_3^T \left(U(\rho) E^{-1}(\rho) U^T(\rho) \right) S_3 < 0, \quad t \in [t_n, t_{n+1}) \tag{39}
\end{aligned}$$

Multiplicando a Equação (39) à direita e esquerda por $[x^T(t), x^T(t_n), w^T(t)]$ e $[x^T(t), x^T(t_n), w^T(t)]^T$, respectivamente, e seguindo procedimentos similares aos utilizados na demonstração do Teorema 1, têm-se:

$$\dot{V}(t) + \frac{1}{\gamma} z^T(t) z(t) - \gamma w^T(t) w(t) < 0 \quad (40)$$

em que $V(t)$ é definida pela Equação (24). As matrizes definidas positivas $P(\rho)$, $E(\rho)$ e a condição na Equação (33) implicam que a função $V(t)$ é não negativa. Então, para dado $N \gg 1$ e integrando a Equação (40) de 0 a t_N , obtém-se:

$$V(t_N) - V(t_{N-1}) + V(t_{N-1}^-) - V(t_{N-2}) + \dots + V(t_1^-) - V(0) + \int_0^{t_N} \left(\frac{1}{\gamma} z^T(t) z(t) - \gamma w^T(t) w(t) \right) dt < 0 \quad (41)$$

Como $V(t_N) \geq 0$, $V(t_{N-1}^-) - V(t_{N-1}) \geq 0$ para $n = 2, \dots, N$ e $V(0) = 0$, têm-se:

$$\int_0^{t_N} \left(\frac{1}{\gamma} z^T(t) z(t) - \gamma w^T(t) w(t) \right) dt < 0 \quad (42)$$

Portanto, para $N \rightarrow \infty$ obtém-se que $\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2$

2.4 SÍNTESE DO CONTROLADOR \mathcal{H}_∞

Nesta seção, novas condições de síntese são derivadas para sintetizar o controlador robusto \mathcal{H}_∞ de dados amostrados para sistemas modelado por LPV (Equação (13)), que atendam as especificações de projeto enquanto o limite máximo do período de amostragem é considerado como um parâmetro. Nesse sentido, uma abordagem desenvolvida por Briat, Sename e Lafay (2008) consiste em transformar o problema da não linearidade em um problema bilinear através da introdução de uma variável de folga. Assim, o Lema 2 é importante para o desenvolvimento das condições.

Lema 2 Para uma matriz simétrica positiva definida Γ , uma matriz simétrica Λ e matrizes Q , L e G , se existir uma matriz Υ com dimensões apropriadas, então as desigualdades matriciais apresentadas nas Equações (43) e (44) são equivalentes.

$$\Lambda - Q^T \Gamma^{-1} Q < 0 \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda + (\Upsilon^T (Q + L^T))^H & -L + \Upsilon^T G \\ \star & \Gamma - G - G^T \end{bmatrix} < 0 \quad (44)$$

Ainda, as expressões são iguais para $\Upsilon = -\Gamma^{-1}Q$.

Dessa maneira, o Teorema 3 fornece as condições LMI para síntese do controlador robusto \mathcal{H}_∞ de dados amostrados modelado por LPV. Para simplificar a notação, pode-se utilizar η ao invés de $\eta(t_n)$ sem prejuízo.

Teorema 3 (HOOSHMANDI et al., 2020) *O sistema LPV dado na Equação (13) com intervalos de amostragem aperiódicos menores que $\bar{T} > 0$ é assintoticamente estável e satisfaz $\|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2$, se existirem matrizes $Q(\eta) \in S_+^n$, $\Lambda(\rho), \Gamma(\rho) \in S_+^{2n}$, $\bar{U}(\rho), G(\rho), L(\rho), \Upsilon(\rho) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $Y(\eta) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ e um escalar positivo λ tal que as seguintes LMIs são satisfeitas.*

$$\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}^T Q(\eta) \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + \lambda \bar{T} \tilde{Q}(\eta) > 0 \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Pi}_1 + \bar{T} \hat{\Pi}_2 & \bar{T} L_4^T & \bar{\Phi}(\rho) \\ \star & -\bar{T} \Lambda(\rho) & 0 \\ \star & \star & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (46)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Pi}_1 + \bar{T} \hat{\Pi}_3 & \bar{T} L_3^T \bar{U}(\rho) & \bar{\Phi}(\rho) \\ \star & -\bar{T} \Gamma(\rho) & 0 \\ \star & \star & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (47)$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda(\rho) + \left(\Upsilon^T(\rho) (\bar{Q}(\rho) + L^T) \right)^H & \star \\ -L^T(\rho) + G^T(\rho) \Upsilon(\rho) & \Gamma(\rho) - G^H(\rho) \end{bmatrix} < 0 \quad (48)$$

Para todo $\rho \in \Theta$, têm-se

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_1 &= L_1^T L_2 + L_2^T L_1 + \left(\bar{W}^T \bar{U}^T(\rho) L_3 \right)^H - \begin{bmatrix} \lambda \tilde{Q}(\eta) & 0 \\ 0 & \gamma I \end{bmatrix} \\ \hat{\Pi}_2 &= \left(L_5^T \lambda L_6 L_3 \right)^H, \quad \hat{\Pi}_3 = \left(L_3^T \bar{U}(\rho) \bar{W}_t \right)^H \\ \bar{Q}(\eta) &= \text{diag}(Q(\eta), Q(\eta)) \\ L_1 &= \begin{bmatrix} A(\rho) Q(\eta) & B_u(\rho) Y(\eta) & B_w(\rho) \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ L_3 &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{W} = \begin{bmatrix} I & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{W}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \\ L_4 &= \begin{bmatrix} A(\rho) Q(\eta) & B_u(\rho) Y(\eta) & B_w(\rho) \\ 0 & Q(\eta) & 0 \end{bmatrix} \\ L_5 &= \begin{bmatrix} A(\rho) Q(\eta) & B_u(\rho) Y(\eta) & B_w(\rho) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{Q}(\eta) &= \bar{Q}(\eta) L_6, \quad L_6 = \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix} \\ \bar{\Phi}(\rho) &= \begin{bmatrix} C_z(\rho) Q(\eta) & D_{zu}(\rho) Y(\eta) & D_{zw}(\rho) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (49)$$

Assim, o controlador robusto \mathcal{H}_∞ de dados amostrados modelado por LPV é dado por $K(\eta) = Y(\eta)Q^{-1}(\eta)$.

Prova 3 Suponha que as matrizes $P(\eta) > 0$ e $X_1(\eta)$, bem como controladores de dados amostrados apresentado na Equação (6), apenas dependam da medição dos parâmetros. Aplicando a transformação de congruência $\bar{Q}(\eta)$ na Equação (33) e usando as seguintes mudanças de variáveis.

$$P(\eta) = Q^{-1}(\eta), \quad X_1(\eta) = \lambda Q^{-1}(\eta), \quad X_2 = 0 \quad (50)$$

chega-se à LMI apresentada na Equação (45).

É notório que considerar $X_2 = 0$ causa a redução do espaço inicial da variável de decisão e pode aumentar o conservadorismo da condição de projeto, especialmente para sistemas LTI. Porém, nas condições de análise dos Teoremas 1 e 2, a matriz X_2 não tem impacto significativo no conservadorismo, enfatizando que a parte independente de parâmetro da matriz $X_1(\eta)$ compensa o efeito de remover X_2 (HOOSHMANDI et al., 2020). Desse modo, ao realizar a transformação de congruência $\text{diag}[\bar{Q}(\eta), I]$ nas Equações (37) e (38), considerando:

$$\begin{aligned} E(\rho) &= \Lambda^{-1}(\rho) \\ \bar{U}(\rho) &= \bar{Q}(\eta)U(\rho)\bar{Q}(\eta) \\ K(\eta) &= Y(\eta)Q^{-1}(\eta) \\ \dot{P}(\eta) &= \dot{X}_1(\eta) = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

obtem-se

$$\hat{\Pi}_1 + \bar{T}\hat{\Pi}_2 + \bar{T}L_4^T\Lambda^{-1}(\rho)L_4 + \frac{1}{\gamma}\bar{\Phi}(\rho)\bar{\Phi}^T(\rho) < 0 \quad (52)$$

e

$$\hat{\Pi}_1 + \bar{T}\hat{\Pi}_3 + \bar{T}L_3^T\bar{U}(\rho)\bar{Q}^{-1}(\eta)\Lambda(\rho)\bar{Q}^{-1}(\eta)\bar{U}(\rho)L_3 + \frac{1}{\gamma}\bar{\Phi}(\rho)\bar{\Phi}^T(\rho) < 0 \quad (53)$$

Aplicando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994) na Equação (52), obtém-se a LMI da Equação (46).

Reescrevendo a matriz positiva definida $\Gamma^{-1}(\rho)$ com $\bar{Q}^{-1}(\eta)\Lambda(\rho)\bar{Q}^{-1}(\rho)$ na Equação (53) com

$$\Gamma^{-1}(\rho) > \bar{Q}^{-1}(\eta)\Lambda(\rho)\bar{Q}^{-1}(\rho) \quad (54)$$

e usando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994), tem-se a LMI da Equação (47). As matrizes inversas na Equação (54) dependem de parâmetros, portanto, não podem

ser expressas de forma linear devido às matrizes desconhecidas. Então, multiplicando a Equação (54) à direita e à esquerda por $\bar{Q}(\rho)$, tem-se

$$\Lambda(\rho) < \bar{Q}(\eta) \Gamma^{-1}(\rho) \bar{Q}(\eta) \quad (55)$$

A desigualdade matricial na Equação (55) é nitidamente não convexa devido ao termo $\bar{Q}(\eta) \Gamma^{-1}(\rho) \bar{Q}(\eta)$. Assim, o relaxamento é feito utilizando o Lema 2 na desigualdade matricial da Equação (55), obtendo assim, a Equação (56).

$$\begin{bmatrix} \Lambda(\rho) + \left(\Upsilon^T(\rho) \left(\bar{Q}(\rho) + L^T(\rho) \right) \right)^H & \star \\ -L^T(\rho) + G^T(\rho) \Upsilon(\rho) & \Gamma(\rho) - G^H(\rho) \end{bmatrix} < 0 \quad (56)$$

Para finalizar a prova, basta considerar que, para qualquer conjunto de variáveis matriciais satisfazendo as LMIs das Equações (45), (46), (47) e (48), existe um conjunto de matrizes variável que satisfaz as condições do Teorema 2.

Como as condições do Teorema 3 não são convexas, sua resolução se baseia na execução de um procedimento iterativo, a ser apresentado no Algoritmo 1 que será apresentado no Capítulo 3. Para tal procedimento, é necessário definir um ponto inicial factível. No Lema 2 é mostrado que o relaxamento é exato se e somente se $\Upsilon(\rho) = -\Gamma^{-1}(\rho) \bar{Q}(\rho)$ e portanto, encontrar um valor inicial $\Upsilon_0(\rho)$ é equivalente a encontrar um valor inicial $\Gamma_0(\rho)$ e $Q_0(\rho)$. Assim, considere a seguinte proposição.

Proposição 1 (HOOSHMANDI et al., 2020) *Se as matrizes dependentes de parâmetros $\bar{Q}(\rho)$, $\Lambda(\rho)$ e a matriz independente de parâmetros Γ são consideradas, pode-se utilizar a condição (57) ao invés da Equação (48)*

$$\Lambda(\rho) + \varepsilon^2 \Gamma - 2\varepsilon \bar{Q}(\eta) < 0 \quad (57)$$

sendo ε um escalar definido. Então, de acordo com a relação $\Upsilon(\eta) = -\Gamma^{-1} \bar{Q}(\eta)$, a matriz $\Upsilon(\eta)$ tem a mesma dependência paramétrica que $\bar{Q}(\eta)$. Assim, tal relação pode ser utilizada para determinar um ponto inicial factível.

Prova 4 *Uma vez que Γ é uma matriz positiva definida e $\bar{Q}(\rho)$ é quadrada, então a seguinte desigualdade pode ser definida*

$$\left(\varepsilon I - \Gamma^{-1} \bar{Q}(\eta) \right)^T \left(\varepsilon I - \Gamma^{-1} \bar{Q}(\eta) \right) > 0 \quad (58)$$

portanto, têm-se

$$\Lambda(\rho) - \bar{Q}(\eta) \Gamma^{-1} \bar{Q}(\eta) < \Lambda(\rho) + \varepsilon^2 \Gamma - 2\varepsilon \bar{Q}(\eta) \quad (59)$$

Nota-se que a desigualdade apresentada na Equação (55) é satisfeita se $\Lambda(\rho)\lambda_2^2\Gamma - 2\lambda_2\bar{Q}(\eta) < 0$. Assim, conclui-se a prova da proposição.

2.5 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, foram expostas as principais definições e teoremas necessários para a síntese do controlador robusto \mathcal{H}_∞ de dados amostrados modelado por LPV. Inicialmente, foi apresentada a definição do controlador robusto \mathcal{H}_∞ , bem como a estabilidade assintótica e análise de desempenho. Posteriormente, foi apresentada a síntese do controlador com robustez garantida pela norma \mathcal{H}_∞ , assim como as condições para síntese via LMIs apresentadas no Teorema 3. Vale ressaltar que as condições apresentadas não consideram nenhum critério de desempenho para o sistema controlado, somente é garantida a robustez do mesmo. Assim, posteriormente é apresentado novas condições para critério de desempenho do sistema através da norma \mathcal{H}_2 ponderando com a robustez garantida pela norma \mathcal{H}_∞ .

3 CONTROLADOR ROBUSTO \mathcal{H}_2

Neste capítulo são apresentadas a análise de custo e a síntese do controlador garantido pela norma \mathcal{H}_2 , não sendo necessário a análise de estabilidade assintótica, visto que a mesma é garantida pelo Teorema 1. Dessa forma, tais procedimentos são adaptações dos teoremas apresentados no capítulo anterior, sendo contribuições do trabalho visando ponderar a robustez e o desempenho do sistema para obter melhores resultados.

3.1 ANÁLISE DE CUSTO DO GANHO J_2

Nesta análise, o ganho J_2 (HOOSHMANDI et al., 2020) e as derivadas das condições na forma de LMIs para sistemas de dados amostrados modelado por LPV são considerados, sendo importantes para o desenvolvimento do controlador robusto \mathcal{H}_2 apresentado posteriormente. Assim, considere o ganho J_2 definido por

$$J_2 = \int_0^{\infty} \left(z_2^T(t) z_2(t) \right) dt \quad (60)$$

O Teorema 4 a seguir apresenta uma condição que determina um limitante superior para o ganho J_2 .

Teorema 4 (*Adaptado, Hooshmandi et al. (2020)*) *Considere que o sistema LPV na Equação (13) seja assintoticamente estável, e considere também a ausência de perturbações $w(t) = 0$. Então $\|z_2\|_2 < V(0)$ é garantido para qualquer variação do período de amostragem menor que $\bar{T} > 0$, supondo as condições iniciais nulas, se existirem matrizes definidas positivas $P_2(\rho) \in S_+^n$, $E_2(\rho) \in S_+^{2n}$, uma matriz simétrica $X_{21}(\rho) \in S^n$, uma matriz constante $X_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $U_2(\rho) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ tal que, para todo $\rho \in \Theta$, existe uma solução factível para as seguintes LMIs*

$$\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}^T P_2(\rho) \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + \bar{T} X_{H_2}(\rho) > 0 \quad (61)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Pi}_{21}(\rho) + \bar{T}\bar{\Pi}_{22}(\rho) & \Phi_2 \\ \star & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (62)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Pi}_{21}(\rho) + \bar{T}\bar{\Pi}_{23}(\rho) & \bar{T}S_{23}^T U_2(\rho) & \Phi_2(\rho) \\ \star & -\bar{T}E_2(\rho) & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (63)$$

sendo

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}_{21}(\rho) &= \left(S_{21}^T P_2(\rho) S_{22} \right)^H + S_{22}^T \dot{P}_2(\rho) S_{22} - \bar{X}_{H2}(\rho) + \left(S_{23}^T U_2(\rho) W_2 \right)^H \\
\bar{\Pi}_{22}(\rho) &= S_{24}^T E_2(\rho) S_{24} + \left(S_{25}^T X_{H2}(\rho) S_{23} \right)^H + \dot{\bar{X}}_{H2}(\rho) \\
\bar{\Pi}_{23}(\rho) &= \left(S_{23}^T U_2(\rho) W_{2t} \right)^H \\
S_{21} &= \begin{bmatrix} A(\rho) & B_u(\rho) K(\rho) \end{bmatrix}, \quad S_{22} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \\
S_{23} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
W_{2t} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\
S_{24} &= \begin{bmatrix} A(\rho) & B_u(\rho) K(\rho) \\ 0 & I \end{bmatrix} \\
X_{H2}(\rho) &= \bar{X}_{H2}(\rho) = \begin{bmatrix} X_{21}(\rho) & X_{22} - X_{21}(\rho) \\ \star & X_{21}(\rho) - X_{22} - X_{22}^T \end{bmatrix} \\
S_{25} &= \begin{bmatrix} A(\rho) & B_u(\rho) K(\rho) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\Phi_2(\rho) &= \left[C_{2z}(\rho) \quad D_{2zu}(\rho) K(\rho) \right]^T
\end{aligned} \tag{64}$$

Prova 5 Aplicando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994) nas Equações (61) e (62), obtém-se:

$$\bar{\Pi}_{21}(\rho) + \bar{T} \bar{\Pi}_{22}(\rho) + \Phi_2(\rho) \Phi_2^T(\rho) < 0 \tag{65}$$

$$\bar{\Pi}_{21}(\rho) + \bar{T} \bar{\Pi}_{23}(\rho) + \bar{T} S_{23}^T U_2(\rho) E_2^{-1}(\rho) U_2(\rho) S_{23} + \Phi_2(\rho) \Phi_2^T(\rho) < 0 \tag{66}$$

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado na Equação (31) e combinando as Equações (65) e (66), tem-se:

$$\begin{aligned}
&\bar{\Pi}_{21}(\rho) + (t_{n+1} - t) \bar{\Pi}_{22}(\rho) + \tau(t) \bar{\Pi}_{23}(\rho) + \Phi_2(\rho) \Phi_2^T(\rho) \\
&\quad + \tau(t) S_{23}^T \left(U_2(\rho) E_2^{-1}(\rho) U_2^T(\rho) \right) S_{23} < 0, \quad t \in [t_n, t_{n+1}) \tag{67}
\end{aligned}$$

Multiplicando a Equação (67) à direita e esquerda por $\begin{bmatrix} x^T(t), x^T(t_n), 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x^T(t), x^T(t_n), 0 \end{bmatrix}^T$, respectivamente, e seguindo procedimentos similares aos utilizados no Teorema 2, tem-se:

$$\dot{V}(t) + z_2^T(t) z_2(t) < 0 \tag{68}$$

em que $V(t)$ é definida pela Equação (24). As matrizes definidas positivas $P_2(\rho)$, $E_2(\rho)$ e a condição na Equação (61) implicam que a função $V(t)$ é não negativa. Então, para dado $N \gg 1$ e integrando a Equação (68) de 0 a t_N , obtém-se:

$$V(t_N) - V(t_{N-1}) + V(t_{N-1}^-) - V(t_{N-2}) + \dots + V(t_1^-) - V(0) + \int_0^{t_N} (z_2^T(t) z_2(t)) dt < 0 \quad (69)$$

Como $V(t_N) \geq 0$, $V(t_{N-1}^-) - V(t_{N-1}) \geq 0$ para $n = 2, \dots, N$ e $V(0) = 0$, tem-se:

$$\int_0^{t_N} (z_2^T(t) z_2(t)) dt < V(0) - V(t_N) \quad (70)$$

Portanto, para $N \rightarrow \infty$, $V(t_N) \rightarrow 0$, resultando em $\|z_2\|_2 < V(0)$.

É importante destacar que $\|z_2\|_2$ é limitada superiormente por $V(0)$. Portanto é possível otimizar o ganho J_2 a partir da minimização do limitante superior $V(0)$, conforme mostrado na seção a seguir.

3.2 SÍNTESE DO CONTROLADOR \mathcal{H}_2

Embasando no mesmo raciocínio adotado para a síntese do controlador robusto \mathcal{H}_∞ , novas condições de síntese podem ser utilizadas. Dessa maneira, o Teorema 5 fornece as condições LMIs necessárias para a síntese. Para simplificar a notação, utilizou-se η ao invés de $\eta(t_n)$ sem prejuízo.

Teorema 5 (Adaptado, Hooshmandi et al. (2020)) *O sistema LPV dado na Equação (13) com intervalos de amostragem aperiódicos menores que $\bar{T} > 0$ é assintoticamente estável e satisfaz $\|z_2\|_2 \leq V(0)$, se existirem matrizes $Q(\eta) \in S_+^n$, $\Lambda_2(\rho), \Gamma_2(\rho) \in S_+^{2n}$, $\bar{U}_2(\rho)$, $G_2(\rho)$, $L_{H2}(\rho)$, $\Upsilon_2(\rho) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $Y(\eta) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ e um escalar positivo λ_2 tal que as seguintes LMIs são satisfeitas.*

$$\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}^T Q(\eta) \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \bar{T} \tilde{Q}(\eta) > 0 \quad (71)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{21} + \bar{T} \hat{\Pi}_{22} & \bar{T} L_{24}^T & \bar{\Phi}_2(\rho) \\ * & -\bar{T} \Lambda_2(\rho) & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (72)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{21} + \bar{T} \hat{\Pi}_{23} & \bar{T} L_{23}^T \bar{U}_2(\rho) & \bar{\Phi}_2(\rho) \\ * & -\bar{T} \Gamma_2(\rho) & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (73)$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_2(\rho) + \left(\Upsilon_2^T(\rho) (\bar{Q}_2(\rho) + L_{H2}^T)\right)^H & \star \\ -L_{H2}^T(\rho) + G_2^T(\rho) \Upsilon_2(\rho) & \Gamma_2(\rho) - G_2^H(\rho) \end{bmatrix} < 0 \quad (74)$$

Para todo $\rho \in \Theta$, têm-se

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{21} &= L_{21}^T L_{22} + L_{22}^T L_{21} + \left(\bar{W}_2^T \bar{U}_2^T(\rho) L_{23}\right)^H - \lambda_2 \tilde{Q}(\eta) \\ \hat{\Pi}_{22} &= \left(L_{25}^T \lambda_2 L_{26} L_{23}\right)^H, \quad \hat{\Pi}_{23} \left(L_{23}^T \bar{U}_2(\rho) \bar{W}_{2t}\right)^H \\ \bar{Q}(\eta) &= \text{diag}(Q(\eta), Q(\eta)) \\ L_{21} &= \begin{bmatrix} A(\rho) Q(\eta) & B_u(\rho) Y(\eta) \end{bmatrix}, \quad L_{22} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \\ L_{23} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \bar{W}_2 = \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{W}_{2t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ L_{24} &= \begin{bmatrix} A(\rho) Q(\eta) & B_u(\rho) Y(\eta) \\ 0 & Q(\eta) \end{bmatrix} \\ L_{25} &= \begin{bmatrix} A(\rho) Q(\eta) & B_u(\rho) Y(\eta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{Q}(\eta) &= \bar{Q}(\eta) L_6, \quad L_6 = \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix} \\ \bar{\Phi}_2(\rho) &= \left[C_{2z}(\rho) Q(\eta) \quad D_{2zu}(\rho) Y(\eta) \quad D_{2zw}(\rho)\right]^T \end{aligned} \quad (75)$$

Assim, o controlador \mathcal{H}_2 de dados amostrados modelado por LPV é dado por $K(\eta) = Y(\eta) Q^{-1}(\eta)$.

Prova 6 Suponha que as matrizes $P_2(\eta) > 0$ e $X_{21}(\eta)$, bem como controlador de dados amostrados apresentado na Equação (6), apenas dependem da medição dos parâmetros. Aplicando a transformação de congruência $\bar{Q}(\eta)$ na Equação (61) e usando as seguintes mudanças de variáveis.

$$P_2(\eta) = Q^{-1}(\eta), \quad X_{21}(\eta) = \lambda_2 Q^{-1}(\eta), \quad X_{22} = 0 \quad (76)$$

chega-se à LMI apresentada na Equação (71).

Utilizando o mesmo raciocínio do Teorema 3 com $X_{22} = 0$ e realizando a transformação de congruência $\text{diag}[\bar{Q}(\eta), I]$ nas Equações (62) e (63), levando em conta que:

$$\begin{aligned} E_2(\rho) &= \Lambda_2^{-1}(\rho) \\ \bar{U}_2(\rho) &= \bar{Q}(\eta) U_2(\rho) \bar{Q}(\eta) \\ K(\eta) &= Y(\eta) Q^{-1}(\eta) \\ \dot{P}_2(\eta) &= \dot{X}_{21}(\eta) = 0 \end{aligned} \quad (77)$$

obtem-se

$$\hat{\Pi}_{21} + \bar{T}\hat{\Pi}_{22} + \bar{T}L_{24}^T\Lambda_2^{-1}(\rho)L_{24} + \bar{\Phi}_2(\rho)\bar{\Phi}_2^T(\rho) < 0 \quad (78)$$

e

$$\hat{\Pi}_{21} + \bar{T}\hat{\Pi}_{23} + \bar{T}L_{23}^T\bar{U}_2(\rho)\bar{Q}^{-1}(\eta)\Lambda_2(\rho)\bar{Q}^{-1}(\eta)\bar{U}_2(\rho)L_{23} + \bar{\Phi}_2(\rho)\bar{\Phi}_2^T(\rho) < 0 \quad (79)$$

Aplicando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994) na Equação (78), obtém-se a LMI da Equação (72).

Reescrevendo a matriz positiva definida $\Gamma_2^{-1}(\rho)$ com $\bar{Q}^{-1}(\eta)\Lambda_2(\rho)\bar{Q}^{-1}(\rho)$ na Equação (79) com

$$\Gamma_2^{-1}(\rho) > \bar{Q}^{-1}(\eta)\Lambda_2(\rho)\bar{Q}^{-1}(\rho) \quad (80)$$

e usando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994), têm-se a LMI da Equação (73). As matrizes inversas na Equação (80) dependem de parâmetros, portanto, não podem ser expressas de forma linear devido às matrizes desconhecidas. Então, multiplicando a Equação (80) à direita e à esquerda por $\bar{Q}(\rho)$, tem-se

$$\Lambda_2(\rho) < \bar{Q}(\eta)\Gamma_2^{-1}(\rho)\bar{Q}(\eta) \quad (81)$$

A desigualdade matricial na Equação (81) é nitidamente não convexa devido ao termo $\bar{Q}(\eta)\Gamma_2^{-1}(\rho)\bar{Q}(\eta)$. Assim, o relaxamento é feito utilizando o Lema 2 na desigualdade matricial da Equação (81), obtendo assim, a Equação (82).

$$\begin{bmatrix} \Lambda_2(\rho) + \left(\Upsilon_2^T(\rho)\left(\bar{Q}(\rho) + L_2^T(\rho)\right)\right)^H & \star \\ -L_2^T(\rho) + G_2^T(\rho)\Upsilon_2(\rho) & \Gamma_2(\rho) - G_2^H(\rho) \end{bmatrix} < 0 \quad (82)$$

Para finalizar a prova, basta considerar que, para qualquer conjunto de variáveis matriciais satisfazendo as LMIs das Equações (71), (72), (73) e (74), existe um conjunto de matrizes variáveis que satisfaz as condições do Teorema 4.

Assim como no Teorema 3, as condições apresentadas são não convexas, sendo sua resolução baseada na execução de um procedimento iterativo para determinar um ponto factível inicial apresentado no Algoritmo 1. Dessa forma, será utilizada a Proposição 1 apresentada anteriormente para determinar tal ponto inicial a partir da Equação (83).

$$\Lambda_2(\rho) + \varepsilon^2\Gamma - 2\varepsilon\bar{Q}(\eta) < 0 \quad (83)$$

Como suporte ao Teorema 5, o seguinte Corolário 1 é necessário.

Corolário 1 *Se existirem matrizes $Q(\eta) \in S_+^n$, $\Lambda_2(\rho), \Gamma_2(\rho) \in S_+^{2n}$, $\bar{U}_2(\rho)$, $G_2(\rho)$, $L_{H_2}(\rho)$, $\Upsilon_2(\rho) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $P_2(\rho) \in S_+^n$, $E_2(\rho) \in S_+^{2n}$ e as matrizes $\hat{\Pi}_{21}$, $\hat{\Pi}_{22}$, $\hat{\Pi}_{23}$ pertencerem à Equação (75) solução do problema*

$$\begin{aligned}
& \min \vartheta + \iota \quad s.a \\
& \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}^T Q(\eta) \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \bar{T} \bar{Q}(\eta) > 0 \\
& \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{21} + \bar{T} \hat{\Pi}_{22} & \bar{T} L_{24}^T & \bar{\Phi}_2(\rho) \\ \star & -\bar{T} \Lambda_2(\rho) & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0 \\
& \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{21} + \bar{T} \hat{\Pi}_{23} & \bar{T} L_{23}^T \bar{U}_2(\rho) & \bar{\Phi}_2(\rho) \\ \star & -\bar{T} \Gamma_2(\rho) & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0 \\
& \begin{bmatrix} \Lambda_2(\rho) + \left(\Upsilon_2^T(\rho) (\bar{Q}_2(\rho) + L_{H_2}^T) \right)^H & \star \\ -L_{H_2}^T(\rho) + G_2^T(\rho) \Upsilon_2(\rho) & \Gamma_2(\rho) - G_2^H(\rho) \end{bmatrix} < 0 \\
& \begin{bmatrix} Q(\eta) & I \\ I & \vartheta I \end{bmatrix} > 0 \\
& \begin{bmatrix} \Lambda_2(\rho) & I \\ I & \iota I \end{bmatrix} > 0
\end{aligned} \tag{84}$$

então o controlador $K(\eta) = Y(\eta) Q^{-1}(\eta)$ minimiza o limitante $V(0)$ referente a \mathcal{H}_2 .

Prova 7 *As quatro primeiras condições são provadas anteriormente na Prova 6. Assim, considerando as duas últimas condições, aplicando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994), obtém-se*

$$Q^{-1}(\eta) < \vartheta I \tag{85}$$

$$\Lambda_2^{-1}(\rho) < \iota I \tag{86}$$

Portanto, minimizar as condições apresentadas na Equação (84), resulta em minimizar o limitante de $V(0)$.

Por fim, para a síntese do controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de dados amostrados modelado por LPV o seguinte Algoritmo 1 é utilizado.

Algoritmo 1

1. Defina o valor máximo do período de amostragem \bar{T} .
2. Defina $\varepsilon = 1$, $\lambda = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\gamma_0 = 10$, $k_{max} = 20$, $\epsilon = 0,01$ e $k = 1$.
3. Dado ϵ , λ e λ_2 , minimize γ de acordo com as LMIs das Equações (45), (46), (47), (57), (71), (72), (73) e (83), obtendo as matrizes $Q(\eta)$, Γ e Γ_2 .
4. Defina $\bar{Q}(\eta) = \text{diag}(Q(\eta), Q(\eta))$, $\Upsilon_0 = -\Gamma^{-1}\bar{Q}(\eta)$, $\Upsilon_{20} = -\Gamma_2^{-1}\bar{Q}(\eta)$ e $\gamma_1 = \gamma$.
5. **Enquanto** $k < k_{max}$ e $|\gamma_k - \gamma_{k+1}| > \epsilon$
 - a) Dado Υ_{k-1} , $\Upsilon_{2(k-1)}$ e λ_{k-1} , minimize γ de acordo com as LMIs das Equações (45), (46), (47), (48), (71), (72), (73) e (74), obtendo $Q(\eta)$, $\Lambda(\rho)$, $\Lambda_2(\rho)$, $\Gamma(\rho)$, $\Gamma_2(\rho)$, $\bar{U}(\rho)$, $\bar{U}_2(\rho)$, $G(\rho)$, $G_2(\rho)$, $L(\rho)$, $L_2(\rho)$ e $Y(\eta)$.
 - b) Defina $Q_{k-1}(\eta) = Q(\eta)$, $\Lambda_{k-1}(\rho) = \Lambda(\rho)$, $\Lambda_{2(k-1)}(\rho) = \Lambda_2(\rho)$, $\Gamma_{k-1}(\rho) = \Gamma(\rho)$, $\Gamma_{2(k-1)}(\rho) = \Gamma_2(\rho)$, $\bar{U}_{k-1}(\rho) = \bar{U}(\rho)$, $\bar{U}_{2(k-1)}(\rho) = \bar{U}_2(\rho)$, $G_{k-1}(\rho) = G(\rho)$, $G_{2(k-1)}(\rho) = G_2(\rho)$, $L_{k-1}(\rho) = L(\rho)$, $L_{2(k-1)}(\rho) = L_2(\rho)$ e $Y_{k-1}(\eta) = Y(\eta)$.
 - c) Dado $Q_{k-1}(\eta)$, $\Lambda_{k-1}(\rho)$, $\Lambda_{2(k-1)}(\rho)$, $\Gamma_{k-1}(\rho)$, $\Gamma_{2(k-1)}(\rho)$, $\bar{U}_{k-1}(\rho)$, $\bar{U}_{2(k-1)}(\rho)$, $G_{k-1}(\rho)$, $G_{2(k-1)}(\rho)$, $L_{k-1}(\rho)$, $L_{2(k-1)}(\rho)$ e $Y_{k-1}(\eta)$, minimize γ de acordo com as LMIs das Equações (45), (46), (47), (48), (71), (72), (73), (74), obtendo $\Upsilon(\rho)$, $\Upsilon_2(\rho)$ e λ .
 - d) Defina $\Upsilon_k(\rho) = \Upsilon(\rho)$, $\Upsilon_{2k}(\rho) = \Upsilon_2(\rho)$, $\lambda_k = \lambda$ e $\lambda_{2k} = \lambda$.
 - e) Defina $k = k + 1$.
6. **Fim**
7. Defina $k = 1$, $k_{max} = 20$, $\varsigma_0 = 1$, $\varsigma_1 = 20$ e $\gamma = \gamma_k$
8. **Enquanto** $k < k_{max}$ e $|\varsigma_k - \varsigma_{k+1}| > \epsilon$
 - a) Dado Υ_{k-1} , $\Upsilon_{2(k-1)}$ e λ_{k-1} , minimize ς de acordo com as LMIs das Equações (45), (46), (47), (48), (71), (72), (73) e (74), obtendo $Q(\eta)$, $\Lambda(\rho)$, $\Lambda_2(\rho)$, $\Gamma(\rho)$, $\Gamma_2(\rho)$, $\bar{U}(\rho)$, $\bar{U}_2(\rho)$, $G(\rho)$, $G_2(\rho)$, $L(\rho)$, $L_2(\rho)$ e $Y(\eta)$.
 - b) Defina $Q_{k-1}(\eta) = Q(\eta)$, $\Lambda_{k-1}(\rho) = \Lambda(\rho)$, $\Lambda_{2(k-1)}(\rho) = \Lambda_2(\rho)$, $\Gamma_{k-1}(\rho) = \Gamma(\rho)$, $\Gamma_{2(k-1)}(\rho) = \Gamma_2(\rho)$, $\bar{U}_{k-1}(\rho) = \bar{U}(\rho)$, $\bar{U}_{2(k-1)}(\rho) = \bar{U}_2(\rho)$, $G_{k-1}(\rho) = G(\rho)$, $G_{2(k-1)}(\rho) = G_2(\rho)$, $L_{k-1}(\rho) = L(\rho)$, $L_{2(k-1)}(\rho) = L_2(\rho)$ e $Y_{k-1}(\eta) = Y(\eta)$.
 - c) Dado $Q_{k-1}(\eta)$, $\Lambda_{k-1}(\rho)$, $\Lambda_{2(k-1)}(\rho)$, $\Gamma_{k-1}(\rho)$, $\Gamma_{2(k-1)}(\rho)$, $\bar{U}_{k-1}(\rho)$, $\bar{U}_{2(k-1)}(\rho)$, $G_{k-1}(\rho)$, $G_{2(k-1)}(\rho)$, $L_{k-1}(\rho)$, $L_{2(k-1)}(\rho)$ e $Y_{k-1}(\eta)$, minimize ς de acordo com

as LMIs das Equações (45), (46), (47), (48), (71), (72), (73), (74), obtendo $\Upsilon(\rho)$, $\Upsilon_2(\rho)$ e λ .

d) Defina $\Upsilon_k(\rho) = \Upsilon(\rho)$, $\Upsilon_{2k}(\rho) = \Upsilon_2(\rho)$, $\lambda_k = \lambda$ e $\lambda_{2k} = \lambda$.

e) Defina $k = k + 1$.

9. Fim

10. Portanto, o controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ é dado por $K(\eta) = Y(\eta)Q^{-1}(\eta)$.

Vale ressaltar que por se tratar de um procedimento iterativo, não necessariamente é garantido que o valor obtido se trata de um mínimo global, apenas um mínimo local. Entretanto, tal procedimento é necessário devido à não convexidade das condições apresentadas nos Teoremas 3 e 5. Além disso, no processo, primeiramente é minimizado a norma \mathcal{H}_∞ para garantir robustez e posteriormente é minimizada a norma \mathcal{H}_2 visando o desempenho, garantindo simultaneamente que o limitante para a norma \mathcal{H}_∞ obtido na primeira parte é satisfeito.

4 MODELAGEM DO SISTEMA

Neste capítulo, primeiramente é apresentado o helicóptero com dois graus de liberdade e sua dinâmica através da modelagem não-linear representada pelas equações diferenciais. Posteriormente, é desenvolvida a modelagem quasi-LPV do sistema. Por fim, são apresentados os dados adotados para a representação da dinâmica do helicóptero.

4.1 HELICÓPTERO 2-DOF

O sistema Helicóptero com dois graus de liberdade, ou "*two degree of freedom*" (2-DOF) consiste em uma viga articulada com um motor em cada uma de suas extremidades responsáveis por girá-la livremente tanto no eixo horizontal, quanto no vertical. A Figura 3 apresenta o modelo do sistema Helicóptero 2-DOF da Quanser (QUANSER, 2012).

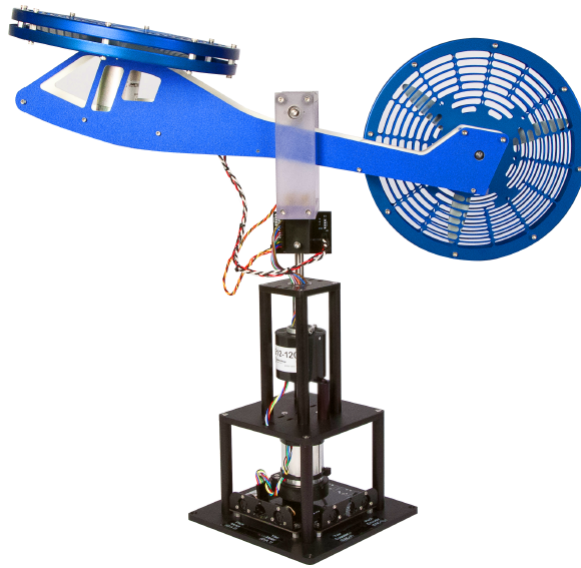


Figura 3 – Quanser Helicóptero 2-DOF.
Fonte: Quanser, 2012.

Sua dinâmica pode ser obtida através de alguns métodos matemáticos já conhecidos na literatura, tais como a modelagem newtoniana e a modelagem lagrangiana. Neste trabalho será utilizado a modelagem lagrangiana para determinar a dinâmica do sistema 2-DOF.

4.2 EQUAÇÃO DE LAGRANGE

A Equação de Lagrange é utilizada para modelar a dinâmica do sistema representada na Equação (87)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (87)$$

sendo T a energia cinética, V a energia potencial, q_i as coordenadas generalizadas e Q_i as forças generalizadas.

Considere o modelo 2-DOF apresentado na Figura 4.

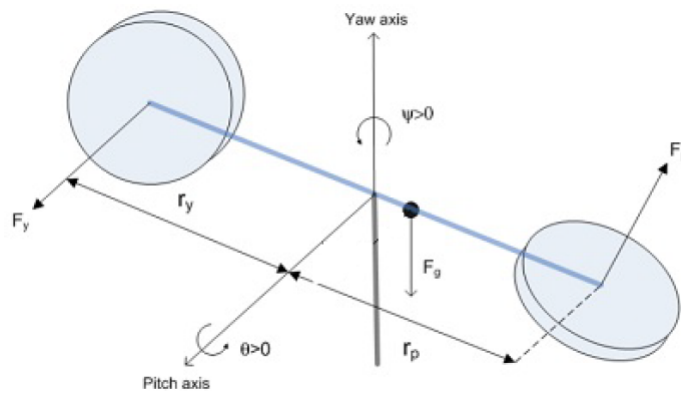


Figura 4 – Modelo Helicóptero 2-DOF.
Fonte: Quanser, 2012.

Na figura, θ representa o ângulo de arfagem ou elevação, ψ o ângulo de guinada ou deslocamento, F_g a força gravitacional aplicada no centro de massa, F_p a força de empuxo gerada pelo motor de arfagem e F_y a força de empuxo gerada pelo motor de guinada.

A energia cinética total do sistema é a soma das energias cinéticas de guinada e arfagem geradas no deslocamento do centro de massa. Dessa forma, a energia cinética total do sistema é dada pela Equação (88)

$$T = T_{r,p} + T_{r,y} + T_t \quad (88)$$

sendo que $T_{r,p}$ é a energia cinética gerada pelo ângulo de arfagem, $T_{r,y}$ é a energia cinética gerada pela guinada e T_t é a energia cinética de translação do centro de massa.

Assim, segundo Neto, Barbosa e Angélico (2016) a energia cinética total do sistema é apresentada pela Equação (89).

$$T = \frac{1}{2} m_{heli} \ell_{cm}^2 (\dot{\theta}^2 + \cos^2(\theta) \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} (J_y \dot{\theta}^2 + J_z \dot{\psi}^2) \quad (89)$$

em que m_{heli} é a massa do helicóptero, ℓ_{cm} o comprimento do helicóptero, J_y o momento de inércia equivalente de arfagem, J_z o momento de inércia equivalente de guinada.

Já a energia potencial gravitacional do centro de massa do sistema é dada pela Equação (90).

$$V = m_{heli} g \ell_{cm} \sin(\theta) \quad (90)$$

sendo g a aceleração gravitacional e θ o ângulo de arfagem do sistema.

Considerando o vetor $q = [\theta \ \psi]^T$, obtêm-se os termos da equação de Lagrange apresentado nas Equações (91), (92), (93) e (94).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = (m_{heli} \ell_{cm}^2 + J_y) \ddot{\theta} \quad (91)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = (m_{heli} \ell_{cm}^2 \cos(\theta)^2 + J_z) \ddot{\psi} - 2m_{heli} \ell_{cm}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta} \dot{\psi} \quad (92)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -m_{heli} \ell_{cm}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\psi}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 \quad (93)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -m_{heli} g \ell_{cm} \cos(\theta), \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0 \quad (94)$$

Substituindo as Equações (91), (92), (93) e (94) na Equação de Lagrange (3), tem-se as Equações (95) e (96):

$$\tau_\theta = (m_{heli} \ell_{cm}^2 + J_p) \ddot{\theta} + m_{heli} \ell_{cm}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\psi}^2 + m_{heli} g \ell_{cm} \cos(\theta) \quad (95)$$

$$\tau_\psi = (m_{heli} \ell_{cm}^2 \cos(\theta)^2 + J_z) \ddot{\psi} + m_{heli} \ell_{cm}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta} \dot{\psi} + m_{heli} g \ell_{cm} \cos(\theta) \dot{\psi} \dot{\theta} \quad (96)$$

Assim, os torques aplicados nos ângulos de arfagem e guinada pelos motores são representados nas Equações (97) e (98), respectivamente.

$$\tau_\theta = K_{pp} V_{mp} + K_{py} V_{my} - B_p \dot{\theta} \quad (97)$$

$$\tau_\psi = K_{yp} V_{mp} + K_{yy} V_{my} - B_y \dot{\psi} \quad (98)$$

em que K_{pp} , K_{py} , K_{yp} e K_{yy} são as constantes de ganho do motor, V_{mp} e V_{my} a tensão do motor e $B_p \dot{\theta}$, $B_y \dot{\psi}$ as forças dissipadas no processo.

Por fim, substituindo as Equações (97) e (98) em (95) e (96), respectivamente, encontra-se a representação não linear do sistema apresentada nas Equações (99) e (100).

$$\ddot{\theta} \left(m_{heli} \ell_{cm}^2 + J_p \right) = K_{pp} V_{mp} + K_{py} V_{my} - B_p \dot{\theta} - m_{heli} \ell_{cm}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\psi}^2 - m_{heli} g \ell_{cm} \cos(\theta) \quad (99)$$

$$\ddot{\psi} \left(m_{heli} \ell_{cm}^2 \cos(\theta)^2 + J_z \right) = K_{yp} V_{mp} + K_{yy} V_{my} - B_y \dot{\psi} + 2m_{heli} \ell_{cm}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\psi} \dot{\theta} \quad (100)$$

Além disso, pode-se representar o sistema na forma de espaços de estados. Dessa maneira, considerando o vetor de estados sendo $x = [\theta \ \psi \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ e o vetor de entrada $u = [V_{mp} \ V_{my}]^T$ e realizando as manipulações necessárias, obtém-se a representação do sistema por espaço de estados apresentado na Equação (101).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-B_p}{m\ell^2 + J_p} & \frac{-m\ell^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\psi}}{m\ell^2 + J_p} \\ 0 & 0 & \frac{2m\ell \sin \theta \cos \theta \dot{\psi}}{m\ell \cos(\theta)^2 + J_z} & \frac{-B_y}{m\ell \cos(\theta)^2 + J_z} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{pp}}{m\ell^2 + J_p} & \frac{K_{py}}{m\ell^2 + J_p} \\ \frac{K_{yp}}{m\ell^2 \cos(\theta)^2 + J_z} & \frac{K_{yy}}{m\ell^2 \cos(\theta)^2 + J_z} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (101)$$

Vale ressaltar que a representação do sistema em espaços de estados apresentado na Equação (101) apresentam não linearidades nas matrizes A e B. Tais não linearidades advêm de funções trigonométricas dependentes do estado θ e do estado $\dot{\psi}$.

5 DESENVOLVIMENTO

Neste capítulo, é apresentada a modelagem quasi-LPV do sistema 2-DOF com a presença da modificação da lei de controle do tipo regulador, adicionando um integrador na malha de controle e a síntese do controlador robusto de dados amostrados.

5.1 MODELO QUASI-LPV 2-DOF

Para a modelagem do helicóptero 2-DOF, foram utilizados os seguintes parâmetros do sistema presentes na Tabela 1 (QUANSER, 2012).

Tabela 1 – Parâmetros Helicóptero 2-DOF

Parâmetro	Valor
K_{pp} [N.m]	0,204
K_{yy} [N.m]	0,072
K_{py} [N.m]	0,0068
K_{yp} [N.m]	0,0219
B_p [N.m.s]	0,800
B_y [N.m.s]	0,318
J_p [kg.m ²]	0,0384
J_z [kg.m ²]	0,0432
m [kg]	1,387
ℓ [m]	0,186

Fonte: Quanser, 2012.

Substituindo os valores dos parâmetros apresentados na Tabela 1 na representação da dinâmica do sistema apresentado na Equação (101), tem-se a Equação (102).

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9,260 & \frac{-0,258 \sin \theta \cos \theta \dot{\psi}}{0,296} \\ 0 & 0 & \frac{0,516 \sin \theta \cos \theta \dot{\psi}}{0,258 \cos(\theta)^2 + 0,043} & \frac{-0,318}{0,258 \cos(\theta)^2 + 0,043} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2,361 & 0,079 \\ \frac{0,022}{0,258 \cos(\theta)^2 + 0,043} & \frac{0,072}{0,258 \cos(\theta)^2 + 0,043} \end{bmatrix} u \\
 y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u
 \end{aligned} \tag{102}$$

As não-linearidades presentes na Equação (102) são consideradas, neste trabalho, como parâmetros variantes no tempo. Neste caso, o sistema é considerado como um quasi-LPV, visto que os parâmetros adotados são funções dos estados do sistema e não exclusivamente dependentes do tempo (SIQUEIRA, 2004). Entretanto, devido à dificuldade de trabalhar com funções trigonométricas, adotou-se como estratégia analisar o comportamento das funções trigonométricas presentes no sistema, diante das variações dos estados θ e $\dot{\psi}$ através de aproximações polinomiais restritas a um intervalo. Tais intervalos são apresentados na Equação (103).

$$\begin{aligned}\theta &\in [-\pi/6, \pi/6] \\ \dot{\psi} &\in [-\pi/18, \pi/18]\end{aligned}\tag{103}$$

sendo θ dado em radianos (*rad*) e $\dot{\psi}$ dado em radianos por segundo (*rad/s*).

Assim, com o auxílio da função *surf* do MATLAB, observou-se um comportamento aproximadamente linear no intervalo considerado. Ainda utilizando o MATLAB, através da função *polyfit* gerou-se polinômios que conseguissem prover uma boa aproximação das funções trigonométricas presentes, restrito ao intervalo imposto para os estados θ e $\dot{\psi}$. Tais aproximações podem ser vistas na Equação (104).

$$\begin{aligned}\frac{0,258 \sin \theta \cos \theta \dot{\psi}}{0,296} &\approx 0,770\theta \dot{\psi} \\ \frac{0,516 \sin \theta \cos \theta \dot{\psi}}{0,258 \cos(\theta)^2 + 0,043} &\approx 1,772\theta \dot{\psi} \\ \frac{0,318}{0,258 \cos(\theta)^2 + 0,043} &\approx -1,039\theta^2 - 1,052 \\ \frac{0,022}{0,258 \cos(\theta)^2 + 0,043} &\approx 0,072\theta^2 + 0,072 \\ \frac{0,072}{0,258 \cos(\theta)^2 + 0,043} &\approx 0,235\theta^2 + 0,238\end{aligned}\tag{104}$$

As Figuras 5 e 6 apresentam a aproximação da primeira e segunda equações e das demais equações respectivamente. Vale ressaltar que a superfície ou linha em vermelho representa a equação original e a verde a aproximação realizada.

Assim, realizando as substituições, resultou-se em uma nova representação do sistema dada pela Equação (105).

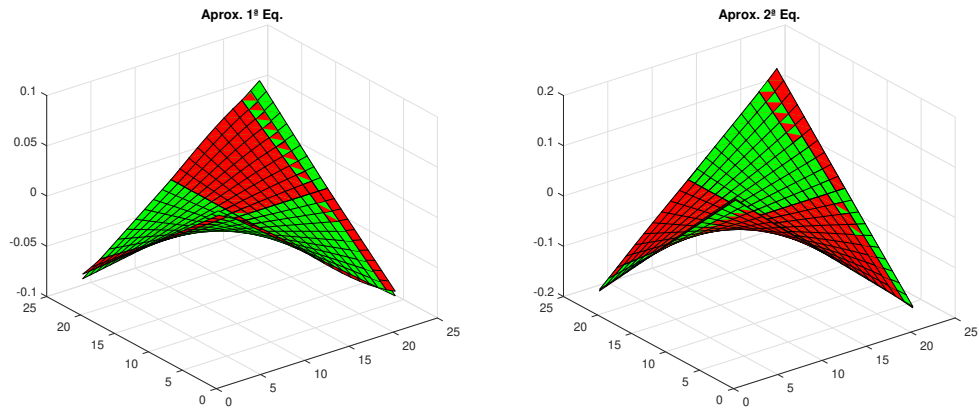


Figura 5 – Aproximação da 1ª e 2ª Equação.
Fonte: Autoria Própria.

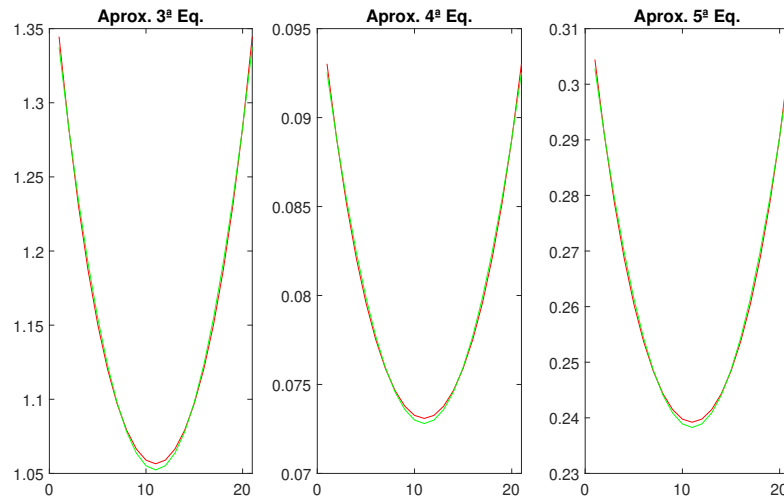


Figura 6 – Aproximação da 3ª, 4ª e 5ª Equação.
Fonte: Autoria Própria.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9,260 & 0,770\theta\dot{\psi} \\ 0 & 0 & 1,772\theta\dot{\psi} & -1,039\theta^2 - 1,052 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2,361 & 0,079 \\ 0,072\theta^2 + 0,072 & 0,235\theta^2 + 0,238 \end{bmatrix} u \quad (105)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

O presente trabalho tem como objetivo projetar um controlador robusto de dados amostrados do tipo integral, ou seja, que o sistema seja capaz de seguir trajetórias ou sinais de referências de entrada. Assim, para tal objetivo, é modificada a lei de controle adicionando-se um integrador à malha de controle, tal modificação é apresentada na Figura 7.

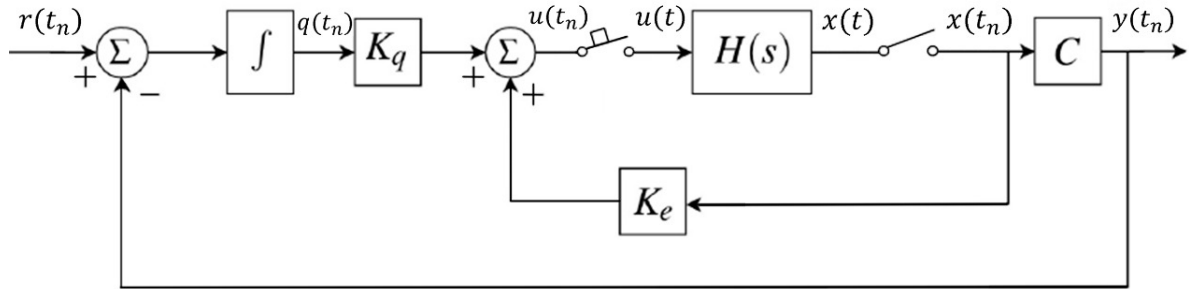


Figura 7 – Sistema com realimentação de estados com seguidor de referência.
Fonte: Autoria Própria.

A dinâmica do integrador é dada por $\dot{q}(t_n) = r(t_n) - y(t_n)$, sendo $q(t_n)$ uma nova variável de estado, $r(t_n)$ a referência e $y(t_n)$ as saídas que seguirão os sinais de referência. Nota-se que a entrada do sistema é dada por $u(t) = K_e x(t_n) + K_q q(t_n)$, em que K_e é o ganho interno de realimentação de estados e K_q o termo integrativo. Dessa maneira, tem-se o sistema aumentado apresentado na Equação (106).

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{A}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} K_e & K_q \end{bmatrix}}_{\hat{K}} \right) \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r \quad (106)$$

Dessa forma, realizando a modificação da lei de controle do sistema acrescentando o integrador apresentado na Equação (106) ao sistema 2-DOF da Equação (105), obtém-se o sistema aumentado da Equação (107).

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9,260 & -0,770\theta\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,772\theta\psi & -1,039\theta^2 - 1,052 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2,361 & 0,079 \\ 0,072\theta^2 + 0,072 & 0,235\theta^2 + 0,238 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} r \quad (107)
\end{aligned}$$

Portanto, a partir da representação do sistema apresentado na Equação (107) e da teoria de controle robusto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ desenvolvida nos Capítulos 2 e 3. Pode-se implementar o controlador para tal sistema, sendo necessário apenas a realização da ponderação dos parâmetros de desempenho e robustez desejados. A ponderação é realizada alterando os valores das matrizes C_z , D_{zw} , D_{zu} , C_{2z} , D_{2zw} e D_{2zu} utilizadas no Algoritmo 1 para a sintonia do controlador.

6 ENSAIOS REALIZADOS

Para avaliar a teoria de controle proposta para o modelo helicóptero 2-DOF, alguns ensaios foram realizados, tais como o teste de robustez, o teste de desempenho e o teste da variação do período de amostragem. Enfatiza-se que, para cada ensaio foram ponderados a robustez e o desempenho de acordo com a prioridade desejada. Assim, implementou-se o Algoritmo 1 para a síntese do controlador robusto de dados amostrados utilizando os pacotes YALMIP (LOFBERG, 2004) e ROLMIP (AGULHARI et al., 2019) em conjunto com MATLAB para a formulação dos politopos. Já para a solução das LMIs utilizadas para a síntese, utilizou-se o pacote Mosek (APS, 2019). Para todos os ensaios realizados considerou-se como sinal de referência os valores dados na Equação (108).

$$\begin{aligned}\theta_{ref} &= 0 \\ \psi_{ref} &= \pi/6\end{aligned}\tag{108}$$

6.1 TESTE DE ROBUSTEZ

Com a finalidade de analisar a robustez do sistema, foi implementado um controlador visando apenas a robustez. Deste modo, foram determinadas as matrizes B_w , C_z , D_{zw} , D_{zu} , C_{2z} , D_{2zw} , D_{2zu} , que para esta aplicação são dadas por

$$\begin{aligned}B_w &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_z = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], D_{zw} = [0], D_{zu} = [0 \ 0] \\ C_{2z} &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], D_{2zw} = [0], D_{2zu} = [0 \ 0]\end{aligned}\tag{109}$$

Além disso, é necessário determinar o valor do período máximo de amostragem a ser utilizado, sendo este valor para tal aplicação dado por $\bar{T} = 0,05s$.

Assim, utilizando o método iterativo dado pelo Algoritmo 1, obtém-se o controlador robusto de dados amostrados à entrada exógena com norma \mathcal{H}_∞ de $\gamma = 3,7 \cdot 10^{-4}$, dado por

$$\begin{aligned}
K(t) = & \alpha_1 \beta_1 \begin{bmatrix} -18,230 & 0,361 & -1,138 & 0,215 & 0,487 & -0,151 \\ 6,943 & -11,121 & 0,197 & -6,871 & -0,332 & 4,987 \end{bmatrix} \\
& + \alpha_2 \beta_1 \begin{bmatrix} -18,199 & 0,388 & -1,145 & 0,204 & 0,486 & -0,167 \\ 6,334 & -11,156 & 0,440 & -6,893 & -0,318 & 4,977 \end{bmatrix} \\
& + \alpha_1 \beta_2 \begin{bmatrix} -18,199 & 0,387 & -1,145 & 0,202 & 0,486 & -0,166 \\ 6,330 & -11,126 & 0,440 & -6,843 & -0,318 & 4,972 \end{bmatrix} \\
& + \alpha_2 \beta_2 \begin{bmatrix} -18,229 & 0,361 & -1,138 & 0,216 & 0,487 & -0,151 \\ 6,931 & -11,141 & 0,198 & -6,890 & -0,331 & 4,983 \end{bmatrix} \quad (110)
\end{aligned}$$

em que α_i e β_i são os vértices do politopo definidos por $\alpha_1 = (\pi/6 - \theta)/(\pi/3)$, $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$, $\beta_1 = (\pi/18 - \psi)/(\pi/9)$ e $\beta_2 = 1 - \beta_1$.

6.2 TESTE DE DESEMPENHO

Por se tratar de um controlador robusto misto ($\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$), pode-se ponderar a energia de controle utilizada e o desempenho do sistema. Deste modo, com o objetivo de demonstrar tal ponderação enfatizando minimizar a energia de controle e utilizando um período máximo amostragem de $\bar{T} = 0,05s$, determinou-se as matrizes B_w , C_z , D_{zw} , D_{zu} , C_{2z} , D_{2zw} , D_{2zu} , que para esta aplicação são dadas por

$$\begin{aligned}
B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_z = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad D_{zw} = [0], \quad D_{zu} = [0 \ 0] \\
C_{2z} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad D_{2zw} = [0], \quad D_{2zu} = [0.1 \ 0.1] \quad (111)
\end{aligned}$$

Assim, seguindo a mesma metodologia do teste anterior, o resultado obtido para o controlador robusto de dados amostrado à entrada exógena com norma \mathcal{H}_∞ de $\gamma = 5,0 \cdot 10^{-3}$.

$$\begin{aligned}
K(t) = & \alpha_1 \beta_1 \begin{bmatrix} -18,970 & 2,704 & 0,032 & 2,586 & -0,537 & -0,247 \\ 7,992 & -4,231 & -0,367 & -3,849 & 1,537 & 0,385 \end{bmatrix} \\
& + \alpha_2 \beta_1 \begin{bmatrix} -19,388 & 2,955 & 0,025 & 2,649 & -0,835 & -0,276 \\ 5,863 & -4,353 & -0,933 & -3,609 & 1,724 & 0,401 \end{bmatrix} \\
& + \alpha_1 \beta_2 \begin{bmatrix} -19,313 & 2,909 & 0,032 & 2,614 & -0,831 & -0,272 \\ 5,746 & -4,194 & 0,936 & -3,488 & 1,685 & 0,386 \end{bmatrix} \\
& + \alpha_2 \beta_2 \begin{bmatrix} -18,890 & 2,567 & -0,023 & 2,464 & -0,487 & -0,234 \\ 7,559 & -3,912 & 0,345 & -3,635 & 1,496 & 0,360 \end{bmatrix} \quad (112)
\end{aligned}$$

em que α_i e β_i são os vértices do politopo definidos por $\alpha_1 = (\pi/6 - \theta)/(\pi/3)$, $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$, $\beta_1 = (\pi/18 - \psi)/(\pi/9)$ e $\beta_2 = 1 - \beta_1$.

6.3 TESTE DA VARIAÇÃO DO PERÍODO DE AMOSTRAGEM

O controlador proposto é robusto à variação do período de amostragem, desde que o intervalo seja menor ou igual do que o máximo período de amostragem escolhido para a síntese do controlador. Assim, para avaliar esta robustez, considerou-se os dois testes anteriores realizados, o teste de robustez e o teste de desempenho, variando o período em dois tempos diferentes, dados por

$$\begin{aligned}
\bar{T}_1 &= 0,04s \\
\bar{T}_2 &= 0,02s
\end{aligned} \quad (113)$$

Além disso, para fins de análise do comportamento do sistema para períodos de amostragem acima do máximo período de amostragem utilizado na síntese, realizou-se um teste considerando um período de amostragem superior dado na Equação (114).

$$\bar{T}_3 = 0,5s \quad (114)$$

7 RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos no decorrer deste trabalho. Primeiramente, são discutidos os resultados e observações obtidas para o teste de robustez, em que foi analisada a influência do sinal exógeno à dinâmica do sistema. Posteriormente, são analisados os resultados obtidos para o teste de desempenho do sistema, em que foram ponderadas as matrizes do sistema para priorizar o desempenho com a finalidade de obter um tempo de resposta transitória mais rápida. Por fim, apresentam-se os resultados obtidos para o teste da variação do período de amostragem, sendo avaliada a influência da variação do período de amostragem ao sistema.

7.1 TESTE DE ROBUSTEZ

Para analisar a robustez do sistema controlado pelo ganho dado na Equação (110), foram realizadas duas simulações. Na primeira, não foi considerado a presença de sinal exógeno. Já na segunda, considerou-se a presença de um sinal exógeno gerado através da função *randn* do MATLAB, portanto $w(t)$ é um sinal gaussiano, com média nula e desvio padrão unitário. As respostas do sistema controlado para ambas as simulações são apresentadas nas Figuras 8 e 9, respectivamente. Além disso, juntamente, é apresentado o esforço de controle para ambas as condições.

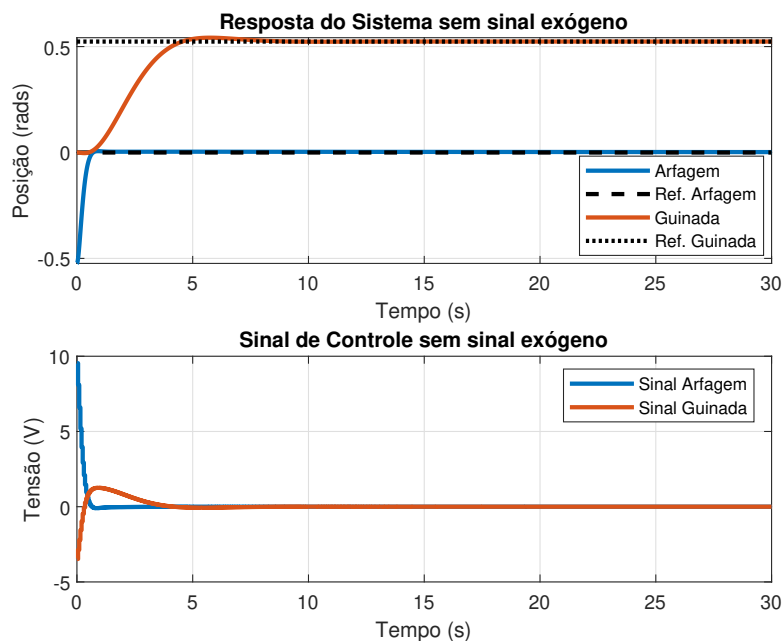


Figura 8 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema sem o sinal exógeno.

Fonte: Autoria Própria.

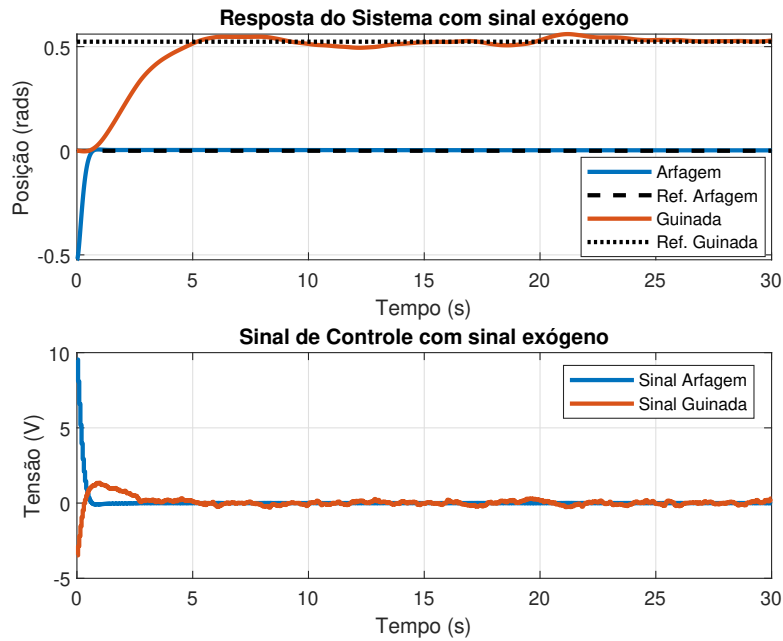


Figura 9 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema com o sinal exógeno.
Fonte: Autoria Própria.

Ao analisar a resposta do sistema da Figura 8, nota-se que o sistema apresentou uma resposta transitória rápida para o ângulo de arfagem com tempo de acomodação próximo de 1s e presença de sobressinal ou overshoot. Já para o ângulo de guinada o sistema apresentou uma resposta com tempo de acomodação próximo de 5s, porém sem a presença de overshoot.

Já analisando a resposta apresentada na Figura 9, percebe-se que o sistema apresentou uma resposta transitória rápida para o ângulo de arfagem com tempo de acomodação próximo de 1s. Entretanto, para o ângulo de guinada o sistema apresentou um comportamento oscilatório devido à entrada exógena aplicada, com um tempo de acomodação próximo de 10s com a presença de overshoot. Além disso, percebe-se a presença do sinal exógeno ao sinal de controle ao ângulo de guinada. Tal efeito é evidente pela compensação do controlador à perturbação, visando eliminá-la.

Assim, para ambas simulações o sistema apresentou tempo de respostas transitória similares e ambos conseguiram alcançar a referência escolhida como era-se esperado, uma vez que o sistema apresenta robustez garantida pela norma \mathcal{H}_∞ .

7.2 TESTE DE DESEMPENHO

Com a finalidade de minimizar a energia de controle, porém, garantindo a robustez do sistema é utilizada a norma \mathcal{H}_2 em conjunto com a norma \mathcal{H}_∞ obtendo o ganho dado na Equação (112). Assim, avaliando a energia de controle do sistema priorizando tal

minimização, obtêm-se as respostas do sistema, juntamente com o esforço de controle necessário, como apresentado nas Figuras 10 e 11. Na Figura 10, foi considerada apenas a minimização da energia sem a presença de sinal exógeno. Na Figura 11, foi inserido o sinal exógeno ao sistema através da função *randn* do MATLAB.

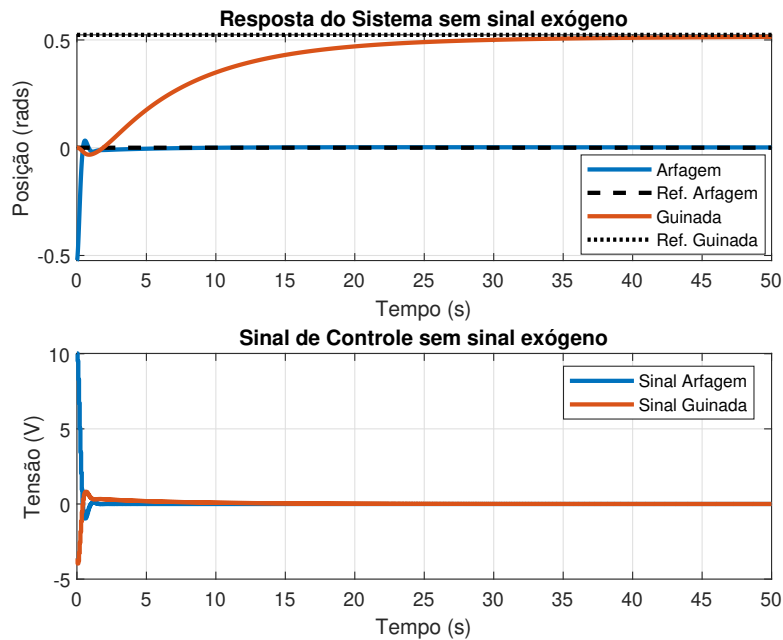


Figura 10 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema sem sinal exógeno.
Fonte: Autoria Própria.

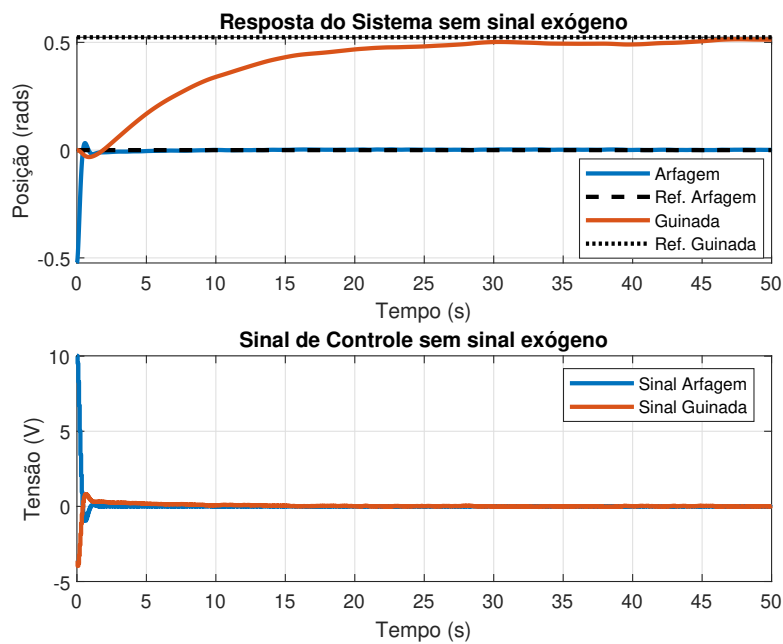


Figura 11 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema com sinal exógeno.
Fonte: Autoria Própria.

É notório que, para ambas condições, sem e com o sinal exógeno, a resposta transitória do sistema apresentou um tempo de acomodação mais lenta para o ângulo de guinada, próximo de 35s em relação à resposta obtida nas Figuras 8 e 9, em que foi considerada apenas a robustez do sistema. Já para o ângulo de arfagem, o sistema apresentou um tempo de acomodação próximo de 1s. Porém, é evidente a minimização do sinal de controle na Figura 11 em relação à Figura 9, visto que para a primeira não apresentou oscilações devido à redução da energia de controle. Enquanto isso, a resposta da Figura 11 apresentou oscilação e esforço de controle maior para estabilizar o sistema.

Assim, conclui-se que a ideia de minimizar a energia de controle do sistema através da norma \mathcal{H}_2 é atendida e o sistema consegue seguir a referência escolhida para ambos casos. Vale ressaltar que é possível obter diferentes comportamentos, em relação à energia de controle e rapidez na resposta, pela utilização de diferentes ponderações nas matrizes C_{2z} e D_{2zu} . Utilizando valores próximos a zero ou zero, é priorizado a rapidez na resposta do sistema. Caso contrário, prioriza-se à energia de controle utilizando valores maiores que zero.

7.3 TESTE DA VARIAÇÃO DO PERÍODO DE AMOSTRAGEM

Por se tratar de um controle robusto à variação da taxa de amostragem, foram realizadas simulações considerando os controladores obtidos tanto pelo teste de robustez, quanto pelo teste de desempenho. Assim, as Figuras 12 e 13 apresentam a resposta do sistema e do esforço de controle para o primeiro teste considerando um período de amostragem de 0,04s e 0,02s, respectivamente. Já para o segundo teste, foram obtidas as respostas mostradas nas Figuras 14 e 15.

Observando as respostas apresentadas por ambas as condições de teste, robustez e desempenho, ainda para os dois períodos de amostragem escolhidos, observa-se que para as Figuras 12 e 13 o sistema apresentou comportamento semelhante ao da Figura 8. Já para as outras duas Figuras 14 e 15, apresentaram comportamento similar ao da Figura 11. Assim, pode-se concluir que o sistema é robusto à variação da taxa de amostragem sempre que menor que o valor máximo do período de amostragem escolhido. Além disso, para ressaltar a variação do período de amostragem seccionou-se o sinal de controle para ambos testes e ambas variações de período. As Figuras 16, 17, 18 e 19, apresentam o seccionamento realizado.

Analisando o seccionamento realizados no sinal de controle, nota-se que as Figuras 16 e 18 apresentam mesma taxa de atualização a cada 4 amostras. Já as Figuras 17 e 19 tem seus sinais atualizados a cada 2 amostras. Tal fenômeno é consequência de utiliza-se uma discretização de 0,01s na realização da simulação no MATLAB usando o *solver* 'ode45' para o procedimento de integração numérica. Dessa forma, pode-se concluir que a atualização do sinal de controle está de acordo o período de amostragem escolhido.

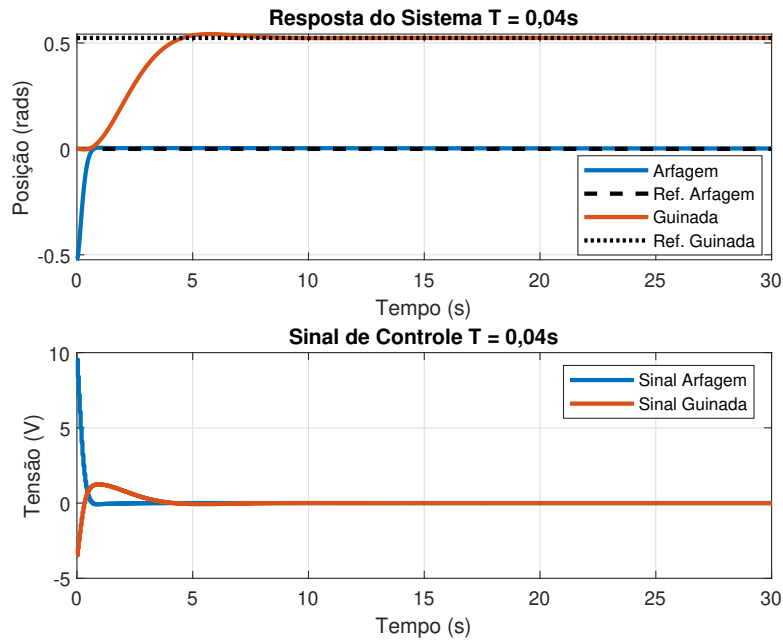


Figura 12 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema do Teste de Robustez com $T = 0,04s$.
Fonte: Autoria Própria.

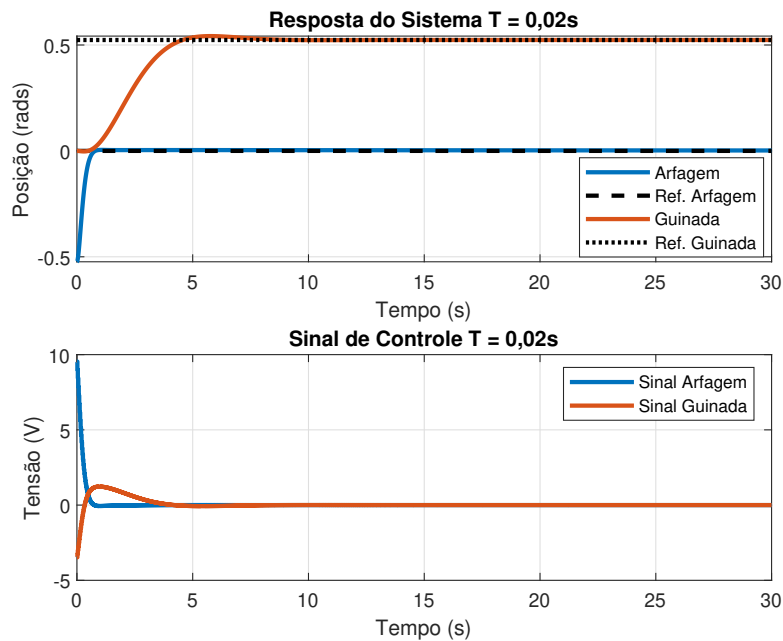


Figura 13 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema do Teste de Robustez com $T = 0,02s$.
Fonte: Autoria Própria.

Por fim, para demonstrar a influência de extrapolar o período de amostragem acima do máximo período considerado no projeto, realizou-se a simulação com um período de $\bar{T}_3 = 0,5s$, para ambas condições de teste, teste de robustez e desempenho. As Figuras 20 e 21 apresentam a resposta do sistema juntamente com seu esforço de controle.

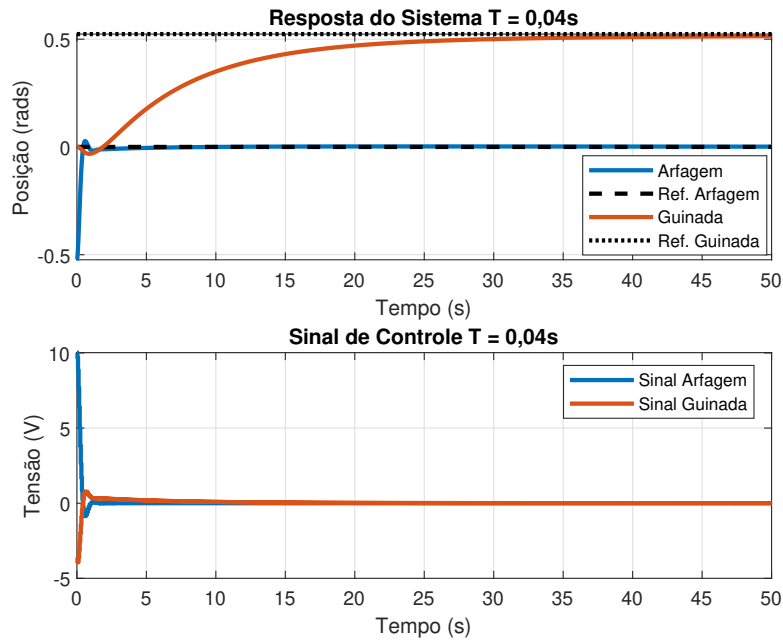


Figura 14 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema do Teste de Desempenho com $T = 0,04s$.

Fonte: Autoria Própria.

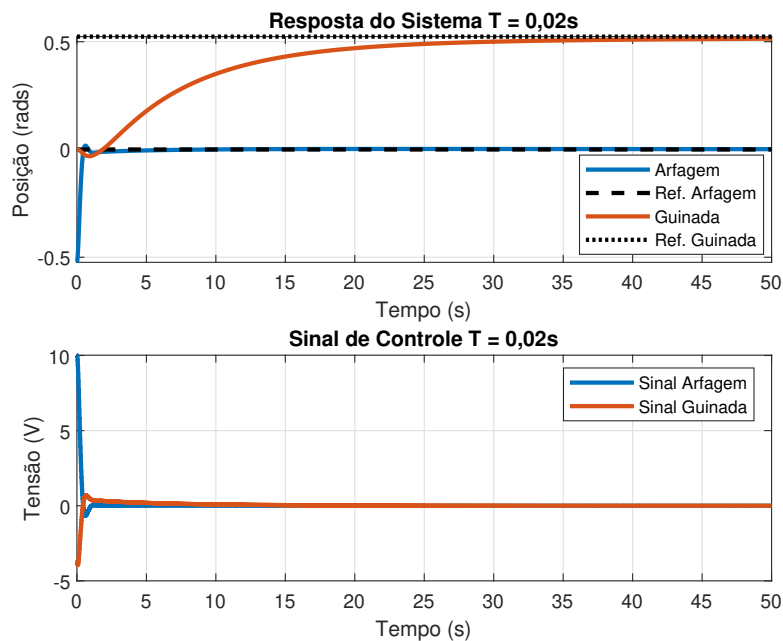


Figura 15 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema do Teste de Desempenho com $T = 0,02s$.

Fonte: Autoria Própria.

Nota-se que a Figura 20 apresentou uma resposta oscilatória com grandes amplitudes para o ângulo de arfagem, entretanto, conseguir acomodar num tempo aproximado de 15s. Além disso, o sinal de controle também apresentou tal oscilações, com uma taxa

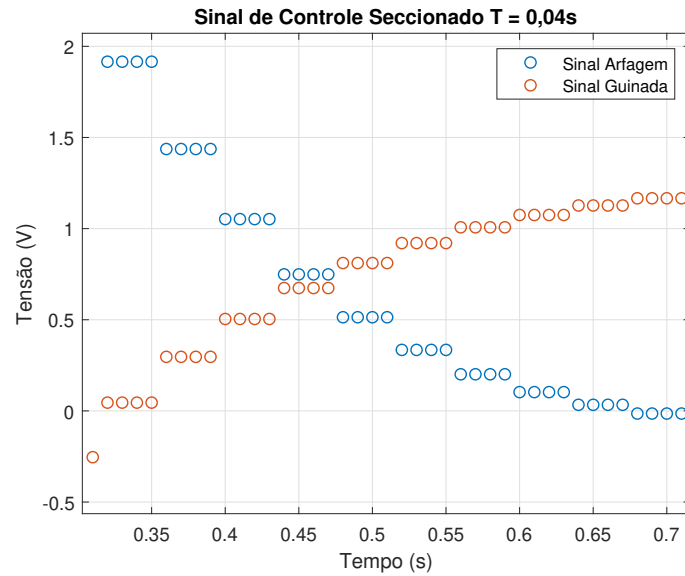


Figura 16 – Sinal de Controle Seccionado Teste Robustez $T = 0,04s$.
Fonte: Autoria Própria.

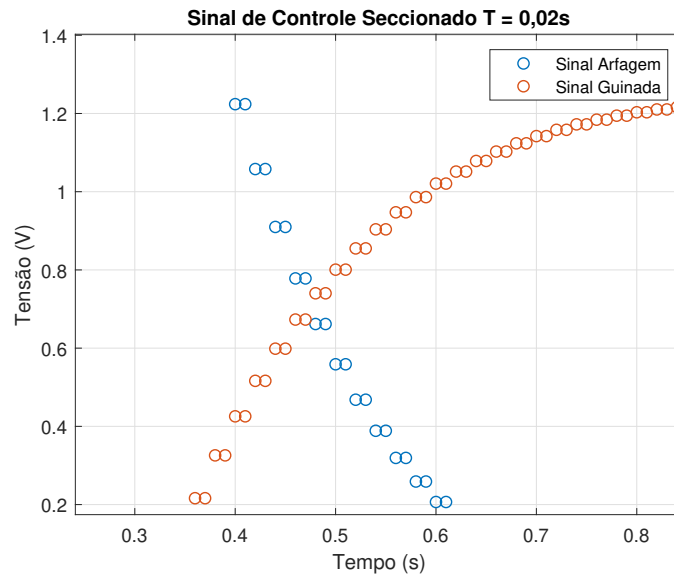


Figura 17 – Sinal de Controle Seccionado Teste Robustez $T = 0,02s$.
Fonte: Autoria Própria.

de decaimento em amplitude. Já o ângulo de guinada, a resposta do sistema apresentou overshoot, porém sem a presença de oscilações.

Na Figura 21, é evidente que para o ângulo de guinada o sistema apresentou um subsinal ou undershoot no início, porém sem a presença de oscilações para alcançar a referência com um tempo de acomodação de 5s. Contudo, o sinal de controle apresentou oscilações de grande amplitudes, com decaimento no decorrer do tempo. No ângulo de arfagem, tanto a resposta do sistema, quanto o sinal de controle apresentaram comportamento

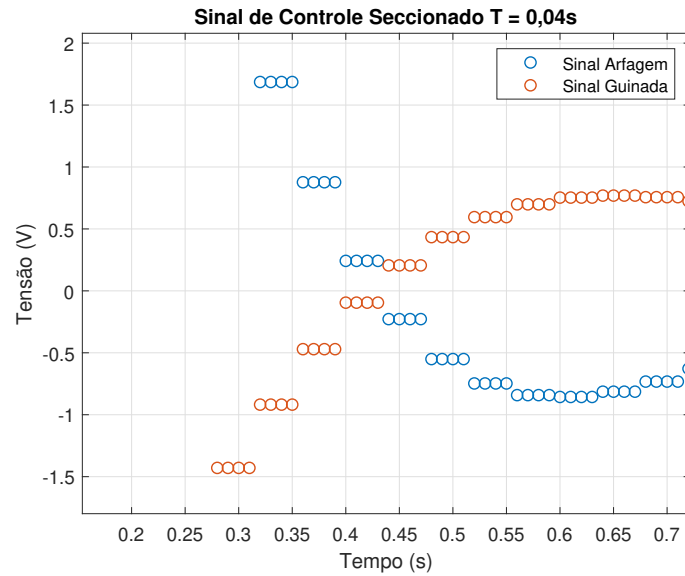


Figura 18 – Sinal de Controle Seccionado Teste Desempenho $T = 0,04s$.
Fonte: Autoria Própria.

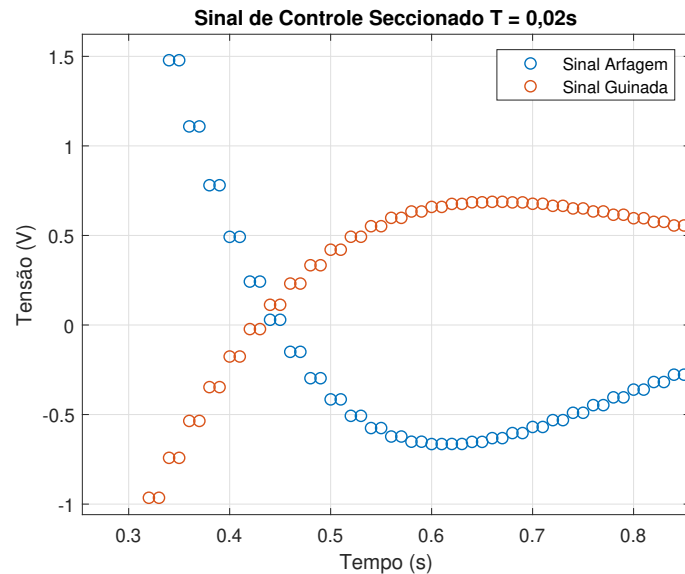


Figura 19 – Sinal de Controle Seccionado Teste Robustez $T = 0,02s$.
Fonte: Autoria Própria.

oscilatório com grandes amplitudes. Entretanto, para ambos casos, o controlador conseguiu alcançar a referência escolhida, porém com comportamentos oscilatórios e sinais de controle de grande amplitudes. Assim, pode-se concluir que para períodos de amostragem superiores ao máximo período escolhido para o projeto, o sistema pode apresentar comportamento oscilatório que podem levar o sistema à instabilidade.

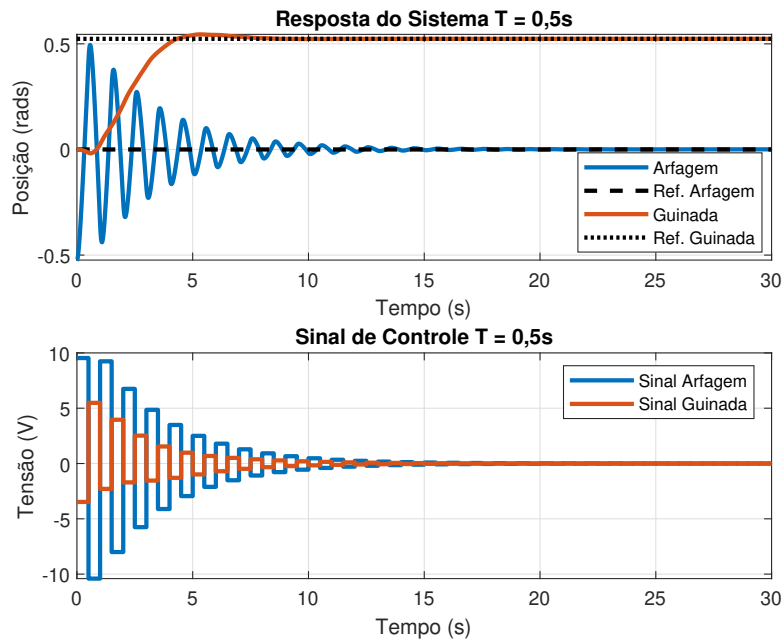


Figura 20 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema do Teste de Robustez com $T = 0,5s$.
Fonte: Autoria Própria.

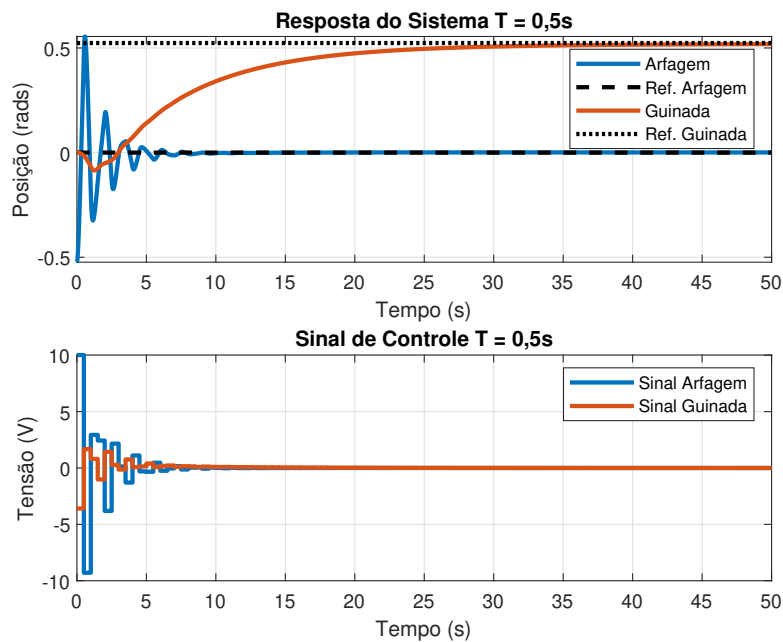


Figura 21 – Resposta e Sinal de Controle do Sistema do Teste de Desempenho com $T = 0,5s$.
Fonte: Autoria Própria.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou uma proposta de aplicação de controle robusto de dados amostrado aplicado a um sistema helicóptero 2-DOF modelado por LPV. Apresentou-se a teoria de controle robusto de dados amostrados, em que foi utilizada a norma \mathcal{H}_∞ para garantir a robustez e a norma \mathcal{H}_2 visando o desempenho. Além disso, foram também detalhadas a modelagem do sistema helicóptero 2-DOF, a alteração da lei de controle para ser capaz de seguir sinais de referências de entrada e sua simulação computacional para análise e validação do método proposto.

Na implementação do controlador de dados amostrados, utilizou-se a técnica de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para sistemas LPV, sendo sua síntese realizada por LMIs. Por meio da solução das LMIs apresentadas, obtém-se o controlador de dados amostrados composto pela combinação de dois símplices. Para avaliar a teoria de controle proposta, foram realizados três testes: o teste de robustez, o teste de desempenho e o teste da variação do período de amostragem. No primeiro teste, sintonizou-se o controlador priorizando a robustez obtendo uma robustez garantida pela norma \mathcal{H}_∞ de $\gamma = 3,7 \cdot 10^{-4}$. É notório que o controlador conseguiu alcançar a referência tanto para o sistema sem sinal exógeno, quanto para o com sinal exógeno. Ainda, vale ressaltar que a resposta do sistema para o ângulo de guinada apresentou um comportamento oscilatório com pequenas amplitudes, porém, ao decorrer do tempo, o controlador consegue compensá-las.

Já no segundo teste, priorizou-se o desempenho enfatizando minimizar a energia de controle do sistema. Assim, o sistema apresentou uma robustez garantida pela norma \mathcal{H}_∞ de $\gamma = 5,0 \cdot 10^{-3}$. A resposta do sistema apresentou uma dinâmica mais lenta para o ângulo de guinada devido à minimização da energia de controle empenhada. Além disso, o sistema apresentou robustez ao sinal exógeno com a presença de pequenas oscilações no sinal de guinada. Entretanto, para ambos os casos em relação ao sinal exógeno, o sistema conseguiu seguir a referência escolhida.

Por fim, por se tratar de um sistema robusto à variação do período de amostragem, foram realizadas três simulações com períodos de amostragem de 0,04, 0,02 e 0,5s com a finalidade de avaliar a influência da amostragem para os controladores determinados no teste de robustez e desempenho. Para ambos controladores, considerando os dois primeiros períodos, o sistema conseguiu buscar a referência escolhida como era-se esperado, uma vez que tais períodos são menores que o período de amostragem escolhido (0,05s). Porém, para o último período, o sistema apresentou comportamento oscilatório com a presença de grandes amplitudes para ambos os testes. Contudo, ao final, o sistema conseguiu buscar a referência escolhida. Vale ressaltar que possivelmente, para períodos ainda maiores, o sistema pode apresentar até mesmo instabilidade, uma vez que a estratégia de

controle utilizada garante estabilidade apenas para períodos de amostragem menores que o valor de projeto.

Dessa maneira, a proposta do controlador misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de dados amostrados apresentada pode ser validada e seus resultados permitem observar o bom comportamento do controlador à presença de um sinal exógeno, à possibilidade de minimizar a energia de controle ponderando com a robustez do sistema e à variação do período de amostragem.

REFERÊNCIAS

- AGULHARI, C. M. et al. Algorithm 998: The Robust LMI Parser — A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 45, n. 3, p. 36:1–36:25, August 2019. Citado na página 45.
- ALCALÁ, E.; FACERÍAS, M.; PUIG, V. Optimal lpv-based control and estimation for autonomous vehicles. In: *2020 28th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. [S.l.: s.n.], 2020. p. 206–211. Citado na página 9.
- APS, M. *The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 9.0*. [S.l.], 2019. Disponível em: <<http://docs.mosek.com/9.0/toolbox/index.html>>. Citado na página 45.
- BOYD, S. et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. v. 15. Citado 6 vezes nas páginas 20, 22, 25, 29, 32 e 33.
- BRIAT, C. Convergence and equivalence results for the Jensen’s inequality—application to time-delay and sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 56, n. 7, p. 1660–1665, 2011. Citado na página 17.
- BRIAT, C.; SENAME, O.; LAFAY, J. F. Parameter dependent state-feedback control of LPV time delay systems with time varying delays using a projection approach. *IFAC Proceeding Volumes*, v. 41, n. 2, p. 4946–4951, 2008. Citado na página 23.
- CHENG, J. et al. Robust finite-time sampled-data control of linear systems subject to random occurring delays and its application to four-tanks systems. *Applied Mathematics and Computation*, v. 281, p. 55–76, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.01.046>>. Citado na página 10.
- DJAMAI, M. Control of wind turbine by lpv gain scheduling with tower load reduction. In: *2019 18th European Control Conference (ECC)*. [S.l.: s.n.], 2019. p. 3328–3333. Citado na página 9.
- FRIDMAN, E. A refined input delay approach to sampled-data control. *Automatica*, v. 46, p. 421–427, 2010. Citado na página 19.
- FUJIMOTO, H. *General Framework of Multirate Sampling Control and Applications to Motion Control Systems*. Tese (Doutorado) — The University of Tokyo, the Department of Electrical Engineering, Japan, 2000. Disponível em: <http://hflab.k.u-tokyo.ac.jp/fujimoto/papers/dthesisE_web.pdf>. Citado na página 10.
- GASPAR, P. et al. *Robust Control Design for Active Driver Assistance Systems*. [S.l.]: Springer:Springer, Cham., 2017. Citado na página 13.
- HOOSHMANDI, K. et al. Polynomial LPV approach to robust \mathcal{H}_∞ control of nonlinear sampled-data systems. v. 93, n. 9, p. 2145–2160, 2020. Citado 8 vezes nas páginas 13, 18, 21, 24, 25, 26, 28 e 30.

HUANG, Y.; JADBABAIE, A. Nonlinear h_∞ control: An enhance quasi-LPV approach. In: *14th world Congress of IFAC, Beijing, P.R. China*. [S.l.: s.n.], 1999. p. 2754–2759. Citado na página 9.

LOFBERG, J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508)*. [S.l.: s.n.], 2004. p. 284–289. Citado na página 45.

LOPES, A. N. D. et al. Sampled-data controller design with application to the quanser AERO 2-DOF helicopter. p. 1–6, 2020. Citado na página 9.

NAJARZADEH, R. et al. Lpv control of an influenza model with vaccination and antiviral treatment. In: *2021 7th International Conference on Control, Instrumentation and Automation (ICCIA)*. [S.l.: s.n.], 2021. p. 1–5. Citado na página 9.

NEJEM, I.; BOUZIZI, M. H.; BOUANI, F. Robust control of delayed lpv systems via parameter-dependent lyapunov functionals. In: *2018 15th International Multi-Conference on Systems, Signals Devices (SSD)*. [S.l.: s.n.], 2018. p. 1408–1413. Citado na página 9.

NETO, G. G.; BARBOSA, F.; ANGÉLICO, B. 2-DOF helicopter controlling by pole-placements. *12 th IEEE international conference on Industry Applications (INDUSCON), Curitiba, Brazil*, 2016. Citado na página 37.

OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. Pearson Prentice Hall, 2010. ISBN 9788576058106. Disponível em: <<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=cat07269a&AN=utfpr.261703&lang=pt-br&site=eds-live&scope=site>>. Citado na página 9.

OLIVEIRA, J. de. *Controle robusto de sistemas lineares a parâmetros variantes no tempo: técnica de análise e síntese*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Faculdade de Engenharia Elétrica, Santa Caratina, SC, 2000. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/78472?show=full>>. Citado na página 9.

PALMEIRAS, A. H. K.; SILVA., J. M. G. da; FLORES, J. V. Regional stability analysis of nonlinear sample-data control systems: a quasi-LPV approach. *Europe Control Conference, ECC, Limassol, Cyprus*, p. 2016–2021, 2018. Citado na página 9.

QUANSER. *User Manual 2-DOF Helicopter Experiment*. [S.l.: s.n.], 2012. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 40.

RAHME, S.; MESKIN, N.; MOHAMMADPOUR, J. Adaptive sliding mode fault diagnosis for lpv systems with uncertain scheduling variables. In: *2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*. [S.l.: s.n.], 2018. p. 73–78. Citado na página 9.

RAMEZANIFAR, A.; MOHAMMADPOUR, J.; GRIGORIADIS, K. M. Output-feedback sampled-data control design for linear parameter-varying systems with delay. *International Journal of Control*, v. 87, n. 12, p. 2431–2445, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/00207179.2014.926394>>. Citado na página 10.

SAKTHIVEL, R. et al. Robust reliable sampled-data control for switched systems with application to flight control. *International Journal of Systems Science*, v. 47, n. 15, p. 3518–3528, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00207721.2015.1090041>>. Citado na página 10.

SIQUEIRA, A. A. G. *Controle \mathcal{H}_∞ não linear de robôs manipuladores subatuados*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2004. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18133/tde-18012005-164025/publico/tese_siqueira2004_.pdf>. Citado na página 41.

TAN, K.; GRIGORIADIS, K. M. State-feedback control of LPV sampled-data systems. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 6, p. 145–170, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/S1024123X00001307>>. Citado na página 10.

VISHNUPRIYAN, J.; MANOHARAN, P. S.; RAMALAKSHMI, A. P. S. Uncertainty modeling of nonlinear 2-DOF helicopter model. p. 1–6, 2014. Citado na página 10.

YUE, X.; SU, B. Predictive functional control of nonlinear systems based on multiple lpv models. In: *2019 Chinese Automation Congress (CAC)*. [S.l.: s.n.], 2019. p. 5210–5214. Citado na página 9.

ZHANG, W. et al. Sampled-data control for a class of linear time varying systems. *International Federation of automatic Control, IFAC*, p. 126–134, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.01.027>>. Citado na página 10.