

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**URIAS DE MOURA BUENO NETO**

**MODELAGEM DE FLUXO PARA QUEBRA DE BARRAGEM VIA MÉTODO DAS  
CARACTERÍSTICAS E DINÂMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL**

**CAMPO MOURÃO-PR**

**2021**

**URIAS DE MOURA BUENO NETO**

**MODELAGEM DE FLUXO PARA QUEBRA DE BARRAGEM VIA MÉTODO DAS  
CARACTERÍSTICAS E DINÂMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL**

**Dam-break flow modeling by the method of the characteristics and  
computational fluid dynamics**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação  
apresentado como requisito para obtenção do título  
de Bacharel e Licenciado em Engenharia Ambiental  
do Curso de Engenharia Ambiental da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Adilandri Mércio Lobeiro

Coorientador: Prof. Dr. Eudes José Arantes

**CAMPO MOURÃO-PR**

**2021**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es) e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

**URIAS DE MOURA BUENO NETO**

**MODELAGEM DE FLUXO PARA QUEBRA DE BARRAGEM VIA MÉTODO DAS  
CARACTERÍSTICAS E DINÂMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação  
apresentado como requisito para obtenção do título  
de Bacharel e Licenciado em Engenharia Ambiental  
do Curso de Engenharia Ambiental da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 30/novembro/2021

---

Adilandri Mércio Lobeiro

Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Eudes José Arantes

Doutor em Engenharia Hidráulica e Saneamento  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Lilian Caroline Xavier Candido

Doutora em Métodos Numéricos em Engenharia  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Sara Coelho da Silva

Doutora em Métodos Numéricos em Engenharia  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**CAMPO MOURÃO-PR**

**2021**

Dedico à minha avó Denésia, tio Romildo e ao  
meu amigo Matheus, (*in memoriam*)  
descansem em paz, meus eternos amor e  
carinho para vocês.

## **AGRADECIMENTOS**

Minha eterna gratidão aos meus pais Edson e Mara, pelo apoio e suporte na graduação, por sempre acreditarem e confiarem em mim. Também vos agradeço pelo amor, carinho e cuidado comigo e com a minha irmã Karen.

Agradeço aos meus orientadores: Adilandri e Eudes, pela experiência transmitida e também pelas orientações que foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. A UTFPR e o corpo docente do Curso de Engenharia de Ambiental, pelos ensinamentos e por minha formação acadêmica e profissional.

Por fim a meus amigos da casa de praia: Alisson, Gustavo, Marcos Paulo, Leonardo, Olavo, Igor, Bruno, e os demais que não citei, que me acompanharam nessa jornada e tornaram tão especial o período da graduação.

## RESUMO

Como mostra a literatura a frequência dos acidentes envolvendo o rompimento de barragens vêm se tornando cada vez maiores. Na última década o Brasil foi marcado pelas tragédias de Mariana e Brumadinho, os quais geraram grandes impactos ambientais e socioeconômicos tendo como principal as vidas humanas ceifadas. Devido a complexidade e a gravidade de uma possível catástrofe envolvendo barragens, foi realizada a modelagem para o rompimento de uma barragem hipotética, comparando uma abordagem já muito utilizada para escoamentos em 1-D e 2-D, onde foram resolvidas as Equações de Saint-Venant também conhecidas como equações de águas rasas, utilizando o método das características, através de um código elaborado no software MATLAB®, os resultados foram comparados com os dados obtidos de dinâmica dos fluidos computacional, onde utilizou-se o software ANSYS® que resolve as equações de Reynolds-Averaged Navier-Stokes pelo método dos volumes finitos, com o intuito de verificar se uma abordagem menos robusta como a produzida no MATLAB, possui vantagens sobre a abordagem mais robusta como a do ANSYS. De modo geral obteve-se bons resultados de profundidades ao comparar ambas metodologias com maior erro na ordem de 24% destacando a agilidade e o baixíssimo custo computacional do método das características na obtenção dos mesmos, em relação as velocidades não se obteve o resultado desejado devido a alta ordem dos erros, porém a velocidade de propagação da onda foi basicamente idêntica em ambas as abordagens ao avaliar o perfil da onda gerada. O intuito de reduzir os erros relacionados às velocidades nas seções pode ser o objetivo de pesquisas futuras.

**Palavras-chave:** fluxo unidimensional; modelagem em ondas de choque; rompimento de barragem; método das características; cfd.

## ABSTRACT

As the literature shows, the frequency of accidents involving the breaking of dams is becoming increasingly higher. In the last decade, Brazil was marked by the tragedy of Mariana and Brumadinho, which generated great environmental and socioeconomic impacts, with the main loss of human lives being lost. Due to the complexity and severity of a possible catastrophe involving dams, modeling for the failure of a hypothetical dam was performed, comparing an approach already widely used for 1-D and 2-D flows, where the Saint-Venant Equations were solved, also known as shallow water equations, using the method of characteristics, through a code elaborated in the MATLAB ® software, the results were compared with the data obtained from computational fluid dynamics, using the ANSYS ® software that solves the Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations by the finite volume method, to verify if a less robust approach like the one produced in MATLAB, has advantages over a more robust approach like the one in ANSYS. In general, good depth results were obtained when comparing both methods with the highest error in the order of 24%, highlighting the agility and low computational cost of the method of characteristics in obtaining them, about speeds, the desired result was not obtained due to the high order of errors, however, the wave propagation speed was identical in both approaches when evaluating the generated wave profile. The aim of reducing errors related to speeds in sections may be the objective of future research.

**Keywords:** one-dimensional flow; modeling in shock waves; dam-break; method of characteristics; cfd.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Série histórica de incidentes e acidentes envolvendo barragens no Brasil. . . . .	14
Figura 2 – Alturas: Experimental, numérica e analítica. Em $t = 4.9(s)$ e $8.1(s)$ respectivamente. . . . .	16
Figura 3 – Esforços que atuam sobre um elemento de fluido. . . . .	17
Figura 4 – Volume de controle elementar. . . . .	19
Figura 5 – Força exercida sobre um elemento de área. . . . .	20
Figura 6 – Moléculas mais rápidas B 'podem se difundir através de S e impulsionar B. . . . .	22
Figura 7 – Escoamento em 1-D. . . . .	24
Figura 8 – Expansão em Série de Taylor para as variáveis $U$ e $h$ . . . . .	25
Figura 9 – Decomposição das forças atuantes no volume de controle elementar. . . . .	28
Figura 10 – Representação curvas característica em $xt$ . . . . .	31
Figura 11 – Regime subcrítico. . . . .	31
Figura 12 – Regime supercrítico. . . . .	31
Figura 13 – Discretização dos pontos no espaço $xt$ . . . . .	34
Figura 14 – Representação do problema em $t = 0$ . . . . .	36
Figura 15 – Perspectiva do canal e reservatório no plano $xy$ . . . . .	39
Figura 16 – Malha gerada no domínio. . . . .	40
Figura 17 – Condições estabelecidas para o problema. . . . .	41
Figura 18 – Altura x comprimento, para as ESV e RANS em $t = 1(s)$ . . . . .	43
Figura 19 – Altura x comprimento, para as ESV e RANS em $t = 3(s)$ . . . . .	43
Figura 20 – Altura x comprimento, para as ESV e RANS em $t = 5(s)$ . . . . .	43
Figura 21 – Altura x comprimento, para as ESV e RANS em $t = 7(s)$ . . . . .	43
Figura 22 – Altura x comprimento, para as ESV e RANS em $t = 9(s)$ . . . . .	44
Figura 23 – Altura x comprimento, para as ESV e RANS em $t = 11(s)$ . . . . .	44
Figura 24 – Altura x comprimento, para as ESV e RANS em $t = 13(s)$ . . . . .	44
Figura 25 – Altura x comprimento, para as ESV e RANS em $t = 15(s)$ . . . . .	44
Figura 26 – Velocidades pontuais da onda frontal no início do canal $t = 1s$ . . . . .	45
Figura 27 – Velocidades da onda frontal no início do canal em $t = 3s$ . . . . .	45
Figura 28 – Velocidades pontuais da onda frontal no canal em $t = 5s$ . . . . .	45
Figura 29 – Velocidades pontuais para todo o domínio $t = 15s$ . . . . .	45



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Inclinações das Características e Invariantes de Riemann na Direção $x$ . . . . .	33
Tabela 2 – Condições do problema de quebra de barragem. . . . .	42
Tabela 3 – Comparação das velocidades entre as ESV e a ENS. . . . .	46

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>13</b>
1.1.1	Objetivo Geral	13
1.1.2	Objetivos Específicos	13
<b>1.2</b>	<b>Justificativa</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	<b>14</b>
<b>2.1</b>	<b>Rompimento de Barragens</b>	<b>14</b>
<b>2.2</b>	<b>Modelagem de fluxo para rompimento de barragem</b>	<b>15</b>
<b>2.3</b>	<b>Equações de Navier-Stokes</b>	<b>16</b>
2.3.1	Esforços sobre um elemento de fluido	17
2.3.2	Equações de movimento	18
2.3.3	Equação do balanço de massa	18
2.3.4	Equação de conservação de quantidade de movimento	20
<b>2.4</b>	<b>Equações de Reynolds-Avareged Navier-Stokes</b>	<b>23</b>
<b>2.5</b>	<b>Equações de Saint-Venant 1-D</b>	<b>23</b>
2.5.1	Equação de conservação de massa em uma dimensão	23
2.5.2	Equação de conservação da quantidade de movimento em uma dimensão	26
<b>2.6</b>	<b>Método das Características</b>	<b>30</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>34</b>
<b>3.1</b>	<b>Aplicação do Método das Características às ESV-1D</b>	<b>34</b>
3.1.1	Solução numérica do problema de rompimento de uma barragem hipotética via Método das Características	35
<b>3.2</b>	<b>Problema de rompimento de barragem via ANSYS</b>	<b>39</b>
3.2.1	Escolha do plug-in	39
3.2.2	Determinação da geometria	39
3.2.3	Criação da malha	40
3.2.4	Configurações do problema	40
3.2.5	Solução, processamento e execução da simulação	41
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>42</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>47</b>

<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>48</b>
<b>APÊNDICES</b>	<b>50</b>
<b>APÊNDICE A – SCRIPT PRODUZIDO NO MATLAB</b> . . . . .	<b>52</b>
<b>APÊNDICE B – RELATÓRIO DA SIMULAÇÃO</b> . . . . .	<b>57</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As barragens são classificadas em duas grandes categorias, sendo elas de regularização e de contenção, as barragens de regularização exercem a função de controlar o regime hidrológico de corpos hídricos em períodos de cheia ou estiagem a fim de atender determinada demanda, já as barragens de contenção são construídas para reter água, sedimentos característicos de processos industriais ou rejeitos mineralógicos (COSTA, 2016).

Atualmente estão cadastradas no Sistema Nacional de Informações sobre Segurança de Barragens-SNISB 19.388 barragens, sabe-se que 5.285 se submetem à Política Nacional de Segurança de Barragens – PNSB, e 2.336 não são submetidas à PNSB. As demais, que totalizam 61% das barragens cadastradas, não possuem informações suficientes para definir se a barragem é ou não submetida à PNSB, fato preocupante, que persiste ano após ano (ANA, 2020).

Na última década o Brasil foi marcado por grandes desastres envolvendo barragens. O rompimento da Barragem de Fundão, em Mariana ocorrido 2015, lançou aproximadamente no ambiente 35 milhões de  $m^3$  de rejeitos de mineração de ferro, onde cerca de 45% dos rejeitos contaminaram o rio Doce em direção ao mar, comprometendo 663,2  $km$  do rio Doce nos estados de Minas Gerais e Espírito Santo e causando impactos sobre o estuário e região costeira sobre influência do rio (DIAS *et al.*, 2018). Em janeiro de 2019, ocorreu um dos desastres mais graves envolvendo barragens de mineração, devido ao rompimento da Barragem 1 da mina Córrego do Feijão, foram lançados 13 milhões de  $m^3$  de rejeitos de mineração no ecossistema acarretando inúmeros impactos ambientais e irreparáveis perdas humanas (FREITAS *et al.*, 2019).

A Lei de nº 6938/81 institui a Política Nacional do Meio Ambiente, foi criada para garantir a preservação, conservação e uso consciente dos recursos naturais, desta forma, utiliza o licenciamento ambiental como instrumento de controle para impactos e desastres ambientais antes da instalação, durante e na operação de qualquer empreendimento.

Mesmo com a rígida legislação e fiscalização os incidentes com barramentos continuam acontecendo. A onda decorrente de uma quebra de barragem pode causar desastre de inundação catastrófica na jusante do rompimento devido sua grande velocidade, a previsão precisa das características da onda como a propagação, velocidade, profundidade e tempo de chegada, possuem grande importância para a evacuação de emergência (YANG *et al.*, 2018). Neste contexto, a aplicação de conhecimentos em Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) torna-se útil para estimar as áreas de risco à jusante de uma barragem, sendo possível a aplicação de tais ferramentas com intuito de atenuar possíveis catástrofes.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo Geral

Realizar a modelagem numérica do rompimento de barragem utilizando o método das características aplicado às equações de Saint-Venant e comparar os resultados com o software ANSYS que resolve as equações de Reynolds-Averaged Navier-Stokes pelo método dos volumes finitos.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

- Resolver as Equações de Saint-Venant em 1-D via método das características aplicando as condições iniciais e de contorno para o problema do rompimento de uma barragem;
- Elaborar um algoritmo no MATLAB para a solução numérica do problema e compará-lo com o ANSYS;
- Atestar a eficiência do método das características para esse tipo de problema.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

Os impactos sócio-ambientais decorrentes de um rompimento de barragem podem atingir proporções gigantescas, devido ao volume retido a montante do maciço e como a dinâmica da massa líquida irá se comportar após seu rompimento, podendo causar uma série de danos a sua jusante.

A utilização de um modelo numérico para rompimento de barragens pode ser de grande valia no aspecto de impactos sócio-ambientais pois, pode-se descrever como será o comportamento da onda decorrente do colapso do barramento, desta forma, adotar medidas de prevenção à catástrofes e emergências para minimizar seus eventuais danos.

Destaca-se o quão importante pode ser uma simulação de rompimento de barragem e principalmente a aplicação de um modelo que seja eficiente e computacionalmente barato, tendo em vista que modelos de CFD para casos reais podem ser computacionalmente muito caros. Desta forma o *script* produzido nessa monografia caso seja suficiente, poderá ser utilizado em problemas reais, podendo compor parte da avaliação de impactos ambientais no licenciamento de novas barragens.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

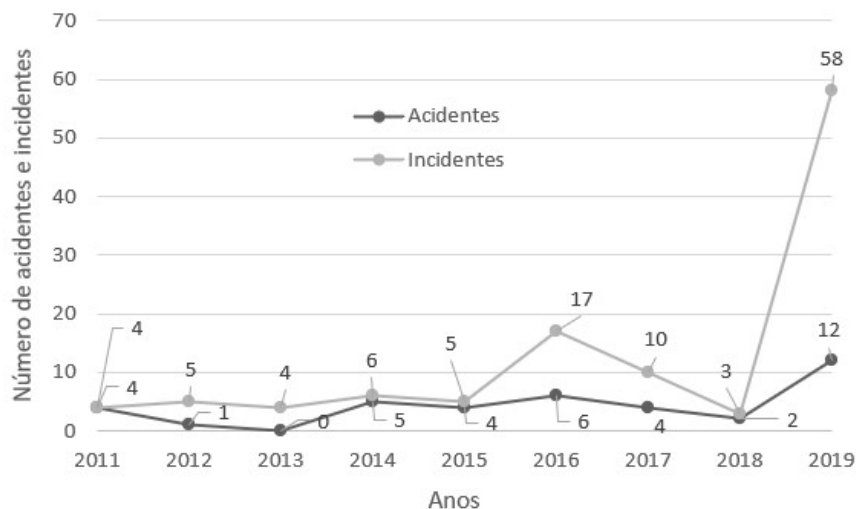
### 2.1 ROMPIMENTO DE BARRAGENS

De acordo com Kumar *et al.* (2017) através do aumento gradativo do assoreamento em barragens ao longo do tempo vêm causando redução na vida útil desses reservatórios, consequentemente na sua capacidade de armazenamento e em períodos de cheia a capacidade de atenuar a entrada excedente de água está reduzida levando ao cenário de rompimento da mesma.

O Rompimento da barragem de Fundão localizada em Mariana-MG, acarretou na contaminação por rejeitos de mineração de inúmeros rios e áreas de preservação permanente no estado de Minas Gerais até o litoral capixaba, juntamente com perdas materiais, humanas e econômicas, devido a descaracterização da água e invalidando seu uso (LOPES, 2016).

Em seu último relatório anual sobre segurança de barragens a Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico (ANA, 2020), apontou que para o ano 2019 foram reportados 12 acidentes e 58 incidentes (Figura 1) com barragens, destacando-se na série compreendida entre os anos 2011 a 2019, a maioria dos acidentes ocorreram em pequenas barragens durante eventos de cheias, o maiores impactos ocorreram em grandes barragens de rejeitos.

**Figura 1 – Série histórica de incidentes e acidentes envolvendo barragens no Brasil.**



Fonte: Adaptado de ANA (2020).

Brasil (2005), destaca aspectos que possuem grandes influências para os estudos de ruptura de barragens em seguida recomendações:

- Acréscimo do volume de água acarretando enchentes que ultrapassam as previstas no projeto, problemas com as estruturas hidráulicas para controle de vazão ou falhas em sistemas eletromecânicos de operação, obstrução nos sistemas de descarga ou assoreamento a montante da barragem;

- O estudo da dinâmica da massa líquida oriunda da ruptura e a delimitação das áreas inundáveis a jusante da barragem.

## 2.2 MODELAGEM DE FLUXO PARA ROMPIMENTO DE BARRAGEM

O problema de fluxo oriundo do rompimento de uma barragem possui solução analítica proposta por Stoker (1957), a solução pode ser utilizada para um reservatório seguido por um canal seco ou preenchido considerando a vazão constante, onde  $d_0$  é a profundidade inicial e  $L$  o comprimento, foram utilizadas as hipóteses de pressão hidrostática, desconsideração do atrito superficial, velocidade uniforme através da profundidade, assim o perfil de elevação da onda em função de  $(x,t)$  pode ser expresso como:

$$\begin{cases} d(x,t) = d_0, & \text{para, } x \leq L - t \\ x(t) = [2(gd_0)^{1/2} - 3(gd(x,t))^{1/2}]t, & \text{para, } x > L - t, \end{cases} \quad (1)$$

sendo  $d(x,t)$  é a elevação da superfície da água na posição  $x(t)$ .

A solução de Stoker foi extremamente útil para calibrar e validar diversos métodos numéricos que realizam a modelagem do problema. Fennema e Chaudhry (1987) modelaram o rompimento de uma barragem com um reservatório de altura  $h_1$  seguido de um canal largo, retangular e sem atrito de altura  $h_0$ , para tal utilizaram o método das diferenças finitas com os esquemas de Gabutti (explícito) e Beam e Warming (implícito) (os quais foram comparados com a solução de Stoker), que dividem o vetor de fluxo em partes positiva e negativa ambas correspondendo a uma direção característica para as equações de Saint-Venant (ESV), sendo  $\lambda^+ = u + c$ ,  $\lambda^- = u - c$  e observaram que quando a proporção de  $h_0/h_1$  aumenta o fluxo a jusante da barragem pode torna-se supercrítico.

Almeida e Franco (1994), compararam resultados experimentais de pequena escala ( $h_1 = 0.3m$  e  $h_0$  variando de  $0.2m$ ,  $0.15m$  e  $0.1m$ ) com os resultados obtidos pelas equações de Serre e Saint-Venant para o problema de rompimento de barragem, e verificaram que para diferentes razões de  $h_0/h_1$  diferentes tipos de onda são formados e para o instante  $t = 3s$  a uma distância de  $6m$  do barramento chegaram as seguintes conclusões:

- Para  $h_0/h_1$  maior que 0.5 (comportamento de salto ondular estável); os esquemas baseados nas equações de Saint-Venant não são capazes de avaliar a profundidade máxima da água a jusante;
- Para  $h_0/h_1$  menor de 0.5 as equações de Saint-Venant produzem resultados mais realistas (para uma razão igual a 0.333 a profundidade máxima da água medida perto da sonda 3 foi de 0.18 m);
- Para  $h_0/h_1$  igual a 0.5, as equações Saint-Venant não podem modelar corretamente o

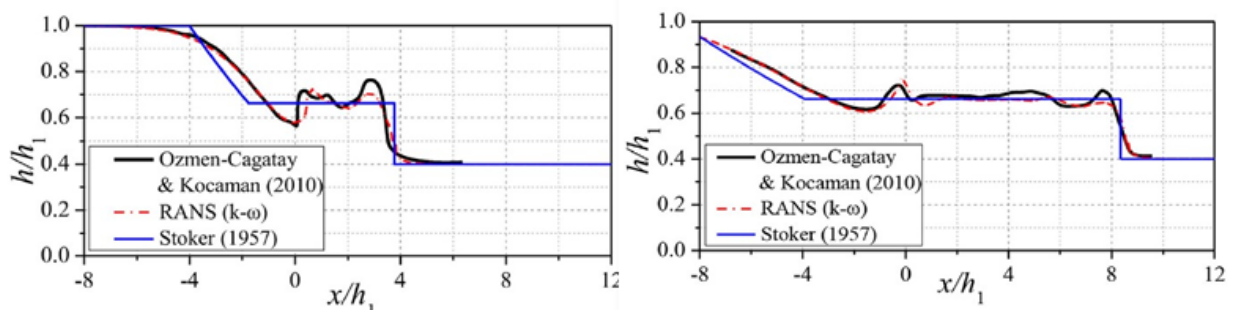
salto ondular instável (quebra).

Garcia-Navarro, Fras e Villanueva (1999) ressaltam que as equações de águas rasas utilizadas para fluxos subcríticos podem ser resolvidas por inúmeras técnicas, porém, tradicionalmente é difícil ter um único método capaz de reproduzir automaticamente qualquer situação geral.

Como apresentado por Seyedashraf, Mehrabi e Akhtari (2018), engenheiros desenvolveram inúmeros modelos numéricos para o problema de rompimento de barragem através das equações de águas rasas, (tais como métodos das diferenças finitas avançadas (FDMs), método dos volumes finitos (FVMs), método dos elementos finitos (FEMs) e métodos Lagrangianos) com inúmeras abordagens que visam aproximar o modelo para um caso real, conseqüentemente a redução dos erros, o que torna esses métodos computacionalmente caros.

Ozmen-Cagatay e Kocaman (2010), realizaram experimentos físicos de rompimento de barragem para canal de comprimento  $L = 8.9m$  de com leito seco a jusante ( $h_0 = 0$ ) e leito preenchido com  $h_1 = 0.25m$  fixo e ( $h_0/h_1$ ) variando de 0.1 e 0.4, comparando com a solução de Stoker (1957) para validar o modelo numérico de software comercial FLOW-3D que resolveu as equações de RANS com modelo de turbulência  $k - \omega$  com uma malha ortogonal de comprimento de elemento  $0.005m$  composta por 142400 elementos, o resultados foram satisfatórios (Figura 2).

**Figura 2 – Alturas: Experimental, numérica e analítica. Em  $t = 4.9(s)$  e  $8.1(s)$  respectivamente.**



Fonte: Yang *et al.* (2018).

### 2.3 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

As Equações de Navier-Stokes (ENS), leva o nome dos dois cientistas que propuseram o modelo. Em 1822 Navier obteve as equações através de um modelo molecular, anos mais tarde em 1845, Stokes obteve as equações de forma genérica baseando na hipótese do contínuo que considera que a massa de fluido como contínua.

A dedução das ENS nessa monografia foi realizada a partir das equações de Euler para fluidos com apresentado em Batchelor (2000) e Chorin e Marsden (1990).

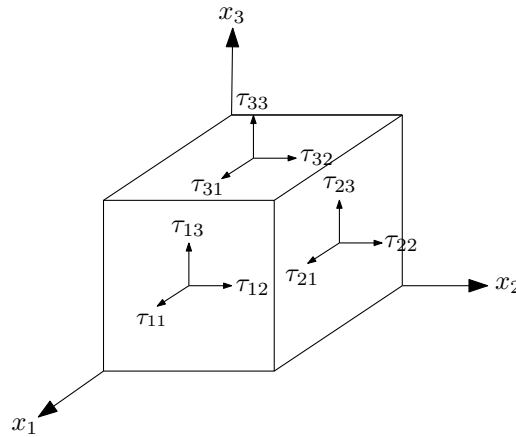
Como este estudo aborda o escoamento incompressível, descartou-se a dedução da Lei de conservação de energia.



### 2.3.1 Esforços sobre um elemento de fluido

Inicialmente isolando um elemento cúbico de fluido, desta forma é possível saber os esforços que atuam sobre o fluido. Sendo os eixos ortonormais  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  onde o vértice dos lados  $x_1$  e  $x_2$  está centrado na origem como exemplificado na (Figura 3).

**Figura 3 – Esforços que atuam sobre um elemento de fluido.**



**Fonte: Autoria própria.**

Considerando que o fluido está em repouso e por simetria as tensões exercidas no elemento cúbico (Figura 3) se anulam devido ao equilíbrio do momento angular onde o tensor de Tensões  $T$  pode ser escrito como,

$$T = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

para  $\tau_{ij}$ , onde  $i = j$  o esforço é representado pela tensão normal  $\sigma_{ij}$  atuando nas faces, e os demais elementos representam as tensões de cisalhamento. Sendo a matriz  $T$  simétrica onde  $M^{-1}TM = D$ , diagonalizável possuindo autovalores reais, os elementos da diagonal principal são as tensões principais, e para um fluido em repouso as tensões de cisalhamento são iguais a zero restando apenas as forças de compressão por unidade de área atuando no elemento fluido (BATCHELOR, 2000). Portanto se  $i = j$  a matriz pode ser reescrita como,

$$M^{-1}TM = \begin{bmatrix} \sigma_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ii} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$\tau_{ii}$  pode ser escrito como  $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$ , sendo  $P$  a pressão e  $\delta_{ij}$  a função delta de Kronecker onde  $\delta_{ij} = 1$  para  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ .

### 2.3.2 Equações de movimento

Considerando um volume de controle elementar  $W$ , ou seja, uma região fixa sem alteração da sua forma geométrica, onde  $\mathbf{u}$  representa a velocidade que realiza o transporte do fluido através de  $W$ . Em um determinado instante  $t$ ,  $\mathbf{u}$  é  $u_1(x_1, t)$ ,  $u_2(x_2, t)$  e  $u_3(x_3, t)$ . No instante seguinte  $t + dt$ ,  $\mathbf{u}$  é  $u_1(x_1, t + dt)$ ,  $u_2(x_2, t + dt)$  e  $u_3(x_3, t + dt)$ .

Ao considerar um domínio material  $W_t$  que delimita certa quantidade de partículas, essas partículas variam suas posições da seguinte forma,  $\mathbf{x}(t) = a$  em um instante seguinte é  $\mathbf{x}(t + dt; a)$ . Desta forma o vetor de posição  $\mathbf{x}$  é

$$\mathbf{x}(t; a) = \begin{bmatrix} x_1(t; a) \\ x_2(t; a) \\ x_3(t; a) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

e a velocidade pode ser expressar como a primeira derivada de  $\mathbf{x}$  em relação a  $t$ ,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t; a), t), \quad (5)$$

consequentemente a segunda derivada corresponde a aceleração,

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt}, \quad (6)$$

onde a Equação (6) pode ser escrita como:

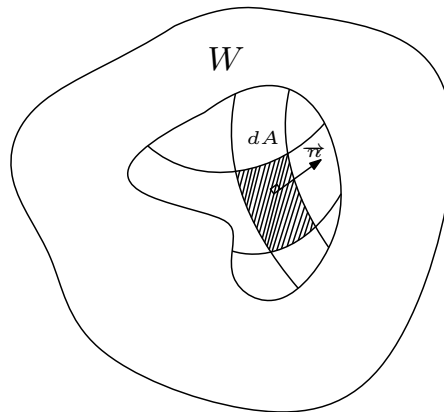
$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \quad (7)$$

sendo a Equação (7) a derivada material de  $\mathbf{u}$  onde,  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  é o divergente da velocidade.

### 2.3.3 Equação do balanço de massa

Segundo Chorin e Marsden (1990), para a derivação das equações é necessário considerar que as variáveis como  $\mathbf{u}$ ,  $\rho$  dentre outras a serem citadas posteriormente sejam consideradas suaves para que seja possível a aplicação das operações padrões de cálculo. Seja  $m$  a massa que compõem a região de fluido suave e arbitrária  $W$ , que representa um volume de controle elementar (Figura 4) no tempo  $t$ .

Figura 4 – Volume de controle elementar.



Fonte: Autoria própria.

A variável  $m$  pode ser expressa como,

$$m(W,t) = \int \rho(\mathbf{x},t) dV, \quad (8)$$

como a densidade  $\rho(\mathbf{x},t)$  está sendo integrada sobre um volume fixo de controle a taxa de variação da massa por unidade de tempo é expressa por

$$\frac{dm(W,t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_W \rho(\mathbf{x},t) dV, \quad (9)$$

ou então,

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho(\mathbf{x},t) dV = - \int_{\partial W} \rho \mathbf{u} \cdot \vec{n} dA, \quad (10)$$

a equação Equação (10), mostra que a variação da massa está equilibrada com trânsito de fluido ou saída de fluido (o que justifica o sinal negativo da integral a direita da equação),  $\rho \mathbf{u}$  através de  $dA$  integrado na fronteira  $\partial W$  sendo  $\mathbf{u}$  o vetor velocidade e  $\vec{n}$  é o vetor normal ao diferencial de área  $dA$ . Pelo teorema da divergência têm-se que,

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_W \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV \quad (11)$$

subtraindo  $-\int_W \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV$  da Equação (10),

$$\int_W \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0, \quad (12)$$

a Equação (12) corresponde a equação de conservação de massa em sua forma integral e para que ela seja igual a zero e que seu integrando seja igual a 0, caso contrário não haveria um

volume de controle, desta forma,

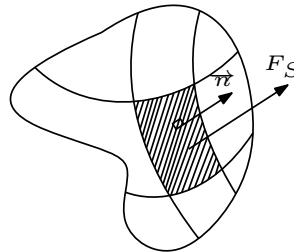
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (13)$$

sendo a Equação (13) representante da conservação ou balanço de massa do sistema.

### 2.3.4 Equação de conservação de quantidade de movimento

Para completar o sistema de EDPs levando em conta um fluido ideal, têm-se pela segunda Lei de Newton a força de superfície  $F_S$  atuando em um elemento de área  $dA$ , representado na (Figura 5) pode ser escrita como,

**Figura 5 – Força exercida sobre um elemento de área.**



**Fonte: Autoria própria.**

$$F_S = - \int_{\partial W} P(\mathbf{x}, t) \vec{n} dA, \quad (14)$$

se  $\mathbf{e}$  é um vetor qualquer fixado no espaço, o teorema da divergência diz que:

$$\mathbf{e} \cdot F_S = - \int_{\partial W} P \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} dA = - \int_W \nabla \cdot (P \mathbf{e}) dV = - \int_W (\nabla P) \cdot \mathbf{e} dV, \quad (15)$$

então,

$$F_S = - \int_W \nabla P dV, \quad (16)$$

onde  $\nabla P$  é o gradiente da pressão.

Seja  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  uma força externa por unidade de massa que está em função da gravidade, agindo sobre a região  $W$  onde,

$$\mathbf{B} = \int_W \rho \mathbf{b} dV \quad (17)$$

desta forma,  $\mathbf{B}$  é a representação do peso do fluido contido na região  $W$ . Portanto para qualquer

parte de um fluido material a força por unidade de volume =  $-\nabla P + \rho \mathbf{b}$ , de acordo com Chorin e Marsden (1990), pela segunda Lei de Newton expressa a forma diferencial da lei de balanço de movimento,

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \rho \mathbf{b}, \quad (18)$$

sendo a equação de quantidade de movimento por unidade de volume em sua forma diferencial.

Aplicando a derivada material têm-se,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nabla P + \rho \mathbf{b} \quad (19)$$

utilizando a Equação (13), aplicando a regra do produto na Equação (19)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})\mathbf{u} - \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nabla P + \rho \mathbf{b}, \quad (20)$$

sendo  $\mathbf{e}$  um vetor qualquer fixo no espaço,

$$\mathbf{e} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})\mathbf{u} \cdot \mathbf{e} - \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \cdot \mathbf{e} - \nabla P \cdot \mathbf{e} + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} \quad (21)$$

$$\mathbf{e} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) = -\nabla(P \cdot \mathbf{e} + \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})) + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}.$$

Portanto, se  $W$  é um volume fixo no espaço, a taxa de mudança de momento na direção  $\mathbf{e}$  em  $W$  é pelo teorema da divergência,

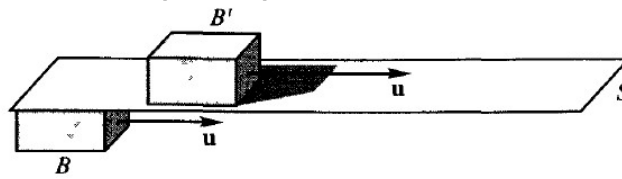
$$\mathbf{e} \cdot \frac{d}{dt} \int_W (\rho \mathbf{u}) dV = - \int_{\partial W} (P \cdot \mathbf{e} + \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})) \cdot \vec{n} dA + \int_W \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} dV, \quad (22)$$

a equação de balanço de quantidade de movimento de Euler em sua forma integral torna-se,

$$\frac{d}{dt} \int_W (\rho \mathbf{u}) dV = - \int_{\partial W} (P \mathbf{n} + \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \vec{n})) dA + \int_W \rho \mathbf{b} dV. \quad (23)$$

A Equação (18) é equação de quantidade de movimento para as equações de Euler, que desconsideram os esforços por cisalhamento. Para as ENS considera-se que o campo de velocidades  $\mathbf{u}$  é paralelo a uma superfície  $S$  em que todos os esforços são normais a  $S$ , e não ocorrerá transferência de momento entre volumes de fluidos, onde as moléculas mais rápidas  $B'$  difundem-se em  $S$ , impulsionando as moléculas mais lentas  $B$  (Figura 6).

Figura 6 – Moléculas mais rápidas B' podem se difundir através de S e impulsionar B.



Fonte: Chorin e Marsden (1990).

A Equação (18), considera apenas os esforços normais no fluido como mostra a Equação (3), para as ENS considera-se o tensor de tensões  $T$  da Equação (2), onde os elementos da diagonal principal são as componentes da pressão. Aplicando o teorema do transporte têm-se,

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \mathbf{u} dV = \int_W \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial W} T \mathbf{n} dA. \quad (24)$$

Considerando um fluido viscoso, a forma diferencial da lei de quantidade de movimento fica:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \rho \mathbf{b} + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (25)$$

onde o coeficiente  $\mu$  é a viscosidade e o termo  $\Delta \mathbf{u}$  é o Laplaciano da velocidade,

$$\Delta \mathbf{u} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \mathbf{u}. \quad (26)$$

As ENS para um escoamento incompressível podem ser descritas como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \rho \mathbf{b} + \mu \Delta \mathbf{u}, \end{array} \right. \quad (27)$$

tomando  $\rho = \rho_0$  sendo constante, pois o escoamento é incompressível têm-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{\nabla P}{\rho_0} + \mathbf{b} + \nu \Delta \mathbf{u}, \end{array} \right. \quad (28)$$

onde  $\nu$  é a viscosidade dinâmica.

## 2.4 EQUAÇÕES DE REYNOLDS-AVAREGED NAVIER-STOKES

As equações de RANS para um fluido incompressível, ou seja, um sistema composto pela conservação de massa e equações de conservação de momento, podem ser expressas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i A_i} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{V_F} u_j A_j = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + G_i + f_i \end{cases} \quad (29)$$

sendo  $i = 1,2,3$  e  $x_i$  representa as coordenadas  $x,y,z$  respectivamente,  $u_i$  é a componente de velocidade,  $A_i$  é a fração de área aberta ao fluxo,  $G_i$  é a aceleração,  $t$  é o tempo,  $V_F$  é a fração de volume aberto ao fluxo,  $\rho$  é a densidade do fluido,  $p$  é a pressão, e  $f_i$  representa a aceleração viscosa onde,

$$f_i = \frac{1}{V_F} \left[ \frac{\tau_{b,i}}{\rho} - \frac{\partial}{\partial x_j} (A_j S_{ij}) \right],$$

$\tau_{b,i}$  é a tensão de cisalhamento na parede,  $S_{ij} = -(\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$ , representa o tensor de taxa de deformação,  $\mu$  a viscosidade cinemática,  $\mu_T$  representa viscosidade turbulenta cinemática, que pode ser calculada a partir de um modelo de turbulência (YANG *et al.*, 2018).

## 2.5 EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT 1-D

### 2.5.1 Equação de conservação de massa em uma dimensão

As equações de Saint-Venant também conhecidas como as equações de águas rasas, compõe o sistema de duas equações diferenciais parciais, conhecidas por equação de conservação de massa e a equação de quantidade de movimento. A obtenção da equação de conservação de massa em 1-D pode ser alcançada realizando algumas simplificações na Equação (10), considerando V.C um volume de controle fixo, S.C a superfície de controle por onde ocorre o trânsito das partículas do fluido que  $\rho$  é constante, e a velocidade  $\mathbf{u} = \vec{V}$ , sendo  $\vec{V} = U(x,t)$ , onde a taxa de variação de massa é nula e representada por,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C} \rho dV - \int_{S.C} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0. \quad (30)$$

A Equação (30) representa a equação de conservação de massa ou equação da continuidade em sua forma integral, o primeiro termo a esquerda representa a variação de massa em função do tempo no volume de controle, o termo do lado direito que representa o trânsito das

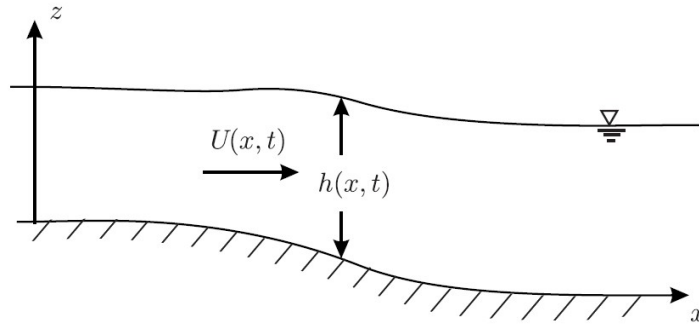
partículas através da superfície de controle, se o produto  $\vec{V} \cdot \vec{n} > 0$ , significa que as partículas estão saindo do volume de controle pela fronteira, caso contrário ocorre incremento de massa dentro do mesmo.

A premissa básica para as equações de Saint-Venant é considerar que a pressão tem variação hidrostática na vertical,

$$P = \rho gh \quad , \quad (31)$$

$h$  representa a profundidade ou a altura da lâmina d'água,  $\rho$  é a densidade e  $g$  a aceleração da gravidade. Um escoamento representado pela (Figura 7), tem como variáveis dependentes  $U$  e  $h$ , em função das variáveis independentes  $x$  representando a distância longitudinal e  $t$  o tempo, despreza a carga cinética da pressão.

**Figura 7 – Escoamento em 1-D.**



**Fonte: Lobeiro (2012).**

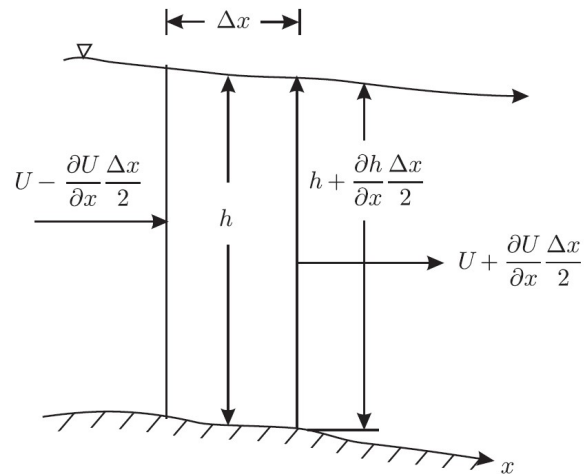
Após estabelecidas as premissas básicas, deseja-se obter a equação da continuidade e sua forma diferencial, para tal objetivo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C} \rho dV + \int_{S.C} \rho U \cdot \vec{n} dA &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C} dV + \int_{S.C} U \cdot \vec{n} dA \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (A \Delta x) + \int_{S.C} U \cdot \vec{n} dA &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (A \Delta x) + U_2 A_2 - U_1 A_1 &= 0, \end{aligned} \quad (32)$$

para se obter a velocidade média e a área aplica-se uma expansão em Série de Taylor, baseada no centro do elemento (LOBEIRO, 2012), conforme apresentado na (Figura 8),



Figura 8 – Expansão em Série de Taylor para as variáveis  $U$  e  $h$ .



Fonte: Lobeiro (2012).

$$U_1 = U - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}, \quad (33)$$

$$U_2 = U + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}, \quad (34)$$

$$A_1 = A - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}, \quad (35)$$

$$A_2 = A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}, \quad (36)$$

a partir de Equações (33), (34), (35) e (36),

$$U_2 A_2 - U_1 A_1 = \left( U + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) - \left( U - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left( A - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \quad (37)$$

$$U_2 A_2 - U_1 A_1 = U \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x + A \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x,$$

ao substituir Equação (37) na Equação (32),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(A\Delta x) + U\frac{\partial A}{\partial x}\Delta x + A\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x &= 0 \\ \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + \left( U\frac{\partial A}{\partial x} + A\frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] \Delta x &= 0 \\ \frac{\partial A}{\partial t} + U\frac{\partial A}{\partial x} + A\frac{\partial U}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (38)$$

sabendo que a vazão  $Q = UA$ ,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = U\frac{\partial A}{\partial x} + A\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (39)$$

Conseqüentemente ao substituir a Equação (39) na Equação (38),

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (40)$$

considerando uma calha retangular e a área da seção transversal é  $A = bh$  em que  $b$  é constante,  $\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(bh)$  e  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(bhU)$ , a Equação (40) pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(bh) + \frac{\partial}{\partial x}(bhU) &= 0 \\ b\frac{\partial h}{\partial t} + b\frac{\partial(hU)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hU)}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (41)$$

onde a Equação (41) implica no balanço de massa em uma dimensão.

## 2.5.2 Equação de conservação da quantidade de movimento em uma dimensão

De acordo com o Teorema de Quantidade de Movimento o somatório das forças externas que atuam em um determinado volume de controle (VC) é igual ao fluxo por unidade de tempo da superfície de controle (SC), mais a variação por unidade de tempo da quantidade de movimento da massa fluida no interior de VC, pode ser escrita como:

$$\sum \vec{F}_{x,VC} = \frac{d}{dt} \int_{sis} U \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} U(\rho dV) + \int_{SC} U(\rho \vec{U} \cdot \hat{n} dA) \quad (42)$$

onde o primeiro termo a direita da Equação (42) é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} U \rho dV &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left[ U \int_{VC} dV \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} U \rho dV &= \rho \frac{\partial}{\partial t} (UV) \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} U \rho dV &= \rho \frac{\partial}{\partial t} (UA \Delta x) \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} U \rho dV &= \rho \Delta x \frac{\partial}{\partial t} (Q). \end{aligned} \quad (43)$$

Resolvendo a segunda integral,

$$\begin{aligned} \int_{SC} U \rho U \cdot \vec{n} dA &= \rho (U_2^2 A_2 - U_1^2 A_1) \\ \int_{SC} U \rho U \cdot \vec{n} dA &= \rho \left[ \left( U + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( U + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \\ \int_{SC} U \rho U \cdot \vec{n} dA &= \rho \left[ U^2 + 2U \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \underbrace{\left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{x} \right)^2}_0 \right] \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \\ &\quad - \rho \left[ U^2 - 2U \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \underbrace{\left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{x} \right)^2}_0 \right] \left( A - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \\ \int_{SC} U \rho U \cdot \vec{n} dA &= \rho \left( U^2 \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x + 2AU \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x \right). \end{aligned} \quad (44)$$

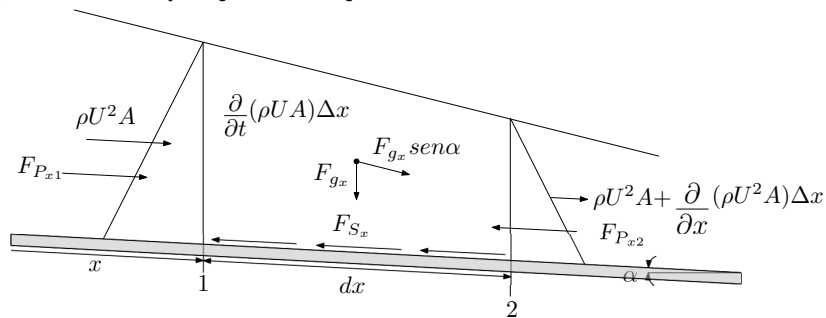
Substituindo em Equação (42),

$$\begin{aligned} \rho \Delta x \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho \left( U^2 \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x + 2AU \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x \right) &= \Sigma \vec{F}_{xVC} \\ \rho \Delta x \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho U^2 \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x + 2AU \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x \right) &= \Sigma \vec{F}_{xVC} \\ \rho \Delta x \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (AU^2) \right) &= \Sigma \vec{F}_{xVC} \\ \rho \Delta x \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (QU) \right) &= \Sigma \vec{F}_{xVC}. \end{aligned} \quad (45)$$

Para a abordagem de escoamento unidimensional somatório das forças atuantes no (VC)  $\Sigma \vec{F}_{x,VC}$ , está na Equação (46) decorrentes da pressão hidrostática do fluido, resistência ao movimento, ou seja, do atrito entre o fluido e o perímetro molhado do canal e por fim a resultante gravitacional sendo a única força de campo considerada atuante no sistema (Figura 9),

$$\Sigma \vec{F}_{x,VC} = F_{P_x} - F_{S_x} + F_{g_x}, \quad (46)$$

Figura 9 – Decomposição das forças atuantes no volume de controle elementar.



Fonte: Adaptado de Porto (2006).

De acordo com Porto (2006),  $F_{P_x}$ ,  $F_{S_x}$  e  $F_{g_x}$ , são expressas por:

$$F_{P_x} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} A \Delta x, \quad (47)$$

$$F_{S_x} = \rho g S_{f_x} A \Delta x, \quad (48)$$

$$F_{g_x} = \rho g S_{0_x} A \Delta x. \quad (49)$$

Sendo  $S_{f_x} = h_l/dx$  que representa a declividade da linha de energia,  $S_{0_x} = tg\alpha$  é a declividade do calha. Substituindo as Equações (47), (48) e (49) em (46) e comparando com a Equação (45)

$$\rho\Delta x \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(QU) \right) = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} A\Delta x - (\rho g S_{f_x} A\Delta x) + \rho g S_{0_x} A\Delta x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(QU) = -g \frac{\partial h}{\partial x} A - S_{f_x} g A + g A S_{0_x} \quad (50)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(QU) + g \frac{\partial h}{\partial x} A = (g A S_{0_x} - S_{f_x} g A),$$

fazendo a derivação implícita de  $\frac{\partial Q}{\partial t}$  e a regra do produto em  $\frac{\partial}{\partial x}(QU)$ , ao substituir na Equação (50) têm-se,

$$A \frac{\partial U}{\partial t} + U A \frac{\partial U}{\partial x} + g A \frac{\partial h}{\partial x} = g A (S_{0_x} - S_{f_x}), \quad (51)$$

como  $A$  é um fator comum em ambos os lados da equação, conclui-se que,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g (S_{0_x} - S_{f_x}), \quad (52)$$

que corresponde a equação de conservação de momento linear em  $x$ . Desta forma, temos o Sistema (53) representando as equações Saint-Venant em uma dimensão:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Uh) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g (S_{0_x} - S_{f_x}), \end{cases} \quad (53)$$

onde,

- $h$ , é a profundidade;
- $U$ , a velocidade;
- $g$ , aceleração da gravidade;
- $S_{0_x}$ , a declividade do canal;
- $S_{f_x}$ , a declividade da linha de energia.

## 2.6 MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

O Método das Características foi desenvolvido por Monge em 1789, sendo um procedimento gráfico para integração de equações diferenciais parciais. O MC, é fundamentado em realizar transformações lineares com intuito de transformar equações diferenciais parciais (EDPs) em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EVANS, 2010), sendo considerado um dos métodos numéricos mais eficientes para a modelagem de um escoamento não permanente, pois está embasado no conceito de propagação de ondas dinâmicas (PORTO, 2006).

Quando se trata de problemas menos complexos como o Sistema (54),

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \text{se } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < t < 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \text{se } 0 < t < 1 \\ u(x,0) = \sin(\pi x), & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \quad (54)$$

onde a EDP é hiperbólica e quase linear sobre um conjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + F(x,t,u,u_x,u_t) = 0$ , sendo  $u(x,t)$  a variável dependente, onde pelo menos um dos coeficientes,  $A$ ,  $B$  e  $C$  é não nulo é possível encontrar a solução analítica, para obtê-la é necessário realizar uma mudança de variáveis para obter a forma canônica da equação,

$$w_{\xi\eta} = 0, \quad (55)$$

integrando-a e utilizando as condições iniciais,

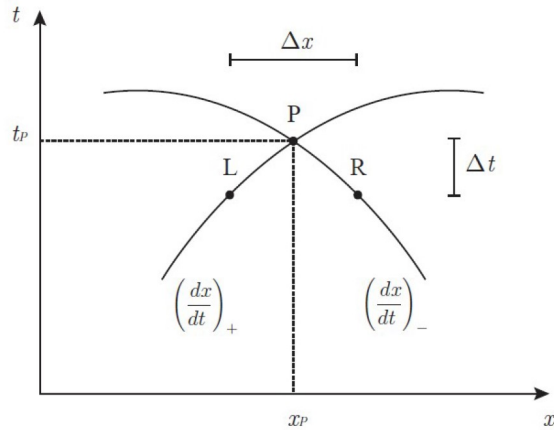
$$w(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}\sin(\pi\xi) + \frac{1}{2}\sin(\pi\eta) + C_1 + C_2 \quad (56)$$

$C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração, ao retornar as variáveis iniciais, aplicando novamente uma condição inicial e uma identidade trigonométrica obtêm-se a solução analítica do sistema (54),

$$u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(\pi t). \quad (57)$$

A solução numérica está pautada em discretizar o domínio da função em malha retangular, utilizando as características da (Figura 10) e as imagens dos pontos iniciais são obtidas aplicando as condições iniciais correspondentes as invariantes de Riemann e para o restante do domínio as imagens são obtidas por meio de spline cúbico natural (LOBEIRO, 2012); (BUENO-NETO *et al.*, 2018).

Figura 10 – Representação curvas característica em  $xt$ .

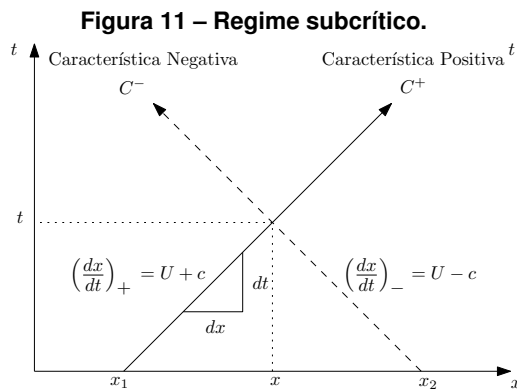


Fonte: Passos (2015).

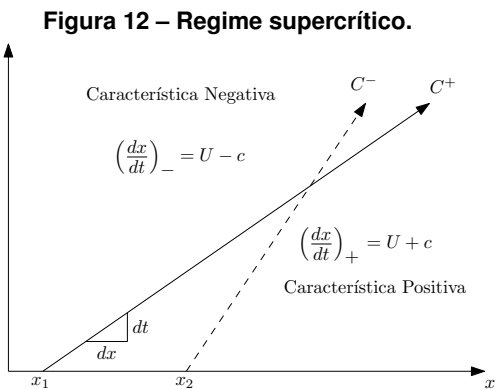
É de extrema importância compreender o conceito de característica, que entende-se basicamente como o caminho por onde se propaga uma grandeza. Considerando uma perturbação no fluxo (profundidade e ou velocidade) que se propaga com velocidade  $U \pm c$  (constante ao longo da característica), essa propagação pode acontecer em duas direções se o fluxo for subcrítico (Figura 11), ou em uma direção a jusante se o fluxo for supercrítico (Figura 12), as propagações ocorrem através das direções características ou simplesmente características (CHAUDHRY, 2008),

$$C_{\pm} = \left( \frac{dx}{dt} \right)_{\pm} \quad (58)$$

segundo Abbott e Basco (1989) ao junta-las com as Invariantes de Riemann,  $J_{\pm}$  ao longo dessas características fornecem a solução técnica chamada método das características .



Fonte: Adaptado de Chanson (2004).



Fonte: Adaptado de Chanson (2004).

As inclinações das curvas características e as Invariantes de Riemann podem ser obtidas por meio de combinação linear aplicada ao Sistema (53) das ESV fazendo,

$$L_0 := h_t + Uh_x + hU_x, \quad (59)$$

e

$$L_1 := U_t + UU_x + gh_x = g(S_{0_x} - S_{f_x}) \quad (60)$$

sendo  $L_0$  atribuído a lei de conservação de massa e  $L_1$  para a lei de conservação de momento, a combinação linear consiste em  $L = L_0 + \lambda_1 L_1$ , onde  $\lambda_1$  é um multiplicador arbitrário que ao assumir diferentes valores reais fornece distintas equações para  $h$  e  $U$ .

Multiplicando  $L_1$  por  $\lambda_1$  é gerado

$$L_0 + \lambda_1 L_1 = \lambda_1 g(S_{0_x} - S_{f_x}), \quad (61)$$

substituindo as Equação (59) e Equação (60) obtêm-se,

$$h_t + (U + \lambda_1 g) + h_x + \lambda_1 U_t + (h + \lambda_1 U)U_x = \lambda_1 g(S_{0_x} - S_{f_x}), \quad (62)$$

reagrupando os termos

$$[h_x(U + \lambda_1 g) + h_t] + \lambda_1 \left[ U_x \left( \frac{h + \lambda_1 U}{\lambda_1} \right) + U_t \right] = \lambda_1 g(S_{0_x} - S_{f_x}). \quad (63)$$

Sabendo que,

$$\begin{aligned} h & : \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ (x,t) & \quad \mapsto \quad h(x,t) \\ & \quad \mathbf{e} \\ U & : \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ (x,t) & \quad \mapsto \quad U(x,t) \end{aligned} \quad (64)$$

por diferencial total

$$\frac{dh}{dt} = h_x \frac{dx}{dt} + h_t \quad \mathbf{e} \quad \frac{dU}{dt} = U_x \frac{dx}{dt} + U_t. \quad (65)$$

Ao comparar as equações Equação (65) com Equação (63), verifica-se que,

$$\frac{dx}{dt} = U + \lambda_1 g \quad \mathbf{e} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{h + \lambda_1 U}{\lambda_1} \quad (66)$$



de tal forma que,

$$\begin{aligned}
 U + \lambda_1 g &= \frac{h + \lambda_1 U}{\lambda_1} \\
 \lambda_1^2 g &= h \\
 \lambda_1 &= \pm \frac{1}{g} \sqrt{\frac{g^2 h}{g}} \\
 \lambda_1 &= \pm \frac{\sqrt{gh}}{g},
 \end{aligned} \tag{67}$$

onde  $\sqrt{gh} = c$ . Como observado na comparação da Equação (65) com Equação (63),  $dh/dt = [h_x(U + \lambda_1 g) + h_t]$  e  $dU/dt = [U_x(h + \lambda_1 U)/\lambda_1 + U_t]$ , desta forma,

$$\begin{aligned}
 \frac{dh}{dt} + \lambda_1 \frac{dU}{dt} &= \lambda_1 g (S_{0_x} - S_{f_x}) \\
 \frac{dh}{dt} + \pm \frac{c}{g} \frac{dU}{dt} &= \pm \left(\frac{c}{g}\right) (S_{0_x} - S_{f_x}) \\
 \frac{d}{dt} \frac{c^2}{g} \pm \frac{c}{g} \frac{dU}{dt} &= \pm c (S_{0_x} - S_{f_x}) \\
 \frac{2c}{g} \frac{dc}{dt} \pm \frac{c}{g} \frac{dU}{dt} &= \lambda_1 g (S_{0_x} - S_{f_x}) \\
 \frac{c}{g} \left[ \frac{d}{dt} (2c) \pm \frac{dU}{dt} \right] &= \pm c (S_{0_x} - S_{f_x}) \\
 \frac{d}{dt} (U \pm 2c) &= g (S_{0_x} - S_{f_x}),
 \end{aligned} \tag{68}$$

sendo,  $\frac{d}{dt} (U \pm 2c) = g (S_{0_x} - S_{f_x})$ , as Invariantes de Riemann  $J_{\pm}$ , como exposto na (Tabela 1).

**Tabela 1 – Inclinações das Características e Invariantes de Riemann na Direção  $x$ .**

	Inclinações das Características	Invariantes de Riemann
	$\frac{dx}{dt} = U + \lambda_1 g$	$\frac{dh}{dt} + \lambda_1 \frac{dU}{dt} = \lambda_1 g (S_{0_x} - S_{f_x})$
$\lambda_1 = +\frac{c}{g}$	$\frac{dx}{dt} = U + c$	$\frac{d}{dt} (U + 2c) = g (S_{0_x} - S_{f_x})$
$\lambda_1 = -\frac{c}{g}$	$\frac{dx}{dt} = U - c$	$\frac{d}{dt} (U - 2c) = g (S_{0_x} - S_{f_x})$

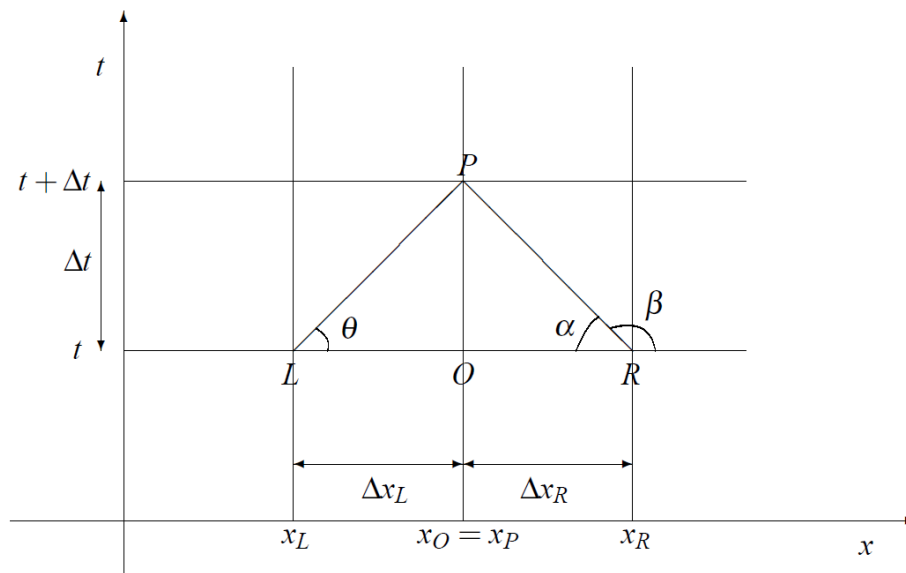
Fonte: Lobeiro (2012).

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS ÀS ESV-1D

Tendo as inclinações das curvas características e as Invariantes de Riemann (Tabela 1), a solução das ESV via MC baseia-se na discretização do domínio em grade retangular (Figura 13), deseja-se encontrar a solução no ponto  $P$  utilizando os pontos  $L$  e  $R$  que representam pontos a esquerda e a direita no domínio com espaçamento  $\Delta x$  interceptarão o ponto desejado após um intervalo  $\Delta t$ .

Figura 13 – Discretização dos pontos no espaço  $xt$ .



Fonte: Chun e Merkley (2008).

Considera-se as características como retas para  $dt$  muito pequeno e, quando a característica passar por determinado ponto ela assumirá as coordenadas do mesmo, ou seja, quando a inclinação passar pelo ponto  $L$  em um determinado  $t$ ,  $dx/dt = U_L + c_L$  de maneira análoga acontece para os demais pontos contidos no domínio.

Desta forma ao avaliar a (Figura 13), têm-se que a característica positiva  $LP$  é  $\tan\theta = \Delta t/\Delta x_L$  ou então,  $\theta = \arctan(\Delta t/\Delta x_L)$

$$\frac{\Delta x_L}{\Delta t} = U_L + c_L, \quad (69)$$

tal que  $\Delta x_L = x_O - x_L$ , ao ser substituído na Equação (69) obtém-se,

$$x_L \approx x_O + (U_L + c_L)\Delta t. \quad (70)$$

Analogamente a característica negativa têm-se,

$$\frac{\Delta x_R}{\Delta t} = U_R + c_R, \quad (71)$$

$$x_R \approx x_O - (U_R - c_R)\Delta t$$

onde,  $\Delta x_R = x_O - x_R$ .

O processo para obter as Invariantes de Riemann é o mesmo das curvas características, utilizando a invariante positiva correspondida pela linha  $LP$  corresponde a

$$\frac{\Delta(U + 2c)}{\Delta t} \approx g(S_{0_x} - S_{f_x})_L, \quad (72)$$

sendo,  $\Delta(U + 2c) = (U_P + 2c_P) - (U_L + 2c_L)$ , ao substituir na Equação (72)

$$(U_P + 2c_P) - (U_L + 2c_L) \approx g(S_{0_x} - S_{f_x})_L \Delta t, \quad (73)$$

de forma análoga Equação (73), para linha  $PR$  têm-se

$$(U_P - 2c_P) - (U_R - 2c_R) \approx g(S_{0_x} - S_{f_x})_R \Delta t. \quad (74)$$

Somando as Equações (73) e (74),

$$U_P \approx \frac{U_L + U_R}{2} + (c_L - c_R) + \frac{g\Delta t}{2} [(S_{0_x} - S_{f_x})_L + (S_{0_x} - S_{f_x})_R], \quad (75)$$

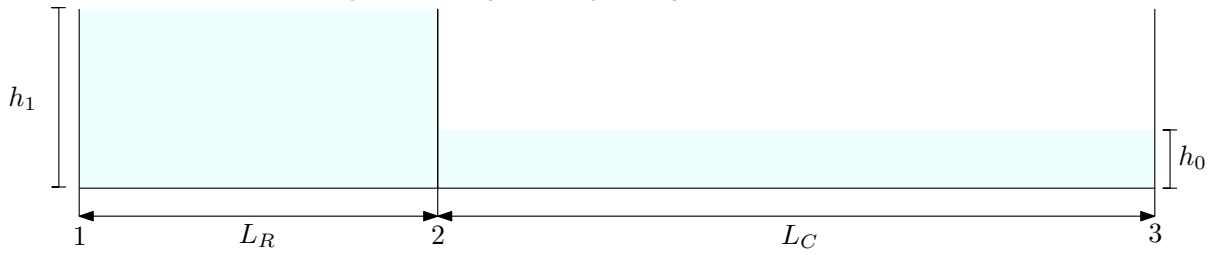
ao subtraí-las,

$$c_P \approx \frac{U_L - U_R}{4} + \frac{(c_L - c_R)}{2} + \frac{g\Delta t}{4} [(S_{0_x} - S_{f_x})_L - (S_{0_x} - S_{f_x})_R]. \quad (76)$$

### 3.1.1 Solução numérica do problema de rompimento de uma barragem hipotética via Método das Características

Considerando o domínio composto por dois subdomínios sendo eles um reservatório que está delimitado pela seção de (1) a (2) com comprimento  $L_R$  e um canal (2) até a seção (3) de comprimento  $L_C$ , como representado na (Figura 14), que no instante inicial  $t = 0$ , toda a massa de água presente no domínio está em repouso, onde o volume contido no reservatório está retido por uma barragem situada na seção (2).

Figura 14 – Representação do problema em  $t = 0$ .



Fonte: Autoria própria.

No seguinte instante  $t > 0$  a barragem situada na seção (2) é removida completamente e o volume contido no reservatório passa a escoar para dentro do canal. Analisando os efeitos da injeção de massa do reservatório para o canal foram separadas três regiões de estudo: Fronteira esquerda situada em (1); Região intermediária e Fronteira direita localizada em (3). Como condições de contorno para o problema supõe-se que nas seções (1) e (3) possui uma parede, desta forma não existe entrada nem saída de água para o domínio, então  $U_P = 0$  para ambas as seções.

As equações para a fronteira esquerda podem ser obtidas analisando a (Figura 13), onde os pontos  $O$  e  $P$  estão situados na seção (1), por esse fato possuímos apenas a característica negativa representada pela linha  $PR$ . Realizando a seguinte aproximação na Equação (71), têm-se,

$$x_R \approx x_O - (U_O - c_O)\Delta t, \quad (77)$$

sabendo-se que não ocorre o fluxo de massa através de (1), então

$$U_P = 0, \quad (78)$$

conhecendo  $U_P$ , deseja-se encontrar  $c_P$ , utilizando a equação Equação (74) correspondente a característica negativa. A declividade da linha de energia pode ser definida como a fórmula de Manning  $S_{f_x} = n^2 U |U| / Rh^{1,333}$ , sendo  $n$  o coeficiente de Manning definido de acordo com o material utilizado calha,  $U$  a velocidade, e  $Rh$  o raio hidráulico. Sabendo que para um canal retangular o raio hidráulico corresponde a  $Rh = bh / (2h + b)$ , isolando  $c_P$ ,

$$c_P \approx \frac{U_P - U_R}{2} + c_R - \frac{g\Delta t}{2} (S_{0_x} - S_{f_x})_{PR}, \quad (79)$$

as variáveis  $U_R$  e  $c_R$  são obtidas por meio de interpolação. Sendo

$$(S_{0_x} - S_{f_x})_{PR} = \left[ S_{0_x} - 0.5 \left( \frac{n^2 U_P |U_P|}{Rh_P^{1,333}} \right) + \frac{n^2 U_R |U_R|}{Rh_R^{1,333}} \right], \quad (80)$$

sendo  $U_P = 0$ , obtêm-se,

$$c_P + \frac{U_R}{2} - c_R + \frac{g\Delta t}{2}(S_{0x} - S_{fx})_{PR} = 0$$

$$c_P = c_R - \frac{U_R}{2} - \frac{g\Delta t}{2} \left[ S_{0x} - 0.5 \left( \frac{n^2 U_P |U_P|}{Rh_P^{1,333}} + \frac{n^2 U_R |U_R|}{Rh_R^{1,333}} \right) \right] \quad (81)$$

$$c_P = c_R - \frac{U_R}{2} - \frac{g\Delta t}{2} \left[ S_{0x} - 0.5 \left( \frac{n^2 U_R |U_R|}{Rh_R^{1,333}} \right) \right]$$

Afim de obter um resultado mais preciso realiza-se um processo de interação onde o novo  $x_R$  é encontrado através da média dos valores obtidos,

$$x_R = x_O - \left( \frac{U_P - c_P}{2} + \frac{U_R - c_R}{2} \right) \Delta t, \quad (82)$$

sendo o critério de parada,  $Erro \leq |c_{P_i} - c_{P_{i+1}}|$ .

Para a região intermediária pode se traçar as características positiva e negativa,  $x_L$  e  $x_R$  podem ser escritas como,

$$x_L \approx x_O - (U_O + c_O)\Delta t \quad (83)$$

e,

$$x_R \approx x_O - (U_O - c_O)\Delta t \quad (84)$$

sendo

$$(S_{0x} - S_{fx})_{LP} = \left[ S_{0x} - 0,5 \left( \frac{n^2 U_L |U_L|}{Rh_L^{1,333}} + \frac{n^2 U_P |U_P|}{Rh_P^{1,333}} \right) \right], \quad (85)$$

analogamente a  $U_R$  e  $c_R$ ,  $U_L$  e  $c_L$  também são obtidas por interpolação. Utilizando a Equação (76),

$$c_P \approx \frac{U_L - U_R}{4} + \frac{c_L + c_R}{2} + \frac{g\Delta t}{4} [(S_{0x} - S_{fx})_{LP} - (S_{0x} - S_{fx})_{PR}]$$

$$c_P \approx \frac{U_L - U_R}{4} + \frac{c_L + c_R}{2} + \frac{g\Delta t}{8} \left( \frac{n^2 U_R |U_R|}{Rh_R^{1,333}} - \frac{n^2 U_L |U_L|}{Rh_L^{1,333}} \right), \quad (86)$$

encontrado  $U_P$  com a Equação (75),

$$U_P \approx \frac{U_L + U_R}{2} + c_L - c_R + \frac{g\Delta t}{2} [(S_{0x} - S_{fx})_{LP} + (S_{0x} - S_{fx})_{PR}] \quad (87)$$

$$U_P \approx \frac{U_L + U_R}{2} + c_L - c_R + \frac{g\Delta t}{2} \left[ 2S_{0x} - 0,5 \left( 2 \frac{n^2 U_P |U_P|}{Rh_P^{1,333}} + \frac{n^2 U_L |U_L|}{Rh_L^{1,333}} + \frac{n^2 U_R |U_R|}{Rh_R^{1,333}} \right) \right],$$

para o processo de interação os novos  $x_L$  e  $x_R$ , são definidos,

$$x_L = x_O - \left( \frac{U_P + c_P}{2} + \frac{U_L + c_L}{2} \right) \Delta t \quad (88)$$

e,

$$x_R = x_O - \left( \frac{U_P - c_P}{2} + \frac{U_R - c_R}{2} \right) \Delta t, \quad (89)$$

convergência foi determinado  $Erro \leq |c_{P_i} - c_{P_{i+1}}|$  e  $Erro \leq |U_{P_i} - U_{P_{i+1}}|$ .

A fronteira direita é a seção a montante do reservatório e o equacionamento dessa seção depende apenas da característica positiva, referente a linha  $LP$  onde  $x_L$ ,

$$x_L \approx x_O - (U_O + c_O)\Delta t \quad (90)$$

a velocidade  $U_P$  é nula na seção (2), portanto  $c_P$  pode ser escrito utilizando a Equação (73),

$$c_P \approx \frac{U_L}{2} + c_L + \frac{g\Delta t}{4} (S_{0x} - S_{fx})_{LP} \quad (91)$$

$$c_P \approx \frac{U_L}{2} + c_L + \frac{g\Delta t}{4} \left( S_{0x} - 0,5 \frac{n^2 U_L |U_L|}{Rh_L^{1,333}} \right),$$

o novo  $x_L$  torna-se,

$$x_L = x_O - \left( \frac{U_P + c_P}{2} + \frac{U_L + c_L}{2} \right) \Delta t, \quad (92)$$

para atender ao critério de convergência estabelecido,  $Erro \leq |c_{P_i} - c_{P_{i+1}}|$ .

A partir do modelagem do problema, foi escrito um algoritmo para realizar a simulação para o rompimento da barragem com o software MATLAB R2021a (Apêndice A), utilizando a licença acadêmica. Para realizar a interpolação linear da variáveis,  $c_L$ ,  $U_L$ ,  $c_R$  e  $U_R$  foi utilizado a função *griddedInterpolant* e a raiz do polinômio  $U_P$  de região intermediária foi obtida pela função *fzero*.

## 3.2 PROBLEMA DE ROMPIMENTO DE BARRAGEM VIA ANSYS

A modelagem do problema elaborada no software ANSYS 2021 R1 com licença acadêmica e constituiu basicamente 5 grandes etapas que serão descritas na subseções a seguir.

### 3.2.1 Escolha do plug-in

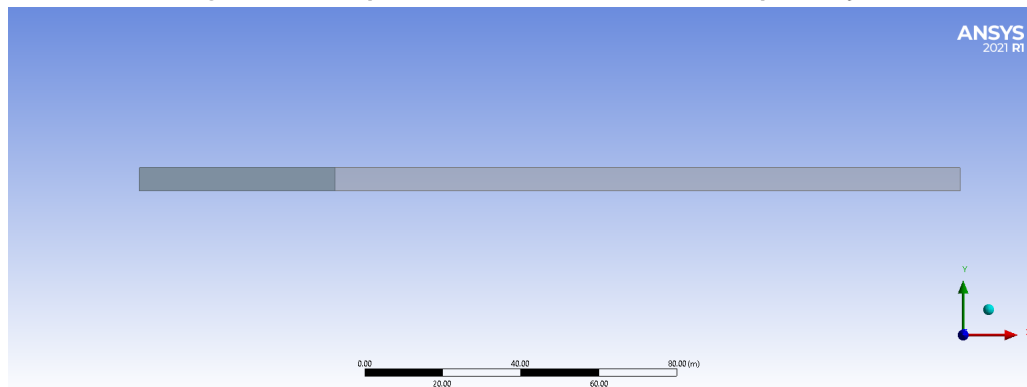
Para o problema abordado foi escolhida a extensão Fluid Flow (CFX). O ANSYS-CFX usa o método dos volumes finitos (VF) baseado em elementos, resolve o conjunto de equações de Navier-Stokes em sua forma conservativa, o sistema das ENS descreve os processos de transferência de massa, momentum e transferência de calor, para a solução dessas equações é aplicado a técnica VF, que consiste em dividir a região de interesse em pequenas sub-regiões, chamadas de volumes de controle, onde as equações são discretizadas e resolvidas iterativamente para cada volume de controle (ANSYS, 2021c).

Caso o escoamento for considerado turbulento, as ENS são modificadas para as equações de Reynolds-Averaged Navier-Stokes, modelos de turbulência baseados nas equações de RANS são conhecidos como modelos estatísticos de turbulência devido ao procedimento de média estatística empregado para obter as equações que reduzem consideravelmente os esforços computacionais (ANSYS, 2021a).

### 3.2.2 Determinação da geometria

Para a criação da geometria dos domínios foi utilizado a ferramenta Design Modeller, onde definiu-se os comprimentos conforme a (Figura 15), para o reservatório  $L_R = 50m$ , e para o canal  $L_C = 160m$ , a área da seção transversal para ambos os domínios foi determinada como retangular e constante ao longo seus comprimentos, sendo  $A_{ST} = bh$ , onde a base é  $b = 1m$  e a altura  $h = 6m$ .

Figura 15 – Perspectiva do canal e reservatório no plano  $xy$ .

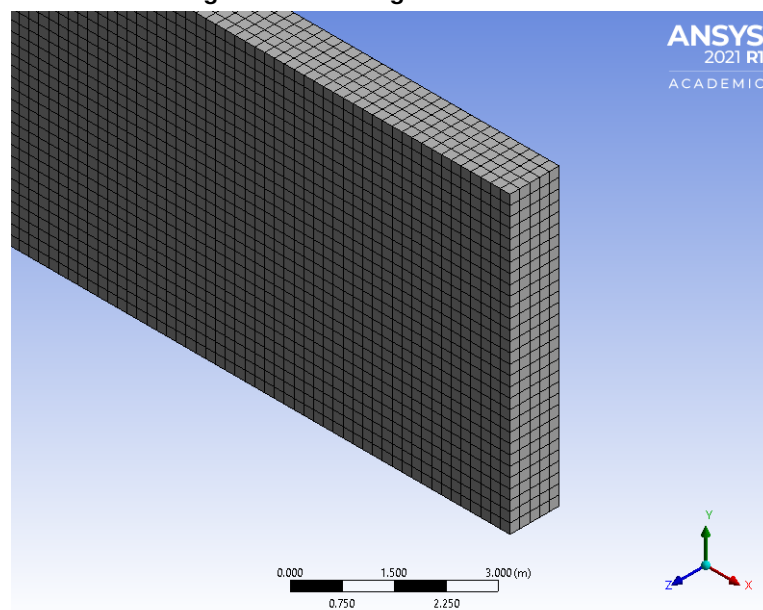


Fonte: Autoria própria.

### 3.2.3 Criação da malha

Nessa etapa determina-se basicamente os domínios, conexões, o tipo de malha e seu refinamento. Com a geometria definida foi gerada uma malha ortogonal (Figura 16), onde a ordem do elemento foi *program controlled*, com elementos de comprimento de  $0.2m$  que ao ser aplicada no domínio totalizou 157500 elementos e 743392 nós. A malha deve ser criada com intuito de chegar a uma boa precisão dos resultados, ela está fortemente vinculada ao passo de tempo a fim de atender o critério de Courant que leva em consideração a velocidade calculada, a variação espacial e temporal.

Figura 16 – Malha gerada no domínio.



Fonte: Autoria própria.

### 3.2.4 Configurações do problema

Após estabelecer a malha foram determinadas as condições de contorno e iniciais para a simulação, onde foram definidos o tipo de escoamento, incremento de tempo e tempo total de simulação, desta forma, foi escolhido o regime transiente, devido a variação da velocidade em relação ao tempo,  $0.001s$  para incremento de tempo para manter a estabilidade da simulação e o tempo total de duração  $15s$ . O modelo de turbulência *Sear Stress Transport Model* (SST) que é baseado no modelo  $k - \omega$  foi escolhido para o problema pois, segundo Yang *et al.* (2018), o modelo  $k - \omega$  possui melhores resultados que os outros modelos de turbulência tradicionais e apresentou bons resultados comparados as dados experimentais. O modelo SST foi desenvolvido para superar as deficiências no  $k - \omega$  (ANSYS, 2021b).

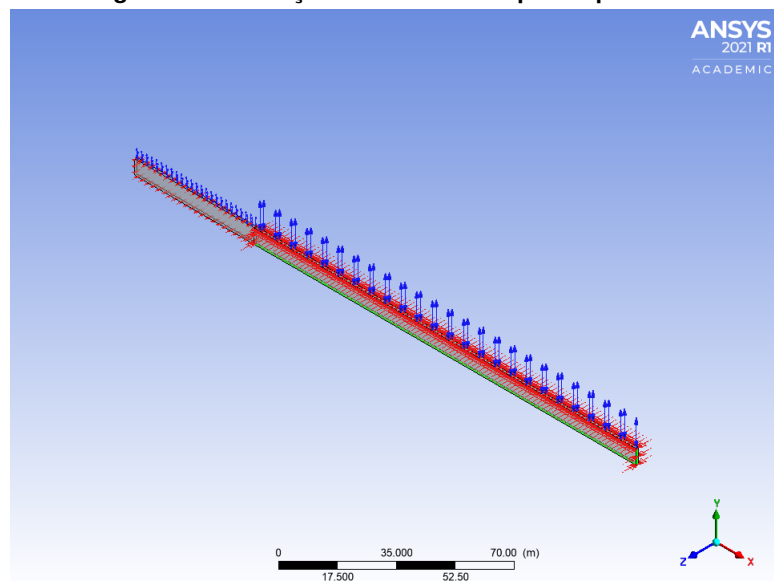
Em relação as condições iniciais, para o preenchimento do canal foi necessário elaborar algumas *expressions* que realizam a separação da água e ar por diferença de densidade, a velocidade inicial de ambos os fluidos foi igual a zero e por fim, a pressão inicial para o canal foi



definida com a *expression* DownPress e para o reservatório foi utilizada a UpPress.

Para as condições de contorno foi definido que não haveria fluxo para dentro do reservatório (entrando a montante) e para fora do canal, sendo assim estabeleceu-se a condição *wall*. A pressão foi definida como *Open and diretional* Press, para os topos do canal e do reservatório, sendo uma das recomendações do próprio ANSYS para simulações com escoamento transiente, para a condição das paredes foi adotada a condição *Simetry* e para o fundo foi atribuída a opção *No slip wall* que considera a velocidade no fundo igual a zero, escoamento isothermal desprezando a variação de temperatura. As condições de contorno do problema podem ser visualizadas na (Figura 17).

Figura 17 – Condições estabelecidas para o problema.



Fonte: Autoria própria.

### 3.2.5 Solução, processamento e execução da simulação

Nessa etapa o componente *Solver* gera os resultados em três etapas: as EDPs são integradas sobre todo volume de controle; em seguida as equações integrais serão convertidas em equações algébricas que compõem um conjunto de termos das equações integrais e por fim as equações algébricas são resolvidas de forma iterativa devido a não linearidade das equações (ANSYS, 2021c).

Uma das características mais importantes do ANSYS-CFX é de utilizar um *Solver* acoplado, no qual todas as equações são resolvidas como um único sistema, esse *Solver* é mais rápido que o tradicional pois, menos iterações são necessárias para obter uma solução de fluxo convergente (ANSYS, 2021c), é possível acompanhar e verificar o andamento da solução e se houver algum erro será destacado na janela do *solution*. O relatório da simulação consta no (Apêndice B).

#### 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

As condições necessárias para a modelagem do problema de quebra de barragem tanto para metodologia no MATLAB e no ANSYS, estão dispostas na (Tabela 2).

**Tabela 2 – Condições do problema de quebra de barragem.**

Condições aplicadas	ESV-MC	RANS-VF
Comprimento do Reservatório	$L_R = 50$	$L_R = 50$
Comprimento do Canal	$L_C = 160$	$L_C = 160$
Profundidade do reservatório	$h_1 = 6m$	$h_1 = 6m$
Profundidade do canal	$h_0 = 3m$	$h_0 = 3m$
Base da calha	$b = 1m$	$b = 1m$
Declividade do problema	$S_{0x} = 0.001m/m$	$S_{0x} = 0.001m/m$
Condições de atrito	Formula de Manning / $n = 0.009$	<i>Simetry</i> (laterais), <i>No Slip Wall</i> (fundo)
Gravidade	$g = 9.81m/s^2$	$g = 9.81m/s^2$
Passo de tempo	$\Delta t = 0.01s$	$dt = 0.001s$
Passo de espaço	$\Delta x = 1m$	$dx = 0.2m$
Tempo total de simulação	$t = 15s$	$t = 15s$

**Fonte: Autoria própria.**

O tempo total para a execução da simulação nessas condições foi de aproximadamente  $15min$ , para a simulação no ANSYS o tempo de execução foi de  $19h, 27min$  e  $\approx 20s$ . Em relação a estabilidade dos métodos, o número de Courant máximo respeitando a condição,  $Cr_{max} = (|U| + c)\Delta t/\Delta x = 0.17$  no MATLAB, para a simulação das RANS via VF foi fornecido pelo solver sendo  $Cr_{max} = 0.15$ , evidenciando que ambos os métodos permaneceram estáveis até o término da simulação.

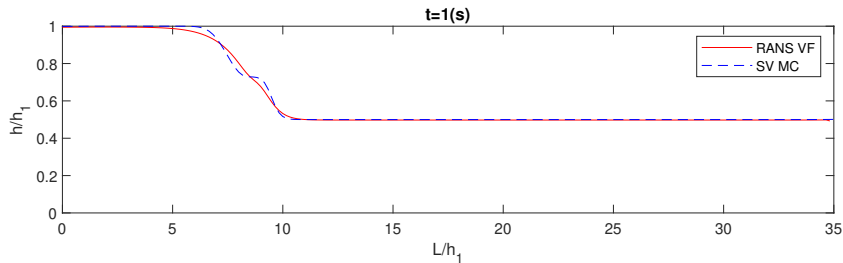
Foram comparados os resultados de profundidade obtidos pelo MC aplicado as ESV, com os resultados do VF aplicado as RANS, constando a diferença máxima entre as alturas para os instantes analisados foi de aproximadamente  $0.4m$  totalizando  $24\%$  de erro no instante  $t = 15s$  ao início do reservatório. Como apresentado por Almeida e Franco (1994), para razão  $h_0/h_1 = 0.5$  as ESV não foram boas para o salto ondular instável comparando com dados experimentais, porém Ozmen-Cagatay e Kocaman (2010) utilizando as equações de RANS e obtiveram bons resultados comparados a dados experimentais em relação ao perfil da onda frontal, é possível considerar que foram obtidos bons resultados ao comparar as profundidades ao longo de  $x$  e  $t$  por ambas as metodologias aplicadas nessa monografia conforme a sequência (Figura 18 até a Figura 25).

Ao observar o comportamento da altura em função do tempo ao longo do canal, percebe-se que as RANS possuem maior oscilação, por outro lado as ESV reduz essa oscilação no perfil da onda como visto em Almeida e Franco (1994) a respeito da onda de quebra. De modo geral a comparação entre as alturas das ESV com as RANS, foi satisfatória, Garcia-Navarro, Fras e Villanueva (1999), destacam que muitos casos podem ser descritos por meio de um modelo unidimensional, seja porque uma resolução mais detalhada é desnecessária ou porque o fluxo é marcadamente 1-D, como o problema estudado.

De acordo com Fennema e Chaudhry (1987), quanto maior a relação  $h_0/h_1$  maior a

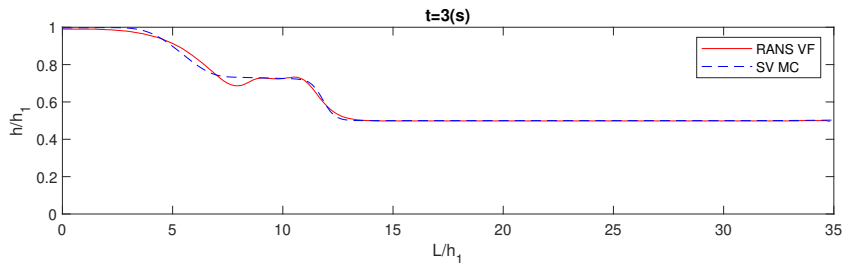
influência a jusante do barramento. No caso de leitos preenchidos a energia cinética de turbulência é gerada principalmente pela quebra das ondas, sendo de maior intensidade nos casos de águas rasas a jusante do que em águas profundas (YANG *et al.*, 2018).

**Figura 18 – Altura x comprimento, para as ESV e RANS em  $t = 1(s)$ .**



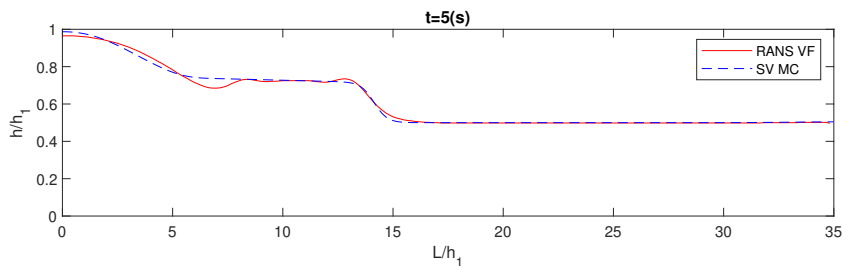
Fonte: Autoria própria.

**Figura 19 – Altura x comprimento, para as ESV e RANS em  $t = 3(s)$ .**



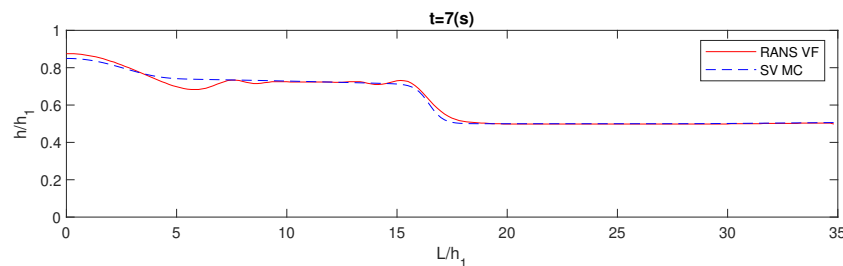
Fonte: Autoria própria.

**Figura 20 – Altura x comprimento, para as ESV e RANS em  $t = 5(s)$ .**



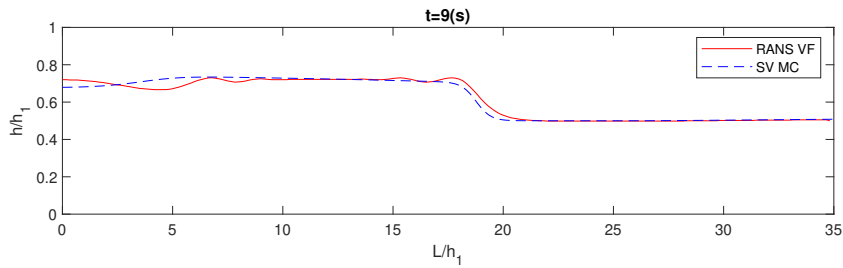
Fonte: Autoria própria.

**Figura 21 – Altura x comprimento, para as ESV e RANS em  $t = 7(s)$ .**



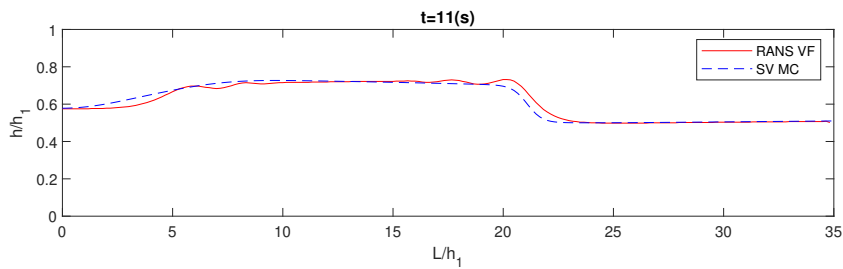
Fonte: Autoria própria.

**Figura 22 – Altura x comprimento, para as ESV e RANS em  $t = 9(s)$ .**



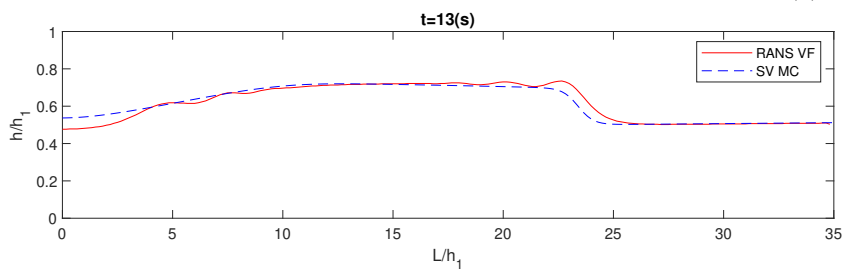
Fonte: Autoria própria.

**Figura 23 – Altura x comprimento, para as ESV e RANS em  $t = 11(s)$ .**



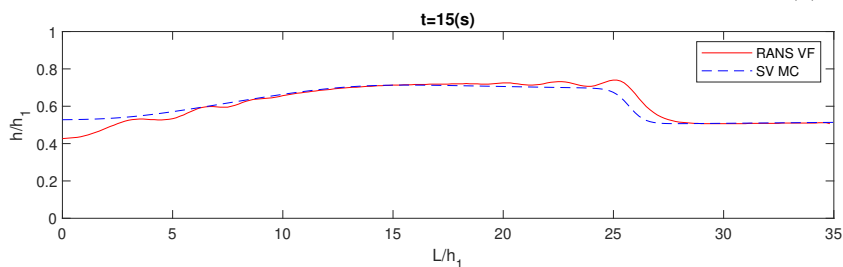
Fonte: Autoria própria.

**Figura 24 – Altura x comprimento, para as ESV e RANS em  $t = 13(s)$ .**



Fonte: Autoria própria.

**Figura 25 – Altura x comprimento, para as ESV e RANS em  $t = 15(s)$ .**



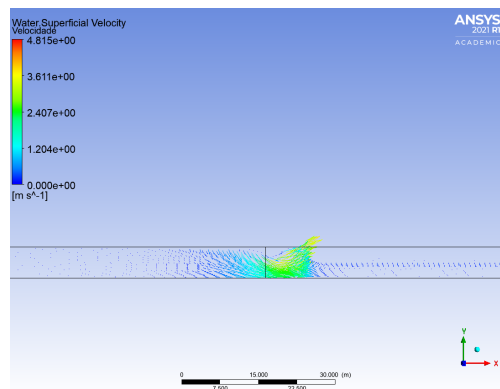
Fonte: Autoria própria.

Foi comparado a velocidade por seção  $U(m/s)$  das ESV com a velocidade média por seção  $\bar{u}(m/s)$  das RANS, conforme a (Tabela 3). Os erros relacionados as velocidades foram muito altos, as ESV consideram a velocidade em apenas em uma direção, diferentemente das RANS onde a velocidade é considerada em 3-D. Yang *et al.* (2018), dizem que após o rompimento tanto a magnitude quanto a direção da velocidade mudam de forma proeminente e a

velocidade vertical e aceleração não podem ser ignoradas. A propagação da onda frontal e as velocidades elementares em  $t = 1s$  como mostra a (Figura 26) e  $t = 3s$  como apresentado na (Figura 27) no plano  $xy$ , onde a componente vertical apresenta a maior contribuição para a velocidade média na seção chegando a  $\approx 3.5m/s$ . Em seguida é possível verificar que sua estabilidade e a velocidade é preponderantemente em  $x$  explícito nas (Figura 28) e (Figura 29).

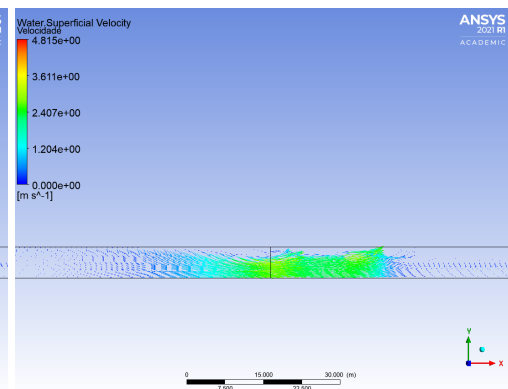
Os erros entre as velocidades não se limitaram a momentos específicos, foi possível verificar que a concentração dos erros mais altos ocorreu  $1s$  após o rompimento, onde as velocidades foram maiores para as RANS em quase todas as seções avaliadas com exceção da seção onde localizava-se a barragem. As ESV tiveram sua progressão mais lenta nos instantes iniciais, porém em quase todos os instantes foram maiores que as RANS. Esses erros de velocidade não tiveram grandes impactos sobre as profundidades tendo em vista a boa margem percentual de erro.

**Figura 26 – Velocidades pontuais da onda frontal no início do canal  $t = 1s$ .**



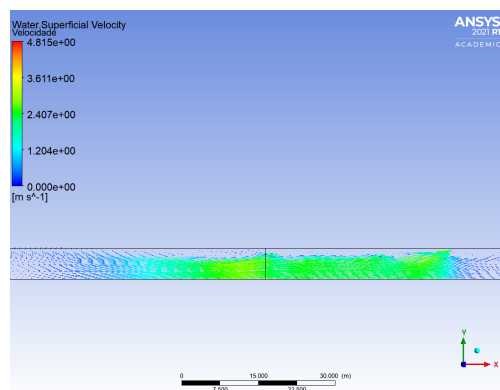
Fonte: Autoria própria.

**Figura 27 – Velocidades da onda frontal no início do canal em  $t = 3s$ .**



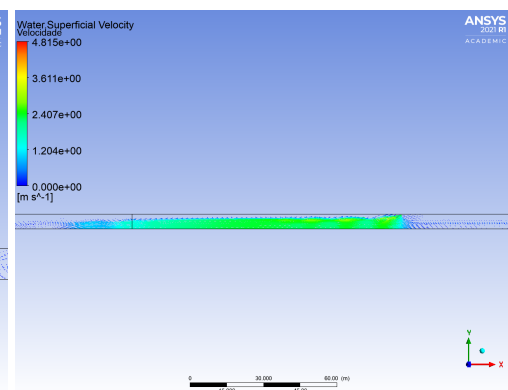
Fonte: Autoria própria.

**Figura 28 – Velocidades pontuais da onda frontal no canal em  $t = 5s$ .**



Fonte: Autoria própria.

**Figura 29 – Velocidades pontuais para todo o domínio  $t = 15s$ .**



Fonte: Autoria própria.

**Tabela 3 – Comparação das velocidades entre as ESV e a ENS.**

		$t = 1(s)$			$t = 3(s)$		
		<b>ESV</b>	<b>RANS</b>		<b>ESV</b>	<b>RANS</b>	
$x(m)$	$U(m/s)$	$\bar{u}(m,s)$	Erro	$U(m/s)$	$\bar{u}(m,s)$	Erro	
25	0.00981	0.02401	+59%	0.33780	0.34920	+3%	
50	2.23617	1.76520	-21%	2.25991	1.80993	-20%	
75	0.00981	0.02947	+67%	0.20606	0.21940	+6%	
100	0.00981	0.02898	+66%	0.02943	0.03311	+11%	
125	0.00981	0.02990	+67%	0.02943	0.03867	+24%	
150	0.00981	0.03022	+68%	0.02943	0.03795	+22%	
175	0.00981	0.03110	+68%	0.02943	0.03745	+21%	
200	0.00981	0.02990	+67%	0.01798	0.03491	+48%	
		$t = 5(s)$			$t = 7(s)$		
		<b>ESV</b>	<b>RANS</b>		<b>ESV</b>	<b>RANS</b>	
$x(m)$	$U(m/s)$	$\bar{u}(m,s)$	Erro	$U(m/s)$	$\bar{u}(m,s)$	Erro	
25	1.55233	1.07093	-45%	2.10520	1.55734	-35%	
50	2.26760	1.52104	-33%	2.26605	1.69985	-25%	
75	2.26679	1.67412	-35%	2.27812	1.60124	-42%	
100	0.04924	0.13853	+64%	0.92944	0.77111	-21%	
125	0.04924	0.04811	-2%	0.06864	0.05518	-24%	
150	0.04904	0.04640	-6%	0.06864	0.05377	-28%	
175	0.04877	0.04501	-8%	0.06138	0.05218	-18%	
200	0.01806	0.03505	+48%	0.01803	0.03477	-48%	
		$t = 9(s)$			$t = 11(s)$		
		<b>ESV</b>	<b>RANS</b>		<b>ESV</b>	<b>RANS</b>	
$x(m)$	$U(m/s)$	$\bar{u}(m,s)$	Erro	$U(m/s)$	$\bar{u}(m,s)$	Erro	
25	2.00350	1.59601	-26%	1.40333	1.18345	+19%	
50	2.25358	1.67588	-26%	2.16714	1.49013	-31%	
75	2.28161	1.68641	-35%	2.27255	1.68246	-35%	
100	2.28700	1.43140	-60%	2.29425	1.53765	-49%	
125	0.09208	0.10147	+9%	1.79640	1.81198	+1%	
150	0.08797	0.05991	-47%	0.10312	0.06997	-47%	
175	0.06343	0.05098	-24%	0.06337	0.04988	-27%	
200	0.01799	0.03583	+50%	0.01796	0.03351	+46%	
		$t = 13(s)$			$t = 15(s)$		
		<b>ESV</b>	<b>RANS</b>		<b>ESV</b>	<b>RANS</b>	
$x(m)$	$U(m/s)$	$\bar{u}(m,s)$	Erro	$U(m/s)$	$\bar{u}(m,s)$	Erro	
25	0.82962	0.51978	-60%	0.41271	0.32078	-29%	
50	1.76630	1.36272	-23%	1.25495	0.89269	-29%	
75	2.23675	1.63716	-37%	2.00206	1.47797	-35%	
100	2.29017	1.72183	-33%	2.27183	1.66931	-36%	
125	2.30474	1.70035	-36%	2.30414	1.68935	-36%	
150	0.13583	0.22209	+39%	2.15999	2.00578	-8%	
175	0.06324	0.04973	-27%	0.06319	0.05601	-13%	
200	0.01792	0.03334	+46%	0.01788	0.03547	+50%	

Fonte: Autoria própria.

## 5 CONCLUSÕES

De modo geral é possível considerar que bons resultados foram gerados em relação as profundidades, como visto mesmo com suas simplificações as ESV tiveram exito comparado as RANS, foi observado que as ESV reduzem as oscilações no perfil de propagação da onda ao comparar com as RANS que se trata de um modelo mais realista, porém como verificado a redução das oscilações não ocasionaram grandes erros, sendo o erro máximo de 15% em  $t = 15s$ , sendo passível de redução, podendo refinar mais a malha para o MC a fim de um resultado mais preciso. Ao comparar os métodos foi verificado boa estabilidade em ambos, destacando o baixo custo computacional do MC em relação ao VF, ressaltando o tempo total para a simulação no MATLAB resultando em aproximadamente em  $15min$  e o no ANSYS de aproximadamente  $19h$ .

As grandes diferenças velocidades estão relacionadas ao fato de que o modelo mais robusto executado pelo ANSYS considera as 3 componentes espaciais da velocidade, condições de contorno mais específicas como a de parede não deslizante, o fluído sendo viscoso e pressão hidrodinâmica. Mesmo que o fluxo foi marcadamente em uma direção, pois não foi considerada a influência do fluxo sobre uma planície alagável, essas variáveis tem forte influência sobre a velocidade. Porém, conclui-se que o MC aplicado as ESV pode ser aplicado ao problema de barragem devido aos resultados satisfatórios entre as alturas e consequentemente a velocidade de propagação da onda, ao avaliar seu perfil ao longo do tempo, ou seja, a onda frontal estava na mesma posição nos mesmos instantes de tempo. Com essas premissas e a comparação de dados experimentais de pequena escala com dados numéricas pela literatura citados ao longo do texto é possível sugerir que as simulações de rompimento possam compor a avaliação de impactos ambientais no licenciamento ambiental, para que sejam propostas medidas preventivas, mitigatórias e compensatórias, para os eventuais danos caso ocorra uma catástrofe.

Para se obter um resultado melhor em relação as velocidades é necessário verificar um modelo de velocidade mais preciso podendo ser uma velocidade acoplada a pressão para abranger os efeitos da componente vertical, ou então revisar as condições iniciais e de fonteira para o problema podendo variar o número de Manning,  $h_0/h_1$  e se possível comparar com dados experimentais a fim de melhorar o conceituado método das características. O modelo das equações de Saint-Venant utilizados nesse trabalho é considerado um solução fraca devido as suas simplificações, outra sugestão para estudos futuros seria utilizar as ESV em 2-D como a solução forte utilizada pelo software HEC-RAS desenvolvido pelo *United States Army Corps of Engineers*, para o problema de rompimento de barragem com intuito de verificar os impactos decorrentes do rompimento sobre uma planície alagável e comparar os resultados com outro software de dinâmica dos fluídos computacional como ANSYS que utiliza as ENS ou RANS.

## REFERÊNCIAS

- ABBOTT, M. B.; BASCO, D. R. **Computational Fluid Dynamics: An Introduction for Engineers**. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1989. v. 229. 425 p.
- ALMEIDA, A. B.; FRANCO, A. B. Modeling of dam-break flow. In: CHAUDHRY, M. H.; MAYS, L. W. (Ed.). **Computer modeling of free-surface and pressurized flows**. Dordrecht: Springer, 1994, (E, Applied Sciences, v. 274). cap. 12, p. 343–373.
- ANA. **Relatório de segurança de barragens**. Brasília, 2020.
- ANSYS. **ANSYS CFX-Solver Theory Guide**. Canonsburg, 2021a.
- ANSYS. **ANSYS CFX-Solver Modeling Guide**. Canonsburg, 2021b.
- ANSYS. **ANSYS CFX Introduction**. Canonsburg, 2021c.
- BATCHELOR, G. K. **An introduction to fluid dynamics**. Cambridge: Cambridge university press, 2000.
- BRASIL, L. S. S. **Utilização de modelagens Uni e bidimensional para a propagação de onda de cheia proveniente de ruptura hipotética de barragem-estudo de caso: Barragem de Rio de Pedras-MG**. 2005. Dissertação (Mestrado em Saneamento, Recursos Hídricos e Meio Ambiente) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2005.
- BUENO-NETO, U. M. *et al.* Soluções analítica e numérica de uma equação diferencial parcial hiperbólica utilizando o método das características. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, São Carlos, v. 6, n. 2, 2018. Disponível em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/2394/2410>. Acesso em: 01 nov. 2021.
- CHANSON, H. **Hydraulics of open channel flow: An Introduction**. 2nd. ed. Oxford: Elsevier, 2004.
- CHAUDHRY, M. H. **Open-channel flow**. 2nd. ed. New York: Springer Science & Business Media, 2008.
- CHORIN, A. J.; MARSDEN, J. E. **A mathematical introduction to fluid mechanics**. New York: Springer, 1990. v. 168.
- CHUN, S. J.; MERKLEY, G. P. Ode solution to the characteristic form of the saint-venant equations. **Irrigation Science**, v. 26, n. 3, p. 213–222, 2008.
- COSTA, W. D. **Geologia de Barragens**. São Paulo: Oficina de Textos, 2016.
- DIAS, C. A. *et al.* Impactos do rompimento da barragem de mariana na qualidade da água do rio doce. **Revista Espinhaço**, 2018.
- EVANS, L. C. **Partial differential equations**. 2nd. ed. Providence: American Mathematical Society, 2010. v. 19. (Graduate studies in mathematics, 4).
- FENNEMA, R. J.; CHAUDHRY, H. M. Simulation of one-dimensional dam-break flows. **Journal of Hydraulic Research**, v. 25, n. 1, p. 41–51, 1987.
- FREITAS, C. M. d. *et al.* Desastres em barragens de mineração: lições do passado para reduzir riscos atuais e futuros. **Epidemiologia e Serviços de Saúde**, v. 28, p. e20180120, 2019.



- GARCIA-NAVARRO, P.; FRAS, A.; VILLANUEVA, I. Dam-break flow simulation: some results for one-dimensional models of real cases. **Journal of Hydrology**, v. 216, n. 3-4, p. 227–247, 1999.
- KUMAR, S. *et al.* Literature review of dam break studies and inundation mapping using hydraulic models and gis. **International Research Journal of Engineering and Technology**, v. 4, n. 5, p. 55–61, 2017.
- LOBEIRO, A. M. **Solução das equações de Saint Venant em uma e duas dimensões usando o método das características**. 2012. Tese (Métodos Numéricos em Engenharias) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.
- LOPES, L. M. N. O rompimento da barragem de mariana e seus impactos socioambientais. **Sinapse Múltipla**, v. 5, n. 1, p. 1–14, 2016.
- OZMEN-CAGATAY, H.; KOCAMAN, S. Dam-break flows during initial stage using swe and rans approaches. **Journal of Hydraulic Research**, v. 48, n. 5, p. 603–611, 2010.
- PASSOS, M. V. **Simulação numérica do escoamento em canais utilizando o método das características e fluidodinâmica computacional**. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado e Licenciatura em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2015.
- PORTO, R. M. **Hidráulica básica**. 4a. ed. São Carlos: EESC-USP, 2006.
- SEYEDASHRAF, O.; MEHRABI, M.; AKHTARI, A. A. Novel approach for dam break flow modeling using computational intelligence. **Journal of Hydrology**, v. 559, p. 1028–1038, 2018.
- STOKER, J. **Water Waves**. New York: Interscience Publ. Inc, 1957.
- YANG, S. *et al.* Numerical study on characteristics of dam-break wave. **Ocean Engineering**, v. 159, p. 358–371, 2018.

## **APÊNDICES**

## **APÊNDICE A – Script produzido no MATLAB**

```

1 function [X,T,U,h,MaxCourant]= rbsvmc(L,t,h0,h1,g,dx,Erro)
2 %Resolve as equacoes de Saint Venant pelo metodo das caracteristicas ,
3 %para o problema de rompimento de barragem.
4 tic
5 %Dados basicos do problema
6 S0x=0.001; %inclinacao do canal
7 b=1; %base da calha
8 n=0.009; %Coeficiente de Manning, varia de acordo com o material
9 dt=0.01; %passo de tempo
10 X= (0:dx:L); %vetor x
11 T= (0:dt:t); %vetor t
12 xt= length(X); %quantidade de elementos em x
13 tt= length(T); %quantidade de elementos em t
14 %Calculos
15 for i=1:tt-1
16     %Fronteira a esquerda
17     XO= X(1);
18     UO= U(i,1);
19     cO= U(i,1);
20     k=1;
21     XR(k)= XO-dt*(UO-cO);
22     sc= griddedInterpolant(X,c(i,:), 'linear');
23     cR(k)= sc(XR(k));
24     sU= griddedInterpolant(X,U(i,:), 'linear');
25     UR(k)= sU(XR(k));
26     RhR(k)=(b*cR(k)^2)/(2*cR(k)^2+b*g);
27     cP(k)=cR(k)-0.5*UR(k)-0.5*g*dt*(S0x-0.5*n^2*UR(k)*abs(UR(k))/RhR(k)^(4/3));
28     UP(k)=0;
29     erro=1;
30     while erro>Erro
31         XR(k+1)= XO-dt*((UP(k)-cP(k))/2+(UR(k)-cR(k))/2);
32         cR(k+1)= sc(XR(k+1));
33         UR(k+1)= sU(XR(k+1));
34         RhR(k+1)= (b*cR(k+1)^2)/(2*cR(k+1)^2+b*g);

```

```

35     cP(k+1)= cR(k+1)-0.5*UR(k+1)
36     -0.5*g*dt*(S0x-0.5*n^2*UR(k+1)*abs(UR(k+1))/RhR(k+1)^(4/3));
37     UP(k+1)= 0;
38     erro= abs(cP(k)-cP(k+1));
39     k=k+1;
40     end
41     U(i+1,1)= UP(k);
42     c(i+1,1)= cP(k);
43     %Regiao intermediaria
44     for j=2:xt-1
45         XO= X(j);
46         UO= U(i,j);
47         cO= c(i,j);
48         k=1;
49         XR(k)= XO-dt*(UO-cO);
50         XL(k)= XO-dt*(UO+cO);
51         cR(k)= sc(XR(k));
52         UR(k)= sU(XR(k));
53         cL(k)= sc(XL(k));
54         UL(k)= sU(XL(k));
55         RhR(k)=(b*cR(k)^2)/(2*cR(k)^2+b*g);
56         RhL(k)=(b*cL(k)^2)/(2*cL(k)^2+b*g);
57         cP(k)= 0.25*(UL(k)-UR(k))+0.5*(cL(k)+cR(k))
58         +0.125*g*dt*(n^2*UR(k)*abs(UR(k))/RhR(k)^(4/3)
59         -n^2*UL(k)*abs(UL(k))/RhL(k)^(4/3));
60         RhP(k)=(b*cP(k)^2)/(2*cP(k)^2+b*g);
61         eqUP= @(Up) 0.5*(UL(k)+UR(k))+(cL(k)-cR(k))+0.5*g*dt*(2*S0x
62         -0.5*(2*n^2*Up*abs(Up)/RhP(k)^(4/3)+n^2*UL(k)*abs(UL(k))/RhL(k)^(4/3)
63         +n^2*UR(k)*abs(UR(k))/RhR(k)^(4/3))) -Up;
64         UP(k)= fzero(eqUP,UO);
65         erro=1;
66         while erro>Erro
67             XR(k+1)= XO-dt*((UP(k)-cP(k))/2+(UR(k)-cR(k))/2);
68             XL(k+1)= XO-dt*((UP(k)+cP(k))/2+(UL(k)+cL(k))/2);

```

```

69      cR(k+1)= sc(XR(k+1));
70      UR(k+1)= sU(XR(k+1));
71      cL(k+1)= sc(XL(k+1));
72      UL(k+1)= sU(XL(k+1));
73      RhR(k+1)=(b*cR(k+1)^2)/(2*cR(k+1)^2+b*g);
74      RhL(k+1)=(b*cL(k+1)^2)/(2*cL(k+1)^2+b*g);
75      cP(k+1)= 0.25*(UL(k+1)-UR(k+1))+0.5*(cL(k+1)+cR(k+1))
76      +0.125*g*dt*(n^2*UR(k+1)*abs(UR(k+1))/RhR(k+1)^(4/3)
77      -n^2*UL(k+1)*abs(UL(k+1))/RhL(k+1)^(4/3));
78      RhP(k+1)=(b*cP(k+1)^2)/(2*cP(k+1)^2+b*g);
79      eqUP= @(Up) 0.5*(UL(k+1)+UR(k+1))+(cL(k+1)-cR(k+1))
80      +0.5*g*dt*(2*S0x-0.5*(2*n^2*Up*abs(Up)/RhP(k+1)^(4/3)
81      +n^2*UL(k+1)*abs(UL(k+1))/RhL(k+1)^(4/3)
82      +n^2*UR(k+1)*abs(UR(k+1))/RhR(k+1)^(4/3))) -Up;
83      UP(k+1)= fzero(eqUP,U0);
84      ErrocP= abs(cP(k)-cP(k+1));
85      ErroUP= abs(UP(k)-UP(k+1));
86      erro= max(ErrocP,ErroUP);
87      k=k+1;
88  end
89  U(i+1,j)= UP(k);
90  c(i+1,j)= cP(k);
91  end
92  %fronteira a direita
93  XO= X(xt);
94  cO= c(i,xt);
95  k=1;
96  XL(k)= XO-dt*cO;
97  cL(k)= sc(XL(k));
98  UL(k)= sU(XL(k));
99  RhL(k)=(b*cL(k)^2)/(2*cL(k)^2+b*g);
100  cP(k)= cL(k)+0.5*UL(k)+0.5*g*dt*(S0x-0.5*(n^2*UL(k)*abs(UL(k))/RhL(k)^(4/3)));
101  UP(k)= 0;
102  erro=1;

```

```

103     while erro>Erro
104         XL(k+1)= XO-0.5*dt*(cP(k)+UL(k)+cL(k));
105         cL(k+1)= sc(XL(k+1));
106         UL(k+1)= sU(XL(k+1));
107         RhL(k+1)=(b*cL(k+1)^2)/(2*cL(k+1)^2+b*g);
108         cP(k+1)= cL(k+1)+0.5*UL(k+1)
109             +0.5*g*dt*(S0x-0.5*(n^2*UL(k+1)*abs(UL(k+1))/RhL(k+1)^(4/3)));
110         UP(k+1)= 0;
111         erro= abs(cP(k)-cP(k+1));
112         k=k+1;
113     end
114     U(i+1,xt)= UP(k);
115     c(i+1,xt)= cP(k);
116 end
117 %Verificar estabilidade do metodo
118 Courant=((abs(U)+c)* dt)/ dx;
119 for j=1:xt
120     for i=1:tt
121         if Courant(i,j)>1
122             fprintf('O método é instável após %.2f segundos\n',T(i))
123             break
124         end
125     end
126 end
127 %Courant maximo por secao em todo t
128 MaxCourant=max(Courant);
129 %Convercao das variaveis simbolicas
130 X=double(X);
131 T=double(T);
132 U=double(U);
133 c=double(c);
134 h=c.^2/g;
135 toc
136 end

```

## **APÊNDICE B – Relatório da simulação**



**Author**

Urias de Moura Bueno Neto

**Date**

2021/11/11 12:25:02

## 1. File Report

**Table 1.** File Information for CFX

<b>Case</b>	CFX
<b>File Path</b>	C:\Users\urias\OneDrive\Documentos\tccf\tccf_files\dp0\CFX\CFX\Fluid Flow CFX_001.res
<b>File Date</b>	07 November 2021
<b>File Time</b>	10:04:32 AM
<b>File Type</b>	CFX5
<b>File Version</b>	21.1

## 2. Mesh Report

**Table 2.** Mesh Information for CFX

<b>Domain</b>	<b>Nodes</b>	<b>Elements</b>
Canal	148986	120000
Reservatorio	46686	37500
All Domains	195672	157500

**Table 3.** Mesh Statistics for CFX

<b>Domain</b>	<b>Maximum Edge Length Ratio</b>
Canal	1.00006
Reservatorio	1.00002
All Domains	1.00006

### 3. Physics Report

**Table 4.** Domain Physics for CFX

<b>Domain - Canal</b>	
Type	Fluid
Location	B18
<i>Materials</i>	
Air at 25 C	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
Water	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
<i>Settings</i>	
Buoyancy Model	Buoyant
Buoyancy Reference Density	1.2900e+0 [kg m <sup>-3</sup> ]
Gravity X Component	9.8000e-3 [m s <sup>-2</sup> ]
Gravity Y Component	-9.8099e+0 [m s <sup>-2</sup> ]
Gravity Z Component	0.0000e+0 [m s <sup>-2</sup> ]
Buoyancy Reference Location	Automatic
Domain Motion	Stationary
Reference Pressure	1.0000e+0 [atm]
Heat Transfer Model	Isothermal
Fluid Temperature	2.5000e+1 [C]
Homogeneous Model	True
Turbulence Model	SST
Turbulent Wall Functions	Automatic

<b>Domain - Reservatorio</b>	
Type	Fluid
Location	B45
<i>Materials</i>	
Air at 25 C	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
Water	
Fluid Definition	Material Library
Morphology	Continuous Fluid
<i>Settings</i>	
Buoyancy Model	Buoyant
Buoyancy Reference Density	1.2900e+0 [kg m <sup>-3</sup> ]
Gravity X Component	9.8000e-3 [m s <sup>-2</sup> ]
Gravity Y Component	-9.8099e+0 [m s <sup>-2</sup> ]
Gravity Z Component	0.0000e+0 [m s <sup>-2</sup> ]
Buoyancy Reference Location	Automatic
Domain Motion	Stationary
Reference Pressure	1.0000e+0 [atm]
Heat Transfer Model	Isothermal
Fluid Temperature	2.5000e+1 [C]
Homogeneous Model	True
Turbulence Model	SST
Turbulent Wall Functions	Automatic
<b>Domain Interface - Default Fluid Fluid Interface</b>	
Boundary List1	Default Fluid Fluid Interface Side 1 1
Boundary List2	Default Fluid Fluid Interface Side 1
Interface Type	Fluid Fluid
<i>Settings</i>	
Interface Models	General Connection
Mass And Momentum	Conservative Interface Flux
Mesh Connection	GGI

**Table 5.** Boundary Physics for CFX

<b>Domain</b>	<b>Boundaries</b>	
Canal	<b>Boundary - Default Fluid Fluid Interface Side 1 1</b>	
	Type	INTERFACE
	Location	F24.18
	<i>Settings</i>	
	Mass And Momentum	Conservative Interface Flux
	Turbulence	Conservative Interface Flux
	<b>Boundary - Topoc</b>	
	Type	OPENING
	Location	F21.18
	<i>Settings</i>	
	Flow Direction	Normal to Boundary Condition
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Opening Pressure and Direction
	Relative Pressure	0.0000e+0 [Pa]
	Turbulence	Medium Intensity and Eddy Viscosity Ratio
	Fluid	Air
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+0
	Fluid	Water
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+0
	<b>Boundary - Lateralc</b>	
	Type	SYMMETRY
	Location	F19.18, F20.18
	<i>Settings</i>	
	<b>Boundary - Canal Default</b>	
	Type	WALL
Location	F22.18, F23.18	
<i>Settings</i>		
Mass And Momentum	No Slip Wall	
Wall Roughness	Smooth Wall	

Reservatorio	<b>Boundary - Default Fluid Fluid Interface Side 1</b>	
	Type	INTERFACE
	Location	F51.45
	<i>Settings</i>	
	Mass And Momentum	Conservative Interface Flux
	Turbulence	Conservative Interface Flux
	<b>Boundary - Topor</b>	
	Type	OPENING
	Location	F48.45
	<i>Settings</i>	
	Flow Direction	Normal to Boundary Condition
	Flow Regime	Subsonic
	Mass And Momentum	Opening Pressure and Direction
	Relative Pressure	0.0000e+0 [Pa]
	Turbulence	Medium Intensity and Eddy Viscosity Ratio
	Fluid	Air
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	1.0000e+0
	Fluid	Water
	Volume Fraction	Value
	Volume Fraction	0.0000e+0
	<b>Boundary - Lateralr</b>	
	Type	SYMMETRY
	Location	F46.45, F47.45
	<i>Settings</i>	
	<b>Boundary - Reservatorio Default</b>	
	Type	WALL
Location	F49.45, F50.45	
<i>Settings</i>		
Mass And Momentum	No Slip Wall	
Wall Roughness	Smooth Wall	

## 4. Solution Report

**Table 6.** Boundary Flows for CFX

Location	Type	Mass	Momentum		
			X	Y	Z
Canal Default ( Bulk-Canal )	Boundary		-4.6666e+4	6.0591e+6	-5.1715e-4
Canal Default ( Canal )	Boundary	0.0000e+0			
Lateralc ( Bulk-Canal )	Boundary		0.0000e+0	0.0000e+0	-1.4000e+1
Lateralc ( Canal )	Boundary	0.0000e+0			
Lateralr ( Bulk-Reservatorio )	Boundary		0.0000e+0	0.0000e+0	-2.2500e+0
Lateralr ( Reservatorio )	Boundary	0.0000e+0			
Reservatorio Default ( Bulk-Reservatorio )	Boundary		3.2548e+4	1.5564e+6	6.5365e-4
Reservatorio Default ( Reservatorio )	Boundary	0.0000e+0			
Topoc ( Bulk-Canal )	Boundary		-3.6250e+2	-2.1196e+2	1.1823e+0
Topoc ( Canal )	Boundary	-5.7938e+1			
Topor ( Bulk-Reservatorio )	Boundary		6.2593e+0	-1.5183e+1	6.4333e-2
Topor ( Reservatorio )	Boundary	8.3966e+0			
Default Fluid Fluid Interface Side 1 ( Bulk-Canal )	Domain Interface		7.8145e+4	1.2831e+2	6.2480e-3
Default Fluid Fluid Interface Side 1 ( Canal )	Domain Interface	5.3917e+3			
Default Fluid Fluid Interface Side 2 ( Bulk-Reservatorio )	Domain Interface		-7.8145e+4	-1.2831e+2	-6.2481e-3
Default Fluid Fluid Interface Side 2 ( Reservatorio )	Domain Interface	-5.3917e+3			