

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COECI - COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA CIVIL
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

TACIANA GABRIELA DILLENBURG

**ESTUDO COMPARATIVO ENTRE OS MÉTODOS SIMPLIFICADOS
PARA O CÁLCULO DE FLECHA IMEDIATA EM VIGAS DE
CONCRETO ARMADO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO

2019

TACIANA GABRIELA DILLENBURG

**ESTUDO COMPARATIVO ENTRE OS MÉTODOS SIMPLIFICADOS
PARA O CÁLCULO DE FLECHA IMEDIATA EM VIGAS DE
CONCRETO ARMADO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel, do curso de Engenharia Civil, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Lucas Boabaid Ibrahim

TOLEDO

2019



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Toledo
Coordenação do Curso de Engenharia Civil



TERMO DE APROVAÇÃO

Título do Trabalho de Conclusão de Curso de Nº 215

Estudo comparativo entre os métodos simplificados para o cálculo de flecha imediata em vigas de concreto armado

por

Taciana Gabriela Dillenburg

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 8:20 h do dia **06 de Junho de 2019** como requisito parcial para a obtenção do título **Bacharel em Engenharia Civil**. Após deliberação da Banca Examinadora, composta pelos professores abaixo assinados, o trabalho foi considerado **APROVADO**.

Prof. Dr. Gustavo Savaris
(UTFPR – TD)

Prof. Dr. Rodnny Jesus Mendoza Fakhye
(UTFPR – TD)

Prof Dr. Lucas Boabaid Ibrahim
(UTFPR – TD)
Orientador

Visto da Coordenação
Prof. Dr. Fúlvio Natércio Feiber
Coordenador da COECI

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por não permitir a desistência de tentar uma vaga na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, pela coragem e pelo sentimento de que a hora de sair de casa e iniciar uma aventura, havia chegado.

Agradeço a minha família, que apoiou a minha decisão de mudar para outro estado, outra região, acreditando sempre no meu potencial e na minha felicidade. Aos meus pais, Paulo Ricardo Dillenburg e Salete Degaspero Dillenburg, que investiram na minha educação desde criança e que confiam nas minhas decisões. Aos meus tios, tias e primos que me acolheram no Sul e me ajudaram em vários momentos. Ao meu namorado, Raul Hertz Lunke, por toda a parceria, incentivo e paciência ao longo da realização desse e de outros trabalhos.

Agradeço aos amigos e colegas que participaram em algum momento dessa graduação, contribuindo com conselhos, incentivos, sorrisos, abraços, palavras e atitudes motivacionais.

Agradeço a bibliotecária Carla Rech pela ajuda e conhecimentos transmitidos em relação aos trabalhos acadêmicos.

Agradeço aos meus professores da UTFPR, pelos conhecimentos teóricos e práticos disseminados.

Agradeço ao meu orientador, Professor Dr. Lucas Boabaid Ibrahim, pela paciência, simpatia e experiência transmitida com as disciplinas ministradas e com a orientação que tornou possível este trabalho.

RESUMO

Neste trabalho foi realizado um estudo comparativo entre os resultados de flecha imediata de uma viga biapoiada, obtida utilizando as metodologias simplificadas estudadas das Normas NBR 6118, a ACI 318, o Eurocode 2 e o Método Bilinear. Os cálculos foram comparados a um valor de flecha obtida experimentalmente por Deghenhard et al (2016). Os resultados obtidos apresentaram a credibilidade das metodologias simplificadas e que o método que mais se aproximou dos valores experimentais foi o Método Bilinear, recomendado pelo CEB no “Manual de projeto sobre Fissuração e Deformação”. Além disso, foi feito um breve estudo para esclarecer o momento fletor a ser utilizado na Equação da rigidez equivalente, adotada pela NBR 6118, no cálculo de flechas de vigas contínuas. Dentre os resultados, esclareceu-se que o momento fletor máximo positivo é o utilizado nos cálculos de rigidez equivalente de vigas contínuas fissuradas. Concluiu-se que as metodologias disponíveis para a realização simplificada dos cálculos de flechas imediatas retratam com confiança o comportamento dos elementos estruturais.

Palavras-chave: Flecha imediata. Métodos simplificados. Viga de concreto armado.

ABSTRACT

In this work a comparative study was carried out between the results of the short-term deflection of a simply supported beam, obtained through calculations of different simplified methodologies. The simplified methods studied were NBR 6118, ACI 318, Eurocode 2 and Bilinear Method. The calculations were compared to an deflection value obtained experimentally by Deghenhard et al (2016). The results obtained presented the credibility of the simplified methodologies and that the method that most approached the experimental values was the Bilinear Method, recommended by CEB in the "Design Manual on Cracking and Deformation". In addition, a brief study was made to clarify the bending moment to be used in the equation of equivalent stiffness, adopted by NBR 6118, in the calculation of deflections of continuous beams. Among the results, it was clarified that the maximum positive bending moment is the one used in calculations of equivalent stiffness of cracked continuous beams. It was concluded that the methodologies available for the simplified realization of the short-term deflection calculations confidently portray the behavior of the structural elements.

Keywords: Short-term deflection. Simplified methods. Reinforced concrete beams.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Estádio I	14
Figura 2 - Estádio II	15
Figura 3 - Estádio III	15
Figura 4 - Detalhamento armaduras das vigas ensaiadas	28
Figura 5 - Elementos do ensaio de flexão em quatro pontos	29
Figura 6 - Viga biapoiada com carga pontual nos terços do vão	32
Figura 7 - Viga contínua com carregamento distribuído	33
Figura 8 – Diagrama de momento fletor da viga contínua subdividida (3 partes).....	34
Figura 9 – Diagrama de momento fletor da viga contínua subdividida (12 partes)....	35
Figura 10 - Viga com carregamento A e diagrama de momento fletor	36
Figura 11 - Viga com carregamento E e diagrama de momento fletor	37
Figura 12 - Viga contínua em estudo	48
Figura 13 - Detalhamento das armações da viga	48
Figura 14 - DMF da viga contínua em estudo	49
Figura 15 - DMF da viga subdividida em três partes	51
Figura 16 – Deformação da viga subdividida em três partes	52
Figura 17 - DMF da viga subdividida em doze partes	52
Figura 18 - Deformação da viga subdividida em doze partes.....	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Fator de modificação λ	20
Tabela 2 - Resultados da resistência à compressão axial	30
Tabela 3 - Resultados vigas do grupo de referência A.....	31
Tabela 4 - Resultados vigas do grupo de referência E.....	31
Tabela 5 - Intervalos de seccionamento na viga contínua (três partes)	34
Tabela 6 - Intervalos de seccionamento na viga contínua (doze partes)	35
Tabela 7 – Dados da viga em estudo	36
Tabela 8 – Momentos de fissuração e estado das vigas estudadas	37
Tabela 9 – Parâmetros do material	38
Tabela 10 – Parâmetros calculados	38
Tabela 11 – Rigidez equivalente da viga em estudo	38
Tabela 12 – Flecha imediata pela NBR 6118	39
Tabela 13 – Resultados da variáveis e condição da viga.....	40
Tabela 14 – Módulo de elasticidade	40
Tabela 15 – Parâmetros calculados	40
Tabela 16 – Momento de inércia equivalente da viga em estudo.....	41
Tabela 17 – Flecha imediata pela ACI 318.....	41
Tabela 18 – Momentos de fissuração e estado das vigas estudadas	42
Tabela 19 – Coeficiente de distribuição	42
Tabela 20 – Módulo de elasticidade secante	43
Tabela 21 – Parâmetros calculados	43
Tabela 22 – Flecha imediata pelo Eurocode 2	44
Tabela 23 – Módulo de deformação secante	45
Tabela 24 – Parâmetros calculados	45
Tabela 25 – Rigidez estágio I	45
Tabela 26 – Rigidez estágio II	46
Tabela 27 – Momentos de fissuração e estado das vigas estudadas	46
Tabela 28 – Coeficiente de distribuição	46
Tabela 29 – Flecha imediata pelo Método Bilinear.....	47
Tabela 30 - Resultados calculados	47
Tabela 31 – Dados da viga em estudo	49
Tabela 32 – Parâmetros calculados	50

Tabela 33 – Rigidez equivalente e flecha imediata	50
Tabela 34 – Parâmetros calculados	51
Tabela 35 – Rigidez equivalente	52
Tabela 36 – Momentos máximos e condição do trecho	53
Tabela 37 – Parâmetros calculados	53
Tabela 38 – Rigidez equivalente	54

LISTA DE SÍMBOLOS

σ	Tensão normal
ε	Deformação específica
E	Módulo de elasticidade
M_r, M_{cr}	Momento de fissuração
α	Fator de correlação, pela NBR 6118; Flecha, pelo Eurocode 2
f_{ct}	Resistência à tração direta do concreto
f_{ck}	Resistência à compressão característica do concreto
I_c, I_g	Momento de inércia da seção bruta de concreto
y_t	Distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada
b	Largura da seção transversal
h	Altura da seção transversal
E_{ci}	Módulo de elasticidade inicial do concreto
α_E	Parâmetro que influencia o módulo de elasticidade em função da natureza do agregado
E_{cs}	Módulo de deformação secante do concreto
α_i	Parâmetro de correção do módulo de deformação secante
$(EI)_{eq}$	Rigidez equivalente, NBR 6118
M_a	Momento fletor máximo
I_{II}, I_{cr}	Momento de inércia da seção fissurada
d	Altura útil da seção
k_{II}	Parâmetro adimensional para cálculo de rigidez no estágio II
ξ	Parâmetro adimensional
n	Relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto
ρ'	Taxa geométrica de armadura longitudinal de compressão
δ	Relação entre a altura útil da área comprimida e da seção
ρ	Taxa geométrica de armadura longitudinal de tração
d'	Altura útil da área comprimida
E_s	Módulo de elasticidade do aço
A_s	Área de aço da armadura tracionada
A'_s	Área de aço da armadura comprimida
I_e	Momento de inércia equivalente, ACI 318

f_r	Módulo de ruptura
λ	Fator de modificação
f'_c	Resistência à compressão especificada do concreto, pela ACI 318
E_c	Módulo de elasticidade do concreto
a	Flecha ponderada, pelo método Bilinear
a_1	Flecha no estágio I, pelo método Bilinear
a_2	Flecha no estágio II, pelo método Bilinear
ζ	Coefficiente de distribuição
M	Momento fletor máximo
β_1	Fator que considera a qualidade da aderência das barras de aço
β_2	Fator que caracteriza a influência da duração do carregamento
K_I	Rigidez no estágio I, método Bilinear
K_{II}	Rigidez no estágio II, método Bilinear
k_I	Parâmetro adimensional para cálculo de rigidez no estágio I
α_I	Fator calculado para os elementos não fissurados, pelo Eurocode 2
α_{II}	Fator calculado para os elementos totalmente fissurados, pelo Eurocode 2
β	Coefficiente relacionado com a duração do carregamento
σ_{sr}	Tensão calculada com base em uma seção fissurada sob condições de carga causando a primeira fissura
σ_s	Tensão calculada com base em uma seção fissurada
N_{cr}	Força de fissuração
N	Força normal
f_{ctm}	Resistência média do concreto à tração
E_{cm}	Módulo de elasticidade secante do concreto
L	Comprimento do vão da viga
f_{cm}	Resistência à compressão axial média
s	Desvio padrão
P	Carga concentrada aplicada
f	Deslocamento vertical
q	Carregamento distribuído

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	JUSTIFICATIVA.....	12
1.2	OBJETIVO GERAL	13
1.2.1	Objetivos específicos.....	13
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	14
2.1	DEFORMAÇÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO: ESTÁDIOS.....	14
2.2	METODOLOGIAS PARA CÁLCULO DA FLECHA.....	15
2.2.1	Fórmula de Branson	16
2.2.1.1	<i>Cálculo de flechas em vigas segundo a NBR 6118.....</i>	<i>16</i>
2.2.1.2	<i>Cálculo de flechas em vigas segundo a ACI 318</i>	<i>19</i>
2.2.2	Método Bilinear.....	21
2.2.3	Cálculo de flechas em vigas segundo o EUROCODE 2.....	23
2.3	ESTUDOS COMPARATIVOS.....	25
2.4	ESTUDO EXPERIMENTAL	28
3	MATERIAIS E MÉTODOS	30
3.1	PRIMEIRO ESTUDO: VIGA BIAPOIADA.....	30
3.2	SEGUNDO ESTUDO: VIGA CONTÍNUA.....	33
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	36
4.1	PRIMEIRO ESTUDO: VIGA BIAPOIADA.....	36
4.1.1	Cálculos pela NBR 6118.....	37
4.1.2	Cálculos pela ACI 318	39
4.1.3	Cálculos pelo Eurocode 2.....	41
4.1.4	Cálculos pelo Método Bilinear	44
4.1.5	Análise comparativa	47
4.2	SEGUNDO ESTUDO: VIGA CONTÍNUA.....	48
4.2.1	Dimensionamento da viga contínua.....	48
4.2.2	Flecha imediata da viga contínua segundo a NBR 6118.....	49
4.2.3	Viga subdividida em três partes.....	51
4.2.4	Viga subdividida em doze partes	52
5	CONCLUSÃO.....	55
	REFERÊNCIAS.....	56

1 INTRODUÇÃO

Para desenvolver um projeto estrutural é necessário passar por várias etapas. Primeiro, é feito o lançamento estrutural e o pré-dimensionamento, levando em conta as ações que estarão ocorrendo na estrutura, de modo que o projeto fique exequível e viável economicamente. Após isso, são feitas análises e então é dado início ao dimensionamento, nesta etapa são aplicadas as recomendações estabelecidas nas normas vigentes.

O dimensionamento estrutural é feito no Estado Limite Último (ELU) e no Estado Limite de Serviço (ELS) é realizada a verificação do objeto de estudo deste trabalho, as flechas, que são os deslocamentos verticais dos elementos de viga.

Os deslocamentos em vigas são aferidos e comparados com um valor limite, determinado pelas normas técnicas. Essa verificação é feita para garantir que a flecha não afete o aspecto estético e a durabilidade do elemento em sua utilização normal. Essas deflexões acontecem em dois momentos: a flecha imediata, também chamada de inicial e a flecha diferida no tempo, decorrente da fluência e da retração do concreto.

Existem diversos métodos simplificados de cálculo de flechas em vigas de concreto armado. Cada metodologia apresenta suas considerações a respeito dos parâmetros de cálculo da flecha imediata. Segundo Junges (2011), uma das dificuldades encontradas é a determinação da contribuição do concreto fissurado na rigidez do elemento, sendo esse efeito conhecido como “*tension-stiffening*”.

Neste trabalho serão estudados os procedimentos analíticos de cálculo para flechas imediatas que consideram de forma simplificada o resultado da fissuração do concreto e a forma como esta influencia na alteração da inércia do elemento.

Destacam-se a metodologia proposta por Branson, a qual é adotada pela NBR 6118 (2014) e pela norma americana ACI 318 (2014), o Método Bilinear proposto pelo *Comité Euro-International du Béton* (CEB) (1985) e a norma europeia Eurocode 2 (2004).

1.1 JUSTIFICATIVA

Devido a importância da verificação de deslocamentos e deformações das estruturas ainda em fase de projeto, o estudo dos deslocamentos verticais em vigas

se dá pela necessidade de se certificar que o elemento estrutural não irá sofrer flechas excessivas, causando danos a elementos não estruturais e afetando a durabilidade da estrutura.

Para realizar essa verificação, é preciso usar métodos que representem o real comportamento dos elementos. Assim, dá-se o motivo para a realização de estudos que visem comparar e analisar os métodos de cálculo que simplificam a colaboração do concreto no estado de fissuração.

Com este estudo, pretende-se adquirir conhecimento em relação as diferentes metodologias utilizadas para o cálculo de flechas imediatas em vigas de concreto armado, realizando uma análise sobre a precisão dos resultados obtidos em projeto em comparação a um valor obtido na prática.

Além disso, pretende-se analisar os resultados de uma viga contínua objetivando fornecer esclarecimento aos engenheiros projetistas a respeito do comportamento dos deslocamentos verticais desse elemento, que se diferencia devido a presença dos momentos negativos nos apoios.

1.2 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral deste trabalho é realizar um estudo comparativo em relação ao valor de flecha imediata de vigas biapoiadas e contínuas de concreto armado, analisando os resultados obtidos com as diferentes metodologias simplificadas e comparando a um valor real.

1.2.1 Objetivos específicos

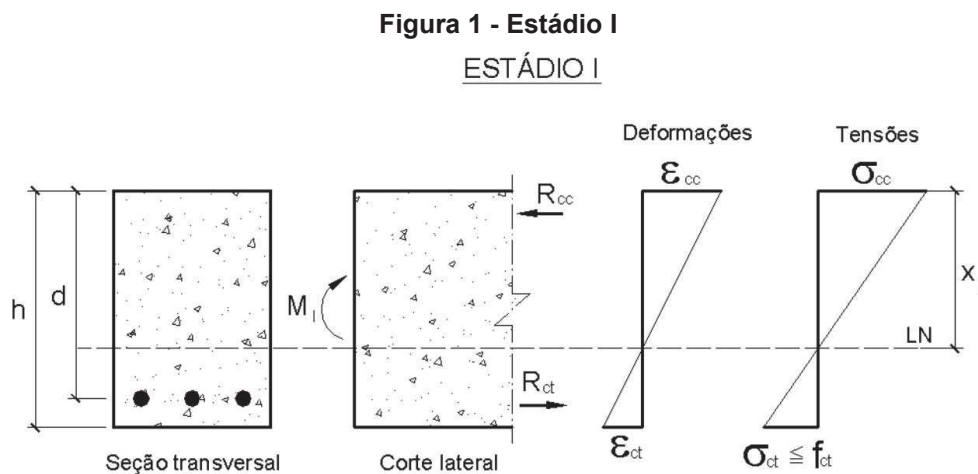
- a) Salientar as diferenças entre as metodologias de cálculo de flecha imediata;
- b) Verificar a precisão dos valores de flecha obtidos a partir das metodologias;
- c) Analisar qual metodologia melhor representa o comportamento das flechas em vigas biapoiadas;
- d) Estudar o comportamento das flechas em vigas contínuas;

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

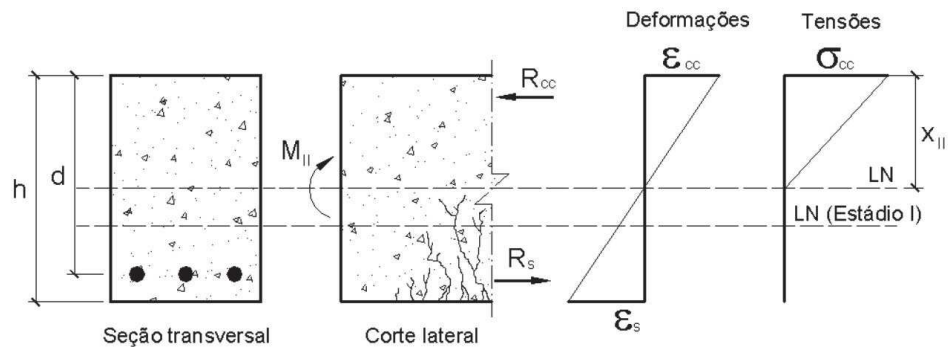
2.1 DEFORMAÇÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO: ESTÁDIOS

A seção de concreto passa por diversas fases a medida que um carregamento é aplicado, essas fases distintas são chamadas de estádios e são divididos, basicamente, em três (PINHEIRO, 2007, p. 6.9).

O estágio I equivale ao início do carregamento. O concreto resiste às tensões de tração, uma vez que as tensões normais são de pequena magnitude. O diagrama de tensões é linear ao longo da seção transversal da peça, sendo válida a lei de Hooke ($\sigma = \varepsilon \times E$). O estágio I termina quando a resistência à tração do concreto é alcançada e se inicia a fissuração do concreto. A Figura 1 apresenta o comportamento do concreto na flexão pura.

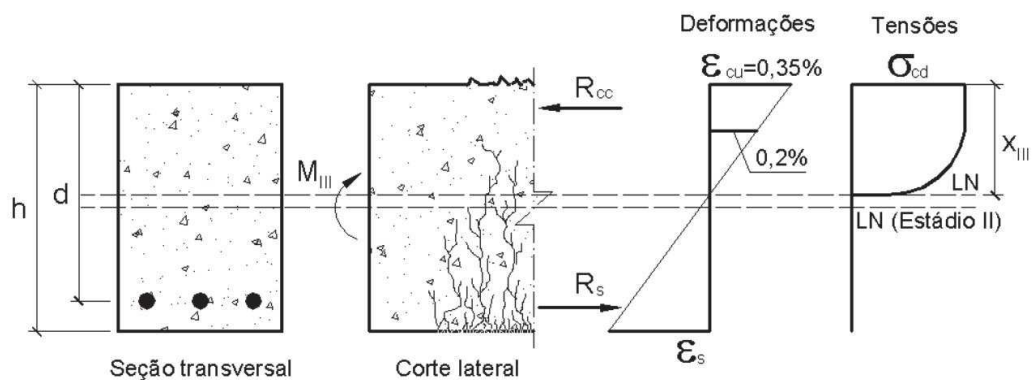


No estágio II o concreto já está fissurado na região tracionada e não resiste mais à tração. Segundo Junges (2011), a contribuição do concreto na zona de tração entre as fissuras é chamada de “*tension-stiffening*”. A lei de Hooke ainda vale para a parte comprimida, onde o diagrama de tensões permanece linear, Figura 2. Esse estágio é usado para verificação dos limites de fissuração e deformações excessivas e termina com a plastificação do concreto comprimido.

Figura 2 - Estádio IIESTÁDIO II

Fonte: PINHEIRO, 2007

A parte comprimida do concreto está plastificada no estágio III, logo essa região está na iminência de ruptura. A lei de Hooke não é mais aplicável, pois o diagrama de tensões tem a forma parabólico-retangular. A Figura 3 mostra o comportamento do concreto no estágio III.

Figura 3 - Estádio IIIESTÁDIO III

Fonte: PINHEIRO, 2007

De acordo com Junges (2011) o início do estágio III se identifica pelo início do escoamento do aço, nas peças dimensionadas para no domínio 2 e 3.

2.2 METODOLOGIAS PARA CÁLCULO DA FLECHA

Na literatura, existem diversos métodos simplificados de cálculo de flechas em vigas de concreto armado. Entre eles, a maioria representa a variação da rigidez

à flexão ao longo da viga de modo simplificado, para ser possível realizar os cálculos manualmente.

2.2.1 Fórmula de Branson

A proposta de Dan Earle Branson (1963), apresenta uma fórmula de inércia equivalente, I_{eq} , que é uma ponderação da inércia nos estádios I e II e tem a finalidade de considerar que uma parte da viga não está fissurada e também o efeito “*tension-stiffening*” na parte em que a viga está fissurada (JUNGES; LA ROVERE, 2017).

2.2.1.1 Cálculo de flechas em vigas segundo a NBR 6118

Segundo a NBR 6118 (2014), os elementos estruturais trabalham uma parte no estágio I e uma parte do II, sendo a separação entre eles definido pelo momento de fissuração, o qual é calculado pela Equação (1).

$$M_r = \frac{\alpha \times f_{ct} \times I_c}{y_t} \quad (1)$$

Sendo que:

α é o fator que correlaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta. Equivale a 1,2 em seções T ou duplo T, 1,3 para seções I ou T invertido e 1,5 para seções retangulares;

f_{ct} é a resistência à tração direta do concreto, calculada por: $0,3 \times f_{ck}^{2/3}$, para concretos de classes até 50 MPa;

I_c é o momento de inércia da seção bruta do concreto;

y_t é a distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada.

Para seções retangulares, realizando as simplificações, o momento de fissuração toma a forma da Equação (2).

$$M_r = \frac{b \times h^2 \times f_{ct}}{4} \quad (2)$$

A estrutura formada por concreto e aço atua como materiais de comportamento elástico e linear, de forma que, ao longo do elemento estrutural suas deformações específicas possam ser determinadas no estágio I, não superando os esforços que dão início à fissuração, assim como poderão ser determinadas no estágio II.

É necessário o uso do módulo de deformação secante (E_{cs}) no cálculo, além da obrigatoriedade da consideração do efeito da fluência.

De acordo com a norma, o módulo de elasticidade inicial (E_{ci}) deve ser obtido segundo ensaio, contudo, quando não forem realizados ensaios, é possível estimar o valor a partir das equações (3) e (4), onde (3) é utilizada para concreto com f_{ck} entre 20 a 50 MPa e (4) para concreto com f_{ck} de 55 a 90 MPa.

$$E_{ci} = \alpha_E \times 5600 \times \sqrt{f_{ck}} \quad (3)$$

$$E_{ci} = 21,5 \times 10^3 \times \alpha_E \times \left(\frac{f_{ck}}{10} + 1,25 \right)^{1/3} \quad (4)$$

O parâmetro α_E influencia o módulo de elasticidade em função da natureza do agregado utilizado no concreto, sendo 1,2 para agregados do tipo basálticos e diabásicos, 1,0 para granito e gnaisse, 0,9 para calcário e 0,7 para arenitos.

Após a determinação do E_{ci} é preciso calcular o parâmetro de correção do E_{cs} em função do f_{ck} (α_i), Equação (5), e então obter o módulo de deformação secante, Equação (6).

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \times \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (5)$$

$$E_{cs} = \alpha_i \times E_{ci} \quad (6)$$

Logo, para avaliar, aproximadamente, a flecha em vigas de concreto armado, utiliza-se a expressão de rigidez equivalente, apresentada no item 17.3.2.1.1 da NBR 6118 (2014), Equação (7).

$$(EI)_{eq,t0} = E_{cs} \times \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \times I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \times I_{II} \right\} \leq E_{cs} \times I_c \quad (7)$$

Em que:

$(EI)_{eq,t0}$ é a rigidez equivalente do elemento fissurado;

M_r é o momento de fissuração;

M_a é o momento fletor na seção crítica do vão considerado, ou seja, o momento máximo para vigas biapoiadas ou contínuas;

I_c é o momento de inércia da seção bruta do concreto;

I_{II} é o momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II.

O momento de inércia da seção fissurada (I_{II}) é obtido através da Equação (8), de acordo com a formulação apresentada por Araújo (2010).

$$I_{II} = b \times d^3 \times k_{II} \quad (8)$$

Em que:

b é a largura da seção transversal;

d é a altura útil da seção;

k_{II} é um parâmetro adimensional, calculado pela Equação (9).

$$k_{II} = \frac{1}{6} \xi^2 (3 - \xi) + n \rho' (\xi - \delta) (1 - \delta) \quad (9)$$

O procedimento de cálculo do momento de inércia da seção fissurada exige resultados adimensionais, os quais permitem encontrar o fator k_{II} . Esses parâmetros são apresentados nas equações (10), (11), (12), (13) e (14).

$$\xi = -n(\rho + \rho') + \sqrt{n^2(\rho + \rho')^2 + 2n(\rho + \delta\rho')} \quad (10)$$

$$\delta = \frac{d'}{d} \quad (11)$$

$$n = \frac{E_s}{E_{cs}} \quad (12)$$

$$\rho = \frac{A_s}{b \times d} \quad (13)$$

$$\rho' = \frac{A'_{r_s}}{b \times d} \quad (14)$$

2.2.1.2 Cálculo de flechas em vigas segundo a ACI 318

De acordo com o item 24.2.3 da norma americana ACI 318 (2014), as flechas imediatas devem ser calculadas usando métodos e fórmulas de deformações elásticas. Nos membros não fissurados as fórmulas usuais podem ser usadas com uma constante de rigidez ao longo do membro, contudo, quando estiver fissurado é necessário a realização de um cálculo mais rigoroso.

Assim como a NBR 6118 (2014), a ACI 318 (2014) também adota a proposta de Branson (1963), apresentando pequenas diferenças em relação a norma brasileira.

O momento de inércia equivalente é calculado pela Equação (15), apresentada no item 24.2.3.5 da norma.

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 \times I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] \times I_{cr} \quad (15)$$

Em que:

I_e é o momento de inércia equivalente;

I_g é o momento de inércia da seção bruta de concreto;

I_{cr} é o momento de inércia da seção fissurada transformada em concreto;

M_a momento máximo;

M_{cr} é o momento de fissuração, calculado pela Equação (16).

$$M_{cr} = \frac{f_r \times I_g}{y_t} \quad (16)$$

Em que:

f_r é o módulo de ruptura;

y_t é a distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada.

Assim como a NBR 6118 (2014), a norma americana não apresenta os procedimentos de cálculo do momento de inércia da seção fissurada (I_{cr}). Logo, seu resultado também é obtido através do cálculo de parâmetros adimensionais proposto por Araújo (2010) e apresentado no item 2.2.1.1.

O módulo de ruptura (f_r), deve ser calculado de acordo com o item 19.2.3 da norma, conforme Equação (17).

$$f_r = 0,62 \times \lambda \times \sqrt{f'_c} \quad (17)$$

O fator de modificação (λ), é usado para considerar as propriedades do concreto leve multiplicando a parcela $\sqrt{f'_c}$, e seu valor leva em conta a composição do agregado presente no concreto conforme apresentado na Tabela 19.2.4.2 da norma e traduzido na Tabela 1.

Tabela 1 - Fator de modificação λ

Concreto	Composição dos agregados	λ
Todo leve	Fino: ASTM C330M Grosso: ASTM C330M	0.75
Mistura leve e fina	Fino: Combinação da ASTM C330M e C33M Grosso: ASTM C330M	0.75 até 0.85
Areia leve	Fino: ASTM C33M Grosso: ASTM C330M	0.85
Mistura de areia leve e grossa	Fino: ASTM C33M Grosso: Combinação da ASTM C330M e C33M	0.85 até 1
Peso normal	Fino: ASTM C33M Grosso: ASTM C33M	1

Fonte: Traduzido de ACI 318, 2014, p. 316

Segundo a ACI 318 (2014), o módulo de elasticidade pode ser calculado segundo o item 19.2.2.1, o qual apresenta a Equação (18) para concretos de peso normal (f'_c em MPa).

$$E_c = 4700 \times \sqrt{f'_c} \quad (18)$$

Segundo a Norma americana, o concreto de peso normal é composto por agregados especificados pela Norma ASTM C33M e são os que possuem densidade entre 2155 e 2560 kg/m³ e geralmente são considerados como 2320 a 2400 kg/m³.

2.2.2 Método Bilinear

Segundo o *Model Code 2010* (FIB, 2012), o boletim que apresenta os métodos gerais e as equações necessárias para encontrar o valor das flechas imediatas é descrito pelo *Comité Euro-International du Béton* (CEB) no “*Design Manual on Cracking and Deformations*” de 1985. O manual apresenta que esse método é limitado ao cálculo de flechas. Nessa metodologia são calculadas deflexões limitadoras, correspondentes ao estágio I e II. Logo, de acordo com CEB (1985), o provável resultado da flecha está entre esses limites e é obtida empregando um coeficiente de distribuição.

O Manual de projeto sobre Fissuração e Deformações, apresenta um resumo dos passos a serem realizados, sucessivamente, para o cálculo das flechas pelo método Bilinear. Sendo eles: calcular o momento fletor na seção crítica, calcular o momento de fissuração, calcular o coeficiente de distribuição e então calcular as flechas limitantes a_1 e a_2 , no estágio I e II respectivamente. A Equação (19) é a função Bilinear que apresenta a provável flecha, segundo o CEB (1985).

$$a = (1 - \zeta) \times a_1 + \zeta \times a_2 \quad (19)$$

O CEB (1985) apresenta as condições para o coeficiente de distribuição (ζ), Equações (20) e (21).

$$\zeta = 0, \text{ se } M < M_r \quad (20)$$

$$\zeta = 1 - \beta_1 \times \beta_2 \times \frac{M_r}{M}, \text{ se } M > M_r \quad (21)$$

Em que:

M é o momento fletor máximo, calculado na seção crítica.

M_r é o momento de fissuração

β_1 é o fator que considera a qualidade da aderência das barras de aço, valendo 1 para barras de alta aderência e 0,5 para barras lisas.

β_2 caracteriza a influência da duração do carregamento, sendo 1 para o primeiro carregamento e 0,5 para cargas de longa duração.

O coeficiente ζ tem o valor alterado por toda a extensão da viga, pois os valores do momento fletor e do momento de fissuração são diferentes em cada seção transversal. Logo, é necessário adotar um valor constante para ζ , calculado para a seção crítica, e realizar os cálculos das flechas considerando a rigidez dessa seção.

O cálculo das rigidezes do estágio I e II é feito através de gráficos pelo CEB (1985). Sendo assim, Araújo (2010) propôs uma sucessão de expressões que simplificam o uso gráfico. Logo, a aplicação dessa metodologia torna-se mais eficiente, uma vez que as substituições da interpretação gráfica por resultados calculados dão um resultado mais confiável.

De acordo com Araújo (2010) as rigidezes K_I e K_{II} são obtidas nos estádios I e II, respectivamente, considerando as armaduras existentes.

A rigidez no estágio I é calculada por uma sucessão de expressões adimensionais (δ, n, ρ, ρ') , evidenciadas no item 2.2.1.1, deste trabalho, pelas equações (11), (12), (13) e (14), e ξ apresentado pela Equação (22), as quais são necessárias para encontrar um parâmetro k_I , Equação (23).

$$\xi = \frac{(1+\delta)^2 + 2n(\rho + \delta\rho')}{2[1+\delta+n(\rho+\rho')]} \quad (22)$$

$$k_I = \frac{1}{6} [2\delta^3 + 3\delta^2 - 1 + 3\xi(1 - \delta^2)] + n\rho'(\xi - \delta)(1 - \delta) \quad (23)$$

Realizando as substituições necessárias obtém-se a expressão da rigidez no estágio I, Equação (24).

$$K_I = k_I \times b \times d^3 \times E_{cs} \quad (24)$$

Assim como a rigidez no estágio I, o cálculo no estágio II também requer a substituição dos adimensionais, sendo apenas a expressão de ξ diferente do estágio I, Equação (25).

$$\xi = -n(\rho + \rho') + \sqrt{n^2(\rho + \rho')^2 + 2n(\rho + \delta\rho')} \quad (25)$$

Obtém-se então o parâmetro k_{II} , Equação (26), e a expressão final da rigidez no estágio II, Equação (27).

$$k_{II} = \frac{1}{6}\xi^2(3 - \xi) + n\rho'(\xi - \delta)(1 - \delta) \quad (26)$$

$$K_{II} = k_{II} \times b \times d^3 \times E_{cs} \quad (27)$$

O momento fletor máximo é calculado na seção crítica. A seção crítica considerada de uma viga biapoiada ou contínua é o meio do vão e de vigas em balanço é no engaste (CEB, 1985; ARAÚJO, 2004; 2010; 2011).

Para o cálculo do momento de fissuração Araújo (2011) apresenta a Equação (28), a qual considera a resistência à tração do concreto como a Equação (29), com f_{ck} em MPa.

$$M_r = \left(\frac{k_I}{1 + \delta - \xi} \right) b d^2 f_{ct} \quad (28)$$

$$f_{ct} = 1,40 \left(\frac{f_{ck}}{10} \right)^{2/3} \quad (29)$$

Por fim, é possível calcular o coeficiente de distribuição para verificar o valor da flecha na seção analisada.

O módulo de deformação secante (E_{cm}) é apresentado no apêndice 4.1 do “*Design Manual on Cracking and Deformations*” (CEB, 1985), em que f_{ck} está em MPa e o resultado sai em GPa, Equação (30). Utilizando a nomenclatura adotada por Araújo (2010), tem-se E_{cs} como o módulo secante.

$$E_{cs} = 9,5(f_{ck} + 8)^{1/3} \quad (30)$$

2.2.3 Cálculo de flechas em vigas segundo o EUROCODE 2

O Eurocode 2 (2004) expõe no item 7.4.3 os cálculos para verificação das deflexões dos elementos estruturais.

A norma europeia preconiza que os deslocamentos devem ser calculados em condições de carga adequada ao objetivo da verificação e que o método de cálculo deve representar o real comportamento da estrutura. Descreve o procedimento de cálculo para os elementos que se espera a fissuração, mas que não estão totalmente fissurados e comportam-se de maneira intermediária, de forma que a parte do concreto entre fissuras é considerada colaborativa.

Para os membros que estão submetidos principalmente à flexão a norma indica a Equação (31).

$$\alpha = \zeta\alpha_{II} + (1 - \zeta)\alpha_I \quad (31)$$

Em que:

α é o parâmetro que se deseja obter, podendo ser uma tensão, uma curvatura ou uma rotação. De forma simplificada α é a flecha.

α_I, α_{II} são os valores dos fatores calculados para os elementos não fissurados e totalmente fissurados, respectivamente.

ζ é um coeficiente de distribuição, dado pela expressão (32).

$$\zeta = 1 - \beta \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (32)$$

O valor do coeficiente de distribuição será zero para seções não fissuradas. O coeficiente β leva em conta a duração do carregamento, sendo 1 para cargas de curta duração e 0,5 para as de longa duração.

Segundo o Eurocode 2 (2004), o termo σ_{sr}/σ_s pode ser substituído por M_{cr}/M para flexão ou N_{cr}/N para tensão pura, em que M_{cr} é o momento de fissuração e N_{cr} é a força de fissuração.

Assim como as normas brasileira e americana, a norma europeia não apresenta um procedimento de cálculo para a rigidez do elemento fissurado. Logo, calcula-se utilizando as sugestões de Araújo (2010), baseado no CEB (1985), apresentado no item 2.2.1.1.

Essa norma não apresenta uma expressão para o cálculo do momento de fissuração. Uma simplificação é sugerida por Araújo (2010), na qual despreza-se as armaduras, e para seções retangulares pode ser calculado através da Equação (33).

$$M_{cr} = \frac{bh^2 f_{ctm}}{6} \quad (33)$$

As deformações por efeito do carregamento podem ser avaliadas usando a resistência à tração e o módulo de elasticidade do concreto. A norma apresenta as expressões para o cálculo da resistência à tração, sendo condicionadas pelo valor da resistência característica do concreto. Para classes de resistência menores que 50 MPa a resistência à tração é obtida pela Equação (34).

$$f_{ctm} = 0,3 \times f_{ck}^{\frac{2}{3}} \quad (34)$$

O módulo de elasticidade secante do concreto é calculado pela Equação (35), indicada pela norma, em que f_{ck} está em MPa e E_{cm} em GPa.

$$E_{cm} = 22 \left(\frac{f_{ck} + 8}{10} \right)^{0,3} \quad (35)$$

Segundo o Eurocode 2 (2004), a Equação (35) é utilizada quando o concreto é composto por agregados de quartzo. Caso o agregado presente no concreto seja do tipo calcário é possível reduzir em 10% o valor obtido pela Equação (35) e para agregados do tipo arenito é reduzido em 30%. Contudo, para agregados do tipo basáltico o valor deve ser aumentado em 20%.

2.3 ESTUDOS COMPARATIVOS

Na literatura encontram-se estudos já realizados sobre algumas metodologias do cálculo de flechas. Nesses trabalhos são feitos estudos numéricos comparativos, a fim de apresentar qual metodologia melhor se aplica. Além disso, as normativas que apresentam as metodologias passaram por atualizações, sendo necessário novos estudos sobre esse assunto.

Araújo (2004) realizou um estudo para avaliar a precisão de algumas metodologias que calculam flechas em vigas de concreto armado de forma simplificada. Os métodos estudados foram: o método Bilinear do CEB (1985), uma fórmula prática descrita no *Model Code* de 1990 da CEB-FIB e a metodologia da ACI 318 adotada pela NBR 6118. Para isso foi desenvolvido um modelo para análise não-linear, adotou-se diagramas tensão-deformação conciliáveis com resultados obtidos experimentalmente. Araújo (2004) concluiu nesse trabalho que os modelos simplificados apresentam boa concordância em relação ao cálculo de flechas imediatas, porém quando são considerados as deformações diferidas no concreto a NBR 6118 não reproduz adequadamente essas deformações.

Araújo (2005) avaliou a metodologia simplificada adotada pela norma americana ACI 318 e propôs melhorias através de seu estudo. Foi calculado os valores de flecha de uma viga de concreto armado e comparado com os resultados de uma análise não-linear. Concluiu-se que o método da ACI é satisfatório para avaliar flechas imediatas, mas não é apropriada para as flechas totais, pois, em elementos não fissurados, os efeitos de fluência e retração do concreto são minimizados, prejudicando a credibilidade do projeto em relação ao estado limite de deformação.

Oliveira e Silva (2011) realizaram um estudo com objetivo de avaliar a eficiência da formulação proposta por Branson, que é uma inércia equivalente para os elementos estruturais fissurados. Para isso foi realizado análises numéricas de pórticos planos através do *software* ANSYS. Primeiro foi considerado a não-linearidade geométrica e física e depois considerou-se a não-linearidade física de forma simplificada, recorrendo a redução da rigidez dos elementos com a formulação de Branson e as recomendações da NBR 6118/2007. Oliveira e Silva (2011) concluíram que a formulação se mostrou mais eficiente em relação a pórticos mais flexíveis, do que os mais rígidos. Isso ocorre pois, nos pórticos mais rígidos a inércia se aproxima da seção bruta de concreto, independente da intensidade do carregamento, podendo não traduzir de forma correta a rigidez da estrutura. Nos pórticos flexíveis, a inércia é, em grande parte, determinada pela inércia da seção fissurada, sendo coerente para elementos com menor rigidez.

Araújo (2011) desenvolveu duas fórmulas práticas para o cálculo de flechas em vigas de concreto armado a partir do modelo Bilinear do CEB (1985). A primeira fórmula tem o intuito de calcular a flecha para diferentes estágios do carregamento, utilizando as áreas de aço existentes. A outra independe das armaduras e permite o

cálculo para as cargas de serviço. O objetivo deste desenvolvimento foi variar o nível de carregamento, o coeficiente de fluência e a resistência a compressão do concreto. Para demonstrar a precisão das duas fórmulas foi feito a comparação com o método Bilinear do CEB (1985). Araújo (2011) concluiu que ambas as fórmulas apresentam resultados muito aproximados aos do método Bilinear, com erro inferior a 10%. Além disso, a fórmula que permite obter a flecha nos vários estágios do carregamento também pode ser utilizada para encontrar a rigidez equivalente dos elementos finitos de vigas.

Bandini (2015) desenvolveu e implementou procedimentos numéricos para analisar o comportamento de vigas biapoiadas de concreto armado. Para isso, foi considerado a não-linearidade física nos cálculos das flechas imediatas e totais. Esses procedimentos, implementados computacionalmente, foram comparados com resultados experimentais de vigas ensaiadas à flexão. Além disso, Bandini (2015) avaliou os cálculos de flechas sugeridos pelas normas brasileira (NBR 6118) e europeia (Eurocode 2). O autor analisou a influência da taxa de armadura de tração e concluiu que pode haver uma limitação ao uso da metodologia adotada pela NBR 6118 em vigas que apresentem uma taxa de armadura inferior a 0,50%.

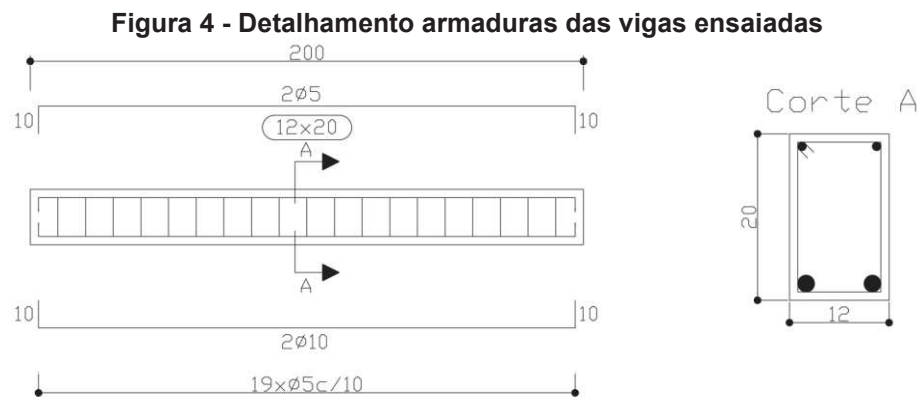
Junges e La Rovere (2017) realizaram um estudo comparativo dos resultados de flechas imediatas em vigas contínuas de concreto armado. Foram abordados dois métodos simplificados para o cálculo, o proposto por Branson, o que é adotado pela NBR 6118 (2014) e o Método Bilinear, recomendado pelo CEB (1985). Para a comparação foi utilizado dois modelos de elementos finitos. O primeiro é um modelo de barras para análise não linear de pórticos planos, o qual está implementado no *software* ANALEST/CA. O segundo modelo é o de viga, o qual consiste em uma discretização da viga em vários elementos de pequeno comprimento. O estudo consistiu em calcular as diferenças dos valores de flecha imediata encontrada em diferentes tipos de vigas em relação ao valor obtido pelo *software* ANALEST/CA. Junges e La Rovere (2017) concluíram que, dentre os métodos simplificados, a metodologia adotada pela NBR 6118 obteve resultados mais dispersos em relação ao modelo de referência e o método Bilinear apresentou resultados próximos ao do *software* e é indicado apenas para o caso de vigas sob carga concentrada.

2.4 ESTUDO EXPERIMENTAL

Deghenhard et al. (2016) realizaram o ensaio de flexão em quatro pontos em vinte e uma vigas de concreto armado. O intuito do trabalho era reforçar com adesivo epóxi elementos de viga com chapas de aço de diferentes espessuras, comprimentos e configurações, e analisar a eficiência desses reforços estruturais. Para isso, os elementos moldados foram separados em sete grupos com três vigas em cada, sendo o grupo A e E os de referência de cada uso da betoneira e os demais (B, C, D, F e G) reforçados com chapas de aço.

As vigas ensaiadas por Deghenhard et al. (2016) possuíam 12x20 cm de seção transversal e 200 cm de comprimento. A resistência característica do concreto utilizado em projeto foi de 25 MPa, para classe de agressividade ambiental II. A área de aço inferior dimensionada foi de 1,6 cm² sendo adotado duas barras com diâmetro de 10 mm em aço CA-50. Os estribos foram espaçados a cada 10 cm e o diâmetro utilizado foi 5 mm em aço CA-60.

A Figura 4 exibe o detalhamento das armaduras das vigas ensaiadas.



Fonte: Adaptado de Deghenhard et al, 2016

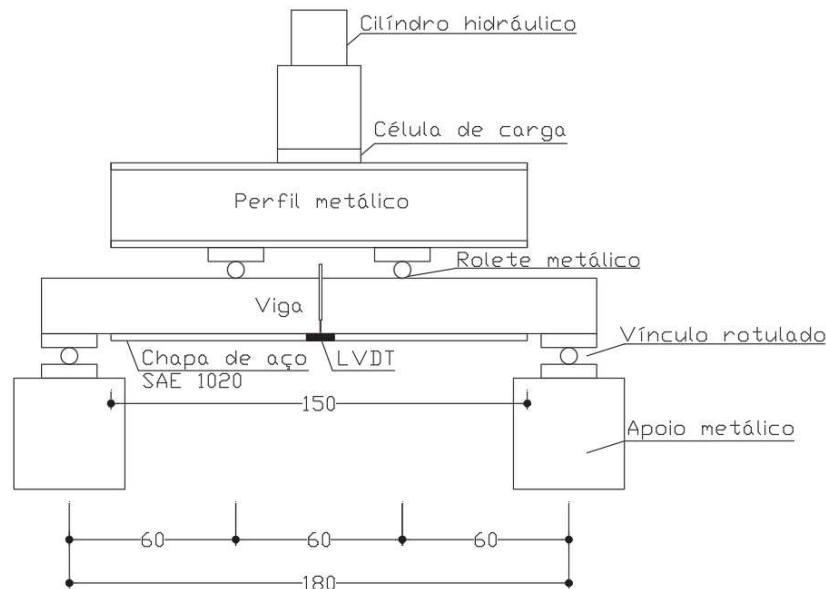
Além do ensaio de flexão, Deghenhard et al. (2016) também realizaram o ensaio de abatimento do tronco de cone (*slump-test*) e moldaram doze corpos de prova para verificar a resistência à compressão do concreto utilizado aos 7 e 28 dias.

A concretagem das vinte e uma vigas ocorreu simultaneamente. As vigas dos grupos A, B, C e D são de uma mesma concretagem e as demais vigas, dos grupos E, F, e G são do segundo uso da betoneira. Todos os elementos foram adensados com auxílio de vibradores de imersão e superficial. Para garantir o cobrimento da

armadura foi utilizado espaçadores de 2,5 cm. A desforma das vigas deu-se aos 7 dias e aos 28 dias foram realizados os ensaios de flexão em quatro pontos.

Para o ensaio de flexão em quatro pontos Deghenhard et al. (2016) utilizou um pórtico metálico, um cilindro hidráulico com capacidade de resistir até 500 kN, célula de carga na base do cilindro e dois transdutores indutivos de deslocamento (LVDTs) de 100 mm. As cargas foram aplicadas pelo cilindro sobre um perfil metálico de cima para baixo, o qual transmitiu a carga para as vigas em duas cargas pontuais localizadas nos terços do vão teórico da viga, sendo este de 180 cm. Os deslocamentos verticais no meio do vão foram aferidos pelos transdutores indutivos. A Figura 5 demonstra a posição dos elementos no ensaio de flexão em quatro pontos.

Figura 5 - Elementos do ensaio de flexão em quatro pontos



Fonte: Adaptado de Deghenhard et al, 2016

As análises realizadas por Deghenhard et al. (2016) incluíam examinar o comportamento do elemento em diferentes instantes, sendo eles: no momento em que as vigas atingissem o valor da flecha admissível, sugerida pela NBR 6118 (2014) ($L/250$) (encontrando-se 7,20 mm para o vão teórico de 180 cm), na ruptura e no momento do descolamento das chapas metálicas.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

A realização das análises comparativas desse trabalho ocorreu em duas partes. O primeiro estudo foi uma análise comparativa de resultados calculados para a flecha inicial de uma viga biapoiada, utilizando as metodologias simplificadas apresentadas, com os resultados obtidos experimentalmente por Deghenhard et al. (2016). O segundo estudo foi em relação ao comportamento da flecha imediata de uma viga contínua quando alterado o momento fletor utilizado na Equação da rigidez equivalente, sugerida pela NBR 6118 (2014).

3.1 PRIMEIRO ESTUDO: VIGA BIAPOIADA

A análise comparativa realizada foi em relação ao valor da flecha imediata de uma viga biapoiada de concreto armado.

O valor adotado como referência, para essa análise, foi extraído do estudo realizado por Deghenhard et al. (2016), descrito no item 2.4 deste trabalho. Em seu estudo, Deghenhard et al. (2016) possuíam vários grupos de dados, porém apenas os resultados dos grupos A e E serão relevantes, pois são os grupos que possuem elementos de viga sem reforço de chapas de aço.

Além disso, foi utilizado os valores experimentais da resistência característica do concreto aos 28 dias e a carga necessária para atingir o valor da flecha admissível, obtida pelo ensaio de flexão em quatro pontos.

Os resultados obtidos por Deghenhard et al. (2016) no ensaio de compressão do concreto aos 28 dias são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - Resultados da resistência à compressão axial

Grupo A, B, C e D		Grupo E, F e G	
Corpos de prova (28 dias)	Tensão (MPa)	Corpos de prova (28 dias)	Tensão (MPa)
CP 4	24,1	CP 10	30,0
CP 5	26,5	CP 11	27,8
CP 6	25,0	CP 12	31,3
Média	25,2	Média	29,7
Desvio padrão	1,3	Desvio padrão	1,8

Fonte: Deghenhard et al, 2016

Segundo Pinheiro (2007), o valor da resistência à compressão característica do concreto é obtida através da relação: $f_{cm} - 1,65s$, em que f_{cm} é a resistência à compressão média e s é o desvio padrão, resultando em um f_{ck} de 23,06 MPa, para as vigas dos grupos A, B, C e D, e um f_{ck} de 26,73 MPa, para as vigas dos grupos E, F e G.

Os resultados obtidos por Deghenhard et al. (2016), no ensaio de flexão em quatro pontos, das cargas necessárias para atingir a flecha admissível (7,20 mm), nas vigas do grupo A, que são as de referência do primeiro uso da betoneira e sem reforço com chapas metálicas, são apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3 - Resultados vigas do grupo de referência A

Vigas	Carga (kN)	Flecha (mm)
A1	38,6	7,2
A2	42,8	7,2
A3	42,6	7,2
Média	41,4	-
Desvio padrão	2,4	-

Fonte: Deghenhard et al, 2016

Os resultados das cargas necessárias para atingir a flecha admissível nas vigas do grupo E, que são as de referência do segundo uso da betoneira e sem reforço com chapas metálicas, são apresentadas na Tabela 4.

Tabela 4 - Resultados vigas do grupo de referência E

Vigas	Carga (kN)	Flecha (mm)
E1	44,2	7,2
E2	46,0	7,2
E3	44,9	7,2
Média	45,0	-
Desvio padrão	0,9	-

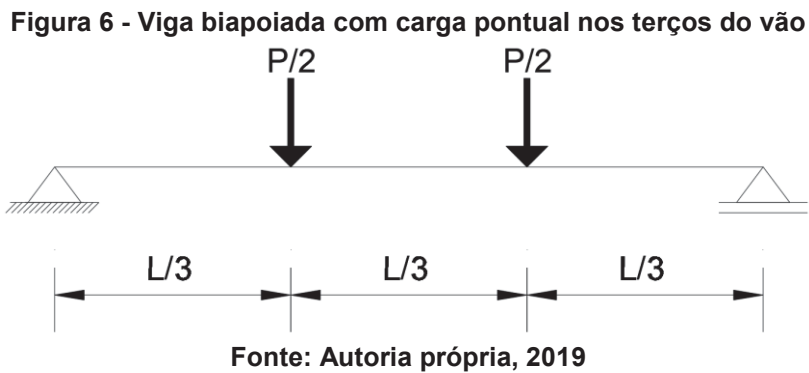
Fonte: Deghenhard et al, 2016

Neste trabalho, foi calculada a flecha imediata para uma mesma viga utilizando as metodologias de cálculo da NBR 6118 (2014), da ACI 318 (2014), do Eurocode 2 (2004) e do método Bilinear do CEB (1985), citados nos itens do capítulo 2 deste trabalho. Para isso foi utilizado os parâmetros das vigas ensaiadas por Deghenhard et al. (2016) e o valor da média dos carregamentos obtidos no ensaio de

flexão em quatro pontos nas vigas dos grupos de referência, apresentados nas Tabelas 3 e 4.

Os cálculos foram realizados com o f_{ck} adotado em projeto (25 MPa) e com os obtidos pelo ensaio de compressão, sendo eles 23,06 e 26,73 MPa.

A flecha imediata foi calculada para uma viga biapoiada com cargas pontuais localizadas nos terços do vão, conforme Figura 6, utilizando a Equação (36).



$$f = \frac{23 \times P \times L^3}{648 \times (EI)} \quad (36)$$

Em que:

f é a flecha imediata calculada;

P é a carga pontual aplicada;

L é o comprimento do vão teórico da viga;

(EI) é a rigidez do elemento estrutural de viga.

Logo, os dados utilizados nos cálculos foram divididos em quatro grupos. Os valores das dimensões da seção transversal da viga, vão teórico e da área de aço positiva e negativa são iguais em todos os grupos, sendo a diferença entre eles apenas o f_{ck} e o valor da carga aplicada.

O grupo 1 é composto pelo f_{ck} adotado em projeto e a carga aplicada é a média obtida pelo grupo A, de Deghenhard et al. (2016), apresentada na Tabela 3.

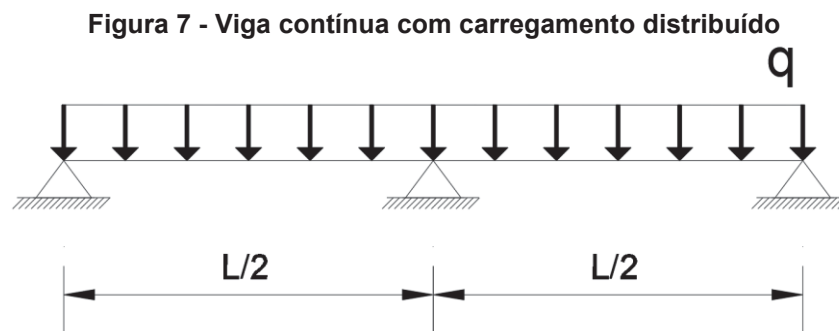
O grupo 2 também é constituído pelo f_{ck} de projeto, contudo a carga aplicada é a média obtida pelo grupo E, de Deghenhard et al. (2016), apresentada na Tabela 4.

O grupo 3 é composto pelos parâmetros experimentais obtidos no grupo A, sendo eles, a carga média e o f_{ck} obtido pelo ensaio de resistência à compressão aos 28 dias.

Por fim, o grupo 4 é constituído pela a carga média e o f_{ck} , obtidos no grupo E, de Deghenhard et al. (2016).

3.2 SEGUNDO ESTUDO: VIGA CONTÍNUA

A segunda análise consistiu no cálculo da flecha imediata de uma viga contínua, com carregamento distribuído, conforme Figura 7.



Fonte: Autoria própria, 2019

Entretanto, não foram encontrados estudos experimentais para realizar a análise comparativa desse tipo de viga e carregamento, logo realizou-se apenas uma verificação numérica.

O estudo é em relação ao item 17.3.2.1.1 da NBR 6118 (2014), o qual se refere ao momento fletor utilizado na expressão de rigidez equivalente, apresentada pela Equação (7) no item 2.2.1.1. A norma apenas apresenta que o momento adotado deve ser o valor máximo, não especificando se é em relação aos momentos negativos ou positivos, deixando sua interpretação em aberto. A configuração da viga adotada, para este estudo, foi escolhida de forma a se buscar uma maior amplitude entre os valores de momentos positivos e negativos, quando comparadas a vigas contínuas com maior número de tramos.

Com o auxílio do *software* Ftool, foi verificado o valor da flecha imediata de uma viga contínua de 10 m, com seção transversal de 20x50 cm com carregamento distribuído de 20 kN/m. Então, calculou-se duas inércias equivalentes, uma com o

valor do momento máximo positivo e outra com o máximo negativo, a fim de encontrar o valor da flecha imediata, através da Equação (37)

$$f = \frac{q \times L^4}{185 \times (EI)} \quad (37)$$

Em que:

f é a flecha imediata calculada;

q é o valor do carregamento distribuído;

L é o comprimento do vão teórico da viga;

(EI) é a rigidez do elemento estrutural de viga.

Após isso, efetuou-se a análise comparativa com o resultado obtido através do *software* para a mesma viga seccionada em três e doze partes. Os intervalos da subdivisão em três partes são os pontos onde o momento fletor é nulo, apresentados na Tabela 5.

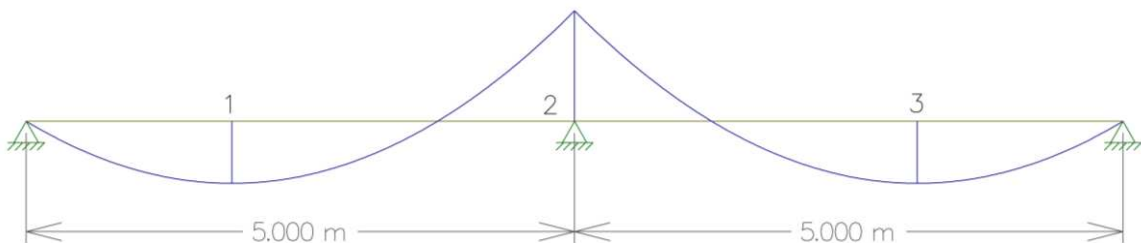
Tabela 5 - Intervalos de seccionamento na viga contínua (três partes)

Membro	Intervalo (m)
1	0,000 – 3,750
2	3,750 – 6,250
3	6,250 – 10,000

Fonte: Autoria própria, 2019

A Figura 8 exemplifica as três subdivisões realizadas na viga contínua.

Figura 8 – Diagrama de momento fletor da viga contínua subdividida (3 partes)



Fonte: Autoria própria, 2019

Os intervalos dos doze membros estão apresentados na Tabela 6.

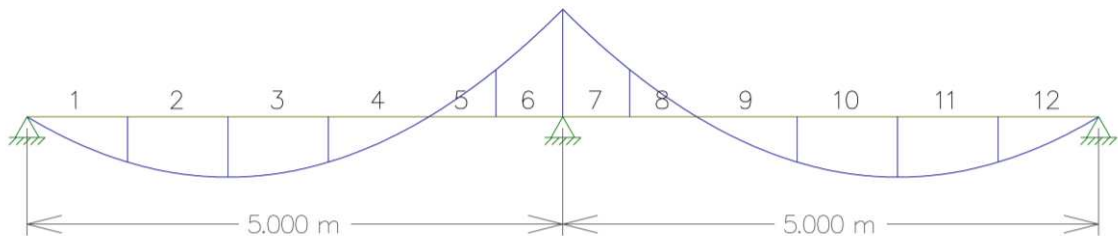
Tabela 6 - Intervalos de seccionamento na viga contínua (doze partes)

Membro	Intervalo (m)
1	0,000 – 0,938
2	0,938 – 1,875
3	1,875 – 2,813
4	2,813 – 3,750
5	3,750 – 4,375
6	4,375 – 5,000
7	5,000 – 5,625
8	5,625 – 6,250
9	6,250 – 7,188
10	7,188 – 8,125
11	8,125 – 9,063
12	9,063 – 10,000

Fonte: Autoria própria, 2019

A Figura 9 exemplifica as doze subdivisões realizadas na viga contínua para obter o valor de referência do estudo.

Figura 9 – Diagrama de momento fletor da viga contínua subdividida (12 partes)



Fonte: Autoria própria, 2019

Analogamente, foi calculada uma inércia equivalente para cada trecho fissurado, modificando na equação apenas o valor do momento fletor máximo da seção, e inserido no *software*, para então realizar as análises. Nos trechos não fissurados foi inserido o momento de inércia da seção bruta.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 PRIMEIRO ESTUDO: VIGA BIAPOIADA

Foi calculado a flecha imediata utilizando os valores de projeto e os obtidos experimentalmente por Deghenhard et al. (2016). Os grupos de dados utilizados nos cálculos para a viga em estudo são apresentados na Tabela 7.

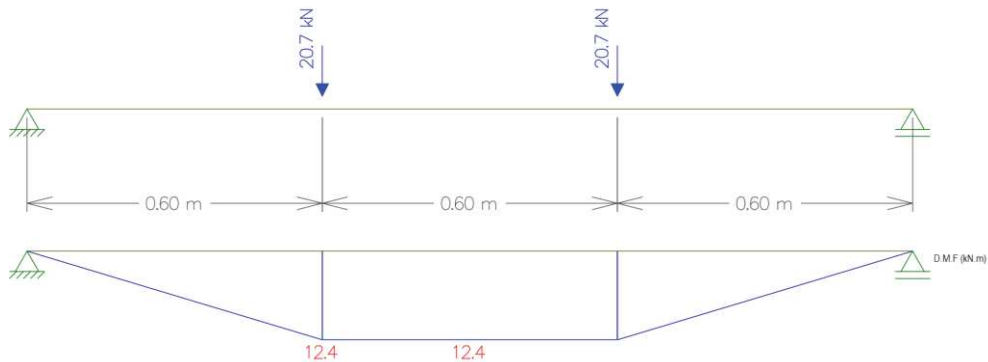
Tabela 7 – Dados da viga em estudo

Variável	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
b (cm)	12	12	12	12
h (cm)	20	20	20	20
f_{ck} (MPa)	25	25	23,06	26,73
L (cm)	180	180	180	180
A_s (cm ²)	1,6	1,6	1,6	1,6
A_s' (cm ²)	0,4	0,4	0,4	0,4
d (cm)	16	16	16	16
d' (cm)	4	4	4	4
P (kN)	41,4	45	41,4	45
E_s (GPa)	210	210	210	210

Fonte: Autoria própria, 2019

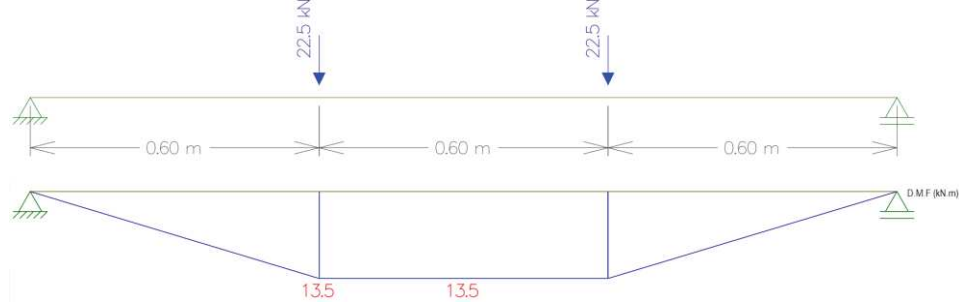
Foi aplicado metade da carga P , apresentada na Tabela 7, nos terços do vão da viga, 20,7 kN e 22,5 kN, assemelhando-se ao ensaio de flexão em quatro pontos. O diagrama de momento fletor apresentou um momento máximo de 12,4 $kN \times m$, conforme Figura 10, e 13,5 $kN \times m$, conforme Figura 11.

Figura 10 - Viga com carregamento A e diagrama de momento fletor



Fonte: Autoria própria, 2019

Figura 11 - Viga com carregamento E e diagrama de momento fletor



Fonte: Aatoria própria, 2019

4.1.1 Cálculos pela NBR 6118

Seguindo as etapas adotadas pela metodologia adotada na NBR 6118 (2014), apresentadas no item 2.2.1.1, para encontrar o valor da flecha imediata, tem-se os seguintes resultados.

A resistência à tração direta do concreto (f_{ct}) obtida com os valores do grupo 1 e 2 foi de 2,565 MPa. O resultado obtido com os valores do grupo 3 e 4 foram 2,430 MPa e 2,682 MPa, respectivamente.

Calculou-se os momentos de fissuração, a partir da Equação (2), e verificou-se se o momento que está ocorrendo na viga é maior que o momento de fissuração, certificando a condição de fissuração do elemento estrutural. A Tabela 8 apresenta os valores e a condição analisada.

Tabela 8 – Momentos de fissuração e estado das vigas estudadas

Dados	M_r ($kN \times m$)	M_a ($kN \times m$)	Condição
Grupo 1	3,078	12,400	Fissurada
Grupo 2	3,078	13,500	Fissurada
Grupo 3	2,916	12,400	Fissurada
Grupo 4	3,218	13,500	Fissurada

Fonte: Aatoria própria, 2019

A próxima etapa da metodologia é calcular o módulo de deformação secante, através da Equação (6), e para este é necessário o valor do módulo de elasticidade inicial (Equação (3)). Considerou-se que o concreto foi composto por agregados do tipo granito, sendo o valor do parâmetro α_E igual a 1. Os resultados obtidos nessa etapa são apresentados na Tabela 9.

Tabela 9 – Parâmetros do material

Dados	E_{ci} (MPa)	α_i	E_{cs} (MPa)
Grupo 1	28000,000	0,863	24150,000
Grupo 2	28000,000	0,863	24150,000
Grupo 3	26888,749	0,858	23060,799
Grupo 4	28952,596	0,867	25096,834

Fonte: Aatoria própria, 2019

A principal variável para a obtenção desse parâmetro é o valor da resistência à compressão característica do concreto. Percebe-se que a variação de quase 4 MPa entre o f_{ck} do grupo 3 e 4 resulta em uma diferença de aproximadamente 2036 MPa no módulo de deformação secante do concreto.

O cálculo da rigidez equivalente do elemento de viga, utilizado no cálculo da flecha, requer o valor do momento de inércia da seção fissurada (I_{II}), o qual foi calculado conforme apresentado no item 2.2.1.1 deste trabalho. Os resultados dos parâmetros são apresentados na Tabela 10.

Tabela 10 – Parâmetros calculados

Variável	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
δ	0,250	0,250	0,250	0,250
n	8,696	8,696	9,106	8,368
ρ	$8,333 \times 10^{-3}$	$8,333 \times 10^{-3}$	$8,333 \times 10^{-3}$	$8,333 \times 10^{-3}$
ρ'	$2,083 \times 10^{-3}$	$2,083 \times 10^{-3}$	$2,083 \times 10^{-3}$	$2,083 \times 10^{-3}$
ξ	0,312	0,312	0,318	0,308
k_{II}	0,044	0,044	0,046	0,043
I_{II} (cm^4)	2186,954	2186,954	2266,075	2122,829

Fonte: Aatoria própria, 2019

O resultado da rigidez equivalente, adotada pela NBR 6118 (2014) e calculado a partir da Equação (7) é apresentada na Tabela 11.

Tabela 11 – Rigidez equivalente da viga em estudo

Dados	$(EI)_{eq,t0}$ ($kN \times m^2$)
Grupo 1	549,620
Grupo 2	544,788
Grupo 3	539,774
Grupo 4	552,747

Fonte: Aatoria própria, 2019

Portanto, com todos os parâmetros calculados, foi verificado o valor da flecha imediata, a partir da Equação (36). Os resultados obtidos estão dispostos na Tabela 12.

Tabela 12 – Flecha imediata pela NBR 6118

Dados	f (mm)
Grupo 1	7,796
Grupo 2	8,549
Grupo 3	7,938
Grupo 4	8,426

Fonte: Autoria própria, 2019

Em comparação ao valor da flecha experimental, 7,20 mm, o maior valor obtido (grupo 2) é, aproximadamente, 19% maior, logo, a metodologia adotada pela NBR 6118 (2014) é segura. O menor valor (grupo 1) é, aproximadamente, 8% maior.

4.1.2 Cálculos pela ACI 318

Acompanhando as etapas da metodologia adotada na ACI 318 (2014), apresentadas no item 2.2.1.2, para encontrar o valor da flecha imediata, tem-se os seguintes resultados.

Para o cálculo do momento de fissuração (M_{cr}), pela Equação (16), é preciso encontrar o valor do módulo de ruptura (f_r) pela Equação (17) e, para este, deve ser considerado um fator de modificação (λ), o qual leva em conta a composição do agregado presente no concreto.

De acordo com a Tabela 1 o valor adotado será para um concreto de peso normal, logo λ é igual a 1. A Tabela 13 apresenta os valores calculados para f_r , M_{cr} e a verificação em relação ao momento que está ocorrendo na viga ser maior que o momento de fissuração, certificando a condição de fissuração do elemento.

Tabela 13 – Resultados da variáveis e condição da viga

Dados	f_r (MPa)	M_r (kN × m)	M_a (kN × m)	Condição
Grupo 1	3,100	2,480	12,400	Fissurada
Grupo 2	3,100	2,480	13,500	Fissurada
Grupo 3	2,977	2,382	12,400	Fissurada
Grupo 4	3,205	2,564	13,500	Fissurada

Fonte: Autoria própria, 2019

O módulo de elasticidade (E_c), Equação (18), depende apenas da resistência à compressão do concreto. A Tabela 14 exhibe os resultados obtidos.

Tabela 14 – Módulo de elasticidade

Dados	E_c (MPa)
Grupo 1	23500,000
Grupo 2	23500,000
Grupo 3	22567,343
Grupo 4	24299,500

Fonte: Autoria própria, 2019

Assim como a NBR 6118 (2014), a resistência característica do concreto é fator determinante para essa variável, logo percebe-se uma diferença de aproximadamente 1732 MPa no módulo de elasticidade do concreto.

Para o cálculo do momento de inércia equivalente do elemento fissurado, é necessário o valor do momento de inércia da seção fissurada (I_{cr}), o qual foi calculado conforme apresentado no item 2.2.1.1 deste trabalho. Os resultados dos parâmetros são apresentados na Tabela 15.

Tabela 15 – Parâmetros calculados

Variável	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
δ	0,250	0,250	0,250	0,250
n	8,936	8,936	9,305	8,642
ρ	$8,333 \times 10^{-3}$	$8,333 \times 10^{-3}$	$8,333 \times 10^{-3}$	$8,333 \times 10^{-3}$
ρ'	$2,083 \times 10^{-3}$	$2,083 \times 10^{-3}$	$2,083 \times 10^{-3}$	$2,083 \times 10^{-3}$
ξ	0,315	0,315	0,320	0,311
k_{II}	0,045	0,045	0,047	0,044
I_{cr} (cm ⁴)	2233,441	2233,441	2303,986	2176,554

Fonte: Autoria própria, 2019

O resultado do momento de inércia equivalente, calculados pela Equação (15) e adotado pela ACI 318 (2014), é apresentado na Tabela 16.

Tabela 16 – Momento de inércia equivalente da viga em estudo

Dados	I_e (cm^4)
Grupo 1	2279,574
Grupo 2	2269,191
Grupo 3	2344,341
Grupo 4	2216,468

Fonte: Aatoria própria, 2019

Logo, a partir da Equação (36) foi verificado o valor da flecha imediata. Os resultados obtidos estão dispostos na Tabela 17.

Tabela 17 – Flecha imediata pela ACI 318

Dados	f (mm)
Grupo 1	7,999
Grupo 2	8,734
Grupo 3	8,099
Grupo 4	8,648

Fonte: Aatoria própria, 2019

Em comparação ao valor da flecha obtida através do ensaio, 7,20 mm, o maior valor obtido (grupo 2) é, aproximadamente, 21% maior. Assim sendo, a metodologia adotada pela ACI 318 (2014) apresentaram flechas maiores que a experimental e maiores que os valores obtidos pelos cálculos da NBR 6118 (2014), apesar de ambas as normas adotarem a proposta de Branson. O menor valor (grupo 1) é, aproximadamente, 11% maior.

4.1.3 Cálculos pelo Eurocode 2

A partir das etapas apresentadas no item 2.2.3 da metodologia adotada pela norma europeia, para encontrar o valor da flecha imediata, tem-se os seguintes resultados.

Os valores obtidos da resistência à tração direta do concreto (f_{ctm}), Equação (34), com os dados dos grupos 1 e 2 foram de 2,565 MPa e dos grupos 3 e 4 foram de 2,430 MPa e 2,682 MPa, respectivamente.

Foi calculado os momentos de fissuração (Equação (33)) e verificado a condição de fissuração. A Tabela 18 apresenta os valores e a condição analisada.

Tabela 18 – Momentos de fissuração e estado das vigas estudadas

Dados	M_r ($kN \times m$)	M_a ($kN \times m$)	Condição
Grupo 1	2,052	12,400	Fissurada
Grupo 2	2,052	13,500	Fissurada
Grupo 3	1,944	12,400	Fissurada
Grupo 4	2,146	13,500	Fissurada

Fonte: Autoria própria, 2019

Verificou-se que em todos os casos a viga está fissurada, logo é preciso calcular o coeficiente de distribuição (ζ), através da Equação (32), para dar continuação ao cálculo da flecha.

O coeficiente de distribuição depende de um parâmetro β , o qual leva em consideração a duração do carregamento. Neste caso foi adotado o valor para cargas de longa duração, logo β vale 0,5. Além disso, também depende dos valores de momentos atuantes na viga e do momento de fissuração, os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 19.

Tabela 19 – Coeficiente de distribuição

Dados	ζ
Grupo 1	0,986
Grupo 2	0,988
Grupo 3	0,988
Grupo 4	0,987

Fonte: Autoria própria, 2019

O módulo de elasticidade secante (Equação (35)) depende do tipo de agregado graúdo presente no concreto. Considerou-se que o concreto foi composto por agregados do tipo granito, logo não é preciso reduzir nem aumentar o valor obtido através da Equação. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 20.

Tabela 20 – Módulo de elasticidade secante

Dados	E_{cm} (GPa)
Grupo 1	31,476
Grupo 2	31,476
Grupo 3	30,907
Grupo 4	31,962

Fonte: Aatoria própria, 2019

Assim como a NBR 6118 (2014) e a ACI 318 (2014), a principal variável para a obtenção desse parâmetro é o valor da resistência à compressão característica do concreto. Da mesma forma, a variação de quase 4 MPa entre o f_{ck} do grupo 3 e 4 resulta em uma diferença de aproximadamente 1055 MPa no módulo de elasticidade secante do concreto, a menor diferença entre as três metodologias utilizadas até agora.

O cálculo da flecha imediata pelo Eurocode 2 (2004) possui duas parcelas. O parâmetro α_I é calculado considerando o elemento não fissurado, logo o momento de inércia utilizado na Equação (36) é o da seção bruta de concreto. O valor de α_{II} é determinado para um elemento totalmente fissurado, o qual utiliza o momento de inércia da seção fissurada (I_{II}), calculado conforme apresentado no item 2.2.1.1 deste trabalho. A Tabela 21 apresenta os valores encontrados para os parâmetros utilizados no cálculo do I_{II} .

Tabela 21 – Parâmetros calculados

Variável	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
δ	0,250	0,250	0,250	0,250
n	6,672	6,672	6,794	6,570
ρ	$8,333 \times 10^{-3}$	$8,333 \times 10^{-3}$	$8,333 \times 10^{-3}$	$8,333 \times 10^{-3}$
ρ'	$2,083 \times 10^{-3}$	$2,083 \times 10^{-3}$	$2,083 \times 10^{-3}$	$2,083 \times 10^{-3}$
ξ	0,281	0,281	0,283	0,279
k_{II}	0,036	0,036	0,037	0,036
I_{II} (cm ⁴)	1776,918	1776,918	1802,826	1755,377

Fonte: Aatoria própria, 2019

Através da Equação (31) a flecha da seção em análise é apresentada na Tabela 22, assim como as flechas do elemento não fissurado e totalmente fissurado.

Tabela 22 – Flecha imediata pelo Eurocode 2

Dados	α_I (mm)	α_{II} (mm)	α (mm)
Grupo 1	1,702	7,661	7,580
Grupo 2	1,850	8,327	8,253
Grupo 3	1,733	7,690	7,617
Grupo 4	1,821	8,301	8,220

Fonte: Aatoria própria, 2019

Assim como as metodologias calculadas anteriormente, os valores obtidos são maiores que o da flecha experimental. Contudo, neste caso, o menor resultado obtido (grupo 1) é apenas 5,28% maior que o valor experimental. Os cálculos em que foram empregados os dados do grupo 3 apresentaram um valor de flecha 5,79% maior que o experimental, sendo uma diferença pequena comparado aos resultados obtidos pelas outras metodologias.

O maior valor obtido (grupo 2) é, aproximadamente, 15% maior. Logo, a metodologia adotada pelo Eurocode 2 (2004), em comparação aos resultados da NBR 6118 e da ACI 318, é a que mais se aproximou dos valores obtidos na prática.

4.1.4 Cálculos pelo Método Bilinear

O método Bilinear, apresentado pelo CEB (1985), é semelhante à metodologia adotada pela norma europeia. Os cálculos realizados, conforme apresentado no item 2.2.2, forneceram os resultados a seguir.

Os valores obtidos da resistência à tração direta do concreto (f_{ct}), pela Equação (29), foram de 2,579 MPa, com os valores dos grupos 1 e 2, 2,443 MPa e 2,696 MPa, do grupo 3 e 4, respectivamente.

O módulo de deformação secante (E_{cs}) (Equação (30)), depende apenas da resistência à compressão característica do concreto. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 23.

Tabela 23 – Módulo de deformação secante

Dados	E_{cm} (GPa)
Grupo 1	30,472
Grupo 2	30,472
Grupo 3	29,861
Grupo 4	30,995

Fonte: Aatoria própria, 2019

Semelhantemente ao Eurocode 2 (2004), a variação de quase 4 MPa entre o f_{ck} do grupo 3 e 4 resulta em uma diferença de 1134 MPa no módulo de deformação secante do concreto.

O valor do momento de fissuração (Equação (28)) depende de um parâmetro que compõe a rigidez no estágio 1. Por isso, a Tabela 24 apresenta os resultados das variáveis adimensionais que constituem as equações de rigidez, calculados a partir das equações (11), (12), (13) e (14), respectivamente.

Tabela 24 – Parâmetros calculados

Variável	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
δ	0,250	0,250	0,250	0,250
n	6,892	6,892	7,033	6,775
ρ	$8,333 \times 10^{-3}$	$8,333 \times 10^{-3}$	$8,333 \times 10^{-3}$	$8,333 \times 10^{-3}$
ρ'	$2,083 \times 10^{-3}$	$2,083 \times 10^{-3}$	$2,083 \times 10^{-3}$	$2,083 \times 10^{-3}$

Fonte: Aatoria própria, 2019

A Tabela 25 expõe os valores obtidos para a rigidez do elemento não fissurado, no estágio I, calculados pelas equações (22), (23) e (24).

Tabela 25 – Rigidez estágio I

Variável	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
ξ	0,6372	0,6372	0,6375	0,6370
k_I	0,1727	0,1727	0,1729	0,1725
K_I ($kN \times m^2$)	2585,970	2585,970	2537,047	2627,892

Fonte: Aatoria própria, 2019

A Tabela 26 expõe os valores obtidos para a rigidez do elemento fissurado, no estágio II, calculados a partir das equações (25), (26) e (27).

Tabela 26 – Rigidez estádio II

Variável	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
ξ	0,2849	0,2849	0,2872	0,2829
k_I	0,0371	0,0371	0,0377	0,0366
$K_I (kN \times m^2)$	555,570	555,570	553,228	557,532

Fonte: Autoria própria, 2019

Com os parâmetros da Tabela 25 é possível calcular o momento de fissuração (M_r), cujo valor e condição de fissuração é apresentado na Tabela 27.

Tabela 27 – Momentos de fissuração e estado das vigas estudadas

Dados	$M_r (kN \times m)$	$M_a (kN \times m)$	Condição
Grupo 1	2,232	12,400	Fissurada
Grupo 2	2,224	13,500	Fissurada
Grupo 3	2,232	12,400	Fissurada
Grupo 4	2,331	13,500	Fissurada

Fonte: Autoria própria, 2019

Verificou-se que em todos os casos a viga está fissurada, logo é preciso calcular o coeficiente de distribuição (ζ) (Equação (21)) para dar continuação ao cálculo da flecha. O coeficiente de distribuição depende de dois parâmetros β , em que β_1 é o fator que considera a qualidade das barras de aço e β_2 considera a influência da duração do carregamento.

Neste caso, β_1 foi adotado como 1, pois são barras de alta aderência (com nervuras) e β_2 foi considerado como cargas de longa duração, logo 0,5. Além disso, também depende dos valores de momentos atuantes na viga e do momento de fissuração, os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 28.

Tabela 28 – Coeficiente de distribuição

Dado	ζ
Grupo 1	0,910
Grupo 2	0,917
Grupo 3	0,915
Grupo 4	0,914

Fonte: Autoria própria, 2019

Através da Equação (19), a flecha da seção em análise é apresentada na Tabela 29, assim como as flechas no estádio I e II.

Tabela 29 – Flecha imediata pelo Método Bilinear

Dado	a_I (mm)	a_{II} (mm)	a (mm)
Grupo 1	1,657	7,713	7,168
Grupo 2	1,801	8,383	7,839
Grupo 3	1,689	7,745	7,228
Grupo 4	1,772	8,354	7,786

Fonte: Autoria própria, 2019

Diferentemente das metodologias estudadas, nem todos os valores obtidos para a flecha imediata são maiores que o da flecha experimental, 7,20 mm. Em comparação ao Eurocode 2 (2004), os valores encontrados pelo método Bilinear do CEB (1985) são próximos.

Nessa metodologia, o resultado obtido no grupo 1 é 0,44% menor que o valor experimental. Os cálculos em que foram empregados os dados do grupo 3 apresentaram um valor de flecha 0,39% maior que o admissível, sendo a menor diferença em relação aos resultados obtidos pelas outras metodologias.

O maior valor obtido (grupo 2) é, aproximadamente, 9% maior. Logo, o método Bilinear é a metodologia que mais se aproximou do valor obtido experimentalmente.

4.1.5 Análise comparativa

Portanto, com os cálculos efetuados a partir das metodologias estudadas encontrou-se os valores de flecha imediata demonstrados e discutidos nos itens anteriores e resumidos na Tabela 30.

Tabela 30 - Resultados calculados

Dado	Flecha (mm)			Método Bilinear
	NBR 6118	ACI 318	Eurocode 2	
Grupo 1	7,96	7,999	7,580	7,168
Grupo 2	8,549	8,734	8,253	7,839
Grupo 3	7,938	8,099	7,617	7,228
Grupo 4	8,426	8,648	8,220	7,786

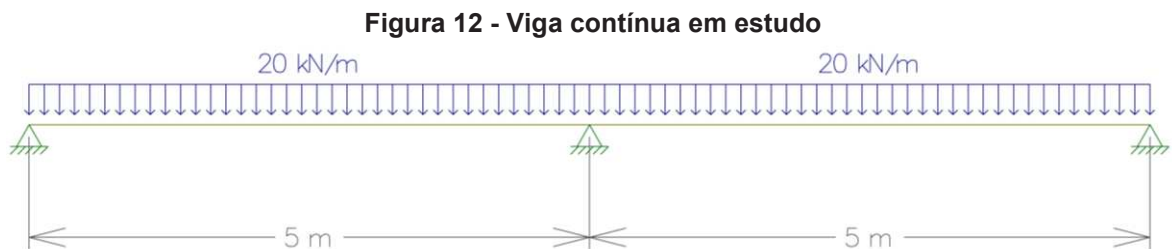
Fonte: Autoria própria, 2019

Logo, fica claro que os cálculos que resultaram valores de flechas mais próximas ao valor experimental (7,20 mm) foram através do Método Bilinear do CEB (1985).

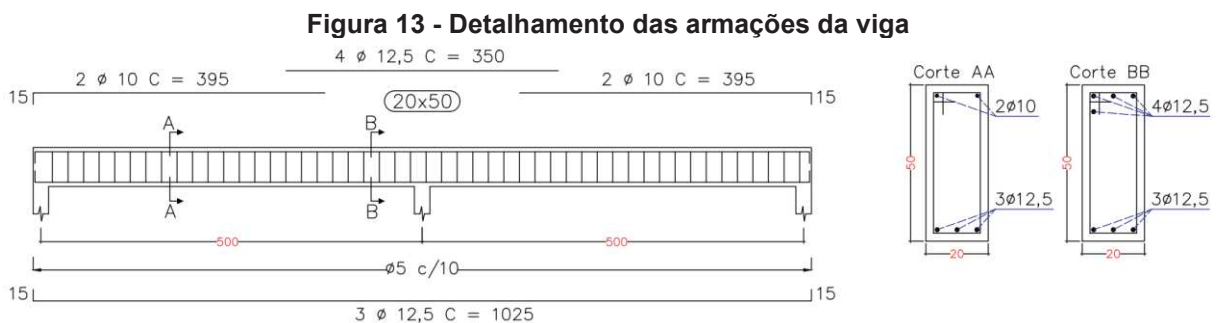
4.2 SEGUNDO ESTUDO: VIGA CONTÍNUA

4.2.1 Dimensionamento da viga contínua

A viga em estudo possui seção transversal de 20x50 cm, 10 metros de comprimento e carga distribuída de 20 kN/m. A Figura 12 apresenta a viga em estudo, no *software* Ftool.

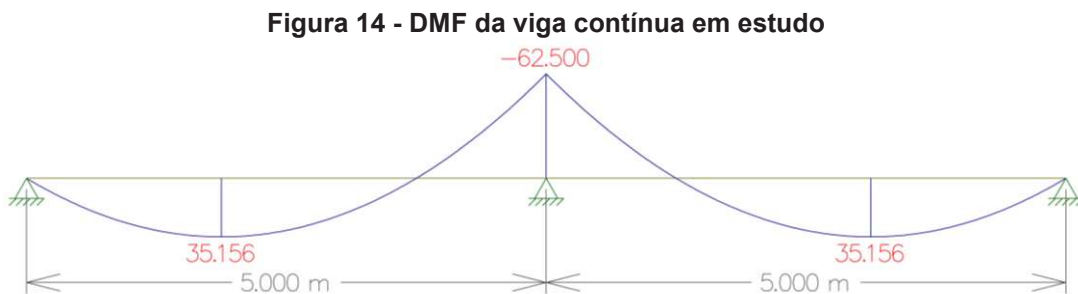


O dimensionamento foi realizado conforme sugerido pela NBR 6118 (2014), em que o f_{ck} adotado foi de 20 MPa, aço CA-50 para as armaduras longitudinais e CA-60 para os estribos. A área de aço positiva resultou em 3 barras de 12,5 mm ($A_s = 3,68 \text{ cm}^2$) e a negativa em 2 barras de 10 mm ($A_s = 1,57 \text{ cm}^2$), contudo, no trecho em que há apenas a presença de momento negativo é preciso que a área de aço negativa seja maior, para suportar os esforços, logo adotou-se 4 barras de 12,5 mm ($A_s = 4,91 \text{ cm}^2$). Os estribos, de 5 mm, estão distribuídos a cada 10 cm. A Figura 13 apresenta o detalhamento das armações dimensionadas para a viga em estudo e os cortes AA e BB são as seções transversais de referência para os cálculos, as medidas estão em centímetros.



4.2.2 Flecha imediata da viga contínua segundo a NBR 6118

Segundo a metodologia adotada pela NBR 6118 (2014), o item em que se refere a equação de rigidez equivalente apresenta que o momento fletor utilizado é o valor máximo. As vigas contínuas apresentam momentos positivos e negativos, logo, há valores máximos em ambos os sinais. O diagrama de momento fletor (DMF) da viga em estudo é apresentado na Figura 14.



Foi calculado o valor da flecha imediata da viga, cujo dimensionamento e detalhamento foi apresentada no item 4.2.1, substituindo na equação de rigidez do elemento estrutural de viga em estudo, o momento máximo positivo, $M_a = 35,156 \text{ kN} \times \text{m}$, e o momento máximo negativo, $M_a = 62,500 \text{ kN} \times \text{m}$. A Tabela 31 apresenta os dados utilizados nos dois cálculos, considerando as seções de referência A e B, conforme disposto na Figura 13.

Tabela 31 – Dados da viga em estudo

Variável	Seção A	Seção B
b (cm)	20	20
h (cm)	50	50
f_{ck} (MPa)	20	20
L (cm)	500	500
A_s (cm ²)	3,68	3,68
A_s' (cm ²)	1,57	4,91
d (cm)	46	46
d' (cm)	4	4
q (kN/m)	20	20
M_a (kN×m)	35,156	62,500
E_s (GPa)	210	210

Fonte: Autoria própria, 2019

Em ambos os cálculos a resistência à tração direta do concreto (f_{ct}) obtida foi de 2,210 MPa. O momento de fissuração (M_r) resultou em 27,63 $kN \times m$ e foi certificado que a viga está fissurada, pois tanto o momento máximo positivo quanto o máximo negativo são maiores que o momento de fissuração.

Para o cálculo do módulo de elasticidade inicial (E_{ci}), considerou-se que a viga é composta por agregados graníticos, sendo o parâmetro α_E igual a 1. Assim sendo, E_{ci} resultou em 25043,961 MPa, α_i em 0,850 e o módulo de deformação secante (E_{cs}) em 21287,367 MPa.

Seguindo a metodologia apresentada em 2.2.1.1, foi calculado o momento de inércia da seção fissurada (I_{II}), em que os resultados dos dimensionais estão dispostos na Tabela 32.

Variável	Seção A	Seção B
δ	0,087	0,087
n	9,865	9,865
ρ	$4,000 \times 10^{-3}$	$4,000 \times 10^{-3}$
ρ'	$1,707 \times 10^{-3}$	$5,337 \times 10^{-3}$
ξ	0,235	0,219
k_{II}	0,028	0,028
$I_{II} (cm^4)$	54095,250	55458,449

Fonte: Autoria própria, 2019

Com isso, a rigidez equivalente e a flecha imediata calculada através da Equação (37), utilizando os dados da seção A e B da viga em estudo, são apresentadas na Tabela 33.

Tabela 33 – Rigidez equivalente e flecha imediata

Dados	$(EI)_{eq,t0} (kN \times m^2)$	$f (mm)$
Seção A	27454,745	2,461
Seção B	14617,362	4,622

Fonte: Autoria própria, 2019

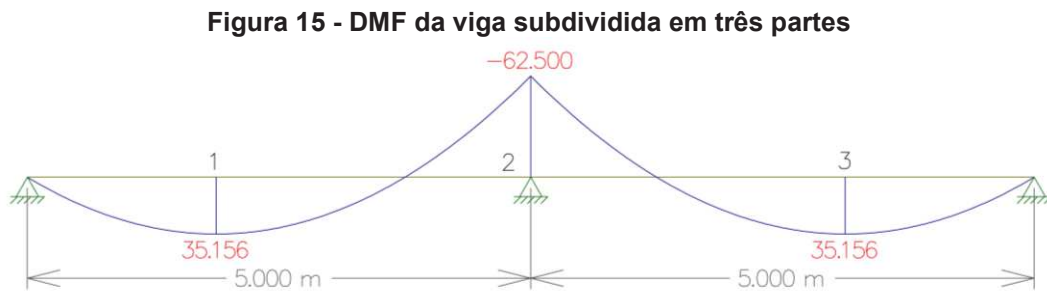
De acordo com a NBR 6118 (2014), a flecha admissível é $L/250$, portanto, neste caso o valor máximo que a flecha pode atingir é 20 mm. Ambos os resultados

calculados são menores que o admissível, restando assim comparar com os valores de referência obtidos com a viga subdividida em três e doze partes.

4.2.3 Viga subdividida em três partes

Um dos resultados de referência para as comparações com os resultados obtidos no item 4.2.2, foi obtido subdividindo a viga em estudo em três partes, os intervalos de seccionamento foram apresentados na Tabela 5. Cada trecho da viga recebeu, no *software* Ftool, o valor correspondente da rigidez equivalente.

A Figura 15 exibe o diagrama de momento fletor (DMF) da viga subdividida em três partes, em que é possível evidenciar o momento máximo de cada trecho para utilizar no cálculo da rigidez equivalente.



Verificou-se que o momento máximo de cada intervalo é maior que o momento máximo de fissuração ($M_r = 27,63 \text{ kN} \times \text{m}$), logo, a viga está fissurada. Os parâmetros utilizados no cálculo da rigidez equivalente estão dispostos na Tabela 34.

Tabela 34 – Parâmetros calculados

Variável	Trecho		
	1	2	3
δ	0,087	0,087	0,087
n	9,865	9,865	9,865
ρ	$4,000 \times 10^{-3}$	$4,000 \times 10^{-3}$	$4,000 \times 10^{-3}$
ρ'	$1,707 \times 10^{-3}$	$5,337 \times 10^{-3}$	$1,707 \times 10^{-3}$
ξ	0,235	0,219	0,235
k_{II}	0,028	0,028	0,028
$I_{II} \text{ (cm}^4\text{)}$	54095,250	55458,449	54095,250

Fonte: Aatoria própria, 2019

Com isso, a rigidez equivalente de cada membro é exibida na Tabela 35.

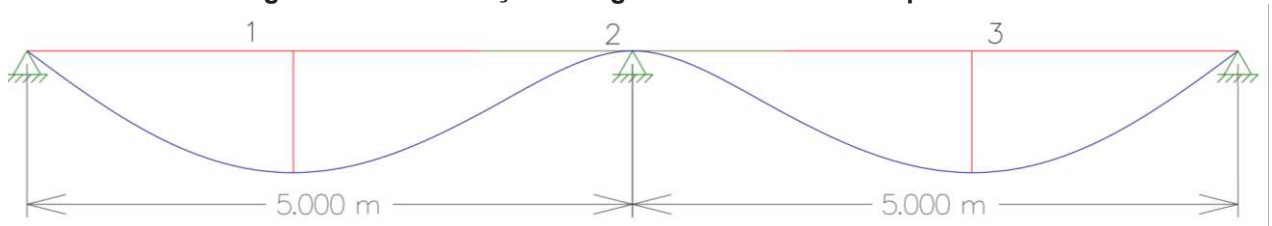
Tabela 35 – Rigidez equivalente

Trecho	$(EI)_{eq,t0}$ ($kN \times m^2$)
1	27454,745
2	14617,362
3	27454,745

Fonte: A autoria própria, 2019

Analisando os resultados obtidos pelo *software*, verificou-se que o valor da flecha imediata é 2,986 mm, valor próximo ao resultado obtido com os parâmetros da seção A, do item anterior. A Figura 16 apresenta a configuração deformada da viga contínua subdividida em três partes, evidenciando o local da flecha verificada.

Figura 16 – Deformação da viga subdividida em três partes



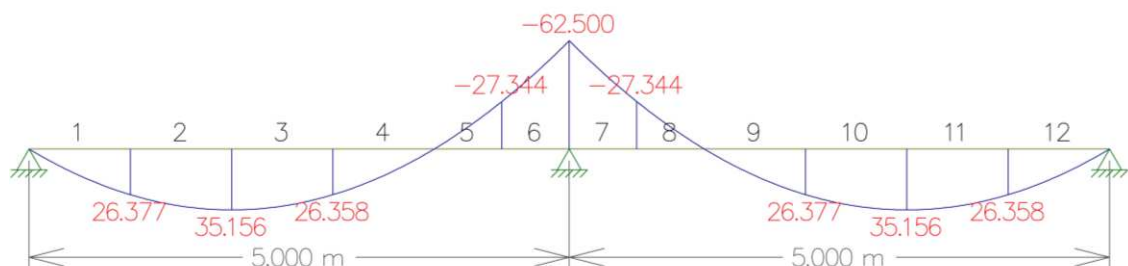
Fonte: A autoria própria, 2019

4.2.4 Viga subdividida em doze partes

O segundo resultado de referência é obtido com a subdivisão da viga em doze partes cujos intervalos foram apresentados na Tabela 6. Analogamente ao item 4.2.3, cada trecho da viga recebeu, no *software* Ftool, o valor correspondente da rigidez.

A Figura 17 exibe o diagrama de momento fletor (DMF) da viga subdividida em doze partes.

Figura 17 - DMF da viga subdividida em doze partes



Fonte: A autoria própria, 2019

A Tabela 36 apresenta os momentos máximos considerados nos cálculos para cada trecho da viga em estudo. Além disso, foi comparado o momento atuante com o momento de fissuração ($M_T = 27,63 \text{ kN} \times \text{m}$) para certificar se a viga está fissurada naquele trecho, ou não.

Tabela 36 – Momentos máximos e condição do trecho

Trecho	$M_a \text{ (kN} \times \text{m)}$	Condição
1	26,377	Não fissurado
2	35,156	Fissurado
3	35,156	Fissurado
4	26,358	Não fissurado
5	27,344	Não fissurado
6	62,500	Fissurado
7	62,500	Fissurado
8	27,344	Não fissurado
9	26,377	Não fissurado
10	35,156	Fissurado
11	35,156	Fissurado
12	26,358	Não fissurado

Fonte: Autoria própria, 2019

Os parâmetros calculados de cada trecho fissurado, para obter o momento de inércia da seção fissurada, são exibidos na Tabela 37, em que se modificam os trechos 6 e 7, devido a área de aço negativa ser da seção B e os demais da seção A.

Tabela 37 – Parâmetros calculados

Trecho	Variáveis						
	δ	n	ρ	ρ'	ξ	k_{II}	$I_{II} \text{ (cm}^4\text{)}$
2	0,087	9,865	$4,000 \times 10^{-3}$	$1,707 \times 10^{-3}$	0,235	0,028	54095,250
3	0,087	9,865	$4,000 \times 10^{-3}$	$1,707 \times 10^{-3}$	0,235	0,028	54095,250
6	0,087	9,865	$4,000 \times 10^{-3}$	$5,337 \times 10^{-3}$	0,219	0,028	55458,449
7	0,087	9,865	$4,000 \times 10^{-3}$	$5,337 \times 10^{-3}$	0,219	0,028	55458,449
10	0,087	9,865	$4,000 \times 10^{-3}$	$1,707 \times 10^{-3}$	0,235	0,028	54095,250
11	0,087	9,865	$4,000 \times 10^{-3}$	$1,707 \times 10^{-3}$	0,235	0,028	54095,250

Fonte: Autoria própria, 2019

Com isso, a rigidez equivalente de cada membro é exibida na Tabela 38.

Tabela 38 – Rigidez equivalente

Trecho	$(EI)_{eq,t0} (kN \times m^2)$
2	27454,745
3	27454,745
6	14617,362
7	14617,362
10	27454,745
11	27454,745

Fonte: Autoria própria, 2019

As rigidezes dos trechos não fissurados (1, 4, 5, 8, 9 e 12) é o resultado do produto entre o módulo de deformação secante ($E_{cs} = 21287,367$ MPa) e o momento de inércia da seção bruta de concreto ($I_c = 208333,333$ cm⁴), resultando em $E_{cs}I_c = 44348,628$ kN × m²

Analisando os resultados obtidos pelo *software*, verificou-se que o valor da flecha imediata é 2,796 mm. A Figura 18 apresenta a configuração deformada da viga contínua subdividida em doze partes, evidenciando o local em que a flecha que foi verificada.



Fonte: Autoria própria, 2019

Mesmo com a influência do momento negativo causando fissuração na parte superior da viga e, conseqüentemente, aumentando a rotação em função da diminuição da inércia no local do momento negativo, percebe-se que o resultado obtido utilizando o momento máximo positivo na Equação da rigidez equivalente adotada pela NBR 6118 (2014), é o que mais se aproxima dos valores de referência.

5 CONCLUSÃO

A partir dos resultados obtidos no estudo da flecha de uma viga biapoiada, conclui-se que todas as metodologias estudadas apresentam considerações próprias, as quais moldam os resultados de acordo com o grau de detalhes empregados nos cálculos. Ou seja, metodologias que possuem os procedimentos de cálculo baseado na mesma Equação tiveram resultados próximos, porém diferentes.

Isso ocorreu entre a NBR 6118 (2014) e a ACI 318 (2014), em que ambas as normas adotam a proposta de Branson, contudo as normas fazem considerações diferentes em relação aos parâmetros dos materiais, ocasionando as diferenças nos resultados. O mesmo ocorre entre o Eurocode 2 (2004) e o Método Bilinear do CEB (1985), em que a diferença primordial é que a norma europeia considera de um modo mais simples a flecha do elemento não fissurado, enquanto o método Bilinear faz várias considerações e utiliza variáveis adimensionais para adequar o valor.

Dessa forma, conclui-se que a metodologia mais precisa é o Método Bilinear, apresentado pelo CEB (1985), e o emprego de equações que substituam o uso gráfico aumentou o grau de confiabilidade em seus resultados. Mas, isso não significa que as metodologias adotadas pelas normas brasileira, americana e europeia não possuam credibilidade, ao contrário, seus resultados demonstram que existe um fator de segurança para os projetistas.

Dos resultados do estudo de flechas de vigas contínuas, esclarece-se aos projetistas que mesmo o maior valor de momento fletor atuante ao longo da extensão da viga seja um valor negativo, o valor a ser utilizado nos cálculos da rigidez equivalente do elemento fissurado e então obter o valor da flecha é o momento máximo positivo.

REFERÊNCIAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 318M: Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318M-14) and Commentary (ACI 318RM-14)**. Farmington Hills, 2014.

ARAÚJO, José Milton de. **CURSO DE CONCRETO ARMADO**. 3. ed. Rio Grande: Dunas, 2010. v.2.

ARAÚJO, José Milton de. Fórmulas práticas para cálculo de flechas de vigas de concreto armado. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**, Rio Grande, n. 18, p.63-70, nov. 2011.

ARAÚJO, José Milton de. Improvement of the ACI method for calculation of deflections of reinforced concrete beams. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**, Rio Grande, n. 7, p.49-60, set. 2005.

ARAÚJO, José Milton de. Processos simplificados para cálculo de flechas de vigas de concreto armado. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**, Rio Grande, n. 5, p.1-10, ago. 2004.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**. 3 ed. Rio de Janeiro, 2014. 238 p.

BANDINI, Pedro Alexandre Conde. **A consideração da não-linearidade física no cálculo de flecha em vigas de concreto armado**. 2015. 150 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON (FIB). **CEB-FIP Model Code 2010: Final draft, bulletin 66**. Vol 2. Lausanne, Switzerland, 2012.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON (CEB). **Design manual on cracking and deformations**. Lausanne: École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1985.

DEGHENHARD, C. C. et al. Análise experimental de distintas configurações de chapa metálica no reforço à flexão em vigas de concreto armado. **Revista Alconpat**, [s.l.], v. 6, n. 2, p.190-201, 31 maio 2016. Revista ALCONPAT.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings.** Brussels - Belgium, 2004.

JUNGES, E.; LA ROVERE, H. L.. Comparação entre modelos simplificados e de elementos finitos para flecha imediata em vigas contínuas de concreto armado. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, São Paulo, v. 10, n. 2, p.415-450, abr. 2017.

JUNGES, Elisabeth. **Estudo comparativo entre métodos simplificados e modelos de elementos finitos não lineares para o cálculo de flecha imediata em vigas de concreto armado.** 2011. 361 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

OLIVEIRA, D.M.; SILVA, N.A.. Avaliação da eficiência da inércia equivalente de Branson para considerar a não-linearidade física das vigas de forma simplificada. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, São Paulo, v. 4, n. 3, p.530-547, ago. 2011.

PINHEIRO, Libânio M. **Fundamentos do concreto e projeto de edifícios.** Apostila da Escola de Engenharia de São Carlos da USP, 2007.