

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

IAGO MATHEUS IUBEL TROJAN

**VERIFICAÇÃO DO ESTADO LIMITE DE VIBRAÇÃO EM UMA
ESCADA COM DEGRAUS EM BALANÇO SUBMETIDA AO
CAMINHAR HUMANO**

CAMPO MOURÃO

2019

IAGO MATHEUS IUBEL TROJAN

**VERIFICAÇÃO DO ESTADO LIMITE DE VIBRAÇÃO EM UMA
ESCADA COM DEGRAUS EM BALANÇO SUBMETIDA AO
CAMINHAR HUMANO**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado à Disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do Curso Superior em Engenharia Civil do Departamento Acadêmico de Construção Civil – DACOC – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, para obtenção do título de bacharel em engenharia civil.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Rodrigo Carreira

Coorientador: Prof. Me. Angelo Giovanni Bonfim Corelhano

CAMPO MOURÃO

2019



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Campo Mourão
Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Departamento Acadêmico de Construção Civil
Coordenação de Engenharia Civil



TERMO DE APROVAÇÃO
Trabalho de Conclusão de Curso
VERIFICAÇÃO DO ESTADO LIMITE DE VIBRAÇÃO EM UMA ESCADA COM
DEGRAUS EM BALANÇO SUBMETIDA AO CAMINHAR HUMANO

por

IAGO MATHEUS IUBEL TROJAN

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 14h00min do dia 24 de junho de 2019 como requisito parcial para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL, pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Prof. Dr. Jeferson Rafael Bueno
(UTFPR)

Prof. Dr. Ronaldo Rigobello
(UTFPR)

Prof. Me. Angelo Giovanni Bonfim
Corelhano
(UTFPR)
Coorientador

Prof. Dr. Marcelo Rodrigo Carreira
(UTFPR)
Orientador

Responsável pelo TCC: **Prof. Me. Valdomiro Lubachevski Kurta**

Coordenador do Curso de Engenharia Civil:
Prof. Dr(a). Paula Cristina de Souza

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os meus familiares que sempre me deram suporte para a realização do curso.

A todos os meus colegas que de alguma maneira auxiliaram para desenvolvimento desse trabalho.

Ao Professor Marcelo Rodrigo Carreira por toda sua paciência, contribuição e comprometimento na realização desse trabalho.

Aos professores Angelo Giovanni, Ronaldo Rigobello e demais professores que contribuíram para elaboração desse trabalho.

RESUMO

TROJAN, IAGO M. I. **Verificação do estado limite de vibração em uma escada com degraus em balanço submetida ao caminhar humano**. 69 f. Trabalho de Conclusão de Curso 2 (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2019.

No projeto de estruturas submetidas a ação do caminhar humano como passarelas, pisos e escadas, deve-se verificar, além dos Estados Limites Últimos, se os elementos não atingem um Estado Limite de Serviço relacionado ao desconforto causado por vibração excessiva. Não é incomum encontrar casos de escadas com problemas de vibração e as que possuem degraus em balanço estão entre as mais sensíveis a vibração por conta do esquema estrutural de seus degraus. As normas atuais de projeto de estruturas não apresentam critérios para verificação de vibrações excessivas especificamente para escadas. Alguns autores sugerem limites para acelerações máximas e frequências naturais. Neste trabalho foi realizada uma revisão sobre os critérios para o limite de vibrações em escadas e uma modelagem numérica para exemplificar a aplicação de tais critérios em uma escada autoportante com degraus em balanço. Foram testados dois modelos, ambos com a viga de suporte com seção retangular de concreto armado, um com os degraus metálicos compostos por perfis de aço formado a frio de seção u enrijecido e outro com degraus retangulares de concreto armado. Um modelo computacional em elementos finitos foi implementado no programa SAP 2000 versão 21 Evaluation. A determinação das cargas estáticas atuantes na escada e o dimensionamento foram feitos de acordo com as normas brasileiras. O carregamento dinâmico do caminhar humano foi o simulado a partir dos dados de Meinhardt et al. (2014). Na escada com degraus metálicos os valores de aceleração excederam os valores limites presentes na bibliografia, enquanto que a escada com degraus de concreto a aceleração foi menor que os limites para o conforto do usuário.

Palavras-chave: Escada, Análise Dinâmica, Critérios de Conforto, Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT

TROJAN, IAGO M. I. **Verification of vibration limit state on a staircase with catilever steps subjected to human walking.** 69 f. Undergraduate thesis (Bachelor degree in Civil Engineering) – Federal University of Technology - Paraná. Campo Mourão, 2019.

In the design of structures submitted to the action of human walking such as footbridges, floors and staircases, must be subjected to a dynamic analysis in order to verify their limit states related to the discomfort caused by excessive vibration. It is not uncommon to find cases of staircases with problems of vibration, those that have cantilever steps are among the most sensitive to vibration due to the structural scheme of their steps. The current design standards do not provide criteria for checking excessive vibrations specifically for staircases. Some authors suggest limits for maximum accelerations and natural frequencies. In this work a review was done on the criteria for the limit of vibrations and a numerical modeling to exemplify the application of such criteria in a self-supporting staircase with cantilever steps. Two models were tested, both has the support beam with rectangular section made of reinforced concrete, one has metallic steps composed of sections made of cold-formed steel in a u-stiffened profile and another with rectangular steps made of reinforced concrete. A finite element computational model was assembled in the software SAP 2000 version 21 Evaluation. The determination of the static loads acting on the staircase and the dimensioning were done according to the Brazilian standards. The dynamic load used for human walking was the obtained in Meinhardt et al. (2014). In the staircase with metallic steps the acceleration values exceeded the limit values present in the bibliography, whereas in the staircases with concrete steps the acceleration was smaller than the limits for the comfort of the user.

Keywords: Staircase, Dynamic Analysis, Comfort Criteria, Finite Elements Method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Escada com degraus em balanço.....	14
Figura 2 - Escada com degraus de vidro em balanço.....	15
Figura 3 - Escada com tirantes na extremidade em balanço.....	16
Figura 4 - Representação sistema de um grau de liberdade.....	27
Figura 5 - Fator de amplificação dinâmica pela relação de frequências.	30
Figura 6 - Função periódica.....	31
Figura 7 - Pórtico de dois pavimentos representado por dois GDL's.	32
Figura 8 - Funções para o caminhar humano subindo escadas.	37
Figura 9 - Funções para o caminhar humano descendo escadas.	38
Figura 10 - Funções do caminhar humano subindo escadas.	40
Figura 11 - Funções do caminhar humano descendo escadas.....	40
Figura 12 - Limites de percepção da Aceleração RMS vertical.	42
Figura 13 – Vista em perspectiva da escada estudada.....	46
Figura 14 - Corte transversal da escada estudada.....	46
Figura 15 - Modelo numérico da escada no SAP 2000.....	47
Figura 16 - Esquema estático do degrau.....	48
Figura 17 - Seção transversal do degrau.	51
Figura 18 - Armaduras da viga.....	52
Figura 19 - 1° Modo de vibrar.	53
Figura 20 - 2° Modo de vibrar.	54
Figura 21 - Histórico de acelerações no degrau 1 devido ao caminhar normal.....	55
Figura 22 - Histórico de acelerações no degrau 1 devido ao caminhar rápido.	56
Figura 23 - Escada com degraus de concreto e um pilar no centro da viga.....	58
Figura 24 - 1° Modo de vibrar da escada com degraus em concreto.	59
Figura 25 - 2° Modo de vibrar da escada com degraus em concreto.	59
Figura 26 - Histórico de aceleração no degrau 1 devido ao caminhar normal na escada com degraus de concreto.....	60
Figura 27 - Histórico de aceleração no degrau 1 devido ao caminhar rápido na escada com degraus de concreto.....	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores dos componentes da série de Fourier.	37
Tabela 2 - Harmônicos para humanos subindo escadas.....	38
Tabela 3 - Harmônicos para humanos descendo escadas.....	38
Tabela 4 - Força dinâmica e amplitude da força de projeto.....	39
Tabela 5 - Fator de multiplicação R.	42
Tabela 6 - Limites de aceleração vertical para escadas.	44
Tabela 7 - Solicitações e valores resistentes ou limites no degrau.....	51
Tabela 8 - Esforços críticos na viga de sustentação.....	52
Tabela 9 - Valores de flecha na viga.	53

LISTA DE SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
BS	British Standard
ELS	Estado limite de serviço
ELU	Estado limite ultimo
FAD	Fator de amplificação dinâmica
FCN	Flexão composta normal
FD	Força dinâmica
GDL	Grau de liberdade
h	Harmônico
MEF	Método dos elementos finitos

LISTA DE SÍMBOLOS

a_p	Aceleração
g	Aceleração da Gravidade
$\ddot{u}(t)$	Aceleração em função do tempo
c	Amortecimento
β	Amortecimento Viscoso
γ_q	Coefficiente de ponderação para cargas acidentais
γ_g	Coefficiente de ponderação para cargas permanentes
L	Comprimento
$u(t)$	Deslocamento em função do tempo
Ψ_0	Fator de combinação
Ψ_1	Fator de redução
Ψ_2	Fator de redução
$p(t)$	Força aplicada em função do tempo
$f_D(t)$	Força de amortecimento em função do tempo
$f_S(t)$	Força de mola em função do tempo
$f_I(t)$	Força inercial em função do tempo
w	Força por comprimento
ω_0	Frequência do harmônico fundamental
ω_n	Frequência natural (rad/s)
f_n	Frequência natural (Hz)
Hz	Hertz
e	Excentricidade
I	Inércia
m	Massa
M	Massa modal fundamental
φ	Modo unitário normalizado para resposta a excitação
E	Modulo de Elasticidade
N	Newton
T_0	Período fundamental
Q	Peso
f_{ck}	Resistência característica do concreto
k	Rigidez
t	Tempo

$F_{Qi,k}$	Valor característico da carga acidental
$F_{Gi,k}$	Valor característico da carga permanente
F_d	Valor das solicitações de calculo
$\dot{u}(t)$	Velocidade em função do tempo
V	Volume

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 Objetivo geral	12
1.2 Objetivos específicos.....	13
1.3 JUSTIFICATIVA.....	13
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	14
2.1 Escadas com degraus em balanço	14
2.2 Revisão dos estudos sobre vibração em escadas	16
2.3 Dimensionamento de escadas	18
2.3.1 Carregamentos.....	18
a) Ações permanentes	19
b) Ações variáveis.....	19
2.3.2 Combinações de ações.....	19
2.3.3 Verificação dos estados limites	20
a) Degrau metálico.....	20
b) Viga de suporte em concreto armado.....	21
2.4 Fundamentos da análise dinâmica das estruturas	27
2.4.1 Sistemas com 1 grau de liberdade	27
a) Resposta a solicitação harmônica	28
b) Resposta a solicitação periódica.....	30
2.4.2 Sistemas com múltiplos graus de liberdade	32
2.4.3 Resposta a vibração livre	33
2.4.4 Solução numérica da equação de movimento.....	34
2.5 Método dos elementos finitos.....	35
2.6 Ação do caminhar humano em escadas	36
2.7 Limites aceitáveis de vibração em escadas.....	41
2.7.1 Frequência natural mínima.....	41
2.7.2 Aceleração máxima	41
3 MÉTODOS	45
3.1 Escada estudada	45
3.1 Modelagem numérica.....	47
3.1.1 Análise estática e dimensionamento	48
a) Dimensionamento do degrau metálico.....	48

b) Dimensionamento da viga	49
3.1.2 Análise dinâmica	49
3.2 Verificação do estado limite de serviço de vibração excessiva.....	50
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	51
4.1 Análise estática e dimensionamento.....	51
4.1.1 Dimensionamento do degrau	51
4.1.2 Dimensionamento da viga de sustentação.....	51
4.2 Análise modal	53
4.3 Análise a vibração forçada	54
4.4 Alterações no modelo numérico.....	57
5 CONCLUSÕES	63
REFERÊNCIAS.....	64

1 INTRODUÇÃO

As escadas, elemento essencial em vários tipos de obras na construção civil, as escadas possuem várias concepções arquitetônicas e de materiais que fazem com que cada uma tenha propriedades diferentes em cada projeto.

A ausência ou má avaliação do comportamento dinâmico dessas estruturas podem ocasionar problemas de vibração devido a ação do caminhar humano.

Problemas relacionados a vibração excessiva em estruturas já construídas, geralmente são difíceis e onerosos de serem corrigidos. Por isso, é de extrema importância na fase de projeto que tais problemas possam ser identificados e evitados.

Alguns arquitetos e engenheiros tem receio de usar escadas com degraus em seus projetos, por conta de ser comum a ocorrência de problemas relacionados à vibração.

Atualmente no Brasil, a maioria dos cursos de engenharia civil não possui uma disciplina sobre análise dinâmica na grade curricular. Desta forma, vários profissionais não tem o conhecimento necessário para avaliar o comportamento de estruturas sujeitas a carregamentos dinâmicos e, não estão capacitados para avaliar o Estado Limite de Serviço (ELS) referente as vibração excessiva em estruturas de passarelas, pisos e escadas.

As normas ABNT NBR 6118:2014, a ABNT NBR 8800: 2008 e a ABNT NBR 7190:1997 só abordam casos de vibração em estruturas de superfície plana. O trabalho de BISHOP *et al.* (1995) mostrou que o segundo harmônico do caminhar humano é 57% maior quando descendo escadas comparado com o caminhar em uma superfície plana. Nesse trabalho os autores mostraram ainda que as frequências e os harmônicos são diferentes para os dois casos. Assim, o estudo de vibrações em escadas não pode ser realizado com o mesmo carregamento do caminhar em pisos planos.

1.1 Objetivo geral

Investigar os critérios para verificação do ELS referente a vibração excessiva em escadas com degraus em balanço.

1.2 Objetivos específicos

- Identificar os critérios para a verificação do ELS referente a vibração excessiva em escadas;
- Compreender as cargas atuantes em uma escada autoportante com degraus em balanço;
- Dimensionar duas escadas hipotéticas com degraus em balanço sendo uma com degraus metálicos e outra em concreto armado e aplicar os critérios de verificação do ELS de vibração excessiva.

1.3 Justificativa

A importância da análise dinâmica das estruturas na engenharia civil vem crescendo pelo fato de que com os avanços tecnológicos, as estruturas civis estão cada vez mais esbeltas. O excesso de vibrações em estruturas pode causar diversos problemas para o seu uso, desde do desconforto do usuário até a fadiga e nos casos mais graves a ruína.

As ações dinâmicas como o caminhar humano, interferem diretamente no comportamento dinâmico estrutural de pisos e escadas. As normas nacionais de projeto contemplam somente limites para as frequências naturais para avaliar os estados limites de serviço referente a vibração excessiva em pisos.

Em se tratando especificamente das escadas metálicas, a ABNT NBR 8800:2008 e a ABNT NBR 6118:2014 não definem limites necessários para garantir conforto dos usuários ao utilizarem escadas. A ABNT NBR 8681:2003 também não contempla como devem ser consideradas as ações do caminhar humano nessas estruturas. Nesse sentido, as normas deixam uma lacuna para os engenheiros no que tange a análise do comportamento dessas estruturas.

Assim, neste trabalho foi realizada pesquisa na bibliografia internacional a fim de identificar como simular a ação do caminhar humano em escadas e quais os limites aceitáveis de vibração para garantir conforto aos usuários dessas estruturas.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Escadas com degraus em balanço

As escadas com degraus em balanço podem ser compostas de diversos materiais. Para os degraus, pode ser utilizado aço, concreto armado, madeira e até mesmo vidro. As figuras 1 e 2 mostram exemplos de escadas com os degraus em balanço.

Figura 1 - Escada com degraus em balanço.



Fonte: limaonagua (2015).

Figura 2 - Escada com degraus de vidro em balanço.



Fonte: limaonagua (2015).

Por conta de seu esquema estrutural, que gera momentos de torção na viga de suporte, esta deve ser engastada nas extremidades. Os degraus também devem ser engastados na viga de suporte.

Em alguns modelos, a escada possui tirantes na extremidade livre que servem de guarda corpo e também podem ser usados como elemento estrutural da escada. A Figura 3 mostra uma escada com deste modelo.

Figura 3 - Escada com tirantes na extremidade em balanço.



Fonte: limaonagua (2015).

2.2 Revisão dos estudos sobre vibração em escadas

Para compreender o problema da vibração nessas estruturas foi realizada uma pesquisa sobre os principais trabalhos desenvolvidos sobre o tema.

Em Bishop *et al.* (1995) foram realizados ensaios e modelagens para determinar os efeitos do caminhar humano em escadas. Foi avaliado o comportamento com apenas uma pessoa e com várias pessoas utilizando a escada. Series de Fourier foram ajustadas para representar o caminhar humano em diferentes velocidades em escada. Este é um dos trabalhos mais citados por outros autores em

trabalhos mais atuais por ser um dos primeiros a fazer este tipo de análise especificamente em escadas.

Em Kerr (1998) foi realizado um estudo aprofundado específico sobre o carregamento induzido por humanos em escadas. O estudo mostrou que o caminhar humano em pisos tem os harmônicos são cerca de 2 a 3 vezes menores que os harmônicos que ele obteve para o caminhar em escadas. Este trabalho também é referência para trabalhos mais novos por ser um dos primeiros trabalhos específicos no assunto e trazer diversos detalhes sobre as análises realizadas.

Em Davis e Murray (2009) foram realizados ensaios em uma escada já existente para determinar parâmetros para definição das frequências do caminhar humano em escadas e também para uma análise modal da escada para definir de maneira precisa seu modelo numérico computacional. Como conclusão foi deixado um guia para modelagem e verificação de vibrações em escadas baseado em estudos prévios e em sua pesquisa.

Em Belver *et al.* (2013) foi analisado uma escada na Universidade de Warwick no Reino Unido. Foram realizadas análises em campo e também modelagem computacional utilizando o software Abaqus. O modelo numérico foi calibrado a partir dos resultados dos ensaios de campo. Após a calibração do modelo numérico foi identificado que a escada era menos rígida do que foi definido na modelagem inicial.

Em Setareh (2013) foi apresentado uma revisão dos estudos realizados sobre efeitos dinâmicos em escadas e realizou um estudo de caso em uma escada de um museu de arte em Michigan que possuía problemas devido à vibração devido ao caminhar humano. Foram realizadas várias modificações na estrutura original da escada em sua modelagem numérica para aumentar a frequência natural da escada e assim, segundo as modelagens solucionar o problema da vibração para o caminhar normal, para o caminhar rápido a escada ainda pode sofrer com vibrações excessivas.

Em Meinhardt *et al.* (2014) foram usadas células de carga para medir o carregamento gerado pelo caminhar humano em uma escada. Os resultados foram comparados com os experimentos desenvolvidos por outros pesquisadores. Os resultados do ensaio foram aplicados a um modelo numérico de uma escada já existente para comparar com ensaios realizados na estrutura. Foram ensaiadas mais exemplos de escadas e propostas medidas de redução de vibrações para mostrar a relevância do assunto.

Em Schauvliege *et al.* (2014) foi ensaiada uma escada metálica ainda não finalizada em um escritório. Foi realizada uma modelagem computacional da escada pelo método dos elementos finitos. Para verificação dos estados limites de serviço da estrutura eles utilizaram os valores obtidos por Bishop *et al* (1995), e os resultados mostraram que a escada ultrapassa os valores de aceleração máximos propostos.

Em Davis e Avci (2015) foram estudadas as vibrações verticais em escadas e desenvolveram métodos analíticos para sua verificação com base em estudos numéricos. Também foram discutidos e definidos parâmetros para vibração lateral em escadas. Um guia para modelagem e verificação de vibração em escadas foi feito como conclusão dessa pesquisa. Também como conclusão foi exemplificada uma análise manual de vibração em uma escada.

Em Jurgensen (2016) foi analisado numericamente duas escadas localizadas no Instituto Virginia Tech nos Estados Unidos. Ensaios de campo foram realizados para calibragem do modelo numérico. O estudo mostrou que o peso da escada, a rigidez da escada e a inclusão de elementos não estruturais devem ser precisamente definidos para avaliação de seu comportamento dinâmico.

Em Andersson (2017) foram definidos parâmetros para análises dinâmicas em escadas pelo método dos elementos finitos. Foram analisados os efeitos causados na análise em função de mudanças dos tipos de vinculação nas escadas. Também foram estudadas maneiras para simular cargas de impulso e de pessoas subindo ou descendo escadas. Para esse trabalho duas escadas foram analisadas, uma em caracol e outra simples de um lance.

2.3 Dimensionamento de escadas

2.3.1 Carregamentos

Para dimensionamento da escada devem ser consideradas as ações permanentes e variáveis que atuam na estrutura. Os valores dessas ações utilizados para dimensionamento da escada são os presentes na ABNT NBR 6120:1980.

a) Ações permanentes

As ações permanentes presentes no modelo de escada estudada são o peso próprio dos elementos estruturais, o revestimento dos degraus e a carga de parede que está acima da viga da escada.

b) Ações variáveis

A ABNT NBR 6120:1980 recomenda que para o dimensionamento de escadas deve ser considerado uma carga acidental distribuída de 3 KN/m² se a escada for de acesso público ou 2,5 KN/m² se for sem acesso público. A norma também recomenda que para escadas de degraus isolados, uma carga acidental de 2,5 KN deve ser aplicada no ponto mais desfavorável do degrau. E, essa carga é considerada apenas para dimensionamento dos degraus. Para dimensionamento das vigas que compõem a escada, devem ser considerada a carga distribuída citada anteriormente.

2.3.2 Combinações de ações

A ABNT NBR 8681:2003 apresenta as equações para combinação de ações, e também os respectivos coeficientes para cálculo dos esforços nas estruturas de acordo com a exigência da combinação. A combinação normal última é calculada pela equação 01, as equações 02, 03 e 04 calculam respectivamente as combinações quase permanente, frequente e rara de serviço.

$$F_d = \sum_{i=1}^m \gamma_{gi} F_{Gi,k} + \gamma_q [F_{Q1,k} + \sum_{j=2}^n \Psi_{0j} F_{Qj,k}] \quad (01)$$

$$F_d = \sum_{i=1}^m F_{Gi,k} + \sum_{j=1}^n (\Psi_{2j} F_{Qj,k}) \quad (02)$$

$$F_d = \sum_{i=1}^m F_{Gi,k} + \Psi_{1i} F_{Qi,k} + \sum_{j=1}^n (\Psi_{2j} F_{Qj,k}) \quad (03)$$

$$F_d = \sum_{i=1}^m F_{Gi,k} + F_{Qi,k} + \sum_{j=1}^n (\Psi_{1j} F_{Qj,k}) \quad (04)$$

Para o caso da escada, há somente uma ação variável a ser considerada, fazendo com que somente uma combinação seja necessária para dimensionamento dos elementos estruturais.

2.3.3 Verificação dos estados limites

Foram citadas somente as equações utilizadas neste trabalho nas seções a seguir.

a) Degrau metálico

De acordo com a norma ABNT NBR 14762:2010, para o cálculo do momento fletor resistente da seção são necessárias três verificações; momento de cálculo que causa escoamento na seção mais solicitada; momento de cálculo referente à instabilidade lateral com torção, momento de cálculo referente à instabilidade distorcional da seção transversal.

Para o degrau da escada, o momento de cálculo referente à instabilidade lateral com torção e o momento de cálculo referente à instabilidade distorcional da seção transversal não necessita verificação por conta da disposição da seção transversal (fletida em torno do eixo de menor inércia). Desse modo é necessária somente a verificação do escoamento na seção mais solicitada.

Com a equação 05 é possível calcular o escoamento da seção mais solicitada, onde W_{ef} é o módulo de resistência elástico da seção efetiva calculado com base nas larguras efetivas dos elementos, com f_y calculada para o estado-limite último de escoamento da seção e $\gamma=1,1$.

$$M_{rd} = \frac{W_{ef} f_y}{\gamma} \quad (05)$$

Para a verificação do cisalhamento, especificamente para essa estrutura, foi utilizada a equação 06, onde E é o módulo de elasticidade do aço, t é a espessura da alma, h é a altura da parte plana da alma, $\gamma=1,1$ e K_v é o coeficiente de flambagem ($K_v=5$ para alma sem enrijecedores transversais).

$$V_{rd} = \frac{0,6 f_y h t}{\gamma} \text{ para } h/t \leq 1,08 \sqrt{\frac{E K_v}{f_y}} \quad (06)$$

O efeito combinado do momento fletor com a força cortante é calculado pela equação 07, onde M_{sd} é o momento fletor solicitante de cálculo, M_{rd} é o momento fletor resistente de cálculo pelo escoamento da seção efetiva, V_{sd} é a força cortante solicitante de cálculo e V_{rd} é força cortante resistente de cálculo.

$$(M_{sd}/M_{rd})^2 + (V_{sd}/V_{rd})^2 \leq 1,0 \quad (07)$$

A ABNT NBR 8800:2008 traz o limite de $L/350$ para máximo deslocamento em vigas de piso. Uma nota da norma diz que para balanços, pode ser admitido para balanços $L = 2L$ para cálculo do deslocamento limite.

b) Viga de suporte em concreto armado

De acordo com a norma ABNT NBR 6118: 2014, para dimensionamento ao momento fletor de seções submetidas à flexão pura com armadura simples, a posição da linha neutra (x) pode ser calculada pela equação 08, onde d é a altura útil da seção, b_w é a largura da seção, f_{cd} é a resistência de cálculo do concreto e M_d é o valor do momento de cálculo.

$$x = 1,25d \left(1 - \sqrt{1 - \frac{M_d}{0,425 \cdot b_w \cdot d \cdot f_{cd}}} \right) < 0,45d \text{ para } f_{ck} < 50 \text{ MPa} \quad (08)$$

A tensão no concreto é calculada pela equação 09.

$$R_{cd} = 0,8 \cdot x \cdot b_w \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \quad (09)$$

A tensão resistida pelo aço pode ser calculada pela equação 10.

$$R_{sd} = R_{cd} \quad (10)$$

A área de aço necessária é calculada pela equação 11. Onde σ_{sd} é a tensão normal de cálculo no aço.

$$A_s = \frac{R_{sd}}{\sigma_{sd}} \quad (11)$$

Para o dimensionamento ao momento fletor de seções submetidas a flexão composta normal, com armadura simples, com a equação 12 é possível calcular a excentricidade na seção, onde M_d é o momento fletor solicitante de cálculo e N_d é a força normal solicitante de cálculo.

$$e = \frac{M_d}{N_d} \quad (12)$$

A seção é classificada como de grande excentricidade, quando a equação 13 é verdadeira, onde h é a altura da seção de concreto em metros.

$$e > \frac{h}{2} \quad (13)$$

Para cálculo do valor de x na seção, é usada a equação 08, com a diferença que o valor de M_d é substituído pelo M_{sd} , calculado pela equação 14, onde d' é a altura da seção menos sua altura útil. Por convenção, o sinal da força normal é mantido quando esta é de compressão.

$$M_{sd} = M_d + N_d \left(\frac{h}{2} - d' \right) \quad (14)$$

A tensão no aço é calculada pela equação 15. A área de armadura é dada pela equação 11.

$$R_{sd} = R_{cd} - N_d \quad (15)$$

As armaduras calculadas devem ser maior que a armadura necessária para o momento mínimo (equação 16) e que a área de armadura mínima (equação 17). Onde A_c é área de concreto da seção e W_0 é o módulo de resistência da seção bruta relativo ao ponto mais tracionado.

$$M_{d,min} = 0,8 \cdot W_0 \cdot f_{ctk,sup} \quad (16)$$

$$A_{s,min} = 0,15\% A_c \quad (17)$$

Sendo:

$$f_{ctk,sup} = 1,30 f_{ck}^{\frac{2}{3}} \text{ com } f_{ck} \text{ em MPa} \quad (18)$$

Para o dimensionamento da seção com relação as tensões cisalhantes, deve ser calculada a força cortante resistida pelas bielas, que pelo modelo de cálculo 1, presente na ABNT NBR 6118:2014, é obtida conforme a equação 19. Onde f_{cd} é a resistência de cálculo do concreto, d é a altura útil da seção transversal e b_w é a largura da seção transversal.

$$V_{Rd2} = 0,27 \alpha_{v2} \cdot b_w \cdot d \cdot f_{cd} \quad (19)$$

Sendo:

$$\alpha_{v2} = 1 - f_{ck}/250 \text{ com } f_{ck} \text{ em MPa} \quad (20)$$

A força cortante resistida pelas armaduras transversais pode ser calculada pela equação 21, onde V_{sw} é a força resistida pela armadura, V_{sd} é a força solicitante de cálculo e f_{ctd} é a força do concreto a tração de cálculo definida pela equação 23 com f_{ck} em MPa.

$$V_{Rd3} = V_{sw} + V_c < V_{sd} \quad (21)$$

Sendo:

$$V_c = 0,6 \cdot b_w \cdot d \cdot f_{ctd} \quad (22)$$

Sendo:

$$f_{ctd} = \frac{0,21f_{ck}^{\frac{2}{3}}}{1,4} \quad (23)$$

Para o modelo de cálculo 1, a taxa de armadura é obtida pela equação 24, onde f_{ywd} é o valor de cálculo da resistência ao escoamento do aço.

$$V_{Sw} = \frac{A_{Sw}}{s} (0,9df_{ywd}) \quad (24)$$

A armadura mínima necessária para uma seção de concreto armado é definida pela equação 25. Onde f_{ywk} é a resistência ao escoamento característica do aço.

$$\left(\frac{A_{Sw}}{s}\right)_{min} = \left(0,2 \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}}\right) bw \quad (25)$$

Sendo:

$$f_{ctm} = 0,3f_{ck}^{\frac{2}{3}} \text{ com } f_{ck} \text{ em MPa} \quad (26)$$

Para a verificação do momento torsor, é necessário o cálculo da seção vazada equivalente, a qual tem altura equivalente definida pela equação 27, onde A é a área da seção cheia, u é o perímetro da seção cheia e c_1 é a distância entre o eixo da barra longitudinal do canto e a face lateral do elemento estrutural.

$$2c_1 \leq h_e \leq \frac{A}{u} \quad (27)$$

Caso $A/u > 2c_1$, adota-se $h_e = A/u \leq bw - 2c_1$ e a para cálculo da área equivalente leva-se em consideração os eixos das armaduras de canto.

A tensão nas bielas de compressão é calculada pela equação 28, onde θ é o ângulo de inclinação das diagonais de concreto arbitrado no intervalo $30^\circ < \theta < 45^\circ$, f_{cd} é a resistência de cálculo do concreto e α_{v2} é definido pela equação 20.

$$T_{Rd2} = 0,50 \alpha_{v2} f_{cd} A_e h_e \text{sen} 2\theta \quad (28)$$

O cálculo da armadura dos estribos a ser somada com a armadura devido a força cortante, é obtido pela equação 29, onde f_{ywd} é o valor de cálculo da resistência ao escoamento do aço.

$$T_{Rd3} = (A_{90}/s) 2A_e f_{ywd} \text{cot} g\theta \quad (29)$$

A armadura longitudinal para resistir a torção é calculada para todas as faces da seção, seu cálculo deve ser somada com a armadura devido ao flexão composta normal nas faces superior e inferior. A taxa de armadura é definida pela equação 30.

$$T_{Rd4} = (A_{sl}/u_e) 2A_e f_{ywd} \text{tg} \theta \quad (30)$$

Para força cortante e momento torsor combinados, é necessário a verificação das bielas de compressão definida pela equação 31.

$$\frac{V_{sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{sd}}{T_{Rd2}} < 1 \quad (31)$$

A viga não sofre fissuração se $M_r > M_d$, onde M_d é o momento fletor da combinação de serviço rara (equação 04) e M_r é momento de fissuração definido pela equação 32, onde $\alpha = 1,5$ para seções retangulares, f_{ct} é definido pela equação 26, I_0 é a inércia bruta da seção e γ_t é a distância da fibra mais tracionada do centro de gravidade da seção.

$$M_r = \frac{\alpha f_{ct} I_0}{\gamma_t} \quad (32)$$

Se $M_r < M_d$, é necessário usar a inércia equivalente para o cálculo da flecha. Antes deve ser calculado a posição de x no estágio 2 (equação 33) e a inércia da seção no estágio 2 (equação 34). Onde A_s é a área de aço calculada para resistir ao

momento considerado, α_e é definida pela equação 35, E_s é o modulo de elasticidade do aço e E_{cs} é definido pela equação 36.

$$\frac{bw \cdot x_2^2}{2} + \alpha_e \cdot A_s \cdot x_2 - \alpha_e \cdot A_s \cdot d = 0 \quad (33)$$

$$I_2 = \frac{bw \cdot x_2^3}{3} + \alpha_e \cdot A_s (d - x_2)^2 \quad (34)$$

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}} \quad (35)$$

$$E_{cs} = \left(0,8 + \frac{0,20 f_{ck}}{80}\right) \cdot 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} \text{ com } f_{ck} \text{ em MPa} \quad (36)$$

A inércia equivalente para o encontrar a flecha é calculada pela equação 37, onde M_a é o momento para a combinação quase permanente.

$$I_{eq} = I_0 \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^3 + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^3\right] I_2 < I_0 \quad (37)$$

A flecha total da viga é obtida pela equação 38, onde a_i é a flecha imediata, obtida do modelo computacional, a_f é a flecha diferida calculada pela equação 39, onde α_f é obtido pela equação 40, onde $\varepsilon(t)$ é o coeficiente referente ao tempo em meses que se deseja calcular a flecha deferida e $\varepsilon(t_0)$ é o coeficiente referente ao tempo em meses até que seja aplicada a carga de longa duração.

$$a_t = a_i + a_f \quad (38)$$

$$a_f = a_i \alpha_f \quad (39)$$

$$\alpha_f = \varepsilon(t) - \varepsilon(t_0) \quad (40)$$

O limite de deslocamento para elementos estruturais ligados a paredes de alvenaria é de $l/500$ ou 10 mm.

Com $M_r < M_d$ é preciso verificar a abertura de fissuras. Com a equação 41 é possível calcular a abertura de fissuras W_1 , onde ϕ_i é o diâmetro da armadura da seção analisada em mm, n_i é igual a 2,25 para barras nervuradas, E_s é o modulo de elasticidade do aço f_{ctm} é calculado pela equação 26 e σ_{si} é calculado pela equação

42, onde M_d é o momento fletor para combinação frequente de serviço, α_e é calculado pela equação 35, d é altura útil da seção, x_2 é calculado pela equação 33, I_2 é calculado pela equação 34 e f_{ywd} é a resistência de cálculo do aço.

$$W_1 = \frac{\phi_i}{12,5n_i} \cdot \frac{\sigma_{si}}{E_s} \cdot \frac{3\sigma_{si}}{f_{ctm}} \quad (41)$$

$$\sigma_{si} = \frac{\alpha_e \cdot M_d \cdot (d - x_2)}{I_2} < f_{ywd} \quad (42)$$

Para escada estudada foi considerada a classe de agressividade 1 levando em conta que é uma estrutura interna a uma edificação residencial normal não localizada próxima a locais com substâncias agressivas. A abertura de fissura limite para essa classe é de 0,4 mm.

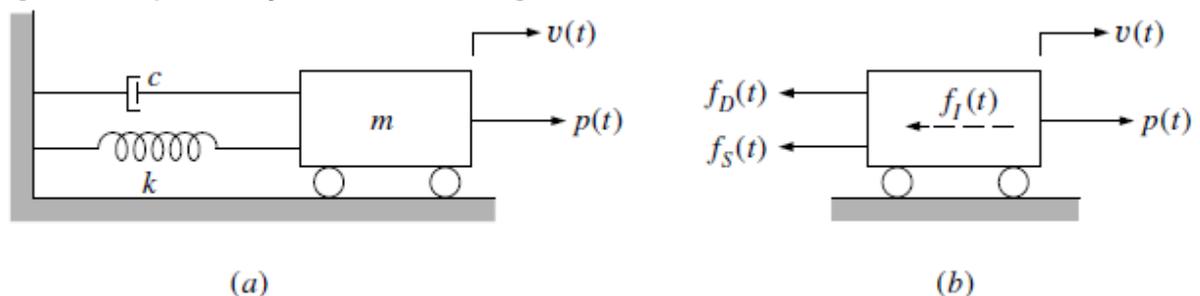
2.4 Fundamentos da análise dinâmica das estruturas

2.4.1 Sistemas com 1 grau de liberdade

Em sistemas muito simples que não requeiram uma análise dinâmica acurada, os modelos com 1 grau de liberdade (gdl) podem ser usados para a avaliação de seu comportamento dinâmico.

Os sistemas com um único grau de liberdade podem ser idealizados como sistemas compostos por uma massa, uma mola e um amortecedor, como ilustrado na Figura 4, onde a constante k representa a rigidez do sistema, c representa a constante de amortecimento, $u(t)$ representa o deslocamento em função do tempo e $p(t)$ a força aplicada em função do tempo (CLOUGH E PENZIEN, 2003).

Figura 4 - Representação sistema de um grau de liberdade.



Fonte: CLOUGH E PENZIEN (2003).

Do equilíbrio dinâmico das forças mostradas na Figura 4 (b), pode-se escrever a equação 43:

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \quad (43)$$

O primeiro termo da equação 43 representa as forças inerciais, que, de acordo com o princípio de D'Alembert, é o produto da massa e da aceleração e tem sentido oposto ao do movimento:

$$f_I(t) = m\ddot{u}(t) \quad (44)$$

O segundo termo da equação 43 representa as forças de amortecimento do sistema para o caso de amortecimento viscoso, que pode ser calculada pelo produto entre a constante de amortecimento, e a velocidade do sistema:

$$f_D(t) = c\dot{u}(t) \quad (45)$$

O terceiro termo da equação 43 representa as forças elásticas do sistema, podendo ser representado pelo produto entre a rigidez, e o deslocamento:

$$f_S(t) = ku(t) \quad (46)$$

Assim sendo, a equação 47 descreve a equação geral do movimento para sistemas amortecidos com um único grau de liberdade:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (47)$$

a) Resposta a solicitação harmônica

Segundo Soriano (2014), forças harmônicas são expressas em termos de seno ou de cosseno. Algumas ações externas podem ser idealizadas como harmônicas. Uma força periódica arbitrária pode ser decomposta em série de funções harmônicas,

e força aperiódica pode ser decomposta em distribuição contínua de componentes harmônicos. A equação do movimento para função cosseno para sistemas sem amortecimento é definida pela equação 48.

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = p\cos(\omega t) \quad (48)$$

A solução geral da equação 48 é:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) \quad (49)$$

$$u(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t) + B \cos(\omega t) \quad (50)$$

Sendo:

$$B = \frac{p}{k} \left(\frac{1}{1-\alpha^2} \right) \quad (51)$$

$$C_1 = u_0 - \frac{p}{k} \left(\frac{1}{1-\alpha^2} \right) \quad (52)$$

$$C_2 = \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \quad (53)$$

$$\alpha = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (54)$$

Para sistemas amortecidos com função cosseno é definida pela equação 55.

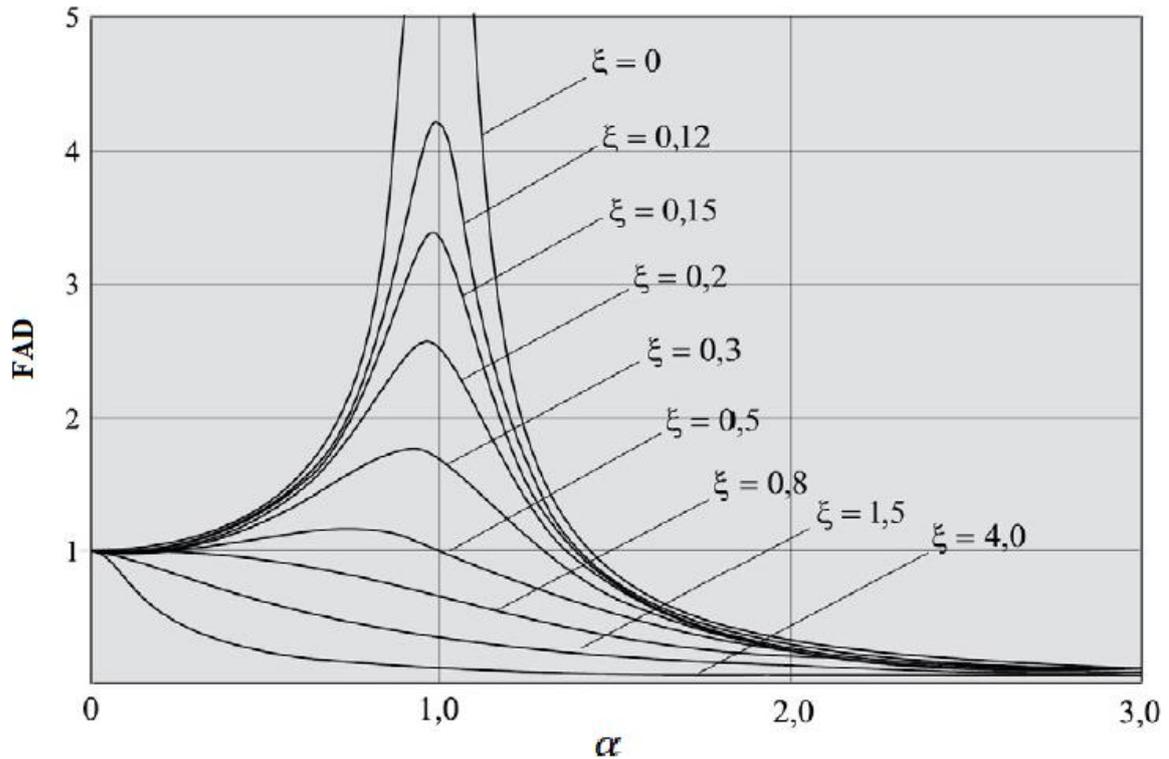
$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p\cos(\omega t) \quad (55)$$

Pelo estudo da solução particular (equação 56) obtêm-se a Figura 5, que relaciona o fator de amplificação dinâmica (FAD) (equação 57) com o fator α (equação 54). Onde ε é o amortecimento adimensional.

$$u_p(t) = p\cos(\omega t - \theta) \quad (56)$$

$$FAD = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + (2\varepsilon\alpha)^2}} \quad (57)$$

Figura 5 - Fator de amplificação dinâmica pela relação de frequências.



Fonte: Adaptado de SORIANO (2014).

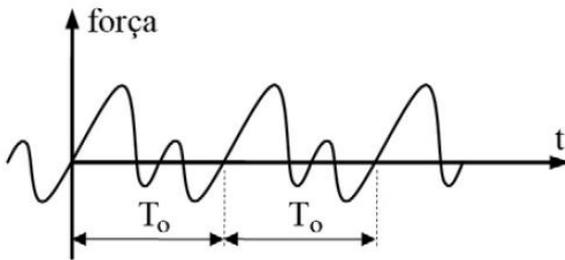
b) Resposta a solicitação periódica

É considerada periódica uma função real de uma variável independente, contínua ou com um número finito de descontinuidades em qualquer intervalo fechado dessa variável. No caso da análise dinâmica a variável independente é o tempo. A função é dita periódica quando atende a (SORIANO, 2014):

$$f(t + qT_0) = f(t) \quad (58)$$

Onde ($q=0,1, 2, \dots$) sendo T_0 uma constante chamada de período fundamental. Dessa maneira, a solicitação periódica é definida por um padrão que se repete indefinidamente no tempo. A Figura 6 ilustra uma função periódica (SORIANO, 2014).

Figura 6 - Função periódica.



Fonte: SORIANO (2014).

Uma função periódica, pode ser aproximada em uma série de funções harmônicas, denominada série de Fourier. A equação 59 mostra o carregamento em série de Fourier (SORIANO, 2014):

$$p(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega_0 t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \text{sen}(j\omega_0 t) \quad (59)$$

Sendo:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) dt \quad (60)$$

Os Coeficientes de Fourier são definidos pelas equações 61 e 62:

$$a_j = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \cos(j\omega_0 t) dt \quad (61)$$

$$b_j = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \text{sen}(j\omega_0 t) dt \quad (62)$$

O período fundamental se relaciona com a frequência do harmônico fundamental dessa força pela equação 63:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (63)$$

Segundo Gandulfo (1990), P. G. Dirichlet (1805-1859) provou que se p é de variação limitada, a série de Fourier de p converge a p nos pontos onde ela é contínua, e converge à média dos limites laterais de p nos pontos de descontinuidade.

2.4.2 Sistemas com múltiplos graus de liberdade

O comportamento de uma estrutura contendo múltiplos graus de liberdade é regido pela equação 64:

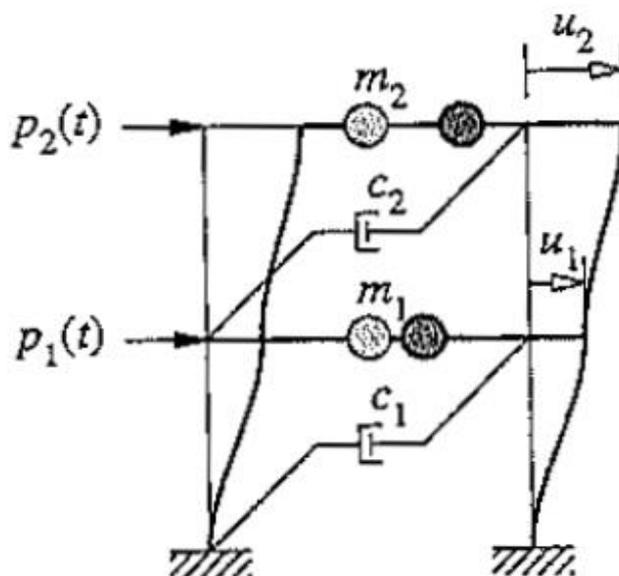
$$[m]\{\ddot{u}(t)\} + [c]\{\dot{u}(t)\} + [k]\{u(t)\} = \{p(t)\} \quad (64)$$

Na equação 64, a matriz $[m]$ é a matriz de massa, a matriz $[c]$ é a matriz de amortecimento e a matriz $[k]$ é a matriz de rigidez da estrutura. Em cada uma destas matrizes, os elementos m_{ij} , c_{ij} e k_{ij} representam respectivamente as forças que ocorrem no grau de liberdade i quando é aplicado uma aceleração, uma velocidade ou um deslocamento unitário em um grau de liberdade j (CHOPRA, 1995).

Os vetores $\{\ddot{u}(t)\}$, $\{\dot{u}(t)\}$ e $\{u(t)\}$ são, respectivamente, as acelerações, velocidades e deslocamentos relativos a cada um dos n graus de liberdade da estrutura. O vetor $\{p(t)\}$ contém as forças externas aplicadas em cada grau dos n graus de liberdade da estrutura (CHOPRA, 1995).

A Figura 7 mostra um exemplo de uma estrutura de um pórtico com 2 graus de liberdade.

Figura 7 - Pórtico de dois pavimentos representado por dois GDL's.



Fonte: CHOPRA (1995).

2.4.3 Resposta a vibração livre

A vibração livre não amortecida ocorre quando a força externa é nula, há uma perturbação inicial e o sistema não tem amortecimento (SORIANO, 2014). Dessa maneira a equação geral do movimento (64) simplifica-se para a forma homogênea:

$$[m]\{\ddot{u}(t)\} + [k]\{u(t)\} = \{0\} \quad (65)$$

As soluções para a equação 65 são os deslocamentos em cada grau de liberdade, que é representada pela equação 66:

$$\{u\} = \{\hat{u}\} \cos(\omega t - \theta) \quad (66)$$

Com derivada segunda igual a equação 67:

$$\{\ddot{u}\} = -\{\hat{u}\} \omega^2 \cos(\omega t - \theta) \quad (67)$$

Substituindo a equação 67 e 66 na equação 65 e reagrupando os termos, obtém-se a equação 68:

$$[K - \omega^2 M]\{\hat{u}\} = 0 \quad (68)$$

Para que as soluções não sejam triviais, o determinante da matriz característica deve ser igual a zero, assim:

$$\det[K - \omega^2 M] = 0 \quad (69)$$

As soluções para a equação 69 de grau n na variável ω^2 , são chamadas de autovalores do sistema. Extraindo-se a raiz quadrada de cada autovalor obtém-se as respectivas frequências naturais do sistema. Substituindo cada uma das frequências nas equações algébricas homogêneas (equação 68) resultam em sistemas possíveis indeterminados, nos quais as soluções são infinitas. Por convenção assume que uma das coordenadas é unitária e a outra é solucionada proporcional a coordenada

unitária. As coordenadas obtidas são conhecidas por autovetores do sistema. Os autovetores definem as formas modais de cada modo de vibração e dependem do número de graus de liberdade do sistema. O sistema possui sempre a quantidade de modos de vibrar igual a quantidade de graus de liberdade. Calculado os modos de vibrar da estrutura, pode-se agrupa-los em matrizes $n \times n$ como na equação a seguir (REYOLANDO E SILVA, 2015).

$$\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \quad (70)$$

Em que cada coluna da matriz é um autovetor do sistema. A matriz com todos os autovetores do sistema chama-se matriz modal.

Os deslocamentos são obtidos pela equação 71, onde o vetor u são os deslocamentos reais e o vetor q são os deslocamentos no domínio modal.

$$\{q\} = [\Phi]^{-1}\{u\} \quad (71)$$

2.4.4 Solução numérica da equação de movimento

Os métodos de integração numérica são utilizados para obtenção da resposta dinâmica das estruturas. Os métodos podem ser explícitos ou implícitos. Nos métodos implícitos, a condição de equilíbrio em cada instante fornece a solução referente ao mesmo instante e, portanto, a resolução requer um ou mais valores referentes a esse instante. O método de Newmark de aceleração média constante e o método de Wilson θ são exemplos de métodos implícitos (SORIANO, 2014).

Newmark apresentou uma família de métodos de integração numérica das equações de movimento de modelos estruturais, com as equações 72 e 73. Para o método com aceleração média constante, $\gamma = 0,5$ e $\beta = 0,25$.

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + [(1 - \gamma)\ddot{u}_{i-1} + \gamma\ddot{u}_i]\Delta t^2 \quad (72)$$

$$u_i = u_{i-1} + \dot{u}_{i-1}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{u}_{i-1} + \beta\ddot{u}_i\right]\Delta t^2 \quad (73)$$

Para garantir a estabilidade do método, o passo de tempo (Δt) deve ser menor que 0,55 vezes o menor período natural da estrutura.

O método de Newmark pode ser representado por um roteiro de equações para cada passo de tempo onde fica simples encontrar as respostas a vibração forçada em estruturas.

2.5 Método dos elementos finitos

O MEF é um método para obter uma solução numérica para um determinado problema (COOK *et al.*, 2001). Segundo La Rovere (2002), o MEF consiste em dividir o domínio de integração do problema em um número discreto de regiões pequenas de dimensões finitas denominadas elementos finitos. Este conjunto de regiões tem o nome de malha de elementos finitos.

O método dos elementos finitos pode ser aplicado em uma grande variedade de problemas relativos a diversos fenômenos físicos. O uso método para solução de problemas práticos de engenharia se desenvolveu e se tornou viável graças ao avanço da computação (BATHE, 2014). Em geral ele é aplicado quando não é possível obter uma solução analítica do problema (LA ROVERE, 2002).

No campo da engenharia de estruturas, o objetivo do método dos elementos finitos é determinar o estado de tensão e de deformação de um elemento estrutural sujeito à ações externas. Inicialmente é determinado os deslocamentos, depois as reações e por fim as tensões e deformações. (AZEVEDO, 2003).

A Formulação do MEF se baseia na substituição de uma integral sobre um domínio complexo (de volume V) por um somatório de integrais sob domínios de geometria simples (de volume V_i). A Equação 74 exemplifica mostrando a integral de um volume de função f (AZEVEDO, 2003):

$$\int_v f dV = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} f dV \quad (74)$$

2.6 Ação do caminhar humano em escadas

Determinar com relativa precisão a ação do caminhar humano em escadas é de fundamental importância para compreender como o sistema estrutural responde frente a esta solicitação. Neste sentido muitos pesquisadores desenvolveram trabalhos com o objetivo de mensurar a ação humano do caminhar. Com base nos resultados obtidos nos seus experimentos alguns autores ajustaram séries de Fourier para simular a ação do caminhar nos modelos de numéricos.

A seguir apresenta-se os trabalhos mais relevantes desenvolvidos nesta linha de pesquisa.

Mello (2005) apresenta quatro diferentes modelos de carregamento para modelagem do caminhar humano.

O modelo de carregamento 1 considera como força dinâmica uma componente harmônica que se iguala a frequência natural da estrutura, com o objetivo de produzir o fenômeno da ressonância. A força dinâmica é aplicada no ponto de maior amplitude modal da estrutura.

No modelo de carregamento 2, são considerados os quatro harmônicos representativos do caminhar humano mais a parcela estática devido ao peso da pessoa. A carga é aplicada no ponto da estrutura com maior amplitude modal, assim não é considerada a variação espacial da carga ao longo do tempo.

O modelo 3, considera a mesma carga dinâmica presente no modelo 2, porém neste ela não é fixa. Uma descrição espacial e temporal é adotada permitindo uma representação mais realista do carregamento gerado em uma caminhada.

O modelo 4 é baseado em estudos que registraram a reação do piso durante um caminhada em plataformas rígidas. O carregamento é representado por uma série de Fourier de 3 termos acompanhada de uma equação que considera o pico transiente representativo do impacto do calcanhar sobre o piso.

Bishop *et al.* (1995) usaram uma célula de carga para medir a força do caminhar humano em função do tempo em uma escada. Foram ajustadas Series de Fourier para equacionar o caminhar. A Tabela 1 mostra os resultados obtidos. Os resultados mostraram que os valores para o caminhar humano em escadas são maiores que os valores fornecidos pelas normas, que apenas abordam o caso de pessoas caminhando em superfícies planas.

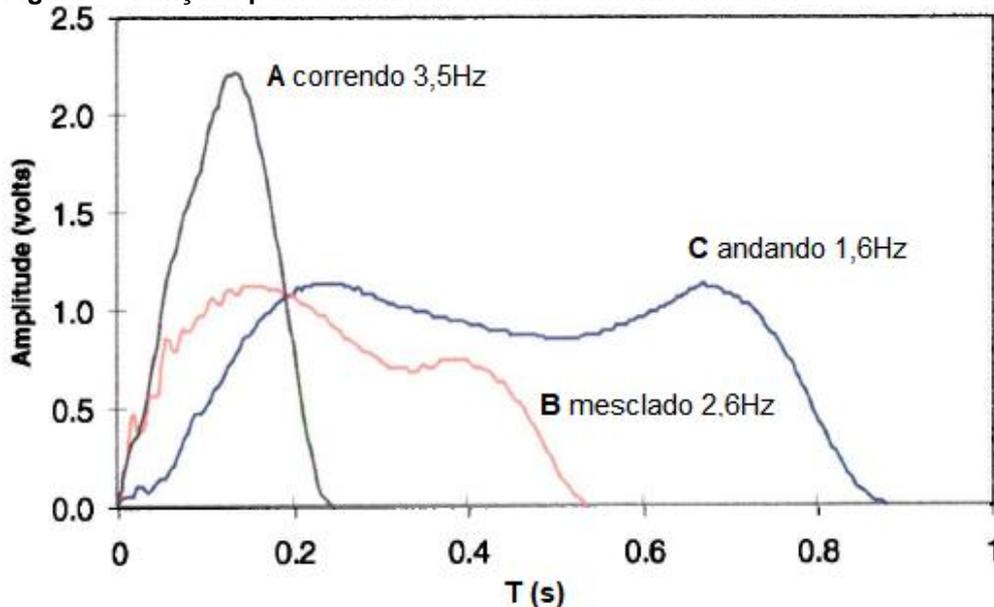
Tabela 1 - Valores dos componentes da série de Fourier.

	Frequência (Hz)	Dinâmica/ Estático	Amplitude da força harmônica como fração do peso estático					
			1º	2º	3º	4º	5º	6º
Subindo								
Devagar	1,27	1,50	0,75	0,14	0,18	0,11	0,05	0,05
Devagar-Médio	1,68	1,57	0,64	0,33	0,15	0,01	0,08	0,01
Médio	1,87	1,80	0,91	0,29	0,16	0,14	0,02	0,03
Médio-Rápido	2,86	1,92	0,75	0,44	0,23	0,12	0,08	0,12
Rápido	3,34	2,86	1,51	0,13	0,20	0,12	0,10	0,09
Descendo								
Devagar	0,95	1,16	0,56	0,15	0,10	0,05	0,12	0,07
Devagar-Médio	1,43	1,60	0,58	0,23	0,18	0,03	0,03	0,08
Médio	1,94	2,26	1,03	0,40	0,07	0,07	0,05	0,04
Médio-Rápido	2,18	1,50	0,64	0,16	0,06	0,04	0,10	0,01
Rápido	3,82	2,37	1,00	0,31	0,23	0,11	0,11	0,05

Fonte: Adaptado de BISHOP *et al.* (1995).

Kerr (1998) utilizou uma placa instrumentada com células de carga nos degraus de uma escada metálica para medir as frequências do caminhar humano de 25 pessoas e obter valores característicos das frequências e dos coeficientes da série de *Fourier*. As Figuras 8 e 9 e as Tabelas 2 e 3 apresentam os resultados obtidos.

Figura 8 - Funções para o caminhar humano subindo escadas.



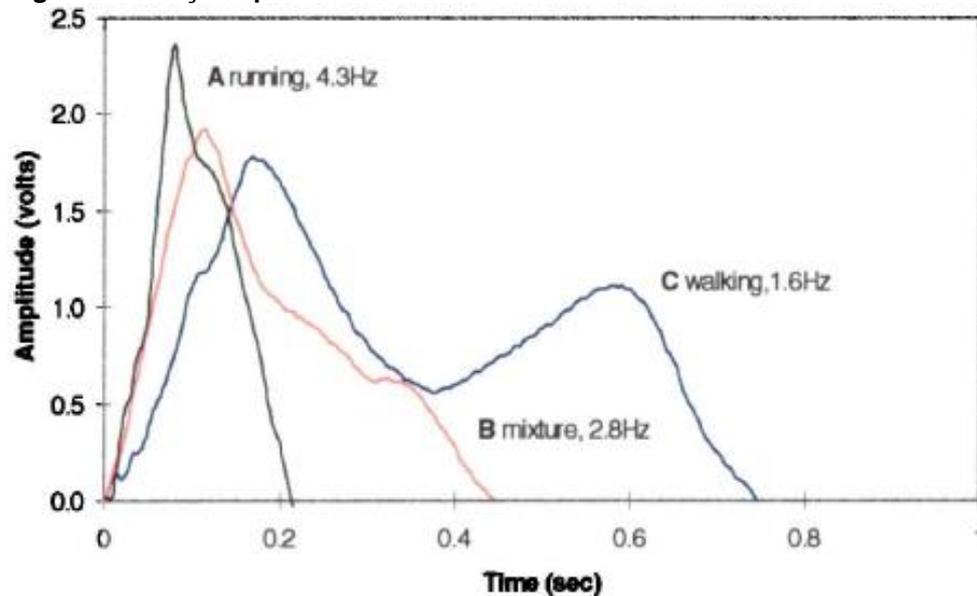
Fonte: Adaptado de KERR (1998).

Tabela 2 - Harmônicos para humanos subindo escadas.

Teste	Frequência (Hz)	1º Harm.	2º Harm.	3º Harm.	4º Harm.
A (Correndo)	3,5	1,12	0,11	0,05	0,03
B (Misto)	2,6	0,29	0,12	0,05	0,01
C (Caminhando)	1,6	0,25	0,07	0,03	0,02

Fonte: Adaptado de KERR (1998).

Figura 9 - Funções para o caminhar humano descendo escadas.



Fonte: Adaptado de KERR (1998).

Tabela 3 - Harmônicos para humanos descendo escadas.

Teste	Frequência (Hz)	1º Harm.	2º Harm.	3º Harm.	4º Harm.
A (Correndo)	4,3	1,00	0,18	0,10	0,11
B (Misto)	2,8	0,55	0,21	0,07	0,02
C (Caminhando)	1,6	0,36	0,26	0,10	0,03

Fonte: Adaptado de KERR (1998).

O estudo conduzido por Davis e Murray (2009) usou como base os estudos anteriores de Bishop *et al.* (1995) e Kerr (1998). Foi conduzida uma análise pelo método dos elementos finitos no software SAP 2000 para definir parâmetros para um roteiro de verificação do ELS de vibrações em escadas. Segundo esses autores, os

efeitos causados por pessoas descendo escadas são sempre maiores do que subindo escadas.

O roteiro proposto por Davis e Murray (2009) recomenda que após o modelo de elementos finitos ser precisamente montado, uma análise dinâmica deve ser realizada com uma carga senoidal aplicado no centro da escada com amplitude adotada seguindo a tabela 4 para achar o pico da magnitude da aceleração. Ainda segundo esses autores, um coeficiente de amortecimento adimensional de 1% é um bom valor para a maioria das escadas. Para determinação da frequência do caminhar utilizada, deve ser analisado quais frequências se encaixam na frequência natural da escada tomando como parâmetro 4 Hz de frequência máxima de um passo (podendo chegar a 4,5 Hz descendo escadas), por exemplo, uma escada com frequência natural de 6,5 Hz, duas frequências se encaixam, 2,17 Hz (3º harmônico) e 3,25 Hz (2º harmônico), essas duas frequências representam respectivamente o caminhar normal e o caminhar rápido na escada. Depois deve-se multiplicar a aceleração de pico pelo peso médio de uma pessoa (746 N) e pela força dinâmica média da Tabela 4. Depois esse valor deve ser reduzido com um fator de 0,35 para obter o valor de aceleração na escada devido à somente uma pessoa.

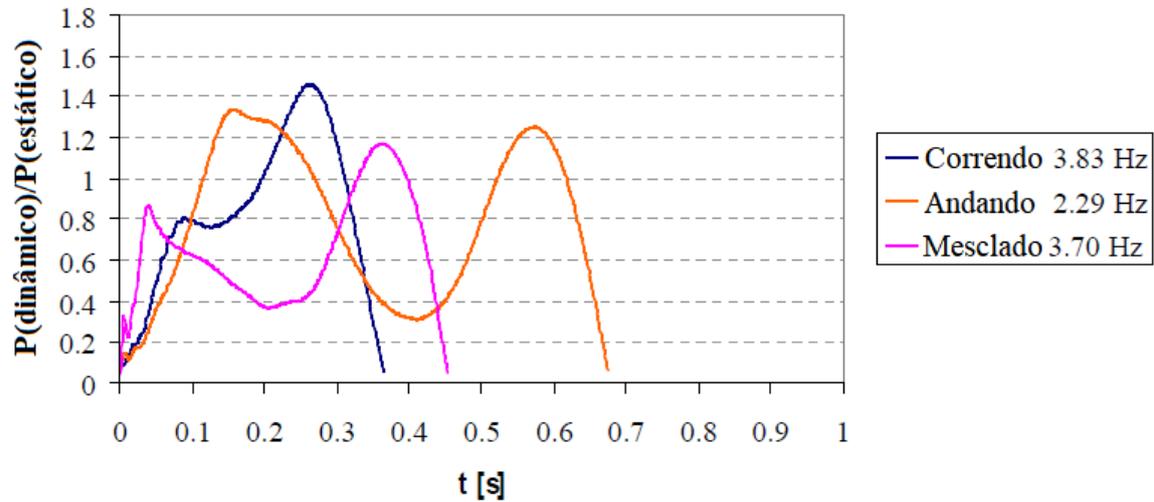
Tabela 4 - Força dinâmica e amplitude da força de projeto.

Descrição	Força Dinâmica (FD)	+2 Desvio padrão FD	FD de projeto (+0,7 de desvio padrão)	Amplitude da força de projeto (N)
Subindo, 2º h.	0,13	0,22	0,16	120
Subindo, 3º h.	0,06	0,11	0,08	60
Subindo, 4º h.	0,03	0,07	0,04	30
Descendo, 2º h.	0,20	0,33	0,25	190
Descendo, 3º h.	0,09	0,16	0,11	80
Descendo, 4º h.	0,06	0,13	0,08	60

Fonte: Adaptado de DAVIS E MURRAY (2009).

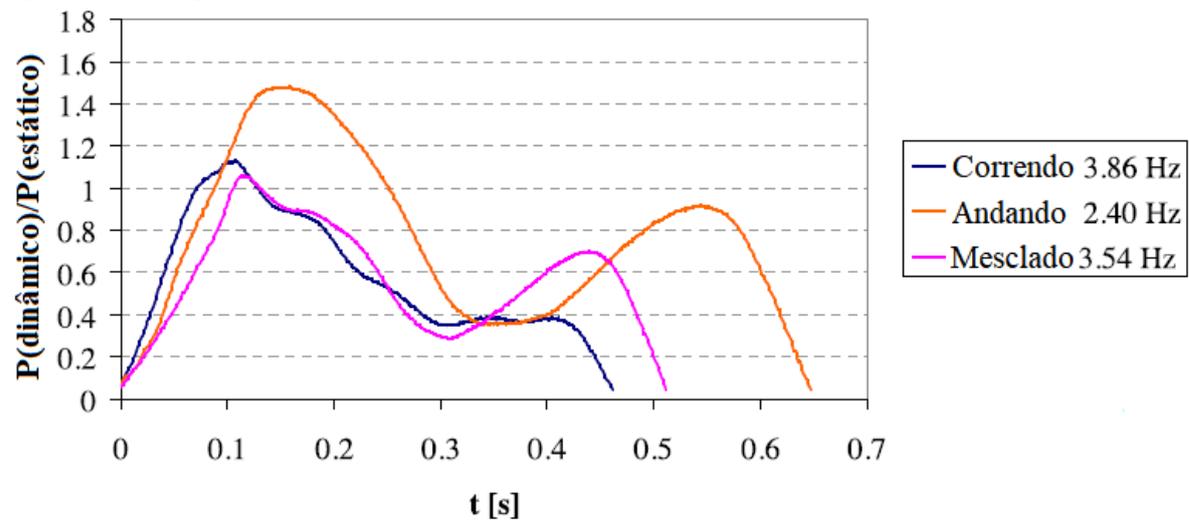
Meinhardt *et al.* (2014) a partir de ensaios com diversas pessoas subindo e descendo escadas tendo os degraus instrumentados com células de carga, obteve os gráficos mostrados nas figuras 10 e 11 para representar o caminhar humano em escadas.

Figura 10 - Funções do caminhar humano subindo escadas.



Fonte: Adaptado de Meinhardt *et al.* (2014).

Figura 11 - Funções do caminhar humano descendo escadas.



Fonte: Adaptado de Meinhardt *et al.* (2014).

Andersson (2018) utilizou a série de Fourier abaixo (equação 75) para definir a função do caminhar humano em escada. Onde $a_{n,v}$ é o coeficiente que corresponde ao harmônico n na direção vertical, Q é a carga estática de uma pessoa, f é a frequência do carregamento, $\phi_{n,v}$ é o ângulo de fase do harmônico n na direção vertical, n é o número do harmônico e kf é número de harmônicos que caracteriza a força.

$$F_v(t) = Q \left[1 + \sum_{n=1}^{kf} a_{n,v} \text{sen}(2\pi f t + \phi_{n,v}) \right] \quad (75)$$

2.7 Limites aceitáveis de vibração em escadas

2.7.1 Frequência natural mínima

A ABNT NBR 6118:2014 traz uma tabela com as frequências naturais verticais críticas para pisos. A situação abordada na tabela mais próxima com a da escada é com a frequência crítica de 4 Hz, que é para escritórios. A norma recomenda que a equação 76 seja atendida. Onde f é a frequência natural da estrutura e f_{cri} é a frequência crítica.

$$f > 1,2f_{cri} \quad (76)$$

A ABNT NBR 8800:2008 exige que a frequência mínima para 4 Hz para pisos em que as pessoas caminham regularmente.

Davis e Murray (2009) sugerem uma frequência natural mínima de 5 Hz para evitar o risco de a escada sofrer ressonância com o primeiro harmônico do caminhar humano.

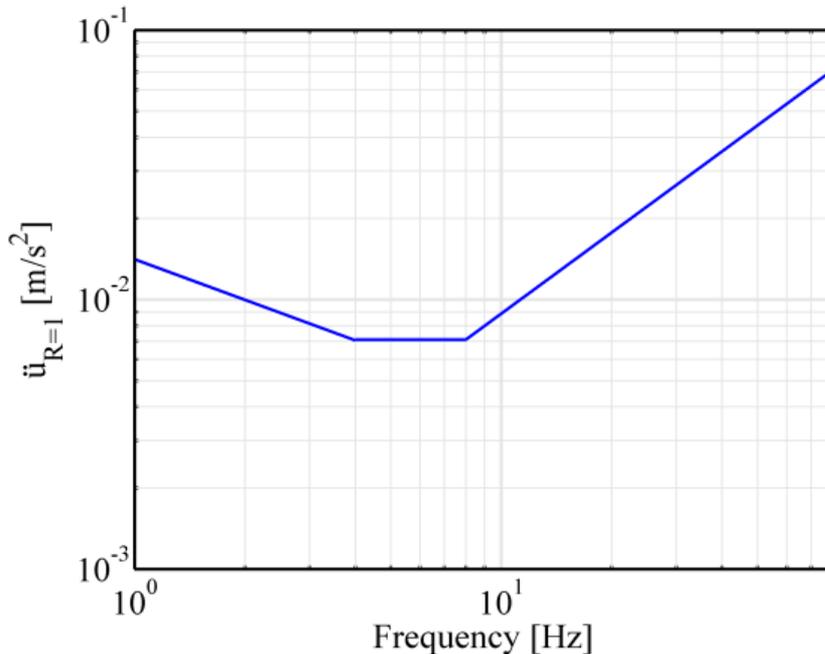
Davis e Avci (2015) traz os mesmos limites de vibração apresentados em Davis e Murray (2009) e adicionando um limite mínimo de 2,5 Hz de frequência natural lateral da escada.

Murray et al. (2016) recomenda o seguinte critério de avaliação: frequência natural vertical maior que 5 Hz, frequência natural lateral maior que 2,5 Hz. Este critério já atende a todos os critérios para frequência mínima citados anteriormente.

2.7.2 Aceleração máxima

Bishop *et al.* (1995) sugere novos valores para o fator de multiplicação R que define o limite aceitável de vibração a partir do limite de percepção da vibração estabelecido pela norma BS 6472 (1992) conforme Figura 12.

Figura 12 - Limites de percepção da Aceleração RMS vertical.



Fonte: BS 6472 (1992).

Os fatores definidos por Bishop et al (1995) (tabela 5) são específicos para escadas e não eram contemplados pela norma BS 6472 (1992).

Tabela 5 - Fator de multiplicação R.

Categoria	Fator R
Uso Leve (Escritórios)	32
Uso Pesado (Edifícios públicos, estádios)	24

Fonte: Adaptado de BISHOP *et al.* (1995).

Davis e Murray (2009) tomando como base trabalhos anteriores, recomendam uma aceleração máxima de 1,7%g ($g=9,80665 \text{ m/s}^2$) para escadas excitadas por apenas uma pessoa se movimentado em velocidade normal, 1,7%g ou 4,6%g, dependendo da aceitação do usuário, para o caso de uma pessoa se movimentando rapidamente na escada e 4,6%g ou mais, dependendo da aceitação do usuário, para grupos de pessoas se movimentando rapidamente na escada.

Davis e Avci (2015) desenvolveram algumas formulas para verificar a aceleração em escadas esbeltas. Duas frequências de caminhar devem ser usadas, uma menor que 2,5 Hz e outra maior, que representam respectivamente o caminhar normal e o caminhar rápido na escada. Assim com o trabalho de Davis e Murray (2009), as frequências adotadas devem ser compatíveis com os valores da frequência natural da escada. Por meio da Equação 77 é possível calcular a frequência natural

de escadas com vigas simplesmente apoiadas com massa uniforme, onde g é a aceleração da gravidade, EI é a rigidez à flexão da escada (considerando todos os componentes da escada que alterem de maneira significativa a rigidez), w é a massa por metro da escada e L é o comprimento da escada:

$$fn = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{gEI}{wL^4}} \quad (77)$$

Com a Equação 78 pode-se calcular a aceleração na escada, onde R é o fator de calibração que é 0,5 se para o 2º harmônico e 0,7 para os outros. Os valores de α são os valores de força dinâmica de acordo com a tabela 4, β é amortecimento viscoso da escada e θ é o ângulo de inclinação da escada. O peso do caminhante (Q) sugerido 743 N.

$$a_p = R \frac{\alpha Q \cos^2 \theta}{2\beta M} \varphi_r \varphi_e (1 - e^{-100\beta}) \quad (78)$$

Com a equação 79 pode-se calcular a massa modal fundamental da viga:

$$M = \frac{wL}{2g} \quad (79)$$

As Equações 80 e 81 representam os modos unitários normalizados para resposta a excitação. x_r é a distância do fim da viga até a localização do ponto de resposta, medida na diagonal, x_e é a distância do fim da viga até o ponto da força excitação, medida na diagonal.

$$\varphi_r = \text{sen} \frac{\pi x_r}{L} \quad (80)$$

$$\varphi_e = \text{sen} \frac{\pi x_e}{L} \quad (81)$$

Murray (2016), baseado nos trabalhos de Bishop *et al.* (1995), Davis e Murray (2009) e Davis e Avci (2015) desenvolveu a equação 82 para estimar a aceleração em escadas metálicas. Segundo o guia, somente o caso de pessoas descendo

escadas deve ser considerado, pois o efeitos são sempre maiores do que quando subindo. O fator de calibração R é obtido da mesma maneira que em Davis e Avci (2015), o peso do caminhante (Q) é de 760 N, θ é o ângulo de inclinação da escada e γ é o parâmetro da carga móvel, com valor de 0,19 para descidas em velocidade normal e 0,29 para descidas correndo.

$$\frac{a_p}{g} = 0,62^{-\gamma f n} \frac{RQ \cos^2 \theta}{\beta w L} \varphi_r \varphi_e (1 - e^{-100\beta}) \quad (82)$$

Murray et al. (2016) recomenda os limites de aceleração vertical da Tabela 6.

Tabela 6 - Limites de aceleração vertical para escadas.

Frequência do Caminhar (Hz)	Limites de Aceleração (%g)	Limites de Aceleração (m/s²)	Observações
<2,5	1,7	0,169	Descendo Normal
2,5 – 4,0	3,0	0,295	Descendo Correndo Individual – Não Perceptivo
2,5 – 4,0	4,5	0,442	Descendo Correndo Individual ou Grupo – Perceptivo

Fonte: Adaptado de MURRAY et al. (2016).

3 MÉTODOS

Neste capítulo serão mostrados os métodos necessários para realizar o dimensionamento, determinação das cargas atuantes, métodos para a modelagem numérica e verificação do estado limite de vibração na estrutura.

O estudo apresentado neste trabalho apresenta duas limitações importantes que devem ser citadas: 1) nos modelos numéricos as escadas foram simuladas isoladas, isto é, sem ligação a outros elementos estruturais como vigas de apoio, lajes e etc. Tal consideração se deve ao fato da escada em estudo não pertencer a algum projeto real; 2) não foi incluído nos modelos o efeito no amortecimento referente ao revestimento dos degraus.

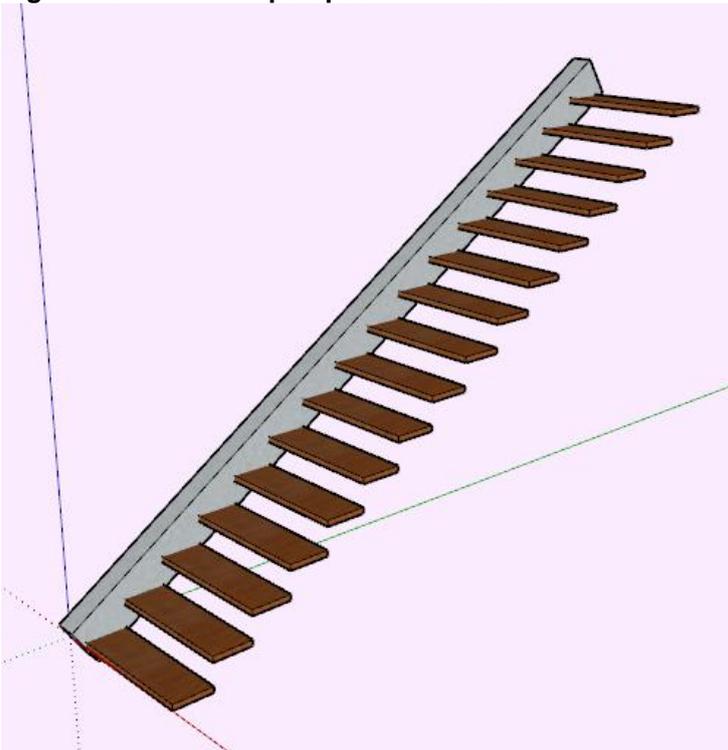
Cabe destacar ainda que nenhum valor limite de aceleração foi encontrado na bibliografia para o modelo de escada com degraus em balanço. Assim sendo, os valores limites de vibração encontrados na literatura foram usados como referência para avaliar o conforto a vibração do modelo de escada estudado neste trabalho. Contudo, cabe destacar que os trabalhos pesquisados e citados no texto não se referem a escadas com degraus em balanço e, portanto, os valores limites usados para as análises podem não ser os mais adequados para o modelo de escada em estudo.

3.1 Escada estudada

Neste trabalho foi realizada a análise estática e dinâmica de uma escada do tipo autoportante, com os degraus em balanço. A concepção da escada foi idealizada de uma situação hipotética de uma residência de dois pavimentos com distância entre pisos de 3 metros de altura.

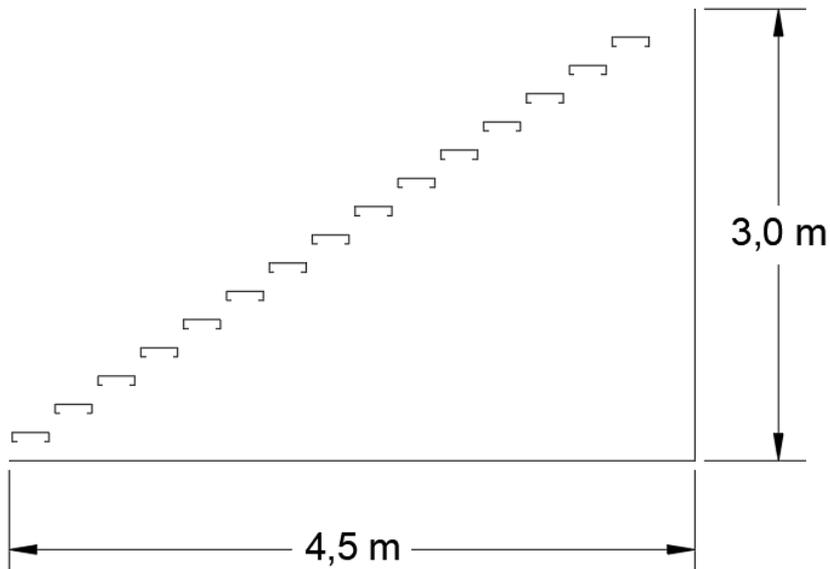
Inicialmente a escada foi modelada com os degraus metálicos constituídos por perfis formados a frio que posteriormente seriam revestidos com madeira de 2 cm de espessura. Nas Figuras 13 e 14 são mostrados respectivamente uma vista em perspectiva e o corte da escada estudada

Figura 13 – Vista em perspectiva da escada estudada.



Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 14 - Corte transversal da escada estudada.



Fonte: Autoria própria (2019).

3.1 Modelagem numérica

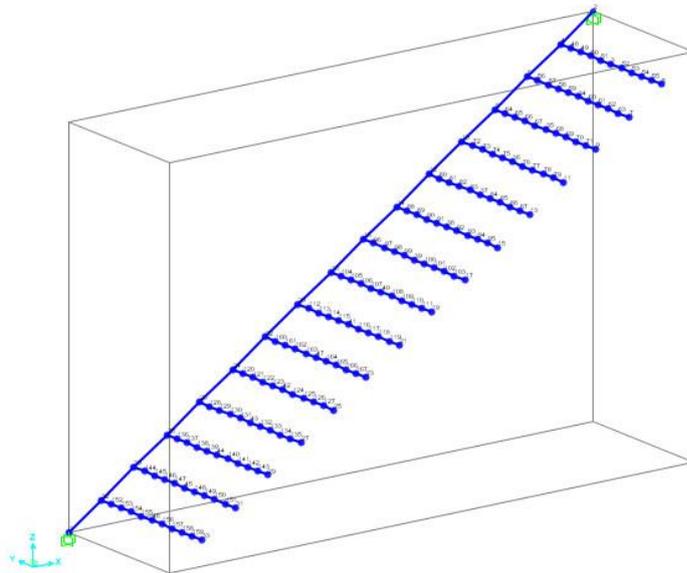
O software de elementos finitos SAP 2000 versão 21 Evaluation, da Computers and Structures, Inc. (CSI), foi utilizado para a modelagem numérica do comportamento da estrutura. A escada foi engastada nas duas extremidades da viga de suporte.

Para a modelagem dos elementos da escada foram utilizados elementos de elementos do tipo “frame/cable/tendon” com 6 graus de liberdade por nó. Os degraus ficaram com elementos com 0,11 cm de comprimento, a viga com elementos de 0,29 cm e o pilar do modelo com degraus de concreto com 0,14 cm.

Foi considerado o aço ASTM A36 para os degraus metálicos, com as propriedades utilizadas seguindo a ABNT NBR 8800:2008. Os elementos de concreto armado foram considerados com concreto C25 com barras de aço nervuradas de aço CA50-A.

Na Figura 15 é apresentado o modelo numérico implementado no SAP 2000.

Figura 15 - Modelo numérico da escada no SAP 2000.

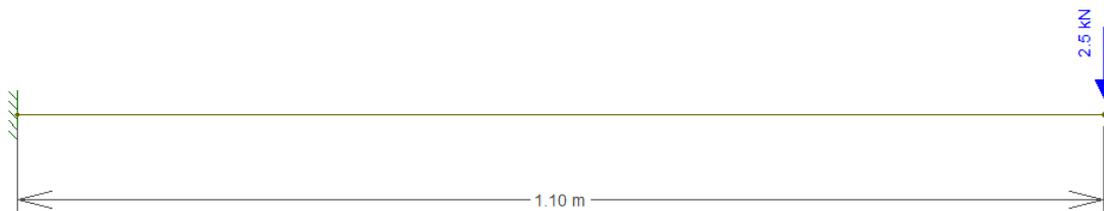


Fonte: Autoria própria (2019).

3.1.1 Análise estática e dimensionamento

Para o levantamento dos esforços no degrau, foi considerado um modelo plano de uma viga em balanço com 1,10 m, com uma força característica de 2,5 kN aplicada na extremidade (Figura 16).

Figura 16 - Esquema estático do degrau.



Fonte: Autoria própria (2019).

Os esforços na viga foram obtidos pelo modelo numérico tridimensional da estrutura. A carga de parede foi considerada como 13 kN/m³ com variação linear no comprimento da viga. A carga variável foi de 2,5 kN/m² distribuída nos degraus da escada.

a) Dimensionamento do degrau metálico

Os degraus foram constituídos de perfis de aço u enrijecido formado a frio, dimensionados de acordo com a ABNT NBR 14762:2010 e com a ABNT NBR 8800:2008. Para o dimensionamento aos ELU, foi considerado a combinação última normal (equação 01). Para o cálculo dos deslocamentos nos degraus foi utilizada a combinação quase permanente de serviço (equação 02).

Para o cálculo das propriedades geométricas, foram ignorados os arredondamentos das quinas do perfil.

O perfil escolhido foi de aço formado a frio com seção u enrijecido, com as dimensões da seção já dimensionada apresentada nos resultados. Os cálculos para dimensionamento do degrau estão presentes na seção 2.2.3.b).

b) Dimensionamento da viga

Os elementos de concreto armado serão dimensionados de acordo com a ABNT NBR 6118:2014. Os esforços atuantes foram obtidos a partir de uma análise estática realizada no modelo computacional da escada levando em conta as combinações necessárias.

Para dimensionamento do ELU da viga foi necessária a combinação normal última (equação 01). Para verificação dos ELS, foi utilizada a combinação quase permanente de serviço (equação 02) para cálculo dos deslocamentos, a combinação rara de serviço (equação 04) para verificação de formação de fissuras e a combinação frequente de serviço (equação 03) para cálculo da abertura de fissuras.

Por conta da concepção estrutural da escada, é necessário verificá-la em relação ao momento torsor. Para isso foi utilizado as recomendações da ABNT NBR 6118:2014.

Para a estrutura estudada, foi adotado $\varepsilon(t) = 2$ que é referente a flecha diferida em mais de 70 meses e $\varepsilon(t_0) = 0,54$ que é referente à meio mês.

3.1.2 Análise dinâmica

Após o dimensionamento da escada, o modelo numérico foi submetido a análise modal e a análise a vibração forçada. A primeira determinou os modos de vibrar e as frequências naturais da estrutura, já a segunda simulou o caminhar humano atuando na estrutura.

As funções do caminhar humano utilizadas foram as obtidas por Meinhardt *et al.* (2014). Segundo a bibliografia, a descida na escada é mais crítica que a subida, assim as funções que representam o caminhar descendo foram os utilizados. Foi usada a função do caminhar descendo normal, com frequência de 2,40 Hz, e a função do caminhar descendo rápido, com frequência de 3,86 Hz.

A carga foi aplicada na extremidade do degrau para simular o caso mais crítico possível. O amortecimento proporcional usado foi de 1%. A massa da pessoa foi calculado seguindo a combinação frequente de serviço como orienta a ABNT NBR 8800:2008, que ficou definido em 100 Kg.

O modelo de carregamento 3 citado por Mello (2005) foi o escolhido para as análises desse trabalho por ser mais realista para representação de uma caminhada.

O critério escolhido para verificação do estado limite de vibração excessiva foi o proposto por Murray et al. (2016), o qual leva em consideração somente a resposta estacionária. Porém, a escada não atendeu a todos esses critérios e foram necessárias modificações. Entre essas modificações, foi necessário mudar o material do degrau que passou a ser de concreto armado. Maiores detalhes são fornecidos mais à frente no texto.

3.2 Verificação do estado limite de serviço de vibração excessiva

Os critérios escolhidos para verificar o estado de limite a vibração excessiva foram os propostos por Murray et al. (2016), pois seus valores de frequências mínimas abrangem os limites propostos pelas normas brasileiras e seus critérios de aceleração máxima foram feitos com base em trabalhos anteriores do assunto.

A partir da análise dinâmica, foi verificado que a escada com degraus metálicos não atendeu aos critérios de conforto propostos. Assim, foi modelado uma escada com degraus de concreto visando atender a esses critérios. A seção 4 apresenta os resultados das análises realizadas na escada.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Análise estática e dimensionamento

4.1.1 Dimensionamento do degrau

Os valores de esforços máximas e deslocamento máximo no degrau são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 - Solicitações e valores resistentes ou limites no degrau.

Solicitação	Valores de calculo	Valores resistentes ou limites
Momento Fletor	4,12 KN.m	4,41 KN.m
Força Cortante	3,75 KN	29,85 KN
Deslocamento	2,02 mm	6,28 mm

Fonte: Autoria Própria (2019).

O perfil u enrijecido escolhido para o degrau é apresentado na Figura 17, com as dimensões em milímetros.

Figura 17 - Seção transversal do degrau.



Fonte: Autoria própria (2019).

Por questão estética, foi usada uma alma de pequena altura para a seção, assim foi necessário uma espessura relativamente grande para que a mesma resistisse aos esforços solicitantes.

4.1.2 Dimensionamento da viga de sustentação

A viga de concreto armado tem seção de 35x14 cm e foi projetada com concreto C25. Os esforços críticos estão apresentados na Tabela 8, onde a seção 1 é a

engastada na borda inferior, a 2 é o centro do vão e a 3 é a engastada na borda superior. O momento fletor positivo traciona as fibras inferiores e as forças normais negativas são de compressão.

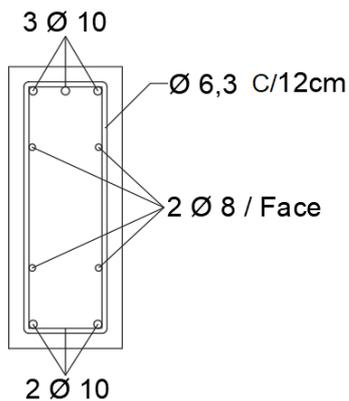
Tabela 8 - Esforços críticos na viga de sustentação.

Seção	Momento Fletor (KN.m)	Força Cortante (KN)	Força Normal (KN)	Momento Torçor (KN.m)
1	-26	32,5	-21,3	5,36
2	12	~0	~0	~0
3	-22,3	23,6	16,3	5,36

Fonte: Aatoria Própria (2019).

A Figura 18 mostra as armaduras necessárias para resistir aos esforços da Tabela 8.

Figura 18 - Armaduras da viga.



Fonte: Aatoria Própria (2019).

A seção foi limitada a uma largura de 14 cm para ficar com a mesma largura do bloco de alvenaria (bloco cerâmico deitado). A altura teve que ser de 35 cm para que as bielas de compressão resistissem aos efeitos da força cortante e torção combinados.

O momento de fissuração (M_r) foi menor que o momento para combinação de serviço rara. Assim é necessário o cálculo da inércia pela equação 62 para encontrar os deslocamentos, mas para a viga da escada a inércia equivalente é maior que a inércia bruta, assim a flecha imediata foi obtida a partir do modelo em elementos finitos com a inércia bruta da seção. A Tabela 9 apresenta os limites deslocamentos e a flecha máxima.

Tabela 9 - Valores de flecha na viga.

Flecha	Valor (mm)
Imediata	0,62
Diferida	0,90
Total	1,52
Máxima	10

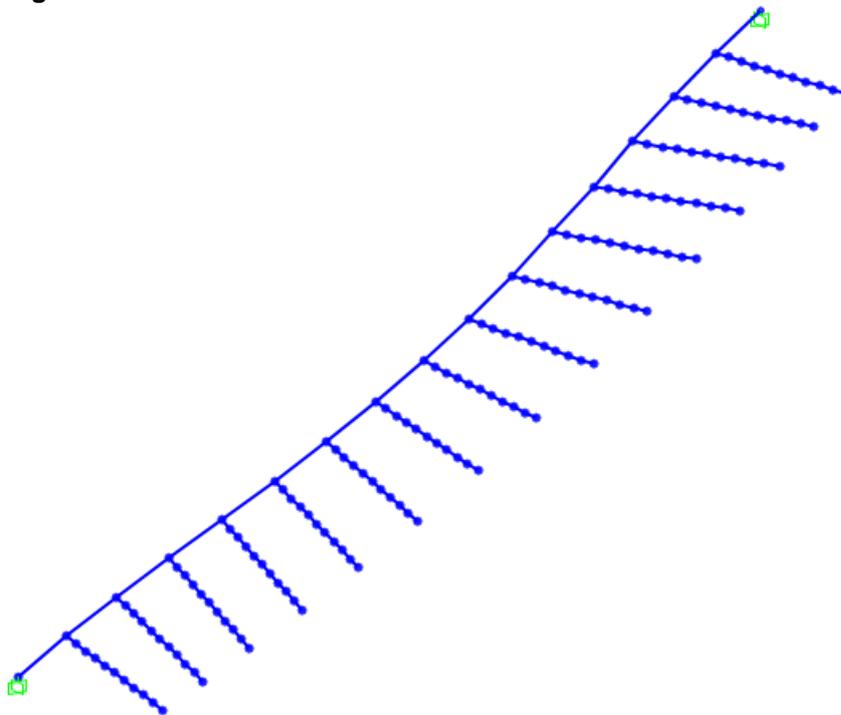
Fonte: Aatoria Própria (2019).

A abertura de fissuras calculada na viga foi de 0,2 mm, abaixo do limite para classe de agressividade 1 que é de 0,4 mm.

4.2 Análise modal

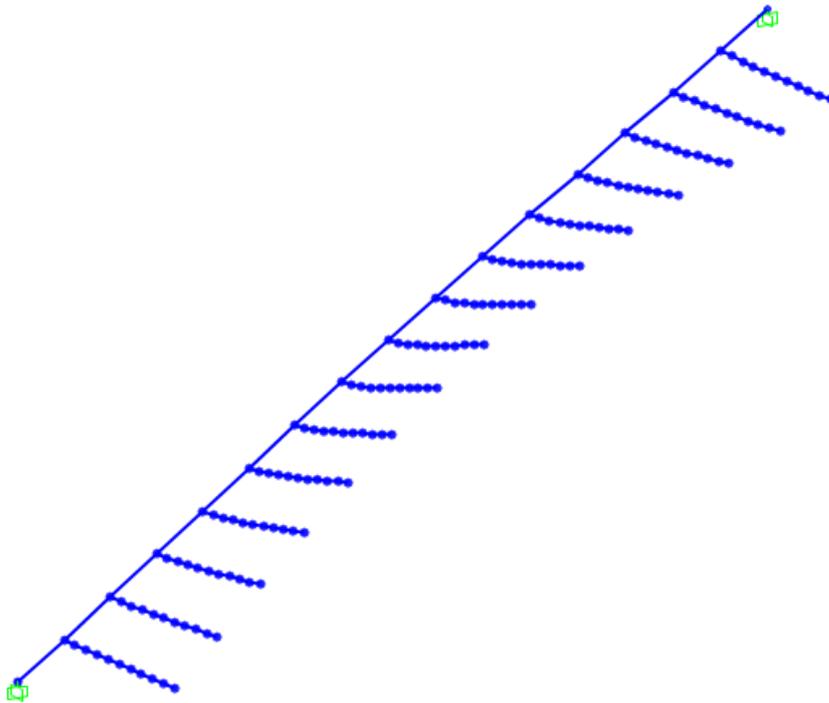
A análise modal mostrou uma frequência lateral de 16,84 Hz, que é o 1º modo de vibrar da estrutura. O segundo modo foi de 29,75 Hz e o terceiro de 41,11 Hz. As Figuras 18 e 19 mostram o 1º e o 2º modo de vibrar da estrutura.

Figura 19 - 1º Modo de vibrar.



Fonte: Aatoria Própria (2019).

Figura 20 - 2º Modo de vibrar.



Fonte: Autoria Própria (2019).

As frequências atendem aos critérios do Murray et al. (2016), que determina uma frequência mínima de 2,5 Hz para a lateral e 5 Hz para a vertical.

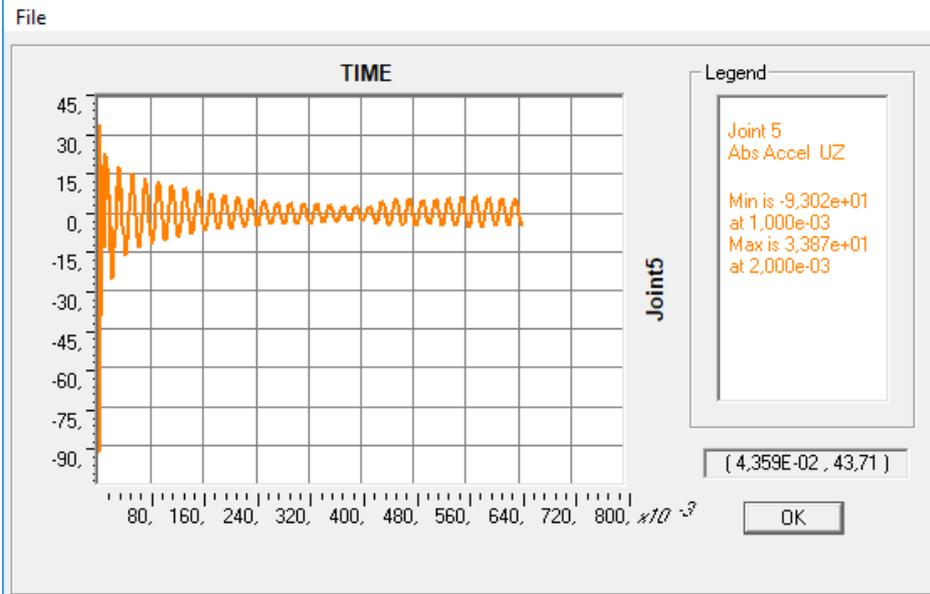
4.3 Análise a vibração forçada

Para o caminhar normal na escada, a resposta transiente da vibração foi atenuada a aproximadamente 0,1s e foi onde teve os maiores picos de aceleração da resposta estacionária. O maior pico, refere-se à resposta a vibração livre e foi verificado logo no início do caminhar na escada com o valor de 93,2 m/s². A maior aceleração devido a vibração forçada foi no instante aproximado de 0,1s e teve intensidade em cerca de 12 m/s². A Figura 21 mostra o gráfico da aceleração no tempo para esse caminhar.

Segundo a literatura, os valores limites para aceleração se referem a resposta a vibração forçada, assim o valor considerado para verificação foi de 12 m/s², não atendendo ao critério de conforto proposto por Murray et al. (2016), que tem o valor máximo proposto de 1,7%g (0,167 m/s² considerando g=9,90665 m/s²).

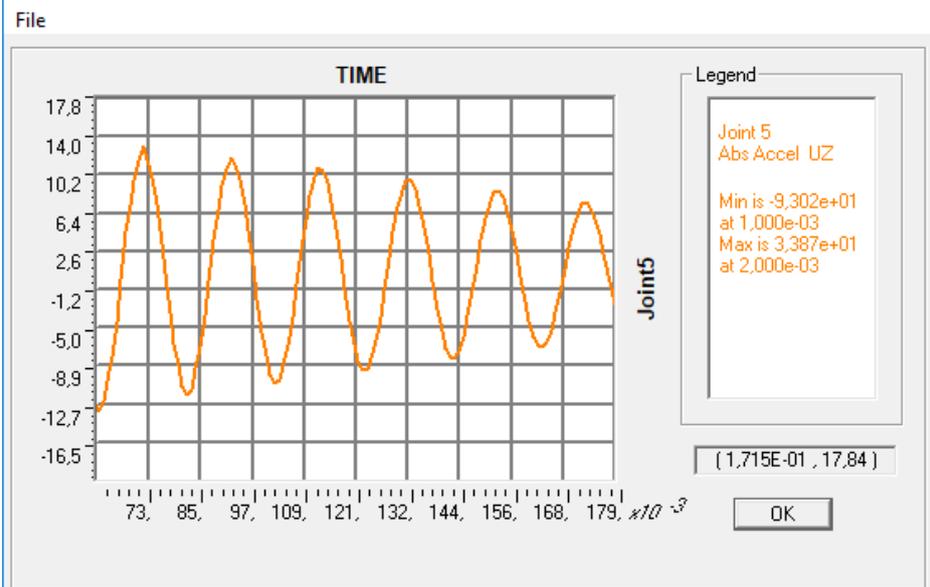
Figura 21 - Histórico de acelerações no degrau 1 devido ao caminhar normal.

Display Plot Function Traces (Caminhar humano normal)



(a)

Display Plot Function Traces (Caminhar humano normal)



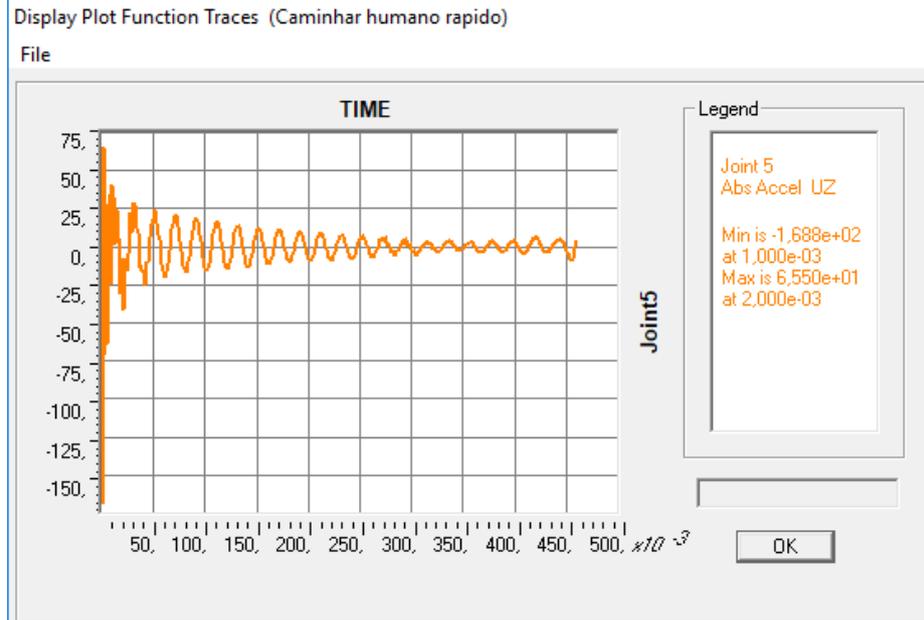
(b)

Fonte: Autoria Própria (2019).

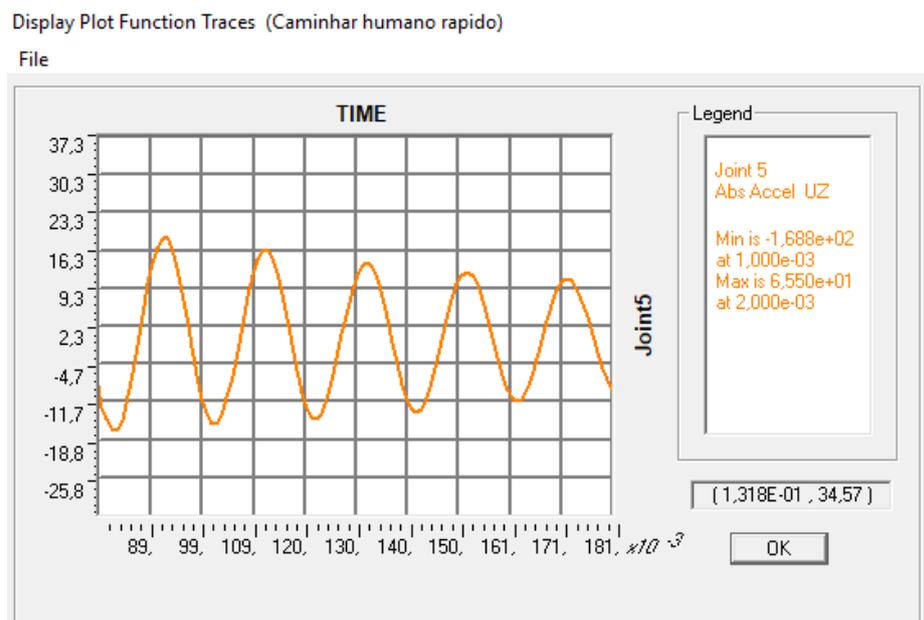
A resposta para o caminhar rápido foi bem semelhante a resposta para o caminhar normal. A resposta transiente da vibração foi atenuada a aproximadamente 0,1s e foi onde teve os maiores picos de aceleração. O maior pico referente a resposta transiente foi verificado com o valor de 168,75 m/s², maior que o encontrado para o caminhar normal. A maior aceleração devido a vibração forçada (resposta

estacionária) foi no instante aproximado de 0,1s com intensidade com cerca de 17 m/s². O valor de aceleração devido a vibração forçada foi maior que o proposto por Murray et al. (2016) que é de 4,5%g (0,446 m/s² considerando g=9,90665 m/s²), assim a escada não atendeu ao critério de conforto proposto. A Figura 22 mostra o gráfico para a análise do caminhar rápido.

Figura 22 - Histórico de acelerações no degrau 1 devido ao caminhar rápido.



(a)



(b)

Fonte: Autoria Própria (2019).

Observa-se que para ambos os caminhares, a aceleração devido a solução permanente tem valores altos e persistem durante todo o tempo em que a pessoa fica em contato com o degrau (ou seja, enquanto a carga é aplicada). Também é interessante notar o aumento dos valores de aceleração próximo ao final do passo, que é devido ao início do passo no degrau seguinte.

O revestimento de madeira dos degraus pode ajudar a diminuir as aceleração pois aumenta o amortecimento, principalmente se adicionada uma manta de polietileno entre a madeira e o aço, entretanto seria muito difícil mensurar o efeito do revestimento no amortecimento, assim as análises não o levaram em consideração.

Diante dos resultados, fica evidente que apesar de corretamente dimensionada seguindo as normas brasileiras, a escada não atendeu aos critérios de vibração propostos na literatura.

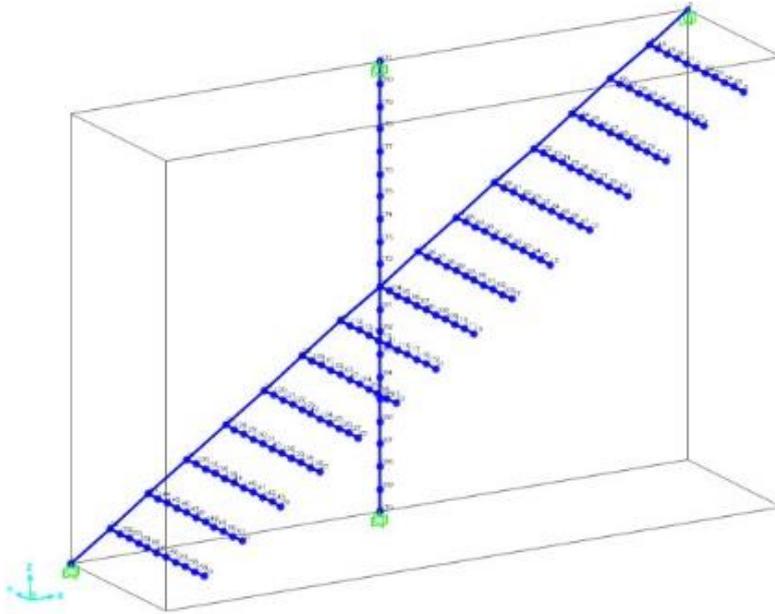
Neste sentido foram efetuadas modificações no modelo estrutural da escada a fim de que a mesma atenda ao ELS de vibração. Essas alterações são apresentadas a seguir.

4.4 Alterações no modelo numérico

Os harmônicos da frequência de excitação são bem inferiores as frequências naturais da escada, nessa situação a estrutura está no regime de rigidez. Por este motivo, para diminuir a amplitude das acelerações relativas a solução permanente foi introduzido um pilar a fim de aumentar a rigidez do sistema (Figura 23) .

Para atenuar mais rapidamente as acelerações da solução transiente, os degraus metálicos foram substituídos por degraus de concreto com o intuito de aumentar o amortecimento e atenuar mais rapidamente a resposta transiente. A seção escolhida para o degrau foi de 12x28 cm, com a largura da pisada da escada como referência e altura com base no aspecto prático.

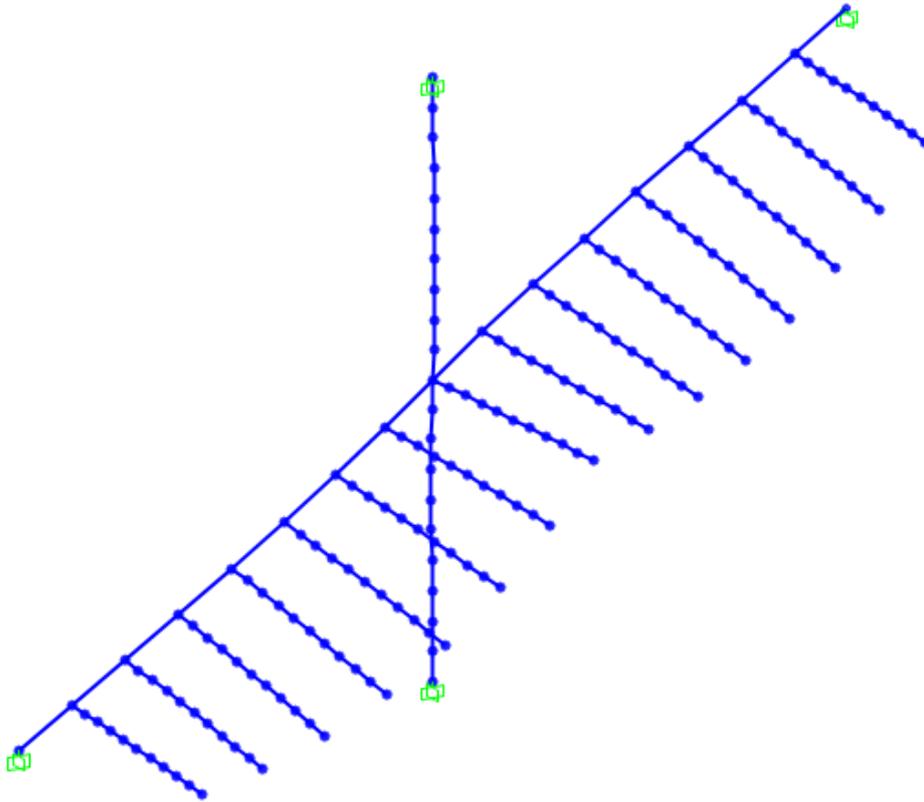
Figura 23 - Escada com degraus de concreto e um pilar no centro da viga.



Fonte: Autoria Própria (2019).

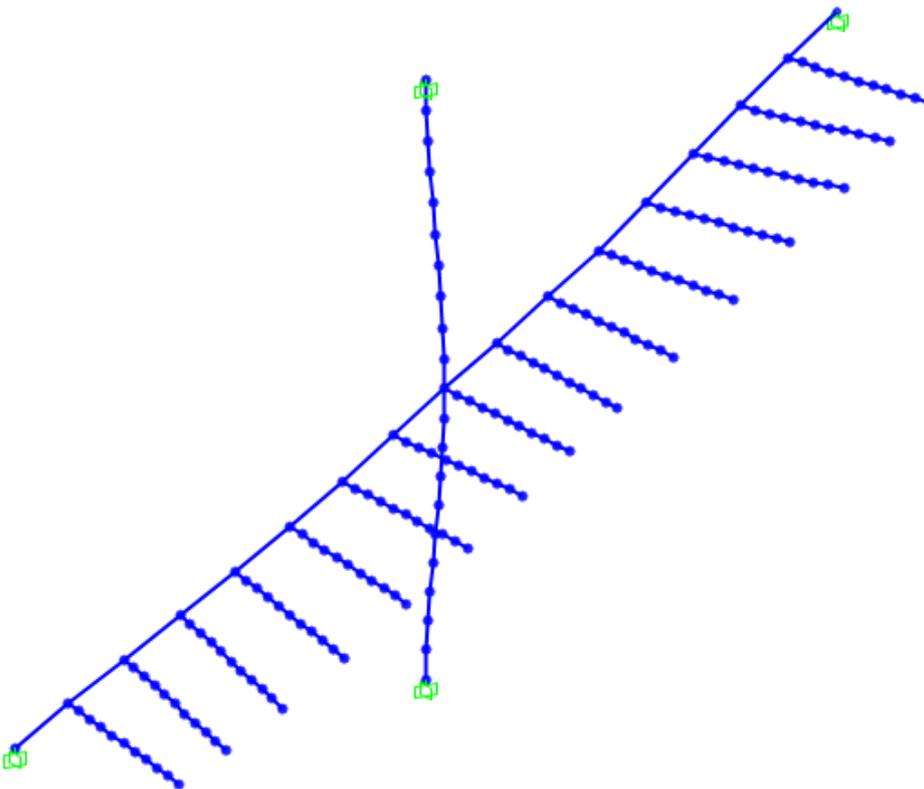
O amortecimento foi aumentado para 4% por conta da estrutura ser toda de concreto. As frequências continuaram atendendo os critérios do Murray et al. (2016), com 22,97 Hz para a vertical e 23,06 Hz para a lateral. Os modos de vibrar estão nas figuras 24 e 25.

Figura 24 - 1º Modo de vibrar da escada com degraus em concreto.



Fonte: Autoria Própria (2019).

Figura 25 - 2º Modo de vibrar da escada com degraus em concreto.

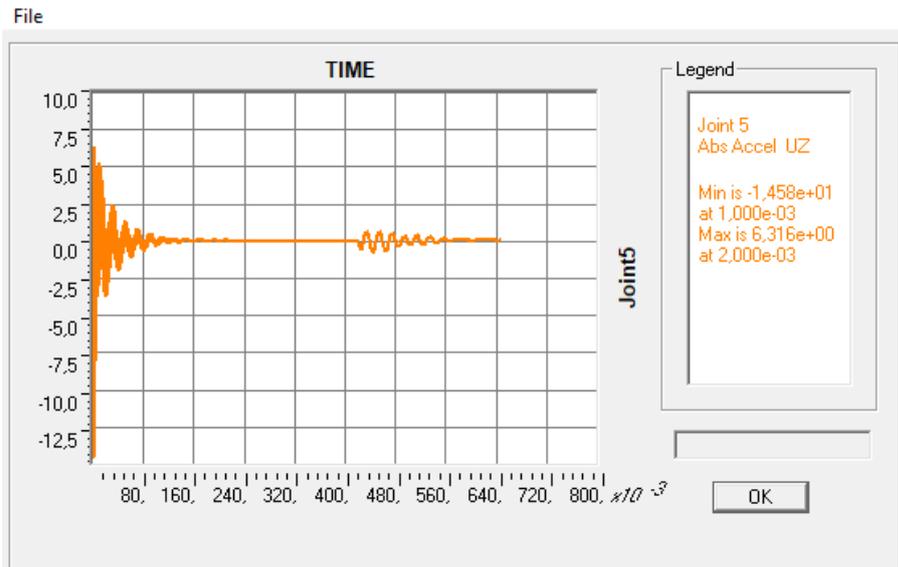


Fonte: Autoria Própria (2019).

A aceleração de pico devida a solução transiente do primeiro degrau ficou em $14,58 \text{ m/s}^2$. Já a aceleração devido a solução permanente praticamente vai a zero após 0,26 segundos, atendendo ao critério de conforto a vibração. A Figura 26 mostra o gráfico da aceleração no tempo para o caminhar normal nessa escada.

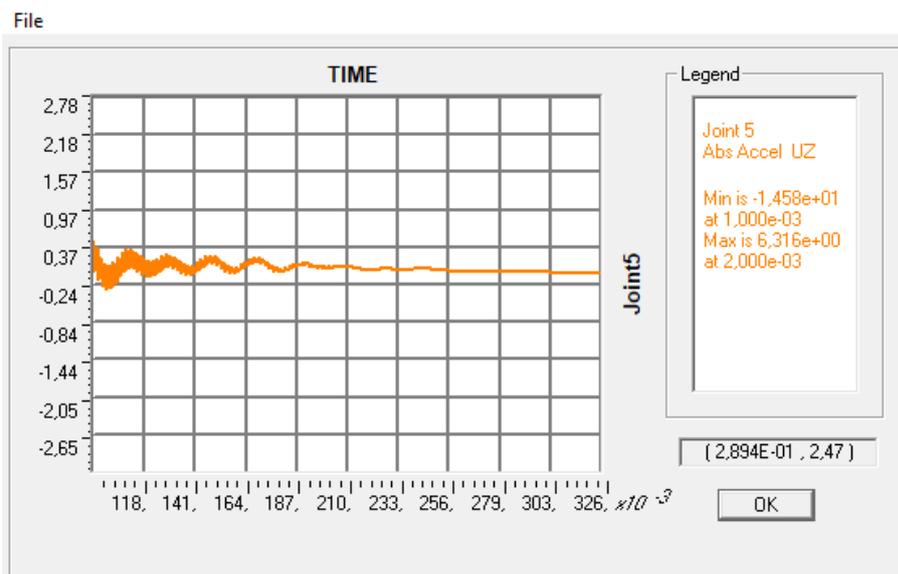
Figura 26 - Histórico de aceleração no degrau 1 devido ao caminhar normal na escada com degraus de concreto.

Display Plot Function Traces (Caminhar humano normal)



(a)

Display Plot Function Traces (Caminhar humano normal)



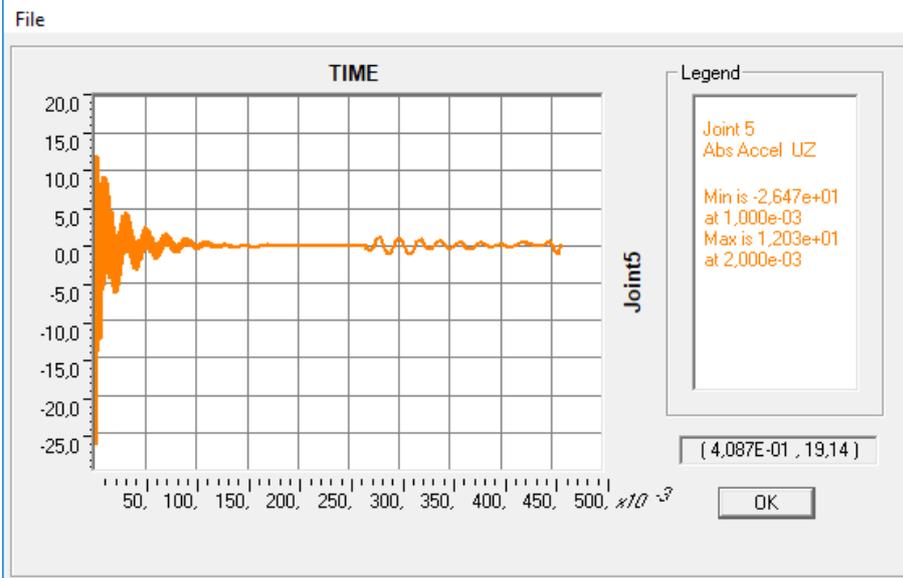
(b)

Fonte: Autoria Própria (2019).

No caso do caminhar rápido, a aceleração de pico para a solução transiente foi de $26,45 \text{ m/s}^2$. O valor de pico máximo para a aceleração da resposta permanente também foi próximo de zero, sendo inferior ao limite de $0,44 \text{ m/s}^2$ e assim atendendo aos critérios de conforto. A Figura 27 mostra os resultados da análise do caminhar rápido nessa escada.

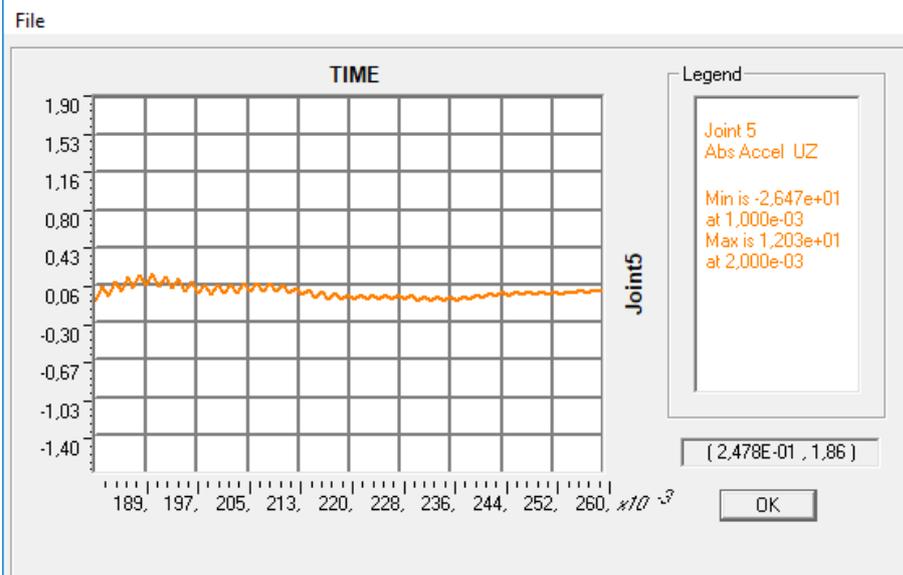
Figura 27 - Histórico de aceleração no degrau 1 devido ao caminhar rápido na escada com degraus de concreto.

Display Plot Function Traces (Caminhar humano rapido)



(a)

Display Plot Function Traces (Caminhar humano rapido)



(b)

Fonte: Autoria Própria (2019).

É interessante notar que para ambos os caminhares na escada de concreto as acelerações devido as duas soluções são atenuadas praticamente ao mesmo tempo.

5 CONCLUSÕES

O dimensionamento da escada com degraus metálicos seguindo as normas técnicas brasileiras, mostrou não ser suficiente para que a escada estudada atendesse aos critérios de conforto propostos pela bibliografia. Assim seria possível que a primeira solução estrutural adotada, ou seja, com degraus metálicos fosse executada e que possivelmente poderia apresentar problema de vibração. Contudo, há que se destacar também que, em geral, os degraus metálicos são revestidos por questão estética e que, a depender do revestimento, grande parte da vibração poder ser atenuada. Porém, este efeito não foi avaliado neste trabalho.

O enrijecimento da escada e a utilização de concreto nos degraus resultou em baixos níveis de aceleração para a resposta permanente. Reduziu a máxima aceleração transiente de pico com a maior massa dos degraus e atenuou as acelerações transientes por conta do maior amortecimento. A maior rigidez do sistema contribuiu também para reduzir a amplitude da solução permanente. No entanto, o degrau ficou mais robusto, podendo não agradar no quesito estético.

Uma sugestão para trabalhos futuros, é realizar a análise experimental com este modelo de escada, e avaliar se os critérios de conforto já existentes são aplicáveis a ela.

Outra sugestão é a análise paramétrica da variação dos níveis de vibração em função da altura dos degraus.

REFERÊNCIAS

ANDERSSON, Lisa. Dynamics of staircases: A case study to improve finite element modeling. 2017. f. 468. Tese (Mestrado em Eng. Civil) - Division of Structural Engineering and Bridges, Department of Civil and Architectural Engineering, Royal Institute of Technology (KTH), Estocolmo.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6120: 1980: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro: ABNT, 1980.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7190: 1997: Projeto de estruturas de madeira. Rio de Janeiro: ABNT, 1997.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8681: 2003: Ações e segurança nas estruturas - Procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8800: 2008: Projeto de estruturas de concreto - procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 14762: 2010: Dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio - Procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2010.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: 2014: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro: ABNT, 2014.

AZEVEDO, Álvaro F. M. Método dos elementos finitos. 1.ed. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003. 248 p.

BATHE, Klaus-Jürgen. Finite element procedures. 2.ed. Watertown: MIT, 2014. 1065 p.

BELVER, Ali Vasallo, *et al.* Modal testing and FE model updating of a lively staircase structure. *Challenges in Mechanics of Time-Dependent Materials and Processes in Conventional and Multifunctional Materials*, Bethel, v. 2, p. 547-557, 2013.

BISHOP *et al.* Human induced loading of flexible staircases. *Safety Science*, Londres, v. 18, p 261-276, 1995.

BRITISH STANDARDS INSTITUTE. BS 6472: 1992: Guide to evaluation of human exposure to vibration in buildings (1 Hz to 80 Hz). British Standards Institute, Londres.

CHOPRA, Anil K. *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering*. 3.ed. Berkeley: Pearson, 2007. 876 p.

CLOUGH, Ray W. e PENZIEN, Joseph. *Dynamics of structures*. 3.ed. Berkeley: Computers & Structures, Inc., 1995. 730 p.

COOK, Robert D. *et al.* *Concepts and applications of finite element analysis*. 4.ed. Madison: Universidade de Wisconsin-Madison, 2002. 719 p.

DAVIS, Brad e AVCI, Onur. Simplified vibration serviceability evaluation of slender monumental stairs – 2015. Disponível em: <ascelibrary.org>. Acesso em: 02 nov. 2018.

DAVIS, Brad e MURRAY, M. Thomas. Slender monumental stair vibration serviceability. *Journal Of Architectural Engineering*, Reston, dez. 2009, p. 111-121.

GANDULFO, Roberto Oscar. Séries de Fourier e convergência. *Matemática Universitária* Nº 11, jun. 1990, p. 27-52.

JURGENSEN, Amber. Vibration serviceability of monumental stairs. In: *Proceedings of The National Conference On Undergraduate Research (NCUR)*, 2016, Asheville. p. 698-708.

KEER, Stuart C. Human induced loading on staircases. 261 f.1998. Tese (Ph.D. em Eng. Mecânica) - Mechanical Engineering Department, University College London, University of London, Londres.

LA ROVERE, Henriette Lebre. Notas de aula da disciplina: Utilização do método dos elementos finitos em projetos de estruturas, especialização em projeto de estruturas. Departamento de engenharia civil, UFSC, 2002. 138 p.

LIMAONAGUA. 22 escadas flutuantes para você se inspirar. 19 out. 2015. Disponível em <<https://www.limaonagua.com.br/inspiracoes/22-escadas-flutuantes-para-voce-se-inspirar/>>. Acesso em 10 de jul. 2019.

MEINHARDT, Christian; ZABEL, Volkmar; GONZALEZ, Hernando. An in-situ case study of human induced vibrations on slender staircases. In: Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics (EURODYN), 2014, Porto. p. 1027-1033.

MELLO, Antônio Vicente de Almeida. Vibrações em pisos de edificações induzidas por atividades humanas. 2005. f. 189. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia, Centro de Tecnologia e Ciências, Universidade Estadual do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

MURRAY, Thomas M., et al. AISC STEEL DESIGN GUIDE 11. Estados Unidos da América: AISC, 2016.

REYOLANDO, M. L. R. F. Brasil e SILVA, Marcelo Araujo. Introdução à dinâmica das estruturas para a engenharia civil. 2.ed. São Paulo: Blucher, 2015. 268 p.

SCHAUVLIEGE, Charlotte, *et al.* Vibration serviceability assessment of a staircase based on moving load simulations and measurements. In: Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, 2014, Porto. p. 1043-1049.

SETAREH, Mehdi. Vibration analysis and design of a monumental stair. Dynamic Behavior of Materials, Bethel, v. 1, p. 461-468, 2013.

SILVA, Edson Lubas; PIERIN, Igor; SILVA, Valdir Pignatta. Estruturas compostas por perfis formados a frio - Dimensionamento pelo método das larguras efetivas e aplicação conforme ABNT NBR 14762:2010 e ABNT NBR 6355:2012. Rio de Janeiro: Instituto aço Brasil centro brasileiro da construção em aço, 2014. 193 p.

SORIANO, Humberto Lima. Introdução à dinâmica das estruturas. 1.ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014. 464 p.