

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA E DE
MATERIAIS**

ALEXANDRE GUILHERME DE LARA

**FAST CRACK BOUNDS:
ESTIMATIVA DE COTA SUPERIOR E SOLUÇÃO NUMÉRICA A
EVOLUÇÃO DE TRINCAS EM MODELOS DE TENSÃO CONSTANTE**

TESE

**CURITIBA
2020**

ALEXANDRE GUILHERME DE LARA

**FAST CRACK BOUNDS:
ESTIMATIVA DE COTA SUPERIOR E SOLUÇÃO NUMÉRICA A
EVOLUÇÃO DE TRINCAS EM MODELOS DE TENSÃO CONSTANTE**

**Fast Crack Bounds: Estimation of Upper Bound and Numeric Solution of Cracks
Propagation Under Constant Stress Models**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Engenharia, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

CURITIBA

2020



Esta licença permite download e compartilhamento do trabalho desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es), sem a possibilidade de alterá-lo ou utilizá-lo para fins comerciais.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Lara, Alexandre Guilherme de

Fast Crack Bounds: Estimativa de Cota Superior e Solução Numérica a Evolução de Trincas em Modelos de Tensão Constante / Alexandre Guilherme de Lara. – Curitiba, : [recurso eletrônico.], 2020.

1 arquivo texto (106 f.): PDF; 3,87 MB.

Modo de acesso: World Wide Web.

Título extraído da tela de título (visualizado em 17 ago. 2020).

Texto em português com resumo em inglês.

Tese (Doutorado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Curitiba, 2020.

Bibliografia: f. 91-94.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Mecânica da fratura. 3. Deformações e tensões. 4. Resistência de materiais. I. Deus, Hilbeth Parente Azikri de, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, inst. III. Título.

CDD: Ed. 23 – 620.1

Biblioteca Ecoville da UTFPR, Câmpus Curitiba

TERMO DE APROVAÇÃO DE TESE Nº 28

A Tese de Doutorado intitulada: **Fast Crack Bounds: Estimativa de Cota Superior e Solução Numérica a Evolução de Trincas em Modelos de Tensão Constante**, defendida em sessão pública pelo candidato **Alexandre Guilherme de Lara**, no dia 05 de agosto de 2020, foi julgada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica, área de concentração: Mecânica Dos Sólidos, linha de pesquisa: Mecânica Dos Sólidos Computacional, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Hilbeth Parente Azikri De Deus - Presidente - UTFPR

Prof. Dr. João Morais da Silva Neto - UFPR

Prof. Dr. Key Fonseca de Lima - PUC PR

Prof. Dr. Márcio Henrique de Avelar Gomes - UTFPR

Prof. Dr. Nilson Barbieri - UTFPR

Dedico este trabalho a minha família
querida, em especial à minha esposa e
meus filinhos, pelos momentos de
ausência.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem. Certamente esses parágrafos não irão atender a todas as pessoas que fizeram parte dessa importante fase de minha vida. Portanto, desde já peço desculpas àquelas que não estão presentes entre estas palavras, mas elas podem estar certas que fazem parte do meu pensamento e de minha gratidão.

Agradeço primeiramente ao Deus Altíssimo, criador dos céus, da terra e do mar e de tudo o que neles há.

A minha família, pelo carinho, incentivo e total apoio em todos os momentos da minha vida.

Ao meu orientador, que me mostrou os caminhos a serem seguidos e pela confiança depositada.

A todos os professores e colegas do departamento DAMEC e PPGEM, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

Enfim, a todos os que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Mede o que é mensurável e torna
mensurável o que não o é.
(Frase atribuída a Galileu Galilei)

RESUMO

LARA, Alexandre Guilherme de. **Fast Crack Bounds: Estimativa de Cota Superior e Solução Numérica a Evolução de Trincas em Modelos de Tensão Constante.** 2020. 105 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica e de Materiais) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2020.

Em grande parte dos componentes mecânicos os carregamentos estão sujeitos a alterações de magnitude e em alguns casos orientação. Nestas condições as abordagens aplicáveis para carregamentos estáticos tornam-se insuficientes, em razão da complexidade inerente ao fenômeno de Fadiga, sendo necessário emprego de outras abordagens, como a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). A MFLE propõe diversos modelos de evolução de trincas no sentido de predizer uma vida sob fadiga. O presente trabalho apresentou um novo método de estabelecimento da cota superior para o Método "*Fast Crack Bounds*" (FCB), aplicado a modelos de evolução do tamanho da trinca unidimensional, sujeitos a carregamento de amplitude de tensão constante (CATC). Os modelos estudados foram os de Paris-Erdogan e Forman. Realizou-se uma simulação com base em solução numérica aproximada e a combinação convexa das cotas superior e inferior. Mediu-se o desempenho pelo erro relativo em relação à solução numérica obtida pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, tendo sido observado que o novo método proposto para determinação da cota superior ao modelo FCB apresenta resultados satisfatórios.

Palavras-chave: Mecânica da fratura linear elástica. Propagação de trinca. Problema de Valor Inicial. Cota Superior. Fast Crack Bounds.

ABSTRACT

LARA, Alexandre Guilherme de. **Fast Crack Bounds: Estimation of upper and Numeric Solution of cracks propagation under constant stress models**. 2020. 105 p. Thesis (Doctorate in Mechanical Engineering and Materials) – Federal University of Technology – Paraná. Curitiba, 2020.

Most components operate under alternated loading. Under these conditions, the static approach are insufficient describe the behavior, considering the the complexity of the fatigue phenomenon, with the need for other approaches, such as an Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM). LEFM has several models of evolution of cracks to describe the crack propagation in fatigue. The present work edscribes a new method of determination to the Upper Bound crack size, under Constant Loading Tension in one dimension. The Paris-Erdogan and Forman models were object of study . A simulation based on the approximate numerical solution was performed, and a convex combination of the upper and lower dimensions applied. Relative error for a numerical solution was measured by the fourth-order Runge-Kutta method, and the new method applied to the FCB model presented satisfactory results.

Keywords: Linear elastic fracture mechanics. Crack propagation. Initial value problem. Upper Bound. Fast Crack Bounds.

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Linha de programação RK4 para o modelo de Paris exemplo 2. .	95
Algoritmo 2 – Linha de programação FCB para o modelo de Paris exemplo 1. .	95
Algoritmo 3 – Linha de programação Combinação Convexa para o modelo de Paris exemplo 1.	96
Algoritmo 4 – Linha de programação RK4 para o modelo de Forman exemplo 2.	96
Algoritmo 5 – Linha de programação FCB para o modelo de Forman exemplo 2.	96

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Curva sigmoidal de propagação de trinca em coordenadas log-log.	19
Figura 2 – Os diversos aspectos da fadiga em estruturas, um problema multi-disciplinar.	25
Figura 3 – Modos de abertura de trinca.	26
Figura 4 – Placa infinita carregada com trinca central de comprimento $2a$	29
Figura 5 – Tensão em um ponto a frente da ponta de trinca.	29
Figura 6 – Carregamento cíclico com amplitude de tensão constante	31
Figura 7 – Comparação entre os fatores de correção para um corpo de prova com trinca central	32
Figura 8 – Placa finita com trinca central	32
Figura 9 – Gráfico da função erro relativo entre a solução exata e a solução numérica aproximada, RK4, para uma placa infinita.	35
Figura 10 – Método de Euler.	39
Figura 11 – Ilustração dos conjuntos em termos geométricos.	42
Figura 12 – Placa infinita com trinca central	46
Figura 13 – Placa finita com dupla trinca nas arestas	47
Figura 14 – Placa finita com trinca central	48
Figura 15 – Placa finita com trinca na aresta	49
Figura 16 – Fluxograma de Implementação Numérico Computacional	51
Figura 17 – Expansão por Euler	52
Figura 18 – Funções de cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), cota inferior e solução por RK4, para o exemplo 1 modelo de Paris.	62
Figura 19 – Funções de cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), cota inferior e solução por RK4, para o exemplo 2 modelo de Paris.	63
Figura 20 – Funções de cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), cota inferior e solução por RK4, para o exemplo 3 modelo de Paris.	63
Figura 21 – Desvio relativo das cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Paris.	64
Figura 22 – Desvio relativo das cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Paris.	65
Figura 23 – Desvio relativo das cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 3 modelo de Paris.	65
Figura 24 – Média aritmética e geométrica da cota superior (nova metodologia), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Paris.	66
Figura 25 – Média aritmética e geométrica da cota superior (nova metodologia), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Paris.	67

Figura 26 – Média aritmética e geométrica da cota superior (nova metodologia), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 3 modelo de Paris.	67
Figura 27 – Solução obtida pela combinação convexa das cotas superior e inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Paris.	69
Figura 28 – Solução obtida pela combinação convexa das cotas superior e inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Paris.	69
Figura 29 – Solução obtida pela combinação convexa das cotas superior e inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 3 modelo de Paris.	70
Figura 30 – Desvio relativo da solução por combinação convexa, das cotas superiores, e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Paris.	70
Figura 31 – Desvio relativo da solução por combinação convexa, das cotas superiores, e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Paris.	71
Figura 32 – Desvio relativo da solução por combinação convexa, das cotas superiores, e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 3 modelo de Paris.	71
Figura 33 – Desvio relativo da solução por combinação convexa e das médias geométrica e aritmética em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Paris.	72
Figura 34 – Desvio relativo da solução por combinação convexa e das médias geométrica e aritmética em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Paris.	72
Figura 35 – Desvio relativo da solução por combinação convexa e das médias geométrica e aritmética em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 3 modelo de Paris.	73
Figura 36 – Funções de cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), cota inferior e solução por RK4, para o exemplo 1 modelo de Forman.	74
Figura 37 – Funções de cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), cota inferior e solução por RK4, para o exemplo 2 modelo de Forman.	75
Figura 38 – Funções de cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), cota inferior e solução por RK4, para o exemplo 3 modelo de Forman.	75
Figura 39 – Desvio relativo das cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Forman.	76
Figura 40 – Desvio relativo das cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Forman.	77
Figura 41 – Desvio relativo das cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 3 modelo de Forman.	77

Figura 42 – Média aritmética e geométrica da cota superior (nova metodologia), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Forman.	79
Figura 43 – Média aritmética e geométrica da cota superior (nova metodologia), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Forman.	79
Figura 44 – Média aritmética e geométrica da cota superior (nova metodologia), para o exemplo 3 modelo de Forman.	80
Figura 45 – Solução obtida pela combinação convexa das cotas superior e inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Forman.	81
Figura 46 – Solução obtida pela combinação convexa das cotas superior e inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Forman.	82
Figura 47 – Solução obtida pela combinação convexa das cotas superior e inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 3 modelo de Forman.	82
Figura 48 – Desvio relativo da solução por combinação convexa, das cotas superiores, e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Forman. . . .	83
Figura 49 – Desvio relativo da solução por combinação convexa, das cotas superiores, e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Forman. . . .	83
Figura 50 – Desvio relativo da solução por combinação convexa, das cotas superiores, e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 3 modelo de Forman. . . .	84
Figura 51 – Desvio relativo da solução por combinação convexa e das médias geométrica e aritmética em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Forman. . . .	84
Figura 52 – Desvio relativo da solução por combinação convexa e das médias geométrica e aritmética em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Forman. . . .	85
Figura 53 – Desvio relativo da solução por combinação convexa e das médias geométrica e aritmética em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 3 modelo de Forman. . . .	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Modelos para Propagação de trinca de Tensão sob Amplitude Constante.	21
Tabela 2 – Relações para um carregamento com amplitude de tensão constante.	30
Tabela 3 – Fator de correção de geometria " $f(a)$ ".	34
Tabela 4 – Modelo de propagação de trinca sujeitos a Carregamento de Amplitude de Tensão Constante.	35
Tabela 5 – Parâmetros que ajustam os modelos de propagação de trinca para aços ferríticos e o AI 2024 T351 – Exemplos 1, 2 e 3.	50
Tabela 6 – Tabela de valores adotados para cálculo da Combinação Convexa	68
Tabela 7 – Tabela de valores adotados para cálculo da Combinação Convexa	81
Tabela 8 – Tabela dos tempos RK4.	86
Tabela 9 – Tabela dos tempos Computacionais UB.	87
Tabela 10 – Tabela dos desvios relativos da nova cota superior.	87
Tabela 11 – Tabela dos desvios relativos da combinação convexa.	87

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E ACRÔNIMOS

SIGLAS

CAC	Carregamento de Amplitude Constante
CATC	Carregamento com Amplitude de Tensão Constante
EDO	Equação Diferencial Ordinária
ELT	Erro Local de Truncamento
FCB	<i>Fast Crack Bounds</i>
FIT	Fator de Intensidade de Tensão
MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica
PVI	Problema de Valor Inicial
RK4	Runge-Kutta de quarta ordem
RTC	Razão de Tempo Computacional

LISTA DE SÍMBOLOS

LETRAS LATINAS

a	Tamanho de trinca	[m]
b	Largura da chapa	[m]
C	Constante empírica do material	[MPa \sqrt{m}]
e	Erro	[adimensional]
N	Número de ciclos	[adimensional]
R	Razão de tensão	[adimensional]

LETRAS GREGAS

π	Pi (constante circular)	[rad]
σ	Tensão	[Pa]
α	Fator de interpolação linear	[adimensional]
η	Determinado número de ciclos	[adimensional]

SOBRESCRITOS

m	Constante do material para as leis de propagação de trin- cas	
mP	Constante do material para a lei de Paris-Erdogan	
mF	Constante do material para a lei de Forman	

SUBSCRITOS

I	Modo I de abertura de trinca (Lower)
L	Cota inferior (Lower)
U	Cota superior (Upper)
0	Valor inicial

NOTAÇÕES

\bar{a}	Cota superior	[m]
$\bar{a}(N)$	Cota superior para um determinado número (N) de ciclos	[m]
\underline{a}	Cota inferior	[m]
$\underline{a}(N)$	Cota inferior para um determinado número (N) de ciclos	[m]
$a(N)$	Tamanho de trinca para um determinado número (N) de ciclos	
$f(a/W)$	Fator de correção do FIT	
$f(a)$	Fator de correção do FIT	
$f(a(N))$	Fator de correção do FIT para um determinado número (N) de ciclos	

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	MOTIVAÇÃO	20
1.2	OBJETIVO	21
1.3	CONTRIBUIÇÕES	22
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	23
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	24
2.1	MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA	24
2.1.1	Método de Westergard	27
2.1.2	Fator de Intensidade de Tensão	28
2.1.3	Tensões atuantes	30
2.1.4	Correção do Fator de Intensidade de Tensão	31
2.2	A METODOLOGIA FAST CRACK BOUNDS	33
2.2.1	O Parâmetro da cota superior a^* (a estrela)	36
2.2.2	Cota Superior e Inferior para o modelo de Paris	36
2.2.3	Cota Superior e Inferior para o modelo de Forman	37
2.3	MÉTODOS NUMÉRICOS COMPUTACIONAIS	39
2.3.1	Método de Euler	39
2.3.2	Método de Runge Kutta	41
2.3.3	Combinação Convexa	41
3	MATERIAL E MÉTODOS	43
3.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	44
3.2	DEFINIÇÃO DAS HIPÓTESES	44
3.3	SIMULAÇÃO EXPERIMENTAL COMPUTACIONAL	45
3.4	OBTENÇÃO DE DADOS	45
3.5	ANÁLISE E IMPLEMENTAÇÃO	48
3.6	CONCLUSÃO E DISCUSSÃO	50
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	52
4.1	ESTABELECIMENTO DA COTA SUPERIOR	52
4.1.1	Cota Superior para o Modelo de Paris	56
4.1.2	Cota Superior para o Modelo de Forman	58
4.2	COMBINAÇÃO CONVEXA DAS COTAS SUPERIOR E INFERIOR	59
4.3	AVALIAÇÃO DAS COTAS SUPERIORES E SOLUÇÕES	61
4.3.1	Avaliação da Cota Superior para o modelo de Paris	62
4.3.2	Avaliação da Solução Numérica aproximada para o modelo de Paris	66
4.3.3	Avaliação da Cota Superior para o modelo de Forman	73
4.3.4	Avaliação da Solução Numérica aproximada para o modelo de Forman	78
4.4	AVALIAÇÃO DOS TEMPOS COMPUTACIONAIS	86
4.5	COMPARAÇÃO DOS DESVIOS RELATIVOS PARA O MODELO DE PARIS-ERDOGAN VERSUS O DE FORMAN	87
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	88
5.1	PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS	89
	REFERÊNCIAS	90
	APÊNDICES	94
	APÊNDICE A – CÓDIGO DE PROGRAMAÇÃO OCTAVE	95

APÊNDICE B – TERCEIRA DERIVADA DA EQUAÇÃO DO MO- DELO DE PARIS ERDOGAN	97
APÊNDICE C – TERCEIRA DERIVADA DA EQUAÇÃO DO MO- DELO DE FORMAN	101
Appendices	104
ÍNDICE REMISSIVO	105

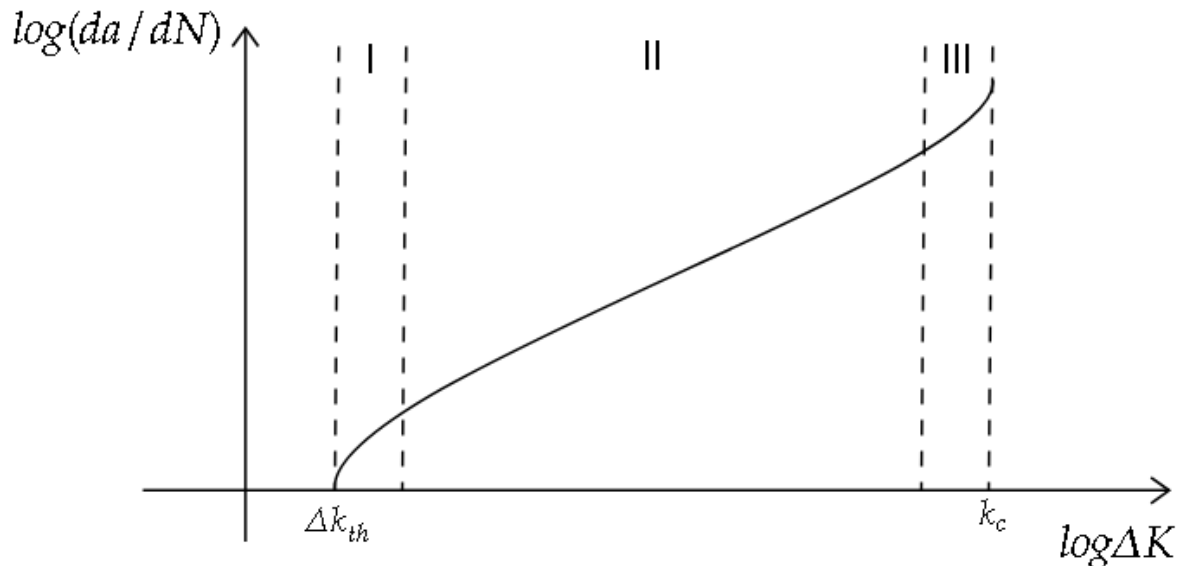
1 INTRODUÇÃO

A Fadiga é um fenômeno localizado, progressivo e cumulativo, presente em elementos sujeitos à tensões variáveis, repetidas, alternantes ou flutuantes, e por vezes resulta em uma falha súbita do elemento (BUDYNAS, 2014). A fratura por fadiga decorre de três estágios de desenvolvimento. O primeiro estágio (estágio I) ilustrado na figura 1, é caracterizado pela iniciação de uma ou mais microtrincas, devido à deformação plástica cíclica, seguida de propagação cristalográfica com extensão de dois a cinco grãos em relação à origem. O valor de $(\Delta K_I)_{th}$ é o limiar de (ΔK_I) , abaixo do qual não há crescimento da trinca. O segundo estágio (estágio II) é caracterizado pela progressão das microtrincas para macrotrincas, formando superfícies de fratura. Estas superfícies são conhecidas e amplamente descritas na literatura como marcas de praia ou marcas de concha de ostra. Durante a atuação dos carregamentos cíclicos essas fissuras abrem e fecham, interagindo e atritando umas nas outras, associadas a variação dos níveis de frequência do carregamento e da natureza corrosiva do meio. O último estágio (estágio III) é caracterizado ao final do ciclo de tensão, quando o material remanescente é insuficiente para suportar as cargas, resultando em uma fratura súbita, podendo ser frágil, dúctil ou uma combinação destas.

Diversos métodos têm sido propostos para previsão de uma vida sob fadiga, levando em consideração hipóteses relacionadas às condições de uso, à composição do material, ao comportamento das amplitudes e variações do carregamento, ao processo de fabricação, ao ambiente, além de outros. Dentre os métodos existentes destaca-se a Mecânica da Fratura Linear Elástica (Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE)), que se propõe estudar e descrever a propagação de uma trinca ou falha existente no material. A MFLE pode ser aplicada a uma grande gama de materiais, tendo em vista que a maioria possui trincas.(JANSSEN; ZUIDEMA; WANHILL, 2004)

A MFLE apresenta diversos modelos de propagação de trinca, com diferentes abordagens (SANTOS, 2015) . Destacam-se os modelos de propagação de trinca para carregamentos com amplitudes de tensão constante ou variável, quais sejam: Paris-Erdogan (1961; 1963), Forman (1967; 1972), Walker (1970), McEvily (1977), Priddle (1976). A formulação e a solução desses modelos baseiam-se na determinação de um Problema de Valor Inicial (PVI) , que descreve a evolução de uma trinca inicial,

Figura 1 – Curva sigmoidal de propagação de trinca em coordenadas log-log.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

por meio das condições do carregamento atuante, da geometria do componente em análise e das propriedades do material. Em poucas aplicações práticas, consegue-se obter uma solução exata do PVI. Desta forma utilizam-se com frequência soluções numéricas aproximadas. O tempo e o custo computacional de uma solução numérica aproximada estão diretamente associados ao método empregado, aos parâmetros de carregamento atuantes e da geometria do componente.

A metodologia proposta por Santos (2015) define funções que se utilizam de cotas para delimitação do comportamento das soluções dos modelos de propagação de trinca, relativo aos modelos de Paris-Erdogan, Forman, Walker, McEvily e Priddle. Ressalta-se que a metodologia em tela fez uso de uma cota superior, definida como “ a^* ”, cujo valor de referência foi definido de forma arbitrária. O presente estudo tem por objetivo precípuo o desenvolvimento de uma metodologia para determinação de forma teórica da cota superior (a_{UB}), arbitrariamente definida na metodologia por Santos (2015), e adicionalmente propõe uma solução numérica aproximada por meio da combinação convexa das cotas. O método busca uma avaliação rápida e eficaz da propagação das trincas sujeitas a tensão constante, mantendo a eficiência computacional.

1.1 MOTIVAÇÃO

A MFLE apresenta diversos modelos de propagação de trinca, com diferentes abordagens e concepções. Destacam-se para os modelos de propagação de trincas para carregamentos de amplitude de tensão constante os modelos de Paris-Erdogam (1961, 1963), Forman (1967, 1972), Walker (1970), McEvily (1977) e Priddle (1976). Na MFLE busca-se a determinação do tamanho de trinca para um determinado número de ciclos, ou a análise do crescimento desta trinca com base na evolução dos ciclos, e pode ser descrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{Determinar } a \in C^1(N_0, N_1), \text{ tal que,} \\ & \left\{ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = f(a, N, \Delta K, R, \Delta K_{th}, \Delta K_C, f(a)), \forall N \in (N_0, N_1); \right. \quad (1) \\ & \left. a(N_0) = a_0. \right. \end{aligned}$$

Muitos autores têm desenvolvido modelos matemáticos para cálculo de propagação de trinca, considerando carregamento de amplitude constante (*Constant Amplitude Loading* - GAL), tal como Paris, Forman, Walker, McEvily e Priddle, conforme pode ser observado na tabela 1. Estes modelos matemáticos são capazes de descrever a evolução de uma trinca nas regiões I, II e III (SANTOS, 2015). A região I representa o limite da frente de trinca, ou seja, a nucleação da trinca. A região II representa a propagação de trinca, na qual se aplica a mecânica da fratura linear elástica. A região III é onde o crescimento da trinca acelera antes do colapso.

A proposta de Santos (SANTOS, 2015) para determinação de cotas para o tamanho de trinca " $a(\cdot)$ ", utilizando o modelo de Paris, para uma placa infinita com trinca central, pode ser expressa como:

$$a(N) - a_0 \leq C \left\{ (\Delta K(a_0))^m + \left(\frac{mC}{2} \right) (\Delta K(a^*))^{2m} \left[\frac{1}{2a^*} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a^*) \right] (N - N_0) \right\} (N - N_0); \quad (2)$$

$$a(N) - a_0 \geq C \left\{ (\Delta K(a_0))^m + \left(\frac{mC}{2} \right) (\Delta K(a_0))^{2m} \left[\frac{1}{2a_0} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a_0) \right] (N - N_0) \right\} (N - N_0),$$

$$\forall N \in [N_0, N_1].$$

Tabela 1 – Modelos para Propagação de trinca de Tensão sob Amplitude Constante.

Modelos	Característica
Paris-Erdogan $da/dN = C_P(\Delta K)^{m_P}$	Não considera a razão de tensão R; Válido somente para a região II.
Forman $da/dN = \frac{C_F(\Delta K)^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K}$	Considera o efeito das tensões médias; Utiliza a tenacidade a fratura, K_C ; É válido somente para as regiões II e III.
Walker $da/dN = C_W [(1-R)^{\gamma_W - 1} \Delta K]^{m_W}$	Considera o efeito das tensões médias; É válido somente para região II.
McEvelly $da/dN = C_M (\Delta K - \Delta K_{th})^2 \left(1 + \frac{\Delta K}{K_C - K_{max}}\right)$	Considera o efeito das tensões médias; Utiliza a tenacidade a fratura, K_C ; Utiliza o valor ΔK_{th} É válido para as regiões I, II e III.
Priddle $da/dN = C \left(\frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_C - K_{max}}\right)^m$	Considera o efeito das tensões médias; Utiliza a tenacidade a fratura, K_C ; Utiliza o valor de ΔK_{th} ; É válido para as regiões I, II e III.

Fonte: Adaptado de Santos 2015.

1.2 OBJETIVO

O objetivo principal do trabalho é desenvolver uma nova metodologia para a determinação da cota superior para o método *Fast Crack Bounds* (FCB), e a reconstrução da solução numérica a partir das cotas previamente determinadas. Busca-se descrever de forma aproximada o comportamento de uma trinca, para os modelos de Paris-Erdogan e Forman de propagação para carregamentos com amplitude de tensão constante. Alguns objetivos específicos são a seguir elencados:

- Apresentar uma nova maneira de determinar a cota superior para os modelos de Paris e Forman, na metodologia *Fast Crack Bounds* proposta por Santos 2015.
- Propor, com base na cota superior e inferior, uma solução numérica aproximada, e comparar com a solução tomada como sendo "analítica", obtida pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4).
- Desenvolver algoritmos para: implementar a nova metodologia de determinação de cota superior, realizar os cálculos da média geométrica e aritmética, e aplicar

a combinação convexa das cotas superior e inferior para construção de uma solução numérica aproximada, tomando como base exemplos numéricos.

- Estabelecer e analisar os desvios relativos entre a nova metodologia proposta e a anterior, bem como entre a nova metodologia proposta e o RK4.
- Analisar e comparar a razão de uso computacional entre a metodologia FCB para determinação da nova cota superior e combinação convexa, em relação à solução tomada como analítica do PVI obtida pelo método do RK4.
- Analisar os dados e resultados no sentido de verificar a eficácia e a viabilidade da metodologia estudada.

1.3 CONTRIBUIÇÕES

Espera-se que com a nova metodologia a determinação do parâmetro " a^* " ou da cota superior não dependa do procedimento de inspeção até então empregado. O procedimento de inspeção para determinação do " a^* " (a estrela) foi adotado no método FCB proposto por Santos (2015), quando da adoção para criação da cota superior adotada nos modelos de propagação de trinca sujeitos a tensão de amplitude constante. Busca-se também calcular as médias geométricas e aritméticas, além da combinação convexa entre as cotas superior e inferior, a fim de construir uma solução aproximada em relação a solução adotada como sendo "analítica", ou exata, obtida pelo RK4.

Este trabalho contribui para o conhecimento técnico e científico como continuidade ao estudo de propagação de trincas e fadiga. A base do presente estudo é a metodologia desenvolvida por Santos (2015) e pelo grupo de estudo do Dr. Cláudio Ávila ((MACHADO, 2015);(SANTOS, 2015);(CLAUDIO; SANTOS, 2015);(SANTOS; MACHADO; SILVA, 2018)), no qual o valor do parâmetro " a^* " foi originalmente arbitrado e obtido por inspeção. Dentro do intervalo de número de ciclos (N) analisado por Santos obteve-se o valor de " a^* ", considerando um desvio máximo de 5 % da cota superior em relação ao método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), e que não violasse a solução numérica aproximada definida pelo RK4.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Espera-se que com a nova metodologia uma nova forma de cálculo da cota a_{UB} , para os modelos de propagação de trinca sujeitos a carregamento de tensão constante, assim como uma proposta de solução numérica aproximada. O conteúdo da tese é apresentado da seguinte maneira:

No capítulo 1 apresentou-se uma breve descrição das referências que serviram de base para o desenvolvimento e motivação do trabalho.

No capítulo 2 são revistos conceitos básicos da Mecânica da Fratura e apresentados os principais procedimentos para análise de cotas de evolução de trinca sujeita a carregamento de tensão constante.

No capítulo 3 é apresentado o desenvolvimento de uma nova metodologia para determinação da cota superior na análise de evolução de trinca sujeita a carregamento de tensão constante, e a proposta de uma solução numérica aproximada por meio da combinação convexa das cotas.

No capítulo 4 é apresentado um relatório da implementação computacional da proposta desenvolvida no 3.

No capítulo 5 apresentam-se as conclusões e recomendações do trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A presente seção se propõe a revisar os conceitos fundamentais empregados neste trabalho.

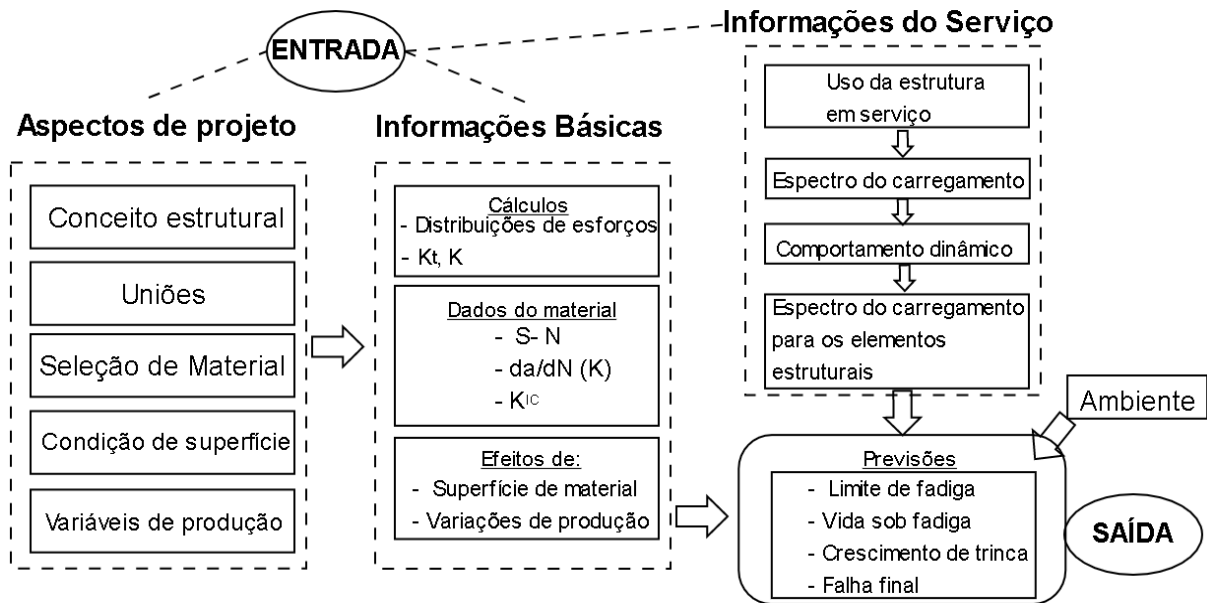
2.1 MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

Segundo Collins (2017), o procedimento da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) baseia-se no cálculo da tensão na ponta de trinca considerando um comportamento linear elástico e o estado de tensões bidimensional. Esse fenômeno está associado a presenças de trincas, defeitos e descontinuidades, e ocorrem quando a combinação do tamanho de trinca, geometria de peça, temperatura e/ou taxa de carregamento atingem determinados intervalos críticos. Este tipo de falha é caracterizado como sendo um colapso por fadiga. A falha por fadiga envolve diversos aspectos, constituindo um objeto de estudo multidisciplinar, conforme ilustrado na Figura 2. Segundo Andersen (2017), a questão crucial está relacionada com a capacidade das condições de testes em corpos de prova reproduzir as condições de serviço. Este princípio é descrito por Schijve (2003) como princípio da Similitude, ou Similaridade. O autor enuncia que condições similares de ciclo (ΔK , e R), aplicados em trincas de diferentes corpos de prova ou estruturas de mesmo material devem apresentar comportamento similar. Por exemplo, o crescimento de uma trinca por ciclo resulta no mesmo crescimento observado no modelo matemático da/dN .

O campo da mecânica da fratura tem se tornado uma das principais abordagens para controle de fratura e fadiga em falhas estruturais. A fratura caracteriza-se pela formação de novas superfícies no material, decorrente do processo de quebra das ligações interatômicas no sólido em um nível elementar. No nível macroscópico a fratura é tida como sendo a separação de um componente em uma ou mais regiões conseqüentes da propagação de uma ou mais trincas (ERDOGAN, 2000).

A fratura, ou colapso, ocorre após um determinado intervalo de tempo, no qual o sólido passa por um processo de redução da sua resistência mecânica. Em materiais sujeitos a carregamentos cíclicos, com frequências e amplitudes variáveis

Figura 2 – Os diversos aspectos da fadiga em estruturas, um problema multidisciplinar.



Fonte: Adaptado Andersen (2017).

ou constantes, as alterações estruturais permanentes decorrem da propagação de trincas na estrutura, e caracterizam o fenômeno de Fadiga. O crescimento da trinca por fadiga ocorre, segundo Ruchert (2007), em quatro estágios:

- Nucleação da trinca, causada por descontinuidades no material em nível micro ou macroscópico.
- Propagação da trinca (estágio I), caracterizada pelo crescimento da trinca nos planos de alta tensão de cisalhamento.
- Propagação da trinca (estágio II), caracterizada pelo crescimento da trinca nos planos de alta tensão de tração.
- Fratura final ou colapso, caracterizada pelo colapso repentino do material.

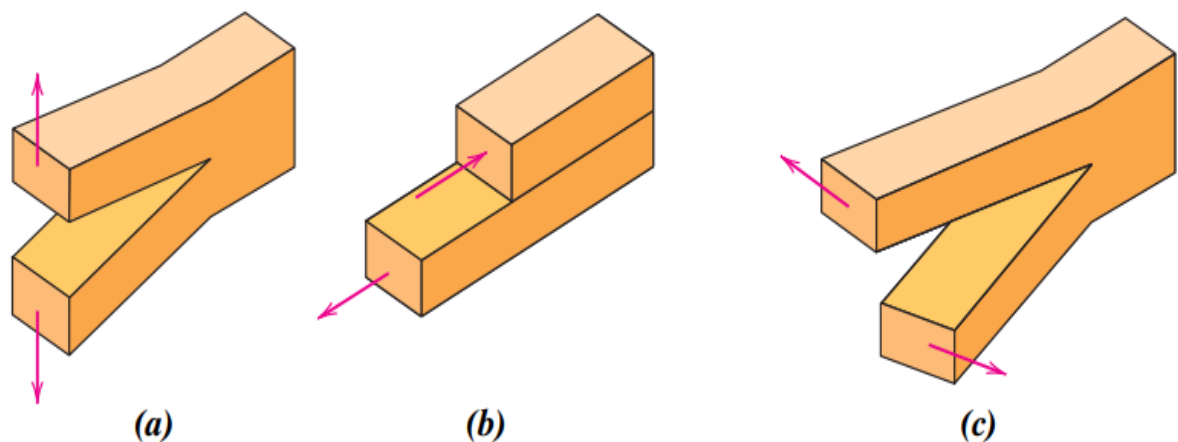
Segundo a ASTM - E1823 (ASTM, 2013), fadiga é o processo progressivo e localizado de modificações estruturais permanentes ocorridas em material submetido a condições de tensão e deformação cíclicas em um ou vários pontos, e que pode resultar em trincas ou fraturas após um número suficiente de ciclos.

A Mecânica da Fratura desenvolve-se a partir de uma premissa básica de que os materiais de componentes mecânicos apresentam trincas. A propagação de uma trinca em um componente mecânico está estreitamente relacionada com o estado

de tensão na frente de trinca. Nesta região são observados efeitos não lineares, tais como: plasticidade (não linearidade do material), grandes deslocamentos (não linearidade geométrica), e em geral um estado tridimensional de tensão. Apesar desses efeitos, em muitas aplicações estas regiões são relativamente pequenas quando comparadas com as dimensões dos componentes ou das trincas. Em vista disso os efeitos dessa região podem não ser, em um primeiro momento, relevantes.

Há três modos de abertura de trinca, conforme mostrado na figura 3. Um campo de tensão de tração originará o modo I, denominado modo de abertura de trinca, sendo este o tipo mais comum e importante (BUDYNAS, 2014). No caso de um cisalhamento plano o modo de abertura será o modo II, denominado modo de deslizamento. No caso de um cisalhamento fora do plano dará origem ao modo III, denominado modo de rasgamento ou cisalhamento de tesoura.

Figura 3 – Modos de abertura de trinca.



Fonte: Adaptado Callister (2015).

Esse é o âmbito em que se desenvolve a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). A MFLE se desenvolve a partir das seguintes hipóteses:

- H1) Material isotrópico, linear e elástico. (Lei de Hooke).
- H2) Pequenos gradientes de deslocamento. (Versão linearizada do tensor Green Saint Venant).
- H3) Estado plano de tensões e deformações.

- H4) Modos de abertura de trinca: Modo I (abertura), Modo II (deslizamento), Modo III (cisalhamento de tesoura).

Qualquer outra geometria de deformação pode ser obtida com uma combinação adequada dos modos I, II e III.

As metodologias que tratam dos problemas de fratura são conhecidas na engenharia como Mecânica da Fratura, e têm sido estudadas para tratar de problemas de fadiga desde Paris e Erdogan , que juntamente com o grupo de pesquisa, conseguiram relacionar a propagação de trincas com a variação do fator de intensidade de tensão, e demonstraram que este parâmetro está associado à propagação (PARIS; GOMEZ; ANDERSON, 1961). Diversos modelos foram desenvolvidos para prever o comportamento da propagação de uma trinca. A escolha do modelo e as limitações têm sido estudadas ao longo dos anos, e geralmente se referem aos materiais empregados e à solitação do componente. Dentre os modelos empregados em componentes sujeitos à carregamento de amplitude constante Carregamento de Amplitude Constante (CAC) estão os modelos de Paris (1961), Forman (1967), Walker (1970), Collipriest , Priddle, McEvily, entre outros.

2.1.1 Método de Westergard

O método de Westergaard (1930, apud (JANSSEN; ZUIDEMA; WANHILL, 2004)), também conhecido como método semi-inverso, é uma eficiente ferramenta para a determinação do estado de tensões na vizinhança da frente de trinca. O método consiste de uma combinação da técnica das funções de Airy aplicada a uma função complexa. Em uma função de tensão de Airy, as componentes podem ser dadas por:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; \quad (4)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \quad (5)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \quad (6)$$

A proposta de Westergaard para a função de tensão é da seguinte forma:

$$\phi(z) = Re\bar{\phi}(z) - yIm(\bar{\phi}(z)). \quad (7)$$

Sendo ϕ uma função holomorfa, e $\bar{\phi}$ e $\bar{\bar{\phi}}$ integrais primeira e segunda de ϕ . Aplicando a condição de Cauchy Riaman, temos:

$$\sigma_{xx} = Re(\phi(z)) - yIm(\phi'(z)); \quad (8)$$

$$\sigma_{yy} = Re(\phi(z)) + yIm(\phi'(z)); \quad (9)$$

$$\sigma_{xy} = -yRe(\phi'(z)). \quad (10)$$

2.1.2 Fator de Intensidade de Tensão

A teoria de Griffith (1921) originalmente foi desenvolvida para materiais frágeis (JANSSEN; ZUIDEMA; WANHILL, 2004). Na década de 40 Irwin (1948) estendeu esta teoria para materiais dúcteis. Em 1953 Irwin fez outra importante contribuição, mostrando que as componentes de tensão poderiam ser escritas nas regiões próximas as frentes de trinca como:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{\pi r}} f_{ij}(\theta), \quad (11)$$

em que σ_{ij} é o tensor de tensões, “**K**” o Fator de Intensidade de Tensão (FIT), e f_{ij} uma função adimensional de θ . A introdução deste parâmetro conduzia a uma abordagem equivalente àquela baseada em energia. A equação 11 para uma trinca sujeita a tração (Modo I - abertura de trinca) em placa plana, tal qual ilustrado nas figuras 4 e 5, em relação ao campo de tensão na vizinhança próxima a frente de trinca é definida pelas equações de Westergaard (SANTOS, 2015):

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right); \quad (12)$$

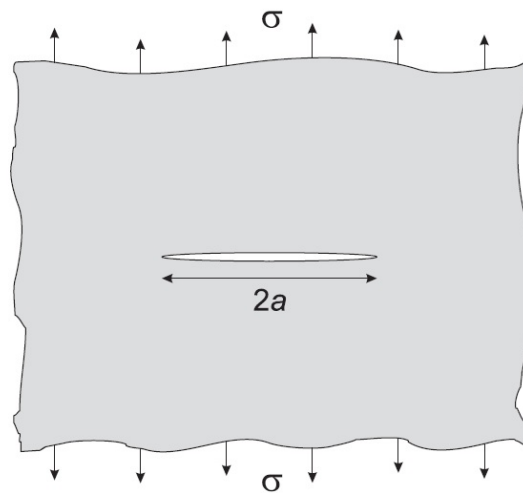
$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right); \quad (13)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}; \quad (14)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad (15)$$

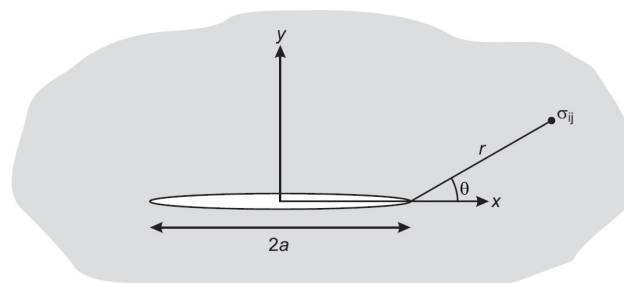
$$\begin{cases} \sigma_{zz} = 0 & (\text{para tensão plana}), \\ \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & (\text{para deformação plana}). \end{cases} \quad (16)$$

Figura 4 – Placa infinita carregada com trinca central de comprimento $2a$.



Fonte: Janssen, Zuidema e Wanhill (2004).

Figura 5 – Tensão em um ponto a frente da ponta de trinca.



Fonte: Janssen, Zuidema e Wanhill (2004),

Nesta abordagem a propagação de trinca ocorre quando o fator de intensidade de tensão (FIT) atinge um valor crítico, qual seja, o fator de tenacidade à fratura: k_{IC} .

Quando isso ocorre ($k = k_{IC}$) a trinca pode atingir um tamanho que conduz a uma condição de instabilidade. Entende-se no presente estudo que o fator de

tenacidade de fratura significa a capacidade que um material possui de manter sua integridade estrutural na presença de trincas.

O fator de intensidade de tensão é uma quantidade fundamental que descreve e controla o campo de tensões na vizinhança de uma trinca. Esse fator (K) depende da geometria e das condições de carregamento sobre o componente.

A tenacidade à fratura é, portanto, usada para avaliação da integridade estrutural de componentes mecânicos, cujos princípios da Mecânica da Fratura acabaram por normalizar ensaios para determinação da tenacidade de materiais por meio de um parâmetro único (K , CTOD ou J). Estes fatores descrevem os campos de tensão nas vizinhanças de uma trinca. Podemos citar como normas e procedimentos as: ASTM E399 (2020b), ASTM E1290 (2008) e ASTM E1820 (2020a) .

2.1.3 Tensões atuantes

As tensões atuantes são ocasionadas por um carregamento variável ao longo do tempo. Esse carregamento pode ser composto por diversas formas de onda, como por exemplo senoidal, quadrada ou triangular Santos (2015). A figura 6 ilustra um carregamento com onda em formato senoidal com amplitude de tensão constante ($\Delta\sigma = \Delta\sigma_{max} - \Delta\sigma_{min}$).

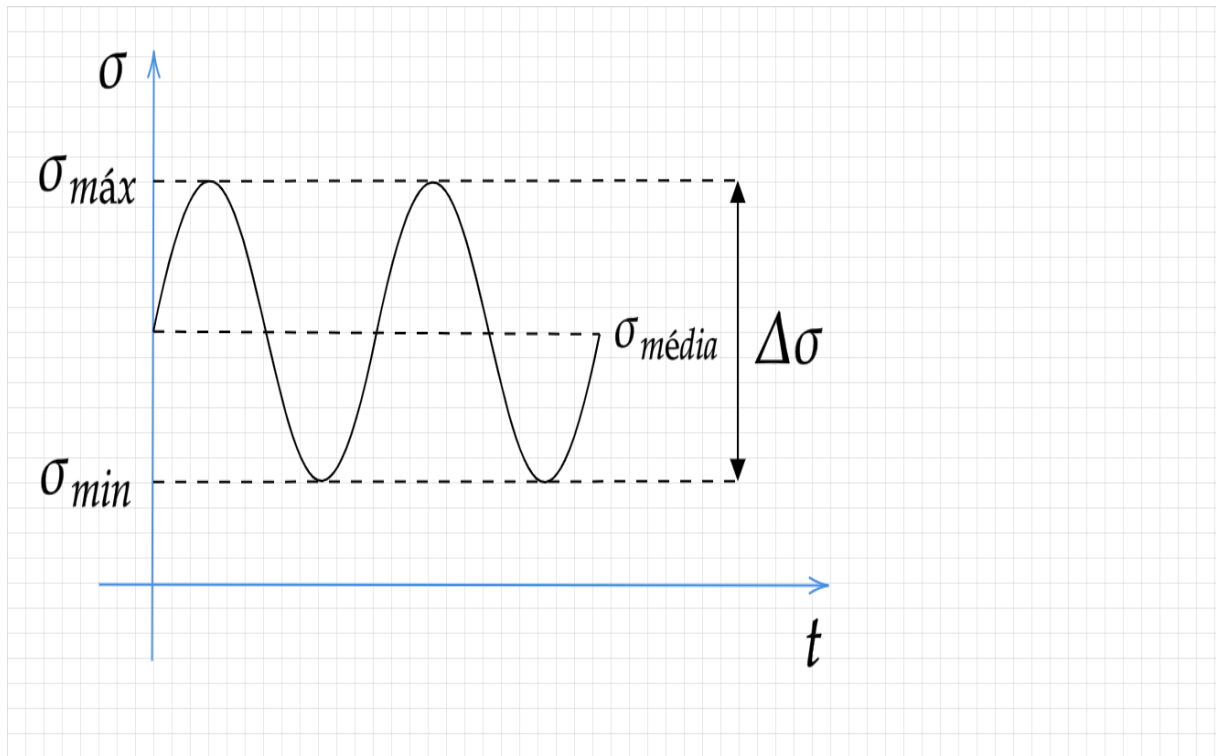
Importantes relações podem ser obtidas através da tensão máxima e a tensão mínima, conforme descrito na tabela 2

Tabela 2 – Relações para um carregamento com amplitude de tensão constante.

Relações	Denominação
$\Delta\sigma = \Delta\sigma_{max} - \Delta\sigma_{min}$	Variação de tensões
$\Delta\sigma_a = \frac{\Delta\sigma_{max} - \Delta\sigma_{min}}{2}$	Tensão alternada
$\Delta\sigma_m = \frac{\Delta\sigma_{max} + \Delta\sigma_{min}}{2}$	Tensão Média
$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$	Razão de Tensão

Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

Figura 6 – Carregamento cíclico com amplitude de tensão constante



Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

2.1.4 Correção do Fator de Intensidade de Tensão

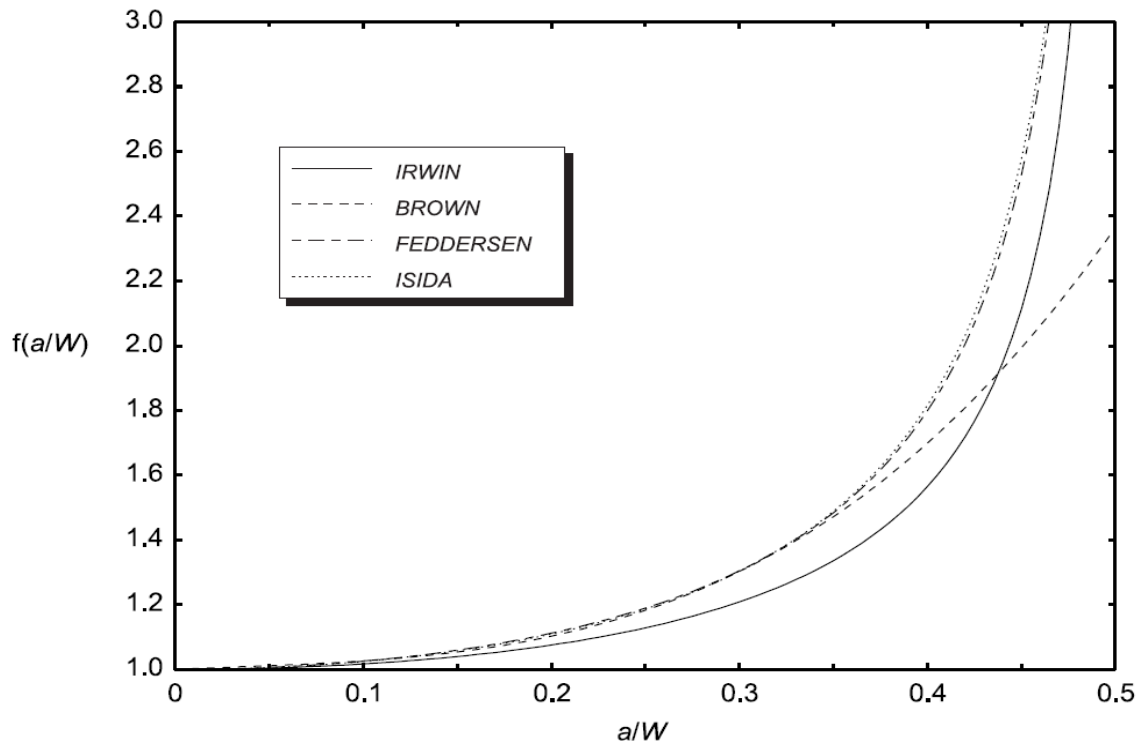
A geometria de amostras de tamanho finito afeta a tensão na região da ponta da trinca, por esta razão a expressão para o Fator de Intensidade de Tensão (FIT) tem que ser modificado através de um fator de correção de geometria, no sentido de aproximar o modelo matemático de problemas práticos. Uma forma geral para tal expressão modificada é:

$$\Delta K_I = \Delta\sigma\sqrt{\pi a}.f\left(\frac{a}{W}\right), \quad (17)$$

em que os fatores C e $f\left(\frac{a}{W}\right)$ devem ser determinados por análise de tensão (JANSSEN; ZUIDEMA; WANHILL, 2004). A maior parte destas expressões são obtidas por métodos numéricos aproximados, como por exemplo os estudos de Irwin e Isida (JANSSEN; ZUIDEMA; WANHILL, 2004) ainda empiricamente (TADA H.; PARIS, 2000), além de outros métodos que podem ser empregados para este fim.

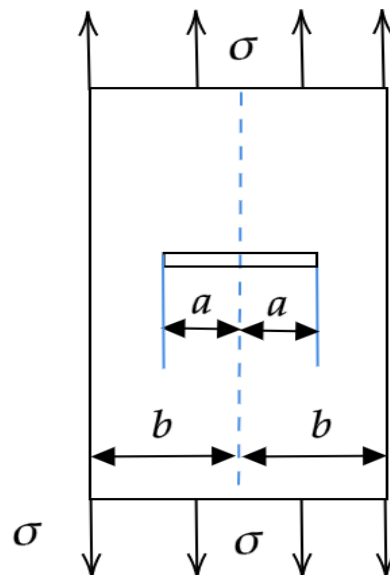
O trabalho do Dr. Hiroshi Tada (2000) teve início durante seu doutorado sob a orientação do Dr. George R. Irwin, no final da década de 60, na Universidade de Lehigh. Nos anos seguintes ele continuou os estudos na Del Reserash, e, em seguida,

Figura 7 – Comparação entre os fatores de correção para um corpo de prova com trinca central



Fonte: Janssen, Zuidema e Wanhill (2004)

Figura 8 – Placa finita com trinca central



Fonte: Adaptado de Tada (2000)

com a colaboração do Dr. Paul C. Paris concluiu a terceira edição do livro *The Stress Analysis of Crack Handbook*. O livro traz resultados de análises de tensão para corpos de prova em configurações usuais, tais como tiras sujeitas a tração e vigas sob flexão. Esses resultados apresentam fatores de correção por diversos métodos: empíricos, numéricos aproximados, por colocação (*boundary collocation method*), função de Green, Elementos Finitos, dentre outros.

Por exemplo, a Figura 7 refere-se a uma trinca central em placa de largura finita ilustrada na Figura 8, cujo valor de $W = 2b$, tem como solução analítica obtida por Irwin:

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \sqrt{\frac{W}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{W}\right)}. \quad (18)$$

Uma solução numérica aproximada, e virtualmente exata, foi obtida por Isida (TADA H.; PARIS, 2000). A correção geométrica do fator foi derivada em 36 termos de uma série de potência. Contudo, Brown encontrou uma aproximação desta solução com quatro termos, com uma acuracidade cujo erro era de 0,5% para um $\frac{a}{W} \leq 0,35$. Esta aproximação é:

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = 1 + 0,5\left(\frac{a}{W}\right) - 1,152\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 12,2\left(\frac{a}{W}\right)^3. \quad (19)$$

Outra correção, puramente empírica, foi proposta por Feddersen. Ele sugeriu como uma aproximação ao resultado de Isida o seguinte fator de correção:

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{W}\right)}. \quad (20)$$

Esta expressão, apesar de simples, apresenta uma precisão cujo erro é de 0,3% para um $\frac{a}{W} \leq 0,35$. A Figura 7 ilustra a comparação entre os fatores de correção mencionados.

Para fins do presente estudo serão considerados os parâmetros apresentados por Tada (2000), de forma a manter o paralelismo com os estudos de Santos (2015), bem como a notação $f(a)$, sabendo que $f(a) = f\left(\frac{a}{W}\right)$. Os valores estão apresentados na Tabela 3.

2.2 A METODOLOGIA FAST CRACK BOUNDS

O termo *Fast Crack Bounds* surge inicialmente no trabalho de Machado (2015), tendo como base a metodologia proposta por Santos (2015) que inicialmente

Tabela 3 – Fator de correção de geometria “ $f(a)$ ”.

Exemplo	Descrição	$f(a)$
1 ¹	Placa finita com dupla trinca nas arestas	$1,12 + 0,203\left(\frac{a}{b}\right) - 1,197\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1,930\left(\frac{a}{b}\right)^3$
2	Placa finita com trinca central	$\sqrt{\sec\frac{\pi a}{2b}}$
3	Placa finita com trinca em uma aresta	$1,122 - 0,231\left(\frac{a}{b}\right) + 10,55\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21,71\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30,382\left(\frac{a}{b}\right)^4$

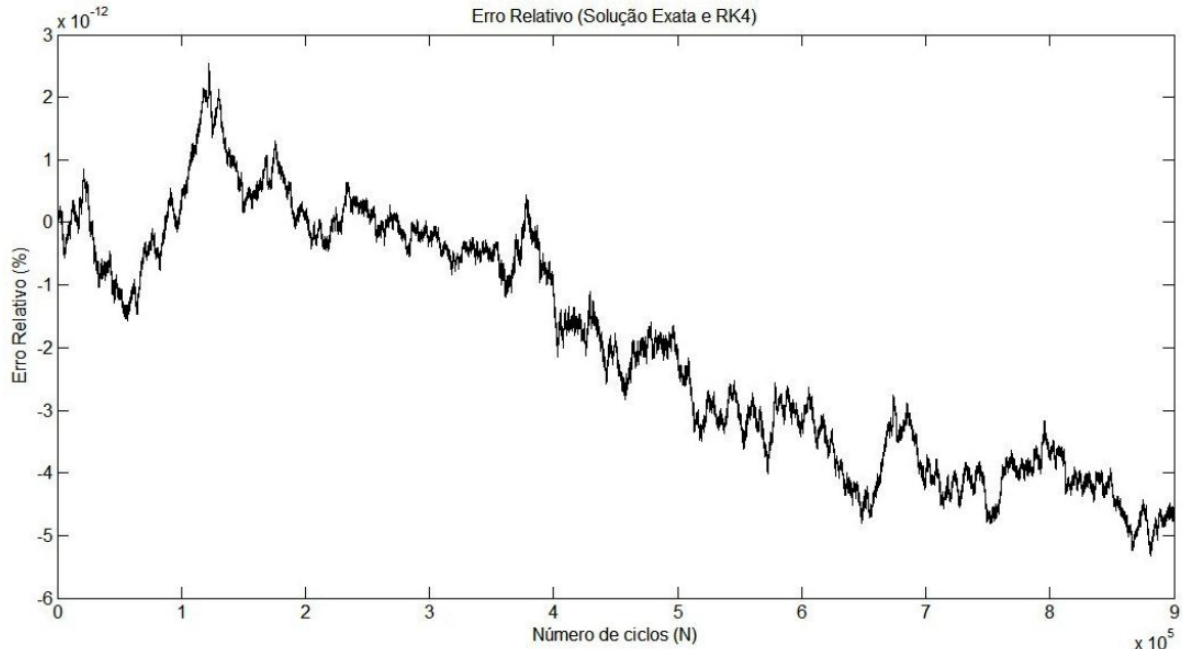
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

estabelece cotas para um Problema de Valor Inicial (PVI) em estudos de crescimento de trinca. As pesquisas relacionadas ao método seguem nos anos seguintes com estudos relacionados às cotas (SANTOS, 2018), a quantificações de incertezas (BEZZERA, 2017), (MOURA L. G.; ÁVILA, 2019) e a simulações de Monte Carlo (KIST, 2016).

O método consiste em duas funções denominadas por: cota superior, em inglês *Upper Bound* (UB), e cota inferior, em inglês *Lower Bound* (LB). Como forma de mensurar a eficácia e validar o método comparou-se o resultado das cotas (também denominado envelope) com a solução numérica aproximada obtida pelo RK4 para três exemplos de trinca. Na falta de uma solução analítica, o estudo assume a solução numérica aproximada pelo método de RK4 como sendo a solução exata, conforme proposto por Santos 2015. A adoção do RK4 como sendo a solução analítica se deve ao fato do baixo erro relativo calculado. O cálculo da solução analítica é possível quando o fator de intensidade de tensão é igual a unidade, no caso, considerando uma trinca central em uma placa infinita. O cálculo do erro relativo acha-se ilustrado no gráfico da figura 9.

O método FCB pode ser expresso como: $a_{LB}(N) \leq a(N) \leq a_{UB}(N), \forall N \in [N_0, N_1]$, em que $a_{LB}(\cdot)$ e $a_{UB}(\cdot)$ são as funções da cota superior e inferior respectivamente. Portanto, o método FCB consiste no estabelecimento de duas equações, sendo uma para a cota superior outra para a inferior, obtidas pela expansão em Taylor com resto (ou resíduo) em Lagrange, para os modelos de propagação de trincas descritos na Tabela 4. A cota superior se baseia em um parâmetro a^* (a estrela), cujo valor foi obtido por meio de inspeção.

Figura 9 – Gráfico da função erro relativo entre a solução exata e a solução numérica aproximada, RK4, para uma placa infinita.



Fonte: Santos (2015)

Tabela 4 – Modelo de propagação de trinca sujeitos a Carregamento de Amplitude de Tensão Constante.

Modelos	Características
Paris-Erdogan $da/dN = C_P(\Delta K)^{m_P}$	Não considera a razão de tensão: R; É válido somente para a região II.
Forman $da/dN = \frac{C_F(\Delta K)^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K}$	Considera o efeito das tensões médias; Utiliza a tenacidade a fratura K_C ; É válido somente para as regiões II e III.
Walker $da/dN = C_W [(1-R)^{\gamma_W - 1} \Delta K]^{m_W}$	Considera o efeito das tensões médias; É válido somente para a região II.
McEvily $da/dN = C_M (\Delta K - \Delta K_{th})^2 \left(1 + \frac{\Delta K}{K_C - K_{max}}\right)$	Considera o efeito das tensões médias; Utiliza a tenacidade a fratura: K_C ; Utiliza o valor de: ΔK_{th} ; É válido para as regiões I, II e III.
Priddle $da/dN = C \left(\frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_C - K_{max}}\right)^m$	Considera o efeito das tensões médias; Utiliza a tenacidade a fratura: K_C ; Utiliza o valor de: ΔK_{th} ; É válido para as regiões I, II e III.

Fonte: Adaptado de Santos (2015)

2.2.1 O Parâmetro da cota superior a^* (a estrela)

A cota superior é função do parâmetro a^* (a estrela) . Os trabalhos propostos por Ávila e Santos (2015,2018) arbitraram um valor específico de a^* por inspeção, de tal forma que apresentasse um desvio máximo que fosse de 5% em relação a solução analítica, obtida pelo método RK4. O valor de a^* utilizado é $a^* = \phi.a_0$, sendo ϕ uma constante obtida por inspeção matemática, e $\phi \in \mathbb{R}^+$. Os valores de a^* resultantes desta inspeção para os modelos de Paris-Erdogan, Forman, Walker, McEvelly e Pridle, de acordo com Santos (2015) são: $a^* = 1,3a_0$; $a^* = 1,3a_0$; $a^* = 1,5a_0$; $a^* = 1,03a_0$; e $a^* = 3,5a_0$, respectivamente.

2.2.2 Cota Superior e Inferior para o modelo de Paris

As cotas inferior e superior são baseadas nas seguintes hipóteses, em relação ao carregamento e ao fator de correção de intensidade de tensão:

$$H1 : \Delta\sigma(N) = \Delta\sigma_0, \forall N \in [N_0, N_1];$$

$$H2 : \begin{cases} f \in C^1([a_0, a_1]; \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}); \\ 0 < f(a_0) \leq f(x) \leq f(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \\ f'(a_0) \leq f'(x) \leq f'(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \end{cases}$$

$$H3 : m \geq 2.$$

O problema de valor inicial (PVI) para o modelo de propagação de trinca de Paris, conforme quadro 4, pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \text{Determinar } a \in C^1(N_0, N_1), \text{ tal que :} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = C(\Delta K(a(N)))^m, \forall N \in (N_0, N_1); \\ a(N_0) = a_0, \end{cases} \quad (21)$$

em que da/dN é a taxa de propagação da trinca, N é o número de ciclos, C e m são constantes do material. O termo $\Delta K(\cdot)$ é o fator de intensidade de tensão que pode

ser expresso como:

$$\begin{aligned}\Delta K(a(N)) &= (K_{max} - K_{min}(a(N))), \\ &= \sqrt{\pi a(N)} f(a(N)) (\sigma_{max} - \sigma_{min}), \\ &= \sqrt{\pi a(N)} f(a(N)) \Delta\sigma.\end{aligned}\tag{22}$$

O termo $f(\cdot)$ na equação 22 é o fator de geometria e $\Delta\sigma$ é a variação da tensão constante.

O teorema proposto por Santos (2015) : Seja $f(\cdot)$ e $\Delta\sigma(\cdot)$ funções que satisfazem a hipótese (H1) e (H2), respectivamente, e $a^* \in [a_0, a_1]$, as seguintes cotas superior e inferior são válidas:

$$a(N) - a_0 \leq C \left\{ (\Delta K(a_0))^m + \left(\frac{mC}{2} \right) (\Delta K(a^*))^{2m} \left[\frac{1}{2a^*} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a^*) \right] (N - N_0) \right\} (N - N_0); \tag{23}$$

e

$$a(N) - a_0 \geq C \left\{ (\Delta K(a_0))^m + \left(\frac{mC}{2} \right) (\Delta K(a_0))^{2m} \left[\frac{1}{2a_0} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a_0) \right] (N - N_0) \right\} (N - N_0), \forall N \in [N_0, N_1]; \tag{24}$$

2.2.3 Cota Superior e Inferior para o modelo de Forman

As cotas inferior e superior são baseadas nas seguintes hipóteses, em relação ao carregamento e ao fator de correção de intensidade de tensão:

$$H1 : \Delta\sigma(N) = \Delta\sigma_0, \forall N \in [N_0, N_1];$$

$$\begin{aligned}H2 : & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f} \in C^1([a_0, a_1]; \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}); \\ \mathbf{0} < \mathbf{f}(a_0) \leq \mathbf{f}(x) \leq \mathbf{f}(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \\ \mathbf{f}'(a_0) \leq \mathbf{f}'(x) \leq \mathbf{f}'(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \end{array} \right. \\ H3 : & m \geq 2.\end{aligned}$$

O PVI para o modelo de propagação de trinca de Forman, conforme quadro

4, pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \text{Determinar } a \in C^1(N_0, N_1), \text{ tal que :} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = \frac{C_F(\Delta K)^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K}, \forall N \in (N_0, N_1); \\ a(N_0) = a_0, \end{cases} \quad (25)$$

em que da/dN é a taxa de propagação da trinca, N é o número de ciclos, C e m são constantes do material. O modelo de Forman resulta de um aprimoramento do modelo de Paris-Erdogan, levando em consideração dois fatores, a razão de tensão, R , e a instabilidade do crescimento de trinca quando o fator intensidade de tensão se aproxima do valor crítico K_C . Santos, Machado e Silva (2018).

O termo $\Delta K(\cdot)$ é o fator de intensidade de tensão, e pode ser expresso como:

$$\Delta K(a(N)) = (K_{max} - K_{min}(a(N))) = \sqrt{\pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma. \quad (26)$$

O termo $f(\cdot)$ na equação 26 é a função de correção do fator de intensidade de tensão, relacionado com carregamento aplicado e forma geométrica do componente com a trinca, e o $\Delta \sigma$ é a amplitude de tensão constante.

O teorema proposto por Ávila e Santos (2015) é: Seja $f(\cdot)$ e $\Delta \sigma(\cdot)$ funções que satisfazem as hipóteses (H1) e (H2), respectivamente, e $a^* \in [a_0, a_1]$, então as seguintes cotas superior e inferior são válidas:

$$a(N) - a_0 \leq \left\{ \frac{C_F(\Delta K(a_0))^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K(a_0)} + \frac{1}{2} \left[\frac{C_F(\Delta K(a^*))^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K(a^*)} \right] \right. \\ \left. \left[m_F + \frac{1}{(1-R)\frac{K_C}{\Delta K(a^*)} - 1} \right] \left[\frac{1}{(2a^*)} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a^*) \right] \Delta N \right\} \Delta N, \quad (27)$$

e,

$$a(N) - a_0 \geq \left\{ \frac{C_F(\Delta K(a_0))^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K(a_0)} + \frac{1}{2} \left[\frac{C_F(\Delta K(a_0))^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K(a_0)} \right] \right. \\ \left. \left[m_F + \frac{1}{(1-R)\frac{K_C}{\Delta K(a_0)} - 1} \right] \left[\frac{1}{(2a_0)} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a_0) \right] \Delta N \right\} \Delta N, \quad (28)$$

sendo $\Delta N = (N - N_0)$ e $\forall N \in [N_0, N_1]$.

2.3 MÉTODOS NUMÉRICOS COMPUTACIONAIS

No presente trabalho os métodos numéricos apresentados serão aplicados a uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de primeira ordem em um Problema de Valor Inicial (PVI).

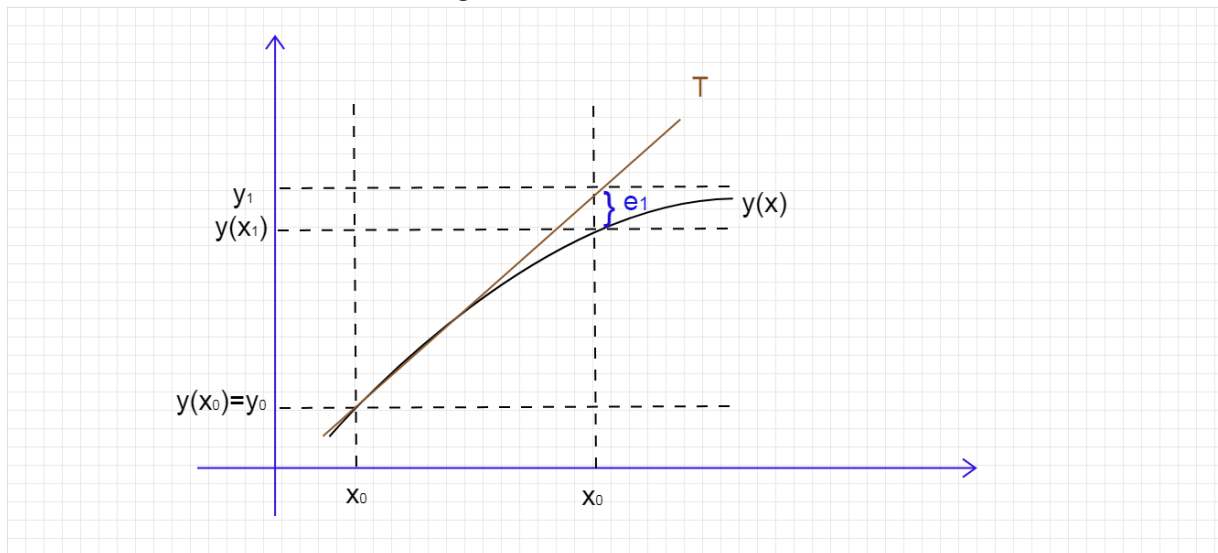
2.3.1 Método de Euler

Seja a EDO $y^{(n)} = f(x, y, y', y^{(2)}, \dots, y^{(n-1)})$ onde $y^l = \frac{d^l}{dx^l}$; $l = 1, 2, \dots, n$; $x \in [a, b]$ e $y : [a, b] \Rightarrow [\mathbb{R}]$. Se para a EDO existem condições que se referem a um único valor de x (BARROSO, 1987), seja o PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y(x_0) = y_0 = \eta, \end{cases} \quad (29)$$

para um dado η . Desejam-se aproximações de y_1, y_2, \dots, y_m para as soluções exatas de $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_m)$.

Figura 10 – Método de Euler.



Fonte: Adaptado Barroso (1987)

Como se desconhece o valor de $y(x_1)$, toma-se y_1 como aproximação de $y(x_1)$. Para isso traça-se uma tangente à curva $y(x)$ no ponto $(x_0, y(x_0))$, cuja equação é $y(x) - y(x_0) = (x - x_0)y'(x_0)$. Tomando-se $x = x_1$, sabendo que $y(x_0) = y_0$, $x_1 - x_0 = h$, $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0))$ e $y_1 y(x_1)$, tem-se: $y_1 = y_0 + hf(x_0, y(x_0))$. O erro com a aproximação de $y(x_1)$ por y_1 é $e_1 = y_1 - y(x_1)$, ou seja, a diferença entre a solução

numérica e a solução exata, conforme pode ser observado na figura Figura 10. Logo:

$$y_{j+1} = y_j + h(x_j, y_j); j = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (30)$$

Cujo erro é $e_{j+1} = y_{j+1} - y(x_{j+1}); j = 0, 1, \dots, m - 1$. A propagação de erro no método de Euler é dada da seguinte forma, seja um PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (31)$$

onde assume-se que f seja contínua e suas derivadas parciais de primeira ordem contínuas e limitadas na região $a \leq x \leq b; -\infty < y < +\infty$ e $x_0 < x_m$. Com isso é garantida a existência de constantes $M > 0$ e $K > 0$, tais que:

$$|y''(x)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + f(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq M \quad (32)$$

e

$$|f(x, y) - f(x, y^*)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \xi) \right| |y - y^*| \leq K |y - y^*|. \quad (33)$$

Com ξ entre y e y^* , e (x, y) e (x, y^*) pertencentes a região anunciada. As equações 32 e 33 seguem a regra da cadeia e do teorema do valor médio, sendo a segunda equação uma função Lipschitziana. Uma função $f(t, y)$ satisfaz uma condição de Lipschitz na variável y em um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ se existir uma constante $L > 0$ tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|, \quad (34)$$

sempre que (t, y_1) e (t, y_2) estiverem em D . A constante L é chamada de constante de Lipschitz para $f(\cdot)$ (BURDEN; FAIRES, 2010).

O erro ao se passar da etapa j para a etapa $j + 1$ é $\Delta e_j = \Delta y_j - \Delta y(x_j)$, ou seja: $\Delta e_{j+1} - \Delta e_j = \Delta y_{j+1} - y_j - (y(x_{j+1}) - y(x_j))$. Como $y_{j+1} - y_j = hf_j; f_j = f(x_j, y_j)$, por Euler, e $y(x_{j+1}) - y(x_j) = hf(x_j, y(x_j)) + \frac{h^2}{2!} f'(\xi, y(\xi)), x_j < \xi < x_{j+1}$ advindo da fórmula de Taylor, tem-se: $e_{j+1} - e_j = h[f_j - f(x_j, y(x_j))] - \frac{h^2}{2!} y''(\xi)$. Tomando o módulo de ambos e lembrando as desigualdades de M e K , pode se escrever:

$$|e_{j+1} - e_j| \leq hK |e_j| + M \frac{h^2}{2!}, \quad (35)$$

$$|e_{j+1}| \leq |1 + hK| |e_j| + M \frac{h^2}{2!}; j \geq 0, \quad (36)$$

e erro inicial igual a zero, sendo que $|1 + hK|$ é denominado o fator de propagação do erro. A expressão (36) mostra que o erro acumulado até a etapa $j + 1$ é influenciada pelo erro local de truncamento.

2.3.2 Método de Runge Kutta

Um método para resolver o PVI (30) é de passo simples se a aproximação y_{j+1} depende apenas do resultado de y_j da etapa anterior. Os métodos de passo simples são escritos na forma:

$$y_{j+1} = y_j + h\phi(x_j, y_j; h), j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (37)$$

em que ϕ é a função incremento e o h o comprimento do passo.

Segundo Barroso (1987), dentre os métodos de Runge-Kutta, o mais popular é o de quarta ordem, cujo Erro Local de Truncamento (ELT) é $e_j = \frac{h^5}{5!} y^{(V)}(\xi), x_{j-1} < \xi < x_j$.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{j+1} = y_j + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), j = 0, 1, \dots, m-1; \\ K_1 = f(x_j, y_j); \\ K_2 = f(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}K_1); \\ K_3 = f(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}K_2); \\ K_4 = f(x_j + h, y_j + hK_3). \end{array} \right. \quad (38)$$

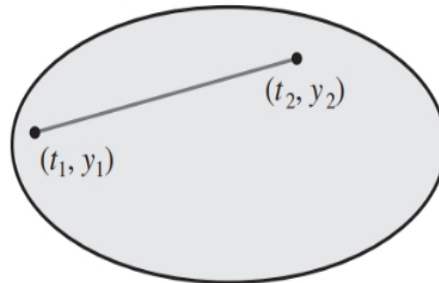
2.3.3 Combinação Convexa

Segundo Lima (1996) um conjunto $X \subset E$ chama-se convexo quando $u, v \in X \Rightarrow [u, v] \subset X$. Isto significa que um segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de X está contido em X . Seja $X \subset E$ convexo. Se r, s, t são números reais ≥ 0 tais que $r + s + t = 1$, então $u, v, w \in X \Rightarrow ru + sv + tw \in X$. Generalizando é possível escrever a expressão $t_1v_1 + \dots + t_kv_k$, onde t_1, \dots, t_k são ≥ 0 e $t_1 + \dots + t_k = 1$, denominada por combinação convexa dos vetores v_1, \dots, v_k . Se o conjunto $X \subset E$ é convexo, toda combinação convexa dos vetores $v_1, \dots, v_k \in X$ ainda pertence a X .

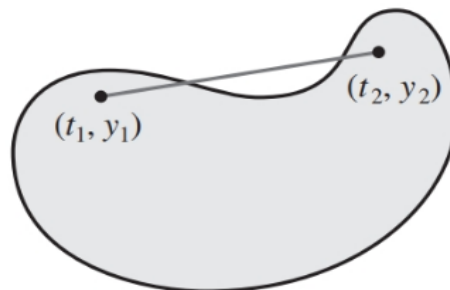
Burden e Faires (2010) definem que um conjunto $D \subset \mathbb{R}^+$ é dito convexo se, sempre que (t_1, y_1) e (t_2, y_2) pertencerem a D , então $((1-\alpha)t_1 + t_2, (1-\alpha)y_1 + \alpha y_2)$ também pertencerão a D para todo α em $[0, 1]$. Em termos geométricos, a definição supracitada afirma que o conjunto é convexo desde que, sempre que dois pontos pertencerem ao conjunto, todo segmento de reta entre os pontos também pertencer ao conjunto,

conforme ilustrado na Figura 11.

Figura 11 – Ilustração dos conjuntos em termos geométricos.



(a) Convexo



(b) Não convexo

Fonte: Adaptado de Burden e Faires (2010)

Para Press et al. (1996) um conjunto de possíveis funções subjacentes (ou imagens) $\hat{\mathbf{u}}$ é dito convexo se, para dois elementos $\hat{\mathbf{u}}_a$ e $\hat{\mathbf{u}}_b$ deste conjunto, todas as combinações de interpolação linear

$$(1 - \alpha)\hat{\mathbf{u}}_a + \alpha\hat{\mathbf{u}}_b \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (39)$$

também estão no conjunto. Os termos $u_L(x)$ e $u_U(x)$ representam os valores pertencentes ao conjunto convexo das cotas inferior e superior respectivamente. Assim, para valores conhecidos de cotas $u_L(x) \leq \hat{u}(x) \leq u_U(x)$, é possível escrever as combinações lineares com base nos valores de u_L e u_U .

3 MATERIAL E MÉTODOS

O estudo em tela decorre da necessidade de aprimorar o entendimento da cota superior (UB) com base em simulação numérica. O objeto de estudo é constituído pela cota superior aplicada no método *Fast Crack Bounds* (FCB) e a busca de uma solução numérica aproximada. A origem deste objeto de estudo se dá no trabalho desenvolvido por Rodrigo Santos e Cláudio Ávila (SANTOS, 2015),(CLAUDIO; SANTOS, 2015), no qual surgiu o método de cotas (envelope) para a descrição da propagação de trincas para diversos modelos a partir da Expansão em Taylor com resto em Lagrange. O método, posteriormente descrito como *Fast Crack Bounds*, se resume em duas equações, sendo uma para delimitação da cota inferior e outra da cota superior, cujo intervalo dos limites contém o valor da solução analítica. Para determinação da cota superior utilizou-se de um parâmetro denominado α^* (a estrela), obtido por inspeção em relação ao método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem.

O presente trabalho se propõe aprofundar o estudo do comportamento da cota superior, com emprego de diferença finita, expansão em Euler e Taylor, de forma a aproximar o valor da cota superior da solução analítica, bem como em buscar uma solução numérica aproximada. O método de desenvolvimento da nova cota superior será comparado ao antigo, e simultaneamente a solução analítica (RK4). A presente seção discorre acerca das equações e da propagação do erro na implementação numérica computacional necessárias para estimativa do valor da cota superior. A pesquisa seguir-se-á de uma série de passos metodológicos sugeridos por Gil (2002) e adaptados ao presente estudo, orientada da seguinte forma:

- Formulação do problema.
- Definição das Hipóteses.
- Simulação experimental computacional.
- Coletas de dados.
- Análise e Interpretação de dados.
- Conclusões e discussão.

3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O estudo em tela propõe uma nova forma de determinação da cota superior, e uma solução numérica aproximada na metodologia *Fast Crack Bounds* (FCB) para modelos de propagação de trincas sujeitos a carregamento de amplitude de tensão constante. A pesquisa é realizada com base nos estudos desenvolvidos por Ávila e Santos (2015) e em uma breve revisão bibliográfica no que diz respeito a conceitos e definições da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), da Fadiga e dos Métodos Numéricos. Na MFLE destacam-se alguns modelos de propagação de trinca para Carregamento com Amplitude de Tensão Constante (CATC). Em seguida são delimitados os modelos de propagação de trinca a serem empregados no estudo, com base nos modelos de CATC, seguindo os critérios previstos por Santos (2015):

- a abrangência da aplicabilidade dos modelos nas regiões I a III do diagrama $\log(da/dN) \times \log(\Delta K)$ da figura Figura 1;
- os modelos que incorporam em suas equações parâmetros que possam influenciar a taxa de propagação de trinca por fadiga, como a razão de tensão, a tenacidade à fratura e o fator intensidade de tensão inicial.

3.2 DEFINIÇÃO DAS HIPÓTESES

Com o propósito de aplicar a nova metodologia utilizou-se dois modelos aplicados no desenvolvimento do FCB, o modelo de Paris-Erdogan e Forman ($[da/dN(N)]$), mantendo-se as hipóteses elaboradas originalmente, os valores de carregamento ($\Delta\sigma$) e duas funções de correção do fator intensidade de tensão $f(\cdot)$:

$$\begin{cases} \text{Determinar } a \in C^1[(N_0, N_1), \mathbb{R}^+] \text{ tal que :} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = f(a, N, \Delta K, R, \Delta K_{th}, K_C, f(a)), \forall N \in (N_0, N_1); \\ a(N_0) = a_0, \end{cases} \quad (40)$$

desde que a derivada de $a(\cdot)$ seja uma função contínua e o valor do tamanho inicial da trinca (a_0) seja conhecido. A equação 40 é um Problema Abstrato de Cauchy. Outras hipóteses podem ser oportunamente formuladas para emprego da metodologia aos modelos.

3.3 SIMULAÇÃO EXPERIMENTAL COMPUTACIONAL

Tomando como base as funções 40 e 58 a nova proposta de cota superior de cada modelo é determinada através do emprego da derivada de 3ª ordem. Assim, por meio desse desenvolvimento, obteve-se a função para a cota superior da evolução de trinca para cada modelo. Adicionalmente buscou-se uma combinação convexa para fins de reconstrução de uma solução aproximada comparada com o RK4.

3.4 OBTENÇÃO DE DADOS

Utilizou-se dois dos três exemplos propostos por Santos (2015) a fim de coleta de dados, no sentido de implementar os códigos computacionais e comparar os resultados obtidos. O primeiro exemplo proposto no estudo de Santos foi substituído neste trabalho, por não ser aplicável à presente metodologia, conforme adiante descrito. Foram empregados três exemplos numéricos:

Exemplo 1: Originalmente o estudo empregou uma placa de largura infinita e com uma trinca central de tamanho inicial $2a_0$, sujeita a um carregamento de tração, conforme Figura 13. Contudo, o FIT para este exemplo é uma constante, conforme Equação 41. Considerando que o presente método se utiliza da derivada de terceira ordem do modelo empregado, buscou-se substituir o primeiro exemplo por outro, constituído de uma placa finita com trinca em ambas as arestas. Portanto, o primeiro exemplo para o estudo em tela passa a ser: Placa de largura finita com dupla trinca nas arestas.

O fator de intensidade de tensão para placa infinita com trinca central é dado por ((TADA H.; PARIS, 2000):

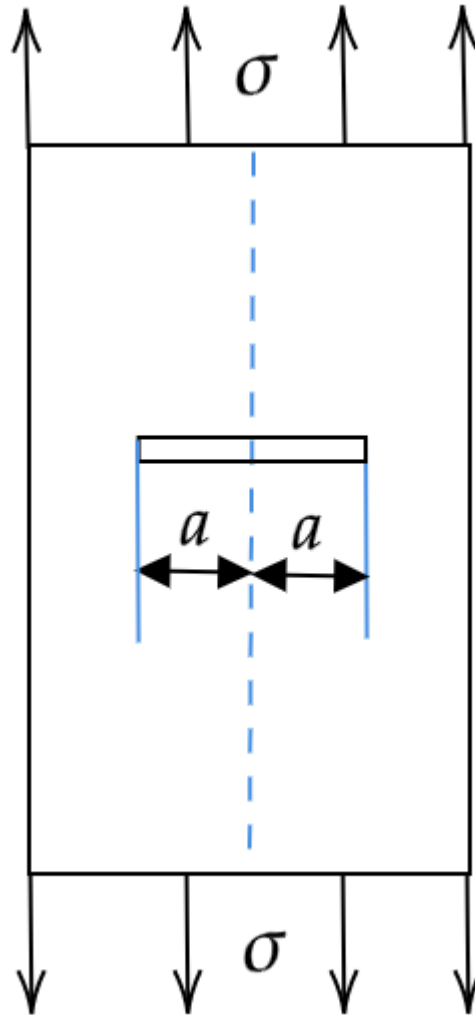
$$f(a(N)) = 1. \quad (41)$$

O fator de intensidade de tensão para uma placa finita com dupla trinca nas arestas é dado por (TADA H.; PARIS, 2000) (aproximação periódica de Irwin 1957):

$$f(a(N)) = 1,12 + 0,230 \left(\frac{a(N)}{b} \right) - 1,197 \left(\frac{a(N)}{b} \right)^2 + 1,930 \left(\frac{a(N)}{b} \right)^3. \quad (42)$$

Exemplo 2: Placa de largura finita e com uma trinca central. O exemplo em tela representa uma placa de largura finita, com largura b com uma trinca central, de

Figura 12 – Placa infinita com trinca central



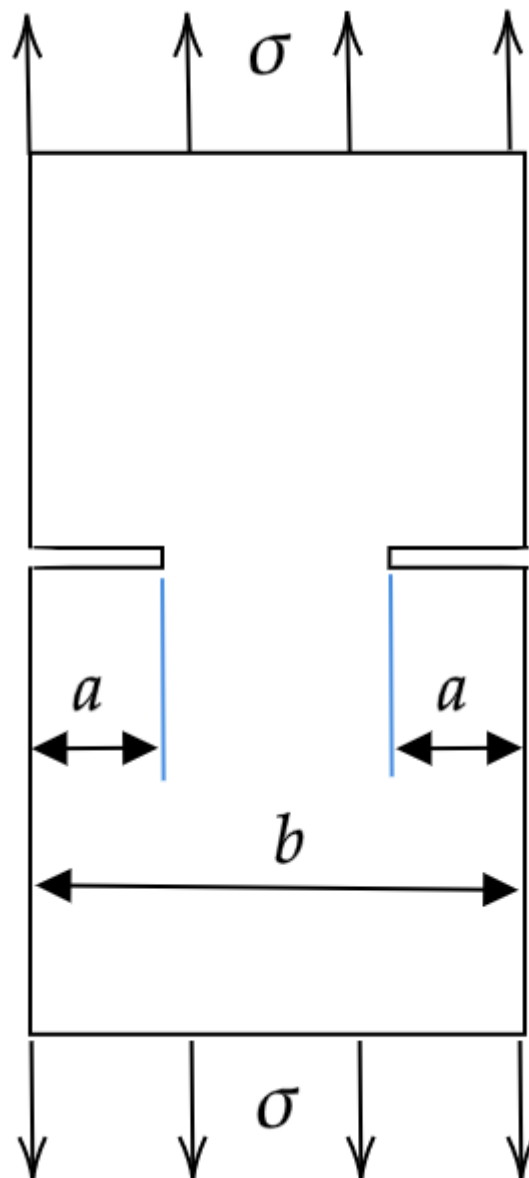
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

tamanho inicial a_0 , sujeita a um carregamento de tração, conforme figura Figura 14. A função da correção do fator de intensidade de tensão para esse exemplo é dada por ((TADA H.; PARIS, 2000):

$$f(a(N)) = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a(N)}{2b}\right)}. \quad (43)$$

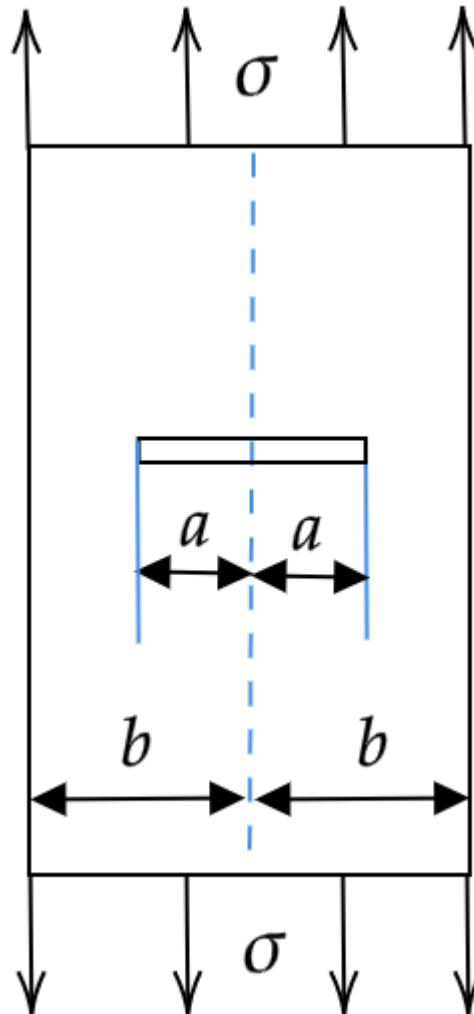
Exemplo 3: Placa de largura finita e com uma trinca na aresta. O exemplo em tela representa uma placa de largura finita, com largura b com uma trinca central, de tamanho inicial a_0 , sujeita a um carregamento de tração, conforme figura Figura 15. A função de correção do fator de intensidade de tensão nesse exemplo é dado por

Figura 13 – Placa finita com dupla trinca nas arestas



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 14 – Placa finita com trinca central



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

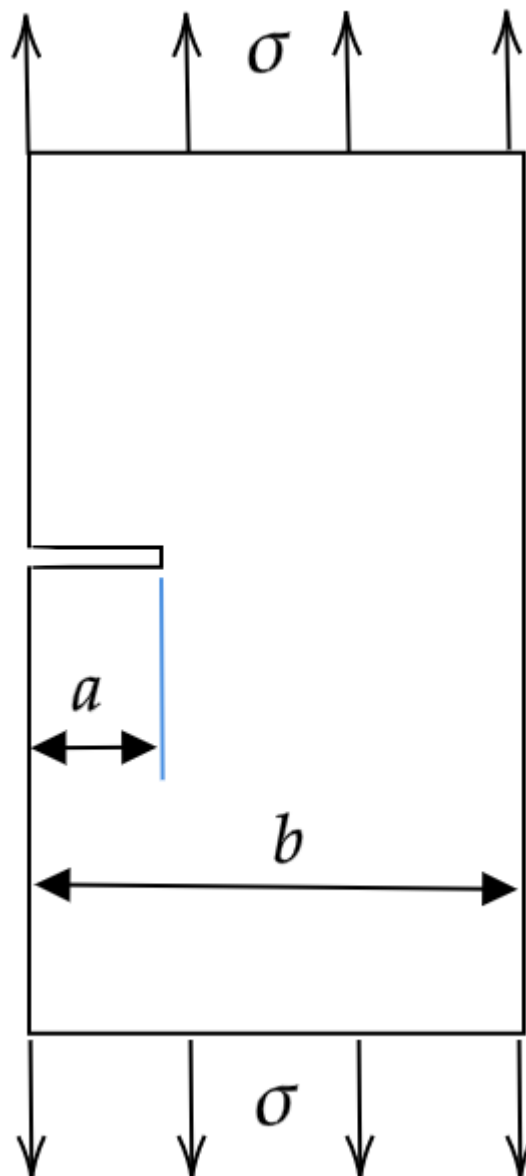
((TADA H.; PARIS, 2000):

$$f(a(N)) = 1,122 - 0,231 \left(\frac{a(N)}{b} \right) + 10,55 \left(\frac{a(N)}{b} \right)^2 - 21,72 \left(\frac{a(N)}{b} \right)^3 + 30,39 \left(\frac{a(N)}{b} \right)^4. \quad (44)$$

3.5 ANÁLISE E IMPLEMENTAÇÃO

O presente estudo apresenta uma nova forma de calcular a cota superior para modelos de propagação de trincas. A solução aproximada é comparada com a cota superior proposta por Santos (2015), juntamente com a cota inferior e com a solução numérica aproximada obtida pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4). Santos (2015) comprovou a eficácia da utilização do método RK4 através de um exemplo numérico no qual se comparou a solução analítica com a numérica aproximada,

Figura 15 – Placa finita com trinca na aresta



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Tabela 5 – Parâmetros que ajustam os modelos de propagação de trinca para aços ferríticos e o Al 2024 T351 – Exemplos 1, 2 e 3.

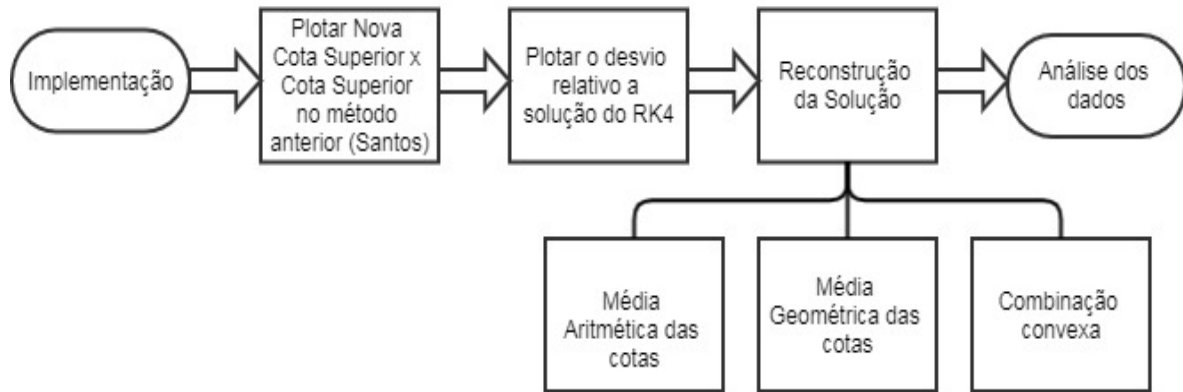
Propriedades - Aços Ferríticos: $K_c = 250 \text{ MPa.m}^{1/2}$, $\Delta K_{th} = 7 \text{ MPa.m}^{1/2}$				
Modelo	C (m/ciclo)	γ	m	R
Paris-Erdogan	$6,9 \cdot 10^{-12}$	-	3,0	-
Forman	$2 \cdot 10^{-9}$	-	2,9	0
Walker	$7 \cdot 10^{-12}$	1	2,0	0
Priddle	$2 \cdot 10^{-5}$	-	2,0	0
Propriedades - Al 2024 T351: $K_c = 37 \text{ MPa.m}^{1/2}$, $\Delta K_{th} = 3,3 \text{ MPa.m}^{1/2}$				
Modelo	C (m/ciclo)	γ	m	R
McEvily	$1,811 \cdot 10^{-9}$	-	-	0,5

Fonte: Santos (2015).

cujo erro era da ordem de 10^{-12} . Utilizaram-se dados da literatura, em conformidade com os estudos realizados por Ávila e Santos (2015, 2018), para definição dos parâmetros aplicados a três exemplos. Estes dados podem ser observados na tabela 5. Para todos os exemplos são utilizados os seguintes dados: número de ciclos, N, entre 0 a 900.000 ciclos, tamanho da trinca inicial $a_0 = 1\text{mm}$ e largura da placa $b = 100\text{mm}$. O valor do carregamento, $\Delta\sigma$, utilizado em cada modelo, é determinado de forma a melhor representar o crescimento da trinca. Esses dados apresentados são arbitrários, e com base nos estudos de Santos 2015. Posteriormente, a avaliação das cotas em relação ao RK4 é obtida através das seguintes relações: gráficos representando o número de ciclos (N) versus o tamanho de trinca (a), o desvio relativo a cada número de ciclo e a reconstrução da solução, conforme acha-se ilustrado na figura Figura 16. Também busca-se analisar o tempo de computação necessário para um número de ciclos pré-determinado para cada método utilizado.

3.6 CONCLUSÃO E DISCUSSÃO

Tomando como base a simulação computacional dos três exemplos propostos, as conclusões são obtidas através dos valores dos desvios relativos entre a solução numérica aproximada, RK4, e as novas cotas superiores para cada modelo, bem como em relação à combinação convexa das cotas inferior e superior. Verifica-se o gasto computacional da nova metodologia, comparando os tempos computacionais em rela-

Figura 16 – Fluxograma de Implementação Numérico Computacional

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

ção aos resultados utilizando a solução numérica aproximada para cada modelo.

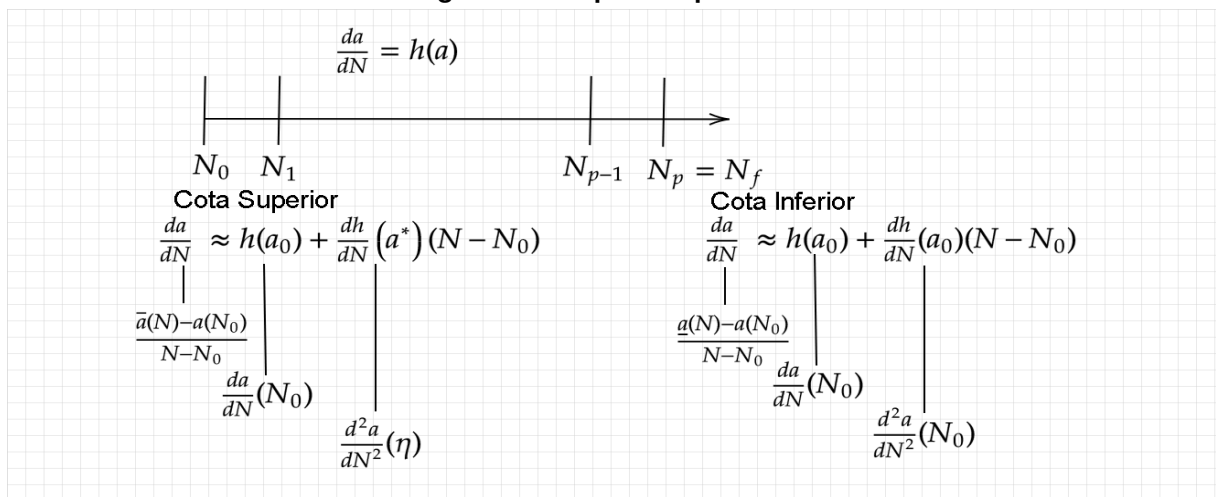
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O presente capítulo apresenta o desenvolvimento e a implementação computacional da proposta para a cota superior na metodologia em estudo. No sentido de avaliar a nova cota superior, o problema de valor inicial (PVI) foi desenvolvido para três exemplos. Foram calculados quatro valores, os três propostos por Ávila e Santos 2015, quais sejam: cota inferior (LB), cota superior (UB) e solução analítica por Runge Kutta de quarta ordem (KR4), além da nova forma de cálculo proposta no presente trabalho para a cota superior (Cota Superior - Terceira derivada). Os cálculos foram programados com a utilização do *software* livre GNU Octave.

4.1 ESTABELECIMENTO DA COTA SUPERIOR

Dada a equação diferencial ordinária EDO $da/dN = h(a)$, em que $a = a(N)$, e, supondo um particionamento do domínio $[N_0, N_p]$, tal que $N_0, N_1, \dots, N_{p-1}, N_f = N_p$, conforme ilustrado na 17. Designando $a_i \approx a(N_i), \forall i = 0, \dots, p$. Para o ponto N_{i+1} da partição: $\left. \frac{da}{dN} \right|_{N_{i+1}} \approx h(\sigma_i); \forall i = 0, \dots, p$. Através de uma expansão por Euler de primeira ordem é possível determinar a cota inferior como: $\frac{da}{dN} \approx h(a_0) + \frac{dh}{dN}(a_0)(N - N_0)$. Supondo $\frac{da}{dN} \approx \frac{a(N) - a(N_0)}{N - N_0}$, é possível escrever para a cota inferior (\underline{a}) a expansão de

Figura 17 – Expansão por Euler



Fonte: Próprio Autor.

segundo ordem como:

$$\underline{a}(N) = a(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{d^2a}{dN^2}(N_0)(N - N_0)^2. \quad (45)$$

A cota superior pode ser aproximada pela forma $\frac{da}{dN} \approx h(a_0) + \frac{dh}{dN}(a^*)(N - N_0)$, em que $a^* = a(\eta)$ e $\eta \in [N_0, N_p]$.

Supondo $\frac{da}{dN} \approx \frac{\bar{a}(N) - a(N_0)}{N - N_0}$, é possível escrever para a cota superior (\bar{a}) a expansão em segunda ordem como:

$$\bar{a}(N) = a(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{d^2a}{dN^2}(\eta)(N - N_0)^2. \quad (46)$$

As equações 45 e 46 implicam:

$$|\bar{a} - \underline{a}| = \left| \frac{d^2a}{dN^2}(\eta) - \frac{d^2a}{dN^2}(N_0) \right| (N - N_0)^2 \geq \left| \left| \frac{d^2a}{dN^2}(\eta) \right| - \left| \frac{d^2a}{dN^2}(N_0) \right| \right| (N - N_0)^2. \quad (47)$$

A equação 47 implica:

$$\left| \frac{d^2a}{dN^2}(\eta) \right| \in \left(\left| \frac{\bar{a} - \underline{a}}{(N - N_0)^2} \right| - \frac{d^2a}{dN^2}(N_0); \left| \frac{\bar{a} - \underline{a}}{(N - N_0)^2} \right| + \frac{d^2a}{dN^2}(N_0) \right). \quad (48)$$

Por outro lado tem-se:

$$|\bar{a} - a| + |a - \underline{a}| \geq |\bar{a} - \underline{a}| \geq \left| \left| \frac{da^2}{dN^2}(\eta) \right| - \left| \frac{da^2}{dN^2}(N_0) \right| \right| (N - N_0)^2. \quad (49)$$

A equação 49 implica em:

$$\left| \frac{d^2a}{dN^2}(\eta) \right| \in \left(\frac{|\bar{a} - a| + |a - \underline{a}|}{(N - N_0)^2} - \left| \frac{d^2a}{dN^2}(N_0) \right|, \frac{|\bar{a} - a| + |a - \underline{a}|}{(N - N_0)^2} + \left| \frac{d^2a}{dN^2}(N_0) \right| \right). \quad (50)$$

Considere o intervalo $[N_0, N]$, $\forall N \in [N_0, N_f]$, em uma aproximação de primeira ordem tem-se o erro:

$$e = \frac{(N - N_0)^2}{2!} \frac{d^2 a}{dN^2}(\xi), \quad (51)$$

para algum $\xi \in [N_0, N]$. Desde que $\frac{d^2 a}{dN^2}$ seja crescente: $\max \frac{d^2 a}{dN^2}(\xi) = \frac{d^2 a}{dN^2}(\eta)$, que implica em:

$$\left| \frac{d^2 a}{dN^2}(\eta) \right| \in \left(\left| \frac{d^2 a}{dN^2}(\xi) \right| - \left| \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0) \right|, \left| \frac{d^2 a}{dN^2}(\xi) \right| + \left| \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0) \right| \right). \quad (52)$$

De outro modo sabendo que $h(a) = h(N, a(N))$, nota-se que

$$\frac{d^2 a}{dN^2}(N) = \frac{\partial h}{\partial N}(N, a(N)) + h(N, a(N)) \frac{\partial h}{\partial N}(N, a(N)), \quad (53)$$

e supondo limitações ($\exists M, k > 0$, então $\left| \frac{d^2 a}{dN^2}(N) \right| \leq M$ e $|h(N, a(N)) - h(N, \theta)| = \left| \frac{\partial h}{\partial a}(N, a(\xi)) \right| |a(N) - \theta| \leq k |a(N) - \theta|$, com $a(\xi) \in (a(N), \theta)$). Assim a propagação do erro pode ser escrita da seguinte forma: $e_{i+1} - e_i = a_{i+1} - a(N_{i+1}) - (a_i - a(N_i))$; sendo $e_{i+1} = a_{i+1} - a(N_{i+1})$, e $e_i = (a_i - a(N_i))$. Em uma aproximação de primeira ordem tomando-se $a_{i+1} - a_i = (N_{i+1} - N_i)h(a_i)$, e $(a(N_{i+1}) - a(N_i)) = (N_{i+1} - N_i)h(N_i, a(N_i)) + \frac{(N_{i+1} - N_i)^2}{2!} \frac{d^2 h}{dN^2}(\xi, a(\xi))$, $\xi \in (N_i, N_{i+1})$. Isto implica em $e_{i+1} - e_i = (N_{i+1} - N_i)(h(a_i) - h(N_i, a(N_i))) + \frac{(N_{i+1} - N_i)^2}{2!} \frac{d^2 h}{da^2}(\xi)$. Portanto:

$$|e_{i+1} - e_i| \leq |N_{i+1} - N_i| |h(a_i) - h(N_i, a(N_i))| + \frac{(N_{i+1} - N_i)^2}{2!} \left| \frac{d^2 h}{dN^2}(\xi) \right|. \quad (54)$$

Da equação 54, sabe-se que $|N_{i+1} - N_i| = \Delta N_i$ e $|h(a_i) - h(N_i, a(N_i))| \leq k |a_i - a(N_i)| = e_i$. Sabe-se ainda que $\left| \frac{d^2 h}{dN^2}(\xi) \right| \leq M$. Logo pode-se escrever:

$$|e_{i+1} - e_i| \leq (N_{i+1})k|e_i| + M \frac{\Delta N_{i+1}^2}{2!} \quad (55)$$

ou

$$|e_{i+1}| \leq (1 + kN_{i+1})|e_i| + M \frac{\Delta N_{i+1}^2}{2!}. \quad (56)$$

Note que não tem-se $\frac{d^2 a}{dN^2}(\eta)$. Para expansões em segunda ordem o erro envolvido deve

ser da ordem seguinte, $\frac{(N-N_0)^3}{3!} \frac{d^3a}{dN^3}(\bar{\eta})$, $\bar{\eta} \in (N_0, N)$. Assim, retornando na equação (50), pode-se escrever:

$$\left| \frac{d^2a}{dN^2}(\eta) \right| \in \left(\left| \frac{2}{3!}(N - N_0) \frac{d^3a}{dN^3}(\eta) \right| - \left| \frac{d^2a}{dN^2}(N_0) \right|, \left| \frac{2}{3!}(N - N_0) \frac{d^3a}{dN^3}(\eta) \right| + \left| \frac{d^2a}{dN^2}(N_0) \right| \right). \quad (57)$$

Neste contexto pode-se tomar:

$$\bar{a}(N) = a(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \left(\frac{2}{3!}(N - N_0) \left| \frac{d^3a}{dN^3}(\bar{\eta}) \right| + \left| \frac{d^2a}{dN^2}(N_0) \right| \right) (N - N_0)^2. \quad (58)$$

Para $\bar{\eta} \in (N_0, N_f)$, assim tem-se uma ampla possibilidade de escolha. Por exemplo, tomando o termo $\bar{\eta} = N_0$. Sabendo que

$$\left| \frac{d^2a}{dN}(\eta) \right| \in \left(\frac{|\bar{a} - a| + |a - a|}{(N - N_0)^2} - \left| \frac{d^2a}{dN^2}(N_0) \right|, \frac{|\bar{a} - a| + |a - a|}{(N - N_0)^2} + \left| \frac{d^2a}{dN^2}(N_0) \right| \right), \quad (59)$$

note que o erro relacionado às aproximações é:

$$\frac{(N - N_0)^3}{3!} \frac{d^3a}{dN^3}(\eta) - \frac{(N - N_0)^2}{2!} \frac{d^2a}{dN^2}(\eta), \forall \eta \in (N_0, N). \quad (60)$$

Neste contexto, considerando o comportamento exponencial de "a", adotou-se o limite superior para a segunda derivada em "a":

$$\frac{d^2a}{dN^2}(\eta) = \frac{(N - N_0)}{3!} \frac{d^3a}{dN^3}(\eta) - \frac{1}{2!} \frac{d^2a}{dN^2}(\eta) + \frac{(N - N_0)}{3!} \frac{d^3a}{dN^3}(\eta) + \frac{d^2a}{dN^2}(N_0); \quad (61)$$

sendo:

$$\frac{(N - N_0)}{3!} \frac{d^3a}{dN^3}(\eta) - \frac{1}{2!} \frac{d^2a}{dN^2}(\eta) = \frac{|\bar{a} - a|}{(N - N_0)} \quad (62)$$

e

$$\bar{a}(N) = a(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{d^2a}{dN^2}(\eta)(N - N_0)^2. \quad (63)$$

Sabendo que:

$$\frac{(N - N_0)}{3!} \frac{d^3a}{dN^3}(\eta) = \frac{|a - a|}{(N - N_0)^2}, \quad (64)$$

pode-se escrever:

$$\frac{d^2a}{dN^2}(\eta) + \frac{1}{2!} \frac{d^2a}{dN^2}(\eta) = \frac{2}{3!}(N - N_0) \frac{d^3a}{dN^3}(\eta) + \frac{d^2a}{dN^2}(N_0). \quad (65)$$

Assim:

$$\frac{3}{2} \frac{d^2 a}{dN^2}(\eta) = \frac{2}{6}(N - N_0) \frac{d^3 a}{dN^3}(\eta) + \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0), \quad (66)$$

implica em:

$$\frac{d^2 a}{dN^2}(\eta) = \frac{2}{9}(N - N_0) \frac{d^3 a}{dN^3}(\eta) + \frac{2}{3} \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0). \quad (67)$$

Objetivando uma proposta para a segunda derivada em " \bar{a} ", tomou-se $\eta = N_0$ na parcela direita:

$$\frac{d^2 a}{dN^2}(\eta) = \frac{2}{9}(N - N_0) \frac{d^3 a}{dN^3}(N_0) + \frac{2}{3} \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0). \quad (68)$$

A aplicação da equação 68 na equação 45, resulta em uma cota superior definida por:

$$\bar{a}(N) = a(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{2}{3} \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0)(N - N_0)^2 + \frac{2}{9} \frac{d^3 a}{dN^3}(\eta)(N - N_0)^3, \forall \eta \in (N_0, N). \quad (69)$$

Note que:

$$\begin{aligned} \underline{a}(N) &= a(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0)(N - N_0)^2; \\ \bar{a}(N) &= a(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{2}{3} \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0)(N - N_0)^2 + \frac{2}{9} \frac{d^3 a}{dN^3}(\eta)(N - N_0)^3, \end{aligned} \quad (70)$$

para todo $\eta \in (N_0, N)$.

Logo, $\underline{a}(N) + \underline{e} = a(N)$, ou seja:

$$\underline{e} = \frac{1}{3!}(N - N_0)^3 \frac{d^3 a}{dN^3}(\eta) - \frac{1}{2}(N - N_0)^2 \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0), \quad (71)$$

sendo o termo $\frac{1}{2}(N - N_0)^2 \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0)$ desprezado para fins do presente estudo.

4.1.1 Cota Superior para o Modelo de Paris

A determinação da cota superior para o modelo de Paris inicialmente é apresentada a equação do Modelo de Propagação de trincas, constituída por uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, não linear e autônoma, cujas determinações consistem em um problema de Cauchy, tendo como valor inicial $a(N_0) = a_0$:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m = C(\Delta \sigma \sqrt{\pi a(N)} f(a(N)))^m. \quad (72)$$

Assim, utilizando a expansão por Euler e a análise de propagação do erro defini-se a Cota Superior pela equação (69), qual seja:

$$\bar{a}(N) = a(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{2}{3} \frac{d^2a}{dN^2}(N_0)(N - N_0)^2 + \frac{2}{9} \frac{d^3a}{dN^3}(\eta)(N - N_0)^3, \forall \eta \in (N_0, N). \quad (73)$$

A terceira derivada da equação (69), apêndice B, para o modelo de Paris-Erdogan é:

$$\begin{aligned} \frac{d^3a}{dN^3}(a(N)) &= \frac{d}{dN} \left(\frac{d^2a}{dN^2}(a(N)) \right); \\ &= \frac{d}{da} \left(\frac{d^2a}{dN^2}(a(N)) \right) \frac{da}{dN}(a(N)); \\ &= m^2 C^3 \Delta K^{3m} \left\{ \frac{(1 - \frac{1}{m})}{2a^2} + \frac{f'(a)}{f(a)} \left[\frac{2}{a} + \left(2 - \frac{1}{m} \right) \frac{f'(a)}{f(a)} + \frac{f''(a)}{mf'(a)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (74)$$

O novo teorema adota as seguintes hipóteses:

$$H1 : \Delta\sigma(N) = \Delta\sigma_0, \forall N \in [N_0, N_1];$$

$$H2 : \begin{cases} f \in C^1([a_0, a_1]; \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}); \\ 0 < (f(a_0) \leq f(x) \leq f(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \\ f'(a_0) \leq f'(x) \leq f'(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \end{cases}$$

$$H3 : m \geq 3.$$

Seja $f(\cdot)$ e $\Delta\sigma(\cdot)$ funções que satisfazem a hipótese (H1) e (H2), respectivamente, e $a_0 \in [a_0, a_N]$, as seguintes cotas Superior e Inferior são válidas $\forall N \in [N_0, N_1]$:

$$\begin{aligned} a(N) - a_0 &\leq C \left\{ (\Delta K(a_0))^m + \left(\frac{2mC}{3} \right) (\Delta K(a_0))^{2m} \left[\frac{1}{2a_0} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a_0) \right] (N - N_0) \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{2m^2 C^2}{9} \right) \Delta K(a_0)^{3m} \left\{ \frac{(1 - \frac{1}{m})}{2a_0^2} + \frac{f'(a_0)}{f(a_0)} \left[\frac{2}{a_0} + \left(2 - \frac{1}{m} \right) \frac{f'(a_0)}{f(a_0)} + \frac{f''(a_0)}{mf'(a_0)} \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. (N - N_0)^2 \right\} (N - N_0); \end{aligned} \quad (75)$$

$$a(N) - a_0 \geq C \left\{ (\Delta K(a_0))^m + \left(\frac{mC}{2} \right) (\Delta K(a_0))^{2m} \left[\frac{1}{2a_0} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a_0) \right] (N - N_0) \right\} (N - N_0);$$

$$\forall N \in [N_0, N_1].$$

A prova se dá utilizando a expansão por Euler e a análise de propagação do erro em que se defini a Cota Superior pela equação (69):

$$\bar{a}(N) = a(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{2}{3} \frac{d^2a}{dN^2}(N_0)(N - N_0)^2 + \frac{2}{9} \frac{d^3a}{dN^3}(\eta)(N - N_0)^3, \forall \eta \in (N_0, N). \quad (77)$$

4.1.2 Cota Superior para o Modelo de Forman

A determinação da cota superior para o modelo de Forman inicialmente é apresentada a equação do Modelo de Propagação de trincas, constituída por uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, não linear e autônoma, cujas determinações consistem em um problema de Cauchy, tendo como valor inicial $a(N_0) = a_0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a \in C^1(N_0, N_1), \text{ tal que :} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = \frac{C_F(\Delta K)^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K}, \forall N \in (N_0, N_1); \\ a(N_0) = a_0. \end{array} \right. \quad (78)$$

Assim, utilizando a expansão por Euler e a análise de propagação do erro defini-se a Cota Superior pela equação (69):

$$\bar{a}(N) = a(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{2}{3} \frac{d^2a}{dN^2}(N_0)(N - N_0)^2 + \frac{2}{9} \frac{d^3a}{dN^3}(\eta)(N - N_0)^3, \forall \eta \in (N_0, N). \quad (79)$$

A terceira derivada da equação (69), apêndice C, para o modelo de Forman é:

$$\begin{aligned} \frac{d^3a}{dN^3}(N) = & \left(\frac{C\Delta K^m}{(1-R)K_c - \Delta K} \right)^3 \left\{ 2 \left(m + \frac{1}{\frac{(1-R)K_c}{\Delta K} - 1} \right)^2 \left(\frac{1}{2a} - \frac{f'(a)}{f(a)} \right)^2 + \right. \\ & \frac{1}{2a} \left(\frac{m}{2a} + \left(\frac{[(1-R)K_c]\Delta K}{[\Delta K - (1-R)K_c]^2} \right) \left(\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right) - \frac{1}{\frac{(1-R)K_c}{\Delta K} - 1} \right) + \\ & \left. \frac{m}{f(a)^2} \left(f(a)f''(a) - f'(a)^2 + \frac{\Delta K^2 f(a)^2 - f(a)f''(a)}{m[\Delta K - (1-R)K_c]} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (80)$$

Tomando como base o presente estudo, o novo teorema adota as seguintes hipóteses:

$$H1 : \Delta\sigma(N) = \Delta\sigma_0, \forall N \in [N_0, N_1];$$

$$H2 : \begin{cases} \mathbf{f} \in C^1([a_0, a_1]; \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}); \\ 0 < (\mathbf{f}(\mathbf{a}_0) \leq f(x) \leq f(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \\ \mathbf{f}'(\mathbf{a}_0) \leq f'(x) \leq f'(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \end{cases}$$

$$H3 : m \geq 3.$$

Seja $f(\cdot)$ e $\Delta\sigma(\cdot)$ funções que satisfazem a hipótese (H1) e (H2), respectivamente, e $a_0 \in [a_0, a_N]$, as seguintes cotas Superior e Inferior são válidas $\forall N \in [N_0, N_1]$:

$$a(N) - a_0 \leq \left\{ \begin{array}{l} \frac{C_F(\Delta K(a_0))^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K(a_0)} + \frac{2}{3} \left[\frac{C_F(\Delta K(a_0))^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K(a_0)} \right]^2 \cdot \\ \left[m_F + \frac{1}{(1-R)\frac{K_C}{\Delta K(a_0)} - 1} \right] \cdot \left[\frac{1}{(2a_0)} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a_0) \right] \Delta N \\ + \frac{2}{9} \frac{d^3 a}{dN^3} (N) \Delta N^2 \end{array} \right\} \Delta N; \quad (81)$$

$$a(N) - a_0 \geq \left\{ \begin{array}{l} \frac{C_F(\Delta K(a_0))^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K(a_0)} + \frac{1}{2} \left[\frac{C_F(\Delta K(a_0))^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K(a_0)} \right]^2 \cdot \\ \left[m_F + \frac{1}{(1-R)\frac{K_C}{\Delta K(a_0)} - 1} \right] \cdot \left[\frac{1}{(2a_0)} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a_0) \right] \Delta N \end{array} \right\} \Delta N, \quad (82)$$

sendo $\Delta N = (N - N_0)$, $\forall N \in [N_0, N_1]$. A prova se dá utilizando a expansão por Euler e a análise de propagação do erro em que se defini a Cota Superior pela equação (69):

$$\bar{a}(N) = a(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{2}{3} \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0)(N - N_0)^2 + \frac{2}{9} \frac{d^3 a}{dN^3}(\eta)(N - N_0)^3, \forall \eta \in (N_0, N). \quad (83)$$

4.2 COMBINAÇÃO CONVEXA DAS COTAS SUPERIOR E INFERIOR

Objetivando recompor a solução a partir de uma combinação linear das cotas \bar{a} e \underline{a} , supõem-se uma combinação linear:

$$a_\alpha(N) = \alpha \underline{a} + (1 - \alpha) \bar{a}(N), \text{ para } \alpha \in (0, 1). \quad (84)$$

Assim deseja-se obter um valor adequado de " α " para a proposta " $a_\alpha(N)$ ", portanto:

$$\begin{aligned} |a_\alpha - a| &\leq \alpha|\underline{a} - a| + (1 - \alpha)|\bar{a} - a|, \\ &\leq \alpha \frac{(N - N_0)^3}{3!} \frac{d^3 a}{dN^3}(\eta) + (1 - \alpha) \left[\frac{(N - N_0)^3}{3!} \frac{d^3 a}{dN^3}(\eta) - \frac{1}{2!} \frac{d^2 a}{dN^2}(\eta) \right], \quad (85) \\ &\leq \frac{(N - N_0)^3}{3!} \frac{d^3 a}{dN^3}(\eta) + \frac{(\alpha - 1)}{2!} \frac{d^2 a}{dN^2}(\eta) \leq \frac{(N - N_0)^3}{3!} \frac{d^3 a}{dN^3}(\eta). \end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned} a_\alpha(N) &= a(N_0) + (\Delta N) \frac{da}{dN}(N_0) + \left(\frac{2}{3} + \frac{\alpha}{3} \right) (\Delta N)^2 \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0) + (1 - \alpha) \frac{2}{9} (\Delta N)^3 \frac{d^3 a}{dN^3}(N_0); \\ a_\alpha - a &= \left(\frac{2}{3} + \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2} \right) (\Delta N)^2 \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0) + (1 - \alpha) \frac{2}{9} (\Delta N)^3 \frac{d^3 a}{dN^3}(N_0) - \frac{1}{3!} (\Delta N)^3 \frac{d^3 a}{dN^3}(\eta), \\ &= \left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha}{3} \right) (\Delta N)^2 \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0) + (1 - \alpha) \frac{2}{9} (\Delta N)^3 \frac{d^3 a}{dN^3}(N_0) - \frac{1}{3!} (\Delta N)^3 \frac{d^3 a}{dN^3}(\eta). \end{aligned} \quad (86)$$

Assim tem-se a seguinte desigualdade:

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha}{3} \right) (N - N_0)^2 \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0) + (1 - \alpha) \frac{2}{9} (N - N_0)^3 \frac{d^3 a}{dN^3}(N_0) \leq \frac{(N - N_0)^3}{3} \frac{d^3 a}{dN^3}(\eta). \quad (87)$$

Estabelece-se que quanto menor o lado esquerdo da desigualdade menor será o erro.

Seja $\beta = \left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha}{3} \right) (N - N_0)^2 \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0) + (1 - \alpha) \frac{2}{9} (N - N_0)^3 \frac{d^3 a}{dN^3}(N_0)$, e $\beta > \frac{1}{3!} (N - N_0)^3 \frac{d^3 a}{dN^3}(\eta)$,

logo, tomando $\eta = N_0$, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha}{3} \right) (N - N_0)^2 \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0) &\leq \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2\alpha}{9} \right) (N - N_0)^3 \frac{d^3 a}{dN^3}(N_0), \\ \left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha}{3} \right) (N - N_0)^2 \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0) &\leq \left(\frac{1}{9} + \frac{2\alpha}{9} \right) (N - N_0)^3 \frac{d^3 a}{dN^3}(N_0), \\ \left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{3} \right) \frac{d^2 a}{dN^2}(N_0) &\leq \left(\frac{1}{9} + \frac{2\alpha}{9} \right) (N - N_0) \frac{d^3 a}{dN^3}(N_0), \forall N \in (N_0, N_f]; \quad (88) \\ \gamma(\text{fixo}) = \frac{\frac{d^2 a}{dN^2}(N_0)}{\frac{d^3 a}{dN^3}(N_0)} &\leq \frac{\left(\frac{1}{9} + \frac{2\alpha}{9} \right)}{\left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha}{3} \right)} (N - N_0), \forall N \in (N_0, N_f]. \end{aligned}$$

Se valer para o valor mais baixo de $N - N_0$, então vale para os demais. Assim $N - N_0 = \Delta N$ pré selecionado, logo:

$$\frac{\gamma}{\Delta N} \left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha}{3} \right) \leq \left(\frac{1}{9} + \frac{2\alpha}{9} \right). \quad (89)$$

Neste contexto, é possível afirmar que:

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha}{3}\right) \frac{d^2a}{dN^2}(N_0) + (1 - \alpha) \frac{2}{9} \Delta N \frac{d^3a}{dN^3}(N_0) \leq \frac{N}{3} \frac{d^3a}{dN^3}(\eta)$$

$$\left(\frac{1}{3} \frac{d^2a}{dN^2}(N_0) - \frac{2}{9} \Delta N \frac{d^3a}{dN^3}(N_0)\right) \alpha \leq \frac{\Delta N}{3} \frac{d^3a}{dN^3}(\eta) - \frac{1}{6} \frac{d^2a}{dN^2}(N_0) - \frac{2\Delta N}{9} \frac{d^3a}{dN^3}(N_0). \quad (90)$$

Sabendo que o erro é dado por:

$$e = \frac{\Delta N^3}{3!} \frac{d^3a}{dN^3}(\eta), \quad (91)$$

é possível selecionar o erro e determinar o alfa (α), utilizado na combinação convexa, em função do ΔN .

Tomando como base a desigualdade Equação 92, e arbitrando valores de erro e variação de ciclos (ΔN) pode-se verificar uma série de valores válidos para α dentro do intervalo $[0,1]$. Estes valores válidos podem ser utilizados para estimar o α a ser empregado na combinação convexa:

$$\left(\frac{1}{3} \frac{d^2a}{dN^2}(N_0) - \frac{2}{9} \Delta N \frac{d^3a}{dN^3}(N_0)\right) \alpha \leq \frac{2e}{\Delta N^2} - \frac{1}{6} \frac{d^2a}{dN^2}(N_0) - \frac{2}{9} \Delta N \frac{d^3a}{dN^3}(N_0). \quad (92)$$

Por exemplo, para o modelo de Paris tomando um erro de $e = 0,00006$, e $\Delta N = 900.000$ ciclos, constata-se que para estes parâmetros o alfa deve ser: $\alpha \leq 0,47$.

4.3 AVALIAÇÃO DAS COTAS SUPERIORES E SOLUÇÕES

A avaliação é feita por meio da resolução de três exemplos numéricos, cujo número de ciclos está no intervalo entre 0 a 900.000 ciclos. O tamanho inicial da trinca $a_0 = 1,0 \text{ mm}$ e largura de placa $b = 100,0 \text{ mm}$. No sentido de relacionar os dados com os estudos de Santos (2015), foram utilizados os mesmos parâmetros relacionados aos materiais com base nos estudos de Barsom e Rolfe (1999), quais sejam: $C = 6,9 \cdot 10^{-12}$; $m=3$; $N_0 = 0$; $N_{final} = 9 \cdot 10^5$ ciclos, $\Delta\sigma = 70 \text{ MPa}$.

4.3.1 Avaliação da Cota Superior para o modelo de Paris

Para a resolução dos três exemplos, utilizou-se o valor de $a^* = 1,3a_0$ proposto por Santos (2015). Com a implementação é verificado o comportamento das cotas para o modelo de Paris-Erdogan, conforme mostram as figuras 13 a 20. As figuras apresentam em um gráfico $N \times a$, o crescimento da trinca através da solução definida pelas cotas superiores e inferior em relação à solução numérica aproximada calculada pelo método RK4, para os exemplos 1, 2 e 3 respectivamente. Conforme supracitado, para esse modelo é utilizado um carregamento arbitrário de $\Delta\sigma = 70\text{MPa}$, tendo este parâmetro sido utilizado com este valor no estudo original. Ambas as cotas superiores, àquela objeto do presente estudo e àquela obtida por meio de inspeção matemática, são plotadas no mesmo gráfico para fins de comparação.

Figura 18 – Funções de cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), cota inferior e solução por RK4, para o exemplo 1 modelo de Paris.

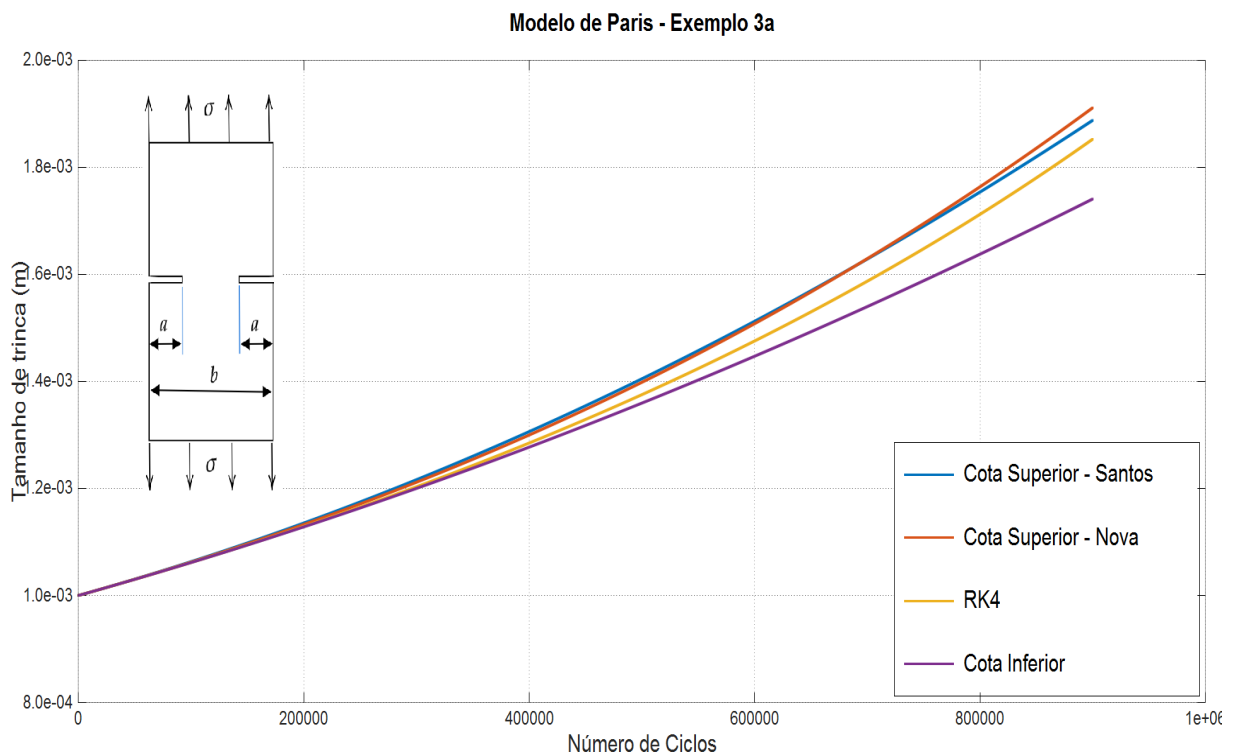
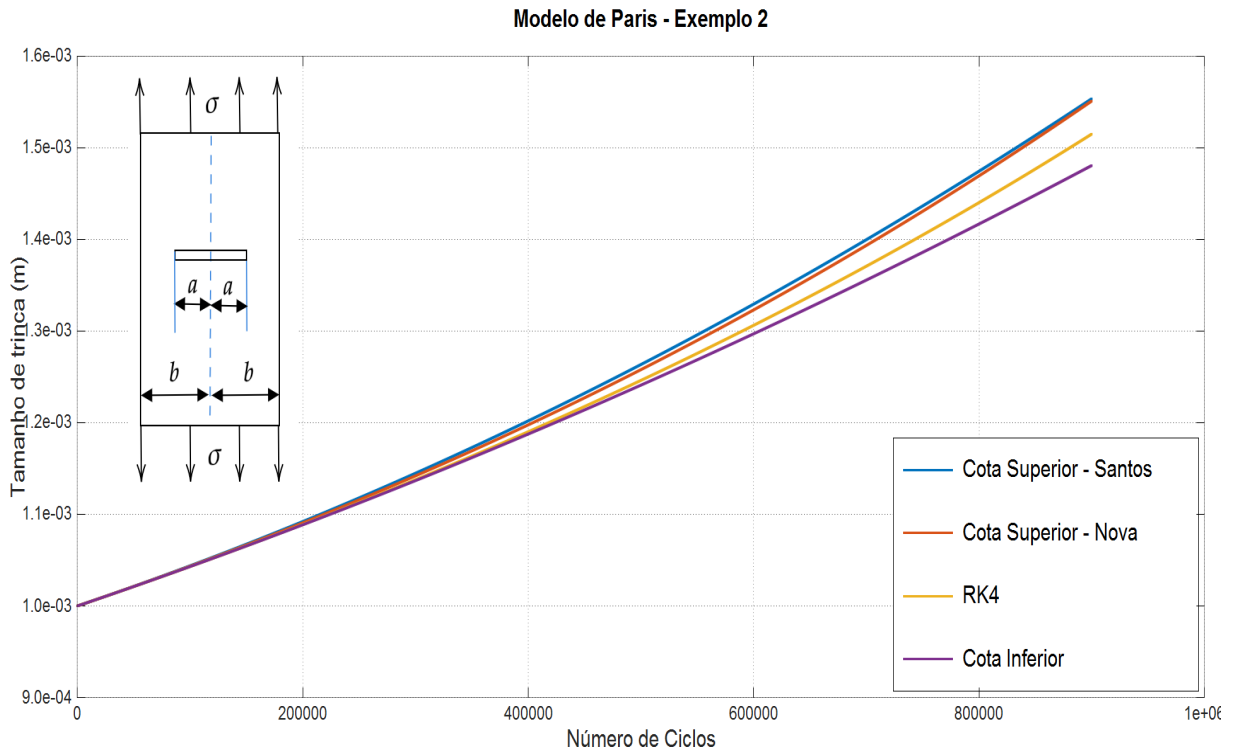
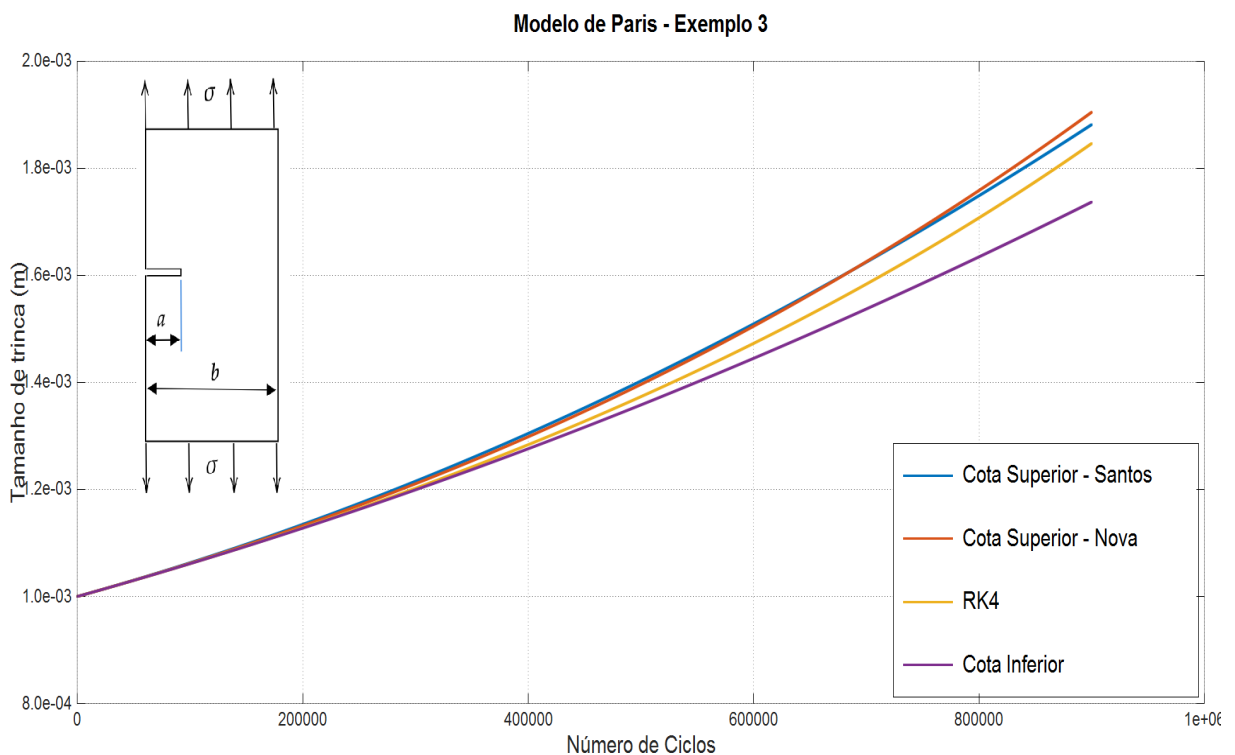


Figura 19 – Funções de cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), cota inferior e solução por RK4, para o exemplo 2 modelo de Paris.



Fonte: Próprio autor.

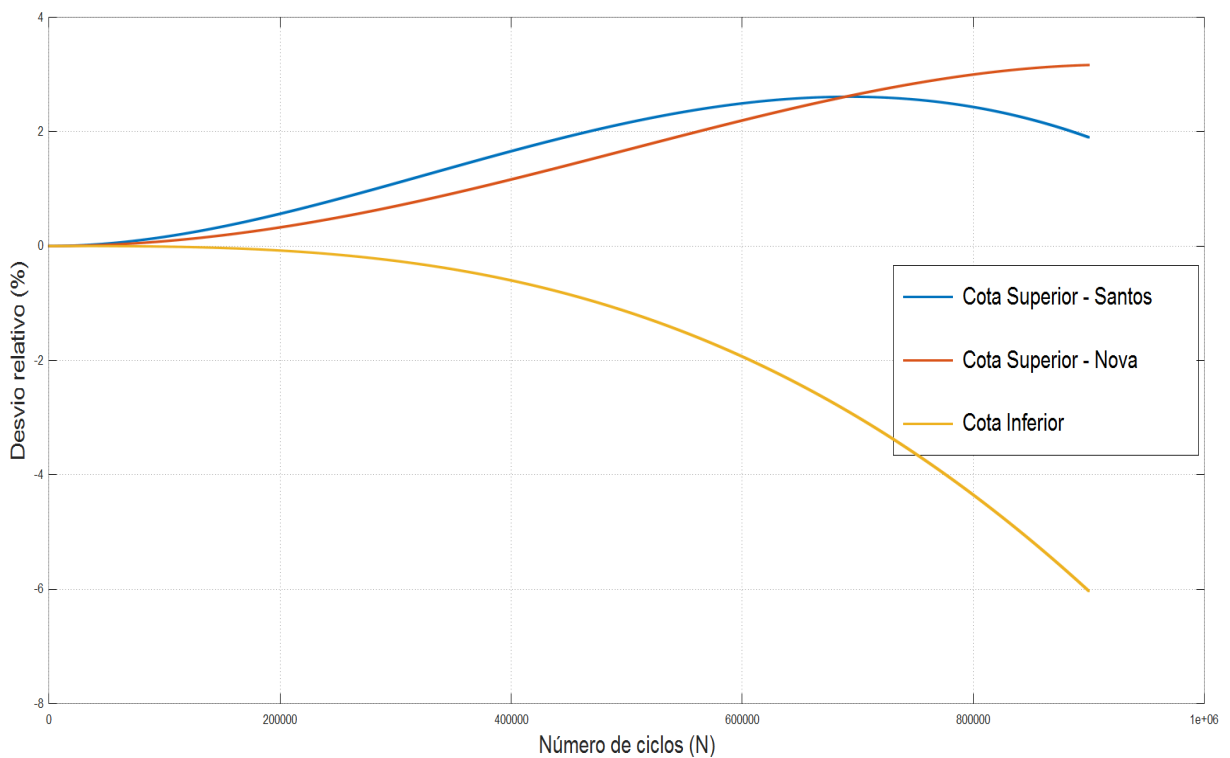
Figura 20 – Funções de cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), cota inferior e solução por RK4, para o exemplo 3 modelo de Paris.



Fonte: Próprio autor.

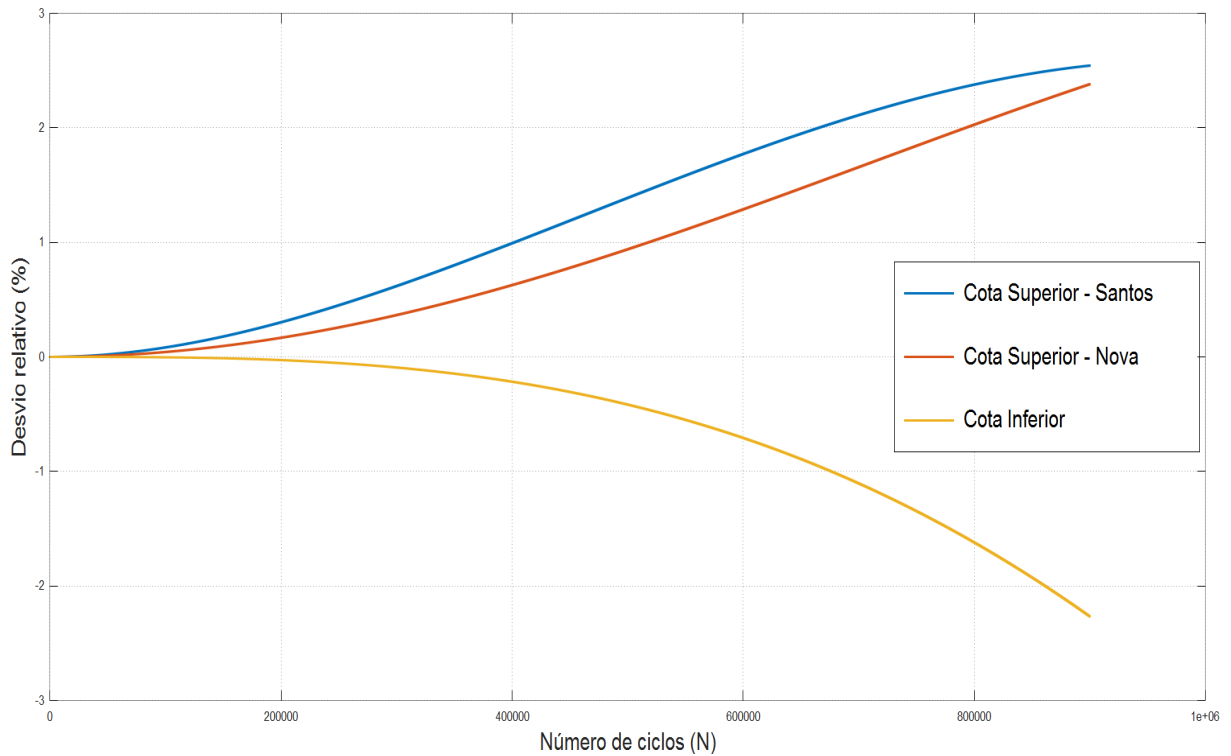
Posteriormente verifica-se o desvio relativo para cada um dos exemplos em relação ao método utilizado anteriormente, conforme mostram as figuras 21 a 23. As figuras apresentam em um gráfico o desvio relativo das cotas superiores, àquela proposta por Santos e a nova metodologia proposta, e a cota superior, em relação a solução obtida por RK4 adotada como sendo a solução exata.

Figura 21 – Desvio relativo das cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Paris.



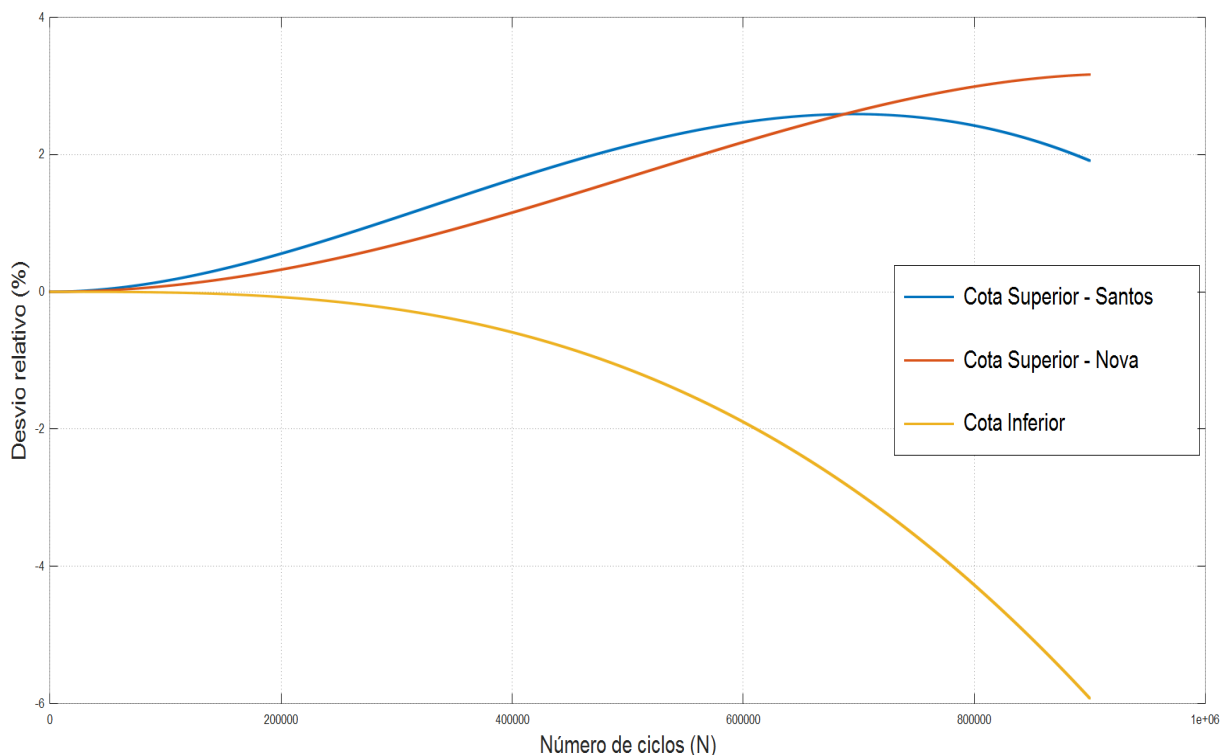
Fonte: Próprio autor.

Figura 22 – Desvio relativo das cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Paris.



Fonte: Próprio autor.

Figura 23 – Desvio relativo das cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 3 modelo de Paris.



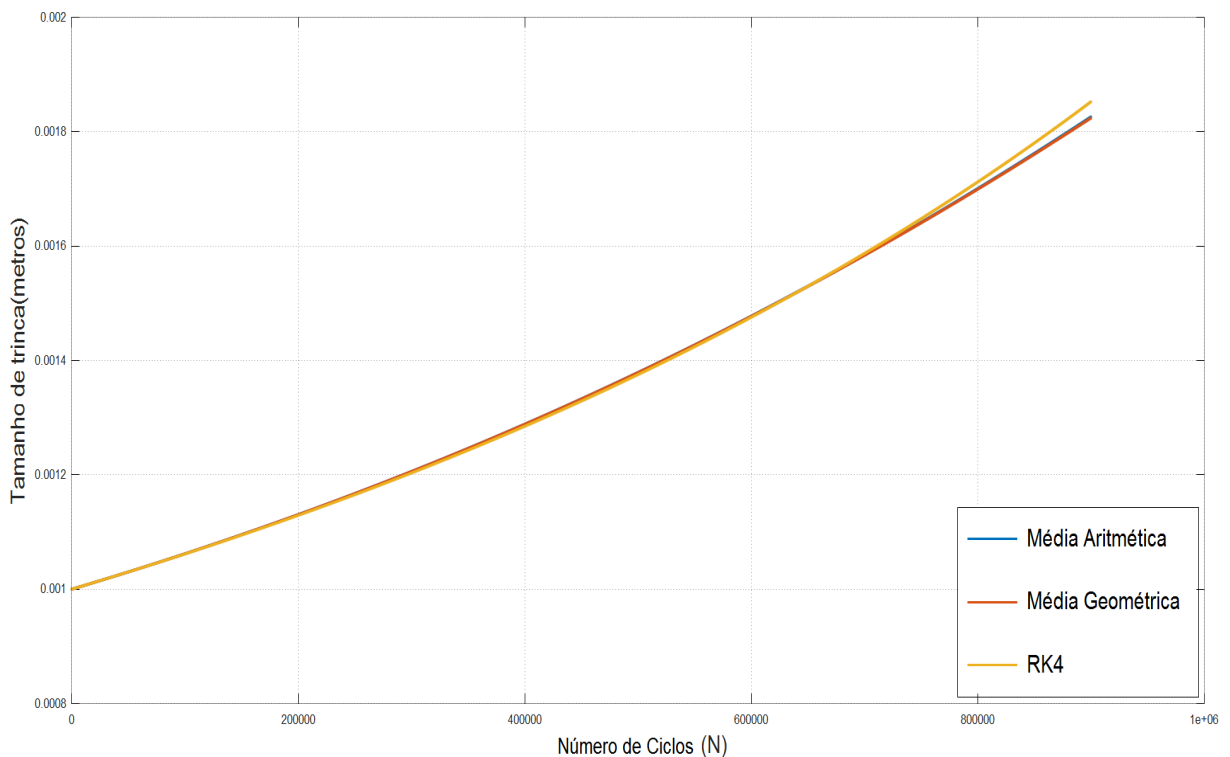
Fonte: Próprio autor.

Para o segundo exemplo, aquele envolvendo uma trinca central em tira de largura finita, a nova cota superior apresentou-se mais próxima da solução obtida por RK4 se comparada à anteriormente estabelecida. Contudo, para o primeiro e terceiro exemplos, a nova metodologia apresentou ao final dos ciclos um desvio levemente superior, porém ainda inferior a 5%. Não obstante o terceiro exemplo tenha apresentado um desvio superior ao final dos ciclos, isto ocorreu somente após o ciclo de número 687.566, tendo em vista que antes deste patamar o desvio relativo da nova metodologia era inferior ao da cota superior anteriormente adotada.

4.3.2 Avaliação da Solução Numérica aproximada para o modelo de Paris

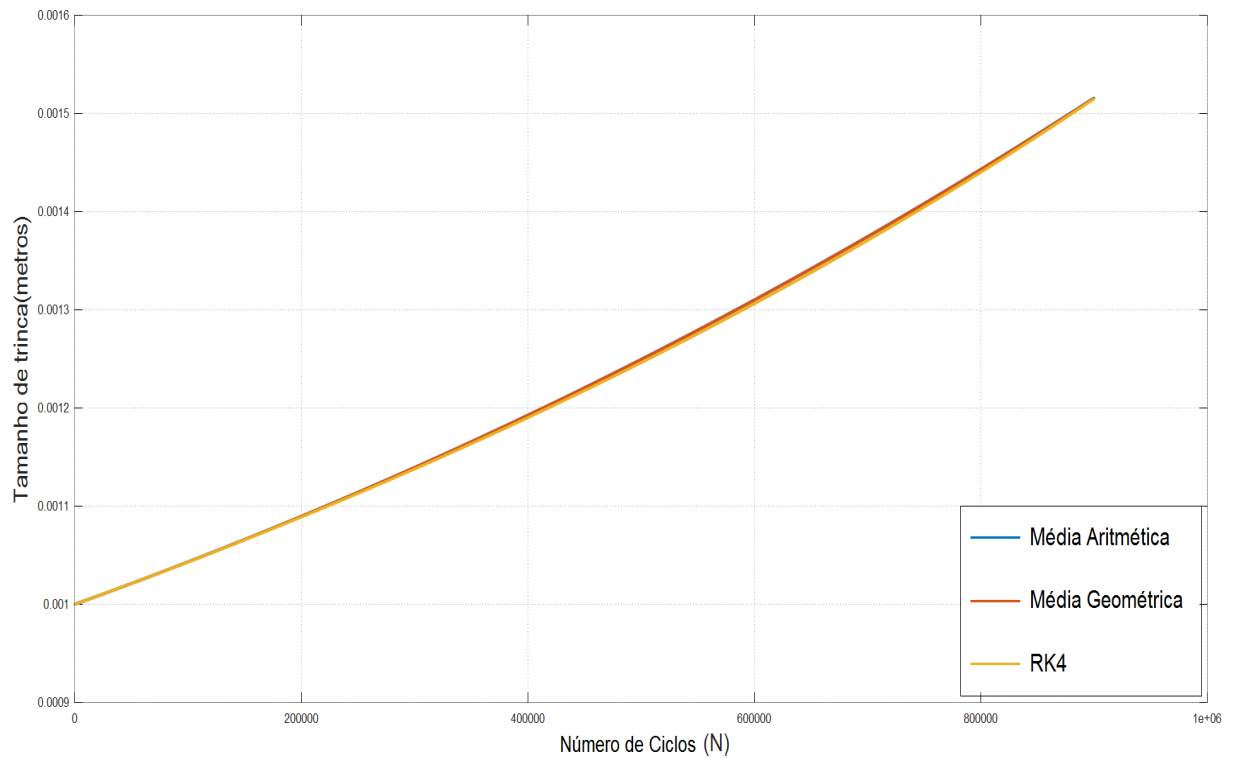
Com base nas novas cotas superiores busca-se encontrar uma solução numérica aproximada para o PVI, utilizando primeiramente a média aritmética e geométrica entre as cotas inferior e superior. As soluções são plotadas em relação à solução obtida pelo RK4, conforme acham-se ilustradas nas figuras 24 a 26.

Figura 24 – Média aritmética e geométrica da cota superior (nova metodologia), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Paris.



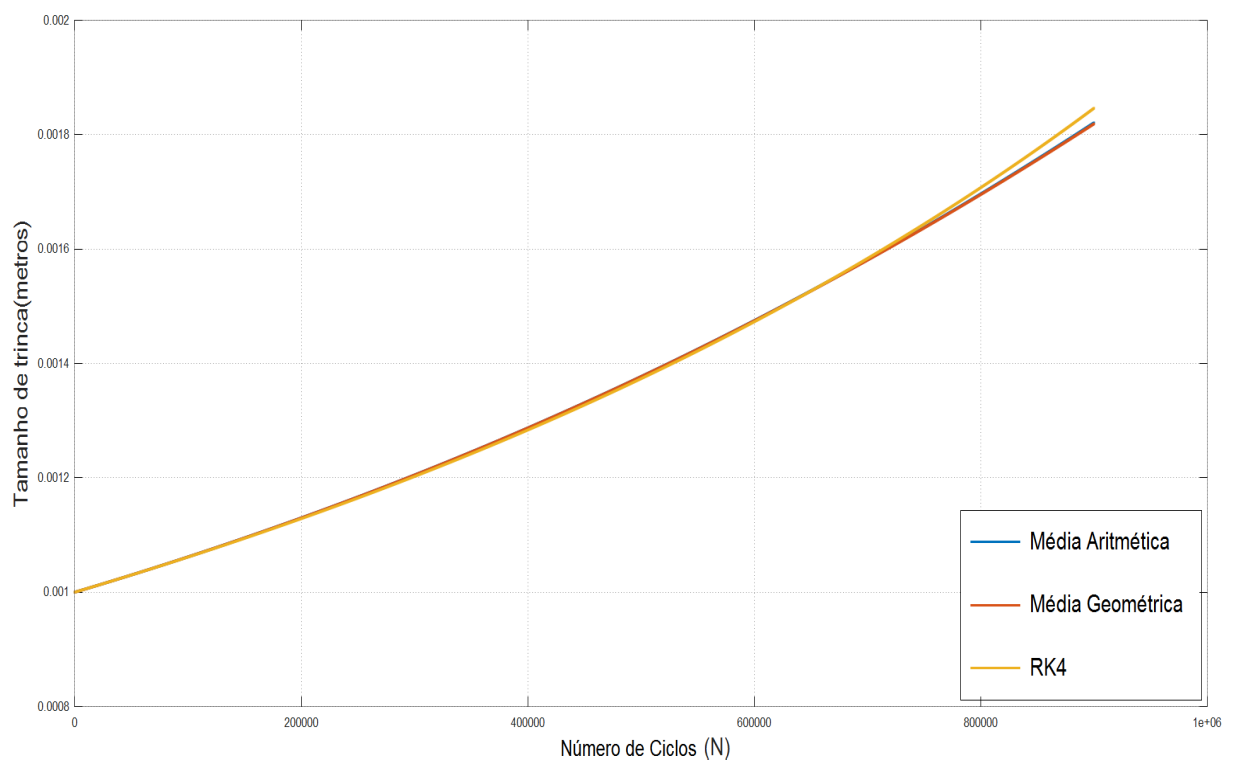
Fonte: Próprio autor.

Figura 25 – Média aritmética e geométrica da cota superior (nova metodologia), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Paris.



Fonte: Próprio autor.

Figura 26 – Média aritmética e geométrica da cota superior (nova metodologia), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 3 modelo de Paris.



Fonte: Próprio autor.

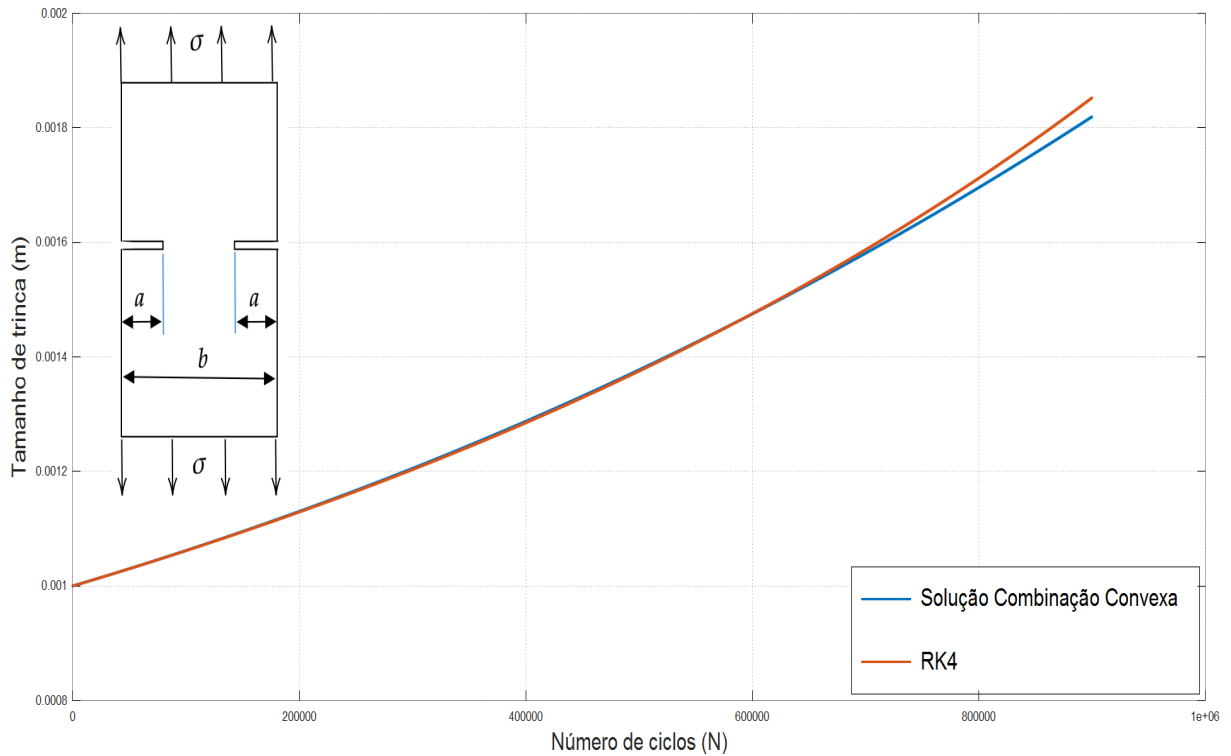
Uma combinação convexa entre a cota superior em estudo e a cota inferior é então calculada como proposta de solução numérica aproximada do PVI . O alfa é calculado com base na desigualdade Equação 92. Verifica-se que um intervalo de valores possível pode ser empregado. Por exemplo, arbitrando uma variação de ciclos (ΔN) para o intervalo inteiro, qual seja: 900.000 ciclos, e um erro $e = 0,000065$, e os valores calculados para o exemplo 2, obtém-se um valor de $\alpha = 0,5647$. A Tabela 6 ilustra os valores de ciclo e erro adotadas no presente estudo. O valor de alfa (α) é empregado na Equação 84 para obtenção de uma solução numérica aproximada. Em seguida são calculados e plotados os resultados para cada um dos três exemplos propostos, conforme ilustrado nas figuras 27 a 29. São então analisados os desvios relativos à combinação convexa em relação ao RK4 juntamente com os desvios das cotas em relação ao mesmo valor, para fins de comparação. Por fim são analisados os desvios das soluções numéricas aproximadas obtidas pela combinação convexa e pelas médias aritmética e geométrica em relação ao RK4. Os resultados estão ilustrados nas figuras 30 a 32 e os desvios nas figuras 33 a 35.

Tabela 6 – Tabela de valores adotados para cálculo da Combinação Convexa

Valores Combinação Convexa			
Exemplo	Erro (e)	Delta Ciclos	Alfa
Exemplo 1	0,000150	900.000	0,53867
Exemplo 2	0,000065	900.000	0,56755
Exemplo 3	0,000150	900.000	0,55670

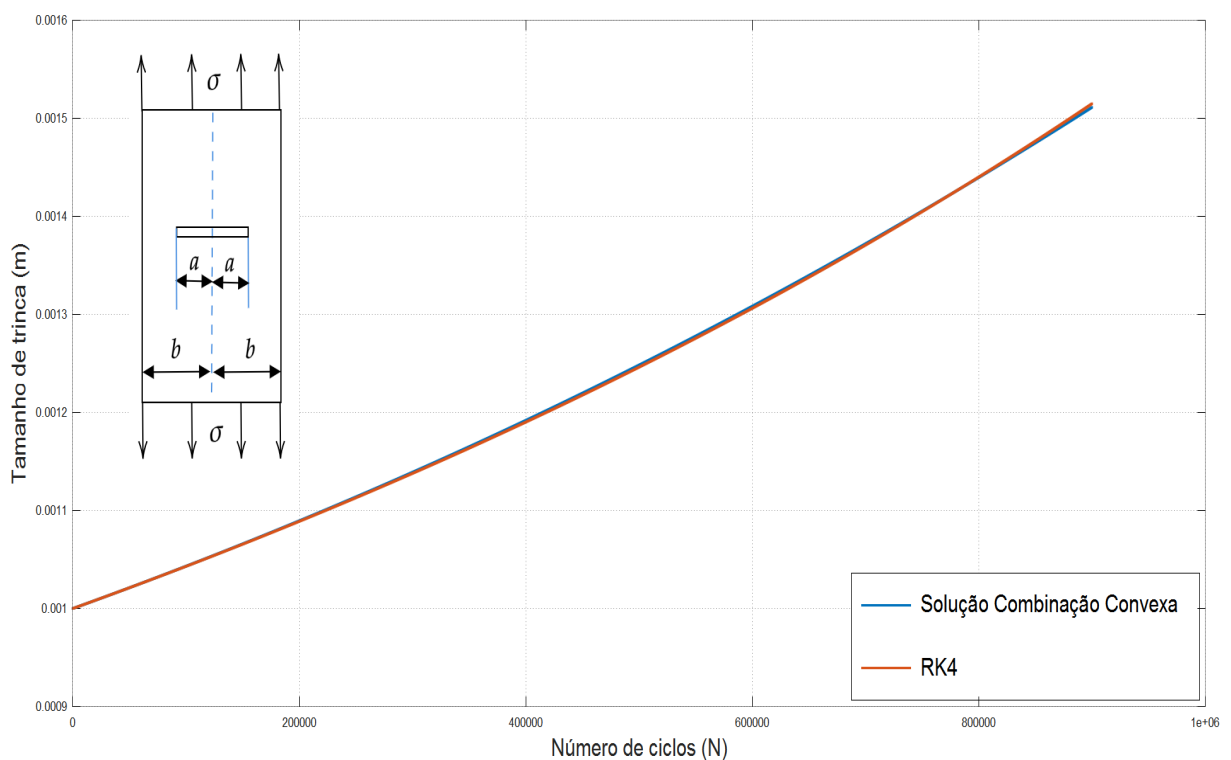
Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

Figura 27 – Solução obtida pela combinação convexa das cotas superior e inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Paris.



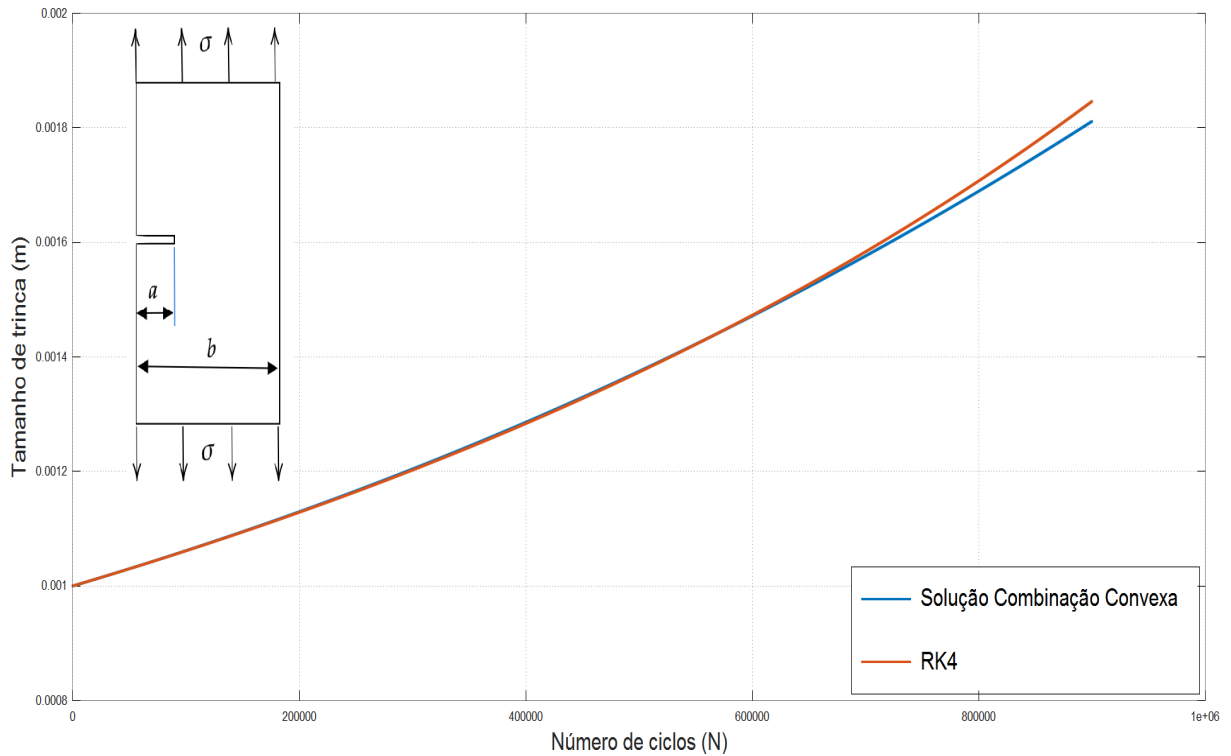
Fonte: Próprio Autor.

Figura 28 – Solução obtida pela combinação convexa das cotas superior e inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Paris.



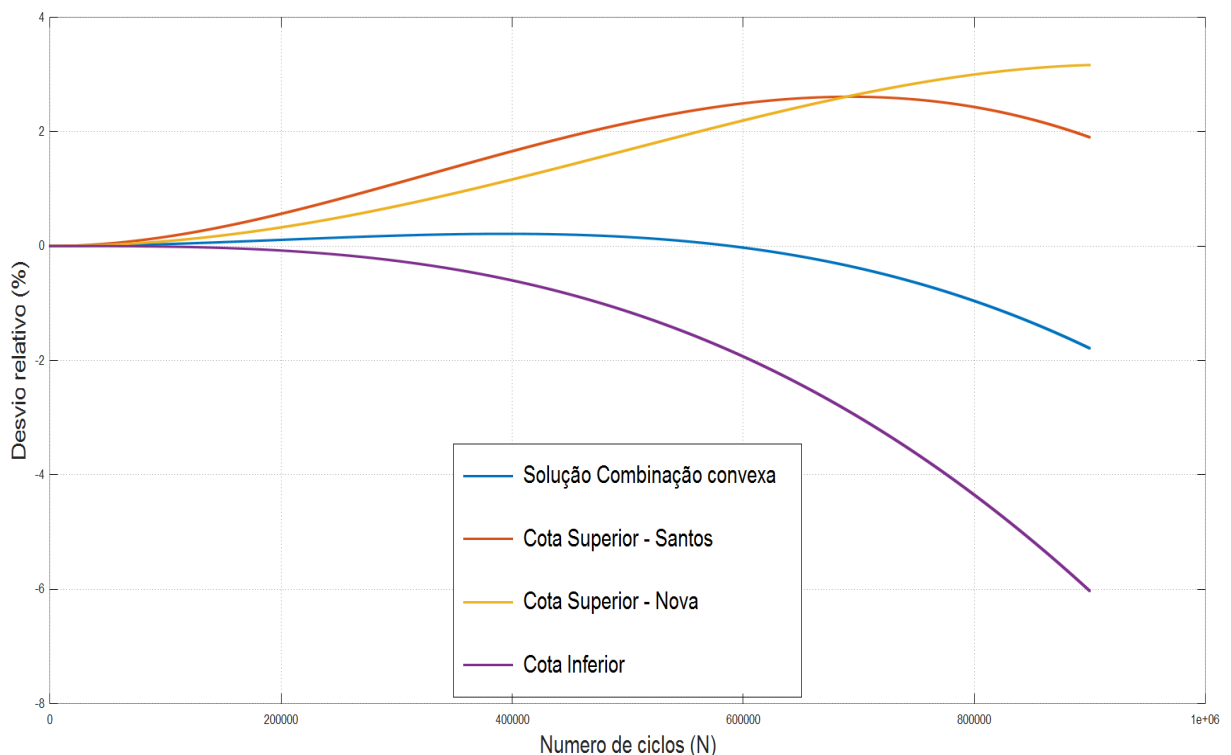
Fonte: Próprio Autor.

Figura 29 – Solução obtida pela combinação convexa das cotas superior e inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 3 modelo de Paris.



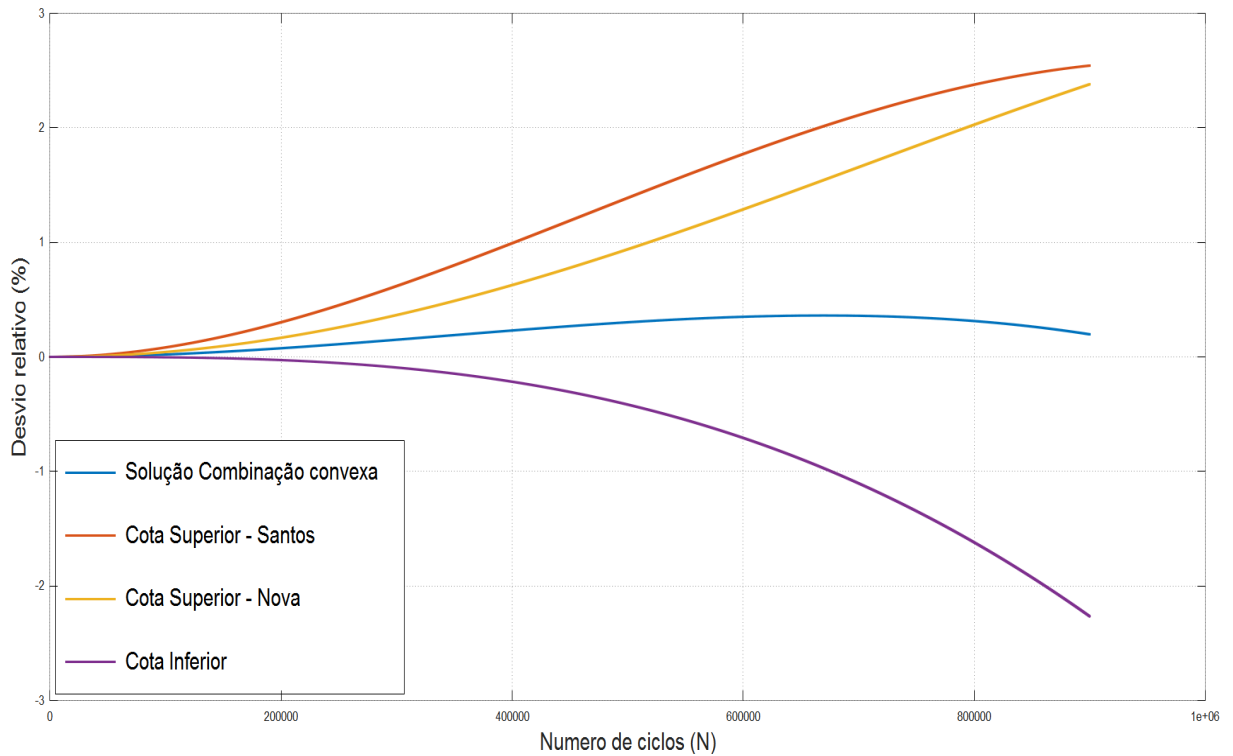
Fonte: Próprio Autor.

Figura 30 – Desvio relativo da solução por combinação convexa, das cotas superiores, e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Paris.



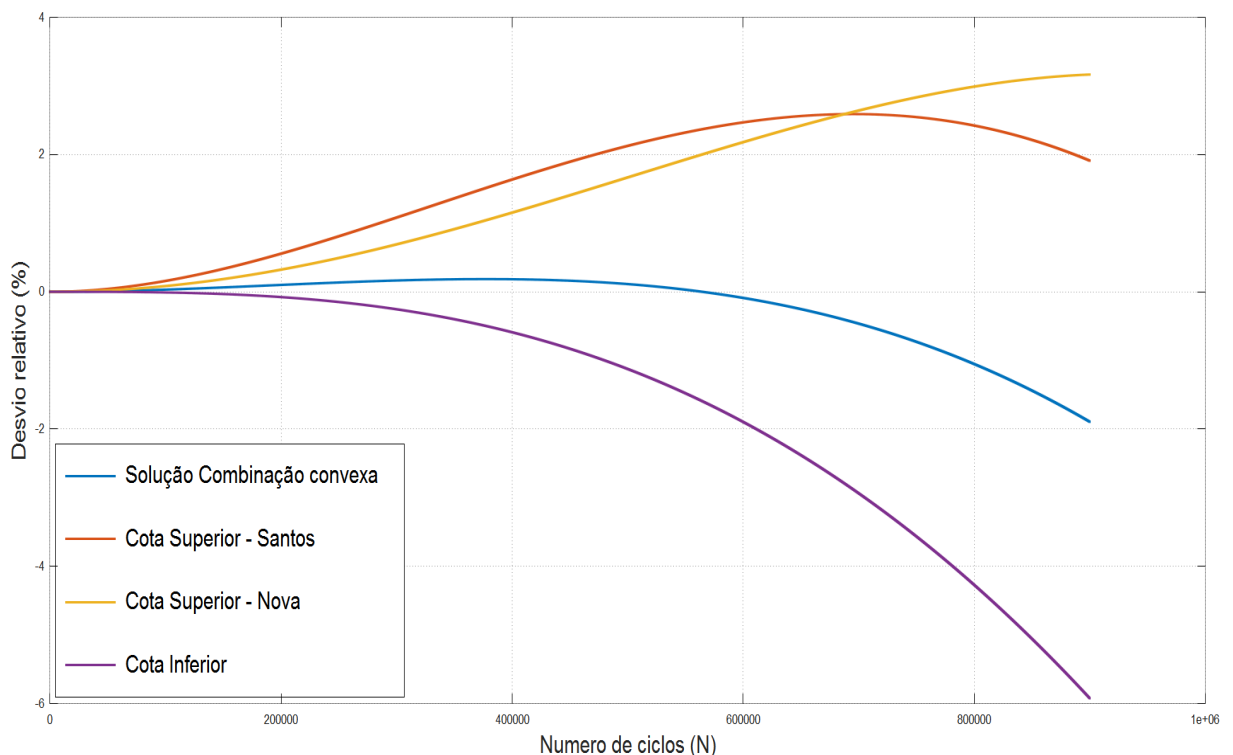
Fonte: Próprio Autor.

Figura 31 – Desvio relativo da solução por combinação convexa, das cotas superiores, e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Paris.



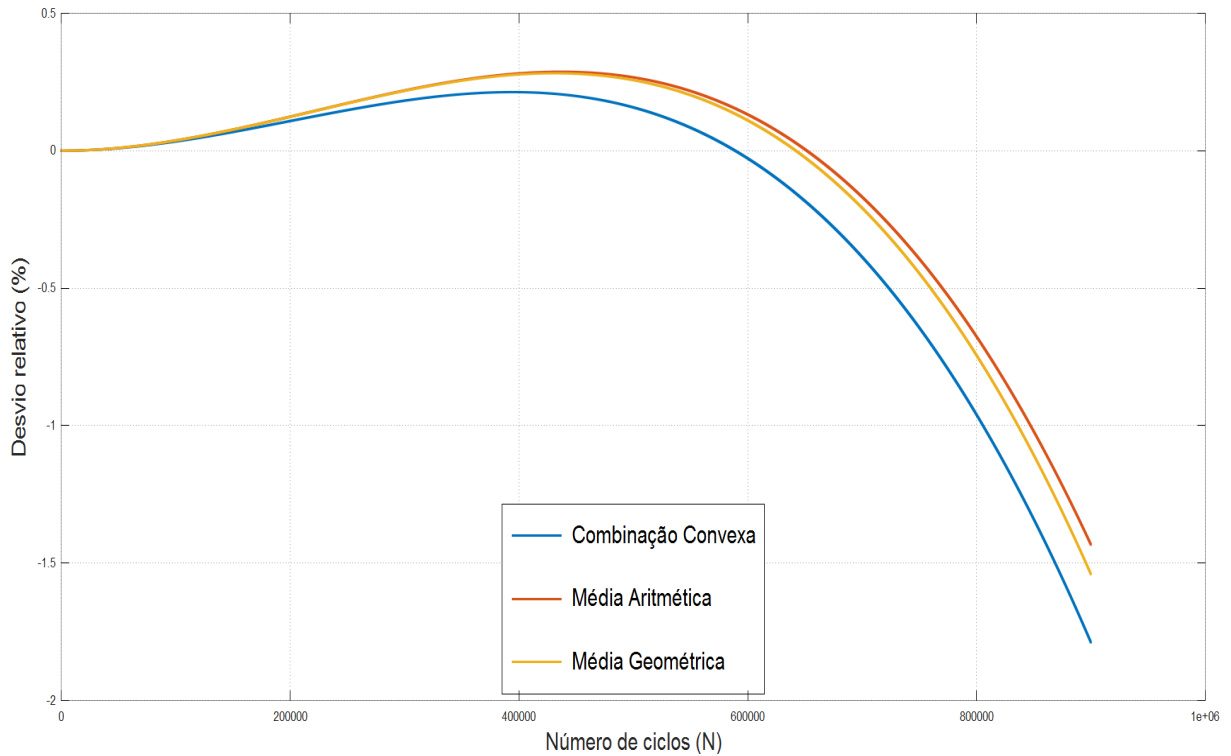
Fonte: Próprio Autor.

Figura 32 – Desvio relativo da solução por combinação convexa, das cotas superiores, e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 3 modelo de Paris.



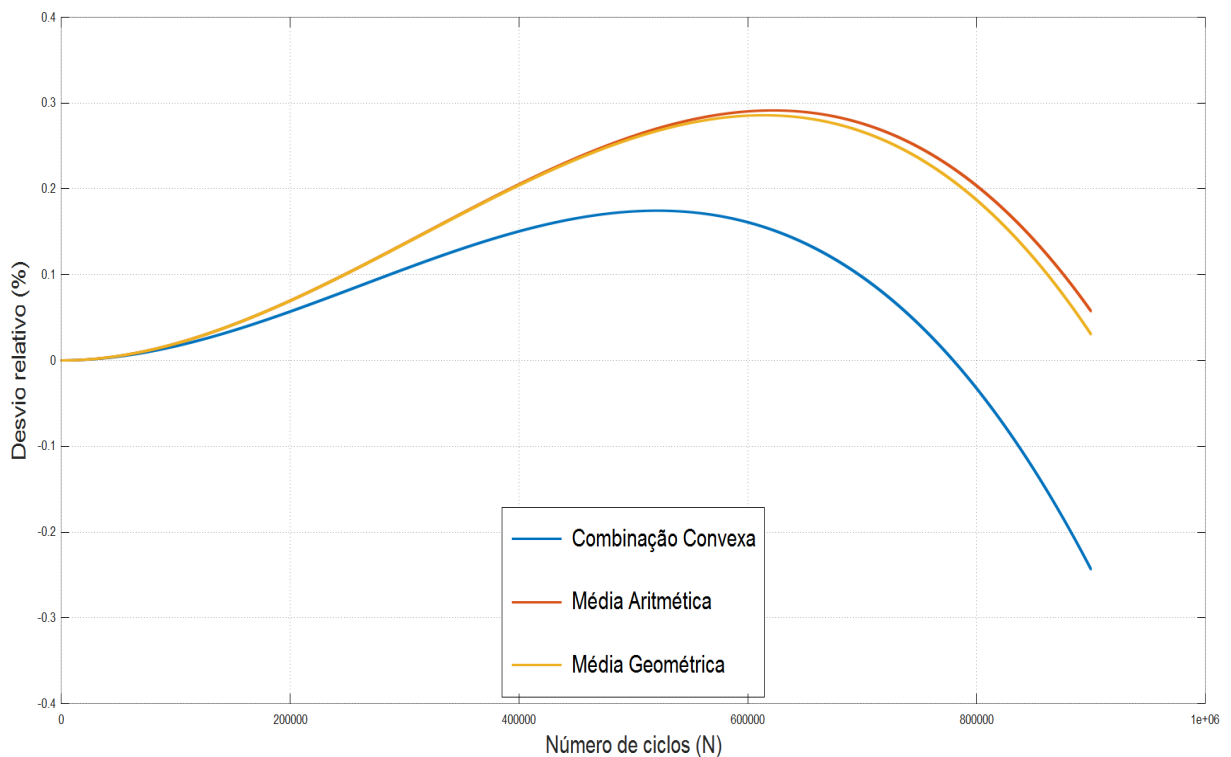
Fonte: Próprio Autor.

Figura 33 – Desvio relativo da solução por combinação convexa e das médias geométrica e aritmética em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Paris.



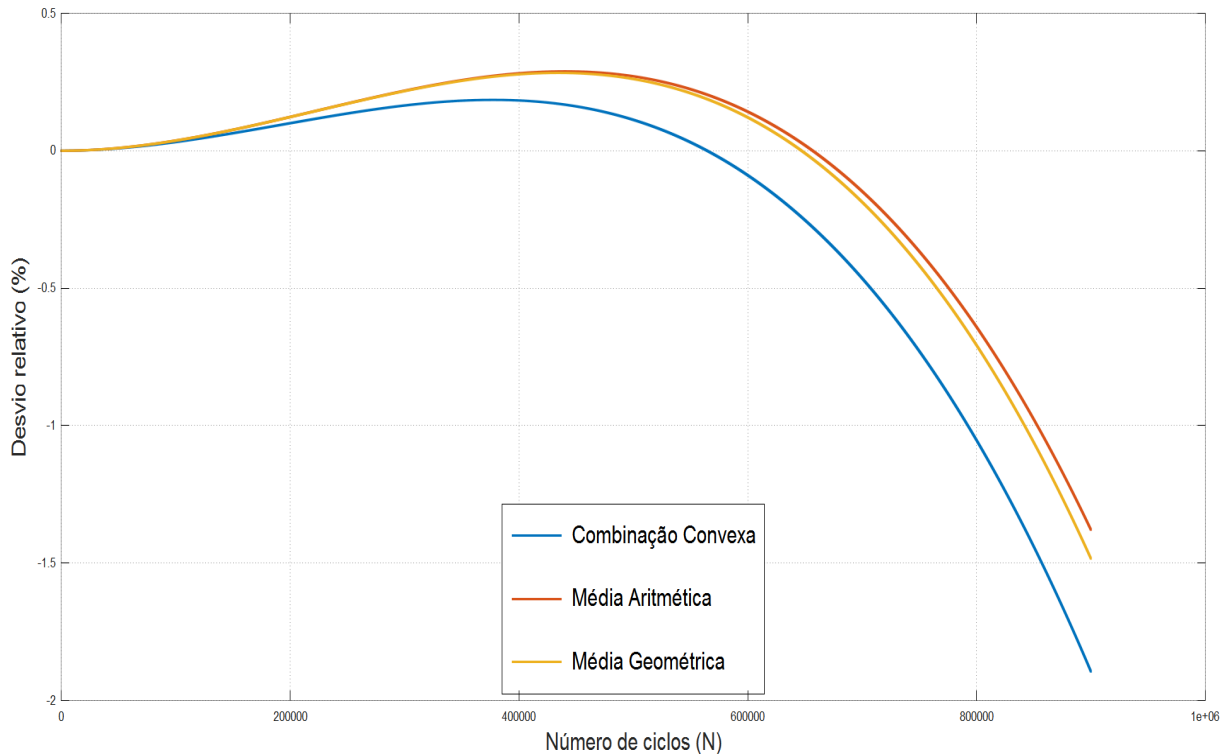
Fonte: Próprio Autor.

Figura 34 – Desvio relativo da solução por combinação convexa e das médias geométrica e aritmética em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Paris.



Fonte: Próprio Autor.

Figura 35 – Desvio relativo da solução por combinação convexa e das médias geométrica e aritmética em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 3 modelo de Paris.



Fonte: Próprio Autor.

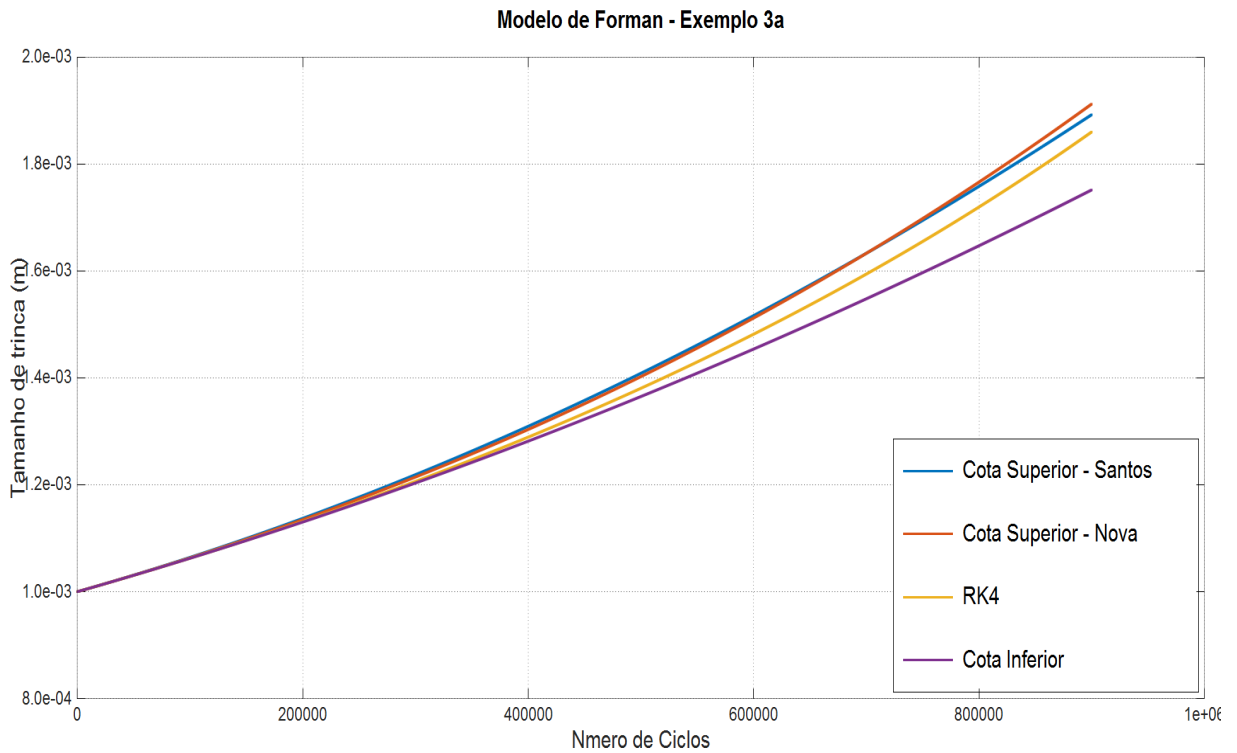
Verificou-se que a combinação convexa entre a cota superior e a cota inferior pode ser adotada como solução numérica aproximada com menor desvio do que a solução obtida pelas médias aritmética e geométrica dos mesmos valores para os três exemplos. A solução numérica aproximada por combinação convexa apresenta um desvio inferior a 1% quando comparado à solução obtida pelo RK4, tomado como a solução analítica.

4.3.3 Avaliação da Cota Superior para o modelo de Forman

Para a resolução dos três exemplos, utilizou-se o valor de $a^* = 1,3a_0$ proposto por Santos (2015). Com a implementação é verificado o comportamento das cotas para o modelo de Forman, conforme mostram as figuras 36 a 38. As figuras apresentam em um gráfico $N \times a$, o crescimento da trinca através da solução definida pelas cotas superiores e inferior em relação à solução numérica aproximada calculada pelo método RK4, para os três exemplos. Para esse modelo é utilizado um carregamento arbitrário de $\Delta\sigma = 70\text{MPa}$, tendo este parâmetro sido utilizado com este valor no es-

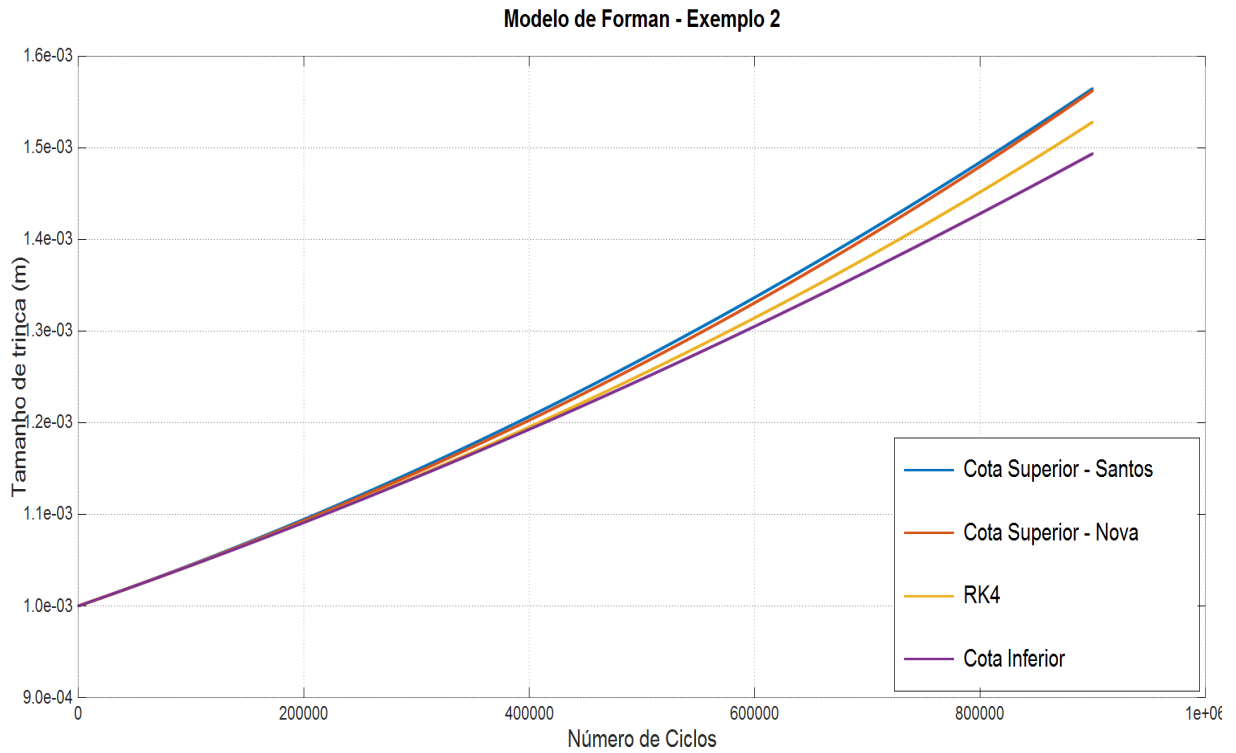
tudo original. Ambas as cotas superiores, àquela objeto do presente estudo e àquela obtida por meio de inspeção matemática, são plotadas no mesmo gráfico para fins de comparação.

Figura 36 – Funções de cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), cota inferior e solução por RK4, para o exemplo 1 modelo de Forman.



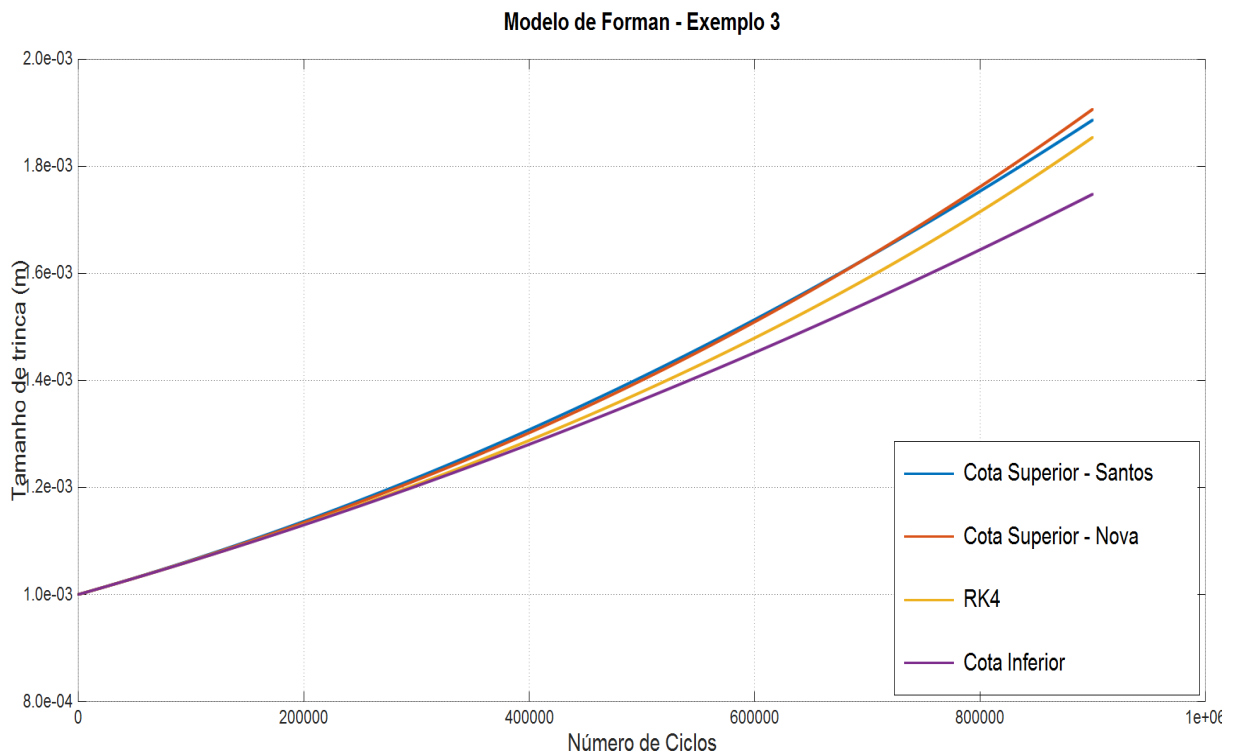
Fonte: Próprio Autor.

Figura 37 – Funções de cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), cota inferior e solução por RK4, para o exemplo 2 modelo de Forman.



Fonte: Próprio Autor.

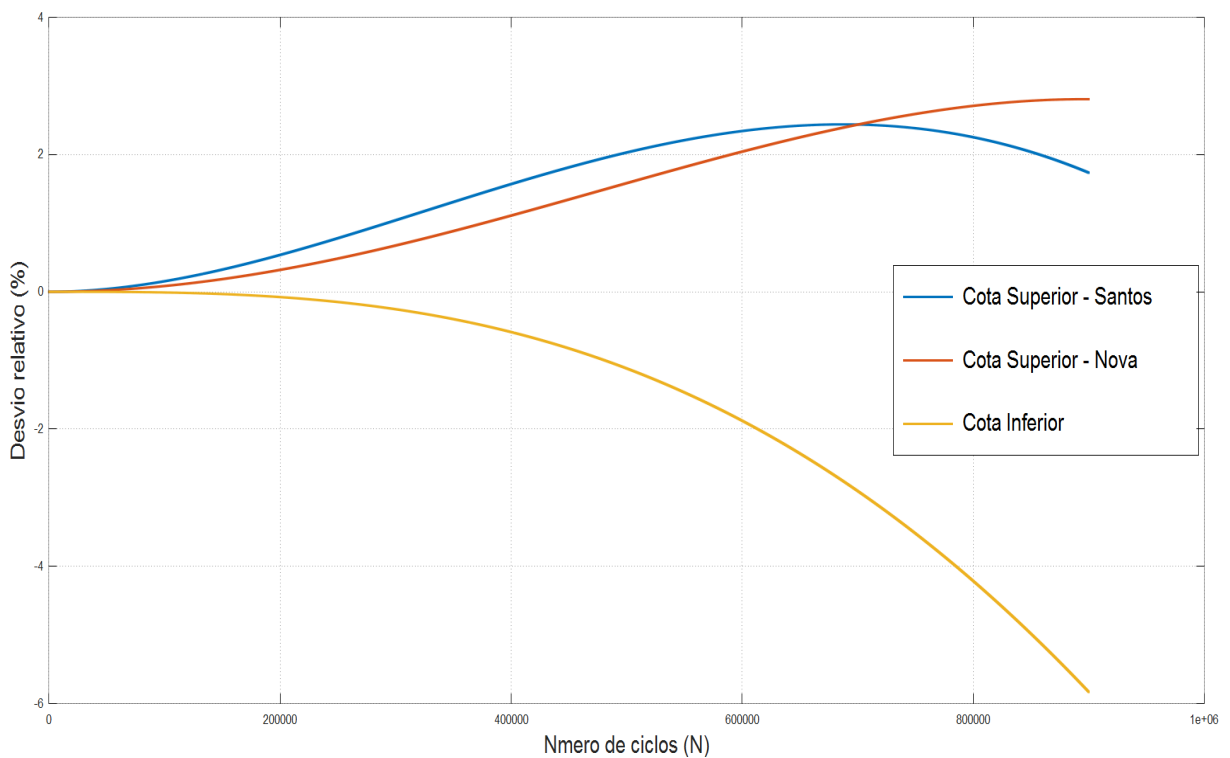
Figura 38 – Funções de cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), cota inferior e solução por RK4, para o exemplo 3 modelo de Forman.



Fonte: Próprio Autor.

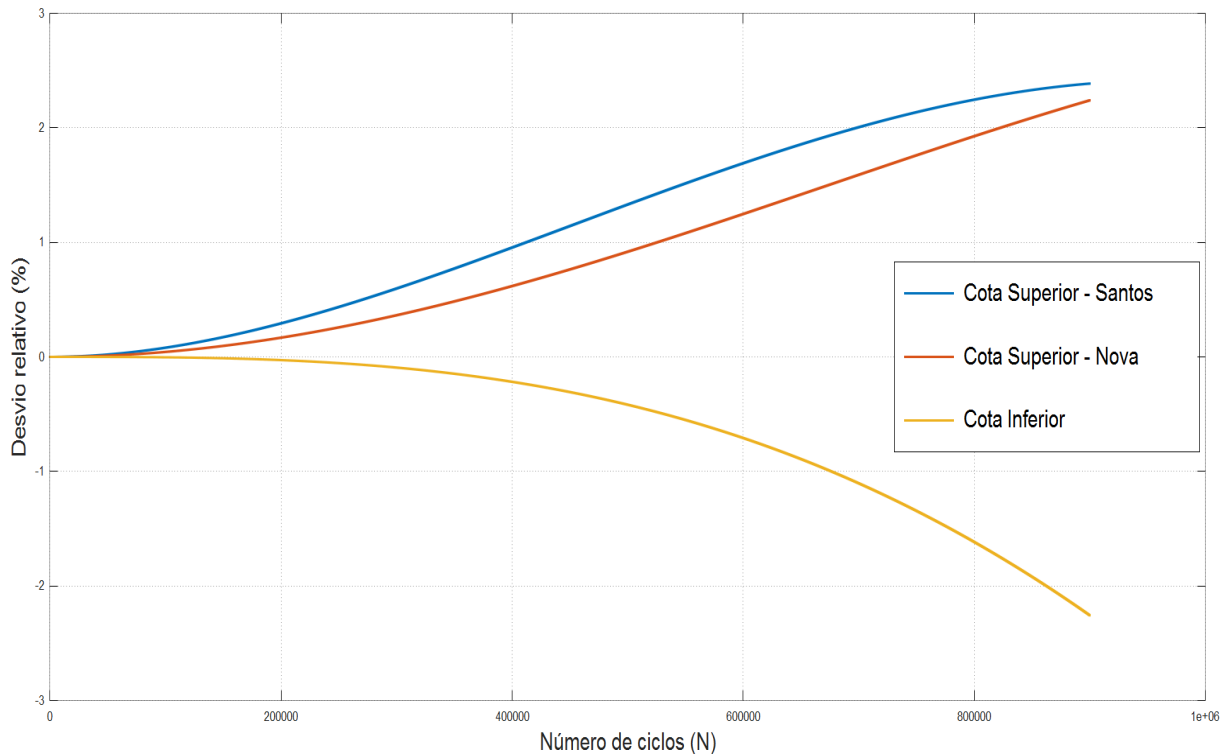
Posteriormente verifica-se o desvio relativo para cada um dos exemplos em relação ao método utilizado anteriormente, conforme mostram as figuras 39 a 41. As figuras apresentam em um gráfico o desvio relativo das cotas superiores, àquela proposta por Santos e a nova metodologia proposta, e a cota superior, em relação à solução obtida por RK4 adotada como sendo a solução exata.

Figura 39 – Desvio relativo das cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Forman.



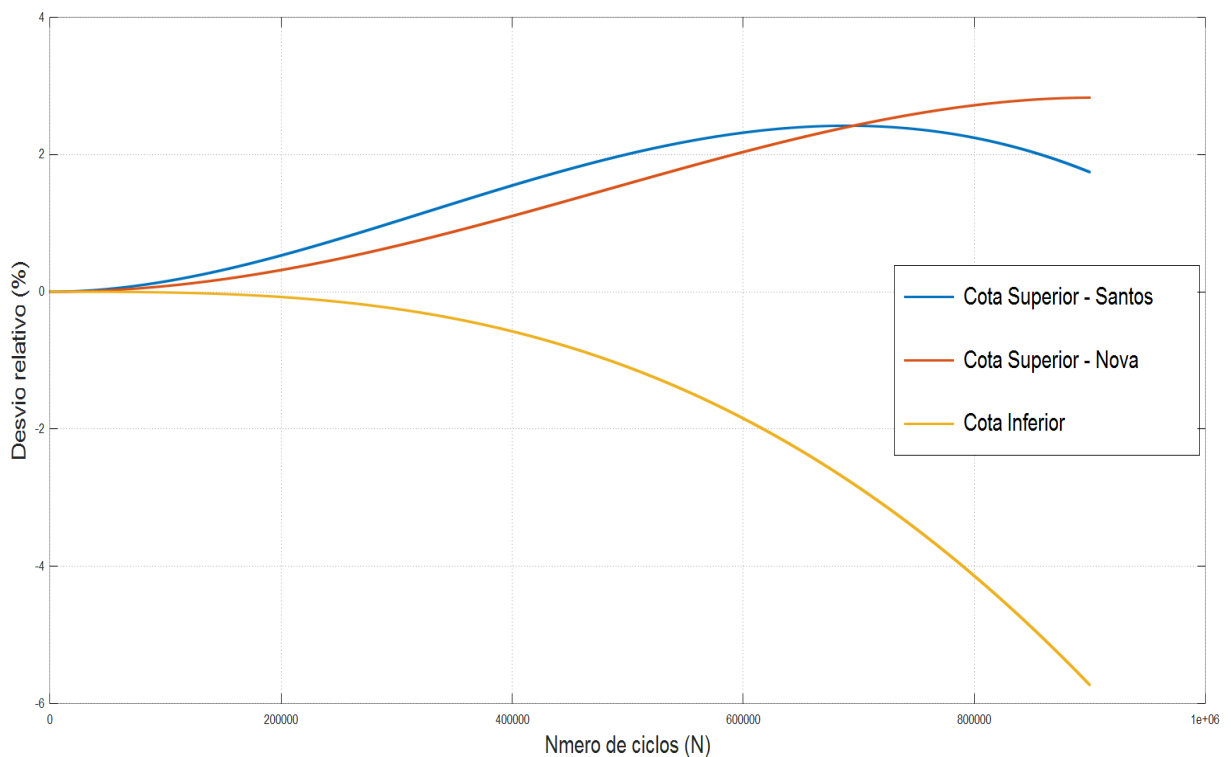
Fonte: Próprio Autor.

Figura 40 – Desvio relativo das cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Forman.



Fonte: Próprio Autor.

Figura 41 – Desvio relativo das cotas superiores (nova metodologia e a anterior de Santos), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 3 modelo de Forman.



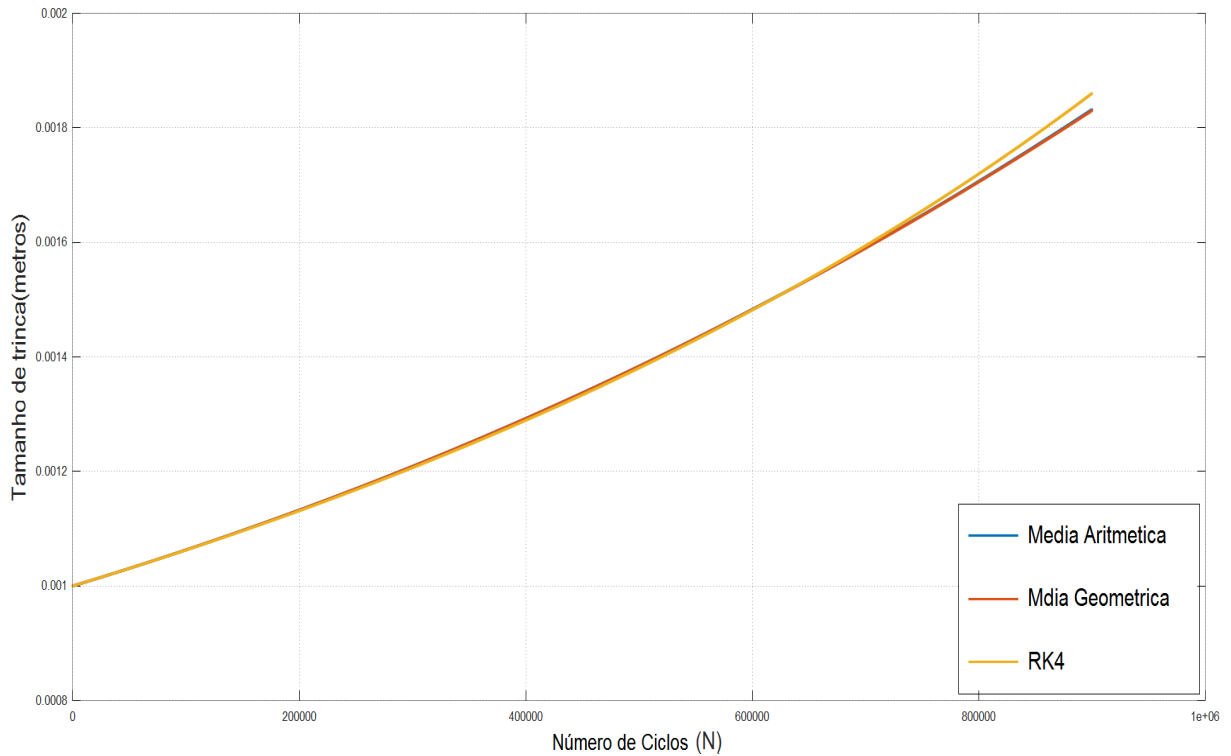
Fonte: Próprio Autor.

Para o segundo exemplo, aquele envolvendo uma trinca central em tira de largura finita, a nova cota superior apresentou-se mais próxima da solução obtida por RK4 se comparada à anteriormente estabelecida. Contudo, para o primeiro e terceiro exemplos a nova metodologia apresentou ao final dos ciclos um desvio levemente superior, porém ainda inferior a 5%. Não obstante o terceiro exemplo tenha apresentado um desvio superior ao final dos ciclos, isto ocorreu somente após o ciclo de número 695.459, tendo em vista que antes deste patamar o desvio relativo da nova metodologia era inferior ao da cota superior anteriormente adotada.

4.3.4 Avaliação da Solução Numérica aproximada para o modelo de Forman

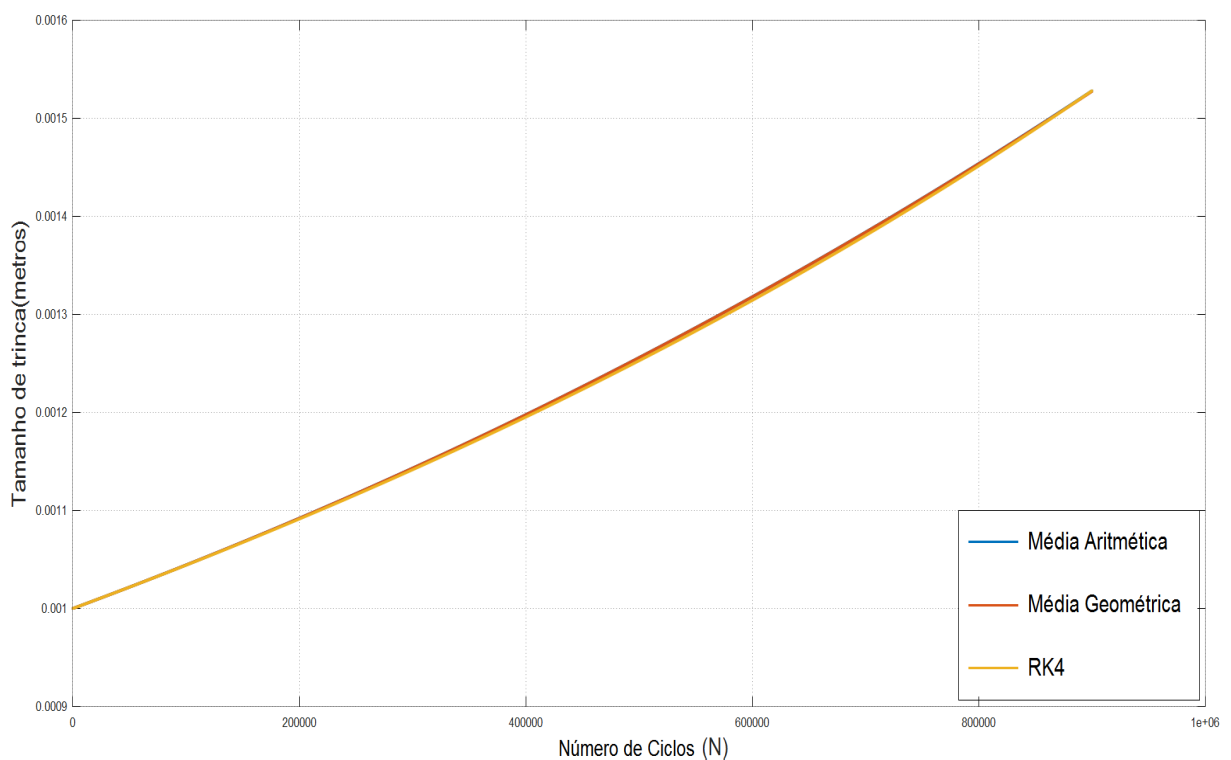
Com base nas novas cotas superiores busca-se encontrar uma solução numérica aproximada para o PVI, utilizando primeiramente a média aritmética e geométrica entre as cotas inferior e superior. Esse procedimento foi adotado por historicamente terem sido utilizados nos estudos envolvendo cotas em propagação de trincas. As soluções são plotadas em relação à solução obtida pelo RK4, conforme acham-se ilustradas nas figuras 42 a 44.

Figura 42 – Média aritmética e geométrica da cota superior (nova metodologia), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Forman.



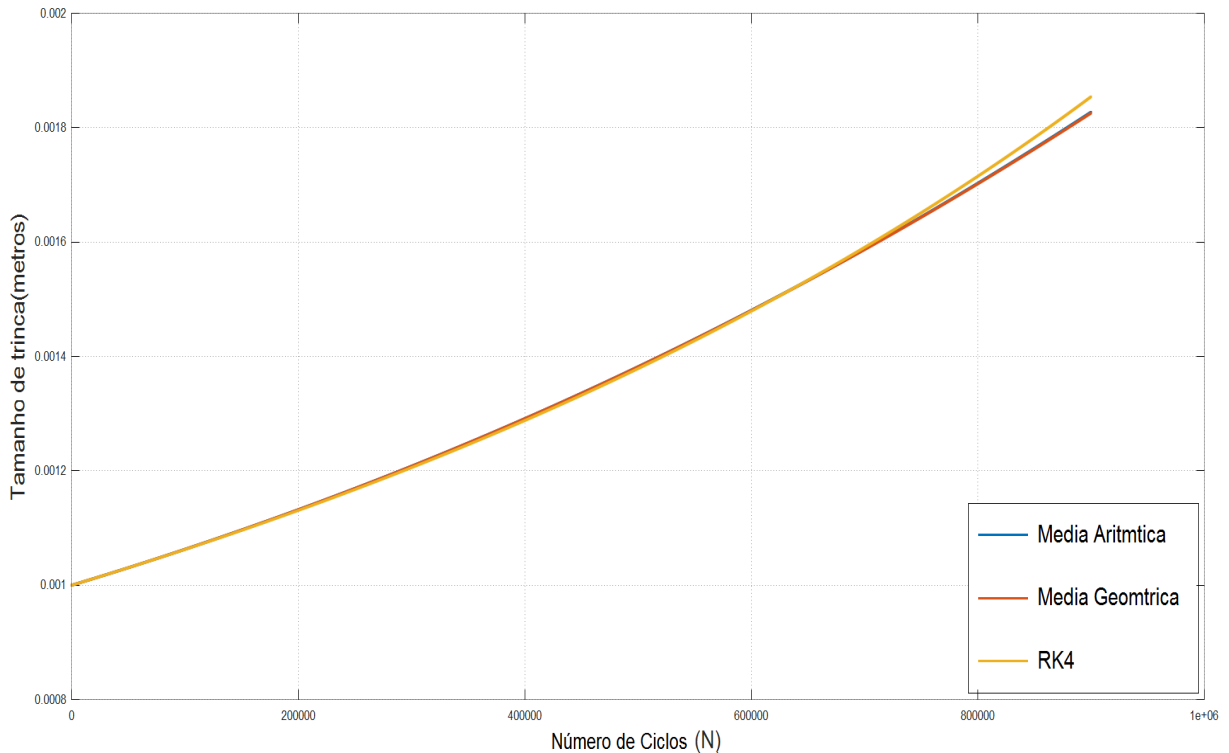
Fonte: Próprio Autor.

Figura 43 – Média aritmética e geométrica da cota superior (nova metodologia), e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Forman.



Fonte: Próprio Autor.

Figura 44 – Média aritmética e geométrica da cota superior (nova metodologia), para o exemplo 3 modelo de Forman.



Fonte: Próprio Autor.

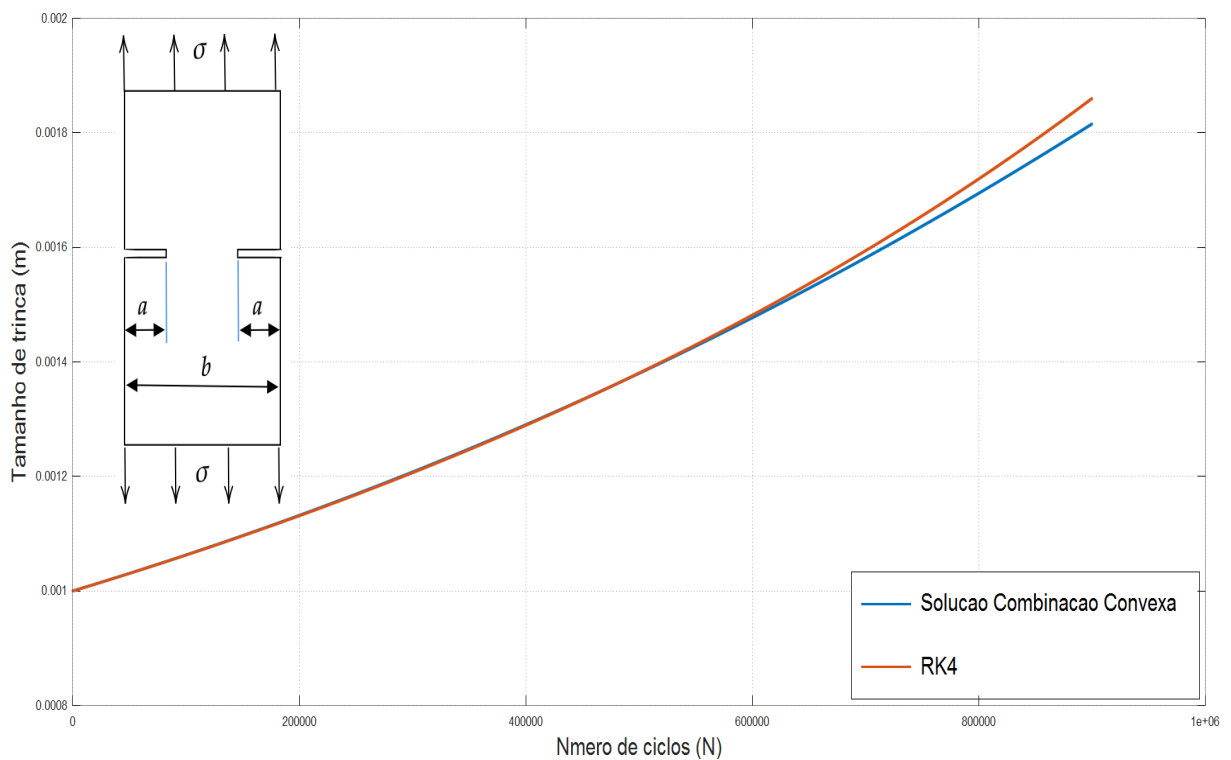
Uma combinação convexa entre a cota superior em estudo e a cota inferior é então calculada como proposta de solução numérica aproximada do PVI. O alfa é calculado com base na desigualdade Equação 92. Verifica-se que um intervalo de valores possível pode ser empregado, arbitrando uma variação de ciclos (ΔN) para o intervalo, neste caso 900.000 ciclos, e estabelecendo um erro que mantenha o valor do alfa (α) entre zero e um. A tabela Tabela 7 ilustra os valores de ciclo e erro adotadas no presente estudo. O valor de alfa (α) é empregado na Equação 84 para obtenção de uma solução numérica aproximada. Em seguida são calculados e plotados os resultados para cada um dos três exemplos propostos, conforme ilustrado nas figuras 45 a 47. São então analisados os desvio relativo a combinação convexa em relação ao RK4 juntamente com os desvios das cotas em relação ao mesmo valor, para fins de comparação. Por fim são analisados os desvios das soluções numéricas aproximadas obtidas pela combinação convexa e pelas médias aritmética e geométrica em relação ao RK4. Os resultados estão ilustrados nas figuras 48 a 50 e os desvios nas figuras 51 a 53.

Tabela 7 – Tabela de valores adotados para cálculo da Combinação Convexa

Valores Combinação Convexa			
Exemplo	Erro (e)	Delta Ciclos	Alfa
Exemplo 1	0,000150	900.000	0,60198
Exemplo 2	0,000065	900.000	0,5848
Exemplo 3	0,000150	900.000	0,6177

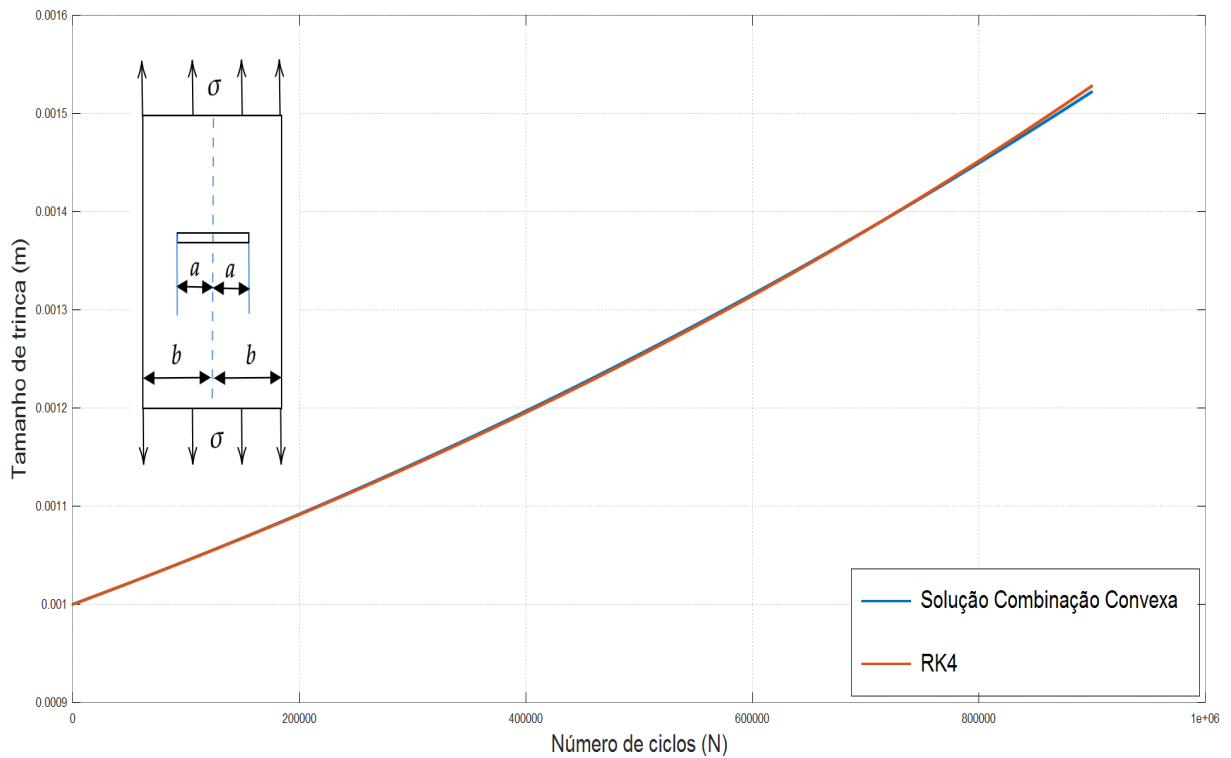
Fonte: Elaborado pelo próprio Autor.

Figura 45 – Solução obtida pela combinação convexa das cotas superior e inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Forman.



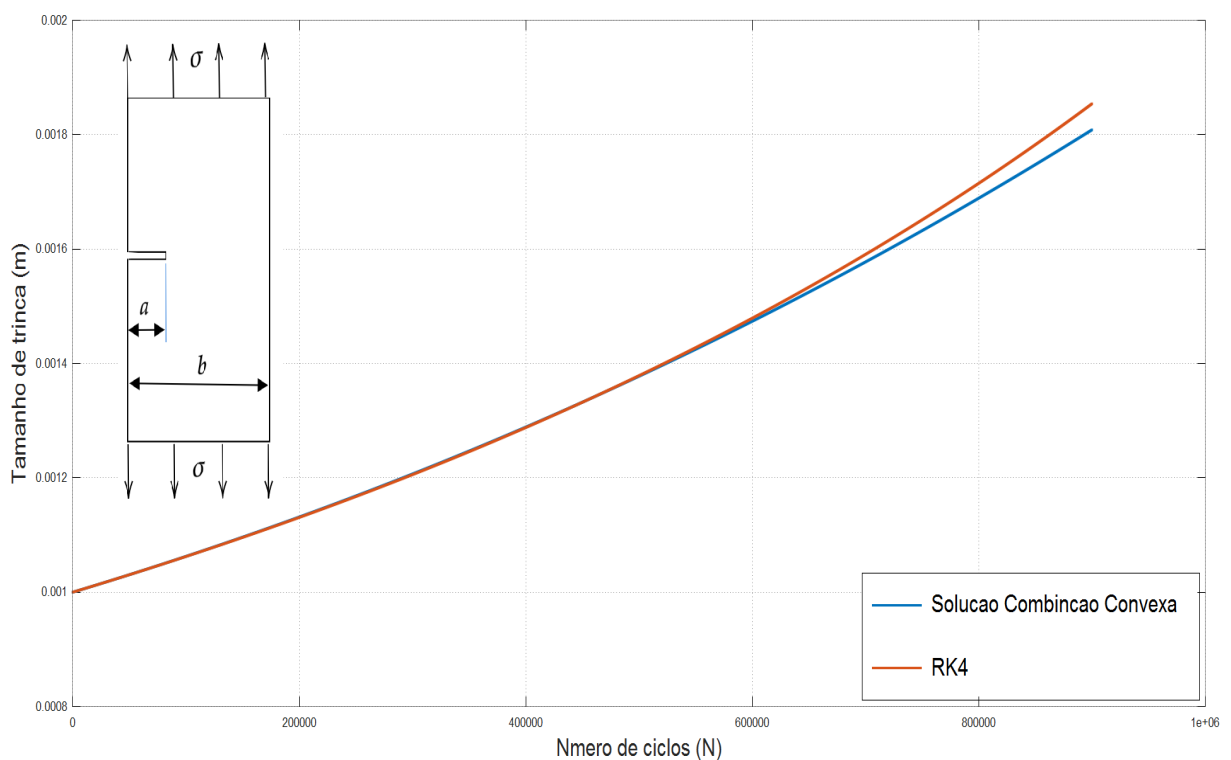
Fonte: Próprio Autor.

Figura 46 – Solução obtida pela combinação convexa das cotas superior e inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Forman.



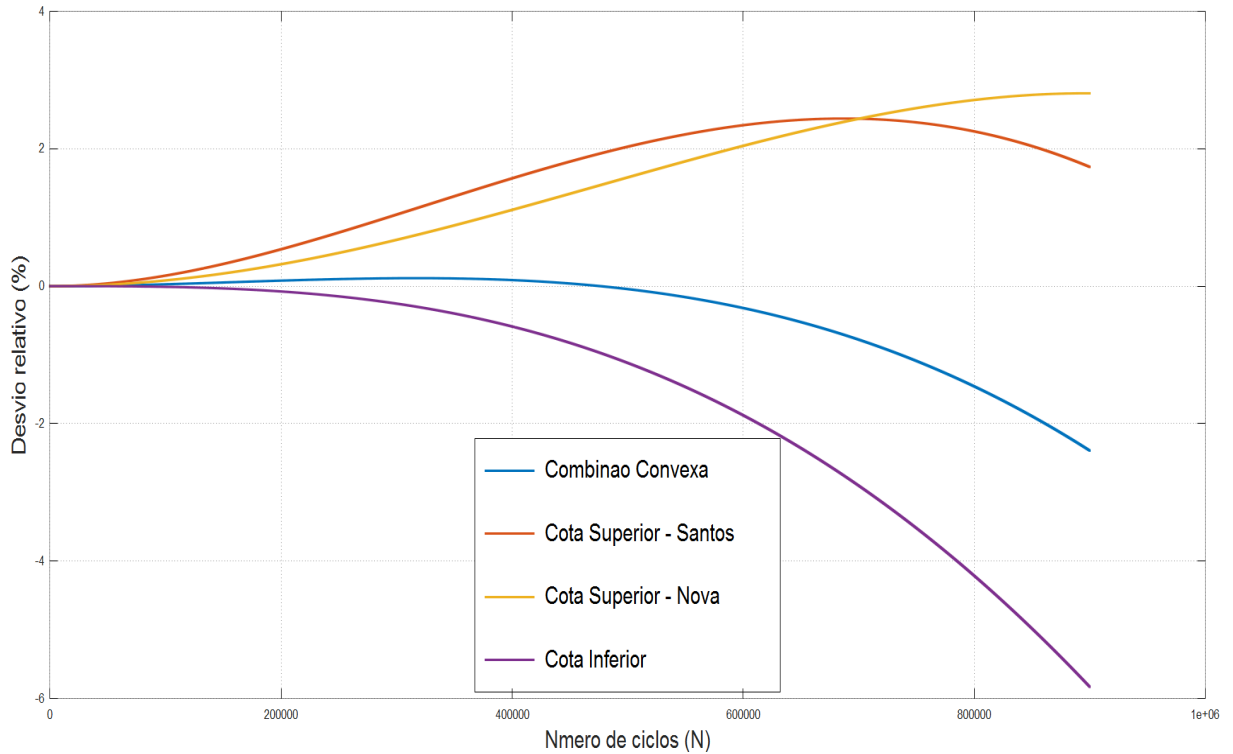
Fonte: Próprio Autor.

Figura 47 – Solução obtida pela combinação convexa das cotas superior e inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 3 modelo de Forman.



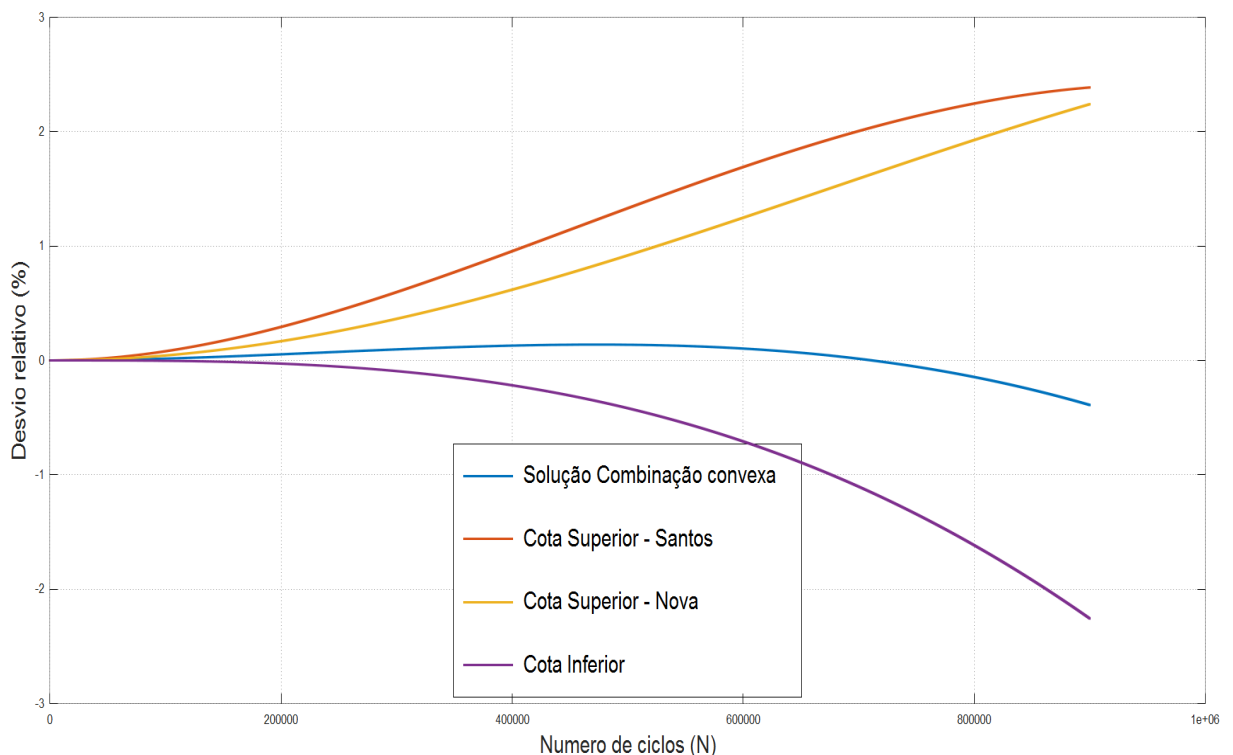
Fonte: Próprio Autor.

Figura 48 – Desvio relativo da solução por combinação convexa, das cotas superiores, e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Forman.



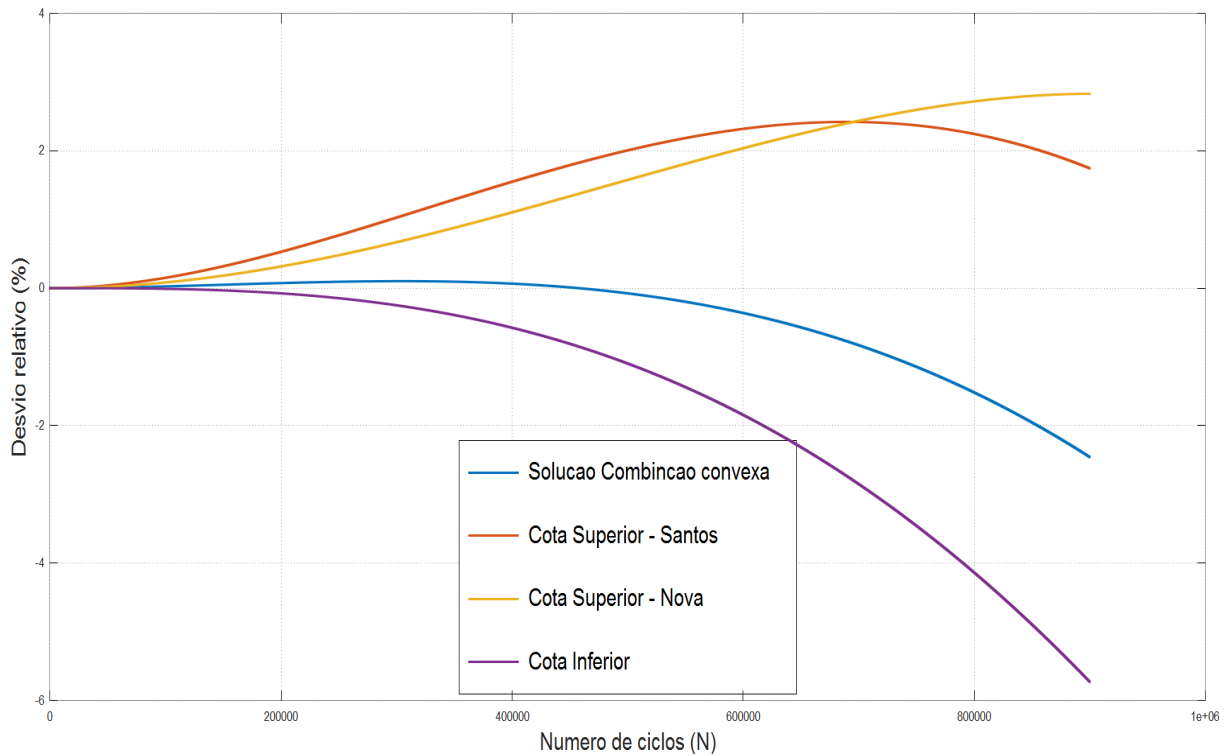
Fonte: Próprio Autor.

Figura 49 – Desvio relativo da solução por combinação convexa, das cotas superiores, e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Forman.



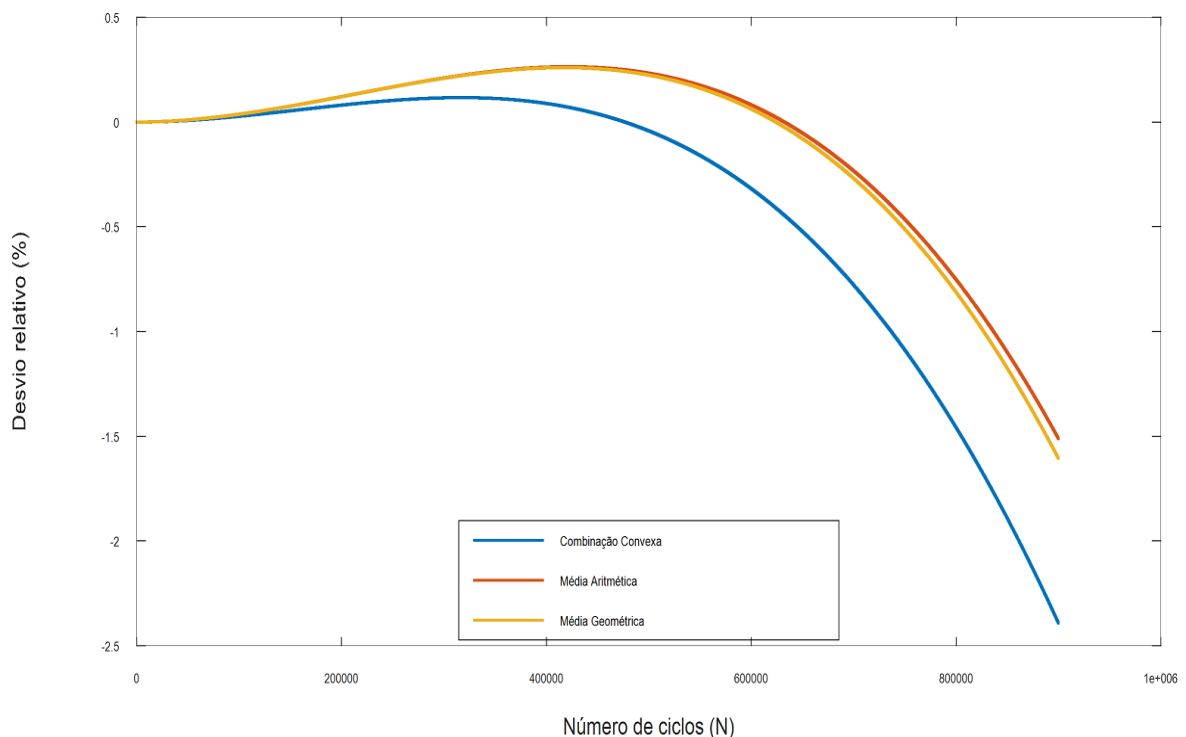
Fonte: Próprio Autor.

Figura 50 – Desvio relativo da solução por combinação convexa, das cotas superiores, e cota inferior em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 3 modelo de Forman.



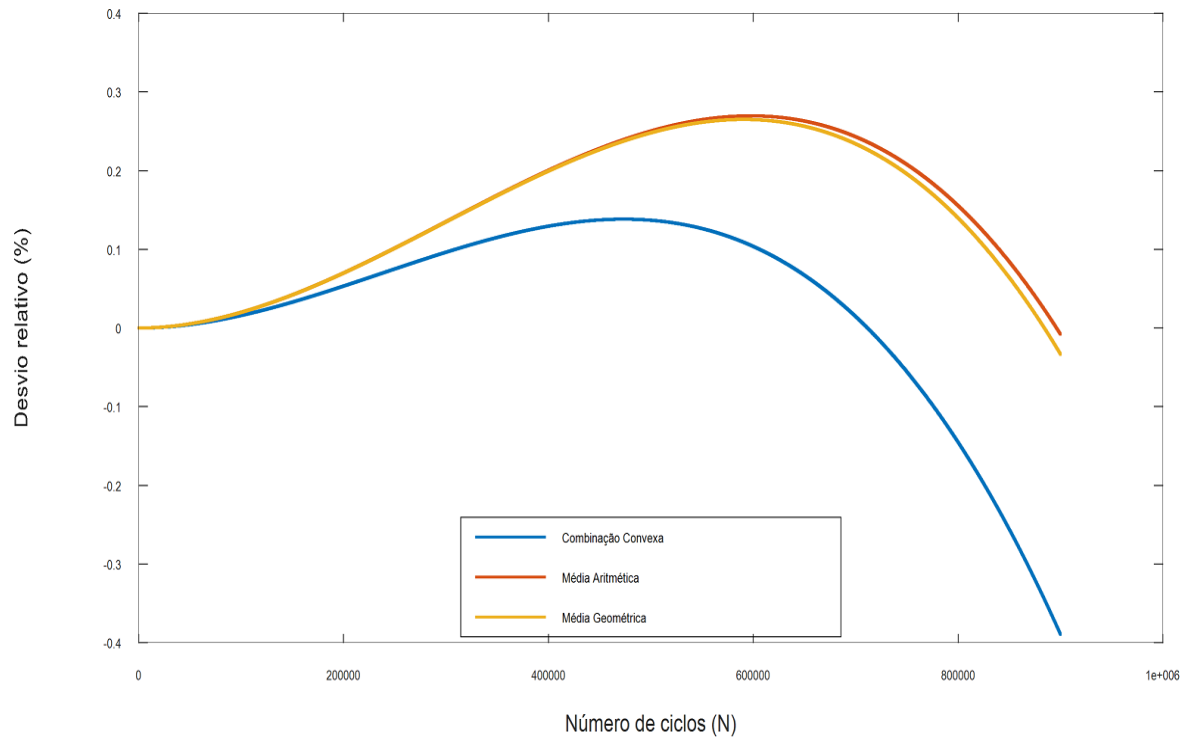
Fonte: Próprio Autor.

Figura 51 – Desvio relativo da solução por combinação convexa e das médias geométrica e aritmética em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 1 modelo de Forman.



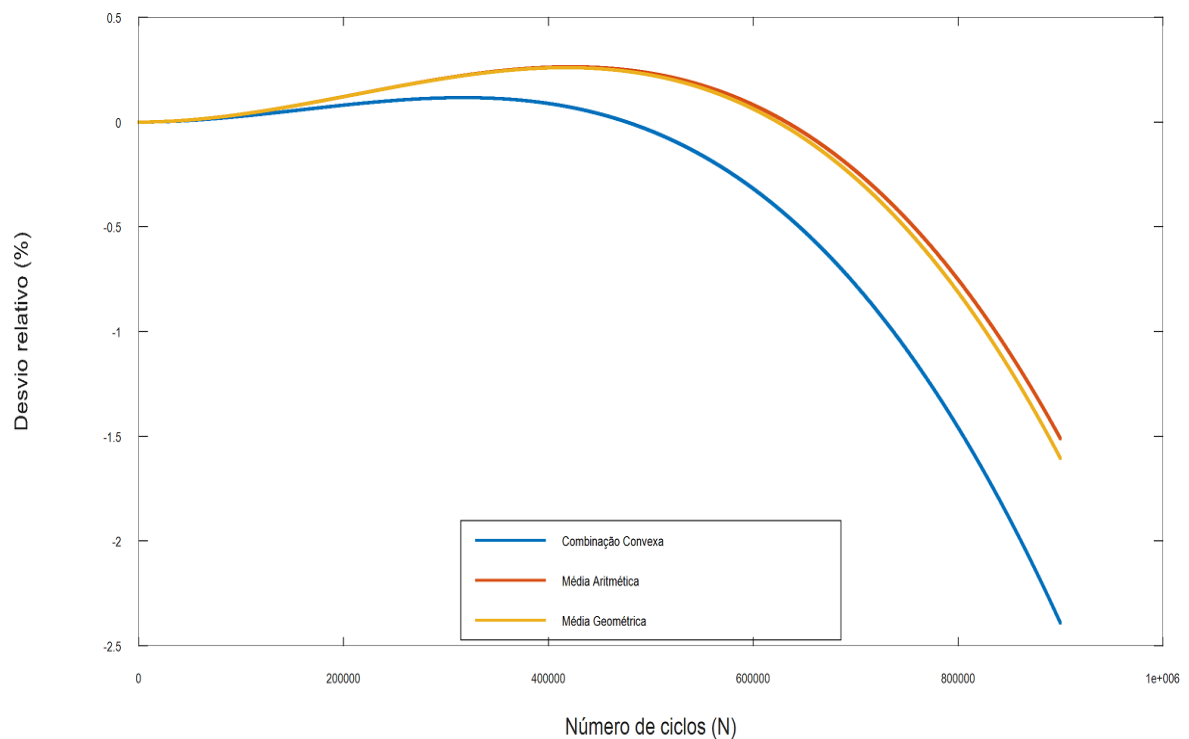
Fonte: Próprio Autor.

Figura 52 – Desvio relativo da solução por combinação convexa e das médias geométrica e aritmética em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 2 modelo de Forman.



Fonte: Próprio Autor.

Figura 53 – Desvio relativo da solução por combinação convexa e das médias geométrica e aritmética em relação a solução por RK4 (adotada como sendo a solução exata), para o exemplo 3 modelo de Forman.



Fonte: Próprio Autor.

Verificou-se que a combinação convexa entre a cota superior e a cota inferior pode ser adotada como solução numérica aproximada com menor desvio do que a solução obtida pelas médias aritmética e geométrica dos mesmo valores para os três exemplos. A solução numérica aproximada por combinação convexa apresenta um desvio inferior a 3% quando comparado à solução obtida pelo RK4, tomado como a solução analítica.

4.4 AVALIAÇÃO DOS TEMPOS COMPUTACIONAIS

Para comparação do tempo computacional despendido utilizou-se como referência o tempo gasto para cálculo do RK4. Define-se no presente estudo a Razão de Tempo Computacional (RTC) como sendo a fração de tempo gasto na nova metodologia para obtenção das cotas e da solução numérica aproximada em relação ao RK4. Desta forma o $RTC_{RK4} = T_{RK4}/T_{UB, LB}$, e $RTC_{UB} = T_{UB-Santos}/T_{UB-Novo}$. O ganho computacional pode se tornar significativo quando aplicado a métodos estatísticos, como por exemplo no estudo de Santos, Machado e Silva (2018) em que se empregou FCB junto ao Método de Monte Carlo para quantificação de incertezas. Os valores obtidos no presente estudo encontram-se ilustrados na Tabela 8 e Tabela 9. Utilizou-se para este procedimento o software livre GNU Octave, e um equipamento do tipo NoteBook DATEN, com processador Intel Core i7 com velocidade de processamento da CPU de 2,2 GHz, e 8,0 GB de memória RAM.

Tabela 8 – Tabela dos tempos RK4.

Exemplo	Tempos em segundos		RTC
	RK4	FCB	
Paris:Exemplo 1	181,080	0,0335	5.404,74
Paris:Exemplo 2	313,350	0,0343	9.136,33
Paris:Exemplo 3	192,368	0,0341	5.641,30
Forman:Exemplo 1	336,185	0,0462	7.273,92
Forman:Exemplo 2	477,289	0,0520	9.172,67
Forman:Exemplo 3	307,604	0,0417	7.364,79

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Verifica-se na Tabela 8 e na Tabela 9, que o tempo computacional para cálculo das cotas e da solução numérica é relativamente baixo, se comparado ao tempo computacional para cálculo por Runge-Kutta.

Tabela 9 – Tabela dos tempos Computacionais UB.

Exemplo	Tempos em segundos		RTC
	UB - Santos	UB - Nova	
Paris:Exemplo 1	0,024090	0,033404	0,7190
Paris:Exemplo 2	0,024970	0,034290	0.7280
Paris:Exemplo 3	0,024362	0,034100	0,7144
Forman:Exemplo 1	0,033872	0,046217	0,7329
Forman:Exemplo 2	0,034020	0,052034	0.6538
Forman:Exemplo 3	0,028066	0,041766	0,6719

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

4.5 COMPARAÇÃO DOS DESVIOS RELATIVOS PARA O MODELO DE PARIS-ERDOGAN VERSUS O DE FORMAN

A Tabela 10 e a Tabela 11 demonstram a comparação dos desvios observados entre o modelo de Paris-Erdogan e Forman, referente a nova cota superior e a solução numérica aproximada, respectivamente.

Tabela 10 – Tabela dos desvios relativos da nova cota superior.

Exemplo; Ciclos	Desvio relativo		Diferença percentual
	Paris-Erdogan	Forman	
Ex. 1; N=450.000	1,418	1,345	5(%)
Ex. 2; N=450.000	0,777	0,430	81(%)
Ex. 3; N=450.000	1,406	1,337	5(%)
Ex. 1; N=900.000	3,165	2,806	13(%)
Ex. 2; N=900.000	2,380	0,105	2.163(%)
Ex. 3; N=900.000	3,165	2,283	12(%)

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Tabela 11 – Tabela dos desvios relativos da combinação convexa.

Exemplo; N=900.000	Desvio relativo		Diferença percentual
	Paris-Erdogan	Forman	
Exemplo 1	-1,179	-2,393	-25(%)
Exemplo 2	-0,243	-2,967	-92(%)
Exemplo 3	-1,894	-2,457	-23(%)

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O trabalho pode ser dividido em duas partes. A primeira trata da apresentação de um novo modelo para estabelecimento da cota superior na metodologia *Fast Crack Bounds*. Este modelo se mostrou eficaz e acurado para as aplicações consideradas. Para implementação numérica foram utilizados os modelos de propagação de trinca de Paris-Erdogan e Forman, em trincas unidimensionais para carregamento de amplitude de tensão constante. O método originalmente proposto por Santos (2015) dependia de uma inspeção matemática para determinação do parâmetro a^* (a estrela), tomando como base o resultado do RK4. Com a nova metodologia proposta a cota superior independe da inspeção matemática, dispensando o uso do RK4 para estimativa do a^* , e passa a depender da terceira derivada do modelo de propagação de trinca para um determinado tamanho de trinca inicial. Por outro lado não foi analisada a implementação da metodologia em outros modelos de propagação de trincas, que poderá ser avaliada em trabalhos futuros.

A segunda parte do trabalho trata da proposta de solução numérica aproximada por meio da combinação convexa das cotas superior e inferior, cuja estimativa mostrou-se próxima da solução tomada como analítica. Tal solução numérica aproximada pode ser utilizada quando se busca um valor de referência, ao invés de um envelope, com valores de cota superior e inferior. A solução numérica obtida mostrou uma boa aproximação com os resultados obtidos por meio do RK4, porém de forma mais rápida em termos de tempo de processamento computacional.

Como resultado foi apresentada uma nova metodologia para determinação da cota superior no FCB para os modelos de Paris-Erdogan e Forman, obtida por meio de diferença finita, da expansão por Euler e da análise do erro. As cotas foram avaliadas para três exemplos numéricos. Analisou-se o comportamento da nova cota superior em relação à anteriormente obtida por meio de inspeção, além das comparação com a cota inferior e a solução numérica aproximada obtida por meio do método de Runge Kutta de Quarta Ordem (RK4). Foram apresentados os seguintes gráficos e relações: gráfico apresentando número de ciclos (N) versus tamanho de trinca (a), os desvios relativos das cotas das cotas superiores (nova e anteriormente definida), o tempo computacional, as médias geométricas e aritméticas e uma proposta de solução numérica

aproximada por meio de combinação convexa. Verificou-se nos gráficos e na análise dos desvios relativos que a metodologia é em primeira análise válida, como forma de estimativa do comportamento de evolução de trinca.

O tempo computacional apresentou resultado próximo ao obtido originalmente para o FCB quando comparado ao RK4. Porém o presente método apresenta maiores razões de tempo computacional do que o método original.

A solução numérica aproximada por meio de combinação convexa das cotas superior e inferior mostrou-se válida. No presente estudo arbitraram-se valores de erro e número de ciclos para determinação do α , e com este procedimento obtiveram-se maiores desvios nos ciclos finais para a combinação convexa em relação às médias geométrica e aritmética. O valor do α é passível de maiores análises para fins de otimização, o que não foi objeto de análise neste estudo. As médias geométrica e aritmética também demonstraram-se válidas, dentro dos exemplos analisados, como solução numérica aproximada.

5.1 PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

A presente metodologia restringiu-se a dois modelos: Paris-Erdogan e Forman. Tendo a metodologia *Fast Crack Bounds* sido aplicada e testada a diversos outros modelos, sugere-se que o estudo de combinação de cotas, bem como emprego da terceira derivada na determinação da cota superior, sejam empregados em outros modelos. Também seria possível realizar uma expansão em Taylor até a terceira ordem para comparação com os dados obtidos neste estudo. Foram utilizados para o presente estudo os modelos de Amplitude de Tensão Constante, sendo possível verificar futuramente a aplicabilidade em Carregamentos com amplitude variável.

Também é possível aprofundar o estudo da solução numérica aproximada por meio da combinação convexa, de maneira a determinar o α otimizado para resultados mais precisos em relação ao RK4. O α é responsável pela reconstrução da solução aproximada, e se for escolhido de forma otimizada tem potencial para resultados com desvios ainda menores daqueles obtidos neste estudo.

Finalmente, sugere-se a aplicação da presente metodologia para outros exemplos numéricos e associados a outros parâmetros, tais como fator de intensidade de tensão e fatores relacionados ao material, de forma a verificar sua validade e limitação.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, T. L. **Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications**. 4 ed.. ed. New York: CRC Press., 2017. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.

ASTM. **Standard Test Method for Crack-Tip Opening Displacement (CTOD) Fracture Toughness Measurement (Withdrawn 2013) - E1290-08e1**. [S.l.], 2008. Citado na página 30.

_____. **AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. Standard Terminology Relating to Fatigue and Fracture Testing - E1823**. [S.l.], 2013. Citado na página 25.

_____. **S Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness - E1820-20ae1**. [S.l.], 2020. Citado na página 30.

_____. **Standard Test Method for Linear-Elastic Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials - E399-20**. [S.l.], 2020. Citado na página 30.

BARROSO, L. C. **Cálculo Numérico com Aplicações**. 2 ed. ed. São Paulo: Harbra Ltda., 1987. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 41.

BARSOM, J. M.; ROLFE, S. T. **Fracture and Fatigue control in structures: Applications of fracture mechanics**. 3rd edition. ed. Philadelphia: ASTM, 1999. Citado na página 61.

BEZZERA, T. C. **Quantificação da incerteza do modelo de Priddle via metodologia fast crack bounds**. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2017. Disponível em: <<http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2794>>. Citado na página 34.

BUDYNAS, R. **Shigley's Mechanical Engineering Design**. [S.l.]: McGraw-Hill Higher Education, 2014. ISBN 9780077591670. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 26.

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Numerical Analysis**. 9. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 40, 41 e 42.

CALLISTER, W. D. **Ciência e Engenharia de Materiais. Uma Introdução (Português)**. 9. ed. [S.l.]: LTC, 2015. Citado na página 26.

CLAUDIO; SANTOS, Rodrigo. Bounds for the propagation model of crack forman. **International Journal of Sciences: Basic and Applied Research (IJSBAR)**, v. 22, n. 2, p. 219–231, 2015. ISSN 2307-4531. Disponível em: <<http://gssrr.org/index.php?journal=JournalOfBasicAndApplied&page=article&op=view&path%5B%5D=3903>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 43.

COLLINS, Jack A. **Projeto mecanico de elementos de maquinas: uma perspectiva de prevencao da falha**. Rio de Janeiro: LTC, 2017. Citado na página 24.

ERDOGAN, F. Fracture mechanics. **International Journal of Solids and Structures**, v. 37, n. 1-2, p. 171–183, jan. 2000. Citado na página 24.

FORMAN, R. G.; KEARNEY, V E.; ENGLE, R M. Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. **Journal of Basic Engineering**, v. 89, p. 459–464, 1967. Citado na página 27.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4 ed. ed. São Paulo: Editora Atlas., 2002. Citado na página 43.

JANSSEN, M.; ZUIDEMA, J.; WANHILL, R. **Fracture Mechanics, Second Edition: Fundamentals and Applications**. [S.l.]: Taylor & Francis, 2004. ISBN 9780203596869. Citado 6 vezes nas páginas 18, 27, 28, 29, 31 e 32.

KIST, M. **Novas metodologias de simulação do tipo Monte-Carlo via séries de Neumann aplicadas a problemas de flexão de placas**. 2016. Tese (Doutorado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016. Citado na página 34.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 2 ed. ed. [S.l.]: Instituto de Matemática Aplicada, 1996. 357 p. Citado na página 41.

MACHADO, W. M. **Aplicação da metodologia numérica “fast bounds crack” para uma estimativa eficiente da evolução do tamanho de trinca**. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2015. Disponível em: <<http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1640>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 33.

MOURA L. G.;ÁVILA, C. R.;BEZERRA T. C.;MACHADO W. M. de. Establishment of bounds for the statistical moments of the crack size, for the collipriest model, using the fast crack bounds method. **Journal of Mechanical Science and Technology**, v. 33, p. 2777–2784, June 2019. Citado na página 34.

PARIS, P.C.; GOMEZ, M.P.; ANDERSON, W.E. A rational analytic theory of fatigue. **The Trend in Engineering**, v. 13, p. 9–14, 1961. Citado na página 27.

PRESS, William H. et al. **Numerical Recipes in C**. New York, USA: Cambridge University Press, 1996. Citado na página 42.

RUBHERT, C. O. F. **Estudo da inferência de carregamento em histórias de vôos simulados na liga de Al aeronáutico SAE-AMS 7475 T7351**. 2007. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007. Citado na página 25.

SANTOS, B. **Quantificação da incerteza de modelo de Forman via metodologia "Fast Crack Bounds"**. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018. Disponível em: <<http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/3927>>. Citado na página 34.

SANTOS, R. V>. **Desenvolvimento de uma nova metodologia estabelecendo cotas para a evolução de trincas para modelos de carregamento com amplitude de tensão constante**. 2015. 116 p. Tese (Doutorado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015. Citado 23 vezes nas páginas 18, 19, 20, 21, 22, 28, 30, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 43, 44, 45, 48, 50, 52, 61, 62, 73 e 88.

SANTOS, Rodrigo Villaca; MACHADO, Waldir Mariano; SILVA, Cláudio R. Ávila da. Fast crack bounds method applied to crack propagation models under constant amplitude loading. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 41, n. 1, p. 20, Dec 2018. ISSN 1806-3691. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40430-018-1517-6>>. Citado 5 vezes nas páginas 22, 36, 38, 50 e 86.

SCHIJVE, J. **Fatigue of structures and materials in the 20th century and the state of the art**. [S.l.: s.n.], 2003. 679-702 p. Citado na página 24.

TADA H.; PARIS, P.C.; Irwin G. R. **The stress analysis of crack handbook**. New York: ASME Press., 2000. Citado 6 vezes nas páginas 31, 32, 33, 45, 46 e 48.

WALKER, H. The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-t3 and 7075-t6 aluminum: In effects of environment and complex load history on fatigue life, ed. m. rosenfeld. ASTM STP 462, American Society for Testing and Materials, p. 1–144, 1970. Citado na página 27.

APÊNDICES

APÊNDICE A – CÓDIGO DE PROGRAMAÇÃO OCTAVE

Algoritmo 1 – Linha de programação RK4 para o modelo de Paris exemplo 2.

```

inserir  $C, m, \Delta\sigma, N_o, N_f, a_0, b;$ 
1:  $for\ i = 1 : n_i;$ 
2:  $f = \sqrt{\sec(\pi * a(i)/2 * b)};$ 
3:  $funcao = C * (\sqrt{\pi * a(i)} * f * \Delta\sigma)^m;$ 
4:  $Y1 = a(i);$ 
5:  $Y2 = a(i) + (\Delta_N/2 * C * (\sqrt{\pi * Y1}) * f * \Delta\sigma)^m;$ 
6:  $f_{Y2} = \sqrt{\sec(\pi * Y2/2 * b)};$ 
7:  $Y3 = a(i) + (\Delta_N/2 * C * (\sqrt{\pi * Y2}) * f_{Y2} * \Delta\sigma)^m;$ 
8:  $f_{Y3} = \sqrt{\sec(\pi * Y3/2 * b)};$ 
9:  $Y4 = a(i) + (\Delta_N * C * (\sqrt{\pi * Y3}) * f_{Y3} * \Delta\sigma)^m;$ 
10:  $f_{Y4} = \sqrt{\sec(\pi * Y4/2 * b)};$ 
11:  $K1 = funcao;$ 
12:  $K2 = C * (\sqrt{\pi * Y2}) * f_{Y2} * \Delta\sigma^m;$ 
13:  $K3 = C * (\sqrt{\pi * Y3}) * f_{Y3} * \Delta\sigma^m;$ 
14:  $K4 = C * (\sqrt{\pi * Y4}) * f_{Y4} * \Delta\sigma^m;$ 
15:  $a(i + 1) = a(i) + (\Delta_N/6) * (K1 + 2 * (K2 + K3) + K4);$ 
16: end
17: imprime  $a(i)$ 

```

Fonte: Autoria própria.

Algoritmo 2 – Linha de programação FCB para o modelo de Paris exemplo 1.

```

inserir  $C, m, \Delta\sigma, N_o, N_f, a_0, b;$ 
1:  $fa = 1.12 + 0.203 * (a_0/b) - 1.197 * (a_0/b)^2 + 1.193 * (a_0/b)^3;$ 
2:  $\Delta K = \sqrt{\pi * a_0} * fa * \Delta\sigma;$ 
3:  $dadN = C * (\Delta K)^m;$ 
4:  $fa1 = (0.203/b) - 2.394 * (a_0/(b^2)) + 5.79 * ((a_0^2)/(b^3));$ 
5:  $d2adN2 = m * (C^2) * ((\Delta K)^{2 * m}) * ((1/(2 * a_0)) + fa1/fa);$ 
6:  $fa2 = (-2.394/(b^2)) + 11.58 * ((a_0^1)/(b^3));$ 
7:  $d3adN3 = (m^2) * (C^3) * (\Delta K^{3 * m}) * (((1 - 1/m)/(2 * a_0^2)) + ((fa1/fa) * ((2/a_0) + ((2 - 1/m) * (fa1/fa) + ((fa2)/(m * fa1))));$ 
8:  $a_{ub} = a_0 + dadN * (N) + (((2/9) * (N) * d3adN3 + (2/3) * d2adN2)) * (N) * (N);$ 
9:  $a_{lb} = a_0 + dadN * (N) + ((1/2) * (d2adN2)) * (N) * (N);$ 
10: end
11: imprime  $a_{ub}$ 
12: imprime  $a_{lb}$ 

```

Fonte: Autoria própria.

Algoritmo 3 – Linha de programação Combinação Convexa para o modelo de Paris exemplo 1.

inserir $C, m, \Delta\sigma, N_o, N_f, a_0, b, \frac{d^2a}{dN^2}, \frac{d^3a}{dN^3}, a_{lb}, a_{ub};$
 1: $\text{delta}N = 900000;$
 2: $A = \frac{d^2a}{dN^2}/3;$
 3: $B = (2/9) * \frac{d^3a}{dN^3};$
 4: $C = \frac{d^2a}{dN^2}/6;$
 5: $D = (2/9) * \text{delta}N * \frac{d^3a}{dN^3};$
 6: $\text{erro} = 0.00015;$
 7: $\alpha = ((2 * \text{erro})/(\Delta N^2) - C - D)/(A + B);$
 8: $a_\alpha = * a_{lb} + (1 -) * a_{ub};$
 9: **imprime** a_α

Fonte: Autoria própria.

Algoritmo 4 – Linha de programação RK4 para o modelo de Forman exemplo 2.

inserir $C, m, \Delta\sigma, N_o, N_f, a_0, b, R, K_c;$
 1: $\text{for } i = 1 : n_i;$
 2: $f = \text{sqrt}(\text{sec}(\text{pi} * a(i)/2 * b));$
 3: $\text{funcao} = (C * (\text{sqrt}(\text{pi} * a(i)) * f * \text{delta}_s\text{igma})^m) / (((1 - R) * K_c) - (\text{sqrt}(\text{pi} * a(i)) * f * \text{delta}_s\text{igma}));$
 4: $Y1 = a(i);$
 5: $Y2 = (i) + (\text{delta}_N/2 * (C * (\text{sqrt}(\text{pi} * Y1) * f * \text{delta}_s\text{igma})^m) / (((1 - R) * K_c) - (\text{sqrt}(\text{pi} * Y1) * f * \text{delta}_s\text{igma})));$
 6: $f_{Y2} = \text{sqrt}(\text{sec}(\text{pi} * Y2/2 * b));$
 7: $Y3 = a(i) + (\text{delta}_N/2 * (C * (\text{sqrt}(\text{pi} * Y2) * f_{Y2} * \text{delta}_s\text{igma})^m) / (((1 - R) * K_c) - (\text{sqrt}(\text{pi} * Y2) * f_{Y2} * \text{delta}_s\text{igma})));$
 8: $f_{Y3} = \text{sqrt}(\text{sec}(\text{pi} * Y3/2 * b));$
 9: $Y4 = a(i) + (\text{delta}_N * (C * (\text{sqrt}(\text{pi} * Y3) * f_{Y3} * \text{delta}_s\text{igma})^m) / (((1 - R) * K_c) - (\text{sqrt}(\text{pi} * Y3) * f_{Y3} * \text{delta}_s\text{igma})));$
 10: $f_{Y4} = \text{sqrt}(\text{sec}(\text{pi} * Y4/2 * b));$
 11: $K1 = \text{funcao};$
 12: $K2 = C * ((\text{sqrt}(\text{pi} * Y2) * f_{Y2} * \text{delta}_s\text{igma})^m);$
 13: $K3 = C * ((\text{sqrt}(\text{pi} * Y3) * f_{Y3} * \text{delta}_s\text{igma})^m);$
 14: $K4 = C * ((\text{sqrt}(\text{pi} * Y4) * f_{Y4} * \text{delta}_s\text{igma})^m);$
 15: $a(i + 1) = a(i) + (\text{delta}_N/6) * (K1 + 2 * (K2 + K3) + K4);$
 16: **end**
 17: **imprime** $a(i)$

Fonte: Autoria própria.

Algoritmo 5 – Linha de programação FCB para o modelo de Forman exemplo 2.

inserir $C, m, \Delta\sigma, N_o, N_f, a_0, b, R, K_c;$
 1: $fa = \text{qrt}(\text{sec}(\text{pi} * a_0/2 * b));$
 2: $\text{delta}K = \text{sqrt}(\text{pi} * a_0) * fa * \text{delta}_s\text{igma};$
 3: $\text{dad}N = (C * (\text{delta}K^m)) / ((1 - R) * K_c - \text{delta}K);$
 4: $fa1 = (\text{pi} * \sin(\text{pi} * a_0/(2 * b)) * \text{sec}(\text{pi} * a_0/(2 * b)) * (3/2)) / (4 * b);$
 5: $d2adN2 = (((C * (\text{delta}K^m)) / ((1 - R) * K_c - \text{delta}K))^2) * (m + ((1) / (((1 - R) * K_c) / (\text{delta}K)) - 1)) * ((1/(2 * a_0)) + fa1/fa);$
 6: $fa2 = ((\text{pi}^2) * (3 * ((\tan(\text{pi} * a_0/(2 * b)))^2) + 2) * \text{sqrt}(\text{sec}(\text{pi} * a_0/(2 * b)))) / (16 * (b^2));$
 7: $d3adN3 = (((C * (\text{delta}K^m)) / ((1 - R) * K_c - \text{delta}K))^3) * (2 * ((m + ((1) / (((1 - R) * K_c) / (\text{delta}K)) - 1))^2) * (((1/(2 * a_0)) + fa1/fa)^2) + (((1/(2 * a_0)) * (m/(2 * a_0) + (((1 - R) * K_c * \text{delta}K) / ((\text{delta}K - (1 - R) * K_c)^2))) * (((1/(2 * a_0)) + fa1/fa) - ((1) / ((1 - R) * K_c / (\text{delta}K) - 1))) + ((m/(fa^2)) * (fa * fa2 - fa1^2 + ((\text{delta}K^2) * (fa2^2) - fa * fa2) / (m * (\text{delta}K - (1 - R) * K_c))))));$
 8: $a_{ub} = a_0 + \text{dad}N * (N) + ((2/9) * (N) * d3adN3 + (2/3) * d2adN2) * (N) * (N);$
 9: $a_{lb} = a_0 + \text{dad}N * (N) + ((1/2) * (d2adN2)) * (N) * (N);$
 10: **end**
 11: **imprime** a_{ub}
 12: **imprime** a_{lb}

Fonte: Autoria própria.

APÊNDICE B – TERCEIRA DERIVADA DA EQUAÇÃO DO MODELO DE PARIS ERDOGAN

O modelo de propagação de trinca para o Modelo de Paris é escrito por:

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^m = C(\Delta\sigma\sqrt{\pi a}f(a))^m \quad (93)$$

Sabendo que a segunda derivada da equação (93) é dada por:

$$\frac{d^2a}{dN^2} = mC^2\Delta K^{2m} \left(\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right). \quad (94)$$

Podemos a partir destas duas equações calcular a terceira derivada. Seja:

$$\frac{d^3a}{dN^3} = \frac{d}{dN} \left(\frac{d^2a}{dN^2} \right) = \frac{d}{da} \left(\frac{d^2a}{dN^2} \right) \frac{da}{dN}. \quad (95)$$

Calculando para o termo:

$$\frac{d}{da} \left(\frac{d^2a}{dN^2} \right) = \frac{d}{da} \left[mC^2\Delta K^{2m} \left(\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right) \right]. \quad (96)$$

Separando a equação (96) em dois termos temos:

$$A = \frac{d}{da} \left(\frac{mC^2\Delta K^{2m}}{2a} \right) \quad (97)$$

e

$$B = \frac{d}{da} \left(\frac{mC^2\Delta K^{2m}f'(a)}{f(a)} \right). \quad (98)$$

Calculando para A, sabendo que $\Delta K = \Delta\sigma\sqrt{\pi a}f(a)$, consideremos:

$$\Delta K_\gamma = \frac{\Delta\sigma\sqrt{\pi a}f(a)}{a^{\frac{1}{2m}}} = u_\gamma. \quad (99)$$

Seja $g_\gamma(u) = mC^2u_\gamma^{2m}$, assim:

$$\frac{dg_\gamma(u_\gamma)}{da} = \frac{dg_\gamma}{du_\gamma} \frac{du_\gamma}{da}. \quad (100)$$

Solcionando para $\frac{dg_\gamma}{du_\gamma}$, tem-se:

$$\frac{dg_\gamma}{du_\gamma} = \frac{d}{du_\gamma} \left(\frac{mC^2}{2} u_\gamma^{2m} \right) = \frac{mC^2}{2} 2m u_\gamma^{2m-1} \quad (101)$$

Solucionando o termo $\frac{du_\gamma}{da}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{du_\gamma}{da} &= \frac{d}{da} \left(\frac{\Delta\sigma\sqrt{\pi a}f(a)}{a^{\frac{1}{2m}}} \right) \\ &= \Delta\sigma\sqrt{\pi} \frac{d}{da} \left(a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}} f(a) \right) \\ &= \Delta\sigma\sqrt{\pi} \left(\frac{d}{da} (a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}}) f(a) + a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}} \frac{d}{da} (f(a)) \right) \\ &= \Delta\sigma\sqrt{\pi} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2m} \right) a^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}} f(a) + a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}} f'(a) \right] \end{aligned} \quad (102)$$

Multiplicando e dividindo por $\frac{\sqrt{a} \cdot f(a)}{a^{\frac{1}{2m}}}$ para reconstruir o termo u_γ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{du_\gamma}{da} &= \Delta\sigma\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{a}f(a)}{a^{\frac{1}{2m}}}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}\right)\frac{a^{\frac{-1}{2}-\frac{1}{2m}}f(a)}{\frac{\sqrt{a}f(a)}{a^{\frac{1}{2m}}}}+\frac{a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}}f'(a)}{\frac{\sqrt{a}f(a)}{a^{\frac{1}{2m}}}}\right] \\ \frac{du_\gamma}{da} &= \Delta K_\gamma\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}\right)\frac{1}{a}+\frac{f'(a)}{f(a)}\right]. \end{aligned} \quad (103)$$

Retornando a equação (103) em (100) podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{dg_\gamma}{da} &= \frac{dg_\gamma}{du_\gamma}\frac{du_\gamma}{da} = \frac{mC^2}{2}2mu_\gamma^{2m-1} \cdot u_\gamma(\dots) \\ &= m^2C^2u_\gamma^{2m}\left(\frac{1}{2a}-\frac{1}{2am}+\frac{f'(a)}{f(a)}\right), \end{aligned} \quad (104)$$

e sabendo que $u_\gamma = \frac{\Delta\sigma\sqrt{\pi a}f(a)}{a^{\frac{1}{2m}}}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{da}\left(\frac{m^2C^2\Delta K^{2m}}{2a}\right) &= m^2C^2\left(\frac{\Delta\sigma\sqrt{\pi a}f(a)}{a^{\frac{1}{2m}}}\right)(\dots) \\ &= \frac{m^2C^2\Delta K^{2m}}{a}\left(\frac{1}{2a}-\frac{1}{2am}+\frac{f'(a)}{f(a)}\right) \\ &= m^2C^2\Delta K^{2m}\left(\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{2a^2m}+\frac{f'(a)}{af(a)}\right) \\ &= m^2C^2\Delta K^{2m}\left[\frac{1}{2a^2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{f'(a)}{af(a)}\right]. \end{aligned} \quad (105)$$

Calculando para B:

$$\frac{d}{da}\left(\frac{mC^2\Delta K^{2m}f'(a)}{f(a)}\right) = \frac{d}{da}\left(\frac{\Delta K^{2m}f'(a)}{f(a)}\right). \quad (106)$$

Sabendo que $\Delta K = \Delta\sigma\sqrt{\pi a}f(a)$, consideremos $\Delta K_\beta = \frac{\Delta\sigma\sqrt{\pi a}f(a)f'(a)^{\frac{1}{2m}}}{f(a)^{\frac{1}{2m}}} = u_\beta$. Seja $g_\beta(u) = mC^2(u_\beta)^{2m}$, assim:

$$\frac{dg_\beta}{da} = \frac{dg_\beta}{du_\beta}\frac{du_\beta}{da} \quad (107)$$

Solucionando para $\frac{dg_\beta}{du_\beta}$, tem-se:

$$\frac{dg_\beta}{du_\beta} = \frac{d}{du_\beta}(mC^2u_\beta^{2m}) = mC^22mu_\beta^{2m-1}. \quad (108)$$

Solucionando para $\frac{du_\beta}{da}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{du_\beta}{da} &= \frac{d}{da} \left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a} f(a)^{\left(1-\frac{1}{2m}\right)} f'(a)^{\left(\frac{1}{2m}\right)} \right) \\
&= \Delta\sigma\sqrt{\pi} \frac{d}{da} \left(\sqrt{a} f(a)^{\left(1-\frac{1}{2m}\right)} f'(a)^{\left(\frac{1}{2m}\right)} \right) \\
&= \Delta\sigma\sqrt{\pi} \left[\frac{d}{da} (\sqrt{a}) f(a)^{\left(1-\frac{1}{2m}\right)} f'(a)^{\left(\frac{1}{2m}\right)} + \right. \\
&\quad \left. \sqrt{a} \frac{d}{da} \left(f(a)^{\left(1-\frac{1}{2m}\right)} \right) f'(a)^{\left(\frac{1}{2m}\right)} + \sqrt{a} f(a)^{\left(1-\frac{1}{2m}\right)} \frac{d}{da} \left(f'(a)^{\left(\frac{1}{2m}\right)} \right) \right] \\
&= \Delta\sigma\sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} f(a)^{\left(1-\frac{1}{2m}\right)} f'(a)^{\left(\frac{1}{2m}\right)} \right. \\
&\quad \left. + a^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2m} \right) f(a)^{\left(-\frac{1}{2m}\right)} f'(a) f'(a)^{\left(\frac{1}{2m}\right)} + a^{\frac{1}{2}} f(a)^{\left(1-\frac{1}{2m}\right)} \frac{1}{2m} f'(a)^{\left(\frac{1}{2m}-1\right)} f''(a) \right).
\end{aligned} \tag{109}$$

Multiplicando e dividindo a equação (109) por $a^{\frac{1}{2}} f(a) \left(\frac{f'(a)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{2m}}$ para reconstruir Δk_β , temos:

$$\begin{aligned}
\frac{du_\beta}{da} &= \Delta\sigma\sqrt{\pi} \left(\frac{\frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} f(a)^{\left(1-\frac{1}{2m}\right)} f'(a)^{\left(\frac{1}{2m}\right)}}{a^{\frac{1}{2}} f(a) \left(\frac{f'(a)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{2m}}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2m} \right) f(a)^{\left(-\frac{1}{2m}\right)} f'(a) f'(a)^{\left(\frac{1}{2m}\right)}}{a^{\frac{1}{2}} f(a) \left(\frac{f'(a)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{2m}}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^{\frac{1}{2}} f(a)^{\left(1-\frac{1}{2m}\right)} \frac{1}{2m} f'(a)^{\left(\frac{1}{2m}-1\right)} f''(a)}{a^{\frac{1}{2}} f(a) \left(\frac{f'(a)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{2m}}} \right) \\
&= u_\beta \left[\frac{1}{2a} + \left(1 - \frac{1}{2m} \right) \frac{f'(a)}{f(a)} + \frac{f''(a)}{2m f'(a)} \right].
\end{aligned} \tag{110}$$

Retornando o resultado da equação (110) na equação (108) tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{du_\beta}{da} &= mC^2 2m (u_\beta)^{2m-1} u_\beta (\dots) \\
&= 2m^2 C^2 u_\beta^{2m} (\dots) \\
&= 2m^2 C^2 \left[\Delta\sigma\sqrt{\pi a} f(a) \left(\frac{f'(a)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{2m}} \right]^2 m (\dots) \\
&= 2m^2 C^2 \Delta K^{2m} \left(\frac{f'(a)}{f(a)} \right) (\dots) \\
&= 2m^2 C^2 \Delta K^{2m} \left(\frac{f'(a)}{f(a)} \right) \left[\frac{1}{2a} + \left(1 - \frac{1}{2m} \right) \frac{f'(a)}{f(a)} + \frac{f''(a)}{2m f'(a)} \right] \\
&= 2m^2 C^2 \Delta K^{2m} \left[\frac{f'(a)}{2a f(a)} + \left(1 - \frac{1}{2m} \right) \frac{f'(a)^2}{f(a)^2} + \frac{f''(a) f'(a)}{2m f'(a) f(a)} \right] \\
&= m^2 C^2 \Delta K^{2m} \left[\frac{f'(a)}{a f(a)} + \left(2 - \frac{1}{m} \right) \frac{f'(a)^2}{f(a)^2} + \frac{f''(a)}{m f(a)} \right].
\end{aligned} \tag{111}$$

Retornando o resultado da equação de A e B, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^3 a}{dN^3} &= \frac{d}{dN} \frac{d^2 a}{dN^2} = \frac{d}{da} \frac{d^2 a}{dN^2} \frac{da}{dN} \\
 &= m^2 C^2 \Delta k^{2M} (A + B) (C \Delta K^m) \\
 &= m^2 C^3 \Delta K^{3m} (A + B) \\
 &= m^2 C^3 \Delta K^{3m} \left[\frac{1}{2a^2} \left(1 - \frac{1}{m} \right) + \frac{f'(a)}{af(a)} + \frac{f'(a)}{af(a)} + \left(2 - \frac{1}{m} \right) \frac{f'(a)^2}{f(a)^2} + \frac{f''(a)}{mf(a)} \right] \\
 &= m^2 C^3 \Delta K^{3m} \left\{ \frac{\left(1 - \frac{1}{m} \right)}{2a^2} + \frac{f'(a)}{f(a)} \left[\frac{2}{a} + \left(2 - \frac{1}{m} \right) \frac{f'(a)}{f(a)} + \frac{f''(a)}{mf'(a)} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

(112)

APÊNDICE C – TERCEIRA DERIVADA DA EQUAÇÃO DO MODELO DE FORMAN

O modelo de propagação de trinca para de Forman é escrito por:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C\Delta K^m}{(1-R)K_C - \Delta K} \quad (113)$$

Sabendo que a segunda derivada da equação (113) é dada por:

$$\frac{d^2a}{dN^2} = \left(\frac{C\Delta K^m}{(1-R)K_C - \Delta K} \right)^2 \left(m + \frac{1}{\frac{(1-R)K_C}{\Delta K} - 1} \right) \left(\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right) \quad (114)$$

Podemos a partir destas duas equações calcular a terceira derivada. Seja:

$$\frac{d^3a}{dN^3} = \frac{d}{dN} \left(\frac{d^2a}{dN^2} \right) = \frac{d}{da} \left(\frac{d^2a}{dN^2} \right) \frac{da}{dN} \quad (115)$$

e

$$\alpha = (1-R)K_C; \Delta K = u; g(u) = \frac{Cu^m}{\alpha - u}. \quad (116)$$

Separando a equação (114) no seguintes em quatro termos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{d}{da} \left[\left(\frac{C\Delta K^m}{(1-R)K_C - \Delta K} \right)^2 \left(\frac{m}{2a} \right) \right] \\ B &= \frac{d}{da} \left[\left(\frac{C\Delta K^m}{(1-R)K_C - \Delta K} \right)^2 \left(\frac{mf'(a)}{f(a)} \right) \right] \\ C &= \frac{d}{da} \left[\left(\frac{C\Delta K^m}{(1-R)K_C - \Delta K} \right)^2 \left(\frac{1}{2a \left(\frac{(1-R)K_C}{\Delta K} - 1 \right)} \right) \right] \\ D &= \frac{d}{da} \left\{ \left(\frac{C\Delta K^m}{(1-R)K_C - \Delta K} \right)^2 \left[\frac{f'(a)}{f(a) \left(\frac{(1-R)K_C}{\Delta K} - 1 \right)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (117)$$

Resolvendo para A. Seja $\alpha = (1-R)K_C$.

$$\frac{d}{da} \left[\left(\frac{C\Delta K^m}{\alpha - \Delta K} \right)^2 \left(\frac{m}{2a} \right) \right] = \left(\frac{C\Delta K^m}{\alpha - \Delta K} \right)^2 \left[-\frac{m}{2a^2} + \left(\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right) \left(\frac{m^2}{a} + \frac{m\Delta k}{a(\alpha - \Delta k)} \right) \right] \quad (118)$$

Resolvendo para B.

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \left[\left(\frac{C\Delta K^m}{\alpha - \Delta K} \right)^2 \left(\frac{mf'(a)}{f(a)} \right) \right] &= \left(\frac{C\Delta K^m}{\alpha - \Delta K} \right)^2 \left[\frac{mf'(a)}{f(a)} \left(\frac{f''(a)}{f'(a)} + f'(a) \right) + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right) \left(\frac{2mf'(a)}{f(a)} \right) (m+1) \right] \end{aligned} \quad (119)$$

Resolvendo para C.

$$\frac{d}{da} \left[\left(\frac{C\Delta K^m}{\alpha - \Delta K} \right)^2 \left(\frac{1}{\frac{\alpha}{\Delta K} - 1} \right) \left(\frac{1}{2a} \right) \right] = \left(\frac{C\Delta K^m}{\alpha - \Delta K} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right) \left(\frac{\alpha}{\Delta K 2a \left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right)^2} + \frac{\Delta K}{\alpha \left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right) (\alpha - \Delta K)} + \frac{m}{\alpha \left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right)} \right) - \frac{1}{2a^2 \left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right)} \right] \quad (120)$$

Resolvendo para D.

$$\frac{d}{da} \left[\left(\frac{C\Delta K^m}{\alpha - \Delta K} \right)^2 \left(\frac{1}{\frac{\alpha}{\Delta K} - 1} \right) \left(\frac{f'(a)}{f(a)} \right) \right] = \left(\frac{C\Delta K^m}{\alpha - \Delta K} \right)^2 \left\{ \left(\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right) \left(\frac{f'(a)}{f(a)} \right) \left[\frac{\frac{\alpha}{\Delta K}}{\left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right)^2} + \frac{2\Delta K}{\left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right) (\alpha - \Delta K)} + \frac{2m}{\left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right)} \right] + \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right)} \left(\frac{f''(a)}{f(a)} - \frac{f'(a)^2}{f(a)^2} \right) \right\} \quad (121)$$

Por fim, reunindo os termos A, B, C e D resolvidos da equação (117), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \frac{d^2 a}{dN^2} &= \left(\frac{C\Delta K^m}{\alpha - \Delta K} \right)^2 \left\{ \left[-\frac{m}{2a^2} + \left(\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right) \left(\frac{m^2}{a} + \frac{m\Delta k}{a(\alpha - \Delta k)} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{mf'(a)}{f(a)} \left(\frac{f''(a)}{f'(a)} + f'(a) \right) + \left(\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right) \left(\frac{2mf'(a)}{f(a)} \right) (m+1) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right) \left(\frac{\alpha}{\Delta K 2a \left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right)^2} + \frac{\Delta K}{\alpha \left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right) (\alpha - \Delta K)} + \frac{m}{\alpha \left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right)} \right) - \frac{1}{2a^2 \left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right) \left(\frac{f'(a)}{f(a)} \right) \left[\frac{\frac{\alpha}{\Delta K}}{\left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right)^2} + \frac{2\Delta K}{\left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right) (\alpha - \Delta K)} + \frac{2m}{\left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right)} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right)} \left(\frac{f''(a)}{f(a)} - \frac{f'(a)^2}{f(a)^2} \right) \right] \right\} \quad (122) \end{aligned}$$

Agupando os termos e aplicando a regra da cadeia, temos que a terceira

derivada do modelo de Forman é:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^3 a}{dN^3}(N) &= \frac{d}{da} \frac{d^2 a}{dN^2} \frac{da}{dN} = \left(\frac{C \Delta K^m}{\alpha - \Delta K} \right)^3 \left\{ \left(\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right) \left[\left(\frac{m^2}{a} + \frac{m \Delta k}{a(\alpha - \Delta k)} \right) \right. \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{2m f'(a)}{f(a)} \right) (m+1) + \frac{\alpha}{\Delta K 2a \left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right)^2} + \frac{\Delta K}{\alpha \left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right) (\alpha - \Delta K)} + \frac{m}{\alpha \left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right)} \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{f'(a)}{f(a)} \right) \left(\frac{\frac{\alpha}{\Delta K}}{\left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right)^2} + \frac{2\Delta K}{\left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right) (\alpha - \Delta K)} + \frac{2m}{\left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right)} \right) \right] \\
 &- \frac{m}{2a^2} + \frac{m f'(a)}{f(a)} \left(\frac{f''(a)}{f'(a)} + f'(a) \right) - \frac{1}{2a^2 \left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right)} + \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\Delta K} - 1 \right)} \left(\frac{f''(a)}{f(a)} - \frac{f'(a)^2}{f(a)^2} \right) \left. \right\} \\
 &\hspace{15em} (123)
 \end{aligned}$$

APPENDICES

ÍNDICE REMISSIVO

- a^* (a estrela), 34, 36
 Airy, 27
 CAC, 27
 CATC, 44, 89
 Combinação convexa, 41, 80
 Cota inferior, 34
 Cota Superior, 37
 Cota superior, 34, 36, 52, 58, 61
 EDO, 39, 52
 ELT, 41
 Euler, 39, 52
 Fadiga, 18, 24
 FCB, 21, 33, 34, 43, 44, 86, 88
 FIT, 28, 29, 31, 37, 45
 Forman, 18, 35, 37, 58, 73
 Griffith, 28
 Irwin, 28, 31
 Isida, 33
 Lipschitz, 40
 Lower Bound, 34
 Machado, 33
 McEvily, 18, 35
 MFLE, 18, 24, 25, 44
 Métodos Numéricos, 39
 Paris-Erdogan, 18, 27, 35, 36, 57, 62
 Priddle, 18, 35
 Propagação de trinca, 26
 PVI, 18, 22, 34, 36, 37, 39, 52, 66, 68, 78, 80
 RK4, 21, 22, 34, 41, 43, 48, 86
 RTC, 86
 Santos, 19, 36, 37
 Similitude, 24
 Tada, 31
 Tensões atuantes, 30
 Trinca, 25
 Upper Bound, 34
 Walker, 18, 35
 Westergaard, 27