

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

LUIS GUSTAVO DA SOLEDADE GONZAGA

COLORAÇÃO DE ARESTAS EM GRAFOS
SPLIT-COMPARABILIDADE E SPLIT-INTERVALOS

DISSERTAÇÃO

PONTA GROSSA
2021

LUIS GUSTAVO DA SOLEDADE GONZAGA

**COLORAÇÃO DE ARESTAS EM GRAFOS
SPLIT-COMPARABILIDADE E SPLIT-INTERVALOS**

**EDGE COLORING IN SPLIT-COMPARABILITY AND
SPLIT-INTERVAL GRAPHS**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação, da Diretoria de Pesquisa e Pós-graduação, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Prof^a Dr^a Sheila Morais de Almeida - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Coorientadora: Prof^a Dr^a Cândida Nunes da Silva - Universidade Federal de São Carlos

PONTA GROSSA

2021



4.0 International

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



LUIS GUSTAVO DA SOLEDADE GONZAGA

COLORAÇÃO DE ARESTAS EM GRAFOS SPLIT-COMPARABILIDADE E SPLIT-INTERVALOS

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ciência Da Computação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Sistemas E Métodos De Computação.

Data de aprovação: 20 de Abril de 2021

Prof.a Sheila Morais De Almeida, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Alberto Alexandre Assis Miranda, Doutorado - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerais (Ifnmg)

Prof.a Claudia Linhares Sales, Doutorado - Universidade Federal do Ceará (Ufc)

Prof Leandro Miranda Zatesko, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 20/04/2021.

Dedico esse trabalho a minha mãe,
por me mostrar o valor do conhecimento.

AGRADECIMENTOS

Tenho agradecimento em primeiro lugar ao carinho e guia dos meus pais, Irene e José, por me mostrarem o caminho do conhecimento e me oferecerem suporte.

Agradeço as pessoas especiais presentes em minha vida Cleria, Ivan, Sandra, Leonardo, Isabel e Priscila pelo apoio e companheirismo nessa jornada. E sou grato pela participação do meu colega Jadder, por apresentar ideias importantes para tornar esse trabalho possível.

Agradeço a minha banca de correção pela imensa ajuda a tornar este trabalho o melhor possível.

Agradeço as minhas orientadoras Sheila e Cândida pelo carinho e apoio na pesquisa durante os tempos difíceis de pandemia que perduram. Em especial a professora Sheila por iniciar minha formação nessa área de forma encantadora.

Esse trabalho foi possível graças ao suporte da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), financiamento número 001.

*“O mistério da vida não é um problema a ser resolvido,
e sim uma realidade a ser vivida”
Frank Herbert*

RESUMO

Uma coloração de arestas própria de um grafo é uma atribuição de cores para as suas arestas tal que arestas incidentes em um mesmo vértice têm cores distintas. O Problema da Coloração de Arestas é responder, dado um grafo, qual o menor número de cores para uma coloração de arestas própria. Esse número é chamado de índice cromático e, para um grafo G , é denotado por $\chi'(G)$. Por definição, o índice cromático é pelo menos $\Delta(G)$, onde $\Delta(G)$ é o maior número de arestas incidentes em um mesmo vértice do grafo G . Em 1964, Vizing provou que $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ para qualquer grafo simples G . Portanto, quando G é simples, $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. Um grafo é Classe 1 se o seu índice cromático é igual ao seu grau máximo, e é Classe 2 caso contrário. O Problema da Classificação é decidir se um grafo simples é Classe 1. Apesar de haver apenas dois possíveis valores para o índice cromático de um grafo simples, o Problema da Classificação é NP-completo. Em 1985, em sua famosa coluna "*The NP-Completeness Column: an Ongoing Guide*", David Johnson classificou alguns problemas da Teoria dos Grafos em relação à sua complexidade computacional. Em alguns casos, esta complexidade ainda era desconhecida e Johnson identificou classes de grafos para as quais considerou que seria fácil determiná-la. Nas classes de grafos split, de comparabilidade e de intervalos, por exemplo, Johnson considerou que determinar a complexidade computacional do Problema da Classificação era possivelmente fácil. Entretanto, após 35 anos, apenas a complexidade computacional do Problema da Classificação para os grafos de comparabilidade foi determinada, sendo este um problema NP-completo. Esta dissertação apresenta uma solução de tempo polinomial para o Problema da Classificação para grafos split-intervalos, além de identificar e corrigir um problema na prova que determina o índice cromático dos grafos split-comparabilidade.

Palavras-chaves: Algoritmos computacionais. Representações dos grafos. Teoria dos grafos. Coloração de arestas. Grafos split.

ABSTRACT

A proper edge coloring of a graph is an assignment of colors to its edges such that edges incident with the same vertex have distinct colors. The Edge Coloring Problem is answering, given a graph, which is the least number of colors for a proper edge coloring. That number is called the chromatic index and, for a graph G , it is denoted $\chi'(G)$. By definition, the chromatic index is at least $\Delta(G)$, wherein $\Delta(G)$ is the largest number of edges incident with the same vertex of the graph G . In 1964, Vizing proved that $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ for every simple graph G . Therefore, when G is a simple graph, $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. A graph is Class 1 if its chromatic index equals its maximum degree, and it is Class 2 otherwise. The Graph Classification Problem is deciding if a simple graph is Class 1. Even considering that there are only two possible values for the chromatic index, the Graph Classification Problem is still NP-complete. In 1985, in his famous column "*The NP-Completeness Column: an Ongoing Guide*", David Johnson classified some problems in Graph Theory concerning their computational complexity. In some cases, that complexity was still unknown and Johnson identified graph classes for which he considered it would be easier to determine it. On the classes of split, comparability, and intervals graphs, for instance, Johnson considered that determining the computational complexity of the Classification Problem was possibly easy. However, after 35 years, only the computational complexity of the Classification Problem for comparability graphs was determined, being it an NP-complete problem. This thesis presents a polynomial-time solution for the Classification Problem for split-interval graphs, besides identifying and correcting an issue in the previous proof that determined the chromatic index of split-comparability graphs.

Keywords: Computer algorithms. Representations of graphs. Theory of graphs. Edge coloring. Split graphs.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Uma coloração de arestas para o grafo touro	11
Figura 2	– Tabela de Johnson	13
Figura 3	– Representação gráfica do grafo touro.....	16
Figura 4	– Exemplo de um multigrafo.....	16
Figura 5	– Grafo split	18
Figura 6	– Grafo de comparabilidade.....	20
Figura 7	– Grafo de interseção	20
Figura 8	– Grafo permutação	21
Figura 9	– Grafo de intervalos. Os segmentos de reta são uma projeção dos respectivos intervalos na reta real.....	22
Figura 10	– Exemplos de que as classes de comparabilidade e co-comparabilidade não são equivalentes.....	23
Figura 11	– Grafo split-comparabilidade	23
Figura 12	– Grafo split-permutação	25
Figura 13	– Grafo split-comparabilidade que não é split-permutação	25
Figura 14	– Grafo split-co-comparabilidade que não é split-permutação.....	26
Figura 15	– Grafos proibidos em split-intervalos	27
Figura 16	– Grafo proibido em split-comparabilidade.....	27
Figura 17	– Esquema representativo da estrutura de grafos split-indiferença	29
Figura 18	– Relações de interseção entre as classes de grafos deste projeto	30
Figura 19	– Grafo P^* , um exemplo de Classe 2 que não é sobrecarregado.....	31
Figura 20	– Quadrado latino	32
Figura 21	– Diagramas de cores	33
Figura 22	– Intervalo da clique em um split-co-comparabilidade.....	39
Figura 23	– Grafo split-intervalos com partição por inclusões de vizinhança.....	41
Figura 24	– Caso sem solução em Cruz (2017).....	44
Figura 25	– Exemplo de um split-intervalos que satisfaz a hipótese	46
Figura 26	– Grafo saturado G'_u obtido pela adição de arestas respeitando a sequência completa	48
Figura 27	– Grafo saturado G'_u obtido pela adição de arestas respeitando a sequência incompleta	48
Figura 28	– Subgrafo bipartido após a coloração parcial de G do grafo saturado G'_u	49
Figura 29	– G'_u obtido após a adição do vértice c e das arestas incidentes em c	50

LISTA DE SÍMBOLOS

$\chi'(G)$	Índice cromático de um grafo G (p. 11).
$\Delta(G)$	Grau máximo de um grafo G (p. 11).
$V(G)$	Conjunto de vértices de um grafo G (p. 15).
$E(G)$	Conjunto de arestas de um grafo G (p. 15).
$\deg(v)$	Grau de um vértice v (p. 16).
$N(v)$	Vizinhança de um vértice v (p. 16).
$N[v]$	Vizinhança fechada de um vértice v (p. 16).
K_n	Grafo completo com n vértices (p. 16).
$G[X]$	Subgrafo de G induzido por um conjunto de vértices X (p. 17).
$\alpha'(G)$	Cardinalidade de um emparelhamento máximo em G (p. 17).
\overline{G}	Complemento de um grafo G (p. 17).

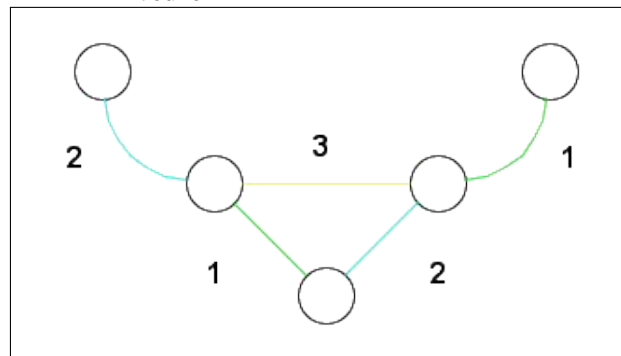
SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO	14
2	PRELIMINARES E ALGUMAS CLASSES DE GRAFOS	15
2.1	DEFINIÇÕES BÁSICAS	15
2.2	GRAFOS CORDAIS	18
2.3	GRAFOS SPLIT	18
2.4	GRAFOS DE COMPARABILIDADE	19
2.5	GRAFOS DE INTERSEÇÃO	20
2.6	RELAÇÕES DE INTERSEÇÃO ENTRE AS CLASSES	22
3	RESULTADOS ANTERIORES EM COLORAÇÃO DE ARESTAS	31
4	COLORAÇÃO DE ARESTAS EM GRAFOS SPLIT-COMPARABILIDADE E SPLIT-INTERVALOS	36
4.1	PROPRIEDADES DOS GRAFOS SPLIT-COMPARABILIDADE	38
4.2	PROPRIEDADES DOS GRAFOS SPLIT-INTERVALOS	38
4.3	COLORAÇÃO PARA GRAFOS SPLIT-COMPARABILIDADE	41
4.4	COLORAÇÃO PARA GRAFOS SPLIT-INTERVALOS	44
4.5	A CONJECTURA <i>OVERFULL</i> EM SPLIT-COMPARABILIDADE E SPLIT-INTERVALOS	50
5	CONCLUSÕES	52
5.1	TRABALHOS FUTUROS	52

1 INTRODUÇÃO

Uma *coloração própria de arestas* em um grafo G é uma atribuição de cores para as arestas de G de forma que nenhum par de arestas adjacentes tenha a mesma cor. O Problema da Coloração de Arestas é determinar, para um dado grafo G , o menor número de cores com que é possível realizar uma coloração própria das arestas de G . Este número mínimo de cores é chamado de *índice cromático* de G e é denotado por $\chi'(G)$. Usualmente as cores em uma coloração de arestas são representadas por números inteiros. A Figura 1 mostra um exemplo de um grafo com uma coloração própria de suas arestas que utiliza o número mínimo de cores. Perceba que três é o mínimo de cores necessário para colorir esse grafo pois existem vértices com três arestas incidentes.

Figura 1 – Uma coloração de arestas para o grafo touro



Fonte: Autoria própria

Vizing (1964) provou que existe um limitante superior bastante justo para o índice cromático de um grafo simples G . Perceba que, pela definição de uma coloração de arestas, um limitante inferior para o número de cores em uma coloração de arestas de um grafo é o máximo entre o número de arestas incidentes em um mesmo vértice. Esse número é chamado de *grau máximo* de G e é denotado por $\Delta(G)$. Em seu trabalho, Vizing provou que o índice cromático de G é no máximo $\Delta(G) + 1$. Essa forte restrição que limita as possibilidades do índice cromático a dois valores, $\Delta(G)$ ou $\Delta(G) + 1$, deu origem ao *Problema da Classificação*, que é responder se G é Classe 1 (caso em que $\chi'(G) = \Delta(G)$) ou Classe 2 (caso em que $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$).

Foi provado por Erdős e Wilson (1977) que quase todos os grafos são Classe 1, ou seja, se U_n for o número de grafos Classe 1 com n vértices e X_n o número total de grafos com n vértices, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{X_n} = 1$. Mesmo assim decidir se um grafo G cúbico (com todos os vértices tendo 3 vizinhos) é Classe 1 é um problema NP-completo (HOLYER, 1981). Portanto, no caso geral, decidir se um grafo é Classe 1 é um problema NP-completo¹. Perceba que por se tratar de um problema difícil é comum que ele seja considerado em classes bem estruturadas de grafos.

¹ Para conceitos e definições em Complexidade Computacional veja Cormen *et al.* (2009)

Na histórica coluna de Johnson (1985), foi disponibilizada uma tabela de vários problemas em Teoria dos Grafos em classes específicas, relacionando-os com o que se conhecia de sua complexidade computacional. Esta tabela pode ser vista na Figura 2. Cada problema da tabela, quando relacionado a uma classe específica de cada linha, foi marcado com um dos seguintes símbolos:

- $O?$, problemas que foram considerados pelo autor como aparentemente fáceis de resolver;
- O , problemas que o autor julgou que poderiam ser difíceis de se determinar a complexidade;
- $O!$, problemas que eram famosos por até então não terem complexidade computacional determinada;
- P , problemas para os quais se conhecia algoritmo polinomial;
- $P?$, aqueles problemas para os quais nenhum algoritmo polinomial havia sido apresentado, mas que o autor julgava que teriam um algoritmo polinomial que poderia ser facilmente construído;
- N , problemas que já eram conhecidos como NP-completos.
- I , problemas clássicos que se acredita não serem nem polinomiais nem NP-completos.

Um dos problemas apresentados na tabela da Figura 2 é o problema de decidir, dado um grafo G e um número natural k , se G tem uma coloração de arestas com k cores. Tanto na Tabela 2, quanto no restante deste documento, este problema será denominado CHRIND. Note que o Problema CHRIND tem solução polinomial se, e somente se, o Problema da Classificação puder ser resolvido em tempo polinomial. Pode-se observar que para as classes de grafos split, comparabilidade e intervalos², o Problema CHRIND tinha complexidade computacional em aberto e o autor julgava que determiná-la seria fácil. Trinta e cinco anos depois, dentre as três classes citadas, apenas para a classe dos grafos de comparabilidade a complexidade computacional do Problema CHRIND é conhecida. Sabe-se que CHRIND é NP-completo nesta classe de grafos (CAI; ELLIS, 1991).

² A definição destas classes de grafos será apresentada no Capítulo 2

Figura 2 – Tabela de Johnson

GRAPH CLASS	MEMBER	INDSET	CLIQUE	CLIPAR	CHRNUM	CHRIND	HAMCIR	DOMSET	MAXCUT	STTREE	GRAISO
Trees/Forests	P [T]	P [GJ]	P [T]	P [GJ]	P [T]	P [GJ]	P [T]	P [GJ]	P [GJ]	P [T]	P [GJ]
Almost Trees (k)	P	P [24]	P [T]	P?	P?	P?	P?	P [45]	P?	P?	P?
Partial k -Trees	P [2]	P [1]	P [T]	P?	P [1]	O?	P [3]	P [3]	P?	P?	O?
Bandwidth- k	P [68]	P [64]	P [T]	P?	P [64]	P?	P?	P [64]	P [64]	P?	P [58]
Degree- k	P [T]	N [GJ]	P [T]	N [GJ]	N [GJ]	N [49]	N [GJ]	N [GJ]	N [GJ]	N [GJ]	P [58]
Planar	P [GJ]	N [GJ]	P [T]	N [10]	N [GJ]	O	N [GJ]	N [GJ]	P [GJ]	N [35]	P [GJ]
Series Parallel	P [79]	P [75]	P [T]	P?	P [74]	P [74]	P [74]	P [54]	P [GJ]	P [82]	P [GJ]
Outerplanar	P	P [6]	P [T]	P [6]	P [67]	P [67]	P [T]	P [6]	P [GJ]	P [81]	P [GJ]
Halain	P	P [6]	P [T]	P [6]	P [74]	P [74]	P [T]	P [6]	P [GJ]	P?	P [GJ]
k -Outerplanar	P	P [6]	P [T]	P [6]	P [6]	O?	P [6]	P [6]	P [GJ]	P?	P [GJ]
Grid	P	P [GJ]	P [T]	P [GJ]	P [T]	P [GJ]	N [51]	N [55]	P [T]	N [35]	P [GJ]
$K_{3,3}$ -Free	P [4]	N [GJ]	P [T]	N [10]	N [GJ]	O?	N [GJ]	N [GJ]	P [5]	N [GJ]	O?
Thickness- k	N [60]	N [GJ]	P [T]	N [10]	N [GJ]	N [49]	N [GJ]	N [GJ]	N [7]	N [GJ]	O?
Genus- k	P [34]	N [GJ]	P [T]	N [10]	N [GJ]	O?	N [GJ]	N [GJ]	O?	N [GJ]	P [61]
Perfect	O?	P [42]	P [42]	P [42]	P [42]	O?	N [11]	N [14]	O?	N [GJ]	I [GJ]
Chordal	P [76]	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	O?	N [22]	N [14]	O?	N [83]	I [GJ]
Split	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	O?	N [22]	N [19]	O?	N [83]	I [15]
Interval	P [31]	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	O?	O?	P [32]	O?	P [83]	O?
Comparability	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	O?	N [11]	N [28]	O?	N [GJ]	I [GJ]
Bipartite	P [T]	P [GJ]	P [T]	P [GJ]	P [T]	P [GJ]	N [11]	N [28]	P [T]	N [GJ]	I [GJ]
Permutation	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	O?	O	P [33]	O?	P [23]	P [21]
Cographs	P [T]	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	O?	P [25]	P [33]	O?	P [23]	P [25]
Undirected Path	P [39]	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	O?	O?	N [16]	O?	O?	I [GJ]
Directed Path	P [38]	P [40]	P [40]	P [40]	P [40]	O?	O?	P [16]	O?	P [83]	O?
Interval	P [17]	P [44]	P [44]	P [44]	P [44]	O?	P [53]	P [16]	O?	P [83]	P [57]
Circular Arc	P [78]	P [44]	P [50]	P [44]	N [36]	O?	O?	P [13]	O?	P [83]	O?
Circle	P [71]	P [GJ]	P [50]	O?	N [36]	O?	P [12]	O?	O?	P [70]	O?
Proper Circ. Arc	P [77]	P [44]	P [50]	P [44]	P [66]	O?	P [12]	P [13]	O?	P [83]	O?
Edge (or Line)	P [47]	P [GJ]	P [T]	N [GJ]	N [49]	O?	N [11]	N [GJ]	O?	N [70]	I [15]
Claw-Free	P [T]	P [63]	O?	N [GJ]	N [49]	O?	N [11]	N [GJ]	O?	N [70]	I [15]

Fonte: (JOHNSON, 1985)

Este projeto dedica-se ao estudo da complexidade computacional do Problema da Classificação nas classes de grafos split que são grafos de intervalos ou de comparabilidade (todas definidas no Capítulo 2). Essas classes estão em destaque na Figura 2. Desde 1985, data da publicação da Tabela de Johnson, diversos trabalhos apresentaram resultados parciais para o Problema da Classificação para as classes dos grafos split e de intervalos. Os resultados descritos a seguir apresentam técnicas de coloração de arestas que podem ser traduzidas para algoritmos polinomiais.

Chen, Fu e Ko (1995) provaram que, caso um grafo split G tenha grau máximo ímpar, então G é Classe 1 e apresentaram condições necessárias e suficientes para um split completo ser Classe 1. Os grafos split completos são uma subclasse das classes de grafos split e de intervalos. Considerando a classe dos grafos de intervalos, Figueiredo, Meidanis e Mello (1999) e, independentemente, Bojarshinov (2001) provaram que os grafos de intervalos com grau máximo ímpar são Classe 1. É interessante observar que, tanto para grafos split quanto para grafos de intervalos, o Problema da Coloração de Arestas está resolvido quando o grau máximo do grafo é ímpar. O fato deste problema permanecer em aberto para ambas as classes quando o grau máximo do grafo é par é uma evidência da dificuldade do problema neste caso.

Considerando os casos em que o grau máximo do grafo é par, resultados parciais do Problema da Coloração de Arestas na classe dos grafos split foram apresentados por Tan e Hung (2006) e Almeida (2012).

Existem subclasses dos grafos split e dos grafos de intervalos em que o Problema da Coloração de Arestas foi resolvido para todos os casos, independente da paridade do grau má-

ximo do grafo. No trabalho de Ortiz, Maculan e Szwarcfiter (1998), por exemplo, é dada uma caracterização para os grafos split-indiferença e um algoritmo para obter uma coloração de arestas com o número mínimo de cores para todos os grafos split-indiferença. Outra subclasse dos grafos de intervalos que teve o índice cromático determinado para todos os casos é a dos grafos-indiferença reduzidos (FIGUEIREDO; MELLO; ORTIZ, 2000).

Apesar de não se conhecer algoritmo polinomial para o Problema CHRIND restrito aos grafos split e deste problema ser NP-completo para os grafos de comparabilidade (CAI; ELLIS, 1991), existem algoritmos polinomiais para resolver o problema CHRIND de um subconjunto de grafos que pertencem à interseção destas duas classes, chamados de split-comparabilidade (ORTIZ; VILLANUEVA, 1996; CRUZ, 2017). Nesses trabalhos, os autores enunciam o problema CHRIND para as classes de split-comparabilidade, entretanto, Cruz (2017) indicou um problema para a demonstração apresentada por Ortiz e Villanueva (1996). Além disso, durante a pesquisa bibliográfica para o desenvolvimento deste trabalho foi encontrado um erro na demonstração apresentada no trabalho de Cruz (2017). Nesta dissertação, resolvemos o Problema da Classificação quando restritos a grafos split-comparabilidade, corrigindo a demonstração apresentada por Cruz em seu trabalho de 2017. Além disso, apresentamos propriedades estruturais importantes para os grafos split-intervalos que nos permitiram resolver o problema CHRIND nessa classe.

1.1 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

Esse documento organiza-se da seguinte forma. O Capítulo 2 apresenta algumas definições básicas em teoria dos grafos e as características e interseções de Classes de grafos relacionadas a essa dissertação. O Capítulo 3 apresenta resultados da literatura mais aprofundados em coloração de arestas que foram úteis para o desenvolvimento dos resultados encontrados. O Capítulo 4 apresenta os resultados encontrados nesse trabalho. A Seção 4.5 mostra que todos os grafos split-comparabilidade e split-intervalos satisfazem a hipótese de uma importante conjectura em coloração de arestas, a Conjectura *Overfull*, que será definida no Capítulo 3. Por fim, o capítulo 5 apresenta a conclusão e as considerações finais.

2 PRELIMINARES E ALGUMAS CLASSES DE GRAFOS

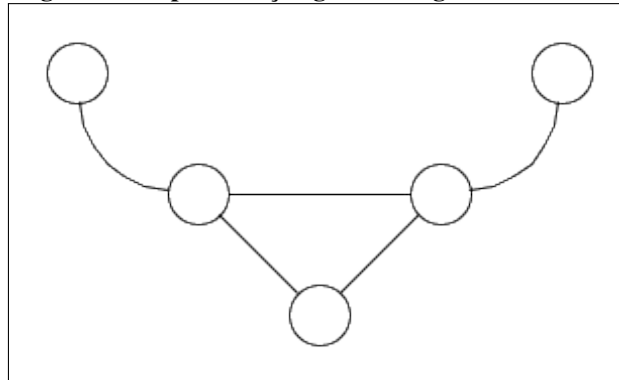
Este capítulo trata de definir os conceitos básicos necessários para o desenvolvimento desta pesquisa (Seção 2.1), bem como apresentar caracterizações de algumas superclasses dos grafos split-comparabilidade e split-intervalos (Seções 2.2 a 2.5), que permitiram a identificação de propriedades estruturais importantes para a solução do Problema da Coloração de Arestas nas classes de grafos abordadas. Todos os grafos split são cordais

A classe dos grafos é split é equivalente à classe dos grafos cordais cujo complemento também é cordal. Ou seja, cordal é uma superclasse dos grafos split a partir da qual estes grafos podem ser caracterizados. A Seção 2.2 define os grafos cordais. As duas classes de grafos para as quais são apresentadas soluções para o Problema da Coloração de Arestas são interseções dos grafos split com outras classes de grafos, comparabilidade e intervalos. Então, a Seção 2.3 apresenta os grafos split. A Seção 2.4 apresenta os grafos de comparabilidade. E a Seção 2.5 fala sobre os grafos interseção, que são uma superclasse dos grafos de intervalos a partir da qual estes grafos são definidos. A Seção 2.6 tem por objetivo delinear quais as relações entre as classes de grafos definidas neste capítulo. Das relações entre essas classes provém caracterizações e propriedades estruturais que permitiram a criação de algoritmos polinomiais para resolver o Problema da Coloração de Arestas para os split-comparabilidade e split-intervalos.

2.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

Um *grafo* $G = (V(G), E(G))$ é composto por, um conjunto de vértices, $V(G)$, e um multiconjunto de arestas, $E(G)$, tal que cada aresta é um par não ordenado de vértices não necessariamente distintos. Neste trabalho, vamos representar a aresta composta pelos vértices $v \in V(G)$ e $u \in V(G)$ por $uv \in E(G)$. Dizemos que a *aresta* uv incide em u e v , e que os vértices u e v são *vizinhos* ou *adjacentes*. Graficamente, os vértices são representados por círculos e as arestas por segmentos de curvas que conectam os círculos. A Figura 3 mostra a representação gráfica de um grafo conhecido como *grafo touro*.

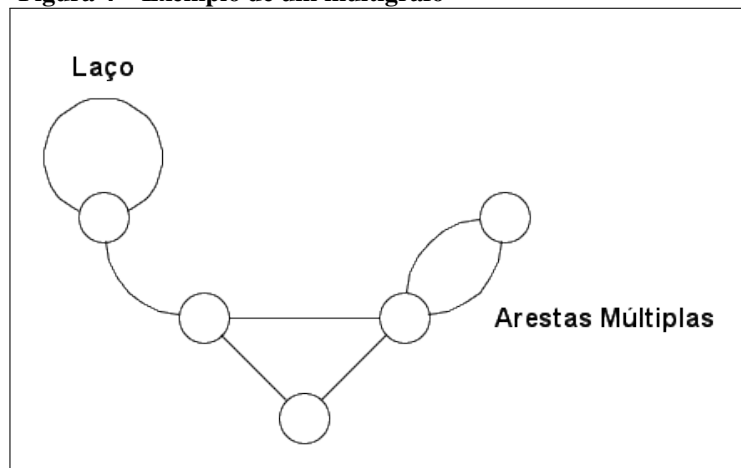
Figura 3 – Representação gráfica do grafo touro



Fonte: Autoria própria

Laços são arestas cujos extremos são o mesmo vértice, e *arestas múltiplas* são duas ou mais arestas entre o mesmo par de vértices. Grafos que possuem quaisquer dessas características são chamados *multigrafos*. A Figura 4 mostra um exemplo de multigrafo com duas arestas múltiplas e um laço.

Figura 4 – Exemplo de um multigrafo



Fonte: Autoria própria

Grafos que não possuem laços, nem arestas múltiplas são chamados de grafos *simples*. Nesse trabalho, todos os grafos considerados são simples.

O *grau* de um vértice v em um grafo G é o número de arestas incidentes em v em G e é denotado por $deg_G(v)$. A *vizinhança aberta* de um vértice v é o conjunto de todos os vértices vizinhos a v e é denotada por $N_G(v)$. A *vizinhança fechada* de v é o conjunto $N_G(v) \cup \{v\}$ e é denotada por $N_G[v]$. Quando não houver ambiguidade, o subscrito que identifica o grafo nas denotações será omitido escrevendo-se apenas $deg(v)$, $N(v)$ e $N[v]$. Denotamos um vértice v que tenha grau k por k -*vértice*. Um grafo é dito k -*regular* se todos os seus vértices possuem grau k . Um *vértice universal* v em um grafo G é um vértice v com $N[v] = V(G)$. *Grafos completos*, denotados por K_n , são grafos com n vértices tais que todo vértice é universal.

Como dito anteriormente, uma coloração de arestas é uma atribuição de cores para as arestas de um grafo. Uma *coloração parcial de arestas* é uma atribuição de cores para um

subconjunto do conjunto de arestas de um grafo. Um grafo é dito *crítico* se a remoção de qualquer aresta reduz o seu índice cromático. Seja, para um grafo G , temos $\varphi : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ uma coloração de arestas em um grafo G . A coloração φ é chamada de uma k -coloração. A cor em uma aresta e de G é denotada por $\varphi(e)$. Vamos cometer um abuso de notação e denotar por $\varphi(v)$ o conjunto de todas as cores das arestas incidentes em um vértice v . O conjunto $\overline{\varphi(v)}$ é o complemento do conjunto $\varphi(v)$ no conjunto de cores $\{1, 2, \dots, k\}$. Por fim, dizemos que uma cor c *falta* em um vértice v se $c \in \overline{\varphi(v)}$ e um conjunto de vértices é *elementar* se os conjuntos de cores faltantes nos seus vértices são dois a dois disjuntos.

Considere um grafo $G = (V(G), E(G))$. Dado um subconjunto $X \subseteq V(G)$, um *subgrafo induzido* por X , denotado por $G[X]$, é o grafo com conjunto de vértices $V(G[X]) = X$ e com conjunto de arestas $E(G[X])$ tal que para quaisquer dois vértices $u, v \in X$, $uv \in E(G)$ se, e somente se, $uv \in E(G[X])$. Dado um conjunto de arestas $A \subseteq E(G)$, um *subgrafo induzido pelo conjunto de arestas* A , denotado por $G[A]$, é o subgrafo de G com conjunto de arestas A tal que $v \in E(G[A])$ se, e somente se, alguma aresta de A incide em v no grafo G .

Um *conjunto independente de arestas* em um grafo, também chamado de *emparelhamento*, é um conjunto de arestas que duas a duas não incidem em um mesmo vértice. A cardinalidade do maior emparelhamento em G é denotada por $\alpha'(G)$ e este emparelhamento é dito um *emparelhamento máximo* em G . Se existe um emparelhamento M em um grafo G que contém exatamente uma aresta incidente em cada vértice de um subconjunto $X \subseteq V(G)$, diz-se que M *cobre* X . Um *emparelhamento perfeito* é um emparelhamento que cobre $V(G)$. Dado um grafo G com uma coloração de arestas, o conjunto de arestas que possuem a mesma cor é chamado de *classe de cor*. Observe que cada classe de cor em uma coloração de arestas de G é um emparelhamento em G .

Um *conjunto independente de vértices* em um grafo G , também chamado de *conjunto estável*, é um conjunto de vértices que são dois a dois não adjacentes. Neste trabalho, qualquer conjunto independente de vértices é chamado apenas de conjunto independente e qualquer conjunto independente de arestas é chamado de emparelhamento. Um grafo G é dito *bipartido* se, e somente se, G é trivial ou seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos A, B , de forma que A e B sejam conjuntos independentes em G . Quando G não é trivial, por definição de partição, A e B são não-vazios, $V(G) = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Uma *clique* é um conjunto de vértices que são dois a dois adjacentes em um grafo, isto é, existe uma aresta entre todo par de vértices de uma clique. Note que o grafo completo K_n tem uma clique de tamanho n . Uma clique é *maximal* se não está propriamente contida em nenhuma outra clique do grafo. O *complemento* de um grafo G , denotado por \overline{G} , é um grafo onde $V(\overline{G}) = V(G)$ e, para todo par de vértices u e v em $V(G)$, a aresta $uv \in E(\overline{G})$ se, e somente se, $uv \notin E(G)$. Observe que o complemento de uma clique é um conjunto independente e vice-versa.

A seguir, são apresentadas caracterizações e relações de interseção e inclusão entre as classes de grafos que foram estudadas durante o desenvolvimento deste trabalho.

2.2 GRAFOS CORDAIS

Definição 2.1. *Um grafo que não contém ciclos induzidos de tamanho pelo menos quatro é chamado de cordal.*

Existe uma ordenação dos vértices de um grafo cordal chamada de ordenação de eliminação perfeita. Uma ordem dos vértices para um grafo G na forma $(v_1, v_2, \dots, v_{|V(G)|})$ é uma *ordenação de eliminação perfeita* se, para cada vértice v_i e conjunto $S := \{v_j : v_j \in N(v_i), j > i\}$, temos que $v_i \cup S$ forma uma clique em G . Fulkerson e Gross (1965) propuseram a seguinte caracterização para grafos cordais.

Teorema 2.2 (FULKERSON; GROSS, 1965). *Um grafo é cordal se, e somente se, possui uma ordenação de eliminação perfeita dos seus vértices.*

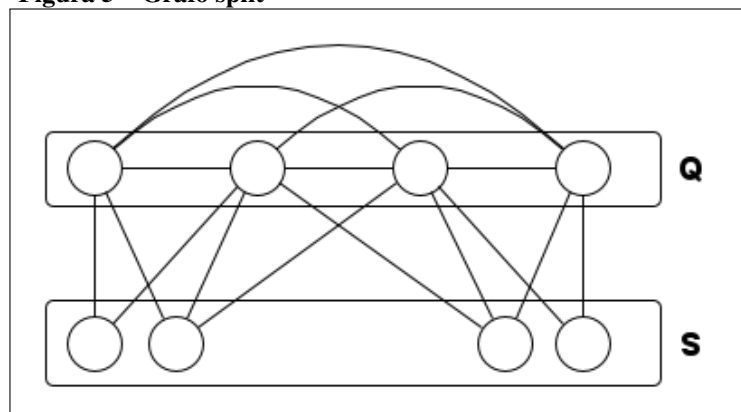
2.3 GRAFOS SPLIT

A Definição 2.3 apresenta a classe dos grafos split considerando os conceitos de clique e conjunto independente. Essa definição baseia-se em uma importante propriedade estrutural já utilizada por outros autores para a coloração de arestas de subconjuntos de grafos desta classe, como pode ser visto em Chen, Fu e Ko (1995) e Almeida (2012).

Definição 2.3. *Um grafo G cujo conjunto $V(G)$ pode ser particionado em uma clique e um conjunto independente é chamado de split.*

Neste trabalho, a partição do conjunto de vértices de um grafo split G em uma clique e um conjunto independente será denotada por $[Q, S]$, onde Q sempre denota uma clique maximal e S é um conjunto independente. A Figura 5 mostra um exemplo de grafo split com 4 vértices em sua clique Q e 4 vértices no seu conjunto independente S .

Figura 5 – Grafo split



Fonte: Autoria própria

A Definição 2.3 implica que o complemento de um grafo split $G = [Q, S]$ também é um grafo split, no qual Q é um conjunto independente e S é uma clique.

Note que todo grafo split G é cordal, pois qualquer ciclo em G que tenha mais de três vértices satisfaz uma das seguintes condições:

1. o ciclo possui somente vértices da clique: como os vértices da clique são todos vizinhos, este não é um ciclo induzido;
2. o ciclo possui um vértice u do conjunto independente: como u pertence ao ciclo, u é adjacente a dois vértices da clique que (por serem da clique) são vizinhos. Então este também não é um ciclo induzido.

Földes e Hammer (1977) caracterizaram os grafos split mostrando que estes são os únicos grafos cordais cujo complemento também é cordal. A suficiência deste teorema baseia-se no fato de que o complemento de um grafo split também é um grafo split e de que todo grafo split é cordal. A prova da necessidade não é trivial.

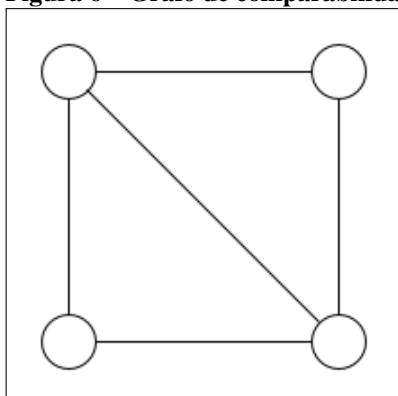
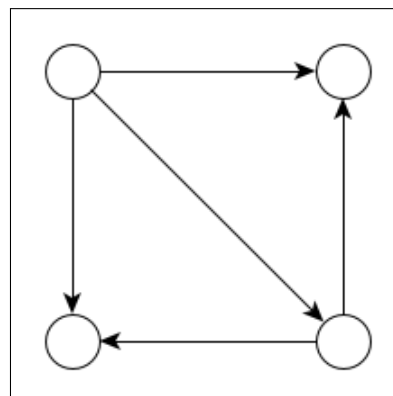
Teorema 2.4 (FÖLDES; HAMMER, 1977). *Um grafo G é split se, e somente se, G e \overline{G} são cordais.*

2.4 GRAFOS DE COMPARABILIDADE

Uma *orientação transitiva* das arestas de um grafo G é uma atribuição de orientação para cada aresta de G de forma que, se existe uma aresta orientada de um vértice a para um vértice b e de b para um vértice c , então deve existir uma aresta orientada de a para c .

Definição 2.5. *Um grafo que possui uma orientação transitiva para suas arestas é chamado de grafo de comparabilidade.*

A Figura 6 apresenta um grafo de comparabilidade e uma orientação transitiva para suas arestas.

Figura 6 – Grafo de comparabilidade**(a) Um grafo de comparabilidade G** **(b) Uma orientação transitiva para as arestas de G**

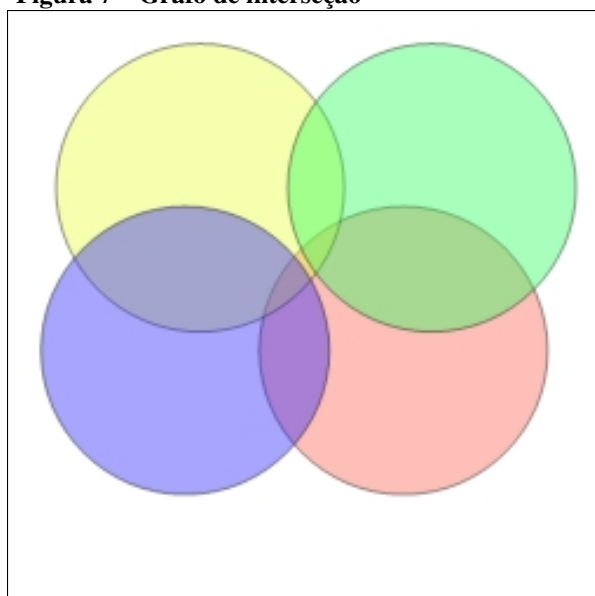
Fonte: Autoria própria

Os grafos de *co-comparabilidade* são grafos cujo complemento é um grafo de comparabilidade. Ou seja, é um grafo cujo complemento admite uma orientação transitiva para suas arestas.

2.5 GRAFOS DE INTERSEÇÃO

Definição 2.6. Para um conjunto de conjuntos F (que podem possuir interseções), o grafo de interseção G desses objetos tem como conjunto de vértices F , e dois vértices em G são adjacentes se seus respectivos objetos possuem interseção não vazia.

A Figura 7 apresenta uma família de conjuntos que correspondem ao grafo de interseção da Figura 6a.

Figura 7 – Grafo de interseção

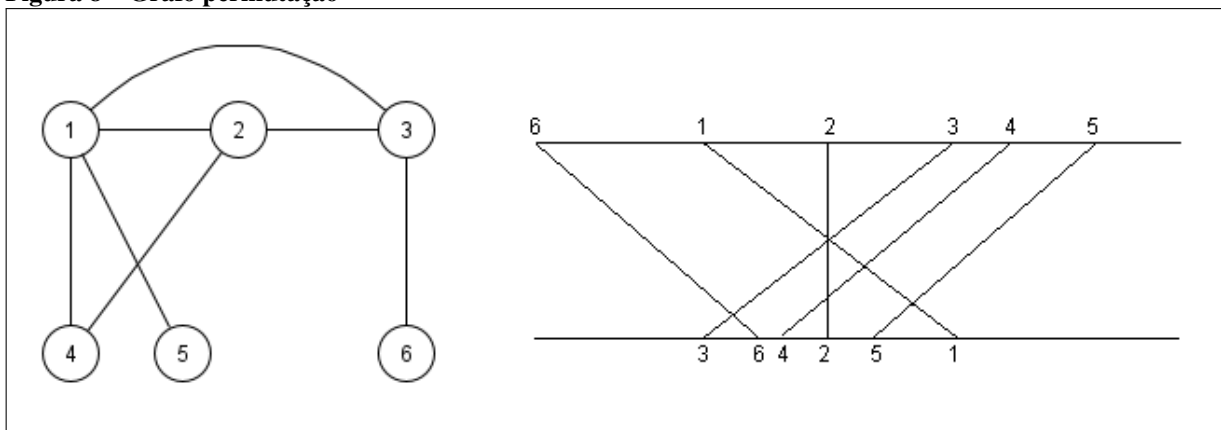
Fonte: Autoria própria

Todo grafo é grafo de interseção de alguma família de conjuntos (GOLUMBIC, 2004). Então, é interessante considerar classes de grafos definidas pela interseção de famílias restritas de conjuntos ao buscar algoritmos polinomiais para a solução de problemas considerados difíceis na Teoria dos Grafos. Duas subclasses de grafos de interseção que serão abordadas neste projeto são os grafos permutação e os grafos de intervalos, definidos a seguir.

Definição 2.7 (PNUELI; LEMPEL; EVEN, 1971). *Um grafo de interseção de uma família de segmentos de reta entre duas retas paralelas é chamado de grafo permutação.*

A Figura 8 apresenta um grafo permutação e sua representação por uma família de segmentos de reta entre duas retas paralelas, onde cada vértice corresponde a um segmento de reta e dois vértices são adjacentes se, e somente se, os respectivos segmentos de reta se intersectam.

Figura 8 – Grafo permutação

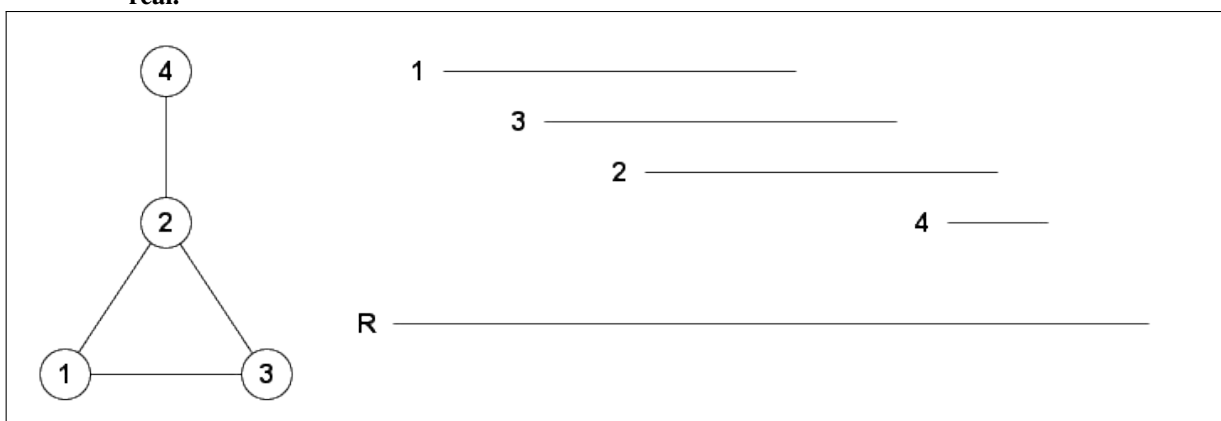


Fonte: Autoria própria

Definição 2.8 (HAJÓS, 1957). *Um grafo de interseção de uma família de intervalos na reta real é chamado de grafo de intervalos.*

A Figura 9 apresenta um grafo de intervalos e sua representação como grafo interseção de intervalos da reta real, onde cada vértice corresponde a um intervalo e dois vértices são adjacentes se, e somente se, os respectivos intervalos se intersectam.

Figura 9 – Grafo de intervalos. Os segmentos de reta são uma projeção dos respectivos intervalos na reta real.



Fonte: Autoria própria

2.6 RELAÇÕES DE INTERSEÇÃO ENTRE AS CLASSES

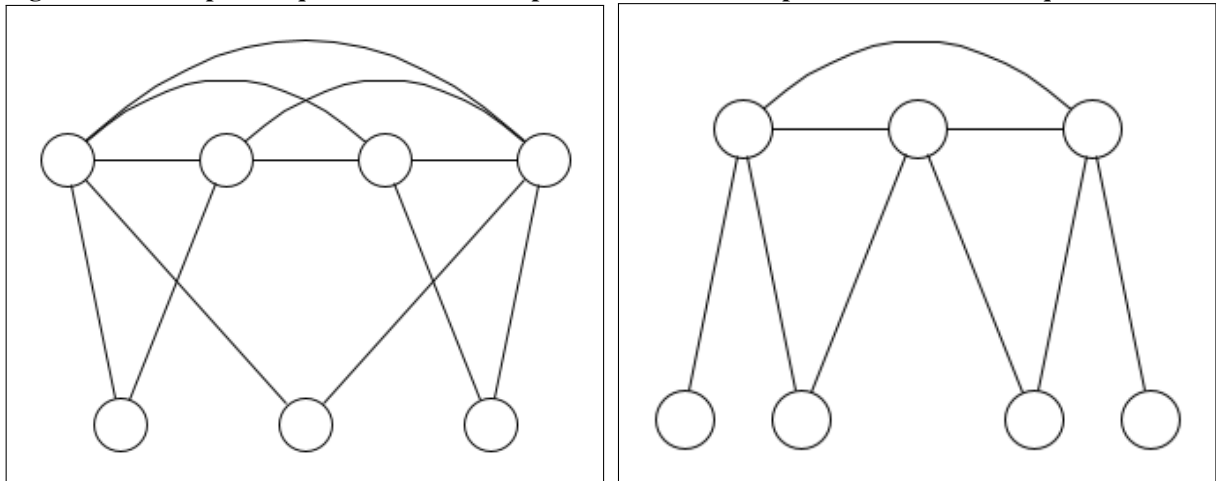
Há interseção não-vazia entre todas as classes de grafos mencionadas e que serão estudadas. Nesta seção, são apresentadas relações de interseção e inclusão destas classes. Em alguns casos, essas relações evidenciam caracterizações para estas classes de grafos.

Existe interseção entre as classes de grafos de comparabilidade e co-comparabilidade, como mostra o Teorema 2.9.

Teorema 2.9 (DUSHNIK; MILLER, 1941). *Um grafo G é um grafo permutação se, e somente se, G e seu complemento são grafos de comparabilidade.*

Entretanto, as classes de comparabilidade e co-comparabilidade não são equivalentes. A Figura 10 apresenta exemplos de grafos que pertencem a uma dessas classes, mas não ambas. Na Figura 10a temos um exemplo de grafo de comparabilidade que não é grafo de co-comparabilidade, e na Figura 10b temos um exemplo de grafo de co-comparabilidade que não é grafo de comparabilidade. Perceba que o complemento da Figura 10a é o grafo da Figura 10b.

Figura 10 – Exemplos de que as classes de comparabilidade e co-comparabilidade não são equivalentes.



(a) Um grafo de comparabilidade que não é grafo de co-comparabilidade.

(b) Um grafo de co-comparabilidade que não é grafo de comparabilidade.

Fonte: Autoria própria

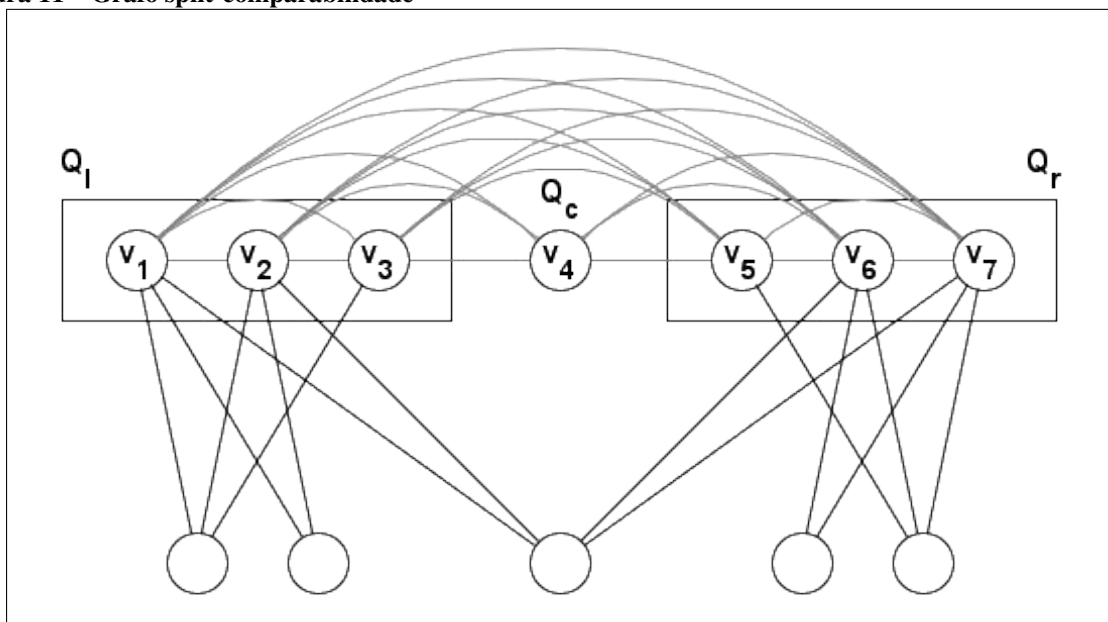
Existe interseção entre os grafos split e de comparabilidade. Os grafos dessa interseção foram caracterizados por Ortiz e Villanueva (1996), como pode ser visto no Teorema 2.10.

Teorema 2.10 (ORTIZ; VILLANUEVA, 1996). *Um grafo split $G = [Q, S]$ é split-comparabilidade se o conjunto Q pode ser particionado em Q_l, Q_c, Q_r , e os vértices de Q podem ser ordenados v_1, v_2, \dots, v_q , de forma que para cada vértice $s \in S$ temos:*

- i) $N(s) \cap Q_c = \emptyset$;
- ii) Se $v_k \in (N(s) \cap Q_l)$ então $v_{k-1} \in (N(s) \cap Q_l)$;
- iii) Se $v_k \in (N(s) \cap Q_r)$ então $v_{k+1} \in (N(s) \cap Q_r)$.

Um exemplo de grafo split-comparabilidade pode ser visto na Figura 11.

Figura 11 – Grafo split-comparabilidade



Fonte: Autoria própria

A caracterização apresentada no Teorema 2.10 induz uma partição dos vértices de S em S_l , S_c e S_r , de forma que a vizinhança de qualquer vértice em S_l (ou S_r) está contida em Q_l (ou Q_r) e a vizinhança de qualquer vértice em S_c está contida em $Q_l \cup Q_r$. Além disso, é possível ordenar os vértices em S_l (ou S_r), $u_0, u_1, \dots, u_{|S_l|-1}$, tal que $\deg(u_i) \leq \deg(u_{i+1})$ e esta ordem permite observar a propriedade de inclusão de vizinhanças desse subconjunto, definida a seguir.

Definição 2.11. *Dado um conjunto de vértices $U = \{u_0, u_1, \dots, u_k\}$, o conjunto U satisfaz a propriedade de inclusão de vizinhanças se existe uma ordem dos vértices de U tal que $N(u_i) \subseteq N(u_{i+1})$, para $0 \leq i < k$.*

Como o complemento de um grafo split G é também um grafo split, pode-se concluir que o complemento de um grafo split-comparabilidade é um grafo que pertence à interseção das classes split e co-comparabilidade.

Definição 2.12. *Um grafo G cujo complemento \overline{G} é um grafo split-comparabilidade é chamado de split-co-comparabilidade.*

Se G pertence à interseção das classes split, comparabilidade e co-comparabilidade, então G é um *split-permutação*.

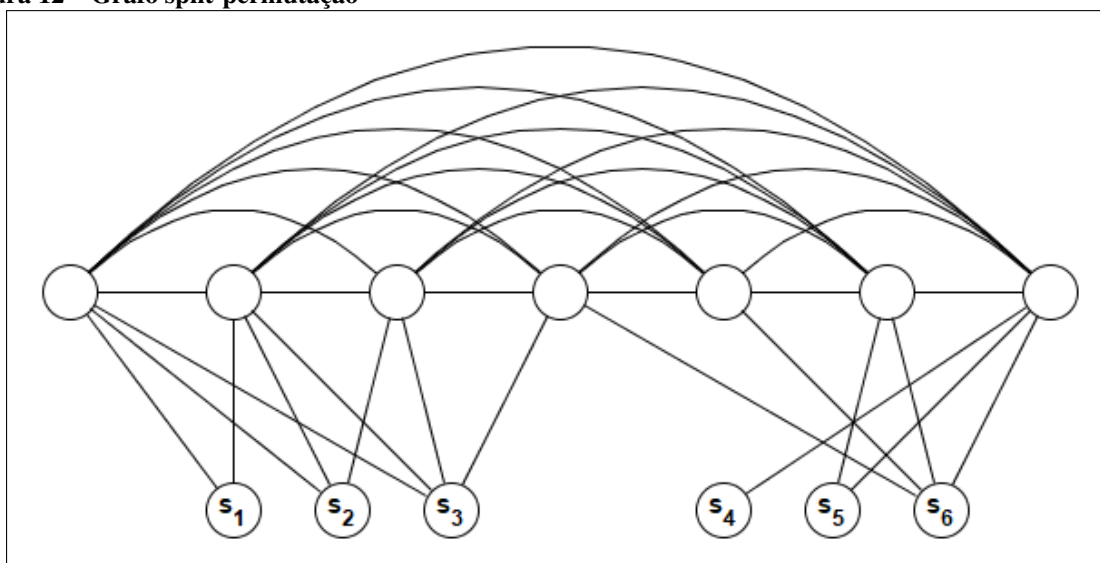
Definição 2.13. *Um grafo que é split-comparabilidade e split-co-comparabilidade ao mesmo tempo é chamado de split-permutação.*

Ortiz e Villanueva (2010) apresentaram uma caracterização para os grafos split-permutação, como mostra o Teorema 2.14.

Teorema 2.14 (ORTIZ; VILLANUEVA, 2010). *Um grafo split-comparabilidade $G = [Q, S]$ é um grafo permutação se, e somente se, S pode ser particionado em S_1 e S_2 de forma que os vértices em S possam ser ordenados (s_1, s_2, \dots, s_k) garantindo que sempre que $s_i, s_j \in S_1$ ou $s_i, s_j \in S_2$, se $s_i < s_j$, então $N(s_i) \subseteq N(s_j)$.*

Um exemplo de split-permutação pode ser visto na Figura 12.

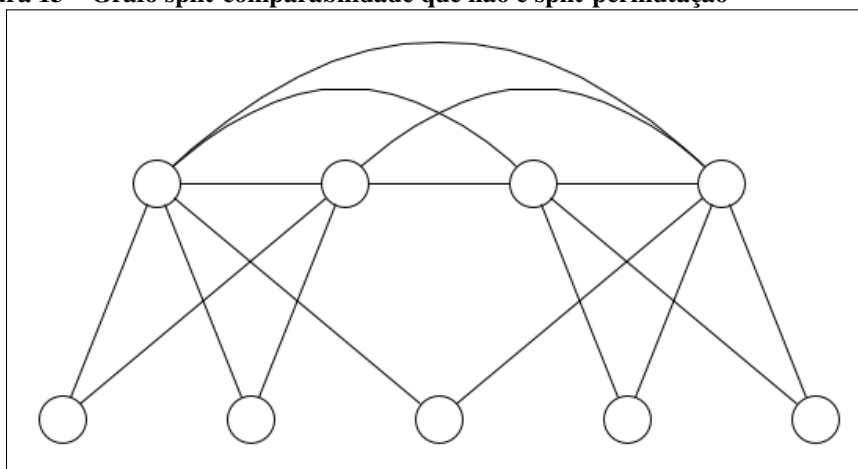
Figura 12 – Grafo split-permutação



Fonte: Autoria própria

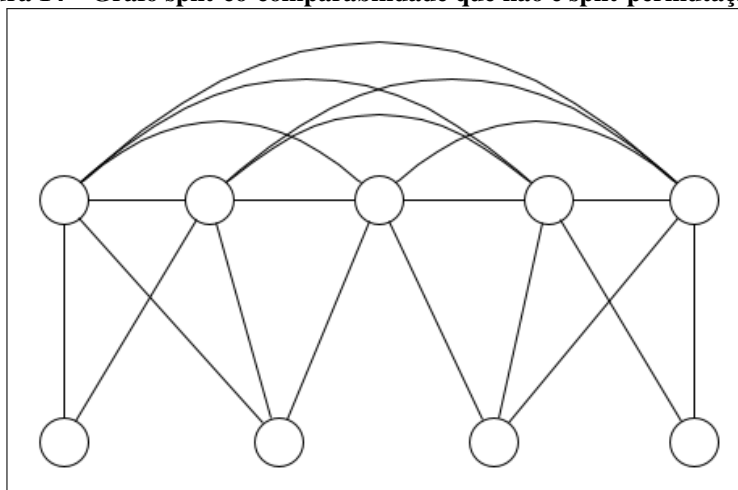
Existem grafos split-comparabilidade e grafos split-co-comparabilidade que não são grafos split-permutação, conforme ilustrado pelas figuras 13 e 14.

Figura 13 – Grafo split-comparabilidade que não é split-permutação



Fonte: Autoria própria

Figura 14 – Grafo split-co-comparabilidade que não é split-permutação



Fonte: Autoria própria

Todo grafo de intervalos é um grafo de co-comparabilidade, já que dois vértices são adjacentes no complemento do grafo se, e somente se, um dos intervalos precede totalmente o outro e esta relação é transitiva. Todo grafo de intervalos também é cordal, já que não é possível representar qualquer ciclo induzido de tamanho pelo menos quatro pela interseção de uma família de intervalos da reta real. Gilmore e Hoffman (1964) provaram a equivalência entre a classe dos grafos de intervalos e a interseção cordais-co-comparabilidade.

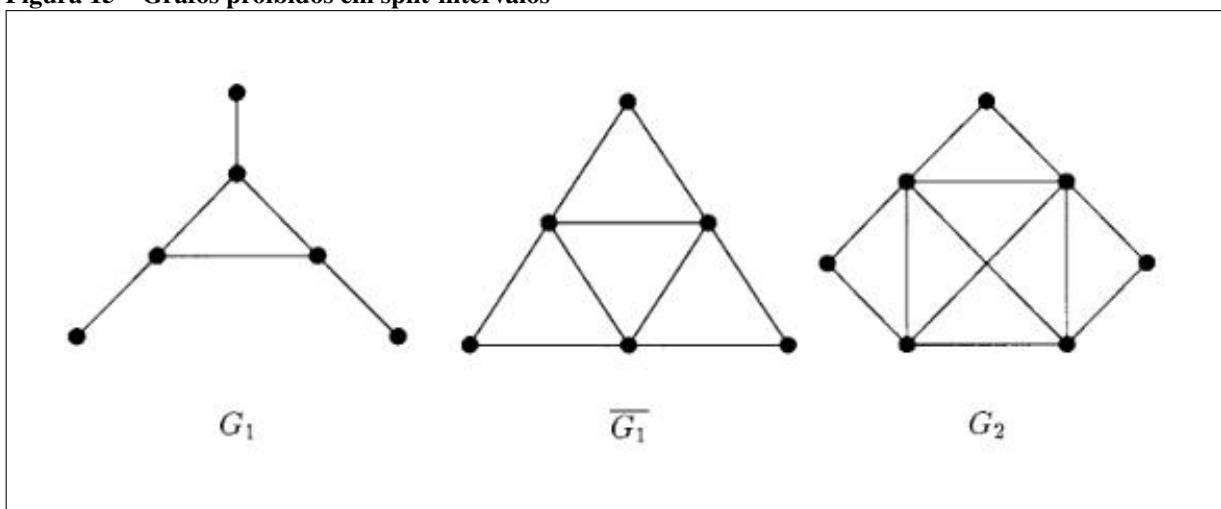
Teorema 2.15 (GILMORE; HOFFMAN, 1964). *Um grafo G é de intervalos se, e somente se, G é cordal e de co-comparabilidade.*

Como todo grafo split é cordal, os grafos split-co-comparabilidade são grafos split que pertencem às classes de grafos cordais e de co-comparabilidade, ou seja, são grafos de intervalos. Portanto, as classes split-co-comparabilidade e split-intervalos são equivalentes. Esta equivalência também foi observada na caracterização apresentada por Mahadev e Peled (1995), apresentada no Teorema 2.16.

Teorema 2.16 (MAHADEV; PELED, 1995). *Para todo grafo split G , as seguintes condições são equivalentes:*

- G é um grafo de intervalos;
- G é um grafo de co-comparabilidade;
- G não possui nenhum dos grafos da Figura 15 como subgrafos induzidos.

Figura 15 – Grafos proibidos em split-intervalos

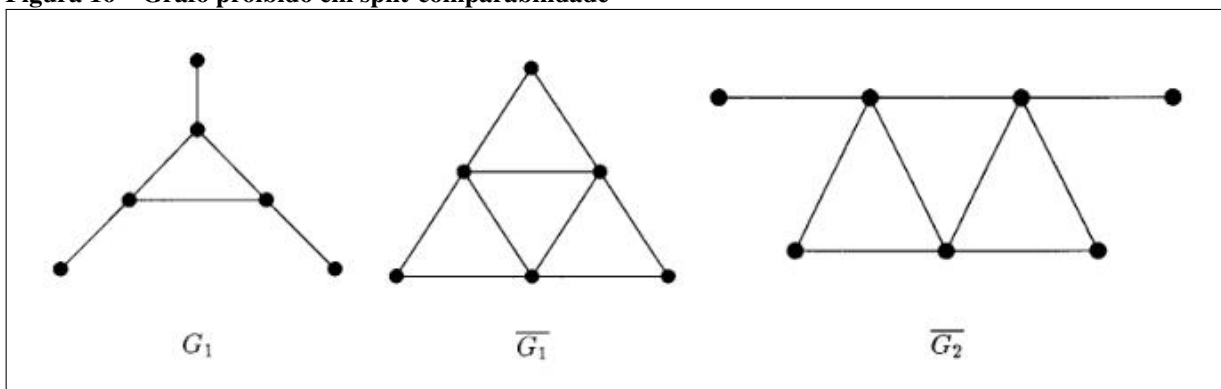


Fonte: (MAHADEV; PELED, 1995)

Os grafos de comparabilidade também podem ser caracterizados por subgrafos proibidos.

Corolário 2.17. (MAHADEV; PELED, 1995) *Um grafo split é de comparabilidade se, e somente se, não contém nenhum dos grafos apresentados na Figura 16, como subgrafo induzido.*

Figura 16 – Grafo proibido em split-comparabilidade



Fonte: (MAHADEV; PELED, 1995)

Desta forma o conjunto dos grafos split-intervalos que não são grafos split-permutação necessariamente possuem o grafo \overline{G}_2 da Figura 16 como subgrafo induzido.

Considerando a classe dos grafos split-intervalos, que é objeto de estudo desta dissertação de mestrado, uma subclasse para a qual o Problema da Classificação está resolvido em tempo polinomial é a dos grafos split-indiferença (ORTIZ; MACULAN; SZWARCFITER, 1998).

Definição 2.18 (ROBERTS, 1969). *Um grafo interseção de uma família de intervalos unitários da reta real é chamado de indiferença.*

Uma caracterização para a classe dos grafos indiferença é dada a seguir.

Teorema 2.19 (ROBERTS, 1969). *Um grafo G é indiferença se, e somente se, G é o grafo interseção de uma família de intervalos tais que nenhum intervalo contém propriamente¹ outro intervalo.*

O Teorema 2.19 nos garante que grafos indiferença são uma subclasse dos grafos de intervalos e justifica o uso do termo *grafos de intervalos próprios* para se referir a esta classe.

Um grafo é *split-indiferença* se pertence à interseção das classes split e indiferença. Ortiz, Maculan e Szwarcfiter (1998) apresentam uma caracterização para a classe dos grafos split-indiferença.

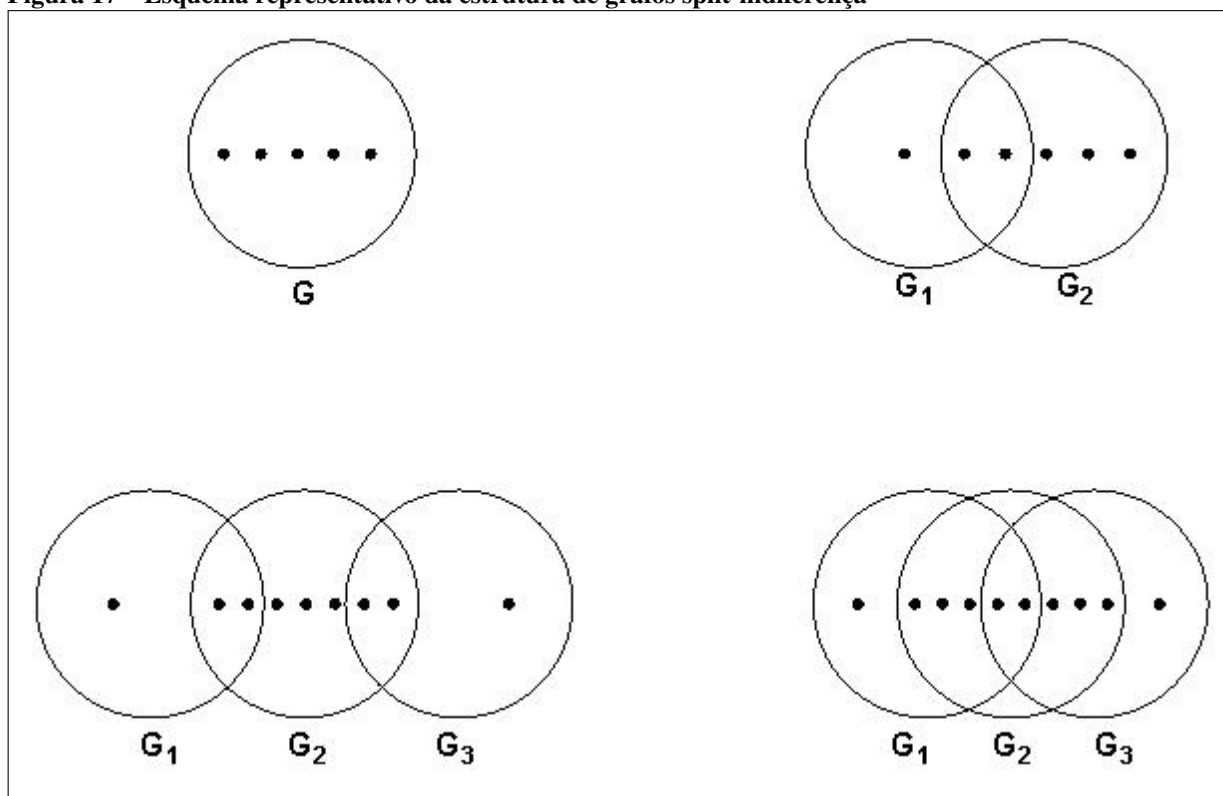
Teorema 2.20 (ORTIZ; MACULAN; SZWARCFITER, 1998). *Um grafo conexo G é split-indiferença se, e somente se, satisfaz uma das seguintes condições:*

- G é um grafo completo;
- G é a união de duas cliques G_1 e G_2 tal que $G_1 \setminus G_2 = K_1$;
- G é a união de três cliques G_1 , G_2 e G_3 tal que
 - $G_1 \setminus G_2 = K_1$ e $G_3 \setminus G_2 = K_1$ e
 - $V(G_1) \cap V(G_3) = \emptyset$ ou $V(G_1) \cup V(G_3) = V(G)$.

A Figura 17 mostra um esquema das possíveis estruturas para os grafos split-indiferença de acordo com o Teorema 2.20. Os círculos grandes representam cliques contendo vértices representados por pontos.

¹ Um conjunto A contém propriamente um conjunto B se $A \neq B$ e A contém B .

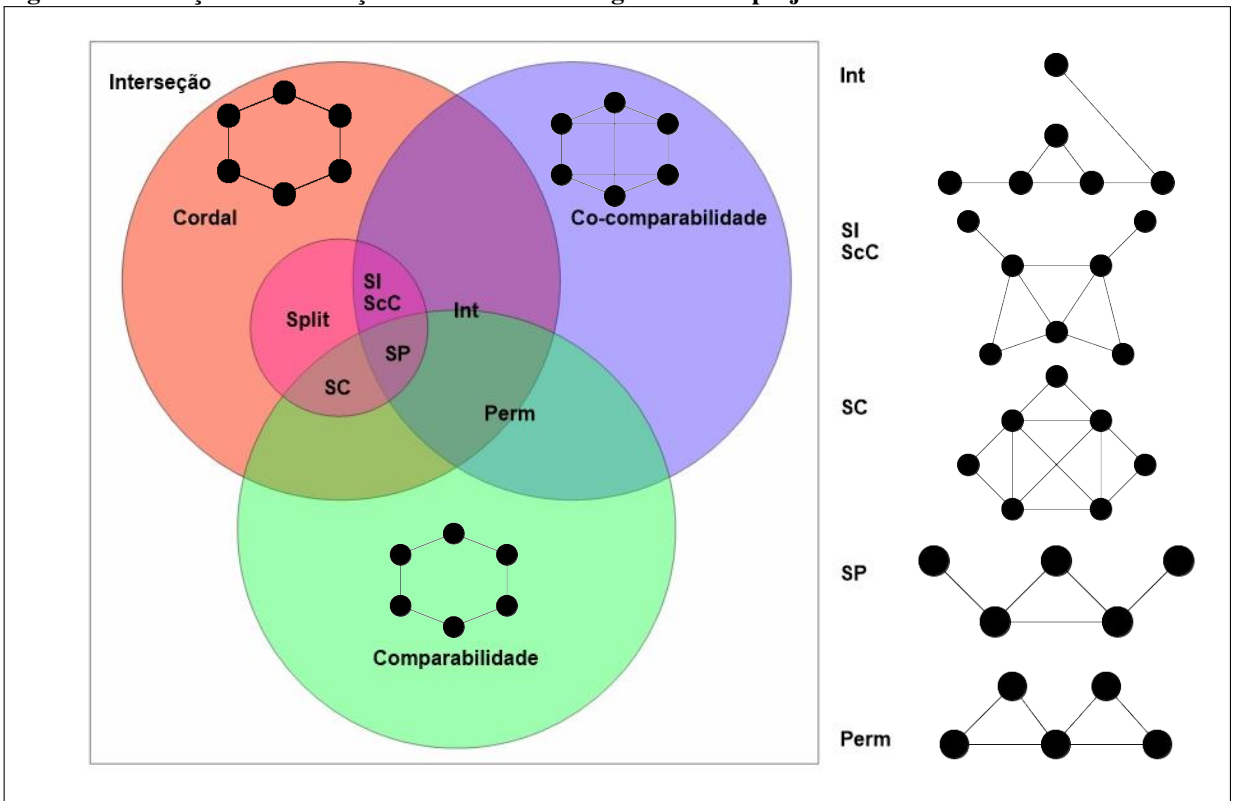
Figura 17 – Esquema representativo da estrutura de grafos split-indiferença



Fonte: Ortiz, Maculan e Szwarcfiter (1998).

A Figura 18 exibe um diagrama de Venn para as relações de inclusão das classes em estudo. Os grafos de interseção são o universo deste diagrama. “Int” refere-se aos grafos de intervalos, que são a interseção de cordais e grafos de co-comparabilidade. “SI” e “ScC” referem-se aos grafos split-intervalos e split-co-comparabilidade, respectivamente. Note que “SI” e “ScC” são classes equivalentes. “Perm” refere-se ao grafos permutação, “SP” aos split-permutação e “SC” aos split-comparabilidade. Exemplos de grafos em cada família podem ser observados próximos à respectiva sigla usada.

Figura 18 – Relações de interseção entre as classes de grafos deste projeto



Fonte: Autoria própria

3 RESULTADOS ANTERIORES EM COLORAÇÃO DE ARESTAS

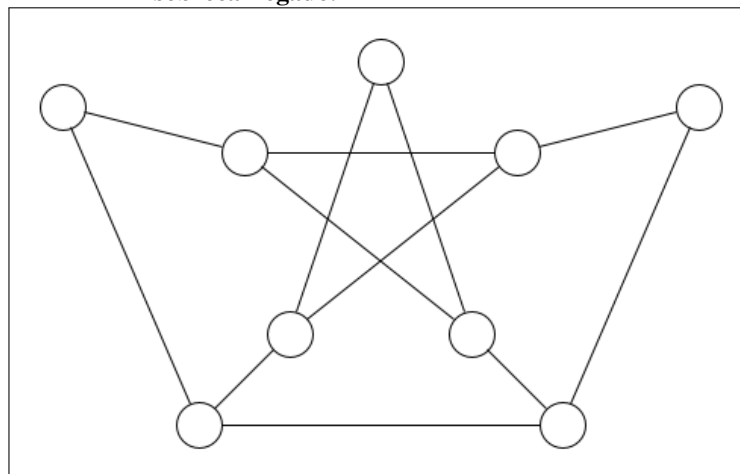
Para alguns subconjuntos dos grafos split, o Problema da Coloração de Arestas pode ser resolvido em tempo polinomial. Conhecê-los é importante para identificação de qual o subconjunto dos grafos split-comparabilidade e split-intervalos em que o problema permanece em aberto.

Um método eficiente de identificar alguns grafos Classe 2 é pela contagem do número de arestas. Para qualquer grafo G com n vértices, $\alpha'(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, pela definição de emparelhamento. Então, qualquer cor pode colorir no máximo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ arestas de G . Portanto, $\Delta(G)$ cores podem colorir no máximo $\Delta(G) \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ arestas de G . Assim, quando o grafo G satisfaz

$$|E(G)| > \Delta(G) \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \quad (3.1)$$

G é necessariamente Classe 2 e dizemos que G é *sobrecarregado*. Sabe-se que existem grafos Classe 2 que não são sobrecarregados, como o grafo de Petersen. O menor grafo Classe 2 não sobrecarregado é o grafo de Petersen sem um de seus vértices (veja na Figura 19).

Figura 19 – Grafo P^* , um exemplo de Classe 2 que não é sobrecarregado.



Fonte: Autoria própria

Se G contém um subgrafo H tal que $\Delta(H) = \Delta(G)$ e H é sobrecarregado, dizemos que G é *subgrafo-sobrecarregado*. Além disso, se H for um subgrafo induzido pela vizinhança fechada de um $\Delta(G)$ -vértice, então G é chamado de *vizinhança-sobrecarregado*. Chetwynd e Hilton (1986), Hilton, Holroyd e Zhao (2001) propuseram uma conjectura que resolveria o Problema da Classificação para grafos que satisfazem uma certa relação entre número de vértices e grau máximo. Tal conjectura é a Conjectura *Overfull* enunciada a seguir.

Conjectura 3.1 (CHETWYND; HILTON, 1984; CHETWYND; HILTON, 1986; HILTON; JOHNSON, 1987). *Seja G um grafo tal que $\Delta(G) > |V(G)|/3$. Então G é Classe 1 se, e somente se, não é subgrafo-sobrecarregado.*

O Teorema 3.2 garante que para decidir se um grafo split G é subgrafo-sobrecarregado, é suficiente avaliar os subgrafos de G induzidos pelas vizinhanças de seus $\Delta(G)$ -vértices.

Teorema 3.2 (FIGUEIREDO; MEIDANIS; MELLO, 2000). *Seja G um grafo split. Então, G é subgrafo-sobrecarregado se, e somente se, G é vizinhança-sobrecarregado.*

Pelo Teorema 2.4, sabe-se que todo grafo split é cordal. Para a classe dos grafos cordais, a Conjectura 3.3 permanece aberta há mais de vinte anos.

Conjectura 3.3 (FIGUEIREDO; MEIDANIS; MELLO, 2000). *Seja G um grafo cordal. O grafo G é Classe 2 se, e somente se, G é subgrafo-sobrecarregado.*

Na determinação de grafos split Classe 1, uma ferramenta utilizada para a apresentação de uma coloração de arestas de um grafo G com $\Delta(G)$ cores é o quadrado latino (CHEN; FU; KO, 1995). Um *quadrado latino* de ordem k é uma matriz $k \times k$ preenchida com um conjunto de k números inteiros positivos de forma que cada célula tem um desses números e quaisquer duas células na mesma linha ou na mesma coluna não estão preenchidas com o mesmo valor. Os quadrados latinos usados nesse trabalho têm a forma:

$$m_{i,j} \equiv i + j \pmod{k}, \quad 0 \leq i, j < k. \quad (3.2)$$

Um quadrado latino $M = [m_{i,j}]$ é *comutativo* se $m_{i,j} = m_{j,i}$ e é *idempotente* se todos os elementos da diagonal principal são distintos. Sabe-se que não existem quadrados latinos de ordem par que sejam idempotentes (CHEN; FU; KO, 1995). A Figura 20a mostra o exemplo de um quadrado latino idempotente gerado pela Equação 3.2. A Figura 20b mostra um quadrado latino par. Em ambos os casos a diagonal principal está destacada. O quadrado latino definido pela equação 3.2 é comutativo e, quando k é ímpar, também é idempotente. Um exemplo de uso dos quadrados latinos na coloração de arestas de uma subclasse dos grafos split pode ser visto no Teorema 3.4.

Figura 20 – Quadrado latino

(a) Quadrado latino idempotente

0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

(b) quadrado latino par

0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	0
2	3	4	5	0	1
3	4	5	0	1	2
4	5	0	1	2	3
5	0	1	2	3	4

Fonte: Autoria própria

Teorema 3.4 (BEHZAD; CHARTRAND; COOPER, 1967). *Um grafo completo K_n é Classe 1 se, e somente se, n é par.*

Demonstração. Seja K_n um grafo completo. Então, $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$ e $\Delta(K_n) = n - 1$. Se n é ímpar, $\frac{n(n-1)}{2} > (n-1) \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Logo K_n é sobrecarregado e, portanto, Classe 2.

Se n é par, então rotule cada vértice de K_n da forma v_i , com $0 \leq i < n$. Para a aresta $v_i v_j$, $0 \leq i, j \leq n-2$, atribua a cor que consta na célula $m_{i,j}$ do quadrado latino $[m_{i,j}]$ de ordem n definido pela equação (3.2). Atribua a cor $m_{i,i}$ para a aresta $v_i v_{n-1}$, $0 \leq i \leq n-2$. Como nenhuma coluna ou linha dessa matriz possui cores repetidas, não existem arestas adjacentes com a mesma cor e o grafo K_n possui uma coloração de arestas com $\Delta(K_n)$ cores. Portanto, quando n é par, K_n é Classe 1. \square

Observe que todo grafo K_n com n ímpar é subgrafo de um K_{n+1} . Pelo Teorema 3.4, pode-se obter uma coloração de arestas com $\Delta(K_{n+1}) = n$ cores para o grafo K_{n+1} . Removendo um vértice do K_{n+1} e mantendo as cores atribuídas para suas arestas, obtemos uma coloração para K_n usando n cores.

Um grafo *split-completo* é um grafo split G com partição $[Q, S]$ tal que, para todo par de vértices $u \in S$ e $v \in Q$, tem-se $uv \in E(G)$. Ainda usando quadrados latinos, porém de forma mais elaborada, foram obtidos os seguintes resultados para a classe dos grafos split.

Teorema 3.5 (CHEN; FU; KO, 1995). *Seja G um grafo split-completo. O grafo G é Classe 2 se, e somente se, G é vizinhança-sobrecarregado.*

Teorema 3.6 (CHEN; FU; KO, 1995). *Seja G um grafo split. Se $\Delta(G)$ é ímpar então G é Classe 1.*

O Teorema 3.6 usa uma estrutura conhecida como diagrama de cores. Um *diagrama de cores* é um sequência de vetores de cores (C_0, C_1, \dots, C_k) , onde cada vetor de cores $C_i = [c_{i,0}, \dots, c_{i,d_i}]$ é um sequência de cores duas a duas distintas, para $0 \leq i \leq k$. Um diagrama de cores é *monotônico* se a cor $c_{i,j}$ aparece no máximo $d_i - j$ vezes em (C_0, \dots, C_{i-1}) para cada par i, j tal que $0 \leq i \leq k$ e $0 \leq j \leq d_i$. A Figura 21a mostra um exemplo de diagrama de cores monotônico, enquanto a Figura 21b mostra um exemplo de diagrama de cores não monotônico devido à cor em negrito, que não pode aparecer em um vetor anterior. Chen, Fu e Ko (1995) usaram o conceito de diagrama de cores para colorir todo grafo split-completo e split com grau máximo ímpar. O Lema 3.7 apresenta um resultado em coloração de arestas para grafos bipartidos que usa o conceito de diagrama de cores que será importante para as demonstrações dos resultados principais deste trabalho.

Figura 21 – Diagramas de cores
(a) diagrama de cores monotônico (b) diagrama de cores não monotônico

1	2	3	1	2	3
3	2	4	3	2	4
3	4	5	3	5	4

Fonte: Autoria própria

Lema 3.7 (CHEN; FU; KO, 1995). *Seja B um grafo bipartido com partes X e Y e $C = (C_0, \dots, C_{|X|-1})$ um diagrama de cores monotônico com $d_i \geq \deg_B(x_i)$, para todo $x_i \in X$. Então, existe uma coloração de arestas em B usando as cores do diagrama C .*

Utilizando uma adaptação da técnica de coloração de arestas apresentada na prova do Teorema 3.6, com quadrados latinos de ordem par, Almeida (2012) apresentou o seguinte resultado para grafos split com grau máximo par.

Teorema 3.8 (ALMEIDA, 2012). *Seja $G = [Q, S]$ um grafo split. Se existe um vértice $v \in S$ tal que $\lceil \frac{|Q|}{2} \rceil \leq \deg(v) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$, então G é Classe 1.*

Dos teoremas 3.6 e 3.8 resulta que o Problema da Coloração de Arestas permanece em aberto na classe dos grafos split apenas para o subconjunto de grafos que possuem grau máximo par e cujos vértices do conjunto independente têm grau menor que $\lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$ ou maior que $\frac{\Delta(G)}{2}$.

Conforme definimos anteriormente, um vértice universal é um vértice v em um grafo G de forma que $N[v] = V(G)$. Assim, em um grafo de n vértices com vértice universal vale que $\Delta(G) = n - 1$. De forma análoga, dizemos que um vértice v em um grafo G de n vértices é um *vértice quasi-universal*, se $\deg(v) = \Delta(G) = n - 2$. Os teoremas 3.9, 3.10 e 3.11 a seguir se referem a grafos com vértice universal ou quasi-universal.

Teorema 3.9 (PLANTHOLT, 1981). *Um grafo com vértice universal é Classe 1 se, e somente se, não é sobrecarregado.*

Teorema 3.10 (PLANTHOLT, 1983). *Seja G um grafo com grau máximo par e com vértice quasi-universal. O grafo G é Classe 1 se, e somente se, G não é subgrafo-sobrecarregado.*

Note que os grafos considerados no Teorema 3.10 tem número de vértices par. Quando o número de vértices é ímpar, o índice cromático dos grafos com vértice quasi-universal também é conhecido, conforme o Teorema 3.11.

Teorema 3.11 (CHETWYND A; HILTON, 1984). *Seja G um grafo com grau máximo ímpar e com vértice quasi-universal. O grafo G é Classe 1 se, e somente se, G não é subgrafo-sobrecarregado.*

Em particular, o Teorema 3.9 resolve o Problema da Classificação para grafos split com vértice universal. E os Teoremas 3.10 e 3.11 garantem que o Problema da Classificação também está resolvido para todos os grafos split com vértice quasi-universal.

O *seminúcleo* de um grafo G é o subgrafo de G induzido pelo conjunto dos seus $\Delta(G)$ -vértices e suas vizinhanças. A estrutura do seminúcleo é fundamental na determinação do índice cromático em um grafo, conforme estabelecido no Teorema 3.12.

Teorema 3.12 (MACHADO; FIGUEIREDO, 2010). *Sejam G e K_G , um grafo e seu seminúcleo, respectivamente. Então, $\chi'(G) = \chi'(K_G)$.*

Pelo Teorema 3.12, a determinação do índice cromático de qualquer grafo split G (e de qualquer grafo em geral) pode ser feita observando-se somente o subgrafo induzido pela vizinhança fechada de seus $\Delta(G)$ -vértices. Então, por exemplo, se G é split e seu seminúcleo contém um vértice universal ou quasi-universal, G é Classe 1 se e, somente se, seu seminúcleo não é subgrafo-sobrecarregado. Da mesma forma, se o seminúcleo de G é um grafo completo, G é Classe 1 se, e somente se, o número de vértices em K_G é par.

Um grafo é *saturado* caso $|V(G)|$ seja ímpar e $|E(G)| = \Delta(G)(|V(G)| - 1)/2$. Perceba que um grafo saturado não é sobrecarregado, entretanto, a adição de qualquer aresta torna o grafo sobrecarregado.

Lema 3.13. *Seja G um grafo saturado com vértice universal. Em qualquer coloração de arestas de G com $\Delta(G)$ cores cada cor falta em exatamente um vértice de G .*

Demonstração. Como G é saturado, G não é sobrecarregado. Como G possui vértice universal então G é Classe 1, pelo Teorema 3.9. Seja φ uma $\Delta(G)$ -coloração de arestas. Dado que $|V(G)|$ é ímpar, qualquer classe de cor de φ tem cardinalidade no máximo $(|V(G)| - 1)/2$. Mas o número total de arestas de G é $\Delta(G)(|V(G)| - 1)/2$ e usamos exatamente $\Delta(G)$ cores, portanto cada classe de cor tem cardinalidade exatamente $(|V(G)| - 1)/2$. Concluímos então que cada cor falta em exatamente um vértice de G . \square

4 COLORAÇÃO DE ARESTAS EM GRAFOS SPLIT-COMPARABILIDADE E SPLIT-INTERVALOS

Uma *coleção de pares de cores* $\{A_0, A_1, \dots, A_p\}$ é um multiconjunto de pares, onde $A_i = \{c_{i,1}, c_{i,2}\}$ é um par não-ordenado de duas cores distintas do conjunto de cores $\{1, 2, \dots, k\}$. Uma coleção de pares de cores é β -*limitada* se cada cor aparece em no máximo β pares da coleção. Em particular, quando cada cor de uma coleção de pares de cores aparece em exatamente dois pares, então a coleção é 2-limitada *ciclicamente fechada*. Por exemplo, a coleção $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 2\}\}$ é uma coleção de pares de cores que é 5-limitada (e consequentemente não é ciclicamente fechada), já que a cor 2 ocorre cinco vezes. A coleção $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{5, 4\}\}$ é 2-limitada, mas não é ciclicamente fechada já que a cor 5 ocorre apenas uma vez. A coleção $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$ é 2-limitada ciclicamente fechada.

Como, em uma coleção de pares de cores, cada um dos pares é não-ordenado e, além disso, não há uma ordem estabelecida entre os pares de cores, matematicamente uma coleção de pares de cores não é um diagrama de cores. Entretanto, é possível obter diferentes diagramas de cores a partir de uma mesma coleção de pares de cores ao se estabelecer uma ordem das cores em cada par de cores (que serão os vetores do diagrama de cores) e uma ordem entre os próprios pares de cores da coleção (que passam a ser uma sequência de vetores de cores). Então, por exemplo, da coleção de pares de cores $\{\{c_1, c_2\}, \{c_3, c_1\}, \{c_2, c_4\}\}$, pode-se construir o diagrama de cores $([c_2, c_1], [c_1, c_3], [c_2, c_4])$. A princípio, nenhuma restrição é imposta para as ordens dos pares de cores e das cores em cada par de cores, mas essas restrições são necessárias para se obter propriedades interessantes nos diagramas de cores que são gerados e são descritas a seguir.

Seja Γ uma coleção de pares de cores. Qualquer partição de Γ em listas maximais de pares de cores de forma que cada cor esteja presente em apenas uma das partes é chamada de *partição de Γ por cores*. Quando Γ é uma coleção de pares de cores β -limitada, qualquer partição de Γ por cores tem a propriedade de que cada cor ocorre no máximo β vezes na mesma parte P_i e é chamada de *partição por cores β -limitada*.

Dada uma coleção de cores β -limitada Γ e uma partição por cores β -limitada $[P_1, P_2, \dots, P_y]$ de Γ , pode-se estabelecer, para cada P_i , uma ordem entre os pares de cores e uma ordem das cores de cada par em P_i para que cada par de cores de P_i seja um vetor de cores e cada P_i seja um diagrama de cores. Como estes diagramas de cores são construídos a partir de uma partição por cores β -limitada, dizemos que cada P_i é um *diagrama de cores β -limitado*. Mais que isso, a sequência dos vetores de cores de P_1 , seguidos dos vetores de cores de P_2 , seguidos dos vetores de cores de P_3 , e assim sucessivamente, também é um diagrama de cores β -limitado, já que Γ é uma coleção de cores β -limitada.

Dada uma coleção de cores 2-limitada Γ e uma partição por cores 2-limitada $[P_1, P_2, \dots, P_y]$ de Γ , pode-se estabelecer, para cada P_i , uma ordem entre os pares de cores de forma que cada um deles contenha uma cor do próximo par de P_i (caso exista). Dada esta ordem dos

pares de cores, pode-se ordenar as cores de cada par em P_i de forma que a última cor de cada par de P_i seja a primeira cor do par seguinte em P_i (se este existir). Neste caso, dizemos que tanto o diagrama de cores gerado a partir de cada P_i quanto o diagrama de cores dado pela sequência dos vetores de cores de P_1 , seguidos dos vetores de cores de P_2 e assim sucessivamente são diagramas de cores 2-limitados *bem ordenados*.

Lema 4.1. *Seja Γ uma coleção 2-limitada de pares de cores. Se não existe nenhuma coleção ciclicamente fechada contida em Γ , então é possível construir um diagrama de cores monotônico 2-limitado C a partir de Γ .*

Demonstração. Seja Γ uma coleção 2-limitada de pares de cores que não contém nenhuma coleção ciclicamente fechada. Então, existe um diagrama de cores 2-limitado bem ordenado C obtido a partir de Γ . Como C é 2-limitado, cada cor aparece no máximo duas vezes em C e, na segunda vez, por construção, ela aparece na primeira posição do par. Adicionalmente, já que Γ não contém uma coleção ciclicamente fechada, a última cor do último vetor de cores de cada P_i em C e a primeira cor do primeiro vetor de cores de P_i são diferentes e não ocorrem em outros vetores de cores. Portanto, C é monotônico. \square

Uma *coloração de arestas por listas* de G é uma coloração de arestas de G onde a cor atribuída a cada aresta e de G pertence a um conjunto de cores permitidas para e . Neste trabalho, dada uma coloração parcial de arestas φ para um grafo G , as cores permitidas para uma aresta $e = uv$ são as cores do conjunto $\overline{\varphi(v)} \cap \overline{\varphi(u)}$.

Lema 4.2. *Seja $K_{2,b}$ um grafo bipartido completo com partição de vértices $[A, B]$, $|A| = 2$ e $|B| = b$. Seja $B = \{u_1, u_2, \dots, u_b\}$ e $\Gamma = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_b\}$ uma coleção de pares de cores de forma que as arestas incidentes no vértice u_i possuam o par de cores Q_i como cores permitidas. Se a coleção Γ for 2-limitada, então $K_{2,b}$ possui uma coloração de arestas por listas usando Γ .*

Demonstração. Seja $A = \{v_1, v_2\}$. Se não existe uma coleção ciclicamente fechada contida em Γ , então existe um diagrama de cores monotônico C formado a partir de Γ , pelo Lema 4.1. Portanto, $K_{2,b}$ tem uma coloração de arestas por listas pelo Lema 3.7.

Suponha que existe uma coleção ciclicamente fechada $X \subseteq \Gamma$. Seja $[P_1, P_2, \dots, P_y]$ uma partição 2-limitada de X e C um diagrama de cores 2-limitado bem ordenado construído a partir de X . Já que em X cada cor aparece exatamente duas vezes, a última cor do último vetor de cores de C correspondente a um par de cores de P_i é o mesmo que a primeira cor do primeiro vetor de cores de C correspondente a um par de cores de P_i . Portanto, C não é um diagrama de cores monotônico. Entretanto, por construção, as cores da primeira (última) posição de quaisquer dois pares de cores em C são distintas. Assim, atribua a primeira (última) cor de cada vetor de cores de C às arestas incidentes em v_1 (ou v_2). Se $\Gamma \setminus X$ não for vazio, o subgrafo de $K_{2,b}$ induzido pelas arestas não coloridas é um grafo bipartido $K_{2,b-|X|}$. Já que $\Gamma \setminus X$ é uma coleção 2-limitada de pares de cores que não contém uma coleção ciclicamente fechada, pelo Lema 4.1, existe um diagrama de cores monotônico C' em $\Gamma \setminus X$. Então, o subgrafo $K_{2,b-|X|}$

tem uma coloração de arestas por listas respeitando $\Gamma \setminus X$, pelo Lema 3.7. Portanto, $K_{2,b}$ tem uma coloração de arestas por listas com respeito a Γ . \square

4.1 PROPRIEDADES DOS GRAFOS SPLIT-COMPARABILIDADE

Essa seção apresenta algumas propriedades sobre grafos split-comparabilidade. Note que, pelo Teorema 3.12, o índice cromático de um grafo e o do seu seminúcleo são o mesmo. Além disso, pelo Teorema 3.9, o Problema da Classificação para grafos com vértice universal já está resolvido. Portanto, é suficiente considerar grafos split-comparabilidade cujo seminúcleo não possui vértice universal. Considere a partição da caracterização do Teorema 2.10 para o Lema 4.3.

Lema 4.3 (CRUZ, 2017). *Seja $G = [Q_l, Q_c, Q_r, S]$ um grafo split-comparabilidade. Caso o seminúcleo de G não possua vértice universal, então, $|Q_l| = |Q_r|$.*

Demonstração. Segue pela caracterização dos grafos split-comparabilidade do Teorema 2.10 que um $\Delta(G)$ -vértice de G necessariamente pertence a Q_l ou Q_r . Primeiro vamos mostrar que existe ao menos um Δ -vértice em cada um dos conjuntos. Suponha, por contradição, que apenas um dos conjuntos Q_l ou Q_c possui um Δ -vértice v . Sem perda de generalidade, considere $v \in Q_l$. Logo o seminúcleo de G é o subgrafo induzido por $N[v]$, ou seja, pelo conjunto $Q \cup S_l \cup S_c$. Então, v é vértice universal no seminúcleo de G , uma contradição. Então, considere que G não tem vértice universal, ou seja, existe pelo menos um Δ -vértice em Q_l e um Δ -vértice em Q_r . Sabemos que, pela caracterização de grafos split-comparabilidade do Teorema 2.10, todo vértice de grau máximo de Q_l é adjacente a todos os vértices de $S_l \cup S_c$ e também que todo vértice de grau máximo de Q_r é adjacente a todos os vértices de $S_r \cup S_c$. Como existe Δ -vértice em Q_l e Q_r podemos deduzir que $\Delta(G) = |Q| - 1 + |S_l| + |S_c| = |Q| - 1 + |S_r| + |S_c|$, portanto $|S_r| = |S_l|$. \square

4.2 PROPRIEDADES DOS GRAFOS SPLIT-INTERVALOS

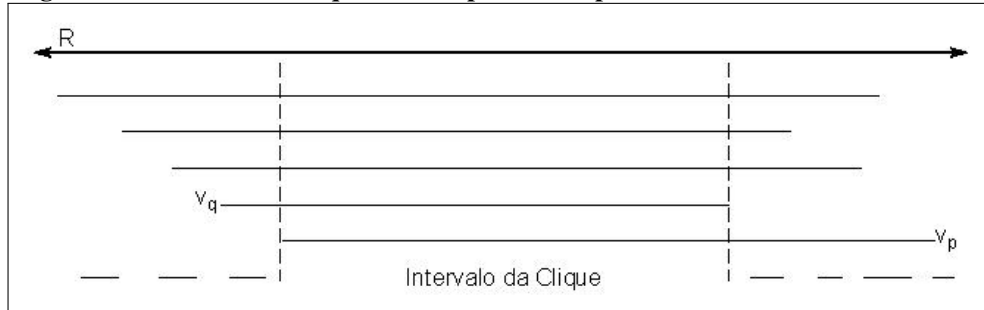
Essa seção apresenta algumas propriedades úteis sobre grafos split-intervalos. Dado um grafo G , qualquer subconjunto $X \subseteq V(G)$ satisfaz a *propriedade de inclusão de vizinhanças* se seus vértices podem ser ordenados $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{|X|-1}$ tal que $N(v_0) \subseteq N(v_1) \subseteq N(v_2) \subseteq \dots \subseteq N(v_{|X|-1})$. Essa ordem é chamada de *ordenação por inclusão de vizinhanças*.

Lema 4.4. *Se $G = [Q, S]$ é um grafo split-intervalos, então existe uma partição de S em dois subconjuntos que satisfazem a propriedade de inclusão de vizinhanças.*

Demonstração. Seja $G = [Q, S]$ um grafo split-intervalos. Pela Definição 2.16, G é o grafo interseção de uma família F de intervalos da reta real. Para cada vértice $v \in V(G)$, seja r_v o intervalo que representa v em F . Sejam $s(v)$ e $f(v)$ os pontos inicial e final, respectivamente, do intervalo r_v . Então, é possível ordenar os vértices de $V(G)$, $v_0, v_1, \dots, v_{|V(G)|-1}$, de forma que $i < j$ se, e somente se, $s(v_i) \leq s(v_j)$.

Sejam v_p e v_q dois vértices da clique tais que $s(v_p) \geq s(v)$ e $f(v_q) \leq f(v)$, para qualquer vértice $v \in Q$. O intervalo $I = [s(v_p), f(v_q)]$ será chamado de *intervalo da clique*. Observe que I não tem interseção com intervalos que representam vértices de S . Se houvesse um vértice $u \in S$ tal que $r_u \cap I \neq \emptyset$, então u seria vizinho de todos os vértices de Q e Q não seria maximal. A Figura 22 ilustra os limites do intervalo da clique.

Figura 22 – Intervalo da clique em um split-co-comparabilidade



Fonte: Autoria própria

Assim é possível particionar os vértices de S em dois subconjuntos S_1 e S_2 , de forma que todo vértice $u \in S$ com $f(u) < s(v_p)$ pertence a S_1 e todo vértice u com $s(u) > f(v_q)$ pertence a S_2 . Vamos provar que S_1 e S_2 satisfazem a propriedade de inclusão de vizinhanças.

Considere dois vértices $u_i, u_j \in S_1$ tais que $i > j$. Vamos provar que $N(u_j) \subseteq N(u_i)$. Para cada vértice $v \in Q$, se $r_{u_j} \cap r_v \neq \emptyset$, então $s(v) \leq f(u_j) < f(u_i) < f(v)$. Logo, $r_{u_i} \cap r_v \neq \emptyset$. Portanto, S_1 satisfaz a propriedade de inclusão de vizinhanças. Por argumentos similares, pode-se concluir que S_2 também satisfaz a propriedade de inclusão de vizinhanças. \square

Perceba que, da mesma forma como foi argumentado para grafos split-comparabilidade, é suficiente considerar o Problema da Classificação nos grafos split-intervalos cujo seminúcleo não possui vértice universal. Para estes grafos, uma propriedade estrutural interessante é apresentada no Teorema 4.5 tendo como base da prova a propriedade apresentada no Lema 4.4.

Teorema 4.5. *Se $G = [Q, S]$ é um grafo split-intervalos cujo seminúcleo não tem vértice universal, então S pode ser particionado em três partes, S_1 , S_2 e S_3 tais que:*

i. $|S_1| = |S_2| = s$.

ii. S_3 pode ser particionado em $S_{3,1}$ e $S_{3,2}$ tal que $S_1 \cup S_{3,1}$ satisfaz a propriedade de inclusão de vizinhanças assim como $S_2 \cup S_{3,2}$.

iii. Sejam $S_1 = \{a_i : 0 \leq i < s\}$ e $S_2 = \{b_i : 0 \leq i < s\}$ tais que $\deg(a_i) \leq \deg(a_{i+1})$ e $\deg(b_i) \leq \deg(b_{i+1})$ para todo i . Então $N(a_i) \cap N(b_{s-i-1}) = \emptyset$, para todo i .

Demonstração. Seja $G = [Q, S]$ um grafo split-intervalos cujo seminúcleo não tem vértice universal. Suponha que S foi particionado em subconjuntos S'_1 e S'_2 que satisfazem a propriedade de inclusão de vizinhanças, de acordo com o Lema 4.4. Então existe um vértice $v_1 \in Q$ que é adjacente a todos os vértices de S'_1 e existe um vértice $v_2 \in Q$ que é adjacente a todos os vértices de S'_2 . Sejam $S_3 = \{v : v \in S \wedge vv_1 \in E(G) \wedge vv_2 \in E(G)\}$, $S_1 = S'_1 \setminus S_3$ e $S_2 = S'_2 \setminus S_3$. Como S_1 e S_2 são subconjuntos de S'_1 e S'_2 , ambos satisfazem a propriedade de inclusão de vizinhanças.

Agora, vamos provar que $|S_1| = |S_2| = s$. Sem perda de generalidade, suponha por contradição que $|S_1| > |S_2|$. Então $\deg(v_1) = \Delta(G) > \deg(v_2)$. Isso implica que o seminúcleo de G é constituído por $Q \cup S_1 \cup S_3$ e tem v_1 como vértice universal, contrariando a hipótese.

Para provar que S_3 pode ser particionado em $S_{3,1}$ e $S_{3,2}$ tal que $S_1 \cup S_{3,1}$ satisfaz a propriedade de inclusão de vizinhanças assim como $S_2 \cup S_{3,2}$. Considere um vértice qualquer u em S_3 . Então, $u \in S'_1$ ou $u \in S'_2$. Suponha que $u \in S_3 \cap S'_1$. Como $u \in S_3$, u é adjacente a vértices de $N(S'_2)$. Logo, nenhum vértice $v \in S_1$ satisfaz $N(u) \subseteq N(v)$. Como $u \in S'_1$ e $S_1 \subseteq S'_1$ e S'_1 satisfaz a propriedade de inclusão de vizinhanças, então $N(u)$ contém toda a vizinhança dos vértices de S_1 . Portanto, $\{u\} \cup S'_1$ satisfaz a propriedade de inclusão de vizinhanças. E, de forma geral, $S_3 \cap S'_1$ satisfaz a propriedade de inclusão de vizinhanças. Por argumento similar, pode-se concluir que a vizinhança de qualquer vértice $u \in S_3 \cap S'_2$ contém toda a vizinhança dos vértices de S_2 e, generalizando, $S_3 \cap S'_2$ satisfaz a propriedade de inclusão de vizinhanças. Sejam $S_{3,1} = S_3 \cap S'_1$ e $S_{3,2} = S_3 \cap S'_2$. Como todo vértice em S_3 pertence a S'_1 ou a S'_2 , tem-se que $[S_{3,1}, S_{3,2}]$ é uma partição de S_3 satisfazendo (ii).

Agora iremos provar por construção que existe uma ordenação dos vértices de S_1 , $a_0, a_1, \dots, a_{|S_1|-1}$, e dos vértices de S_2 , $b_0, b_1, \dots, b_{|S_2|-1}$, de forma que, para cada i , existe pelo menos um j tal que $N(a_i) \cap N(b_j) = \emptyset$. Como S_1 (S_2) satisfaz a propriedade de inclusão de vizinhanças, podemos ordenar os vértices de S_1 (S_2) pela ordem crescente de seus graus, $a_0, a_1, \dots, a_{|S_1|-1}$ ($b_0, b_1, \dots, b_{|S_2|-1}$). Assim todo vértice a_i (b_i) é adjacente aos vizinhos de a_j (b_j), quando $i > j$.

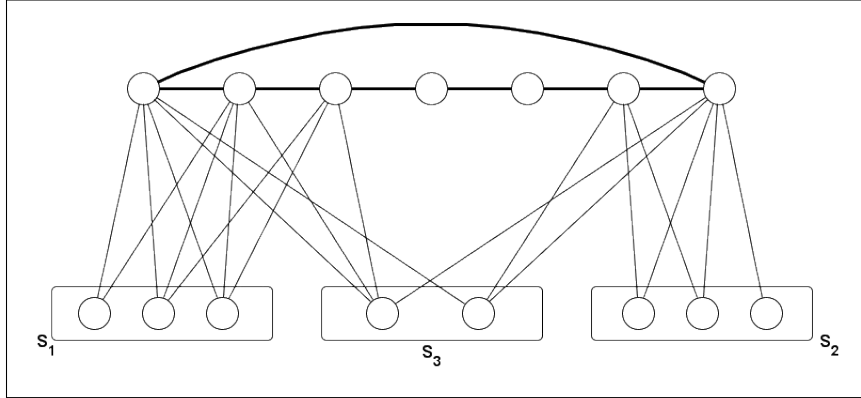
Considere o vértice $a_i \in S_1$, $0 \leq i < |S_1|$. Vamos provar que se o vértice a_i possui um vizinho $u \in Q$ e $u \in N(b_j)$, então $j \geq |S_2| - i - 1$. Suponha, por contradição, que $j < |S_2| - i - 1$. Note que se $u \in N(a_i)$ e $u \in N(b_j)$, então u é adjacente a todos os vértices em S_3 , pelo Lema 4.4. Então, $\deg(u) \geq (|Q| - 1) + |S_1| - i + |S_2| - j + |S_3| > (|Q| - 1) + |S_1| - i + |S_2| - (|S_2| - i) + |S_3| = (|Q| - 1) + |S_1| + |S_3| = \Delta(G)$, o que é um absurdo.

Logo, para todo a_i e b_j com $j \geq |S_2| - i$, temos $N(a_i) \cap N(b_j) = \emptyset$. Dessa forma, todo par de vértices a_i e $b_{|S_2|-i-1}$ tem $N(a_i) \cap N(b_{|S_2|-i-1}) = \emptyset$, concluindo a prova. \square

Seja $G = [Q, S]$ um grafo split-intervalos cujo seminúcleo não tem vértice universal. Então, qualquer partição de $V(G)$ em $[Q, S_1, S_2, S_3]$ como a descrita pelo Teorema 4.5 é cha-

mada de *partição por inclusões de vizinhança*. A Figura 23 apresenta um exemplo de um grafo split-intervalos sem vértice universal em seu seminúcleo e com uma partição por vizinhança ilustrada. No exemplo, algumas arestas entre vértices da clique foram omitidas.

Figura 23 – Grafo split-intervalos com partição por inclusões de vizinhança



Fonte: Autoria própria

4.3 COLORAÇÃO PARA GRAFOS SPLIT-COMPARABILIDADE

A partir da caracterização de grafos split-comparabilidade dada por Ortiz, Maculan e Szwarcfiter (1998) e dos resultados apresentados em Almeida (2012) podemos resolver o Problema da Classificação para uma parcela desses grafos.

Lema 4.6 (CRUZ, 2017). *Seja $G = [Q_l, Q_c, Q_r, S_l, S_c, S_r]$ um grafo split-comparabilidade. Caso existam vértices $u \in S_l$ e $v \in S_r$ tal que $\deg(u), \deg(v) < \frac{\Delta(G)}{2}$, então G é Classe 1.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.8 se existir vértice v no conjunto independente tal que $\left\lceil \frac{|Q_l|}{2} \right\rceil \leq \deg(v) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ então G é Classe 1. Assim considere que todo vértice v do conjunto independente tem $\deg(v) < \left\lceil \frac{|Q_l|}{2} \right\rceil$ ou $\deg(v) > \frac{\Delta(G)}{2}$. Pela definição, $Q_l \cap Q_r = \emptyset$, assim, $|Q_l|$ ou $|Q_r|$ tem que ser menor que $\frac{\Delta(G)}{2}$. Considere, sem perda de generalidade, que $|Q_r| < \left\lceil \frac{|Q_l|}{2} \right\rceil$. Caso exista algum vértice em $v \in S_l$ que tenha $\deg(v) < \left\lceil \frac{|Q_l|}{2} \right\rceil$, então existe um conjunto de vértices X na clique de G , não adjacentes a v ou a qualquer vértice de Q_r . Assim $|N(v) \cup X| \geq \frac{\Delta(G)}{2}$. Considere o grafo G' construído a partir da adição de arestas entre v e vértices de X de forma que $\deg(v) = \left\lceil \frac{|Q_l|}{2} \right\rceil$. Como vértices de X não são adjacentes a vértice algum de Q_r , então $\Delta(G') = \Delta(G)$. Pelo Teorema 3.8, G' é Classe 1 e como G é subgrafo de G' , G é Classe 1. \square

Usando os lemas anteriores podemos resolver o Problema da Coloração para qualquer grafo split-comparabilidade.

Teorema 4.7. *Um grafo split-comparabilidade é Classe 1 se, e somente se, não é vizinhança-sobrecarregado.*

Demonstração. Seja $G = [Q_l, Q_c, Q_r, S_l, S_c, S_r]$ um grafo split-comparabilidade. Já que todo grafo que é subgrafo-sobrecarregado é Classe 2, é suficiente apresentar uma coloração de aresta com $\Delta(G)$ cores para G quando G não for subgrafo-sobrecarregado. Se $\Delta(G)$ for ímpar então, pelo Teorema 3.6, G é Classe 1; assim podemos supor $\Delta(G)$ par. Se existe um vértice $v \in S$ de forma que $\lceil |Q|/2 \rceil \leq \deg(v) \leq \Delta(G)/2$ então G é Classe 1, pelo Teorema 3.8. Podemos então supor que, para um vértice $v \in S$, temos $\deg(v) < \lceil |Q|/2 \rceil$ ou $\deg(v) > \Delta(G)/2$. Se G tem um vértice universal em seu seminúcleo, então pelo Teorema 3.12 e 3.9 G é Classe 1; por isso, podemos assumir que não existe vértice universal no seminúcleo de G . Assim, pelo Lema 4.3 as partes S_l e S_r têm mesmo tamanho. Agora considere sem perda de generalidade que $|Q_l| \geq |Q_r|$, Caso existam vértices $u \in S_l$ e $v \in S_r$ tal que $\deg(u), \deg(v) < \frac{|Q_l|}{2}$, então, pelo Lema 4.6, G é Classe 1. Logo, podemos considerar que $|Q_l| > \Delta(G)/2$ e $|Q_r| < \lceil |Q|/2 \rceil$.

Sejam os vértices de S_l rotulados e ordenados (a_1, a_2, \dots, a_s) e os vértices de S_r rotulados e ordenados (b_1, b_2, \dots, b_s) e G_u o subgrafo de G induzido por $V(G) \setminus S_r$. O grafo G_u possui um vértice universal pela caracterização do Teorema 2.10. Nosso objetivo é obter um grafo G'_u simples e saturado, adicionando arestas ao grafo G_u , assegurando que $\Delta(G'_u) = \Delta(G)$. Primeiro, serão adicionadas tantas arestas quantas forem possíveis entre todos os pares de vértices do grafo, exceto por arestas entre S_l e Q_r . Caso o grafo resultante ainda não seja saturado, serão adicionadas arestas entre os vértices S_l e os vértices de Q_r seguindo a ordenação dos vértices de S_l . Essa adição deve ser feita da forma que arestas com um extremo em a_i são adicionadas somente se toda aresta de a_j , $j < i$, foi adicionada anteriormente. Existe ao menos um vértice $v \in S_l$ onde aresta alguma foi adicionada sabendo que obtemos um grafo G'_u saturado, isto é, com $\deg_{G_u}(v) = \deg_{G'_u}(v)$. Lembre que todo vértice v de S_l tem $\deg(v) \geq \Delta(G)/2$, assim, caso sejam adicionadas arestas incidentes até o último vértice de S_l , o grafo $\overline{G'_u}$ terá menos que $\Delta(G)/2$ arestas, e G'_u não será saturado, mas sim sobrecarregado. Seja a_h o último vértice de S_l ao qual se adicionou alguma aresta para saturar G'_u , ou seja, h é o menor inteiro cujo $\deg_{G'_u}(a_h) > \deg_{G_u}(a_h)$. Nenhuma aresta incidente em a_{h+1} foi adicionada em G'_u .

Como G'_u tem um vértice universal, pelo Teorema 3.9, existe uma coloração de arestas $\varphi'_u : E(G'_u) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, \Delta(G) - 1\}$. Como G'_u é saturado, pelo Lema 3.13, o conjunto de vértices Q é elementar em φ'_u . Além disso, a restrição φ_u de φ'_u para G_u é uma coloração parcial para G . Agora definimos uma coloração de arestas φ para G com $\Delta(G)$ arestas que é uma extensão de φ_u da seguinte maneira. Lembre-se que $Q_l \cap Q_r = \emptyset$. Para vértices $v \in Q_r$ e $a_i \in S_l$, se $a_i v \in E(G'_u)$ e $a_i \neq a_h$, faça $\varphi(b_i v) = \varphi'_u(a_i v)$. Como para todo $v \in Q$, $\varphi(v) \subseteq \varphi'_u(v)$, não existe par de arestas incidentes em v com mesma cor. Analogamente, como $\varphi(b_i) \subseteq \varphi'_u(a_i)$ para todo vértice b_i faça $\varphi(b_i v) = \varphi'_u(a_i v)$.

Resta colorir as arestas $b_i v$ tal que $i = h, h + 1, \dots, s$ e $v \in Q$. Agora vamos colorir toda aresta $b_i v$ incidente no vértice b_i respeitando a ordem $i = h + 2, h + 3, \dots, s$ com uma cor de $\overline{\varphi'_u(v)} \setminus \varphi(v)$. Como G'_u é saturado, cada cor pertence a exatamente um conjunto $\overline{\varphi'_u(v)}$ tal que $v \in V(G'_u)$. Portanto, cada cor escolhida em $\overline{\varphi'_u(v)} \setminus \varphi(v)$ pode ser usada para colorir uma aresta $b_i v$ sem que haja conflitos de cores em b_i . As únicas arestas ainda não coloridas são

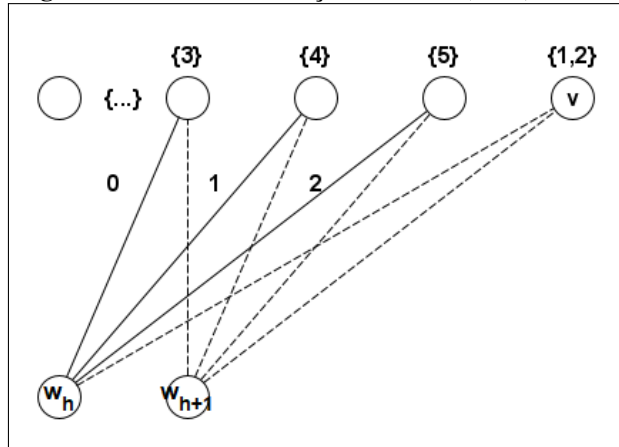
aquelas incidentes em b_h e b_{h+1} . Seja X o subgrafo de G induzido pelas arestas com um extremo em Q_r e outro em $\{b_h, b_{h+1}\}$. Note que X é bipartido e cada vértice de Q_r tem grau no máximo 2 em X . Para cada $v \in Q_r$, seja $c'(v) = \overline{\varphi'_u(v)} \setminus \varphi(v)$. Note que cada cor pertence a no máximo um conjunto $c'(v)$, considerando todo $v \in Q_r$. Se $va_h \in E(G'_u)$, seja $c(v) = \{\varphi'_u(va_h)\} \cup c'(v)$; se $va_h \notin E(G'_u)$, seja $c(v) = c'(v)$. Como as cores incidentes em a_h na coloração φ'_u são duas a duas distintas, cada cor falta em no máximo dois conjuntos $c(v)$, considerando todo $v \in Q_r$. Além disso, como as arestas incidentes em b_h e b_{h+1} não estão coloridas, cada $c(v)$ tem tamanho pelo menos dois. Escolhendo duas cores quaisquer em cada conjunto $c(v)$, para todo $v \in Q_r$, obtém-se uma coleção 2-limitada de pares de cores, Γ . Assim, X pode ser colorido usando as cores de Γ , pelo Lema 4.2. Portanto, G tem uma coloração com $\Delta(G)$ cores e é Classe 1. \square

Essa prova foi construída a partir da prova apresentada por Cruz (2017). A diferença da prova apresentada para a original se encontra no uso do Lema 4.2 para colorir o subgrafo bipartido quando os vértices $b_i, i = h, h+1$ ainda não possuem suas arestas coloridas. A sentença usada para colorir o bipartido formado pelos vértices $b_i, i = h, h+1$ é transcrita a seguir, feitas as devidas adaptações de notação para esta dissertação. Na versão original da prova os vértices $b_i, i = h, h+1$ são referidos como $w_i, i = h, h+1$.

Para cada $v \in Q_r$ onde falta uma cor c , se a cor c já foi atribuída a uma aresta de w_h e $vw_{h+1} \in E(G)$, atribua a cor c para vw_{h+1} . Note que ainda sobram cores suficientes para colorir as arestas sem cor incidentes em v . Observe que a coloração obtida até o momento é própria, pois $w_{h+1} \neq w_h$. Além disso, as cores que sobram nos vértices de Q_r são duas a duas distintas e são distintas das cores das arestas que incidem em w_{h+1} .

O fato das cores que faltam nos vértices de Q_r serem distintas das cores das arestas que incidem em w_{h+1} é suficiente para garantir que c pode colorir uma aresta de w_{h+1} . Mas não é suficiente para garantir que é possível colorir todas as arestas incidentes em w_h . Os autores afirmam “Note que ainda sobram cores suficientes para colorir as arestas sem cor incidentes em v .”, mas neste momento, é possível existir um vértice $v \in Q_r$ adjacente a w_h tal que todas as cores que faltam em v já foram atribuídas a arestas incidentes em w_h . Então, apesar de o número de cores que faltam em v ser no mínimo igual ao número de arestas de v que precisam ser coloridas, nenhuma dessas cores pode ser utilizada em vw_h . A Figura 24 apresenta uma distribuição de cores faltantes onde o problema ocorre. Arestas tracejadas são arestas ainda não coloridas e o conjunto de cores faltantes em v é $\{1, 2\}$.

Figura 24 – Caso sem solução em Cruz (2017)



Fonte: Autoria própria

4.4 COLORAÇÃO PARA GRAFOS SPLIT-INTERVALOS

Pelas propriedades apresentadas pelo Teorema 4.5, é possível resolver o Problema da Classificação para alguns split-intervalos como apresentado pelo Lema 4.8.

Lema 4.8. *Considere um grafo split-intervalos G cujo seminúcleo não tem vértice universal e considere uma partição de $V(G)$ por inclusões de vizinhança $[Q, S_1, S_2, S_3]$, com $|S_1| = |S_2| = s$. Os vértices de S_1 podem ser ordenados, $a_0, a_1, \dots, a_{|S_1|-1}$, e os vértices de S_2 ordenados, $b_0, b_1, \dots, b_{|S_2|-1}$, de forma que, para cada i , $N(a_i) \cap N(b_{s-i-1}) = \emptyset$. Se existe um i tal que $\deg(a_i) < \frac{|Q|}{2}$ e $\deg(b_{s-i-1}) < \frac{|Q|}{2}$, então G é Classe 1.*

Demonstração. Seja $G = [Q, S]$ um grafo split-intervalos cujo seminúcleo não tem vértice universal. Pelo Teorema 4.5, $V(G)$ tem uma partição por inclusões de vizinhança $[Q, S_1, S_2, S_3]$ e existe uma ordem para os vértices de S_1 e S_2 , $a_0, a_1, \dots, a_{|S_1|-1}$ e $b_0, b_1, \dots, b_{|S_2|-1}$, respectivamente, tal que $N(a_i) \cap N(b_{s-i-1}) = \emptyset$, para cada i . Mais ainda, pelo Teorema 4.5, S_3 pode ser particionado em $S_{3,1}$ e $S_{3,2}$ tal que $S_1 \cup S_{3,1}$ satisfaz a propriedade de inclusão de vizinhanças assim como $S_2 \cup S_{3,2}$.

Suponha que existe i tal que $\deg(a_i) < \frac{|Q|}{2}$ e $\deg(b_{s-i-1}) < \frac{|Q|}{2}$. Seja v pertencente a $Q \cap (\overline{N(a_i) \cup N(b_{s-i-1})})$. Como $S_1 \cup S_{3,1}$ satisfaz a propriedade de inclusão de vizinhanças, v não é adjacente a a_0, a_1, \dots, a_i . Similarmente, v não é adjacente a $b_0, b_1, \dots, b_{s-i-1}$. Como $v \in Q$, então v é adjacente a $|Q| - 1$ vértices da clique. Então $\deg(v) < |Q| + (s - i - 1) + |S_{3,1}| + s - (s - i - 1) - 1 + |S_{3,2}| = |Q| + |S_{3,1}| + |S_{3,2}| + s - 1 + (s - i - 1) - (s - i - 1) = |Q| + |S_3| + s - 1 = \Delta(G)$.

Como v não é vértice de grau máximo em G , então $\Delta(G + va_i) \leq \Delta(G)$, onde $G + va_i$ denota o grafo obtido a partir de G pela adição de uma aresta entre os vértices v e a_i . Note que $v \notin Q \cap (\overline{N(a_i) \cup N(b_{s-i-1})})$ no grafo $G + va_i$. Como $|N(b_{s-i-1})| < \frac{|Q|}{2}$ e $N(a_i) \cap N(b_{s-i-1}) =$

\emptyset então $|N(a_i) \cup [Q \cap (\overline{N(a_i) \cup N(b_{s-i-1})})]| \geq \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$. Por indução, é possível adicionar arestas entre a_i e vértices de $Q \cap (\overline{N(a_i) \cup N(b_{s-i-1})})$ até que $\deg(a_i) = \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$.

Seja G' o grafo construído a partir de G pela adição de arestas entre a_i e o conjunto $Q \cap (\overline{N(a_i) \cup N(b_{s-i-1})})$, tal que $\deg_{G'}(a_i) = \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$. Pelo Teorema 3.8, G' é Classe 1. Como G é um subgrafo de G' e $\Delta(G') = \Delta(G)$, G é Classe 1. \square

Usando os lemas anteriores podemos resolver o Problema da Coloração para qualquer grafo split-intervalos.

Teorema 4.9. *Um grafo split-intervalos é Classe 1 se, e somente se, não é vizinhança-sobrecarregado.*

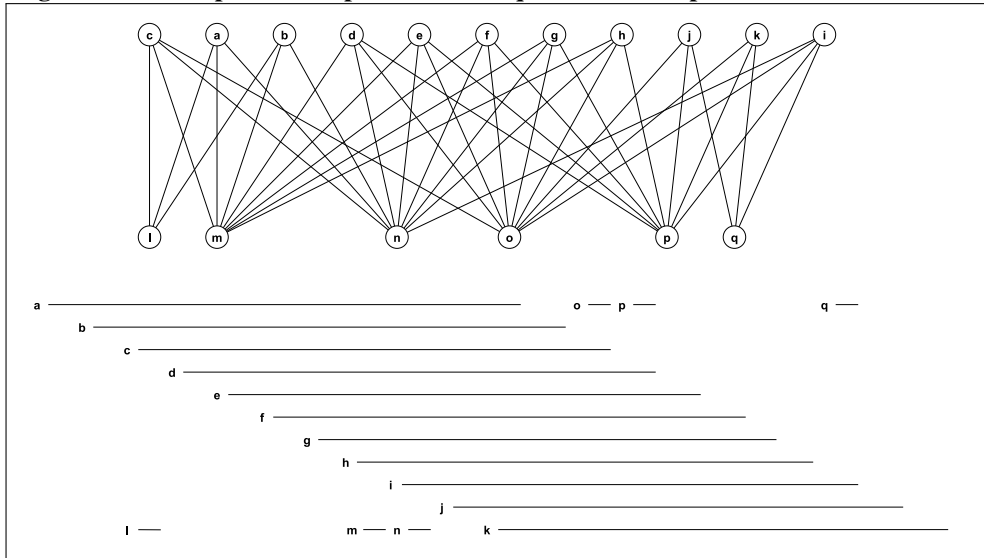
Demonstração. Seja $G = [Q, S]$ um grafo split-intervalos. Como todo grafo que é subgrafo-sobrecarregado é Classe 2, é suficiente apresentar uma coloração de aresta com $\Delta(G)$ cores para G , quando G não é subgrafo-sobrecarregado. Se $\Delta(G)$ é ímpar então, pelo Teorema 3.6, G é Classe 1. Assim podemos supor $\Delta(G)$ par. Se existe um vértice $v \in S$ tal que $\lceil |Q|/2 \rceil \leq \deg(v) \leq \Delta(G)/2$, então G é Classe 1, pelo Teorema 3.8. Podemos então assumir que $\deg(v) < \lceil |Q|/2 \rceil$ ou $\deg(v) > \Delta/2$ para todo $v \in S$. Se G tem um vértice universal em seu seminúcleo, então pelo Teorema 3.12, G é Classe 1. Por isso, podemos assumir que não existe vértice universal no seminúcleo de G . Assim, considere uma partição de $V(G)$ por inclusões de vizinhança $[Q, S_1, S_2, S_3]$. Sejam $(a_0, a_1, \dots, a_{s-1})$ e $(b_0, b_1, \dots, b_{s-1})$ as ordens por inclusão de vizinhança em S_1 e S_2 , respectivamente. Por definição, $\deg(a_i) \leq \deg(a_{i+1})$ e $\deg(b_i) \leq \deg(b_{i+1})$ para todo i . Adicionalmente, pelo Lema 4.8, se existe um i tal que $\deg(a_i) < |Q|/2$ e $\deg(b_{s-i-1}) < |Q|/2$, então G é Classe 1. Como $N(a_i) \cap N(b_{s-i-1}) = \emptyset$, não é possível que $\deg(a_i) > \Delta(G)/2$ e $\deg(b_{s-i-1}) > \Delta(G)/2$. Portanto, para cada i , tem-se que um dos vértices em $\{a_i, b_{s-i-1}\}$ tem grau menor que $|Q|/2$ e o outro tem grau maior que $\Delta(G)/2$.

A Figura 25 mostra um exemplo de um grafo split-intervalos satisfazendo todas essas propriedades. As arestas de $G[Q]$ foram omitidas nessas e em todas as figuras subsequentes para simplificação e clareza da imagem.

Considere agora a partição $[P_1, T_1, P_2, T_2, S_3]$ de S obtida particionando-se cada conjunto S_i , com $i \in \{1, 2\}$, em partes P_i e T_i de forma que P_i contém os vértices com grau menor que $|Q|/2$ e T_i contém os vértices com grau maior que $\Delta(G)/2$. Vamos mostrar que existe uma bijeção $f_1 : P_1 \rightarrow T_2$. Pelo Teorema 4.5, para todo $a_i \in S_1$, existe um vértice $b_{s-i-1} \in S_2$ tal que $N(a_i) \cap N(b_{s-i-1}) = \emptyset$. Logo, não existe i para o qual $a_i \in T_1$ e $b_{s-i-1} \in T_2$. Além disso, lembre-se que assumimos que para todo i , se $\deg(a_i) < |Q|/2$, então $\deg(b_{s-i-1}) > \Delta(G)/2$. Então, para todo vértice $a_i \in P_1$, deve existir um vértice $b_{s-i-1} \in T_2$ e vice-versa. Por argumentos similares, podemos mostrar também que existe uma bijeção $f_2 : P_2 \rightarrow T_1$. Logo, $|P_1| = |T_2|$ e $|P_2| = |T_1|$.

Sejam $S_u = T_1 \cup T_2 \cup S_3$ e $G_u = [Q, S_u]$, o subgrafo de G induzido por $Q \cup S_u$. Então, $[Q, T_1, T_2, S_3]$ é uma partição de $V(G)$ por inclusões de vizinhanças. Vamos mostrar que G_u tem

Figura 25 – Exemplo de um split-intervalos que satisfaz a hipótese



Fonte: Autoria própria

um vértice universal. Considere um vértice $a_x \in T_1$ com o menor grau entre todos os vértices em T_1 e um vértice $b_y \in T_2$ com o menor grau entre todos os vértices em T_2 . Como $\deg(a_x)$ e $\deg(b_y)$ são maiores que $\Delta(G)/2$, existe um vértice $v \in Q$ tal que $v \in N(a_x) \cap N(b_y)$. Como $T_i \subseteq S_i$, para $i \in \{1, 2\}$, então cada um dos conjuntos T_1 e T_2 tem a propriedade de inclusão de vizinhanças. Logo, para todo vértice $a_i \in T_1$, $i \geq x$, $N(a_x) \subseteq N(a_i)$, e para todo vértice $b_j \in T_2$, $j \geq y$, $N(b_y) \subseteq N(b_j)$. Podemos deduzir que v é adjacente a todo vértice em $T_1 \cup T_2$. Além disso, já que $v \in N(a_x) \cap N(b_y)$, pelo Teorema 4.5, v é adjacente a todo vértice em S_3 . Então, v é adjacente a todo vértice em S_u . Como v é um vértice de Q , também é adjacente a todo vértice de Q . Portanto, v é um vértice universal de G_u . Além disso, $\deg(v) = |Q| - 1 + |T_1| + |T_2| + |S_3| = |Q| - 1 + |T_1| + |P_1| + |S_3| = \Delta(G)$.

Nosso objetivo agora é obter um subgrafo G'_u de G_u que seja saturado. Para construir G'_u vamos adicionar algumas arestas a G_u preservando o grau máximo do grafo, ou seja, após a adição de arestas, $\Delta(G'_u) = \Delta(G_u) = \Delta(G)$. Além disso, como nenhum vértice será adicionado, G'_u terá vértice universal. Pelo Teorema 3.9, o grafo G'_u terá uma coloração de arestas φ'_u com $\Delta(G)$ cores. Finalmente, vamos mostrar que é sempre possível obter uma coloração de arestas φ com $\Delta(G)$ cores para G baseada em φ'_u .

Para construir G'_u , nós começamos pela adição de quantas arestas forem necessárias e possíveis entre pares de vértices em S_u , enquanto o grafo resultante não for saturado. No caso em que todas as arestas entre pares de vértices de S_u sejam adicionadas, também vamos adicionar quantas arestas forem possíveis e necessárias entre vértices de S_3 e algum vértice em Q enquanto o grafo resultante não for saturado.

Considere primeiro o caso em que o grafo G'_u obtido é saturado. Então, como G'_u possui vértice universal, existe uma coloração de arestas φ'_u com $\Delta(G)$ cores, pelo Teorema 3.9, e o conjunto de vértices Q é elementar, ou seja, toda cor falta em no máximo um vértice de Q . Então a restrição φ_u de φ'_u para G_u é uma coloração parcial de G com $\Delta(G)$ cores. Vamos definir agora

uma coloração de arestas φ com $\Delta(G)$ cores para G que é uma extensão de φ_u . Observe que toda aresta sem cor em G é uma aresta wv tal que $w \in P_i$, com $i \in \{1, 2\}$, e $v \in Q$. Além disso, existe um vértice correspondente a w em T_i que não é adjacente a v em G'_u (lembre-se que não foram adicionadas arestas incidentes em vértices de $T_1 \cup T_2$ na construção de G'_u). Então, $|\overline{\varphi'_u(v)}| = \Delta(G) - \deg_{G'_u}(v)$, que é pelo menos o número de vértices adjacentes a v em P_i . Então, para cada wv , existe uma cor distinta c em $|\overline{\varphi'_u(v)}|$ e podemos definir $\varphi(wv) = c$, concluindo a coloração de arestas de G . O fato de Q ser elementar em φ'_u garante que φ é uma coloração de arestas própria de G com $\Delta(G)$ cores.

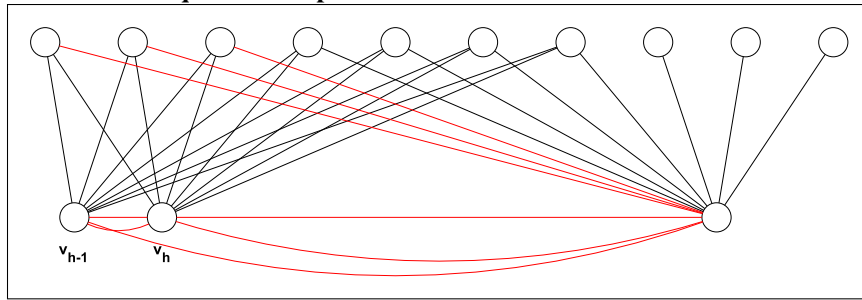
Então, considere que o grafo G'_u obtido após a adição de arestas entre Q e S_3 ainda não está saturado. Sejam G_1 e G_2 os subgrafos de G'_u induzidos por $V(G'_u) \setminus T_2$ e $V(G'_u) \setminus T_1$, respectivamente. Para $i \in \{1, 2\}$, seja $\overline{m}_i = |E(\overline{G}_i)|$. Podemos assumir, sem perda de generalidade que, $\overline{m}_1 \geq \overline{m}_2$. Existem duas formas diferentes de saturar o grafo G'_u , dependendo de como \overline{m}_1 é comparado ao valor de $\Delta(G)/2$. As diferentes forma de saturar G'_u dependem da escolha de um subconjunto $T \subseteq T_1 \cup T_2$ sobre o qual se especifica uma sequência de adição de arestas para esta saturação. Dada a sequência $(s_1, s_2, \dots, s_{|T|})$ de vértices de T , obtemos G'_u pela adição de arestas $s_i v$, com $v \in Q$, de forma que arestas com ponto final em s_i são adicionadas somente se toda aresta incidente em s_j , $j < i$, foi adicionada previamente. No primeiro caso, $T = T_1 \cup T_2$ e a sequência dos vértices em T , que iremos chamar de *sequência completa*, é $(b_{|S_2|-1}, b_{|S_2|-2}, \dots, b_{|P_2|}, a_{|S_1|-1}, a_{|S_1|-2}, \dots, a_{|P_1|})$. No segundo caso, $T = (T_1 - a_{|P_1|}) \cup (T_2 - b_{|P_2|})$, e a sequência dos vértices em T , que iremos chamar de *sequência incompleta*, é $(b_{|S_2|-1}, b_{|S_2|-2}, \dots, b_{|P_2|+1}, a_{|S_1|-1}, a_{|S_1|-2}, \dots, a_{|P_1|+1})$.

Agora a prova se divide em três casos: 1) G'_u é saturado pela sequência completa; 2) G'_u é saturado pela sequência incompleta; e 3) G'_u é quase saturado pela sequência incompleta. Nos dois primeiros casos, após a saturação, a forma de concluir a coloração de G é a mesma. O Caso (3) usa uma técnica diferente para concluir a coloração.

Caso 1 (saturação pela sequência completa). Quando $\overline{m}_1 \geq \Delta(G)/2$, considere o grafo G'_u saturado com adição de arestas na ordem da sequência completa. Como na sequência completa são adicionadas primeiro as arestas entre vértices de T_2 e Q e como $\overline{m}_1 \geq \Delta(G)/2$, todas estas arestas existem no grafo G'_u saturado. Portanto, todo vértice b_i é um vértice universal em G'_u . Seja $v_h = a_h$ o último vértice da sequência completa incidente com alguma aresta adicionada¹ (ou $v_h = a_{|S_1|-1}$, caso não tenha sido adicionada aresta alguma entre a_i e Q para saturar G'_u), ou seja, h é o menor inteiro cujo $\deg_{G'_u}(a_h) > \deg_{G_u}(a_h)$. Dessa forma, nenhuma aresta incidente em $v_{h-1} = a_{h-1}$ é adicionada para a saturação de G'_u . A Figura 26 mostra um exemplo de G'_u saturado com seus vértices v_h e v_{h-1} .

¹ Pode parecer desnecessário para o leitor que, neste momento, um novo nome (v_h) seja dada para a_h , mas essa notação será útil no Caso (2).

Figura 26 – Grafo saturado G'_u obtido pela adição de arestas respeitando a sequência completa

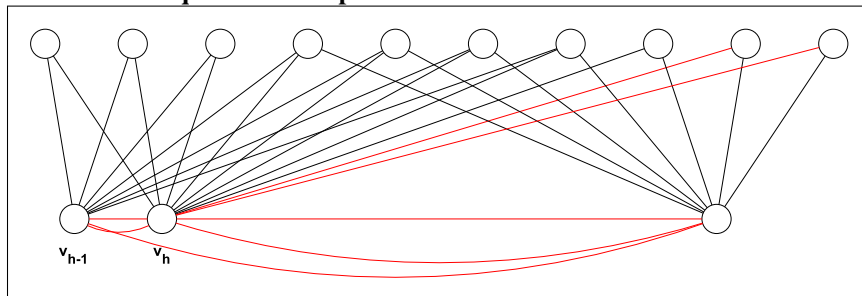


Fonte: Autoria própria

Como a coloração de arestas do grafo G'_u é feita da mesma forma tanto no Caso (1) quanto no Caso (2), vamos adiá-la para apresentar como saturar o grafo G'_u no Caso (2).

Caso 2 (saturação pela sequência incompleta). Neste caso, tem-se $\overline{m1} < \Delta(G)/2$ e $\deg_{\overline{G_u}}(b_{|P_2|}) + \deg_{\overline{G_u}}(a_{|P_1|}) \leq \Delta(G)/2$ e o grafo G'_u é saturado pela adição de arestas na ordem da sequência incompleta. Como $\deg_{\overline{G_u}}(b_{|P_2|}) + \deg_{\overline{G_u}}(a_{|P_1|}) \leq \Delta(G)/2$, ou existem exatamente $\Delta(G)/2$ arestas não incidentes no conjunto de vértices $\{b_{|P_2|}, a_{|P_1|}\}$, ou existem vértices da sequência incompleta que não serão vértices universais após a saturação de G'_u . De qualquer forma, após a saturação de G'_u , o último vértice de S_u em que incide alguma aresta adicionada pertence a T . Assim, seja v_h o último vértice da sequência incompleta em que incide alguma aresta adicionada, ou seja, h é o menor inteiro cujo $\deg_{G'_u}(v_h) > \deg_{G_u}(v_h)$. Note que v_h pode ser um vértice a_i ou um vértice b_i . Além disso, como $\deg_{\overline{G_u}}(b_{|P_2|}) + \deg_{\overline{G_u}}(a_{|P_1|}) \leq \Delta(G)/2$, existe um vértice v_{h-1} em que nenhuma aresta incidente foi adicionada para saturação de G'_u (este vértice pode pertencer a T ou ao conjunto $\{b_{|P_2|}, a_{|P_1|}\}$). A Figura 27 mostra um exemplo de G'_u saturado com seus vértices v_h e v_{h-1} .

Figura 27 – Grafo saturado G'_u obtido pela adição de arestas respeitando a sequência incompleta



Fonte: Autoria própria

Agora, vamos concluir a coloração de G'_u (e de G) para os Casos (1) e (2). Como G'_u tem um vértice universal, pelo Teorema 3.9, existe uma coloração de arestas $\varphi'_u : E(G'_u) \rightarrow \{1, 2, \dots, \Delta(G)\}$. Como G'_u é saturado, pelo Lema 3.13, o conjunto de vértices Q é elementar em φ'_u . A restrição φ_u de φ'_u para G_u é uma coloração parcial para G . Agora definimos uma coloração de arestas $\varphi : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, \Delta(G)\}$, que é uma extensão de φ_u . Pelo Teorema 4.5, para todo $a_i \in P_1$, existe $b_{s-i-1} \in T_2$ tal que $N_G(a_i) \cap N_G(b_{s-i-1}) = \emptyset$. Se $b_{s-i-1}v \in E(G'_u)$,

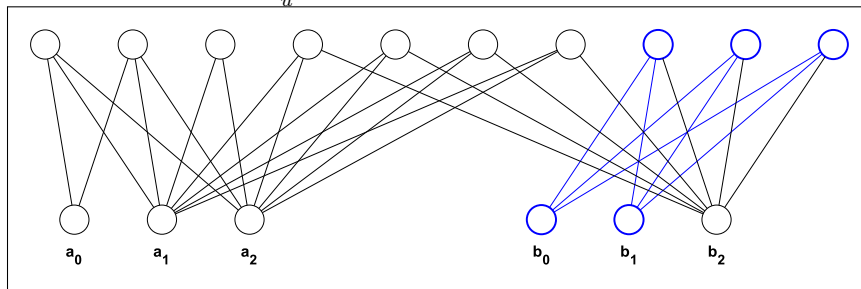
$a_i \in P_1$ e $v \in Q$, faça $\varphi(a_iv) = \varphi'_u(b_{s-i-1}v)$. Se $a_{s-i-1}v \in E(G'_u)$, $b_i \in P_2$, $v \in Q$ e $a_{s-i-1} \neq v_h$, faça $\varphi(b_iv) = \varphi'_u(a_{s-i-1}v)$. Como para todo $v \in Q$, $\varphi(v) \subseteq \varphi'_u(v)$, não existe par de arestas incidentes em v com mesma cor. Analogamente, $\varphi(a_i) \subseteq \varphi'_u(b_{s-i-1})$, para todo vértice $a_i \in P_1$; e $\varphi(b_{s-i-1}) \subseteq \varphi'_u(a_i)$ para todo vértice $b_{s-i-1} \in P_2$.

Para toda aresta $vw \in E(G)$ não colorida, com $v \in Q$, $w \notin \{a_{s-h-1}, a_{s-(h-1)-1}\}$ quando $v_h = b_h$, ou $w \notin \{b_{s-h-1}, b_{s-(h-1)-1}\}$ quando $v_h = a_h$, atribua uma cor distinta do conjunto $c \in \overline{\varphi'_u(v)} \setminus \varphi(v)$. Como Q restrito a $\overline{\varphi'_u(v)} \setminus \varphi(v)$ é elementar, duas arestas incidentes em w não terão a mesma cor, desde que as cores desse conjunto escolhidas para as arestas incidentes em v sejam duas a duas distintas.

Por fim, vamos colorir as arestas incidentes em $w_h = a_{s-h-1}$ e $w_{h-1} = a_{s-(h-1)-1}$ quando $v_h = b_h$, ou aquelas incidentes em $w_h = b_{s-h-1}$ e $w_{h-1} = b_{s-(h-1)-1}$ quando $v_h = a_h$. Note que $N(w_h) \subseteq N(w_{h-1})$. Seja $v \in Q$ adjacente a w_{h-1} e não adjacente a w_h . Neste caso, $|\overline{\varphi'_u(v)}| = 1$. Como Q é elementar em relação a $\overline{\varphi'_u(v)}$, essa cor pode ser atribuída a vw_{h-1} . Então, seja $v \in Q$ tal que $\{vw_{h-1}, vw_h\} \subset E(G)$. Então, a lista das cores que faltam em v na coloração parcial φ de G tem tamanho ao menos dois (já que vw_{h-1} e vw_h não estão coloridas).

Além disso, pelo menos uma das cores $\overline{\varphi(v)}$ pertence a $\overline{\varphi'_u(v)}$, e no máximo uma das cores em $\overline{\varphi(v)}$ foi utilizada para colorir a aresta vv_h (caso esta tenha sido adicionada para saturar G'_u). Então, seja $C(v) = (\overline{\varphi'_u(v)} \setminus \varphi(v)) \cup \varphi'_u(v_h)$. Como Q é elementar em relação a $\overline{\varphi'_u(v)}$ (sendo que cada cor falta em exatamente um vértice de $V(G'_u)$), e como todas as cores das arestas incidentes em v_h são distintas na coloração φ'_u , cada cor ocorre no máximo duas vezes na coleção de listas de cores $\{C(v) : v \in N_G(w_h)\}$. Então, podemos obter uma coleção 2-limitada de pares de cores para cada v adjacente a w_h , escolhendo quaisquer duas cores de $C(v)$. Assim, podemos criar uma coleção de listas 2-limitada Γ . Seja X o subgrafo de G induzido pelas arestas de G com um vértice em Q e o outro em $\{w_{h-1}, w_h\}$. Note que X é um grafo bipartido completo. A Figura 28 mostra um exemplo do subgrafo X . Assim, X pode ser colorido usando as cores de Γ , pelo Lema 4.2. Portanto, a coloração resultante φ é uma coloração de arestas com $\Delta(G)$ cores para G , concluindo os Casos (1) e (2).

Figura 28 – Subgrafo bipartido após a coloração parcial de G do grafo saturado G'_u

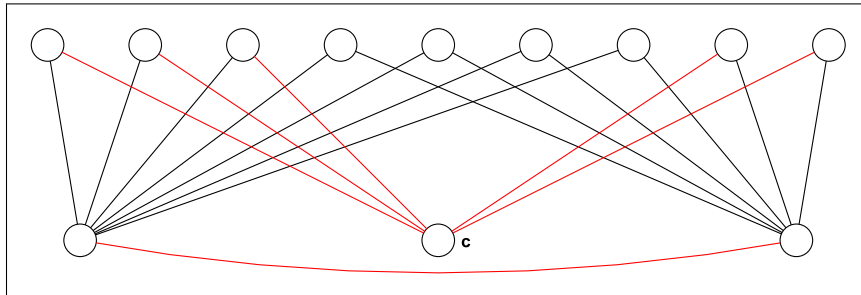


Fonte: Autoria própria

Caso 3 (quase saturação pela sequência incompleta). Quando $\overline{m1} < \Delta(G)/2$ e $deg_{G'_u}(b_{|P_2|}) + deg_{G'_u}(a_{|P_1|}) > \Delta(G)/2$, o grafo G'_u resultante da adição de todas as arestas entre Q e T obedecendo a sequência incompleta não é saturado. Então, adicionamos a G'_u um

novo vértice c no conjunto independente S_u e o fazemos adjacente a todo vértice da diferença simétrica² $N(a_{|P_1|}) \oplus N(b_{|P_2|})$, como ilustrado na Figura 29. Como todo vértice universal em G_u está no conjunto $N(a_{|P_1|}) \cap N(b_{|P_2|})$, então $\Delta(G'_u) = \Delta(G_u) = \Delta(G)$ e todo vértice de G'_u com grau $\Delta(G)$ é um vértice quasi-universal não sendo adjacente a exatamente um dos vértices no conjunto $\{c, a_{|P_1|}, b_{|P_2|}\}$. Adicionalmente, G'_u não é subgrafo-sobrecarregado, já que $G'_u - c$ não é sobrecarregado, pela hipótese, e todo outro vértice $x \in S_u$ tem mais que $\Delta(G)/2$ vizinhos em $\overline{G'_u}$. Além disso, G'_u tem uma coloração de arestas φ'_u com $\Delta(G)$ cores pelo Teorema 3.10. Portanto, a restrição φ_u de φ'_u para G_u é uma coloração parcial de arestas para G .

Figura 29 – G'_u obtido após a adição do vértice c e das arestas incidentes em c



Fonte: Autoria própria

Agora definimos uma coloração de arestas $\varphi : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, \Delta(G)\}$ que é uma extensão de φ_u da seguinte forma. Lembre-se que, para todo $a_i \in P_1$, existe $b_{s-i-1} \in T_2$ tal que $N_G(a_i) \cap N_G(b_{s-i-1}) = \emptyset$, pelo Teorema 4.5. Se $b_{s-i-1}v \in E(G'_u)$, $a_i \in P_1$ e $v \in Q$, então $\varphi(a_iv) = \varphi'_u(b_{s-i-1}v)$. Se $a_{s-i-1}v \in E(G'_u)$, $b_i \in P_2$ e $v \in Q$, então $\varphi(b_iv) = \varphi'_u(a_{s-i-1}v)$. Finalmente, para cada aresta ainda não colorida $wv \in E(G)$, $w \in S$ e $v \in Q$, faça $\varphi(wv) = \varphi'_u(cv)$. Como as cores das arestas incidentes em c são todas distintas e $\varphi(v) = \varphi'_u(v)$, a coloração resultante φ é uma coloração de arestas própria para G com $\Delta(G)$ cores, concluindo a prova. \square

4.5 A CONJECTURA *OVERFULL* EM SPLIT-COMPARABILIDADE E SPLIT-INTERVALOS

Nesta seção, vamos destacar que todo grafo split-intervalos e split-comparabilidade satisfaz a hipótese da Conjectura *Overfull*. O Teorema 4.10, para grafos split-comparabilidade, foi apresentado por Cruz (2017) e sua demonstração será omitida. A demonstração apresentada no Teorema 4.11 possui uma ideia análoga para mostrar o mesmo resultado em grafos split-intervalos.

Teorema 4.10 (CRUZ, 2017). *Seja G um grafo split-comparabilidade, então $\Delta(G) > \frac{n}{3}$.*

Teorema 4.11. *Seja G um grafo split-intervalos, então $\Delta(G) \geq \frac{n}{3}$.*

² A diferença simétrica $A \oplus B$ é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A ou a B , mas não a $A \cap B$.

Demonstração. Considere um grafo split-intervalos $G = [Q, S]$ com uma partição do seu conjunto independente em S_1 e S_2 satisfazendo a propriedade de inclusão de vizinhanças. Sem perda de generalidade considere que $|S_1| \geq |S_2|$. Dessa forma $\Delta(G) \geq |Q| - 1 + |S_1|$. Sabemos que $n = |Q| + |S_1| + |S_2|$, ou seja, $|Q| + |S_1| - 1 = n - |S_2| - 1$. Assim $\Delta(G) \geq n - |S_2| - 1$. Agora, vamos assumir por contradição que $\Delta(G) < \frac{n}{3}$, assim $n - |S_2| < \Delta(G) < \frac{n}{3}$. Portanto, $n - |S_2| < \frac{n}{3}$, $|S_2| > \frac{2n}{3}$. Como $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, tem-se que $|S_1| < \frac{n}{3}$. Assim, $|S_1| < |S_2|$, uma contradição. Portanto $\Delta(G) \geq \frac{n}{3}$. \square

Com os teoremas 4.10 e 4.11, sabemos que todo grafo split-comparabilidade ou split-intervalos satisfazem a hipótese da Conjectura *Overfull*. Pelos teoremas 4.7 e 4.9, podemos afirmar que a Conjectura *Overfull* vale para ambas as classes.

5 CONCLUSÕES

A principal contribuição deste trabalho é o Teorema 4.9, em que resolvemos o Problema da Classificação para grafos split-intervalos. Anteriormente, a maior subclasse dos grafos split-intervalos para a qual o problema havia sido resolvido era a dos grafos split-indiferença (ORTIZ; MACULAN; SZWARCFITER, 1998). Outra importante contribuição é o Lema 4.4, que apresenta uma propriedade estrutural das vizinhanças do conjunto independente de grafos split-intervalos quanto a inclusão de vizinhanças.

Outra contribuição foi a correção da demonstração do Teorema 4.7 apresentado por Cruz (2017). Com a ajuda do Lema 4.1, mostramos que sempre é possível estender para o subgrafo bipartido-completo restante a coloração do subgrafo com vértice universal obtida inicialmente.

Por fim, da mesma forma que havia sido provado para os grafos split-comparabilidade, foi provado que grafos split-intervalos sempre satisfazem a hipótese da Conjectura *Overfull* pelo Teorema 4.11. Esse fato, em conjunto com o Teorema 2.16, apresenta mais uma evidência da validade da Conjectura.

5.1 TRABALHOS FUTUROS

Para resolver o Problema da Classificação para grafos split-comparabilidade e split-intervalos, foram usadas ordenações dos vértices dessas classes baseadas em suas características quando associadas à existência de uma clique e conjunto independente. Sabe-se que grafos cordais possuem uma ordenação de seus vértices baseadas em propriedades de cliques. Então, seria interessante analisar se técnicas usadas neste trabalho, como considerar apenas grafos sem vértice universal em seu seminúcleo, poderiam ser utilizadas em grafos split como um todo.

Além disso, pode ser constatado com relativa facilidade que, ao contrário dos grafos split-comparabilidade e split-intervalos, nem todo grafo split satisfaz a hipótese da Conjectura *Overfull*. Então, seria interessante descobrir se grafos split que satisfazem a hipótese da Conjectura *Overfull* também corroboram para a validade da mesma. Adicionalmente, seria interessante investigar se mesmo grafos split que não têm grau máximo maior ou igual a um terço de seus vértices ainda são Classe 1 se, e somente se, não forem subgrafo-sobrecarregado.

Por fim, neste trabalho, algumas propriedades interessantes foram provadas para coleções 2-limitadas de pares de cores. Acredita-se que essas propriedades podem ser estendidas e provadas para qualquer coleção β -limitada de pares de cores fazendo-se os devidos ajustes. Perseguir essas propriedades poderia facilitar a prova do Lema 4.1 para grafos bipartidos completos com parte de tamanho β .

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, S. M. de. **Coloração de arestas em grafos split**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2012.
- BEHZAD, M; CHARTRAND, G; COOPER, JK. The colour numbers of complete graphs. **Journal of the London Mathematical Society**, Oxford Academic, v. 1, n. 1, p. 226–228, 1967.
- BOJARSHINOV, V. A. Edge and total coloring of interval graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 114, n. 1-3, p. 23–28, 2001.
- CAI, L.; ELLIS, J. A. NP-completeness of edge-colouring some restricted graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 30, n. 1, p. 15–27, 1991.
- CHEN, B.; FU, H.; KO, M. T. Total chromatic number and chromatic index of split graphs. **Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing**, n. 17, 1995.
- CHETWYND, A. G.; HILTON, A. J. W. The chromatic index of graphs of even order with many edges. **Journal of graph theory**, Wiley Online Library, v. 8, n. 4, p. 463–470, 1984.
- CHETWYND A, G; HILTON, A. J. W. Partial-edge colouring of complete graphs or of graphs which are nearly complete. Academic Press, 1984.
- CHETWYND, A. G.; HILTON, A. J. W. Star multigraphs with three vertices of maximum degree. In: **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**. [S.l.: s.n.], 1986. v. 100, n. 2, p. 303–317.
- CORMEN, T. H *et al.* **Introduction to algorithms**. [S.l.]: MIT press, 2009.
- CRUZ, J. B. S. **Coloração de Arestas em Grafos Split-Comparabilidade**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2017.
- DUSHNIK, B.; MILLER, E. W. Partially ordered sets. **American journal of mathematics**, JSTOR, v. 63, n. 3, p. 600–610, 1941.
- ERDŐS, P.; WILSON, R. J. On the chromatic index of almost all graphs. **Journal of combinatorial theory, series B**, Elsevier, v. 23, n. 2-3, p. 255–257, 1977.
- FIGUEIREDO, C. M. de; MEIDANIS, J.; MELLO, C. P. de. Local conditions for edge-coloring. **Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing**, Citeseer, v. 32, p. 79–92, 2000.
- FIGUEIREDO, C. M. H. De; MEIDANIS, J.; MELLO, C. P. de. Total-chromatic number and chromatic index of dually chordal graphs. **Information Processing Letters**, Elsevier, v. 70, n. 3, p. 147–152, 1999.
- FIGUEIREDO, C. M. H. de; MELLO, C. P. de; ORTIZ, C. Edge colouring reduced indifference graphs. In: GONNET, Gaston H.; VIOLA, Alfredo (Ed.). **LATIN 2000: Theoretical Informatics**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2000. p. 145–153. ISBN 978-3-540-46415-0.
- FÖLDES, S.; HAMMER, P. Split graphs. **Proceedings of the 8th south-east Combinatorics, Graph Theory, and Computing**, p. 311–315, 1977.

- FULKERSON, D.; GROSS, O. Incidence matrices and interval graphs. **Pacific journal of mathematics**, Mathematical Sciences Publishers, v. 15, n. 3, p. 835–855, 1965.
- GILMORE, P. C.; HOFFMAN, A. J. A characterization of comparability graphs and of interval graphs. **Canadian Journal of Mathematics**, Cambridge University Press, v. 16, p. 539–548, 1964.
- GOLUMBIC, M. C. **Algorithmic graph theory and perfect graphs**. [S.l.]: Elsevier, 2004.
- HAJÓS, G. Uber eine art von graphen, internat. **Math. Nachr**, v. 11, 1957.
- HILTON, A. J. W.; HOLROYD, F. C.; ZHAO, C. The overfull conjecture and the conformability conjecture. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 241, n. 1-3, p. 343–361, 2001.
- HILTON, A. J. W; JOHNSON, P. D. Graphs which are vertex-critical with respect to the edge-chromatic number. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**. [S.l.], 1987. v. 102, p. 211–221.
- HOLYER, I. The NP-completeness of edge-coloring. **SIAM Journal on computing**, SIAM, v. 10, n. 4, p. 718–720, 1981.
- JOHNSON, D. S. The NP-completeness column: an ongoing guide. **Journal of Algorithms**, Elsevier, v. 6, n. 3, p. 434–451, 1985.
- MACHADO, R. C. S; FIGUEIREDO, C. M. H. de. Decompositions for edge-coloring join graphs and cobipartite graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 158, n. 12, p. 1336–1342, 2010.
- Chapter 5 - split graphs. In: MAHADEV, N.V.R.; PELED, U.N. (Ed.). **Threshold Graphs and Related Topics**. Elsevier, 1995, (Annals of Discrete Mathematics, v. 56). p. 111 – 121. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167506006800075>>.
- ORTIZ, C.; VILLANUEVA, M. On split-comparability graphs. In: **Proc. II ALIO-EURO Workshop on Practical Combinatorial Optimization, Valparaiso, Chile**. [S.l.: s.n.], 1996. p. 91–105.
- _____. Threshold dimension of split-permutation graphs. **Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing**, v. 75, p. 117, 2010.
- ORTIZ, Z.C.; MACULAN, N.; SZWARCFITER, J. L. Characterizing and edge-colouring split-indifference graphs. **Discrete applied mathematics**, Elsevier, v. 82, n. 1-3, p. 209–217, 1998.
- PLANTHOLT, M. The chromatic index of graphs with a spanning star. **Journal of Graph Theory**, Wiley Online Library, v. 5, n. 1, p. 45–53, 1981.
- PLANTHOLT, M. J. The chromatic index of graphs with large maximum degree. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 47, p. 91–96, 1983.
- PNUELI, A.; LEMPEL, A.; EVEN, S. Transitive orientation of graphs and identification of permutation graphs. **Canadian Journal of Mathematics**, Cambridge University Press, v. 23, n. 1, p. 160–175, 1971.
- ROBERTS, F. S. **Indifference graphs, Proof Techniques in Graph Theory (F. Harary, ed.)**. [S.l.]: Academic Press, 1969.

TAN, N. D.; HUNG, L. X. On colorings of split graphs. **Acta Math Vietnam**, v. 31, n. 3, p. 195–204, 2006.

VIZING, V. G. On an estimate of the chromatic class of a p -graph. **Discret Analiz**, v. 3, p. 25–30, 1964.

ÍNDICE REMISSIVO

- aresta, 15
 - incide, 15
 - múltiplas, 16
 - orientação transitiva, 19
- classe de cor, 17
- clique, 17
 - maximal, 17
- cobre, 17
- coleção de pares de cores, 36
 - β -limitada, 36
 - 2-limitada
 - ciclicamente fechada, 36
- coloração própria de arestas, 11
 - parcial, 16
 - por listas, 37
 - índice cromático, 11
- complemento, 17
- conjunto estável, 17
- conjunto independente de arestas, 17
- conjunto independente de vértices, 17
- crítico, 17
- diagrama de cores, 33
 - β -limitado, 36
 - monotônico, 33
- elementar, 17
- emparelhamento, 17
 - máximo, 17
 - perfeito, 17
- falta, 17
- grafo, 15
 - bipartido, 17
 - co-comparabilidade, 20
 - comparabilidade, 19
 - completo, 16
 - cordal, 18
 - ordenação de eliminação perfeita, 18
 - de intervalos próprios, 28
 - indiferença, 27
 - interseção, 20
 - intervalos, 21, 26
 - multigrafos, 16
 - permutação, 21, 22
 - regular, 16
 - simples, 16
 - split, 18
 - co-comparabilidade, 24
 - comparabilidade, 23
 - completo, 33
 - indiferença, 28
 - permutação, 24
- grau máximo, 11
- inclusão de vizinhanças, 24
 - ordenação de, 38
- intervalo da clique, 39
- laços, 16
- partição por cores β -limitada, 36
- partição por inclusões de vizinhança, 41
- Problema da Classificação, 11
- quadrado latino, 32
 - comutativo, 32
 - idempotente, 32
- saturado, 35
- seminúcleo, 34
- sequência completa, 47
- sequência incompleta, 47
- sobrecarregado, 31
- subgrafo induzido, 17
- subgrafo induzido por arestas, 17

subgrafo-sobrecarregado, 31

vizinhança

aberta, 16

fechada, 16

vizinhança-sobrecarregado, 31

vértice, 15

k -vértice, 16

adjacentes, 15

grau, 16

quasi-universal, 34

universal, 16

vizinhos, 15