

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA E DE  
MATERIAIS**

**VALDINEI APARECIDO PEDROSO**

**QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO MODELO RANDÔMICO DE  
COLLIPRIEST VIA METODOLOGIA MONTE CARLO E *FAST CRACK BOUNDS***

**DISSERTAÇÃO**

**CURITIBA  
2020**

**VALDINEI APARECIDO PEDROSO**

**QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO MODELO RANDÔMICO DE  
COLLIPRIEST VIA METODOLOGIA MONTE CARLO E *FAST CRACK BOUNDS***

**Uncertainty quantification of Collipriest random model by Monte Carlo and Fast Crack  
Bounds methodology**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Cláudio Roberto Ávila da Silva Júnior

**CURITIBA  
2020**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite o download e o compartilhamento da obra desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es), sem a possibilidade de alterá-la ou utilizá-la para fins comerciais.



---

VALDINEI APARECIDO PEDROSO

**QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO MODELO RANDÔMICO DE COLLIPRIEST VIA METODOLOGIA MONTE CARLO E "FAST CRACK BOUNDS"**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Engenharia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Mecânica Dos Sólidos.

Data de aprovação: 24 de Novembro de 2020

Prof Claudio Roberto Avila Da Silva Junior, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Ivan Moura Belo, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Joao Morais Da Silva Neto, Doutorado - Universidade Federal do Paraná (Ufpr)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 24/11/2020.

Dedico este trabalho a todos os que me ajudaram ao longo desta caminhada. Something Linky

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus pela a oportunidade e conclusão desta etapa em minha vida.

Agradeço a minha família, meus pais, minha esposa, e principalmente minha filha Millena, minha fonte de inspiração.

Agradeço ao professor orientador Dr. Cláudio R. Ávila por aceitar em ser meu orientador e compartilhar seu grande e valoroso conhecimento na área da engenharia mecânica.

Agradeço aos professores da UTFPR que não exitaram em me ajudar em algum momento que eu necessitei.

Agradeço a UTFPR a qual pude estudar boa parte de minha vida desde o curso técnico.

*“Seja gentil, porque todos os que você encontrar estarão lutando uma batalha mais dura que a sua.”*

*Platão*

## RESUMO

PEDROSO, V.A. **Quantificação do modelo randômico de Collipriest via metodologia Monte Carlo e *Fast Crack Bounds***. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica do Paraná, Curitiba, 2020.

Estruturas mecânicas são submetidas aos esforços cíclicos e tendem a colapsar nas condições de fadiga. Existem diversos modelos matemáticos que descrevem a propagação de uma trinca. De forma geral, os modelos de propagação de trinca são classificados pelo tipo de carregamento, que pode ter amplitude de tensão constante ou amplitude de tensão variável. Neste trabalho será explorado o modelo do tipo amplitude de tensão constante proposto por Collipriest. Para muitas aplicações de engenharia é exigido uma estimativa confiável do comportamento da trinca. Portanto, este trabalho apresenta resultados teóricos, que consistem na quantificação de incerteza nos parâmetros de definição no modelo utilizado, tomando como base cotas inferiores e superiores, que “envelopam” os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e de segunda ordem da função “tamanho de trinca”, baseadas no método *Fast Crack Bounds*. Essas cotas são polinômios, definidos na variável número de ciclos, que consideram as incertezas nos parâmetros que descrevem os modelos de propagação de trinca. O método de simulação de Monte Carlo foi utilizado para obter as realizações da função tamanho de trinca a partir de um conjunto de amostras randômicas dos parâmetros característicos do modelo de Collipriest. Essas realizações serão utilizadas para obter os estimadores dos momentos estatísticos do “tamanho de trinca”. A eficiência das cotas para os estimadores dos momentos estatísticos do “tamanho de trinca” é avaliada através de funções “desvio relativo” entre as cotas e as soluções numéricas aproximadas do problema de valor inicial que descreve o modelo de Collipriest. Em geral, a solução do problema de valor inicial que descrevem os modelos de propagação de trincas é obtida através do uso de métodos numéricos, como o método de Runge-Kutta de quarta ordem explícito. Neste trabalho foi utilizado o software MATLAB para obter as soluções que descrevem o modelo de propagação de trincas do modelo de Collipriest.

**Palavras-chaves:** Mecânica da Fratura, Modelo de Evolução do tamanho de trinca, Método Fast Crack Bounds, Método de Runge-Kutta, Modelo de Collipriest.

## ABSTRACT

PEDROSO, V.A. **Uncertainty quantification of Collipriest random model by the Monte Carlo and Fast Crack Bounds methodology.** Dissertation (Master in Engineering) - Postgraduate Program in Mechanical and Materials Engineering, Technological University of Paraná, Curitiba, 2020.

Mechanical structures are subjected to the cycles loads and collapse in fatigue conditions. There are many mathematical models describing the crack propagation. Generally, crack propagation models are classified by the load type, which can be constant stress amplitude or variable stress amplitude. In this work the Collipriest constant stress amplitude model will be studied. For many engineering applications a reliable estimation of crack propagation are required. Therefore this work presents the theoretical results, which provides in the uncertainty quantification parameters of the used model and considering the lower and upper bounds enveloping the statistical estimators of the first and second terms of the crack size function, on the basis of Fast Crack Bounds method. These bounds are polynomials and defined in the variable cycle number, which consider the uncertainties in parameters of the crack propagation model. The Monte Carlo simulation method was used to obtain the crack size function from randomic samples set and based on the Collipriest parameters model. These statistical realization are used to give the estimators and moments of the crack size function. The bounds efficiency of the statistical estimators moments is evaluated through relative deviations functions between bounds and approximate numerical solutions of the Collipriest model initial value problem. Generally, the initial value problem, which describes the crack propagation models, uses numerical methods such as the explicit fourth order Runge-Kutta method. In this work Matlab software will be used to obtain the solutions that describe the Collipriest crack propagation model.

**Key-words:**Fracture Mechanics, Crack Size Evolution Model, Fast Crack Bounds Method, Runge-Kutta Method, Collipriest Model.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– F111.....	20
Figura 2	– Aresta de frente de trinca .....	21
Figura 3	– Modo de abertura.....	22
Figura 4	– Curva sigmoideal .....	23
Figura 5	– Placa infinita com trinca central .....	40
Figura 6	– Primeiro momento - incerteza em “ $C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	41
Figura 7	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	42
Figura 8	– Primeiro momento - incerteza em “ $m$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	43
Figura 9	– Primeiro momento - incerteza em “ $k_C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	43
Figura 10	– Primeiro momento - incerteza em “ $K_{th}$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	44
Figura 11	– Primeiro momento - incerteza em “ $a_0$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	44
Figura 12	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $m$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	45
Figura 13	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $k_C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	45
Figura 14	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $K_{th}$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	46
Figura 15	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $a_0$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	46
Figura 16	– Primeiro momento - incerteza em “ $C$ ” e dispersão $\delta = 3/10$ .....	47
Figura 17	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $C$ ” e dispersão $\delta = 3/10$ .....	47
Figura 18	– Segundo momento - incerteza em “ $C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	48
Figura 19	– Segundo momento - desvio relativo em “ $K_C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	48
Figura 20	– Segundo momento - incerteza em “ $C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	49
Figura 21	– Segundo momento - desvio relativo em “ $K_C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	49
Figura 22	– Segundo momento - desvio relativo em “ $k_C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	52
Figura 23	– Segundo momento - desvio relativo em “ $k_C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	52
Figura 24	– Placa finita com trinca central .....	55
Figura 25	– Primeiro momento - incerteza em “ $C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	56
Figura 26	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	57
Figura 27	– Primeiro momento - incerteza em “ $m$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	58
Figura 28	– Primeiro momento - incerteza em “ $k_C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	58
Figura 29	– Primeiro momento - incerteza em “ $K_{th}$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	59
Figura 30	– Primeiro momento - incerteza em “ $a_0$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	59
Figura 31	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $m$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	60
Figura 32	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $k_C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	60
Figura 33	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $K_{th}$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	61
Figura 34	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $a_0$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	61
Figura 35	– Primeiro momento - incerteza em “ $C$ ” e dispersão $\delta = 3/10$ .....	62
Figura 36	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	62
Figura 37	– Primeiro momento - incerteza em “ $a_0$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	63
Figura 38	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	63
Figura 39	– Segundo momento - incerteza em “ $C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	64
Figura 40	– Segundo momento - desvio relativo em “ $k_c$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	64
Figura 41	– Placa finita com trinca lateral .....	69
Figura 42	– Primeiro momento - incerteza em “ $C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	70
Figura 43	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	71
Figura 44	– Primeiro momento - incerteza em “ $m$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	72
Figura 45	– Primeiro momento - incerteza em “ $k_C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	72
Figura 46	– Primeiro momento - incerteza em “ $K_{th}$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	73

Figura 47	– Primeiro momento - incerteza em “ $a_0$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	73
Figura 48	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $m$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	74
Figura 49	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $k_C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	74
Figura 50	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $K_{th}$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	75
Figura 51	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $a_0$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	75
Figura 52	– Primeiro momento - incerteza em “ $C$ ” e dispersão $\delta = 3/10$ .....	76
Figura 53	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $C$ ” e dispersão $\delta = 3/10$ .....	76
Figura 54	– Primeiro momento - incerteza em “ $a_0$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	77
Figura 55	– Primeiro momento - desvio relativo em “ $C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	77
Figura 56	– Segundo momento - incerteza em “ $C$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	78
Figura 57	– Segundo momento - desvio relativo em “ $k_c$ ” e dispersão $\delta = 1/10$ .....	78

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Parâmetros de entrada de simulação numérica das placas com trincas .....	39
Tabela 2	–	Tabela de propriedades mecânicas do Inconel .....	39
Tabela 3	–	Resultado no primeiro momento, $\delta = 1/10$ - placa infinita e com trinca central	50
Tabela 4	–	Resultado no primeiro momento, $\delta = 1/10$ - placa infinita e com trinca central	51
Tabela 5	–	Resultado no segundo momento, $\delta = 1/10$ - placa infinita e com trinca central	53
Tabela 6	–	Resultado no primeiro momento, $\delta = 1/10$ - placa com largura infinita .....	54
Tabela 7	–	Tempos computacionais - placa infinita com trinca central .....	54
Tabela 8	–	Resultado no primeiro momento, $\delta = 1/10$ - placa finita e trinca central ....	65
Tabela 9	–	Resultado no primeiro momento, $\delta = 3/10$ - placa finita e trinca central ....	66
Tabela 10	–	Resultado no segundo momento, $\delta = 1/10$ - placa finita e trinca central ...	67
Tabela 11	–	Resultado primeiro momento, $\delta = 1/10$ - placa finita e trinca central .....	68
Tabela 12	–	Tempos computacionais - placa finita com trinca central .....	68
Tabela 13	–	Resultado no primeiro momento, $\delta = 1/10$ - placa finita e trinca na borda .	79
Tabela 14	–	Resultado no primeiro momento, $\delta = 1/10$ - placa finita e trinca na borda .	80
Tabela 15	–	Resultado no segundo momento, $\delta = 1/10$ - placa finita e trinca na borda .	81
Tabela 16	–	Resultado no primeiro momento, $\delta = 1/10$ - placa finita e trinca na borda .	82
Tabela 17	–	Tempos computacionais - placa finita e trinca na borda .....	82
Tabela 18	–	Resultado no primeiro momento estatístico e com dispersão de $\delta = 1/10$ ..	83
Tabela 19	–	Tempos computacionais .....	84
Tabela 20	–	Resultado no primeiro momento estatístico e com dispersão de $\delta = 1/10$ ..	84
Tabela 21	–	Tempos computacionais .....	84
Tabela 22	–	Resultado no primeiro momento estatístico e com dispersão de $\delta = 1/10$ .	85
Tabela 23	–	Tempos computacionais .....	85

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Algoritmo de RK4 .....	36
-----------------------------------	----

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

MFLE	Mecânica da fratura linear elástica
FCB	Fast Crack Bounds
CATC	Carregamento com Amplitude de Tensão Constante
CATV	Carregamento com Amplitude de Tensão Variável
MC	Monte Carlo
RK	Runge Kutta
PVI	Problema de Valor Inicial
SMC	Simulação de Monte Carlo
FIT	Fator Intensidade de Tensão
EDO	Equação Diferencial Ordinária
FDP	Função Densidade de Probabilidade

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\Delta\sigma$	Amplitude de tensão
$\sigma$	Tensão nominal
$b$	Largura da placa
$a$	Tamanho de trinca
$a_0$	Tamanho de trinca inicial
$\underline{a}$	Tamanho de trinca da cota inferior obtido no FCB
$\bar{a}$	Tamanho de trinca da cota superior obtido no FCB
$a^*$	Tamanho de trinca estrela do FCB
$K$	Fator intensidade de tensão
$K_{max}$	Fator intensidade de tensão máximo
$K_{IC}$	Fator de tenacidade à fratura
$\Delta K$	Varição do FIT
$N_0$	Número de ciclos inicial
$N_1$	Número de ciclos final
$N$	Número de ciclos
$N_s$	Número de amostras
$\frac{da}{dN}$	Taxa de propagação do tamanho de trinca
$\Delta K_{th}$	Fator de intensidade de tensão inicial - “threshold”
$R$	Razão de tensão máxima e mínima
$C$	Parâmetro do modelo de Collipriest
$m$	Parâmetro do modelo de Collipriest
$h$	Lei genérica para evolução de trinca
$\rho$	Relação de desempenho entre as metodologias
$\omega$	Evento randômico
$\Omega$	Espaço amostral
$F$	$\sigma$ -álgebra de eventos
$P$	Medida de probabilidade
$\hat{\mu}_{\bar{a}}$	Estimativa do primeiro momento estatístico - Cota superior

$\hat{\mu}_a$	Estimativa do primeiro momento estatístico – tamanho de trinca
$\hat{\mu}_{\underline{a}}$	Estimativa do primeiro momento estatístico - Cota inferior
$\hat{\mu}_{\overline{a}}^2$	Estimativa do segundo momento estatístico - Cota superior
$\hat{\mu}_a^2$	Estimativa do segundo momento estatístico – tamanho de trinca
$\hat{\mu}_{\underline{a}}^2$	Estimativa do segundo momento estatístico - Cota inferior
$\mu_c$	Valor esperado da variável randômica “ $C$ ”
$\mu_{a_0}$	Valor esperado da variável randômica “ $a_0$ ”
$\mu_{K_c}$	Valor esperado da variável randômica “ $K_c$ ”
$\mu_m$	Valor esperado da variável randômica “ $m$ ”
$\mu_{\Delta K_{th}}$	Valor esperado da variável randômica “ $\Delta K_{th}$ ”
$\delta_c$	Valor esperado da variável randômica “ $C$ ”
$\delta_{a_0}$	Valor esperado da variável randômica “ $a_0$ ”
$\delta_{K_c}$	Valor esperado da variável randômica “ $K_c$ ”
$\delta_m$	Valor esperado da variável randômica “ $m$ ”
$\delta_{\Delta K_{th}}$	Valor esperado da variável randômica “ $\Delta K_{th}$ ”

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
1.1	OBJETIVO GERAL	17
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	17
1.3	JUSTIFICATIVA	17
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	18
<b>2</b>	<b>MECÂNICA DAS TRINCAS</b>	<b>19</b>
2.1	FADIGA	19
2.2	MECÂNICA DA FRATURA	20
2.3	MODELO DE PARIS-ERDOGAN	23
2.4	MODELO DE COLLIPRIEST	23
2.5	MÉTODOS NUMÉRICOS RUNGE-KUTTA	24
2.6	MÉTODO <i>FAST CRACK BOUNDS</i>	25
2.6.1	Método FCB aplicado ao modelo de Collipriest	26
2.7	MÉTODO SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	30
<b>3</b>	<b>QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO MODELO DE COLLIPRIEST</b>	<b>31</b>
3.1	METODOLOGIA <i>TEXTITFAST CRACK BOUNDS</i> - MONTE CARLO	31
3.1.1	Quantificação da incerteza via FCB	31
3.2	METODOLOGIA MONTE CARLO - RUNGE KUTTA 4	33
3.2.1	MODELAGEM DA INCERTEZA DO MODELO DE COLLIPRIEST	34
3.3	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	35
<b>4</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>37</b>
4.1	MEDIDAS DE DESEMPENHO	37
4.2	PLACA DE LARGURA INFINITA E COM TRINCA CENTRAL	39
4.3	PLACA DE LARGURA FINITA E COM TRINCA CENTRAL	55
4.4	PLACA DE LARGURA FINITA E COM TRINCA NA BORDA	69
4.5	SÍNTESE DOS RESULTADOS NUMÉRICOS	83
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>86</b>
5.1	TRABALHOS FUTUROS	87
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>88</b>



## 1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho visa apresentar uma pesquisa em nível de mestrado, no programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais (PPGEM), na linha de pesquisa em Mecânica dos Sólidos Computacional, com orientação do Prof. Dr. Cláudio Ávila. Nesta pesquisa, pretende-se compreender e quantificar a propagação de trincas, a luz da Lei de Collipriest, considerando a incerteza em seus parâmetros através da metodologia Monte Carlo – *FAST CRACK BOUNDS*.

A nucleação de trincas ocorre devido ao deslizamento de planos, propagando-se ao longo da rede cristalina do material, conforme Padilha (1997). A propagação de uma trinca é, fortemente, influenciada pelo estado de tensões na vizinhança da frente de trinca, atribuindo um caráter localizado ao processo de propagação. O dano em fadiga é acumulativo e permanente, se manifestando através de uma trinca. Há muitas aplicações que admitem a coexistência de trincas durante a vida de operação dos componentes, tais como as indústrias automobilística e aeroespacial. A existência de trincas, dentro de certos limites, não significa, necessariamente, que o componente está em falha, ou que deva ser, imediatamente, substituído. No entanto, a partir do momento em que se detecta uma trinca, é importante reavaliar a resistência mecânica e a confiabilidade estrutural do componente. Se a decisão for manter o componente em serviço, então é necessário o monitoramento da propagação da trinca. Desta maneira, a previsão da evolução de trincas é relevante na determinação de períodos de inspeção e manutenção de componentes mecânicos.

A mecânica da fratura fornece informações importantes sobre a ocorrência de falhas nos materiais, portanto é possível quantificar os parâmetros de propriedades mecânicas dos materiais, parâmetros de cargas e demais mecanismos geradores da propagação das trincas. A Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) apresenta vários modelos de evolução de trinca capazes de realizar esse monitoramento, os mais conhecidos são modelos de Paris e Erdogan (1963), Forman (1972), Collipriest (1972), Priddle (1976) e outros. Os modelos de propagação de trinca caracterizam-se em duas classes: carregamento com amplitude de tensão constante (CATC) e carregamento com amplitude de tensão variável (CATV).

Ávila, Santos e Beck (2016) propuseram um método denominado *Fast Crack Bounds* (FCB) que se utiliza destes modelos para avaliar e prever o crescimento de trinca. Este método parte de hipóteses matemáticas e de alguma lei de propagação de trinca qualquer e obtém cotas superior e inferior para uma determinada função tamanho de trinca, portanto demonstrando que é possível quantificar a incerteza de leis de propagação de trincas existentes. Conseqüentemente, um estudo da evolução de trinca com diferentes métodos matemáticos e com possibilidade de se quantificar a incerteza por meio dos modelos citados, será possível dar confiabilidade aos resultados gerados.

## 1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é a quantificação da incerteza da função “tamanho de trinca” do modelo de Collipriest, a partir da metodologia Monte Carlo – *Fast Crack Bounds* (MC-FCB). Esta metodologia consiste em utilizar conjuntamente os métodos FCB e simulação de Monte Carlo para quantificação da incerteza. A partir disso obtém-se cotas para os estimadores dos momentos estatísticos do processo estocástico tamanho de trinca do modelo randomizado de Collipriest, aplicados a problemas de engenharia. As estimativas dos momentos estatísticos obtidas serão comparadas às soluções aproximadas obtidas através da metodologia Monte Carlo e Runge Kutta (MC-RK4). O desempenho da metodologia MC-FCB, na quantificação de incerteza do modelo de Collipriest é avaliado através das medidas do desempenho. Estas medidas são definidas a partir dos tempos de computação, cotas inferior e superior das aproximações numéricas do processo estatístico tamanho de trinca e da função obtida pela metodologia MC-RK4.

## 1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Formulação matemática do modelo randômico de Collipriest;
- Aplicação da metodologia Monte Carlo - *Fast Crack Bounds* (MC-FCB) proposta para o modelo de Collipriest para determinação dos estimadores dos momentos estatísticos das funções cotas superior e inferior do tamanho trinca;
- Elaboração de algoritmos para os métodos: FCB, Runge-Kutta e simulação de Monte Carlo;
- Implementação computacional;
- Simulação numérica de problemas clássicos da mecânica da fratura;
- Análise da performance das metodologias MC-FCB e MC-RK4;
- Elaboração de artigos científicos a serem submetidos em congressos com base nos resultados obtidos.

## 1.3 JUSTIFICATIVA

As leis de evolução de trinca, para modelos de carregamento com amplitude de tensão constante, são definidas como um problema de valor inicial (PVI). Porém, para a maior parte dos modelos, não é possível obter uma solução exata para esse problema. Dessa forma, é necessário o uso de métodos numéricos para obter soluções aproximadas. Um dos primeiros modelos propostos para previsão da evolução de trincas é o de Paris e Erdongan (1963). Este modelo

relaciona o fator intensidade de tensão (FIT) com o crescimento subcrítico da trinca, sob um regime de fadiga. Portanto é o modelo mais simples e popular de crescimento de trinca em fadiga usado nas ciências dos materiais e na mecânica da fratura e possui limitações, como por exemplo, não prevê efeito da tensão média e não prevê falha estática. Neste trabalho será utilizado o modelo de Collipriest para representação da evolução do tamanho de trinca, pois é considerado o modelo promissor porque leva em consideração a tensão média e prevê as três regiões da curva sigmoidal. Por causa dessas considerações foi escolhido o modelo de Collipriest para avaliação estatística do comportamento do crescimento de trinca.

Para muitas aplicações de engenharia, até um certo momento na evolução de uma trinca, não se faz necessário uma grande acurácia nas previsões sobre o comportamento das estatísticas, acerca da evolução de uma trinca, mas uma previsão confiável, dentro de certos limites, desse comportamento. Em geral, os modelos de propagação de trincas são obtidos de forma empírica. Dentre os modelos, destacam-se as leis de evolução de Griffith (1920), Inwin (1957), Paris e Erdogan (1963), Forman (1972), Collipriest (1972) e Priddle (1976). Normalmente os parâmetros, que definem a lei de propagação de cada modelo, apresentam grande dispersão e isto caracteriza uma incerteza destes modelos. Portanto justifica-se uma modelagem probabilística da lei de propagação de trinca. A contribuição deste trabalho abrange a abordagem estatística e computacional, ao obter cotas e aproximações numéricas para os estimadores dos momentos estatísticos para o modelo de Collipriest com o objetivo de quantificação da incerteza do modelo. Para avaliar o desempenho da metodologia MC-FCB, aplicada a problemas da mecânica da fratura, utiliza-se a metodologia MC-RK4.

#### 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta dissertação está organizada em seis capítulos. Inicialmente, faz-se a introdução, apresentam-se os objetivos e a devida justificativa de pesquisa. No capítulo dois é realizada a revisão bibliográfica referente aos conceitos: mecânica da trinca, mecânica da fratura, modelo de propagação de trinca de Paris-Erdogan, modelo de propagação de trinca de Collipriest, método Fast Crack Bounds (FCB), método Runge Kutta de quarta ordem e método de simulação de Monte-Carlo (SMC). O terceiro capítulo apresenta a metodologia MC-FCB, a metodologia MC-RK4 e o desenvolvimento da quantificação da incerteza do modelo randômico de Collipriest e a implementação computacional. O quarto capítulo apresenta os resultados numéricos e computacionais previstos para a análise de desempenho da metodologia MC-FCB. No quinto capítulo apresentam-se as conclusões desta proposta de pesquisa. Por fim no sexto capítulo tem-se uma proposta de trabalhos futuros.

## 2 MECÂNICA DAS TRINCAS

### 2.1 FADIGA

É importante conhecer os efeitos da fadiga sobre uma estrutura mecânica, justamente para prever a iniciação e/ou a propagação de uma trinca. Estima-se que cerca de 90 % das falhas de componentes de automóveis, aviões, pontes, turbinas, bombas, máquinas e equipamentos em geral, sujeitos aos carregamentos repetidos e/ou vibrações, deve-se ao fenômeno da fadiga, segundo Rosa (2002). A fadiga é o tipo de falha mecânica causada basicamente pela aplicação repetida de carregamentos variáveis ao longo do tempo, conforme Callister (2011), e isto causa a geração e a progressão de uma trinca até a fratura da peça. A fadiga domina a vida útil das estruturas quando os componentes das cargas de serviço não são desprezíveis perante as cargas estáticas. A fadiga gera falhas que são localizadas, progressivas e cumulativas, logo é um problema de dimensionamento local, muito dependente da geometria, do tipo de material, do ponto crítico da peça e da carga atuante. Em termos de análise, os micro mecanismos de trinca devem ser analisados com base na ciência dos materiais, mas para projeto estrutural tem que ser observado sobre uma macro análise. O fenômeno de trincamento geralmente é gradual e lento, isto não provoca mudança repentina na estrutura do componente mecânico. Conseqüentemente a detecção é trabalhosa e as vezes a fratura da peça pode ser súbita. A geração da fadiga depende de alguns fatores como, por exemplo, os concentradores de tensão, propriedades mecânicas do material, gradiente de tensões, tensões residuais. Os concentradores de tensão estão relacionados com a geometria do componente e fornecendo uma função do fator teórico do concentrado de tensão, conforme Peterson (1953). Um projeto tolerante a defeito é baseado na hipótese de que uma estrutura só pode ser considerada segura quando for possível garantir que resistirá às cargas de serviços durante toda a vida operacional, de forma previsível e repetitivo, mesmo na presença de trinca. Isto é uma prática, atualmente, indispensável na engenharia, segundo Castro e Meggiolaro (2009).

Um marco histórico decisivo, devido à falha estrutural por fadiga, conforme Guston (1987), foi o acidente com o caça F-111 em 1969, que perdeu as asa após 100 horas de viagem, mesmo sendo projetado, na época, com uma das melhores metodologias de projeto. O F-111 tinha sido planejado como a primeira aeronave de ataque sofisticada capaz de efetuar penetrações profundas de interdição em regiões fortemente defendidas e bombardear com grande precisão, sem qualquer assistência externa. A partir deste acidente desenvolveu-se uma metodologia para garantir a integridade de aeronaves, conseqüentemente com a edição da norma MIL-ST-83444, baseada na filosofia DTA *Damage Tolerance Analysis* - Análise de Tolerância ao Dano. Após a análise verificou-se que a queda foi causado por um defeito de dimensão 23,6 x 5,7 mm e que havia crescido apenas 0,44 mm causando a fratura e a queda do avião, segundo Buntin (1791). Esta falha não foi visualizada na inspeção visual de rotina de manutenção.

Existem alguns métodos de inspeção para detecção ou avaliação de trinca, como:

- (i) Inspeção visual;
- (ii) Líquido penetrante;
- (iii) Partículas magnéticas;
- (iv) Correntes parasitas;
- (v) Ultra-som;
- (vi) Radiografia.

O método de detecção visual é eficiente para trincas da ordem de 10 mm, porém não são confiáveis para comprimento de trinca inferior a 0,10 mm, conforme Castro e Meggiolaro (2009). Por causa destas falhas, ao longo do tempo, foram criados métodos de projeto a fadiga com objetivo de prever a vida residual de peças trincadas, conforme destacado ao longo deste trabalho. A quantificação da incerteza do modelo de Collipriest via metodologia MC-FCB é considerado um método na avaliação de trincas.

Figura 1 – F111



Fonte – Adaptado de Buntin (1791).

## 2.2 MECÂNICA DA FRATURA

A mecânica da fratura divide-se em duas classes: Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) e Mecânica da Fratura Elasto-Plástica. Uma consequência fundamental da MFLE é que o campo de tensões à frente de uma trinca pode ser caracterizado em termos do parâmetro “ $K$ ”, o fator de intensidade de tensão (FIT). Vários modelos matemáticos foram desenvolvidos para descrever o comportamento do crescimento da trinca sob a condição de amplitude de tensão constante (CAC), por exemplo, Paris e Erdongan (1963), Forman (1972), Collipriest (1972), Priddle (1976) e outros. O mais simples e difundido na comunidade científica é o modelo de (PARIS; ERDONGAN, 1963).

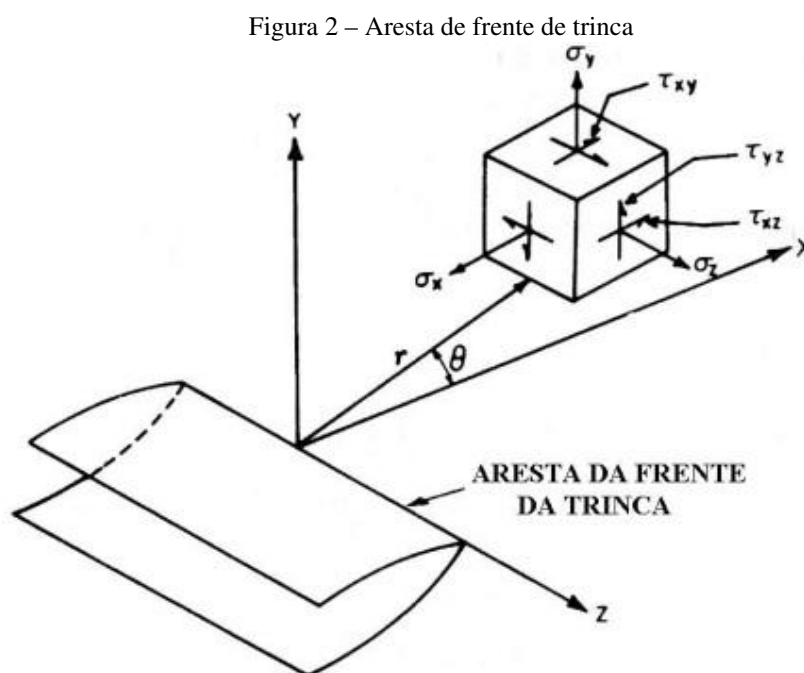
A mecânica da fratura parte de uma consideração básica que os materiais de um componente mecânico apresenta trinca. A propagação de uma trinca de um componente mecânico está relacionado com o estado de tensões na frente de trinca. Nesta região são observados

efeitos não lineares, tais como, plasticidade em razão da não linearidade do material e grandes deslocamentos em razão da não linearidade geométrica do componente, e o estado tridimensional em geral de tensões. Apesar disso, em muitas aplicações, estas regiões são relativamente pequenas quando comparadas com as dimensões do componente ou até mesmo da trinca.

A distribuição de  $\sigma_y$ , para o comportamento elástico, está mostrado na figura (2). Porém é possível, neste caso, ter ou um estado plano de tensões ou um estado plano de deformações, logo o raio de plastificação para cada uma destas condições tem valores diferentes. Em vista disto, os efeitos dessa região, em um primeiro momento, podem ser desprezados, ou não serem relevantes. Este é o âmbito em que se desenvolve a mecânica da fratura linear elástica (MFLE).

A MFLE se desenvolve com base nas seguintes hipóteses:

- (i) Material isotrópico linear e elástico (lei de Hooke);
- (ii) Pequenos gradientes de deslocamentos;
- (iii) Estado plano;
- (iv) Modo de abertura de trinca.



Fonte – Adaptado de Schijve (2009).

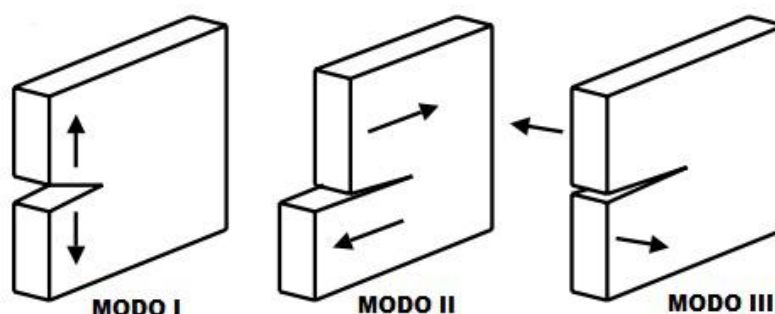
Na hipótese (*iii*) temos o sistema para tensões e deformações, conforme equações 2.1 e 2.2, respectivamente.

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y); \\ \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y); \\ \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y). \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} u = u(x, y); \\ v = v(x, y); \\ w = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Na hipótese (iv) tem-se os modos de abertura, conforme mostrado na figura 3. É necessário entender os três tipos de movimentos relativos das superfícies das trincas. O modo de abertura I é caracterizado pelo deslocamento local e simétrico dos planos x-y e x-z. O modo de cisalhamento no modo II são simétricos no plano x-y e antissimétrico no plano x-z. No modo III os deslocamentos são antissimétricos nos planos x-y e x-z, conforme figura 2. Os modos de deslocamentos estão associados ao campo de tensões na vizinhança de ponta de trinca e qualquer deformação de ponta de trinca pode ser visto como uma combinação dos modos de deslocamentos. O modo I corresponde a maioria das peças trincadas (PASTOUKHOV; VOORWALD, 1995).

Figura 3 – Modo de abertura



Fonte – Adaptado de Schijve (2009).

Na MFLE a trinca pode ser medida pelo parâmetro “ $K$ ”, denominado fator intensidade de tensões, estudado por Inwin (1957) e Willian (1957) para quantificar o campo de tensões em torno de uma trinca elástica. Cada modo é relacionado a um fator de intensidade de tensões. O valor crítico de “ $K_{IC}$ ” é uma propriedade do material e pode ser chamado de tenacidade à fratura. Há na literatura diversas expressões de “ $K$ ” (ROOKE, 1976) e (MURAKAMI, 1987).

Ao imaginarmos um eixo de coordenadas polares com origem na frente de trinca, o campo de tensões pode ser dado pela equação 2.3, conforme (INWIN, 1957).

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\Theta), (ij = 1, 2) \quad (2.3)$$

Na equação (2.3),  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões a uma distância  $r$  da ponta de trinca e sob um ângulo  $\theta$  do plano de trinca, e  $f_{ij}(\Theta)$  uma função conhecida. Verifica-se que o efeito intensidade de tensão depende de  $r$  e  $\theta$ , assim o fator intensidade de tensão serve para definir a magnitude das tensões na ponta da trinca. Este fator é função do tamanho de trinca, do tipo de carregamento e geometria do componente mecânico da trinca.

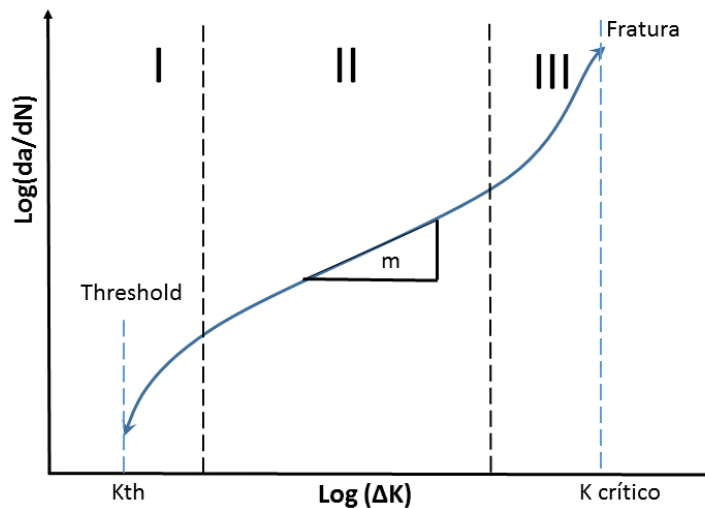
### 2.3 MODELO DE PARIS-ERDOGAN

O modelo de Paris-Erdogan, (PARIS; ERDONGAN, 1963) é o modelo mais popular de crescimento de trinca em fadiga usado na ciência dos materiais e mecânica da fratura. É expresso pelo seguinte PVI, equação (2.4).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a \in C^1(N_0, N_1; \mathbb{R}^+) \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN} = C \Delta K^m, \forall N \in (N_0, N_1); \\ \text{sujeito a} \\ a(N_0) = a_0; \end{array} \right. \quad (2.4)$$

sendo “ $C$ ”, “ $m$ ” o coeficiente e o expoente da Lei de Paris, “ $N$ ” o número de ciclos, “ $a_0$ ” o tamanho inicial da trinca e  $\Delta\sigma$  a variação da intensidade de tensão. A equação (2.4) representa o comportamento linear do gráfico  $\log \frac{da}{dN}$  x  $\log(\Delta K)$  ou seja, a região II do gráfico, conforme figura 4. A limitação da Lei de Paris está no fato de que ela só descreve o comportamento para a região II e não considera o efeito da tensão média. Nas regiões I e III, o modelo de Paris não é capaz de se ajustar aos dados experimentais obtidos nessas regiões.

Figura 4 – Curva sigmoidal  $\log \left( \frac{da}{dN} \right)$  x  $\log(\Delta K)$



Fonte – Adaptado de Machado (2015).

### 2.4 MODELO DE COLLIPRIEST

Collipriest (1972) propôs uma lei de propagação de trinca capaz de descrever todas as regiões do diagrama  $\log \frac{da}{dN}$  x  $\log(\Delta K)$  da figura 4. Além disso inclui o efeito da razão de



tensão. Fundamentada nessa lei, a propagação de uma trinca a luz do modelo de Collipriest é formulada com a solução do seguinte PVI.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a \in C^1(N_0, N_1; \mathbb{R}^+) \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN} = C (K_{IC} \Delta K_{Ith})^{\frac{m}{2}} \exp \left\{ \ln \left( \frac{K_{IC}}{\Delta K_{Ith}} \right)^{\frac{m}{2}} \tanh^{-1} \left[ \frac{\ln \frac{\Delta K^2}{(1-R)K_{IC} \Delta K_{Ith}}}{\ln \frac{(1-R)k_{IC}}{\Delta K_{Ith}}} \right] \right\}, \\ \forall \eta \in [N_0, N_1] \text{ sujeito a} \\ a(N_0) = a_0; \end{array} \right. \quad (2.5)$$

sendo “ $C$ ”, “ $m$ ” parâmetros do material para o modelo de Collipriest. Este modelo representa os efeitos da razão tensão “ $R$ ” nas regiões de propagação de trincas. As características do modelo de Collipriest são as seguintes:

- (i) Representa as regiões de propagação de trincas I, II e III;
- (ii) Considera a tensão média, via razão de tensões.

## 2.5 MÉTODOS NUMÉRICOS RUNGE-KUTTA

Há vários problemas na engenharia que são formulados por Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Em geral são poucas aplicações práticas em que é possível se obter uma solução exata. Por exemplo, para poucos casos, (FIT), consegue-se ter uma solução exata para o PVI, equação (2.4), definido pela Lei de Paris Erdogan. Portanto, utilizam-se métodos numéricos para a obtenção de soluções numéricas aproximadas. Entre uma vasta quantidade de métodos numéricos, o método de Runge-Kutta explícito de quarta ordem destaca-se pela simplicidade e precisão. A partir disto considera-se o seguinte PVI.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } y \in [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{ tal que:} \\ y(t) = f(t, y(t)), \forall t \in [t_0, T]; \\ \text{sujeito a} \\ y(t_0) = y_0; \end{array} \right. \quad (2.6)$$

sendo  $f : [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $y_0$  a condição inicial.

Um método de solução pode ser de passo simples na condição para EDO  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , obedecendo a forma geral  $y_{i+1} = y_i + \varnothing_i h$ , onde:

- (i)  $y_{i+1}$  é o novo valor;
- (ii)  $y_i$  é o antigo valor;
- (iii)  $\varnothing_i$  é a inclinação;

(iv)  $h$  é o tamanho do passo.

O método de Runge-Kutta de quarta ordem explícito pode ser escrito como na equação (2.7).

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \left(\frac{h}{6}\right) (f(k_1) + 2f(k_2) + 2f(k_3) + f(k_4)); \\ k_1 = y_n; \\ k_2 = y_n + \left(\frac{h}{2}\right) f(k_1); \\ k_3 = y_n + \left(\frac{h}{2}\right) f(k_2); \\ k_4 = y_n + (h) f(k_3). \end{cases} \quad (2.7)$$

## 2.6 MÉTODO *FAST CRACK BOUNDS*

O método *Fast Crack Bounds* (FCB), consiste em determinar, eficientemente, duas funções que definem cotas superior e inferior para a função tamanho de trinca de alguma lei de propagação de trinca. O custo computacional do método FCB é muitas vezes menor que o exigido pela integração numérica via método Runge-Kutta de quarta ordem (MACHADO, 2015), (ÁVILA; SANTOS; BECK, 2016). Neste trabalho os resultados numéricos obtidos mostram que as cotas representam, satisfatoriamente, a evolução da trinca. As cotas inferior e superior da função “tamanho de trinca” devem satisfazer a seguinte desigualdade:

$$\bar{a}(N) \leq a(N) \leq \underline{a}(N), \forall N \in [N_o, N_1]. \quad (2.8)$$

O método FCB, a começar de hipóteses e análises adequadas da representação via série de Taylor e retendo o termo de segunda ordem com resto de Lagrange, obtém funções que servem como cotas inferior e superior para a função tamanho de trinca para alguma Lei de propagação de trinca.

$$\begin{cases} \underline{a}(N) = a_0 + \frac{da}{dN} (N_o) (N - N_o) + \frac{1d^2a}{2dN^2} (a_o) (N - N_o)^2; \eta \in [N_o, N_1]; \\ \bar{a}(N) = a_0 + \frac{da}{dN} (N_o) (N - N_o) + \frac{1d^2a}{2dN^2} (a^*) (N - N_o)^2; \end{cases} \quad (2.9)$$

sendo “ $a^* = \beta a_o$ ”, com  $\beta > 1$  sendo  $\beta$  um coeficiente e “ $N$ ” o número de ciclos.

### 2.6.1 Método FCB aplicado ao modelo de Collipriest

A formulação matemática consiste em determinar cotas superior e inferior do modelo de propagação de trincas de Collipriest através da metodologia FCB conforme detalhado na sequência abaixo.

Partindo do seguinte PVI do modelo de Collipriest:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a \in C^1(N_0, N_1; \mathbb{R}^+) \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN} = C(K_{IC}\Delta K_{Ith})^{\frac{m}{2}} \exp \left\{ \ln \left( \frac{K_{IC}}{\Delta K_{Ith}} \right)^{\frac{m}{2}} \tanh^{-1} \left[ \frac{\ln \frac{\Delta K^2}{(1-R)K_{IC}\Delta K_{Ith}}}{\ln \frac{(1-R)k_{IC}}{\Delta K_{Ith}}} \right] \right\}, \\ \forall \eta \in [N_0, N_1]; \\ \text{sujeito a} \\ a(N_0) = a_0; \end{array} \right. \quad (2.10)$$

E notando que a variação do fator de intensidade de tensão que é dado por:

$$\Delta K = \Delta \sigma \sqrt{\pi a} \cdot f(a). \quad (2.11)$$

Com  $\Delta \sigma, a, f(a) \geq 0$ , vale a seguinte identidade:

$$2 \ln \Delta K = \ln \Delta \sigma^2 \pi + \ln a + 2 \ln f(a) \quad (2.12)$$

Considerando as hipóteses de dedução:

- (i)  $\frac{m}{2} \geq 0$ ;
- (ii)  $0 < f(a) \leq f(x) \leq f(y)$ ;
- (iii)  $f'(a_0) \leq f'(x) \leq f'(y)$ ;
- (iv)  $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$ .

Da fórmula de Taylor com resto de Lagrange temos:

$$f(c, d) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^n x_0}{n!} (x - x_0)^n + \dots + \frac{f^{n+1}}{(n+1)!}(\xi) (x - x_0)^{n+1} \quad (2.13)$$

Ou seja:

$$a(N) = a_0(N_0) + \left( \frac{da}{dN}(N_0) \right) (N - N_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2a}{dN^2}(\eta) \right) (N - N_0)^2 \quad (2.14)$$

Com  $\eta \in [a_0, a_1]$ , e  $a_1 = a(N_1)$  e sabendo que:

$$\frac{d^2a}{dN^2} = \frac{d}{dN} \left( \frac{da}{dN} \right) \quad (2.15)$$

$$\frac{da}{dN} = h(a) \quad (2.16)$$

Pela regra da cadeia:

$$\frac{d}{dN} (g(a)) = \frac{dg(a)}{da} \frac{da}{dN} = \left( g \frac{da}{dN} \right) (a) \quad (2.17)$$

Das equações 2.15, 2.16 e 2.17 é escrita como:

$$\frac{d^2a}{dN^2} = \frac{dg(a)}{da} \left( \frac{da}{dN} \right)^2 \quad (2.18)$$

Rearranjando os termos:

$$C_1 = C (K_C \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \quad (2.19)$$

$$\alpha = \ln \left( \frac{K_C}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \quad (2.20)$$

$$v = (1 - R) K_C \Delta K_{th} \quad (2.21)$$

$$\gamma = \ln \left( \frac{(1 - R) K_C}{\Delta K_{th}} \right) \quad (2.22)$$

Substituindo as equações 2.19, 2.20, 2.21 e 2.22 em Collipriest 2.10:

$$\frac{da}{dN} = C_1 \exp \left[ \alpha \tanh^{-1} \left\{ \frac{\ln \left( \frac{\Delta K^2}{v} \right)}{\gamma} \right\} \right] \quad (2.23)$$

Aplicando as propriedades logarítmicas:

$$\frac{da}{dN} = C_1 \exp \left[ \alpha \tanh^{-1} \left( \frac{2 \ln \Delta K - \ln v}{\gamma} \right) \right] \quad (2.24)$$

Aplicando 2.12 em 2.24:

$$\frac{da}{dN} = C_1 \exp \left[ \alpha \tanh^{-1} \left\{ \frac{\ln \Delta \sigma^2 \pi + 2 \ln f(a) + \ln(a) - \ln v}{\gamma} \right\} \right] \quad (2.25)$$

E adotando:

$$\delta = \ln \frac{(\Delta \sigma^2 \pi)}{\ln v} \quad (2.26)$$

Desta forma tem-se:

$$\frac{da}{dN} = C_1 \exp \left[ \alpha \tanh^{-1} \left\{ \frac{\ln a}{\gamma} + \frac{2 \ln f(a)}{\gamma} + \delta \right\} \right] \quad (2.27)$$

Aplicando 2.17 em 2.27:

$$g(a) = C_1 \exp \left[ \alpha \tanh^{-1} \left\{ \frac{\ln a}{\gamma} + \frac{2 \ln f(a)}{\gamma} + \delta \right\} \right] \quad (2.28)$$

$$\frac{dg}{da} = \frac{d}{da} \left\{ C_1 \exp \left[ \alpha \tanh^{-1} \left( \frac{\ln a}{\gamma} + \frac{2 \ln f(a)}{\gamma} + \delta \right) \right] \right\} \quad (2.29)$$

$$\left\{ \frac{dg}{da} = \alpha C_1 \exp(\alpha) \left[ \tanh^{-1} \left( \frac{\ln a}{\gamma} + \frac{2 \ln a f(a)}{\gamma} + \delta \right) \right] \right. \\ \left. \left\{ \frac{d}{da} \left[ \tanh^{-1} \left( \frac{\ln a}{\gamma} + \frac{2 \ln a f(a)}{\gamma} + \delta \right) \right] \right\} \right\} \quad (2.30)$$

Pela regra da diferenciação da segunda parte da equação 2.30 acima:

$$= \left\{ \frac{d}{da} \left[ \tanh^{-1} \left( \frac{\ln a}{\gamma} + \frac{2 \ln a f(a)}{\gamma} + \delta \right) \right] \right\}$$

Pela regra da diferenciação:

$$= \left( \frac{1}{1 - \left( \frac{\ln a + 2 \ln f(a)}{\gamma} + \delta \right)^2} \right) \frac{da}{dN} \left( \frac{\ln a + 2 \ln f(a)}{\gamma} + \delta \right) \quad (2.31)$$

Derivando a segunda parte da equação 2.31:

$$\frac{d}{da} = \left[ \frac{\ln a + 2 \ln f(a)}{\gamma} + \delta \right] = \frac{d}{da} \left[ \frac{\ln a}{\gamma} + \frac{2 \ln f(a)}{\gamma} + \delta \right] \quad (2.32)$$

$$= \frac{1}{\gamma} \frac{d}{da} (\ln a + 2 \ln f(a)) \quad (2.33)$$

$$= \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{d}{da} \ln a + \frac{d}{da} 2 \ln f(a) \right] \quad (2.34)$$

$$= \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{1}{a} + \frac{2d}{df} \ln f(a) \frac{df(a)}{da} \right] \quad (2.35)$$

$$= \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{1}{a} + 2 \frac{1}{f} f'(a) \right] \quad (2.36)$$

$$= \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{1}{a} + 2 \frac{f'}{f} (a) \right] \quad (2.37)$$

Reagrupando as equações:

$$= \left( \frac{1}{1 - \left( \frac{\ln a + 2 \ln f(a)}{\gamma} + \delta \right)^2} \right) \left[ \frac{1}{a} + 2 \frac{f'}{f} (a) \right] \quad (2.38)$$

A partir da equação (2.18) na segunda derivada teremos:

$$\left\{ \frac{d^2 a}{dN^2} = \alpha \frac{C_1}{\gamma} \left[ \frac{1}{1 - \left( \frac{\ln a + 2 \ln f(a)}{\gamma} + \delta \right)^2} \right] \left[ \frac{1}{a} + 2 \frac{f'}{f} (a) \right] \times \right. \\ \left. \left\{ C_1 \exp \left[ \alpha \tanh^{-1} \left( \frac{\ln a + 2 \ln f(a)}{\gamma} + \delta \right) \right] \right\}^2 \right\} \quad (2.39)$$

Reagrupando as equações em 2.14 sendo possível obter as cotas superior e inferior através desta desigualdade:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = a_0 + C (K_C \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_C}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \tanh^{-1} \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K^2}{(1-R)K_C \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_C}{\Delta K_{th}} \right)} \right) \right] (N - N_0) + \\ \frac{1}{2} \left\{ C (K_C \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_C}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \tanh^{-1} \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K^2}{(1-R)K_C \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_C}{\Delta K_{th}} \right)} \right) \right] \right\}^2 \times \\ C (K_C \Delta K_{th}) \frac{\ln \left( \frac{K_C}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}}}{\ln \left( \frac{(1-R)K_C}{\Delta K_{th}} \right)} \left[ \frac{1}{1 - \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K^2}{(1-R)K_C \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_C}{\Delta K_{th}} \right)} \right)^2} \right] \times \\ \left[ \frac{1}{a} + 2 \frac{f'}{f} (a) \right] (N - N_0)^2. \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Da equação 2.40 tem-se a cota inferior:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \geq a_0 + C (K_C \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_C}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \tanh^{-1} \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K(a_0)^2}{(1-R)K_C \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_C}{\Delta K_{th}} \right)} \right) \right] (N - N_0) + \\ \frac{1}{2} \left\{ C (K_C \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_C}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \tanh^{-1} \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K(a_0)^2}{(1-R)K_C \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_C}{\Delta K_{th}} \right)} \right) \right] \right\}^2 \times \\ C (K_C \Delta K_{th}) \frac{\ln \left( \frac{K_C}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}}}{\ln \left( \frac{(1-R)K_C}{\Delta K_{th}} \right)} \left[ \frac{1}{1 - \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K(a_0)^2}{(1-R)K_C \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_C}{\Delta K_{th}} \right)} \right)^2} \right] \times \\ \left[ \frac{1}{a} + 2 \frac{f'}{f} (a) \right] (N - N_0)^2. \end{array} \right. \quad (2.41)$$

Da equação 2.40 tem-se a cota superior:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leq a_0 + C (K_C \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_C}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \tanh^{-1} \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K(a^*)^2}{(1-R)K_C \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_C}{\Delta K_{th}} \right)} \right) \right] (N - N_0) + \\ \frac{1}{2} \left\{ C (K_C \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_C}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \tanh^{-1} \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K(a^*)^2}{(1-R)K_C \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_C}{\Delta K_{th}} \right)} \right) \right] \right\}^2 \times \\ C (K_C \Delta K_{th}) \frac{\ln \left( \frac{K_C}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}}}{\ln \left( \frac{(1-R)K_C}{\Delta K_{th}} \right)} \left[ \frac{1}{1 - \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K(a^*)^2}{(1-R)K_C \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_C}{\Delta K_{th}} \right)} \right)^2} \right] \times \\ \left[ \frac{1}{a} + 2 \frac{f'}{f} (a) \right] (N - N_0)^2. \end{array} \right. \quad (2.42)$$

## 2.7 MÉTODO SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

O método de Simulação de Monte Carlo (SMC) é baseado na geração e simulação de amostras. Na prática, diante de um problema envolvendo incertezas, o método de Simulação de Monte Carlo desenvolve-se nas seguintes etapas:

- (i) Modelar o problema definindo-se uma função densidade de distribuição de probabilidade (FDP) da variável randômica que representa cada uma das incertezas;
- (ii) Gerar valores randômicos segundo a FDP de cada incerteza do problema, que constituirão o conjunto de amostras;
- (iii) A partir do conjunto de amostras obter, para cada amostra, a solução do problema determinístico que denotará a realização do sistema. O conjunto das soluções dos problemas determinísticos constituirá o conjunto das realizações. Repetir passos (ii) e (iii) até a obtenção de uma amostra com tamanho desejado de realizações;
- (iv) A partir do conjunto de realizações estimar as estatísticas da resposta através de momentos estatísticos, histogramas e etc.

Este método apenas proporciona uma aproximação da solução, portanto é necessário analisar o erro de aproximação que é  $\frac{3\sigma}{N^{\frac{1}{2}}}$ , onde “ $\sigma$ ” é o desvio padrão da amostra e “ $N$ ” o tamanho da amostra, conforme Sobol (1994).

### 3 QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO MODELO DE COLLIPRIEST

O modelo randômico de Collipriest, estudado neste trabalho, é obtido a partir da randomização dos seus parâmetros de definição, a partir da equação (2.5). Para tanto considera-se  $X_{i=1} [a_i, b_i]$ ,  $\mathfrak{S} = B(\Omega)$  e  $\sigma$ -álgebra de Borel e  $P = \prod_{i=1}^4 F_{X_i}$ . Os parâmetros do modelo de Collipriest que possuem incerteza são organizados na forma de um vetor randômico  $(C, m, kc, K_{th}, a_0) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  com entradas estatisticamente independentes. A partir disso o modelo randômico de Collipriest é definido pelo seguinte PVI.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a \in C'(N_0, N_1, L^2(\Omega, B(\Omega)), P) \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN}(N, \xi) = h(\alpha(\xi), \Delta K), em (N_0, N_1) \times (\Omega, B, P); \\ \text{sujeito a} \\ a(\xi), a_0(\xi), \xi \in B(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.43)$$

A quantificação da incerteza deste modelo consistirá em obter os estimadores dos momentos estatísticos do processo estocástico “tamanho de trinca”. A modelagem matemática da incerteza é feita via variáveis randômicas. A partir disso aplica-se a metodologia Monte Carlo – Fast Crack Bounds ao modelo randômico de Collipriest. Para as formulações matemáticas obtidas desenvolvem-se algoritmos e faz-se a representação do código computacional em Matlab. Um código computacional é utilizado para avaliar a eficiência da metodologia proposta, comparando as funções (cotas) que “envelopam” os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem para a função “tamanho de trinca” com as respectivas soluções aproximadas e com um modelo computacional. A seguir são descritas, sinteticamente, as etapas realizadas.

#### 3.1 METODOLOGIA TEXTITFAST CRACK BOUNDS - MONTE CARLO

O método FCB foi utilizado para obter as cotas, inferiores e superiores, das estimativas dos momentos estatísticos de primeira e de segunda ordem da função “tamanho de trinca”, considerando a quantificação da incerteza nos parâmetros que descrevem o modelo de Collipriest.

##### 3.1.1 Quantificação da incerteza via FCB

A metodologia textitFast Crack Bounds (FCB) foi apresentada nos trabalhos de (ÁVILA; SANTOS; BECK, 2016) o qual estabelece cotas superiores e inferiores de um “tamanho de trinca”. A evolução do “tamanho de trinca” ocorre sobre influência de vários fatores, tais como tipo de material, número de ciclos, tamanho de trinca e de condições de contorno do sistema. A



partir disso se propõe o seguinte Lema:

**Lema:** Sejam  $\{a(N_i, \omega_i)\}_{i=1}^{N_S}$ ,  $\{\underline{a}(N, \omega_i)\}_{i=1}^{N_S}$  e  $\{\bar{a}(N, \omega_i)\}_{i=1}^{N_S}$  os conjuntos de realizações do processo estocástico “tamanho de trinca” de um determinado modelo e suas respectivas cotas, então  $\forall K \in N$  valem as seguintes estimativas:

$$\left\{ \hat{\mu}_{\underline{a}}^{(k)}(N) \leq \hat{\mu}_a(N) \leq \hat{\mu}_{\bar{a}}(N), \forall N \in [N_0, N_1]. \right. \quad (3.44)$$

Para uma relação  $k = 1$  obtém-se as cotas para o estimador do momento estatístico de primeira ordem. Na segunda relação  $k = 2$  obtém-se as cotas para o estimador do momento estatístico de segunda ordem, sendo  $\hat{\mu}_a(N)$  e  $\hat{\mu}_a^{(2)}(N)$  a função “tamanho de trinca” para primeira e segunda ordem, respectivamente.

**Demonstração do Lema:** Considere  $\{a(N, \omega_i)\}_{i=1}^{N_S}$ ,  $\{\underline{a}(N, \omega_i)\}_{i=1}^{N_S}$  e  $\{\bar{a}(N, \omega_i)\}_{i=1}^{N_S}$  com  $N \in [N_0, N_1]$  como realizações do tamanho de trinca, cota inferior e cota superior, respectivamente.

Da definição da cota inferior tem-se:

$$\left\{ \underline{a}(N, \omega_i) \leq a(N, \omega_i), \forall \omega_i \in \Omega \wedge \forall N \in [N_0, N_1]. \right. \quad (3.45)$$

$$\left\{ \underline{a}^{(k)}(N, \omega_i) \leq a^{(k)}(N, \omega_i), \forall \omega_i \in \Omega \wedge \forall N \in [N_0, N_1]. \right. \quad (3.46)$$

A cota inferior para o estimador de um momento estatístico de ordem “ $K$ ” é definida conforme equação (3.47).

$$\left\{ \hat{\mu}_{\underline{a}}^{(k)}(N) = \left( \frac{1}{N} \right) \sum_{i=1}^N \underline{a}^{(k)}(N, \omega_i), \forall N \in [N_0, N_1]. \right. \quad (3.47)$$

A partir da equação (3.45) temos o seguinte:

$$\left\{ \hat{\mu}_{\underline{a}}^{(k)}(N) = \left( \frac{1}{N} \right) \sum_{i=1}^N \underline{a}^{(k)}(N, \omega_i) \leq \left( \frac{1}{N} \right) \sum_{i=1}^N a^{(k)}(N, \omega_i) = \hat{\mu}_a^{(k)}(N). \right. \quad (3.48)$$

Analogamente, tem-se para a cota superior:

$$\left\{ a(N, \omega_i) \leq \bar{a}(N, \omega_i), \forall \omega_i \in \Omega \wedge \forall N \in [N_0, N_1]. \right. \quad (3.49)$$

$$\left\{ \hat{\mu}_a^{(k)}(N) = \left( \frac{1}{N} \right) \sum_{i=1}^N a^{(k)}(N, \omega_i) \leq \left( \frac{1}{N} \right) \sum_{i=1}^N \bar{a}^{(k)}(N, \omega_i) = \hat{\mu}_{\bar{a}}^{(k)}(N). \right. \quad (3.50)$$

Atribui-se valores para o termo “ $k$ ”, desta forma representando a ordem do estimador.

$$\begin{cases} k = 1 \rightarrow \hat{\mu}_{\underline{a}}^{(1)}(N) \leq \hat{\mu}_a^{(1)}(N) \leq \hat{\mu}_{\bar{a}}^{(1)}(N), \forall N \in [N_0, N_1]; \\ k = 2 \rightarrow \hat{\mu}_{\underline{a}}^{(2)}(N) \leq \hat{\mu}_a^{(2)}(N) \leq \hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)}(N), \forall N \in [N_0, N_1]. \end{cases} \quad (3.51)$$

Generalizando para enésima ordem temos:

$$\left\{ K = n \rightarrow \hat{\mu}_{\underline{a}}^{(n)}(N) \leq \hat{\mu}_a^{(n)}(N) \leq \hat{\mu}_{\bar{a}}^{(n)}(N), \forall N \in [N_0, N_1]. \right. \quad (3.52)$$

Desta forma encontra-se a seguinte relação:

$$\left\{ \hat{\mu}_{\underline{a}}^{(n)}(N) \leq \hat{\mu}_a^{(n)}(N) \leq \hat{\mu}_{\bar{a}}^{(n)}(N), \forall n \in \mathbb{N} \wedge \forall N \in [N_0, N_1]. \right. \quad (3.53)$$

### 3.2 METODOLOGIA MONTE CARLO - RUNGE KUTTA 4

A metodologia Monte Carlo -RK4 (MC-RK4) é utilizada para se obter estimativa dos momentos estatísticos do processo estocástico “tamanho de trinca”. Esta consiste em combinar os métodos RK4 e simulação de Monte Carlo. Para avaliar o desempenho da metodologia, funções de desvio relativo serão definidas para o primeiro e segundo momento estatístico das cotas superiores e inferiores, em relação aos momentos estatísticos da solução numérica, obtida através pela metodologia RK4-Monte Carlo. Em (ÁVILA; SANTOS; BECK, 2016) a propagação de trinca é avaliada pelo método estocástico associado ao método de RK4. Assim a solução numérica aproximada, via RK4, é dada para a  $i$ -ésima realização do processo estocástico “tamanho de trinca”.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a_{k+1}(\omega_i) \in \mathbb{R}^+, \text{ para } \forall k \in \{0, 1, \dots, n\} : \\ a_{k+1}(\omega_i) = a_k(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{6}\right) (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)(\omega_i); \\ K_1(\omega_i) = h(\alpha(\omega_i), \Delta K); \\ K_2(\omega_i) = a_K(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{2}\right) K_1(\omega_i); \\ K_3(\omega_i) = a_K(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{2}\right) K_2(\omega_i); \\ K_4(\omega_i) = a_K(\omega_i) + (\Delta N) K_3(\omega_i); \\ a_o(\omega_i) = a(N_o, \omega_i). \end{array} \right. \quad (3.54)$$

sendo  $a_k(\omega_i) = a(N_k, \omega_i)$  e  $\Delta N = N_{k+1} - N_k, \forall K \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

A metodologia aplicada ao modelo de Collipriest pode ser representada na equação (3.55).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a_{k+1}(\omega_i) \in \omega_i = (\omega_i, \omega'_i, \omega''_i, \omega'''_i, \omega''''_i) \in \Omega : \\ a_{k+1}(\omega_i) = a_k(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{6}\right) (K_1(\omega_i) + 2K_2(\omega_i) + 2K_3(\omega_i) + K_4(\omega_i)); \\ \text{para } k = 0, 1, \dots, m-1, \text{ sendo que;} \\ K_1(\omega_i) = C (K_{IC} \Delta I_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left\{ \ln \left( \frac{K_{IC}}{\Delta K_{I_{th}}} \right)^{\frac{m}{2}} \tanh^{-1} \left[ \frac{\ln \left( \frac{\Delta K^2}{(1-R)K_{IC} \Delta K_{I_{th}}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_{IC}}{\Delta K_{I_{th}}} \right)} \right] \right\}; \\ K_2(\omega_i) = a_K(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{2}\right) K_1(\omega_i); \\ K_3(\omega_i) = a_K(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{2}\right) K_2(\omega_i); \\ K_4(\omega_i) = a_K(\omega_i) + (\Delta N) K_3(\omega_i); \\ a_o(\omega_i) = a(N_o, \omega_i), \omega_i \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}. \end{array} \right. \quad (3.55)$$

sendo:  $a_o(\omega_i) = a(N_k, \omega_i)$ ;  $\Delta N = N_{k+1} - N_k, \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ;  $K'_{IC} = K_{IC}(\omega_j)$ ;  $\Delta K' = \Delta K(N_i)$ ; e  $\Delta K'_{I_{th}} = \Delta K_{I_{th}}(\omega_i)$ .

### 3.2.1 MODELAGEM DA INCERTEZA DO MODELO DE COLLIPRIEST

A modelagem da incerteza dos parâmetros da lei de Collipriest é feita por variáveis randômicas com e estatisticamente independentes com a seguinte representação:

$$\left\{ \begin{array}{l} C(\varepsilon_1) = \mu_c + \sqrt{3} \cdot \delta_c \cdot \xi_1(\omega), \forall \omega \in \Omega; \\ m(\varepsilon_2) = \mu_m + \sqrt{3} \cdot \delta_m \cdot \xi_2(\omega'), \forall \omega' \in \Omega; \\ a_0(\varepsilon_3) = \mu_{a_0} + \sqrt{3} \cdot \delta_{a_0} \cdot \xi_3(\omega''), \forall \omega'' \in \Omega; \\ \Delta K_{th}(\varepsilon_4) = \mu_{\Delta K_{th}} + \sqrt{3} \cdot \delta_{\Delta K_{th}} \cdot \xi_4(\omega'''), \forall \omega''' \in \Omega; \\ K_c(\varepsilon_5) = \mu_{K_c} + \sqrt{3} \cdot \delta_{K_c} \cdot \xi_5(\omega''''), \forall \omega'''' \in \Omega; \end{array} \right. \quad (3.56)$$

sendo  $\{\mu_c, \mu_m, \mu_{\Delta K_{th}}, \mu_{a_0}, \mu_{K_c}\}$  e  $\{\delta_c, \delta_m, \delta_{\Delta K_{th}}, \delta_{a_0}, \delta_{K_c}\}$  os são valores esperados e coeficientes de dispersão dos parâmetros, respectivamente. As variáveis aleatórias são estatisticamente independentes e uniforme em  $(U[-1, 1])$  e definidas como mostrado no intervalo  $\{\xi_1(\omega), \xi_2(\omega''), \xi_3(\omega'''), \xi_4(\omega''''), \xi_5(\omega''''')\}$ .

Serão obtidos os estimadores dos momentos estatísticos para dois casos de coeficientes de dispersão:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = \frac{1}{10} \\ \delta = \frac{3}{10} \end{array} \right. \quad (3.57)$$

### 3.3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Nesta etapa é realizada a implementação computacional, via Matlab, dos métodos desenvolvidos. As metodologias MC-RK4 e MC-FCB serão aplicadas ao modelo de Collipriest. A partir das respectivas formulações matemáticas, obtidas das metodologias, foram elaborados algoritmos e implementados no Matlab. Para avaliar os métodos e algoritmos implementados, foram realizados testes com problemas de engenharia, cuja solução é conhecida. Estes problemas estão detalhados ao longo do capítulo de resultados numéricos.

O quadro 1 mostra uma parte do algoritmo implementado neste trabalho. Neste quadro tem-se o algoritmo para obtenção da solução numérica de Runge Kutta de quarta ordem. Em termos técnicos, o algoritmo é uma sequência lógica, finita e definida de instruções que devem ser seguidas para resolver um problema ou executar uma tarefa. Para este exemplo de algoritmo o maior esforço computacional está na resolução da  $f(x, y)$ , conforme Burden e Faires (2008). A programação e a organização sequencial do algoritmo influenciam consideravelmente nos tempos computacionais, isto quer dizer que se deve tentar evitar o uso de *loop* ou funções que demandam tempo de cálculo computacional.

Quadro 1 – Algoritmo do método de RK4

<p><b>Algoritmo</b></p> <p><b>Início</b></p> $h \leftarrow (X_n - X_0) / n$ $Y \leftarrow Y_0$ $X \leftarrow X_0$ <p><b>Para</b> <math>i = 1</math> <b>até</b> <math>n</math> <b>Faça</b></p> <p><b>Início</b></p> $K_1 \leftarrow f(x, y)$ $K_2 \leftarrow f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}K_1\right)$ $K_3 \leftarrow f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}K_2\right)$ $K_4 \leftarrow f(x + h, y + hK_3)$ $y \leftarrow y + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$ $x \leftarrow x + h$ <p><b>Fim - Para</b></p> <p><b>Fim</b></p> <p><i>Variáveis reais : <math>h, y, x, y_0, x_0, K_1, K_2, K_3</math> e <math>K_4</math></i></p> <p><i>Variáveis inteiras : <math>i</math> e <math>n</math></i></p>
---

Fonte – Adaptado de Burden e Faires (2008).

Os parâmetros de entrada usados na implementação computacional estão dispostos na tabela 1. E os resultados numéricos são as saídas, cujos valores estão melhores descritos no capítulo de resultados numéricos abaixo.

A implementação computacional foi realizada conforme *software e hardware* listados abaixo.

- (i) computador intel core i5;
- (ii) memória ram 8 Gb;
- (iii) *software* Matlab;

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Este capítulo de resultados mostra os valores numéricos alcançados para as metodologias MC-RK4 e MC-FCB, e conseqüente o desempenho entre as metodologias, quando aplicadas a três modelos clássicos de placas metálicas na engenharia mecânica. Os resultados numéricos obtidos em cada exemplo de modelo de placa estão divididos em três subseções ao longo deste capítulo. Os resultados numéricos são mostrados através dos gráficos de desvio relativo e tabelas das cotas encontradas. A quantificação das incertezas, através de cotas, são avaliadas a partir das estimativas dos momentos estatísticos da função tamanho de trinca do modelo de Collipriest. As soluções numéricas, os desvios relativos entre as cotas dos momentos estatísticos, estão relacionados às funções do fator de intensidade de tensão de placas solicitadas por uma carregamento de tensão constante. Como parte do resultado numérico há uma análise dos tempos computacionais das metodologias em cada modelo de placa, conforme a implementação computacional aplicada às metodologias MC-RK4 e MC-FCB. Estes resultados foram gerados a partir da execução computacional de 900000 ciclos e  $N_s = 20000$  simulações em cada parâmetro randômico do modelo de Collipriest.

### 4.1 MEDIDAS DE DESEMPENHO

Nesta etapa realiza-se a avaliação do desempenho da metodologia MC-FCB para quantificação da incerteza do modelo de Collipriest. Para tanto comparam-se os estimadores dos momentos estatísticos das cotas inferior e superior do processo estocástico “tamanho de trinca” em relação aos resultados obtidos pela metodologia MC-RK4 aplicados ao modelo de Collipriest. Serão avaliados com problemas clássicos de mecânica da fratura além dos tempos computacionais de cada problema. O desempenho da metodologia MC-FCB é avaliado a partir da definição de funções de desvio relativo dos estimadores estatísticos do processo estocástico “tamanho de trinca”. A análise de desempenho da metodologia para o para o modelo de Collipriest é feito em relação ao desvio relativo das cotas.

$$\begin{cases} \epsilon_{\hat{\mu}_{\bar{a}}}(N) = 100 \left( \frac{\hat{\mu}_{\bar{a}} - \hat{\mu}_a}{\hat{\mu}_a} \right) (N) [\%], \forall N \in [N_o, N_1]; \\ \epsilon_{\hat{\mu}_a}(N) = 100 \left( \frac{\hat{\mu}_a - \hat{\mu}_{\bar{a}}}{\hat{\mu}_a} \right) (N) [\%], \forall N \in [N_o, N_1]; \end{cases} \quad (4.58)$$

$$\begin{cases} \epsilon_{\hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)}}(N) = 100 \left( \frac{\hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)} - \hat{\mu}_a^{(2)}}{\hat{\mu}_a^{(2)}} \right) (N) [\%], \forall N \in [N_o, N_1]; \\ \epsilon_{\hat{\mu}_a^{(2)}}(N) = 100 \left( \frac{\hat{\mu}_a^{(2)} - \hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)}}{\hat{\mu}_a^{(2)}} \right) (N) [\%], \forall N \in [N_o, N_1]; \end{cases} \quad (4.59)$$

sendo “ $\hat{\mu}_a$ ” e “ $\hat{\mu}_a^{(2)}$ ” os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e de segunda ordem, respectivamente, obtidos pela metodologia MC–RK4.

Durante o processo numérico são calculados a média aritmética do primeiro momento estatístico, média aritmética do segundo momento estatístico, média geométrica do primeiro momento estatístico e média geométrica do segundo momento estatístico, conforme as equações (4.60), (4.61), (4.62) e (4.63) respectivamente.

$$\bar{\mu}_a = \frac{\hat{\mu}_{\bar{a}} + \hat{\mu}_a}{2} \quad (4.60)$$

$$\bar{\mu}_a^2 = \frac{\hat{\mu}_{\bar{a}}^2 + \hat{\mu}_a^2}{2} \quad (4.61)$$

$$\bar{\mu}_g = \sqrt{\hat{\mu}_{\bar{a}} \hat{\mu}_a} \quad (4.62)$$

$$\bar{\mu}_g^2 = \sqrt{\hat{\mu}_{\bar{a}}^2 \hat{\mu}_a^2} \quad (4.63)$$

O cálculo do erro percentual entre as médias calculadas nas cotas e o método numérico aproximado, são mostradas nas equação (4.64).

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\bar{\mu},a} = \frac{(\bar{\mu}_a - \hat{\mu}_{RK4})}{\hat{\mu}_{RK4}} \cdot 100 \quad [\%] \\ \varepsilon_{\bar{\mu},g} = \frac{(\bar{\mu}_g - \hat{\mu}_{RK4})}{\hat{\mu}_{RK4}} \cdot 100 \quad [\%] \\ \varepsilon_{\bar{\mu}^2,a} = \frac{(\bar{\mu}_a^2 - \hat{\mu}_{RK4}^2)}{\hat{\mu}_{RK4}^2} \cdot 100 \quad [\%] \\ \varepsilon_{\bar{\mu}^2,g} = \frac{(\bar{\mu}_g^2 - \hat{\mu}_{RK4}^2)}{\hat{\mu}_{RK4}^2} \cdot 100 \quad [\%] \end{array} \right. \quad (4.64)$$

sendo “ $\hat{\mu}_{RK4}$ ” e “ $\hat{\mu}_{RK4}^2$ ” as soluções aproximadas dos momentos estatísticos de primeira e de segunda ordem, respectivamente, obtidos pelo método RK4.

Os estimadores para o valor esperado e variável do processo estocástico “tamanho de trinca” são obtidos via metodologia MC-RK4. Outra medida de desempenho são os tempos de computação necessários para obter os estimadores via metodologias MC-FCB e MC-RK4.

Para efeito de cálculo numérico utiliza-se  $a^* = \beta \times a_0$ , cujo “ $a^*$ ” é utilizado para obter a cota superior. Neste caso adota-se um “ $a^*$ ” próximo de 1,  $1a_0$ , de forma empírica. Conforme (ÁVILA; SANTOS; BECK, 2016), determina-se “ $a^*$ ” por inspeção. O número de ciclos foi estabelecido em 900000 ciclos e  $N_s = 20000$  simulações a cada ciclo.

O desempenho das metodologias será avaliado conforme equação 4.65.

$$\rho = \frac{(RK4 - FCB)}{FCB} \times 100 \quad ([\%]) . \quad (4.65)$$

Para avaliar o desempenho das cotas aplicados aos exemplos clássicos determinísticos: placa infinita com trinca central no primeiro exemplo, placa finita com uma trinca central no segundo exemplo e finalmente a placa finita com trinca de borda no terceiro exemplo. Os parâmetros do material da placa são os mesmos utilizados nos trabalhos de (CASTRO; MEGGIOLARO, 2009) e (AL-RUBAIE; GODERFLOID; LOPES, 2007). Esses parâmetros estão descritos na tabela 1 e pertencem a uma liga de Inconel 600.

Tabela 1 – Parâmetros de entrada de simulação numérica das placas com trincas

Parâmetros de entrada - Modelo de Colli Priest Inconel 600	
$\Delta\sigma$	65 MPa
espessura da chapa $b$	100 mm
razão de tensão $R$	0,1 mm
ciclo inicial $N_0$	0 ciclos
ciclo final $N_1$	900000 ciclos
comprimento inicial de trinca $a_0$	2,5 mm
variável randômica $c$	$5,61 \cdot 10^{-12}$
variável randômica $m$	2,62
variável randômica $K_C$	$40,08 MPa \cdot m^{\frac{1}{2}}$
variável randômica $\Delta K_{th}$	$6,38 MPa \cdot m^{\frac{1}{2}}$

Fonte – Adaptado de Castro e Meggiolaro (2009).

O Inconel é o nome comercial de ligas austeníticas de níquel e são usados em aplicações que requerem resistência à corrosão e alta temperatura. A tabela 2 abaixo mostra as propriedades mecânicas da liga de Inconel 600.

Tabela 2 – Tabela de propriedades mecânicas do Inconel

Propriedades mecânicas				
$\sigma_e$ (Mpa)	$\sigma_r$ (Mpa)	$\varepsilon$ (%)	$k_C$	$k_{th}$
687	386	33.5	40.08	6.38

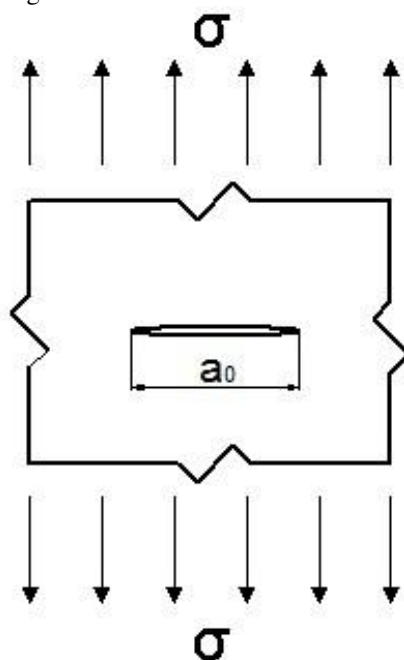
Fonte – Adaptado de Castro e Meggiolaro (2009).

## 4.2 PLACA DE LARGURA INFINITA E COM TRINCA CENTRAL

O primeiro exemplo é uma placa, com largura infinita, e uma trinca central, com tamanho inicial “ $a_0$ ”, solicitada sob um carregamento de tração conforme a figura abaixo.



Figura 5 – Placa infinita de trinca central



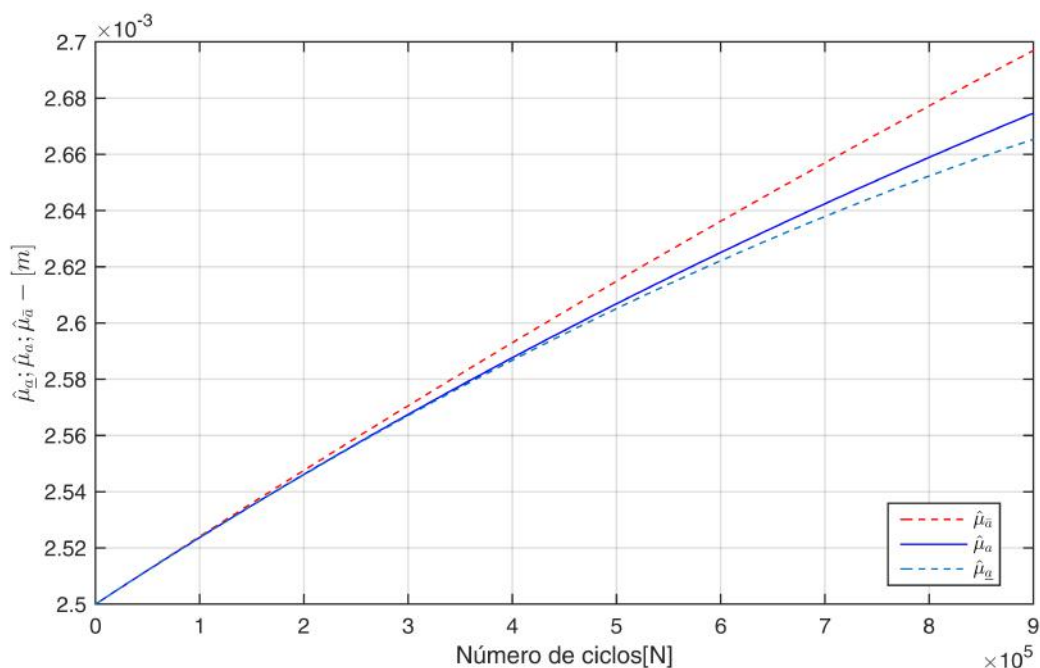
Fonte – Autoria própria (2020).

A função de correção do fator de intensidade de tensão (FIT) para o caso de placa com largura infinita e trinca central, representada pela figura 5, é dada por Bannatine, Comer e Handrock (1989), conforme equação (4.66).

$$f(a) = 1, \forall a \in \mathbb{R}^+. \quad (4.66)$$

Na figura 6 apresenta-se o gráfico da estimativa para o valor esperado e suas cotas obtidas via MC-RK4 e MC-FCB, respectivamente. Neste caso considera-se uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  com incerteza no parâmetro “C”, conforme definido na equação (3.57).

Figura 6 – Primeiro momento - incerteza em “C” e dispersão  $\delta = 1/10$

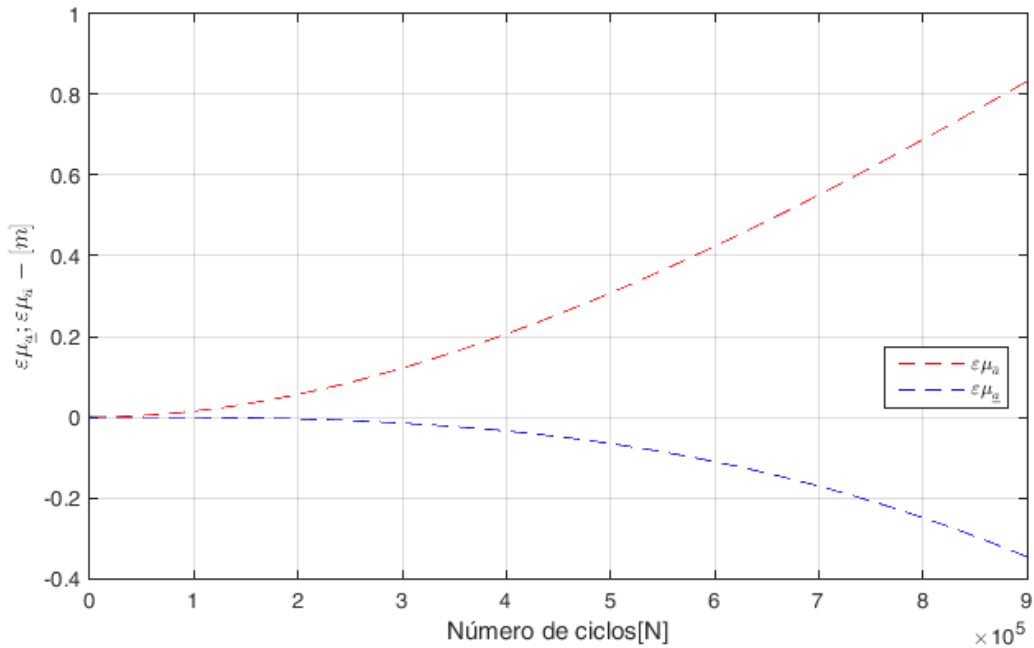


Fonte – Autoria própria (2020).

É possível observar pela figura 6 que as cotas superior e inferior não apresentam altos desvios numéricos quando comparada com o MC-RK4. Desta forma, neste exemplo, aplicado ao modelo de Collipriest, as funções cotas superior e inferior *envelopam*, de forma mais estreita, a curva de propagação da trinca, isto é devido à característica da lei de evolução de Collipriest.

A figura 7 apresenta-se o gráfico da estimativa para o valor esperado e suas cotas obtidas via MC-RK4 e MC-FCB, respectivamente. Considerando uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  com incerteza no parâmetro “C”.

Figura 7 – Primeiro momento - desvio relativo em “C” e dispersão  $\delta = 1/10$

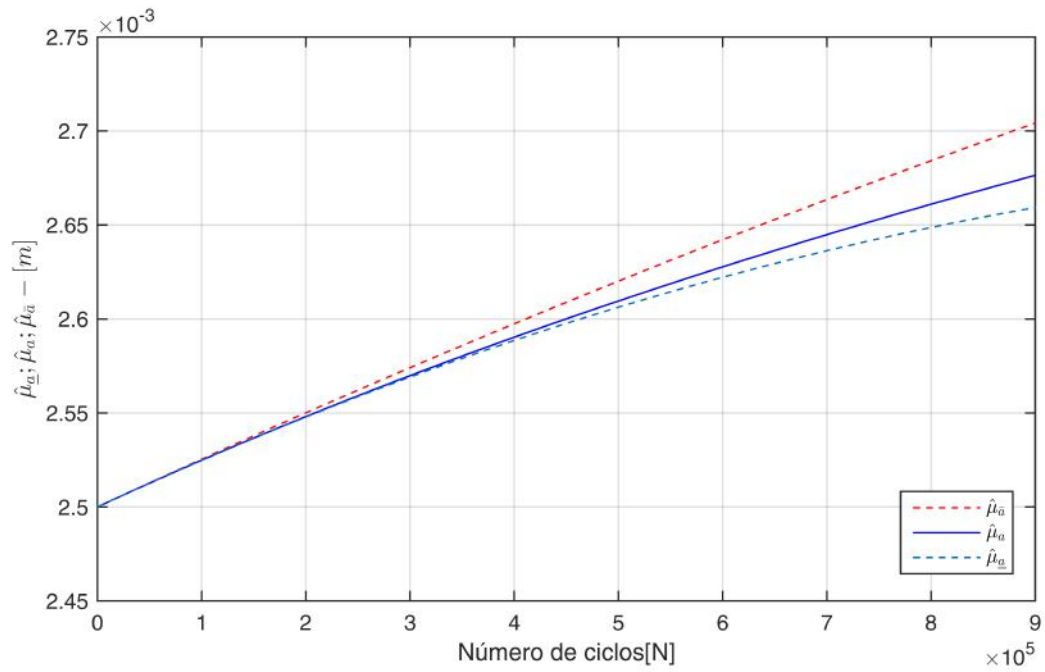


Fonte – Autoria própria (2020).

O cálculo do desvio relativo baseia-se na equação (4.65) o qual relaciona as estimativas do primeiro momento estatístico. Conforme a figura 7 tem-se um valor de desvio próximo a 0,8 para cota superior e próximo a -0,2 para a cota inferior.

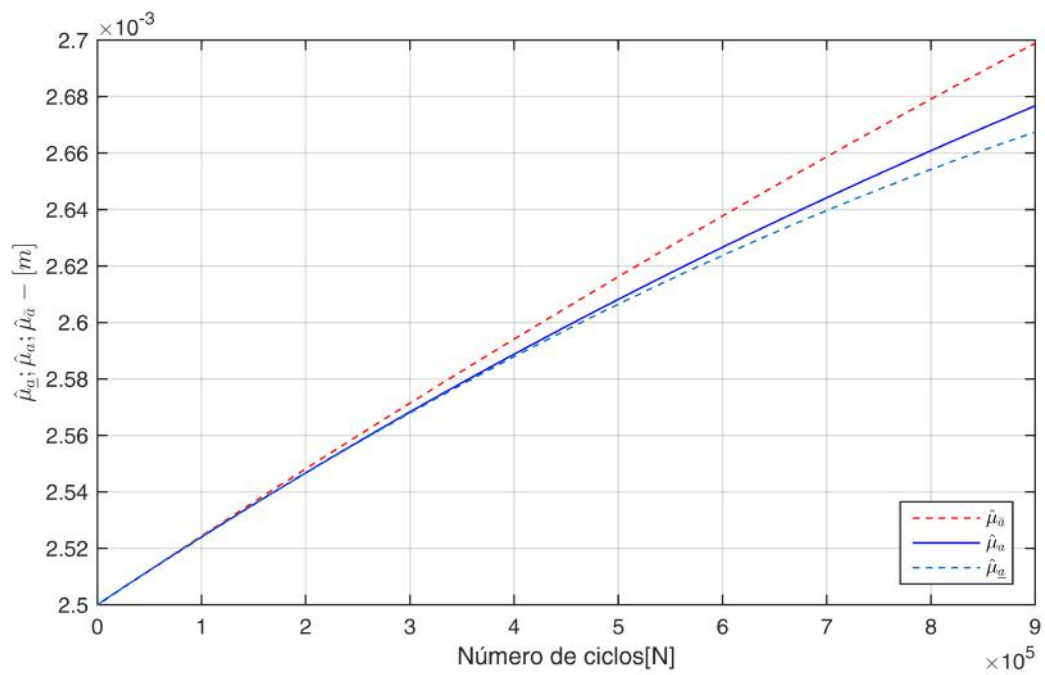
As figuras 8, 9, 10 e 11 mostram o primeiro momento estatístico tamanho de trinca referente à randomização dos parâmetro “ $m$ ”, “ $k_C$ ”, “ $K_{th}$ ” e “ $a_0$ ”, respectivamente e com dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$ . Todas possuem um comportamento similar quanto ao envelopar a curva de propagação de trinca.

Figura 8 – Primeiro momento - incerteza em “ $m$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



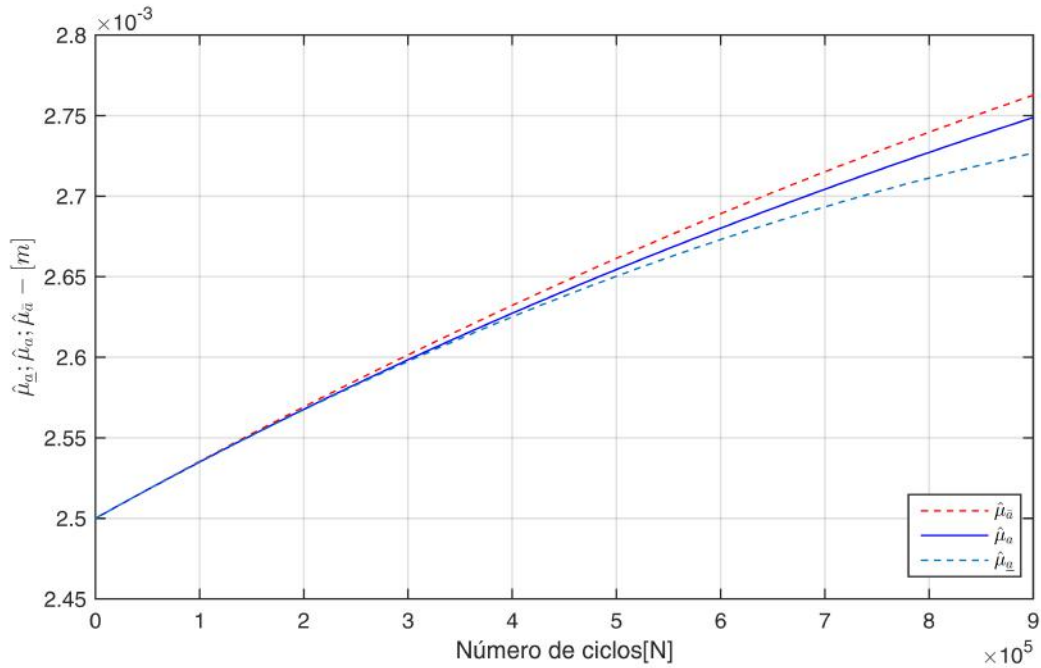
Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 9 – Primeiro momento - incerteza em “ $k_C$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



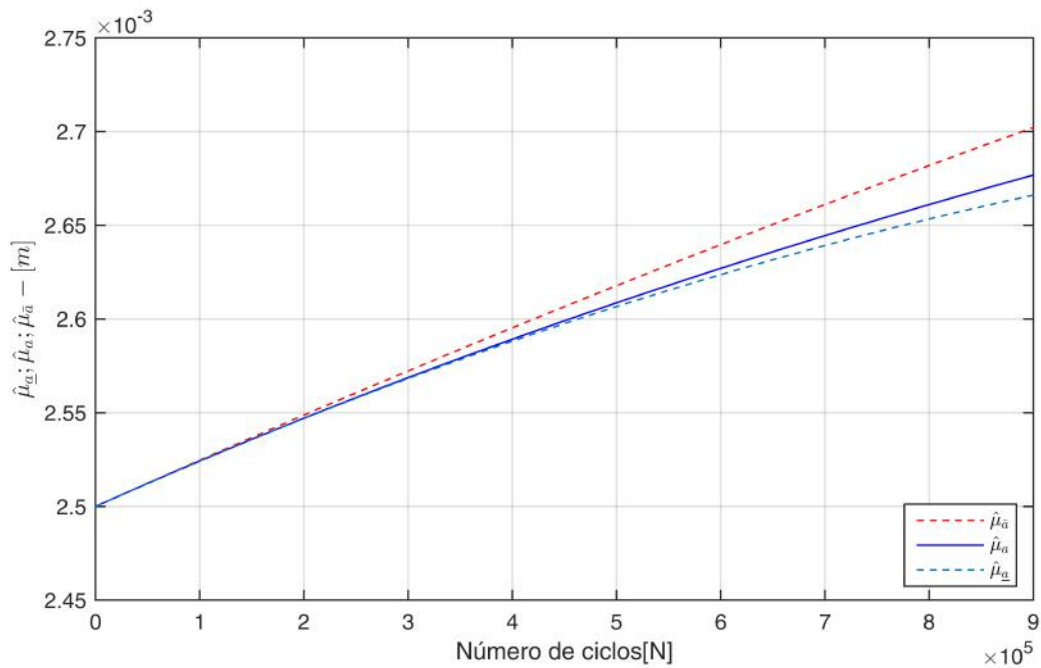
Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 10 – Primeiro momento - incerteza em “ $K_{th}$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

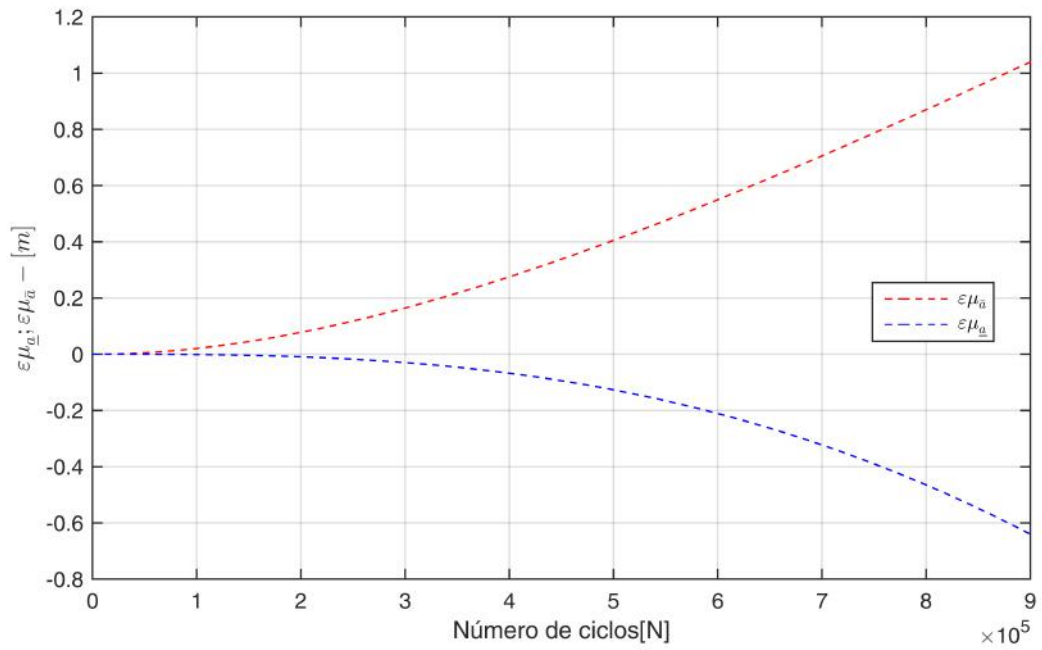
Figura 11 – Primeiro momento - incerteza em “ $a_0$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

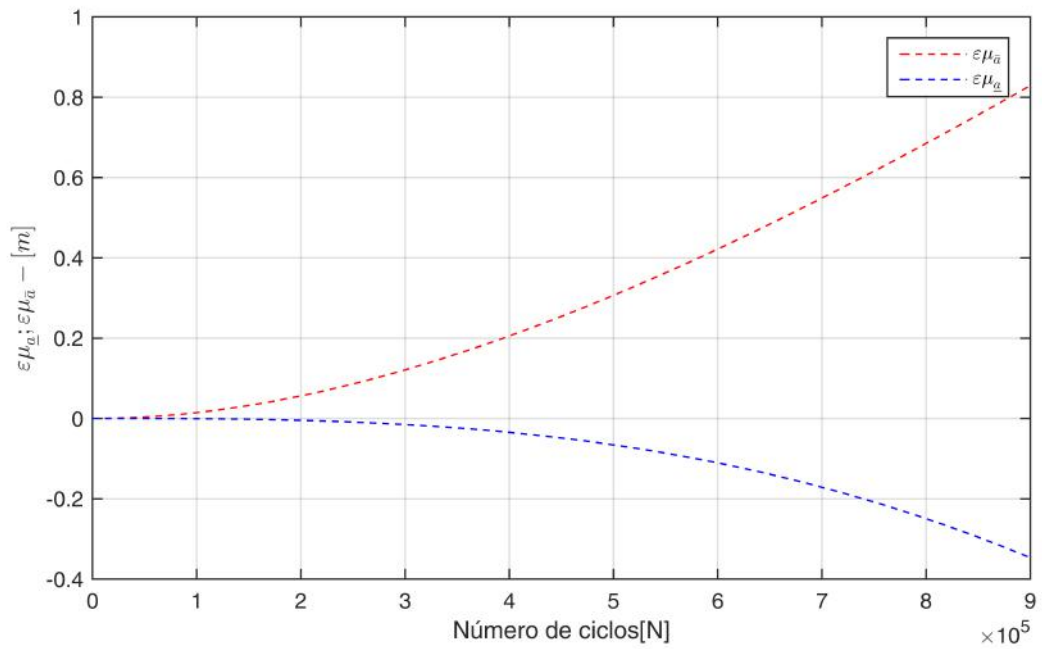
As figura 12, 13, 14 e 15 mostram o primeiro momento estatístico referente ao desvio relativo na randomização dos parâmetro “ $m$ ”, “ $k_C$ ”, “ $K_{th}$ ” e “ $a_0$ ”, respectivamente e com dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$ . O desvio relativo está relacionado com a dispersão das cotas superior e inferior em relação ao MC-RK4. A avaliação do desvio relativo é essencial na etapa de desempenho.

Figura 12 – Primeiro momento - desvio relativo em “m” e dispersão  $\delta = 1/10$



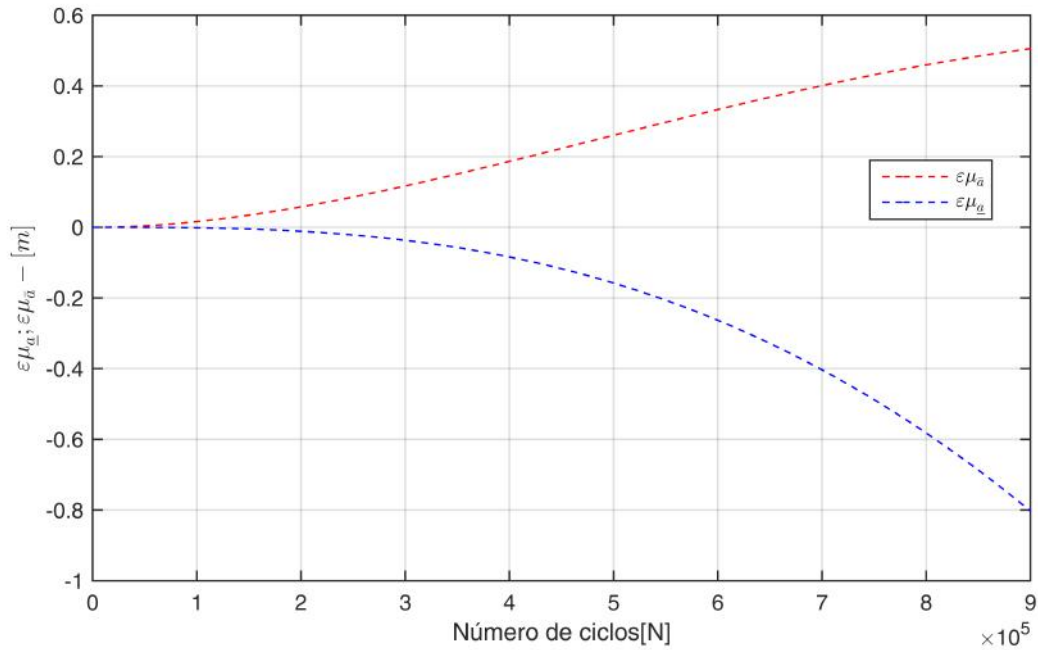
Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 13 – Primeiro momento - desvio relativo em “k<sub>C</sub>” e dispersão  $\delta = 1/10$



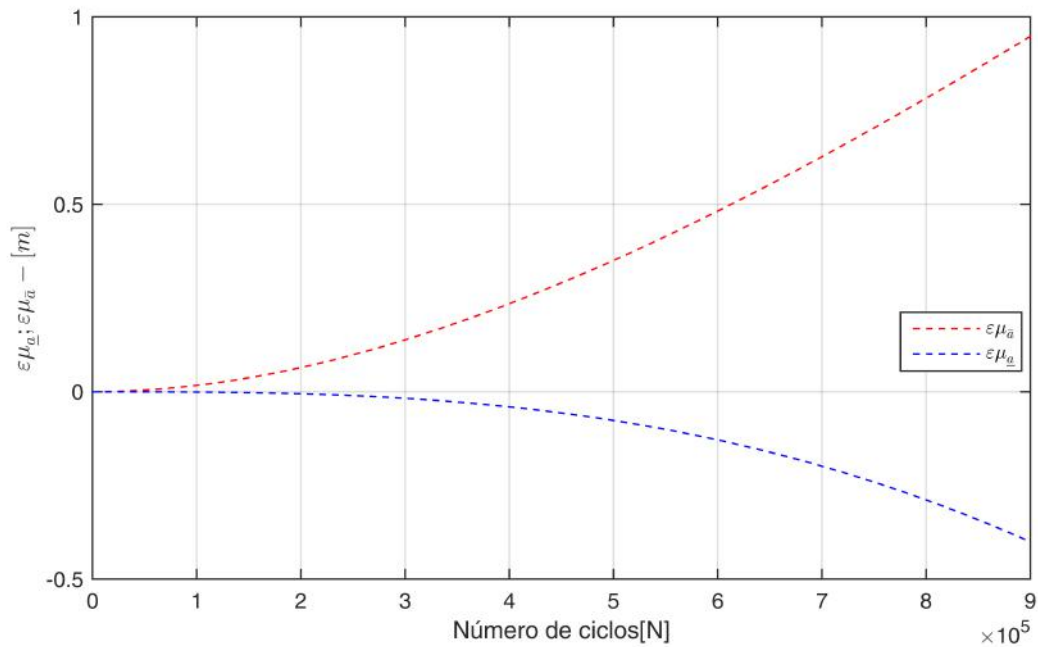
Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 14 – Primeiro momento - desvio relativo em “ $K_{th}$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

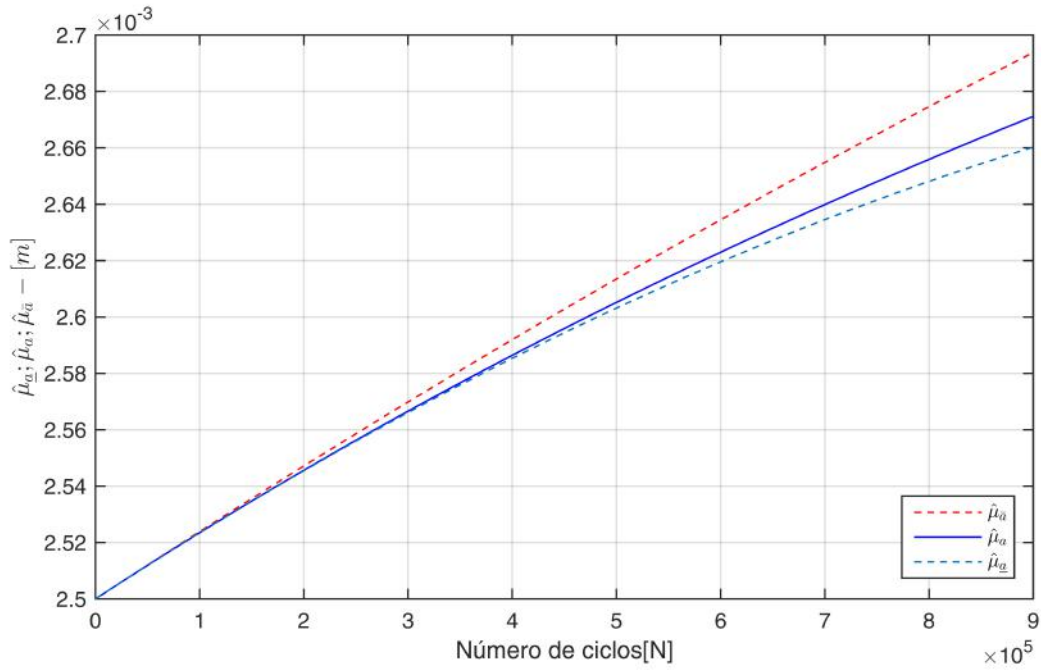
Figura 15 – Primeiro momento - desvio relativo em “ $a_0$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

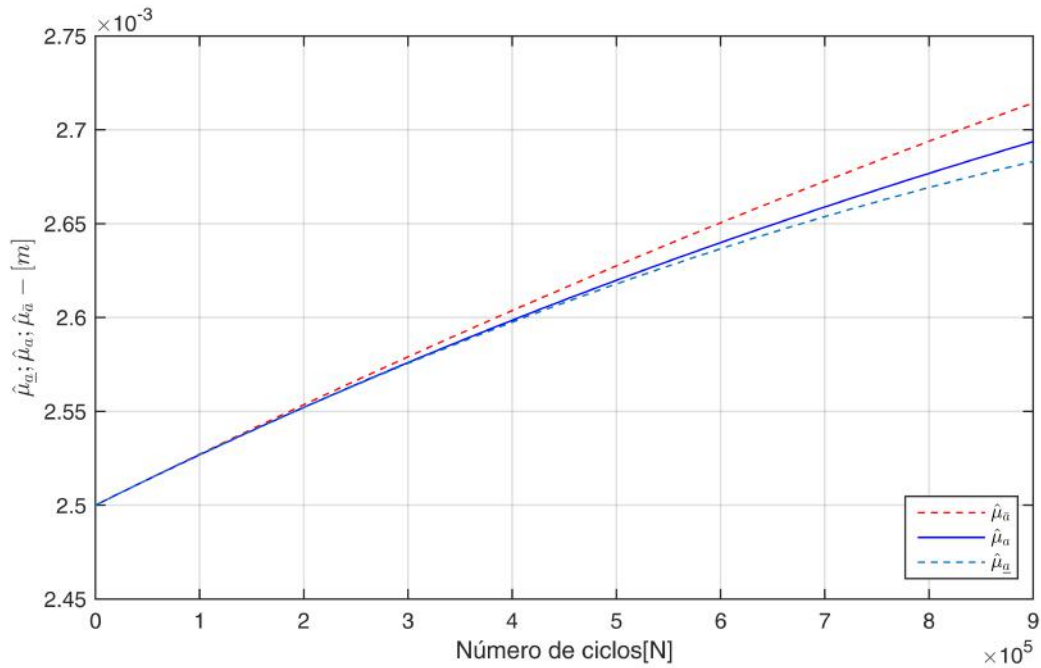
A figura 16 e 17 são os resultados da randomização para o parâmetro tamanho de trinca em função do número de ciclos relativo ao primeiro momento estatístico para as cotas do MC-FCB e MC-RK4. Neste caso considera-se uma dispersão de  $\delta = \frac{3}{10}$  com incerteza no parâmetro “ $C$ ” e “ $K_C$ ”. Entretanto mesmo alterando o valor de  $\delta = \frac{1}{10}$  para  $\delta = \frac{3}{10}$ , observa-se, nestas duas figuras, que o *envelopamento* se mantém regular.

Figura 16 – Primeiro momento - incerteza em “C” e dispersão  $\delta = 3/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 17 – Primeiro momento - desvio relativo em “C” e dispersão  $\delta = 3/10$

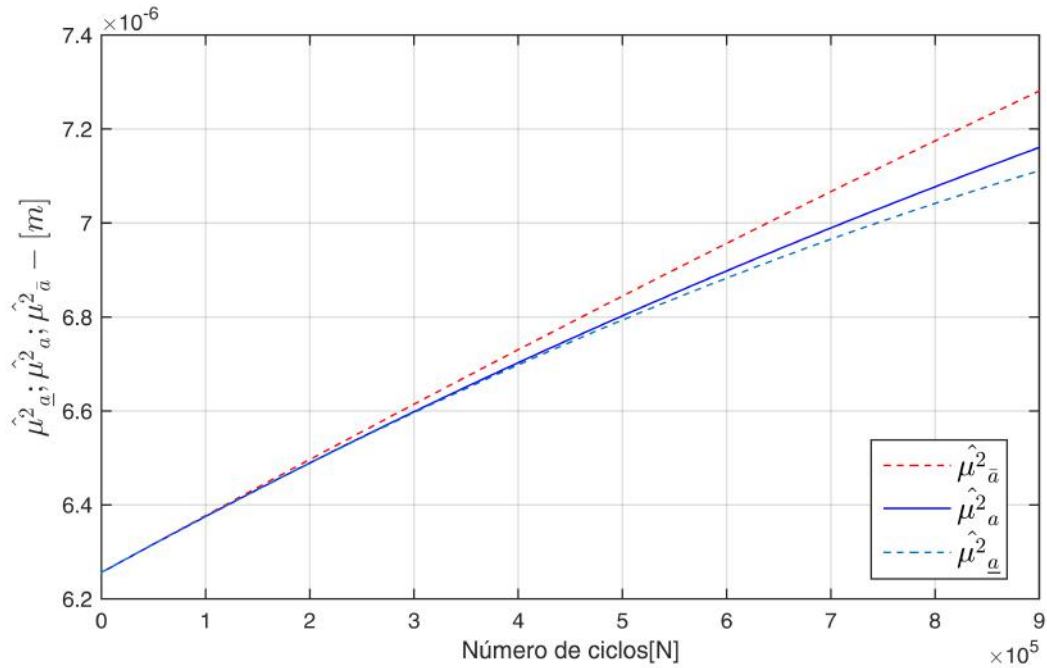


Fonte – Autoria própria (2020).

A figura 18 e 19 são os resultados da randomização para o parâmetro tamanho de trinca em função do número de ciclos e relativo ao segundo momento estatístico para as cotas do MC-FCB e MC-RK4. Neste caso considera-se uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  com incerteza no parâmetro “C” e “ $K_C$ ”.

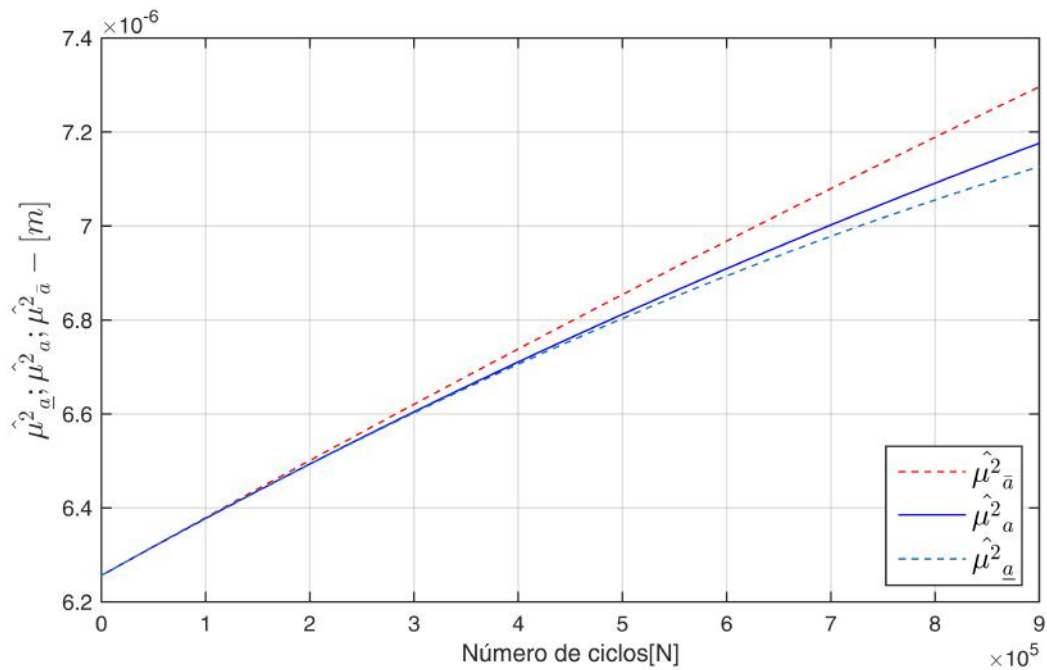


Figura 18 – Segundo momento - incerteza em “C” e dispersão  $\delta = 1/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

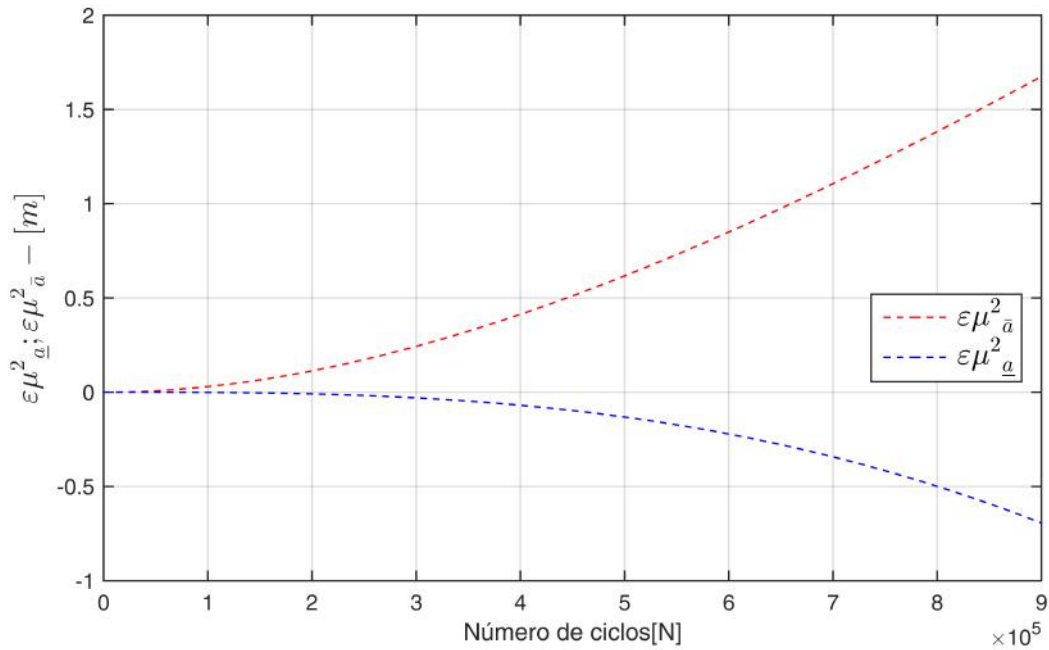
Figura 19 – Segundo momento - desvio relativo em “ $K_C$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

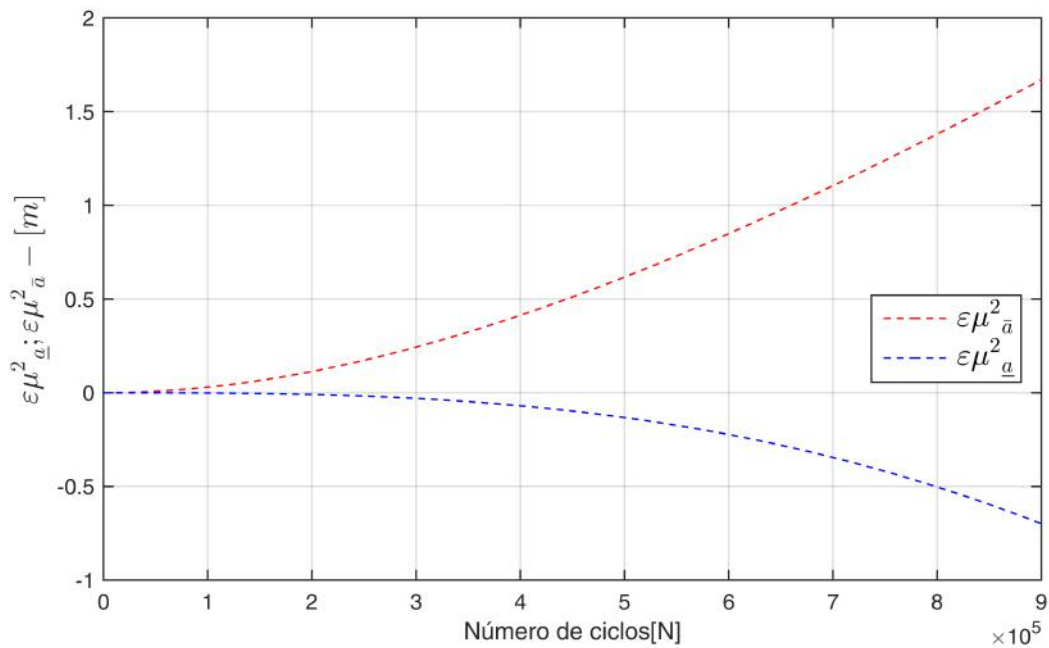
A figura 20 e 21 são os resultados da randomização para o desvio relativo em função do número de ciclos e relacionado ao segundo momento estatístico para as cotas do MC-FCB e MC-RK4. Neste caso considera-se uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  com incerteza no parâmetro “C” e “ $K_C$ ”.

Figura 20 – Segundo momento - incerteza em “C” e dispersão  $\delta = 1/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 21 – Segundo momento - desvio relativo em “ $K_C$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

A tabela 3 pertence ao exemplo de placa infinita com trinca central e mostra todos os valores coletados, via implementação computacional, dos parâmetros randomizados “C”, “m”, “ $k_C$ ”, “ $K_{th}$ ” e “ $a_0$ ” para o primeiro momento estatístico, considerando a dispersão de 1/10 e com  $a^* = 1, 1a_0$ . Esta tabela relaciona os parâmetros randomizados e o número de ciclos para as cotas inferior e superior,  $\underline{a}(N)$  e  $\bar{a}(N)$ , respectivamente. Os parâmetros de referência do material e dimensional, para obtenção destes valores, estão dispostos na tabela 1. Nota-se que

todos os pontos coletados das cotas do MC-FCB não violaram os limites da função, satisfazendo a desigualdade, conforme equação (2.8).

Tabela 3 – Resultado no primeiro momento,  $\delta = 1/10$  - placa infinita e com trinca central

$N(\text{ciclos})$		Parâmetro x $10^{-3}$				
		$C$	$m$	$K_C$	$K_{th}$	$a_0$
$1 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,524	2,526	2,524	2,535	2,525
	$a(N)$	2,524	2,525	2,524	2,534	2,525
	$\underline{a}(N)$	2,524	2,525	2,524	2,534	2,525
$2 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,548	2,551	2,548	2,568	2,550
	$a(N)$	2,546	2,549	2,547	2,567	2,548
	$\underline{a}(N)$	2,546	2,549	2,546	2,567	2,548
$3 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,570	2,575	2,571	2,601	2,574
	$a(N)$	2,567	2,571	2,568	2,597	2,570
	$\underline{a}(N)$	2,567	2,570	2,568	2,597	2,570
$4 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,593	2,599	2,594	2,631	2,597
	$a(N)$	2,588	2,592	2,589	2,626	2,591
	$\underline{a}(N)$	2,587	2,590	2,588	2,624	2,590
$5 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,615	2,622	2,616	2,660	2,620
	$a(N)$	2,607	2,611	2,608	2,653	2,611
	$\underline{a}(N)$	2,605	2,608	2,606	2,649	2,609
$6 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,636	2,645	2,638	2,688	2,643
	$a(N)$	2,625	2,630	2,626	2,679	2,629
	$\underline{a}(N)$	2,622	2,624	2,624	2,672	2,626
$7 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,657	2,666	2,659	2,714	2,664
	$a(N)$	2,642	2,647	2,644	2,703	2,647
	$\underline{a}(N)$	2,638	2,638	2,640	2,692	2,642
$8 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,677	2,687	2,679	2,738	2,686
	$a(N)$	2,659	2,663	2,661	2,725	2,664
	$\underline{a}(N)$	2,652	2,650	2,654	2,710	2,656
$9 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,697	2,708	2,699	2,762	2,707
	$a(N)$	2,675	2,679	2,677	2,747	2,680
	$\underline{a}(N)$	2,665	2,661	2,667	2,725	2,669

Fonte – Autoria própria (2020).

A tabela 4 mostra todos os valores dos parâmetros randomizados “ $C$ ”, “ $m$ ”, “ $k_C$ ”, “ $K_{th}$ ” e “ $a_0$ ” para o primeiro momento estatístico, dispersão de  $\delta = \frac{3}{10}$  e com  $a^* = 1, 1a_0$ . Nota-se que alguns pontos das cotas do MC-FCB violaram os limites da função, sendo assim deve-se, neste caso, alterar coeficiente  $a^* = 1, 1a_0$  e substituindo-o por uma valor logo acima, por exemplo fazendo  $a^* = 1, 2a_0$ .

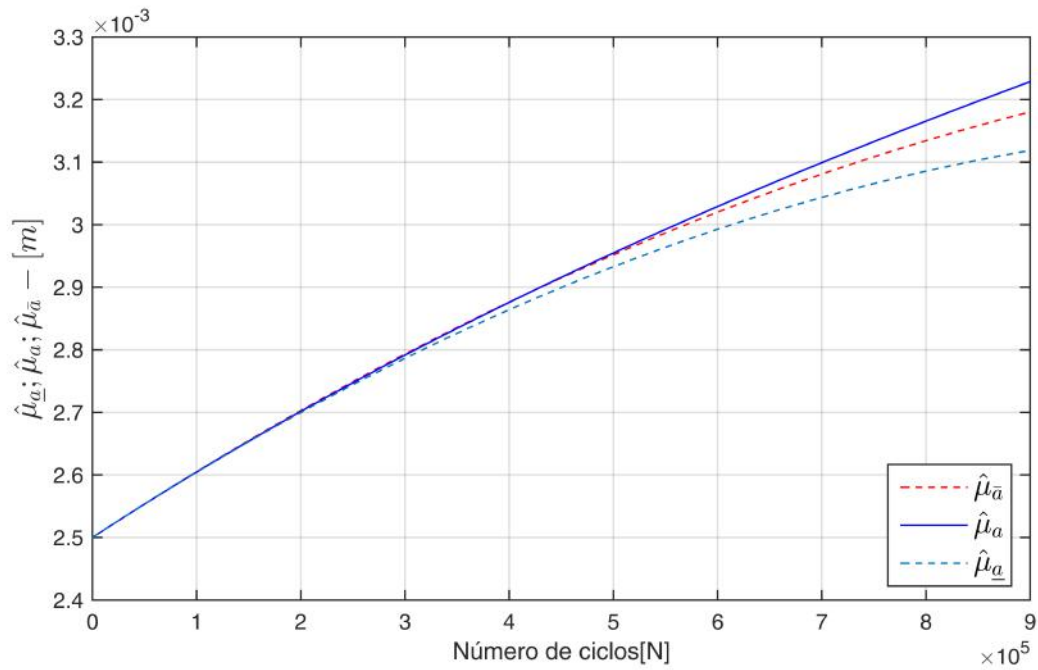
Tabela 4 – Resultado no primeiro momento,  $\delta = 1/10$  - placa infinita e com trinca central

$N(\text{ciclos})$		Parâmetro x $10^{-3}$				
		$C$	$m$	$K_C$	$K_{th}$	$a_0$
$1 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,524	2,543	2,527	2,605	2,540
	$a(N)$	2,523	2,539	2,526	2,604	2,539
	$\underline{a}(N)$	2,523	2,538	2,526	2,604	2,539
$2 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,547	2,582	2,553	2,703	2,580
	$a(N)$	2,545	2,570	2,552	2,702	2,576
	$\underline{a}(N)$	2,545	2,563	2,551	2,700	2,575
$3 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,569	2,619	2,578	2,794	2,619
	$a(N)$	2,566	2,596	2,575	2,792	2,611
	$\underline{a}(N)$	2,566	2,576	2,575	2,787	2,609
$4 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,591	2,653	2,603	2,877	2,658
	$a(N)$	2,586	2,619	2,598	2,876	2,644
	$\underline{a}(N)$	2,585	2,577	2,597	2,865	2,640
$5 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,613	2,684	2,626	2,953	2,696
	$a(N)$	2,605	2,638	2,619	2,955	2,675
	$\underline{a}(N)$	2,603	2,565	2,617	2,933	2,669
$6 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,634	2,713	2,649	3,021	2,733
	$a(N)$	2,622	2,656	2,639	3,030	2,705
	$\underline{a}(N)$	2,619	2,541	2,635	2,993	2,694
$7 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,654	2,738	2,671	3,082	2,770
	$a(N)$	2,639	2,672	2,658	3,100	2,733
	$\underline{a}(N)$	2,634	2,504	2,653	3,044	2,717
$8 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,674	2,761	2,692	3,135	2,806
	$a(N)$	2,655	2,686	2,675	3,166	2,760
	$\underline{a}(N)$	2,648	2,455	2,668	3,086	2,738
$9 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,693	2,780	2,713	3,181	2,842
	$a(N)$	2,670	2,699	2,692	3,229	2,787
	$\underline{a}(N)$	2,660	2,394	2,682	3,119	2,755

Fonte – Autoria própria (2020).

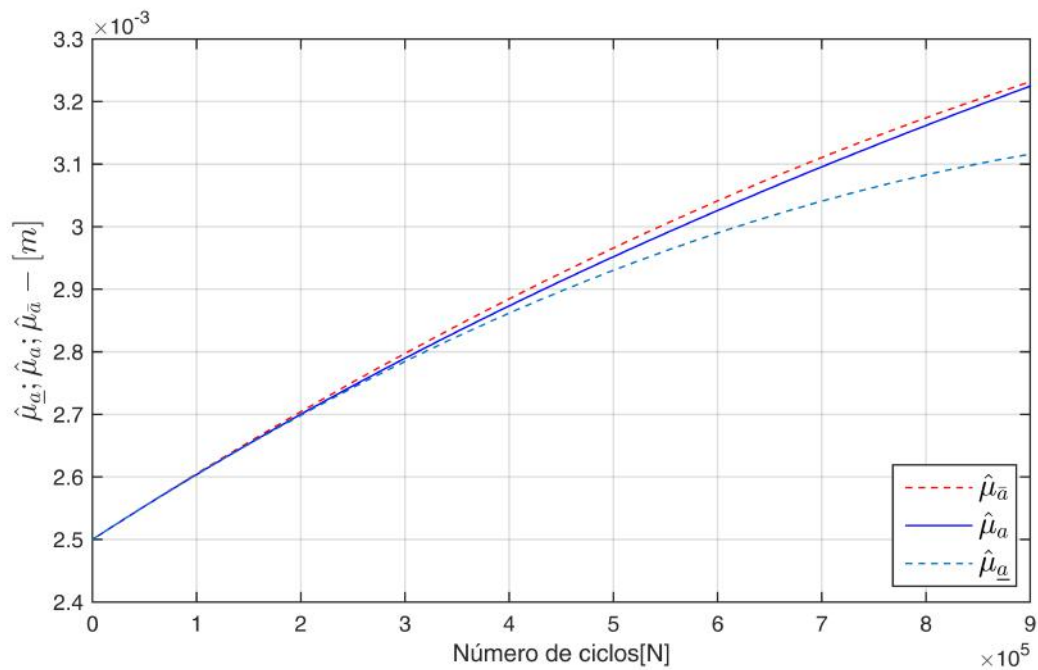
Conforme tabela 4, as cotas do MC-FCB apresentaram valores numéricos que extrapolaram o sistema para o parâmetro “ $K_{th}$ ”, conforme figura 22. Neste caso foi ajustado o coeficiente de “ $a^*$ ” em  $a^* = 1, 2a_0$  obtendo a curva da figura 23. Com este ajuste nota-se que houve uma melhoria quanto ao posicionamento da curvas. Este ajuste não tem interferência significativa nos tempos computacionais, pois o tempo para a condição  $a^* = 1, 2a_0$  foi de 765,5 segundos e de  $a^* = 1, 2a_0$  foi de 770,2s.

Figura 22 – Segundo momento - desvio relativo em “ $k_C$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 23 – Segundo momento - desvio relativo em “ $k_C$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

A tabela 5 mostra os valores dos parâmetros para uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  do tamanho de trinca no segundo momento estatístico.

Tabela 5 – Resultado no segundo momento,  $\delta = 1/10$  - placa infinita e com trinca central

$N(\text{ciclos})$		Parâmetro x $10^{-6}$				
		$C$	$m$	$K_C$	$K_{th}$	$a_0$
$1 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,377	6,386	6,378	6,433	6,382
	$a(N)$	6,375	6,383	6,376	6,431	6,380
	$\underline{a}(N)$	6,375	6,383	6,376	6,431	6,380
$2 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,496	6,514	6,499	6,607	6,508
	$a(N)$	6,489	6,503	6,492	6,600	6,499
	$\underline{a}(N)$	6,488	6,502	6,491	6,598	6,498
$3 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,614	6,640	6,618	6,778	6,632
	$a(N)$	6,598	6,617	6,602	6,761	6,613
	$\underline{a}(N)$	6,596	6,613	6,600	6,756	6,610
$4 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,730	6,763	6,735	6,943	6,755
	$a(N)$	6,702	6,725	6,708	6,916	6,722
	$\underline{a}(N)$	6,698	6,715	6,703	6,905	6,716
$5 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,844	6,885	6,851	7,103	6,877
	$a(N)$	6,802	6,827	6,809	7,065	6,826
	$\underline{a}(N)$	6,793	6,808	6,800	7,042	6,815
$6 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,956	7,004	6,964	7,257	6,997
	$a(N)$	6,898	6,923	6,906	7,207	6,925
	$\underline{a}(N)$	6,883	6,892	6,890	7,168	6,907
$7 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	7,067	7,120	7,075	7,405	7,116
	$a(N)$	6,989	7,015	6,998	7,344	7,021
	$\underline{a}(N)$	6,966	6,967	6,974	7,282	6,992
$8 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	7,175	7,233	7,184	7,546	7,233
	$a(N)$	7,077	7,102	7,087	7,474	7,112
	$\underline{a}(N)$	7,042	7,032	7,051	7,384	7,069
$9 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	7,281	7,344	7,291	7,680	7,348
	$a(N)$	7,161	7,186	7,171	7,600	7,199
	$\underline{a}(N)$	7,111	7,088	7,122	7,472	7,139

Fonte – Autoria própria (2020).

A tabela 6 mostra os valores dos parâmetros para uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  do desvio relativo no primeiro momento estatístico.

Tabela 6 – Resultado no primeiro momento,  $\delta = 1/10$  - placa com largura infinita

$N(\text{ciclos})$		Parâmetros $\times 10^{-3}$				
		$C$	$m$	$K_C$	$K_{th}$	$a_0$
$1 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,015	0,021	0,015	0,016	0,017
	$\underline{a}(N)$	0,015	0,021	0,015	0,016	0,017
$2 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,056	0,081	0,056	0,058	0,067
	$\underline{a}(N)$	0,056	0,081	0,056	0,058	0,067
$3 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,121	0,171	0,121	0,118	0,144
	$\underline{a}(N)$	0,121	0,171	0,121	0,118	0,144
$4 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,206	0,286	0,205	0,190	0,244
	$\underline{a}(N)$	0,206	0,286	0,205	0,190	0,244
$5 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,307	0,421	0,306	0,266	0,364
	$\underline{a}(N)$	0,307	0,421	0,306	0,266	0,364
$6 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,423	0,571	0,421	0,343	0,501
	$\underline{a}(N)$	0,423	0,571	0,421	0,343	0,501
$7 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,551	0,732	0,548	0,416	0,652
	$\underline{a}(N)$	0,551	0,732	0,548	0,416	0,652
$8 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,688	0,902	0,684	0,481	0,815
	$\underline{a}(N)$	0,688	0,902	0,684	0,481	0,815
$9 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,833	1,077	0,828	0,534	0,987
	$\underline{a}(N)$	0,833	1,077	0,828	0,534	0,987

Fonte – Autoria própria (2020).

A razão do tempo computacional obtido no MC-RK4 em relação às cotas do MC-FCB são calculados pela equação (4.65) apresentados na tabela 7. Estes valores são da placa infinita com trinca central no primeiro momento estatístico e dispersão  $\delta = \frac{1}{10}$  a 900000 ciclos e simulando  $N_s = 20000$  amostras para cada parâmetro randômico de Collipriest.

Tabela 7 – Tempos computacionais - placa infinita com trinca central

Parâmetro	Tempos computacionais (s)		
	FCB	RK4	$\rho$
$C$	8,2	771,8	9412
$m$	9,0	798,9	8777
$K_C$	7,3	753,3	10219
$K_{th}$	8,6	778,6	8953
$a_0$	20,4	751,5	3584

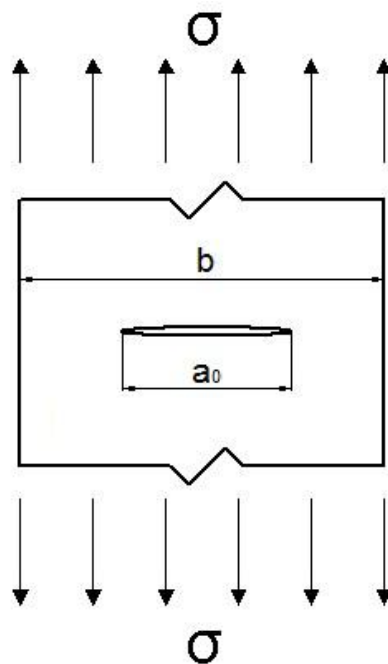
Fonte – Autoria própria (2020).

Analisando os tempos computacionais na tabela 7 nota-se uma performance muito melhor das metodologia FCB-MC em relação à metodologia RK4. A eficiência do método RK4 chega a ser numericamente maior quando comparado com a metodologia RK4-MC.

### 4.3 PLACA DE LARGURA FINITA E COM TRINCA CENTRAL

A figura 24 é uma placa, com largura finita, e uma trinca central, com tamanho inicial  $a_0$ , solicitada sob um carregamento de tração. Este é o segundo exemplo e as análises de gráfico e tabelas são similares ao primeiro exemplo.

Figura 24 – Placa finita com trinca central



Fonte – Autoria própria (2020).

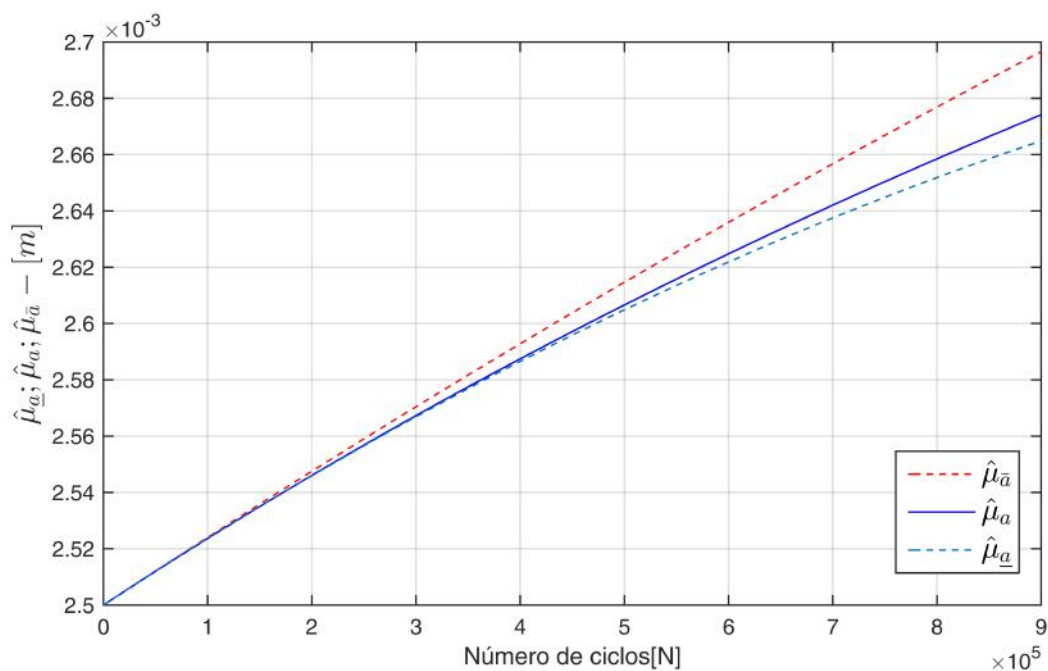
A função de correção do fator de intensidade de tensão para o caso de Placa com largura finita e trinca central, representada pela figura 24, é dada por (BANNATINE; COMER; HANDROCK, 1989), conforme equação (4.67).

$$f(a) = \sqrt{\sec \frac{\pi a}{2b}}, \forall a \in \mathbb{R}^+. \quad (4.67)$$

Na figura 25 apresenta-se o gráfico da estimativa para o valor esperado e suas cotas obtidas via MC-RK4 e MC-FCB, respectivamente. Neste caso considera-se uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  com incerteza no parâmetro “C”, conforme definido na equação (3.57).



Figura 25 – Primeiro momento - incerteza em “C” e dispersão  $\delta = 1/10$

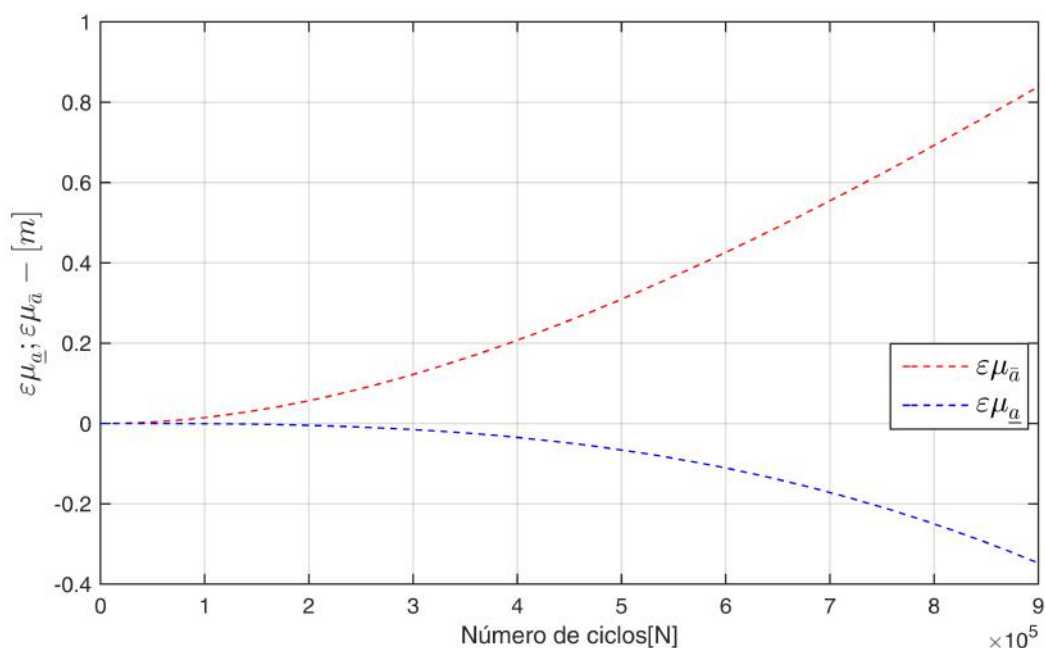


Fonte – Autoria própria (2020).

É possível observar pela figura 25 que as cotas superior e inferior não apresentam altos desvios numéricos quando comparada com o método de MC-RK4. Desta forma nestes exemplos aplicados ao modelo de Collipriest, as funções cotas superior e inferior *envelopam*, de forma mais estreita, a curva de propagação da trinca, isto é devido à característica da lei de evolução de Collipriest.

A análise do desempenho da metodologia para o modelo de Collipriest é feito em relação ao desvio relativo das cotas em relação ao MC-RK4. A figura 26 apresenta o desvio relativo das cotas superior e inferior em relação ao RK4. Considerando uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  com incerteza no parâmetro “C”.

Figura 26 – Primeiro momento - desvio relativo em “C” e dispersão  $\delta = 1/10$

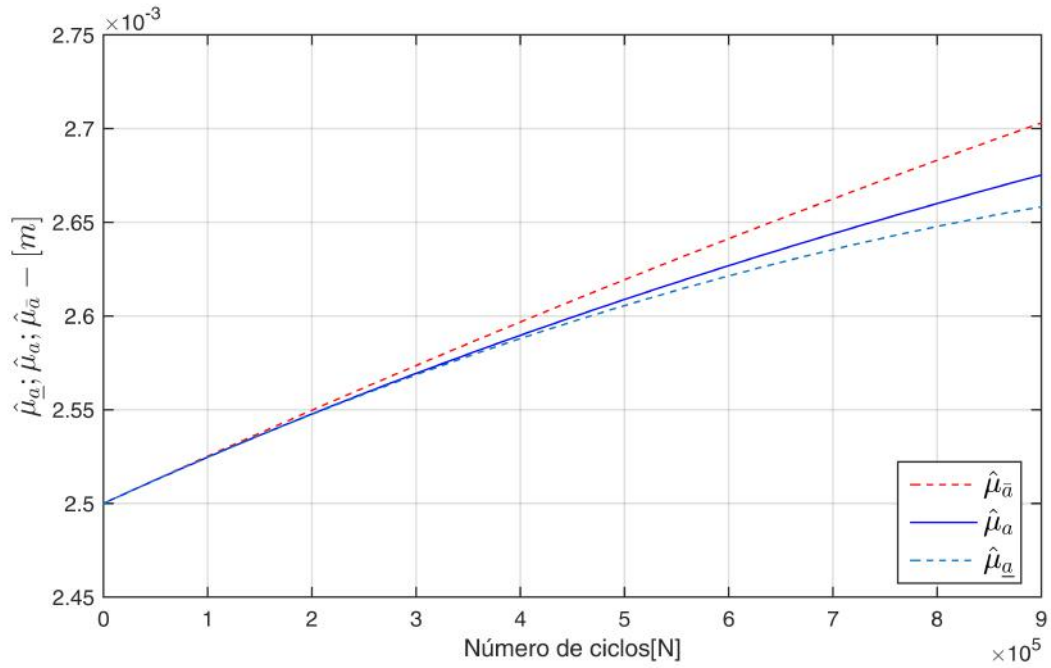


Fonte – Autoria própria (2020).

O cálculo do desvio relativo baseia-se na equação (4.65) o qual relaciona as estimativas do primeiro momento estatístico. Conforme a figura 26 tem-se um valor de desvio próximo a 0,8 para cota superior e próximo a -0,2 para a cota inferior.

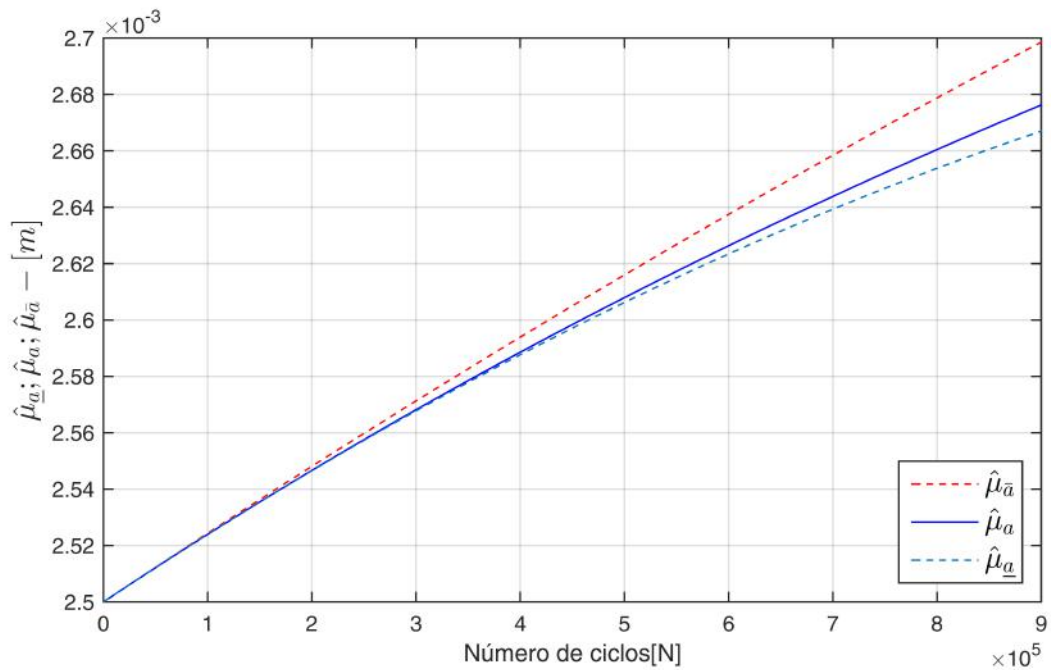
As figuras 27, 28, 29 e 30 mostram o primeiro momento estatístico tamanho de trinca referente à randomização dos parâmetro “ $m$ ”, “ $k_C$ ”, “ $K_{th}$ ” e “ $a_0$ ”, respectivamente e com dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$ . Todas possuem um comportamento similar quanto ao envelopar a curva de propagação de trinca.

Figura 27 – Primeiro momento - incerteza em “ $m$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



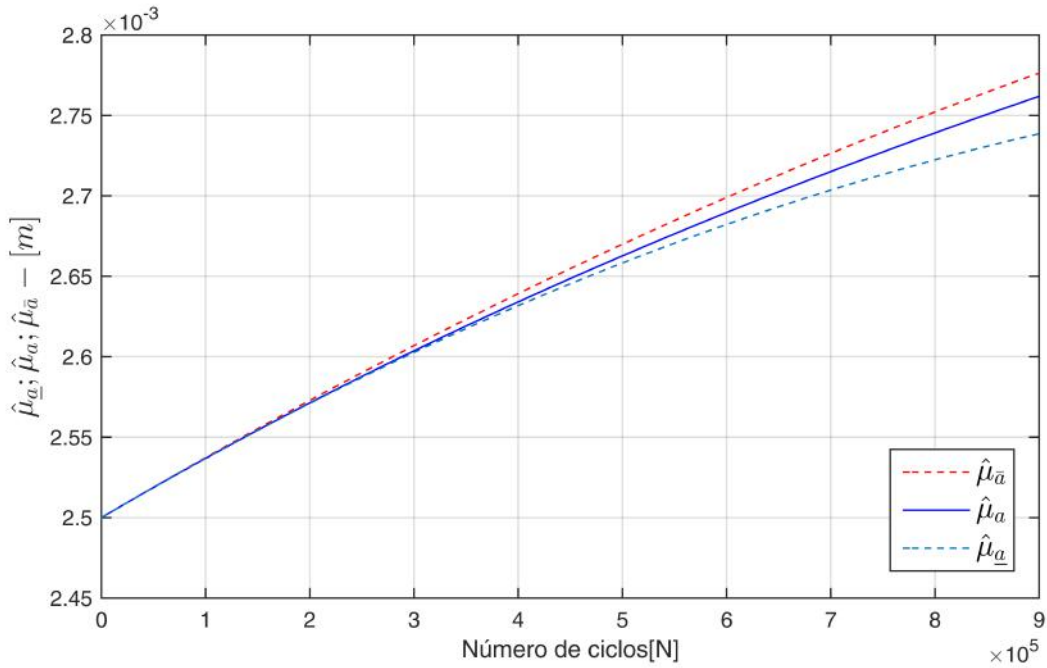
Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 28 – Primeiro momento - incerteza em “ $k_C$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



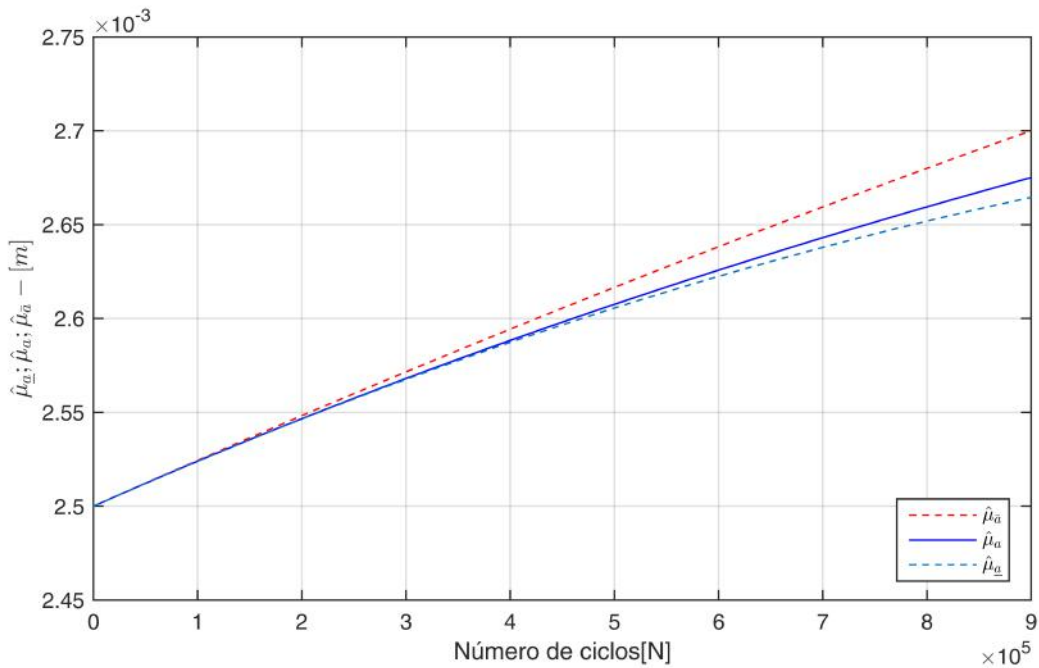
Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 29 – Primeiro momento - incerteza em “ $K_{th}$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

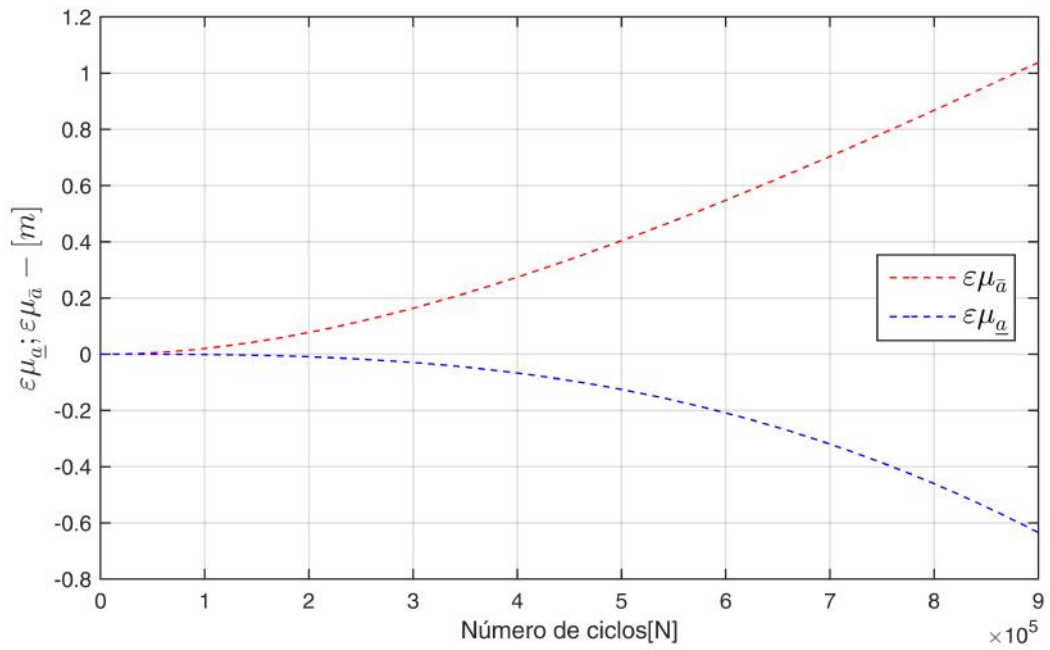
Figura 30 – Primeiro momento - incerteza em “ $a_0$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

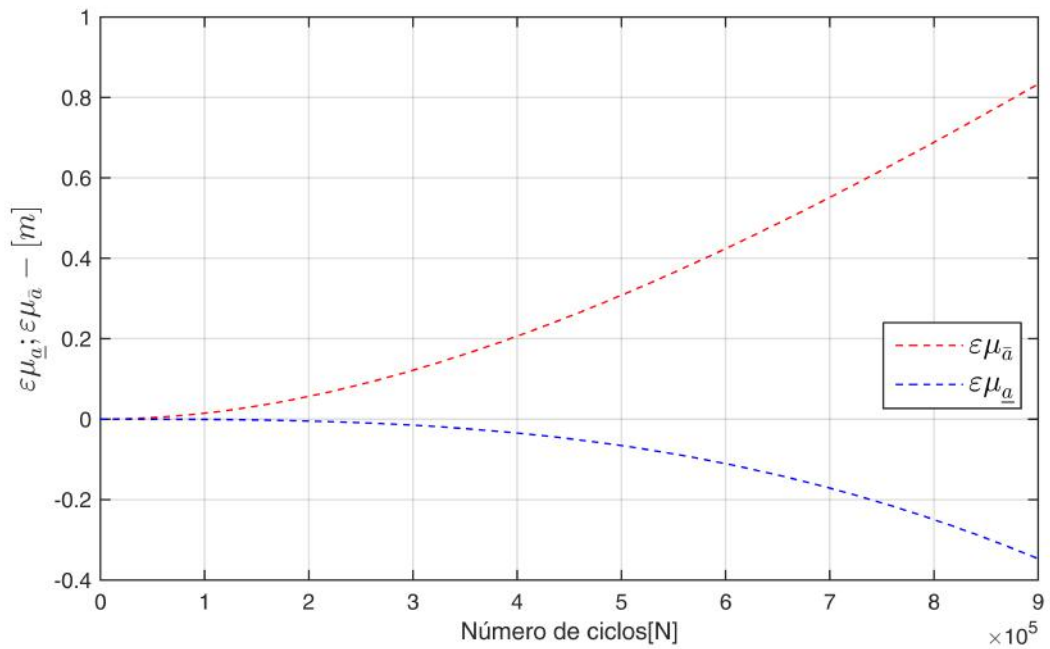
As figura 31, 32, 33 e 34 mostram o primeiro momento estatístico referente ao desvio relativo na randomização dos parâmetro “ $m$ ”, “ $k_C$ ”, “ $K_{th}$ ” e “ $a_0$ ”, respectivamente e com dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$ . O desvio relativo está relacionado com a dispersão das cotas superior e inferior em relação ao MC-RK4. A avaliação do desvio relativo é essencial na etapa de desempenho.

Figura 31 – Primeiro momento - desvio relativo em “ $m$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



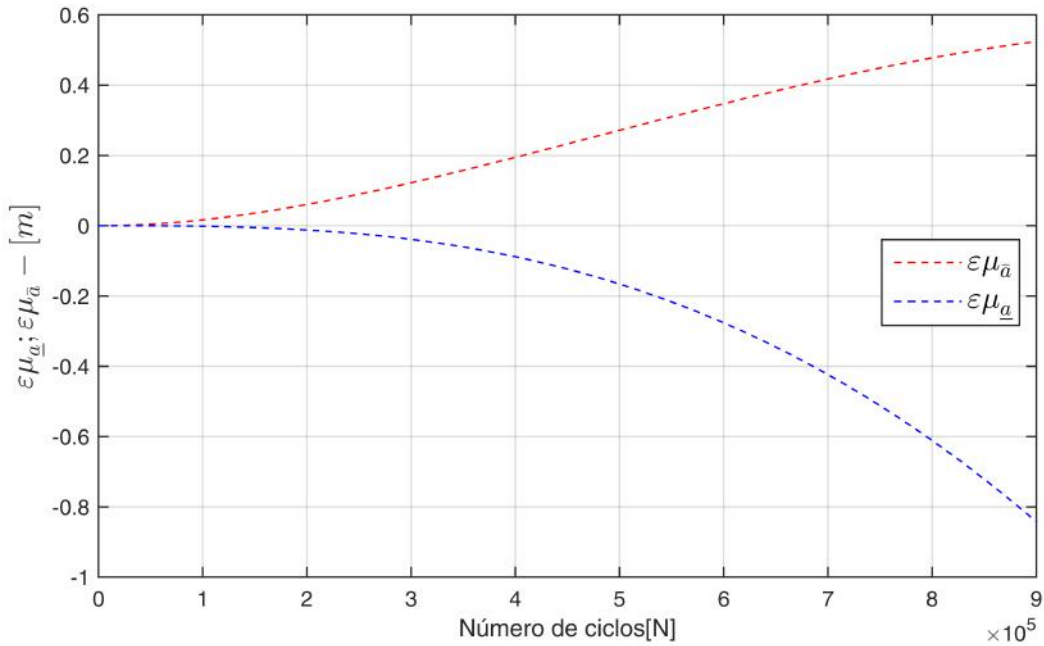
Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 32 – Primeiro momento - desvio relativo em “ $k_C$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



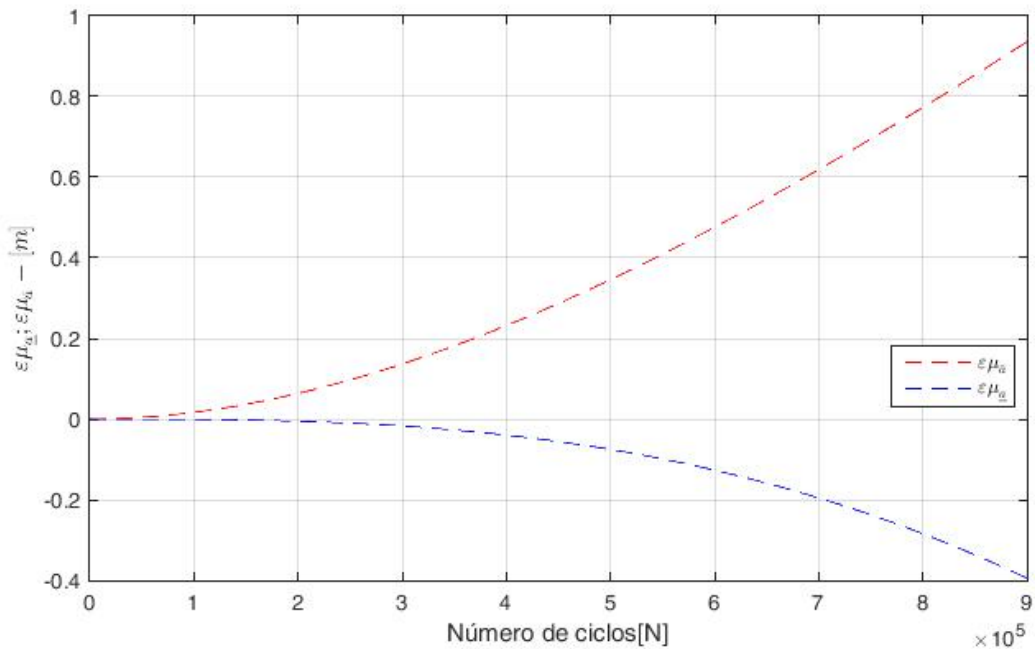
Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 33 – Primeiro momento - desvio relativo em “ $K_{th}$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

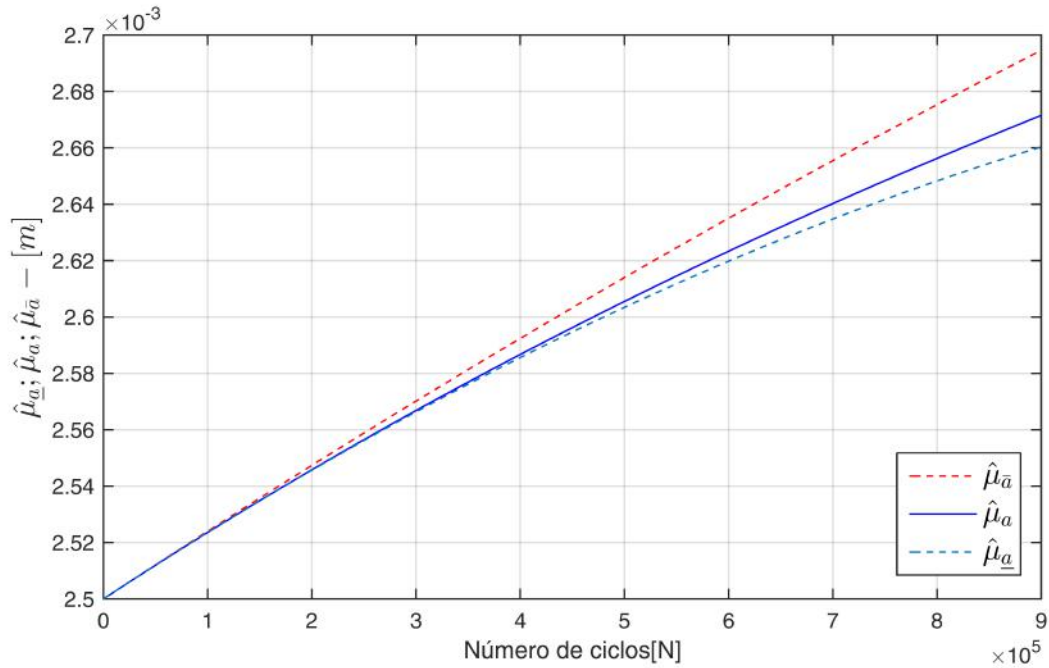
Figura 34 – Primeiro momento - desvio relativo em “ $a_0$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

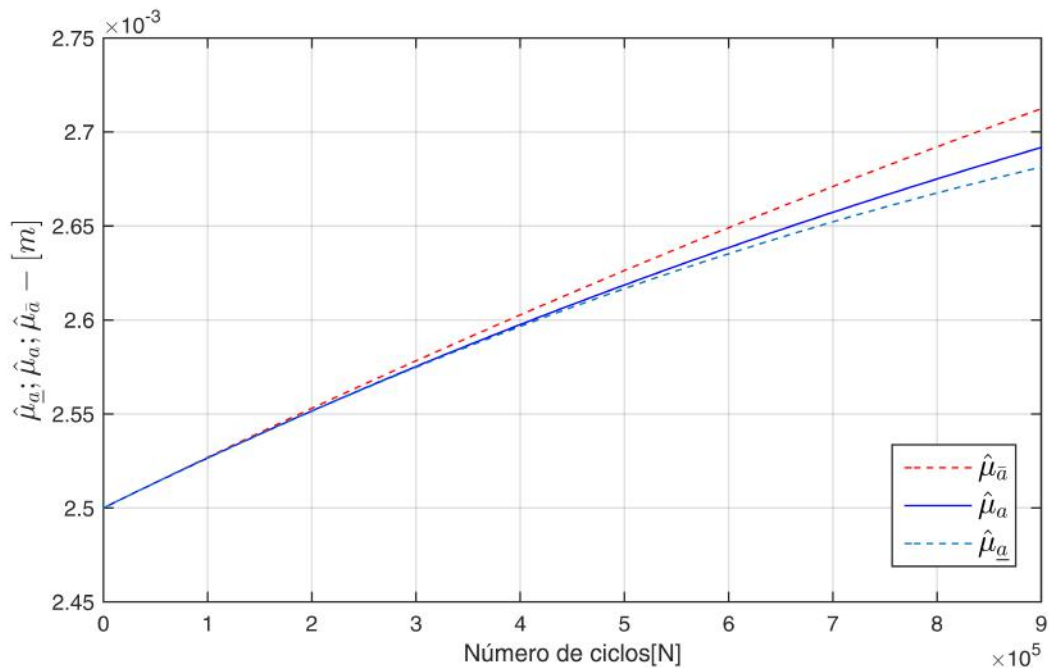
A figura 35 e 36 são os resultados da randomização para o parâmetro tamanho de trinca em função do número de ciclos relativo ao primeiro momento estatístico para as cotas do MC-FCB e MC-RK4. Neste caso considera-se uma dispersão de  $\delta = \frac{3}{10}$  com incerteza no parâmetro “ $C$ ” e “ $k_C$ ”. Entretanto mesmo alterando o valor de dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  para  $\delta = \frac{3}{10}$ , observa-se, nestas duas figuras, que o envelopamento se mantém regular.

Figura 35 – Primeiro momento - incerteza em “C” e dispersão  $\delta = 3/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

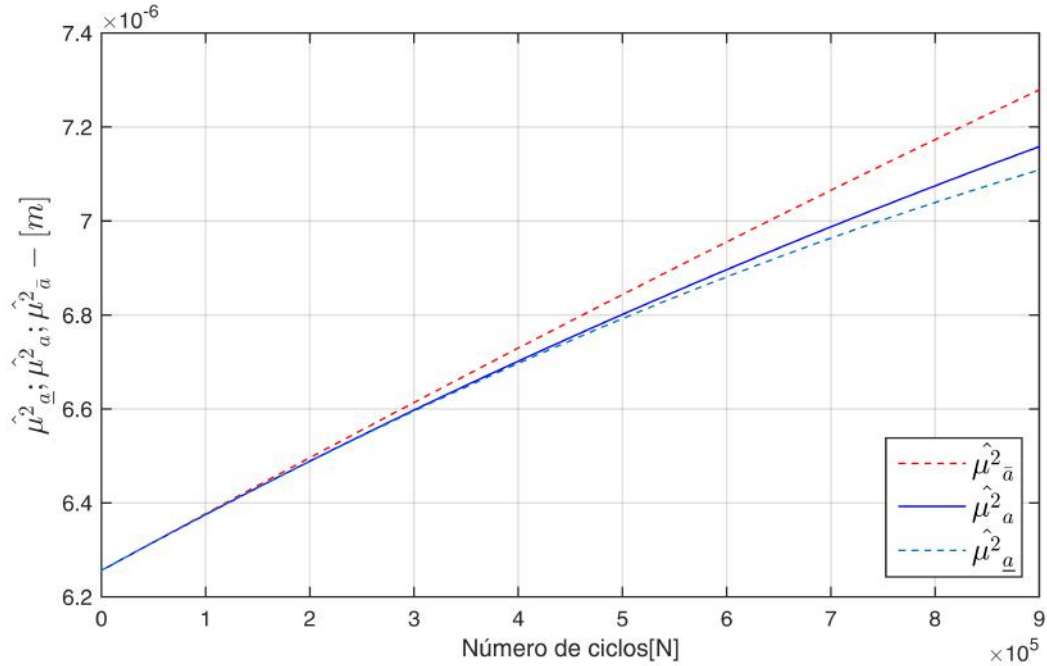
Figura 36 – Primeiro momento - desvio relativo em “C” e dispersão  $\delta = 1/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

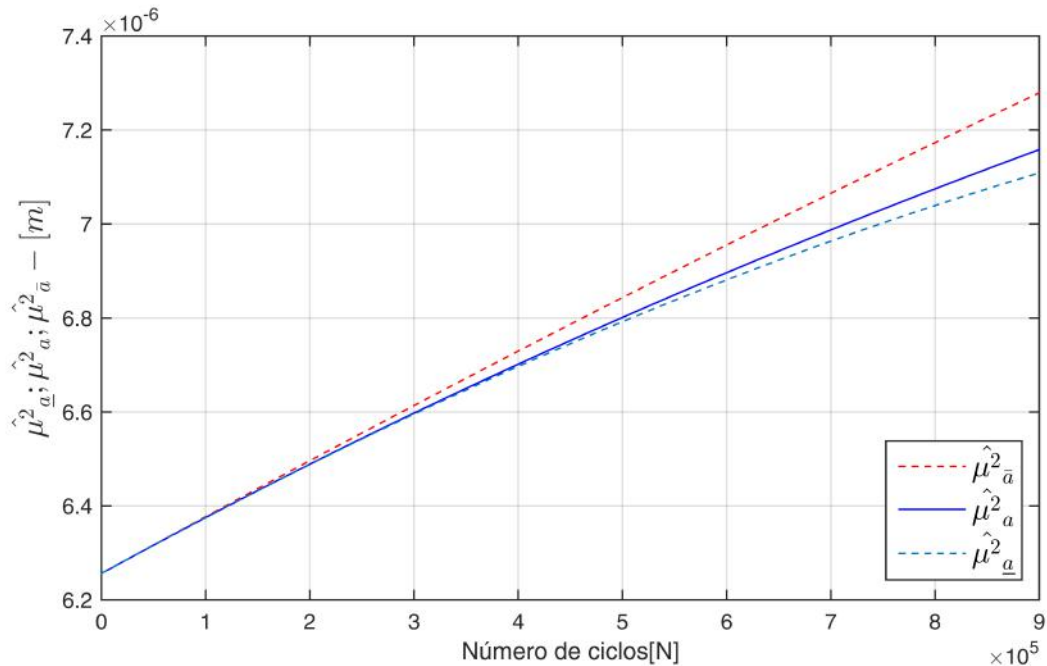
A figura 37 e 38 são os resultados da randomização para o parâmetro “tamanho de trinca” em função do número de ciclos e relativo ao segundo momento estatístico para as cotas do MC-FCB e MC-RK4. Neste caso considera-se uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  com incerteza no parâmetro “C” e “ $k_C$ ”.

Figura 37 – Primeiro momento - incerteza em “ $a_0$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

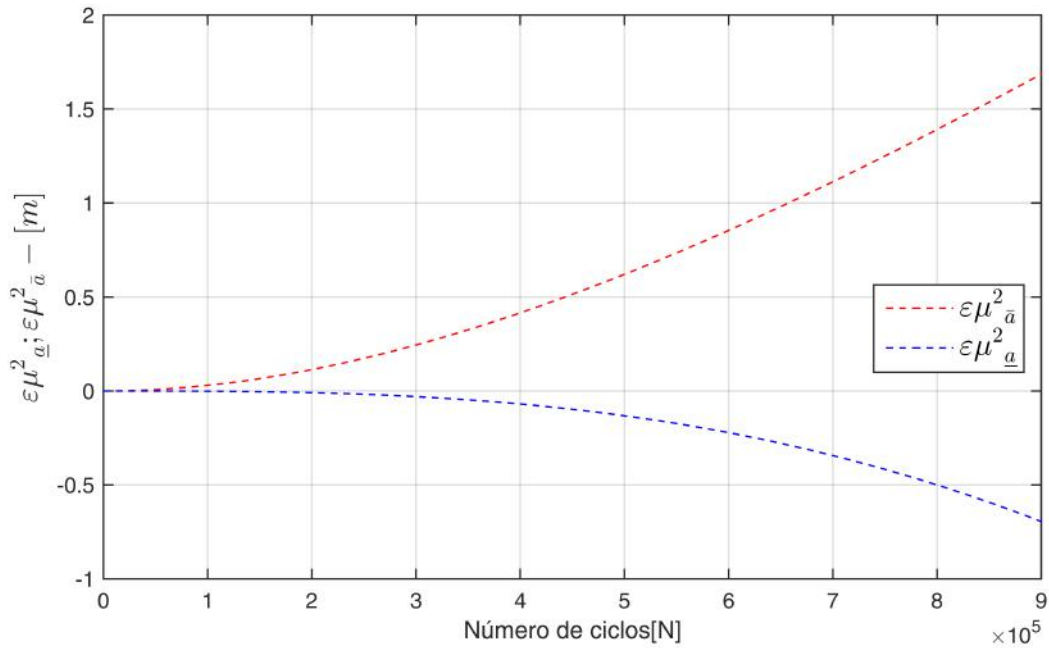
Figura 38 – Primeiro momento - desvio relativo em “C” e dispersão  $\delta = 1/10$



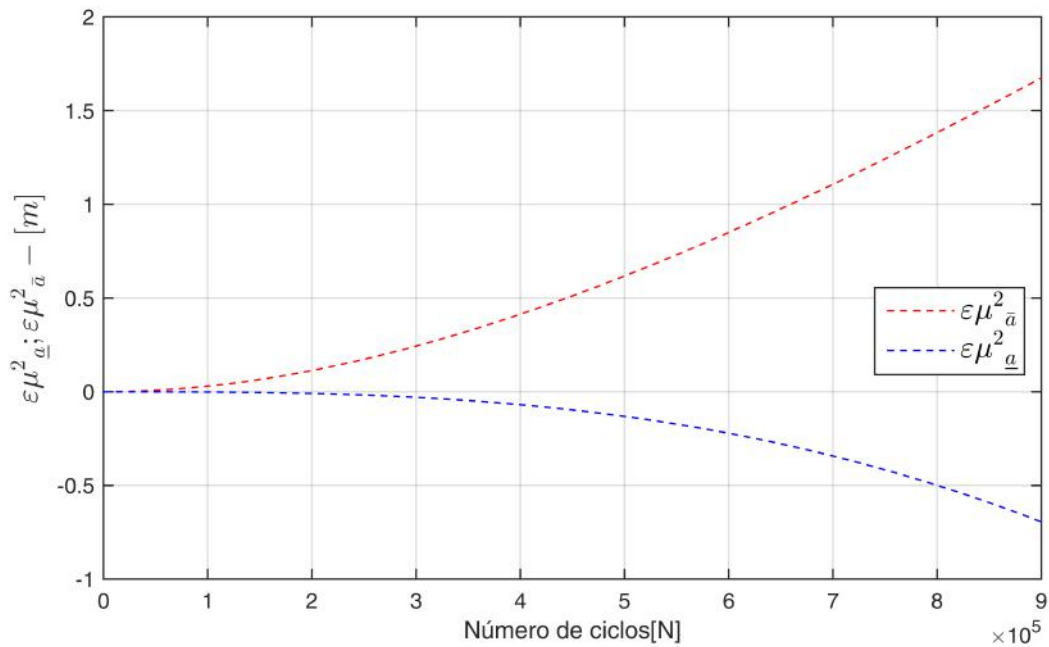
Fonte – Autoria própria (2020).

A figura 39 e 40 são os resultados da randomização para o desvio relativo em função do número de ciclos e relacionado ao segundo momento estatístico para as cotas do FCB e RK4. Neste caso considera-se uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  com incerteza no parâmetro “C” e “ $k_C$ ”.



Figura 39 – Segundo momento - incerteza em “C” e dispersão  $\delta = 1/10$ 

Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 40 – Segundo momento - desvio relativo em “k<sub>c</sub>” e dispersão  $\delta = 1/10$ 

Fonte – Autoria própria (2020).

A tabela 8 pertence ao exemplo de placa finita com trinca central e mostra todos os valores coletados, via implementação computacional, dos parâmetros randomizados “C”, “m”, “k<sub>C</sub>”, “K<sub>th</sub>” e “a<sub>0</sub>” para o primeiro momento estatístico, considerando a dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  e com  $a^* = 1, 1a_0$ . Esta tabela relaciona os parâmetros randomizados e o número de ciclos para as cotas inferior e superior,  $\underline{a}(N)$  e  $\bar{a}(N)$ , respectivamente. Os parâmetros de referência do

material e dimensional, para obtenção destes valores, estão dispostos na tabela 1. Nota-se que alguns pontos das cotas do MC-FCB violaram os limites da função, ou seja não satisfazendo a desigualdade em (2.8), sendo assim deve-se, neste caso, alterar coeficiente  $a^* = 1, 1a_0$  e substituindo-o por uma valor loga acima, por exemplo fazendo  $a^* = 1, 2a_0$ .

Tabela 8 – Resultado no primeiro momento,  $\delta = 1/10$  - placa finita e trinca central

$N(\text{ciclos})$		Parâmetro x $10^{-3}$				
		$C$	$m$	$K_C$	$K_{th}$	$a_0$
$1 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,524	2,525	2,524	2,534	2,524
	$a(N)$	2,524	2,525	2,524	2,533	2,524
	$\underline{a}(N)$	2,524	2,525	2,524	2,533	2,524
$2 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,548	2,550	2,548	2,566	2,548
	$a(N)$	2,546	2,548	2,546	2,565	2,546
	$\underline{a}(N)$	2,546	2,548	2,546	2,565	2,546
$3 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,571	2,575	2,571	2,597	2,571
	$a(N)$	2,567	2,570	2,568	2,594	2,568
	$\underline{a}(N)$	2,567	2,569	2,567	2,593	2,567
$4 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,593	2,598	2,594	2,627	2,594
	$a(N)$	2,588	2,591	2,588	2,622	2,588
	$\underline{a}(N)$	2,587	2,589	2,587	2,620	2,587
$5 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,615	2,621	2,616	2,655	2,616
	$a(N)$	2,607	2,610	2,608	2,648	2,607
	$\underline{a}(N)$	2,605	2,607	2,606	2,644	2,605
$6 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,636	2,643	2,637	2,682	2,638
	$a(N)$	2,625	2,628	2,626	2,673	2,625
	$\underline{a}(N)$	2,622	2,623	2,623	2,666	2,622
$7 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,657	2,665	2,658	2,707	2,659
	$a(N)$	2,642	2,646	2,643	2,696	2,643
	$\underline{a}(N)$	2,638	2,637	2,639	2,686	2,637
$8 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,677	2,685	2,678	2,731	2,679
	$a(N)$	2,659	2,662	2,660	2,718	2,659
	$\underline{a}(N)$	2,652	2,649	2,653	2,703	2,651
$9 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,697	2,706	2,698	2,754	2,699
	$a(N)$	2,675	2,677	2,676	2,739	2,675
	$\underline{a}(N)$	2,665	2,660	2,666	2,718	2,664

Fonte – Autoria própria (2020).

A tabela 9 mostra todos os valores dos parâmetros randomizados “ $C$ ”, “ $m$ ”, “ $k_C$ ”, “ $K_{th}$ ” e “ $a_0$ ” para o primeiro momento estatístico, dispersão de  $\delta = \frac{3}{10}$  e com  $a^* = 1, 1a_0$ .

Tabela 9 – Resultado no primeiro momento,  $\delta = 3/10$  - placa finita e trinca central

$N(\text{ciclos})$		Parâmetro x $10^{-3}$				
		$C$	$m$	$K_C$	$K_{th}$	$a_0$
$1 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,524	2,543	2,527	2,597	2,541
	$a(N)$	2,524	2,539	2,526	2,597	2,540
	$\underline{a}(N)$	2,524	2,538	2,526	2,597	2,540
$2 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,548	2,583	2,553	2,689	2,581
	$a(N)$	2,546	2,570	2,551	2,687	2,577
	$\underline{a}(N)$	2,546	2,564	2,551	2,686	2,577
$3 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,571	2,620	2,578	2,774	2,621
	$a(N)$	2,567	2,597	2,575	2,772	2,612
	$\underline{a}(N)$	2,567	2,578	2,574	2,767	2,611
$4 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,593	2,654	2,602	2,852	2,660
	$a(N)$	2,587	2,619	2,597	2,851	2,646
	$\underline{a}(N)$	2,586	2,579	2,596	2,840	2,643
$5 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,615	2,686	2,626	2,923	2,699
	$a(N)$	2,606	2,639	2,618	2,925	2,678
	$\underline{a}(N)$	2,604	2,568	2,616	2,905	2,671
$6 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,636	2,715	2,649	2,988	2,737
	$a(N)$	2,624	2,657	2,638	2,995	2,708
	$\underline{a}(N)$	2,621	2,544	2,635	2,962	2,698
$7 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,656	2,740	2,670	3,046	2,774
	$a(N)$	2,641	2,673	2,657	3,061	2,737
	$\underline{a}(N)$	2,636	2,508	2,652	3,011	2,721
$8 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,676	2,763	2,692	3,097	2,811
	$a(N)$	2,657	2,687	2,674	3,124	2,765
	$\underline{a}(N)$	2,649	2,460	2,667	3,051	2,742
$9 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,696	2,783	2,712	3,142	2,848
	$a(N)$	2,673	2,700	2,691	3,183	2,792
	$\underline{a}(N)$	2,661	2,400	2,681	3,084	2,760

Fonte – Autoria própria (2020).

Conforme tabela 9, as cotas do FCB apresentaram valores numéricos que extrapolaram o sistema para o parâmetro “ $K_{th}$ ”. Neste caso deve-se ajustar o coeficiente de “ $a^*$ ” em  $a^* = 1, 2a_0$  afim de obter uma curva que melhor se ajusta a função, conforme mostrado e explicado para o mesmo caso da placa infinita com trinca central.

A tabela 10 mostra os valores dos parâmetros para uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  do tamanho de trinca no segundo momento estatístico.

Tabela 10 – Resultado no segundo momento,  $\delta = 1/10$  - placa finita e trinca central

$N(\text{ciclos})$		Parâmetro x $10^{-6}$				
		$C$	$m$	$K_C$	$K_{th}$	$a_0$
$1 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,377	6,384	6,378	6,427	6,378
	$a(N)$	6,375	6,382	6,376	6,425	6,376
	$\underline{a}(N)$	6,375	6,381	6,376	6,425	6,376
$2 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,496	6,511	6,498	6,596	6,500
	$a(N)$	6,489	6,501	6,491	6,588	6,491
	$\underline{a}(N)$	6,488	6,499	6,490	6,587	6,491
$3 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,614	6,636	6,617	6,761	6,620
	$a(N)$	6,598	6,613	6,601	6,745	6,601
	$\underline{a}(N)$	6,596	6,609	6,599	6,740	6,599
$4 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,731	6,758	6,733	6,921	6,738
	$a(N)$	6,703	6,720	6,706	6,895	6,707
	$\underline{a}(N)$	6,698	6,710	6,701	6,884	6,701
$5 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,845	6,878	6,848	7,076	6,856
	$a(N)$	6,802	6,821	6,806	7,039	6,807
	$\underline{a}(N)$	6,793	6,803	6,797	7,017	6,797
$6 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,957	6,995	6,961	7,226	6,971
	$a(N)$	6,898	6,917	6,902	7,177	6,904
	$\underline{a}(N)$	6,882	6,887	6,887	7,139	6,886
$7 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	7,067	7,111	7,072	7,370	7,085
	$a(N)$	6,989	7,008	6,994	7,309	6,996
	$\underline{a}(N)$	6,965	6,961	6,971	7,249	6,968
$8 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	7,176	7,223	7,180	7,506	7,198
	$a(N)$	7,077	7,094	7,083	7,435	7,084
	$\underline{a}(N)$	7,041	7,026	7,047	7,348	7,043
$9 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	7,282	7,333	7,287	7,636	7,309
	$a(N)$	7,160	7,177	7,167	7,556	7,169
	$\underline{a}(N)$	7,110	7,082	7,118	7,433	7,111

Fonte – Autoria própria (2020).

A tabela 11 mostra os valores dos parâmetros para uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  do desvio relativo no primeiro momento estatístico.

Tabela 11 – Resultado primeiro momento,  $\delta = 1/10$  - placa finita e trinca central

$N(\text{ciclos})$		Parâmetros x $10^{-3}$				
		$C$	$m$	$K_C$	$K_{th}$	$a_0$
$1 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,015	0,021	0,015	0,016	0,016
	$\underline{a}(N)$	0,015	0,021	0,015	0,016	0,016
$2 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,057	0,079	0,056	0,057	0,063
	$\underline{a}(N)$	0,057	0,079	0,056	0,057	0,063
$3 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,123	0,168	0,121	0,117	0,136
	$\underline{a}(N)$	0,123	0,168	0,121	0,117	0,136
$4 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,208	0,281	0,205	0,187	0,230
	$\underline{a}(N)$	0,208	0,281	0,205	0,187	0,230
$5 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,311	0,414	0,307	0,263	0,344
	$\underline{a}(N)$	0,311	0,414	0,307	0,263	0,344
$6 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,428	0,562	0,422	0,340	0,473
	$\underline{a}(N)$	0,428	0,562	0,422	0,340	0,473
$7 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,557	0,722	0,549	0,414	0,615
	$\underline{a}(N)$	0,557	0,722	0,549	0,414	0,615
$8 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,696	0,890	0,686	0,479	0,769
	$\underline{a}(N)$	0,696	0,890	0,686	0,479	0,769
$9 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,843	1,064	0,830	0,535	0,931
	$\underline{a}(N)$	0,843	1,064	0,830	0,535	0,931

Fonte – Autoria própria (2020).

A razão do tempo computacional, obtido no MC-RK4 em relação às cotas do MC-FCB, são calculadas pela equação (4.65) apresentados na tabela 12. Estes valores são da placa infinita com trinca central no primeiro momento estatístico e dispersão  $\delta = \frac{1}{10}$  a 900000 ciclos e simulando  $N_s = 20000$  amostras para cada parâmetro randômico de Collipriest.

Tabela 12 – Tempos computacionais - placa finita com trinca central

Parâmetro	Tempos computacionais (s)		
	FCB	RK4	$\rho$
$C$	7,1	798,3	11143
$m$	8,9	814,9	9056
$K_C$	8,9	841,6	9356
$K_{th}$	8,6	804,7	9257
$a_0$	46,4	829,9	1688

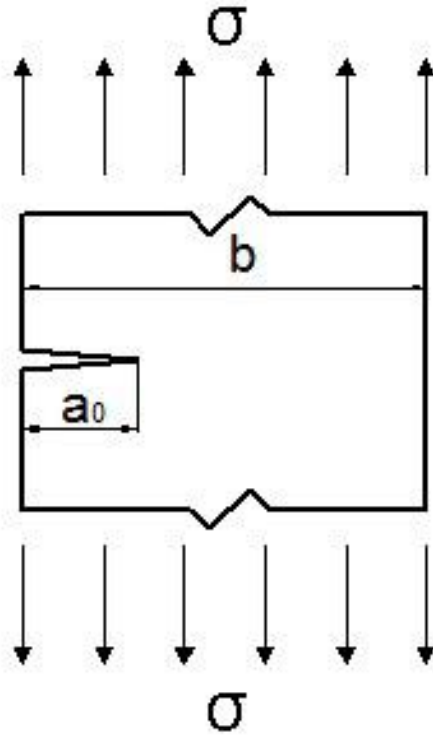
Fonte – Autoria própria (2020).

Analisando os tempos computacionais nota-se uma performance muito melhor das metodologia MC-FCB em relação à metodologia RK4. A eficiência do método RK4 chega a ser numericamente maior quando comparado com a metodologia RK4-MC.

#### 4.4 PLACA DE LARGURA FINITA E COM TRINCA NA BORDA

A figura 41 é uma placa, com largura finita, e uma trinca na borda, com tamanho inicial  $a_0$ , solicitada sob um carregamento de tração.

Figura 41 – Placa finita com trinca lateral

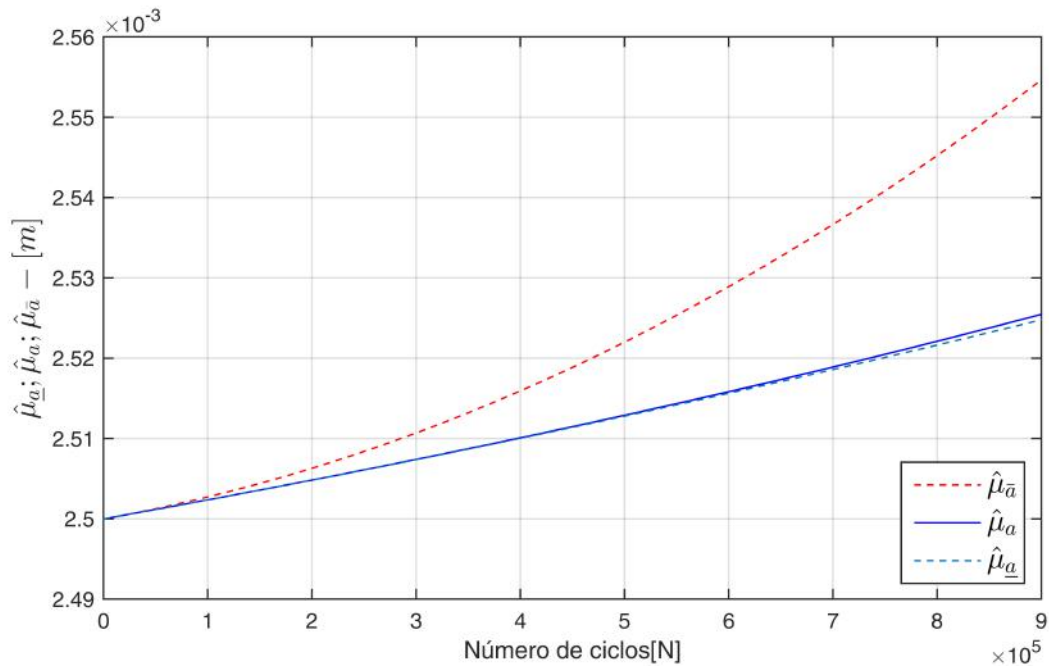


Fonte – Autoria própria (2020).

A função de correção do fator de intensidade de tensão para o caso de Placa com largura infinita e trinca central, representada pela figura 41, é dada por Bannantine, conforme equação (4.68).

$$f(a) = \left\{ \begin{array}{l} 1,22 - 0,231 \left(\frac{a}{b}\right) + 10,55 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \\ -21,72 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30,39 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \end{array} \right\}, \forall a \in \mathbb{R}^+. \quad (4.68)$$

Na figura 42 apresenta-se o gráfico da estimativa para o valor esperado e suas cotas obtidas via MC-RK4 e MC-FCB, respectivamente. Neste caso considera-se uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  com incerteza no parâmetro “C”, conforme definido na equação (3.57).

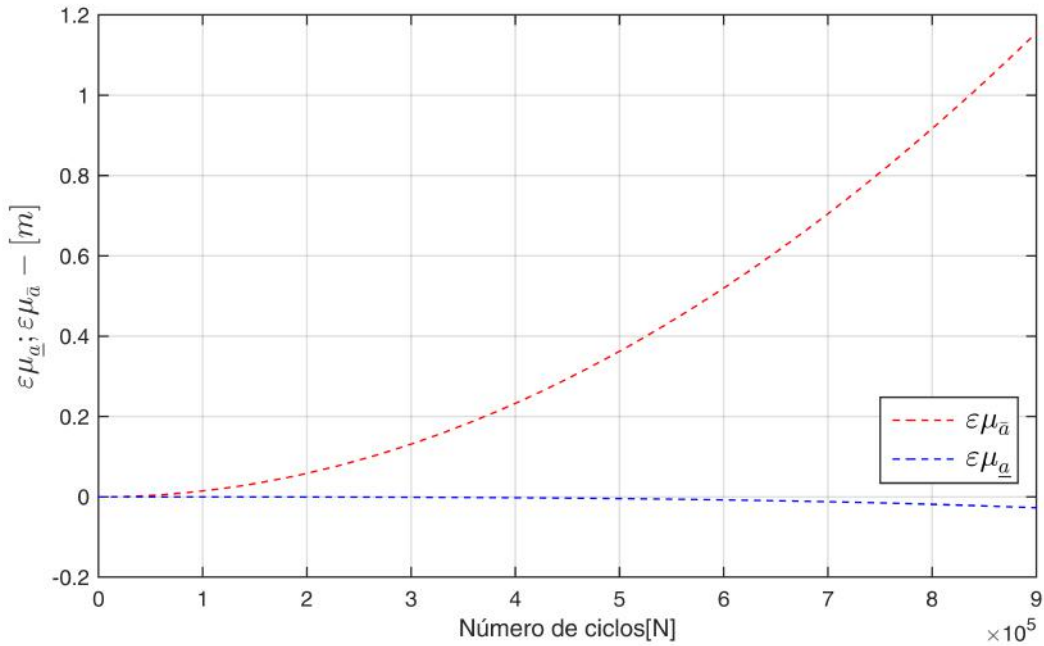
Figura 42 – Primeiro momento - incerteza em “C” e dispersão  $\delta = 1/10$ 

Fonte – Autoria própria (2020).

É possível observar pela figura 42 que as cotas superior e inferior não apresentam altos desvios numéricos quando comparada com o MC-RK4. Desta forma nestes exemplos aplicados ao modelo de Collipriest, as funções cotas superior e inferior envelopam, de forma mais estreita, a curva de propagação da trinca, isto é devido à característica da lei de evolução de Collipriest.

A análise do desempenho da metodologia para o modelo de Collipriest é feito em relação ao desvio relativo das cotas em relação ao MC-RK4. A figura abaixo apresentam o desvio relativo das cotas superior e inferior em relação ao MC-RK4. Considerando uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  com incerteza no parâmetro “C”.

Figura 43 – Primeiro momento - desvio relativo em “C” e dispersão  $\delta = 1/10$



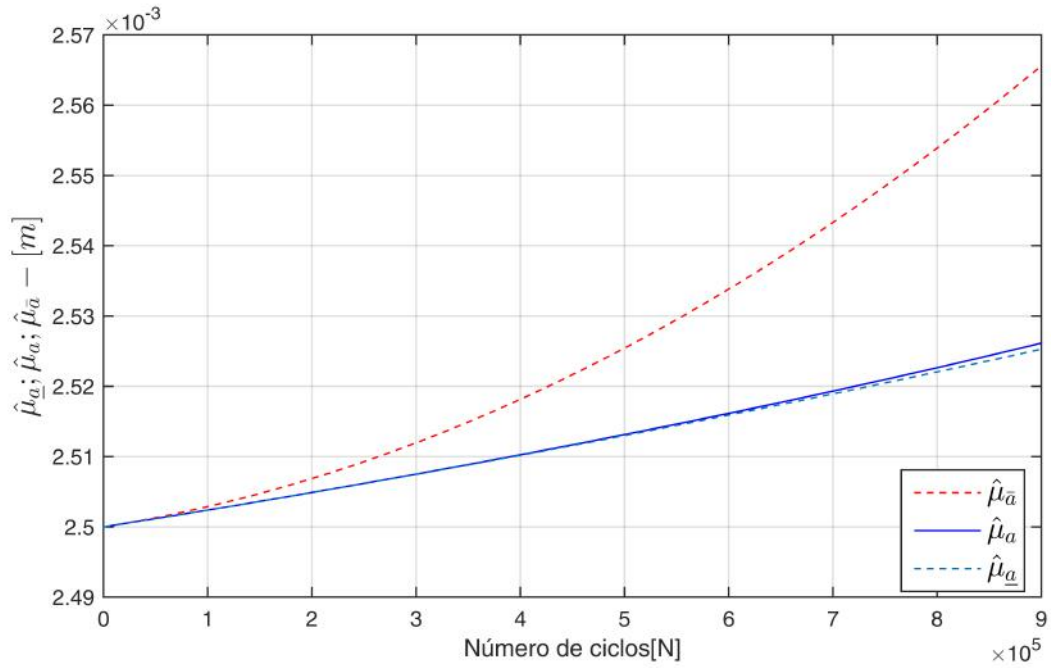
Fonte – Autoria própria (2020).

O cálculo do desvio relativo baseia-se na equação (4.65) o qual relaciona as estimativas do primeiro momento estatístico. Conforme a figura 43 tem-se um valor de desvio próximo a 0,8 para cota superior e próximo a -0,2 para a cota inferior.

As figuras 44, 45, 46 e 47 mostram o primeiro momento estatístico tamanho de trinca referente à randomização dos parâmetro “ $m$ ”, “ $k_C$ ”, “ $K_{th}$ ” e “ $a_0$ ”, respectivamente e com dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$ . Todas possuem um comportamento similar quanto ao envelopar a curva de propagação de trinca

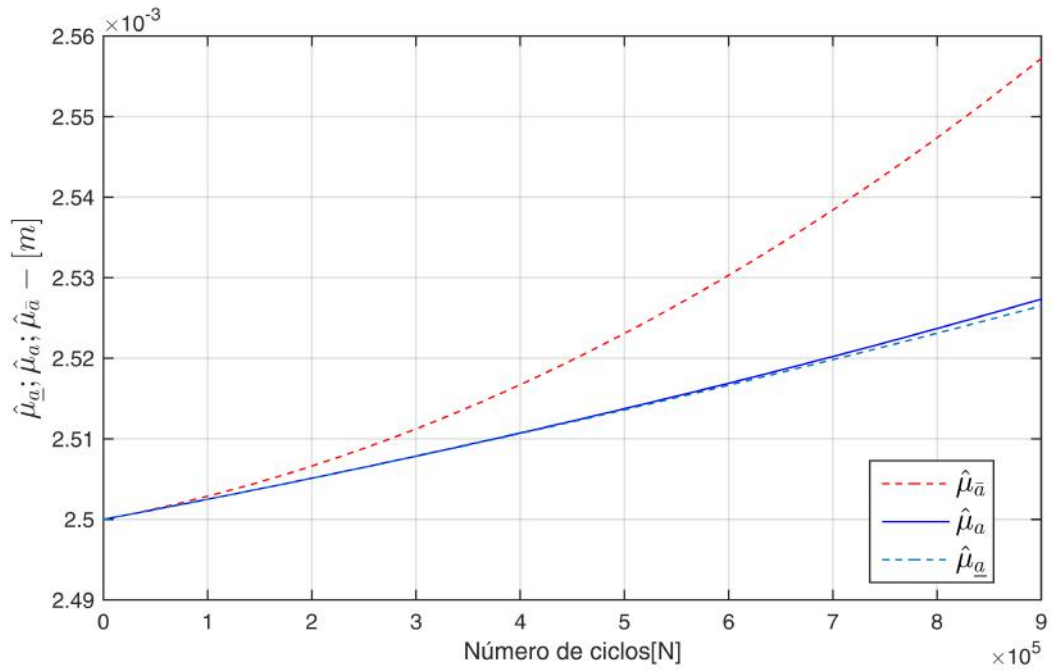


Figura 44 – Primeiro momento - incerteza em “ $m$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



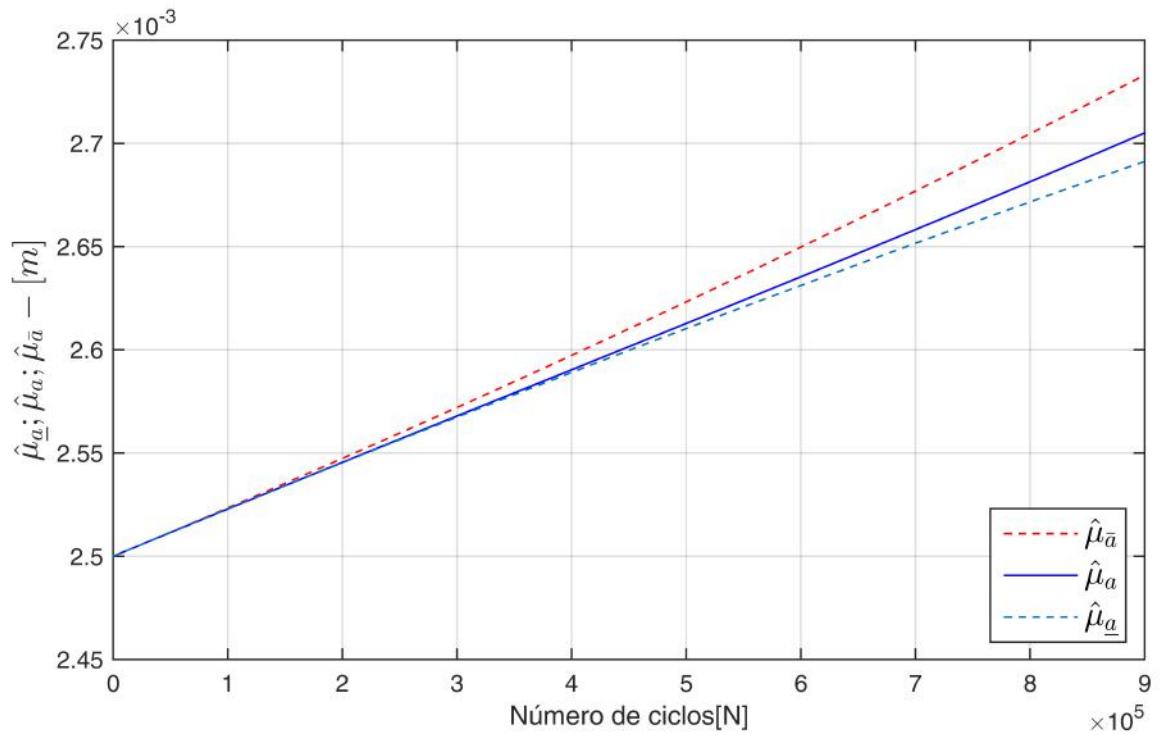
Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 45 – Primeiro momento - incerteza em “ $k_C$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



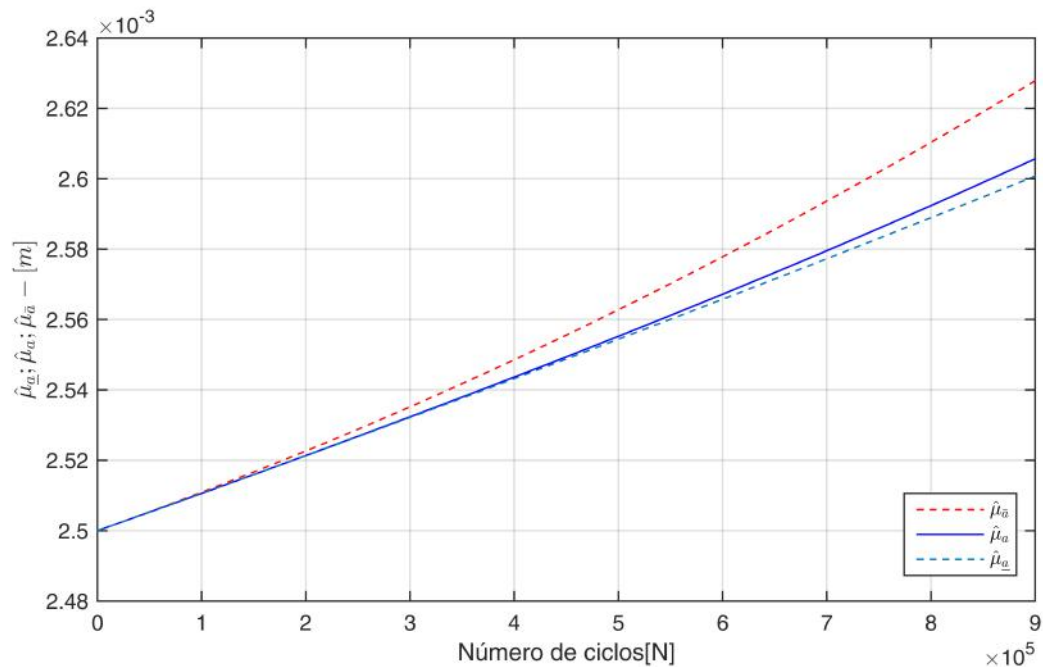
Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 46 – Primeiro momento - incerteza em “ $K_{th}$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 47 – Primeiro momento - incerteza em “ $a_0$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$

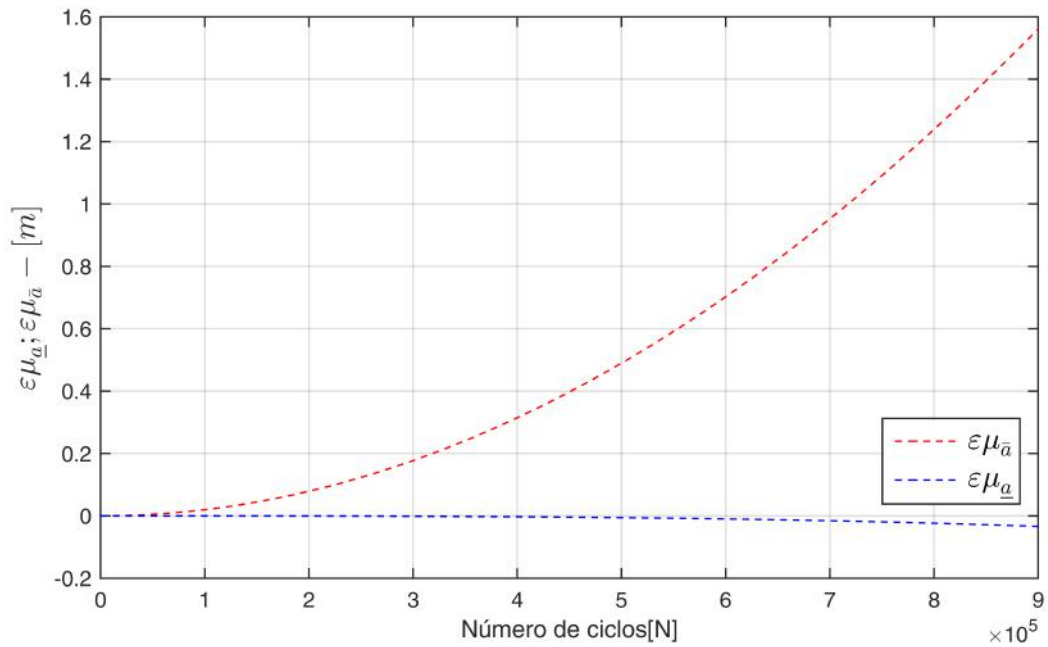


Fonte – Autoria própria (2020).

As figura 48, 49, 50 e 51 mostram o primeiro momento estatístico referente ao desvio relativo na randomização dos parâmetro “ $m$ ”, “ $k_C$ ”, “ $K_{th}$ ” e “ $a_0$ ”, respectivamente e com dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$ . O desvio relativo está relacionado com a dispersão das cotas superior

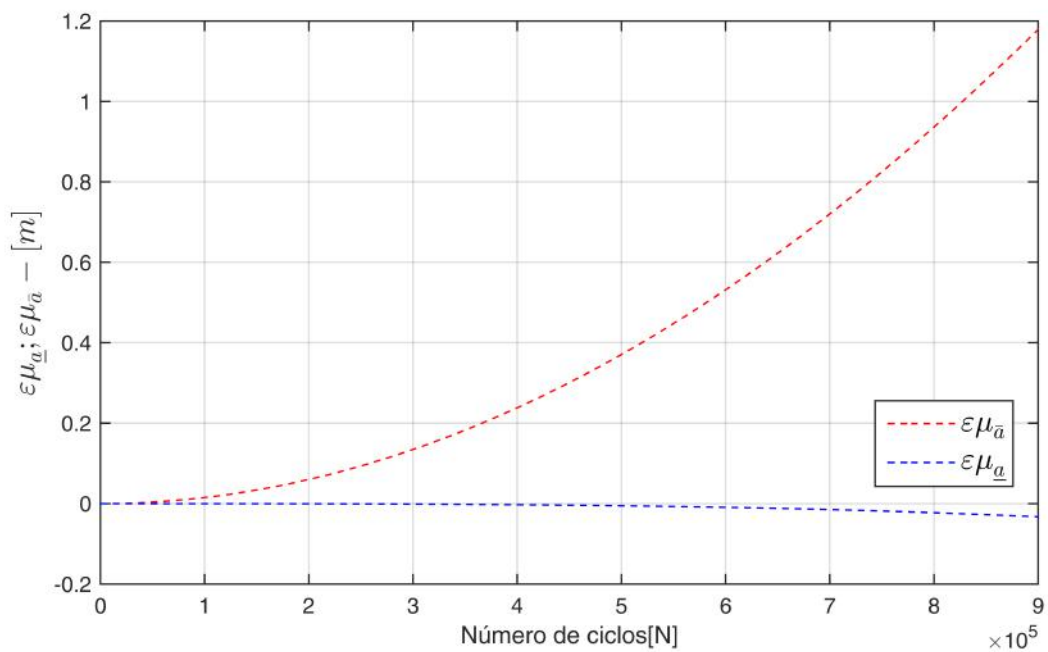
e inferior em relação ao MC-RK4. A avaliação do desvio relativo é essencial na etapa de desempenho

Figura 48 – Primeiro momento - desvio relativo em “ $m$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



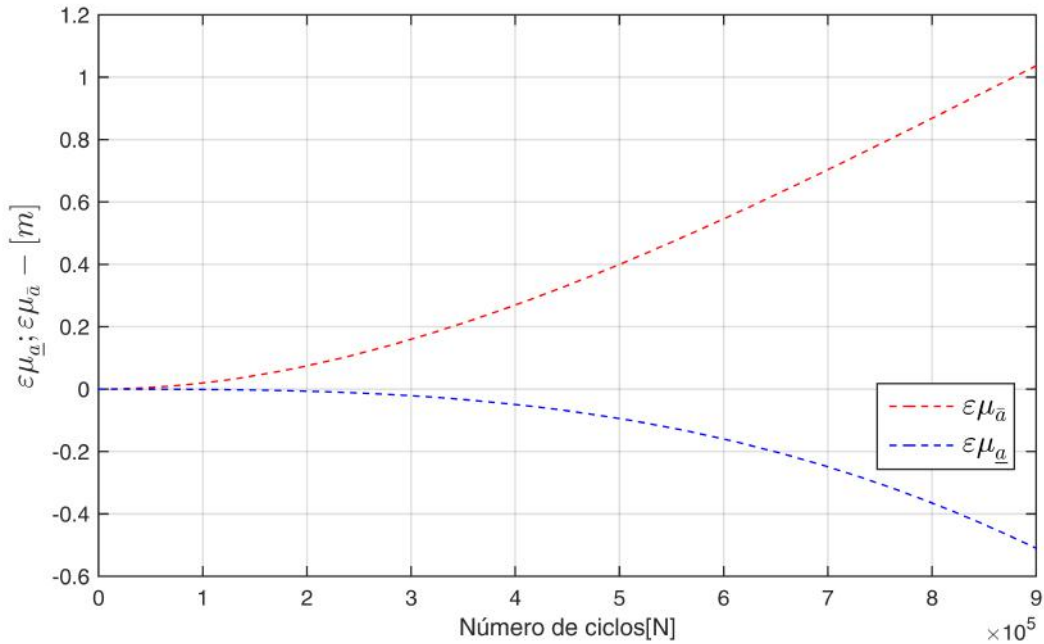
Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 49 – Primeiro momento - desvio relativo em “ $k_C$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



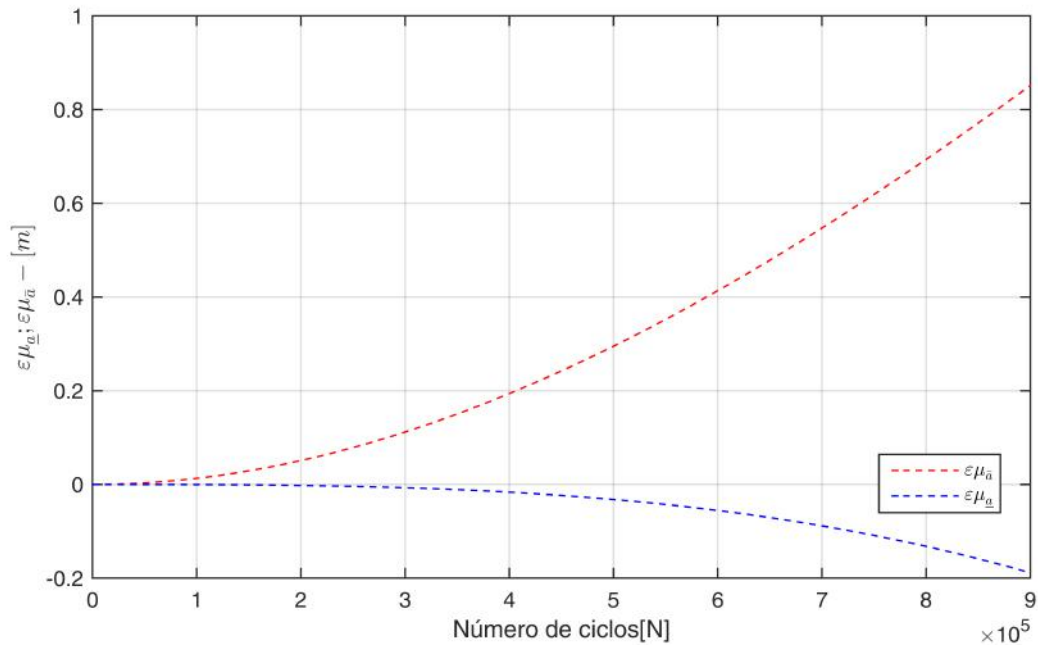
Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 50 – Primeiro momento - desvio relativo em “ $K_{th}$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$



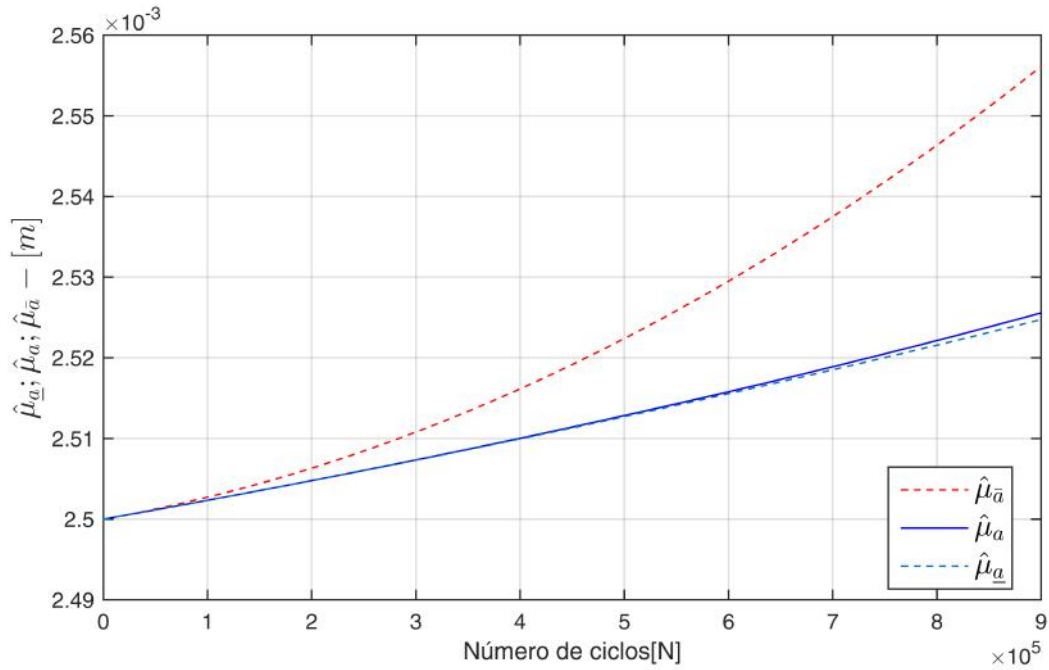
Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 51 – Primeiro momento - desvio relativo em “ $a_0$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$

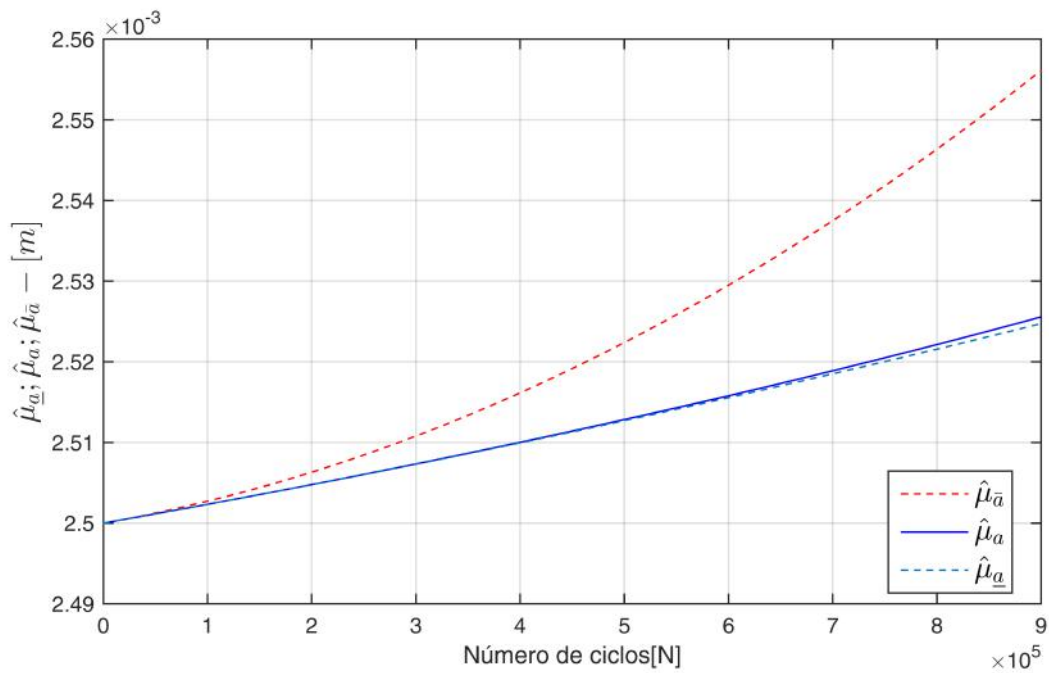


Fonte – Autoria própria (2020).

A figura 52 e 53 são os resultados da randomização para o parâmetro tamanho de trinca em função do número de ciclos relativo ao primeiro momento estatístico para as cotas do MC-FCB e MC-RK4. Neste caso considera-se uma dispersão de  $\delta = \frac{3}{10}$  com incerteza no parâmetro “ $C$ ” e “ $k_C$ ”. Entretanto mesmo alterando o valor de dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  para  $\delta = \frac{3}{10}$ , observa-se, nestas duas figuras, que o envelopamento se mantém regular.

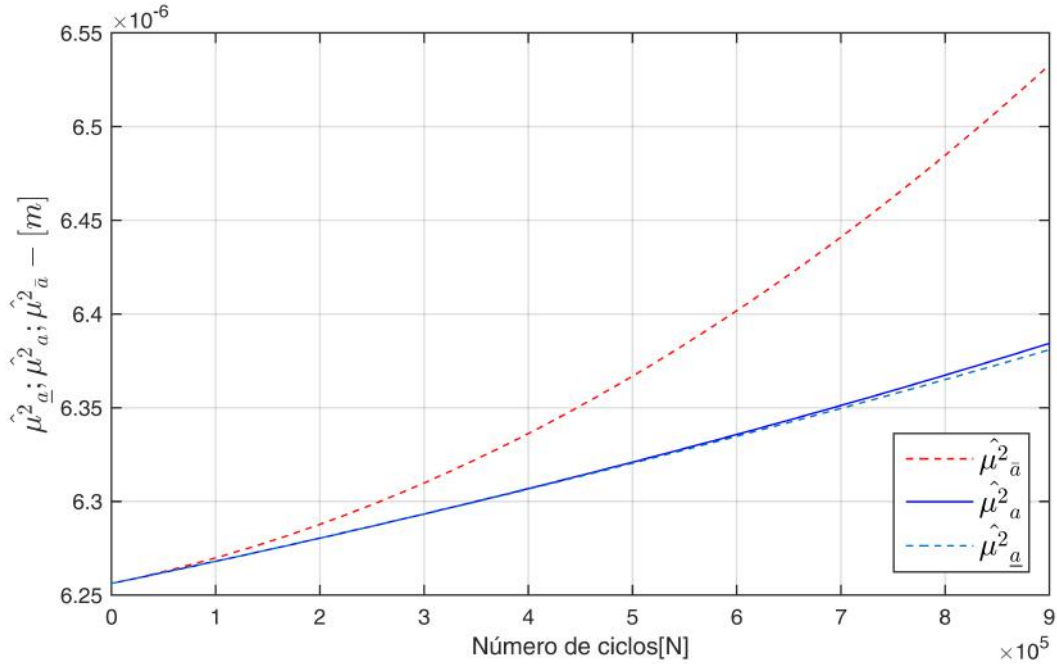
Figura 52 – Primeiro momento - incerteza em “C” e dispersão  $\delta = 3/10$ 

Fonte – Autoria própria (2020).

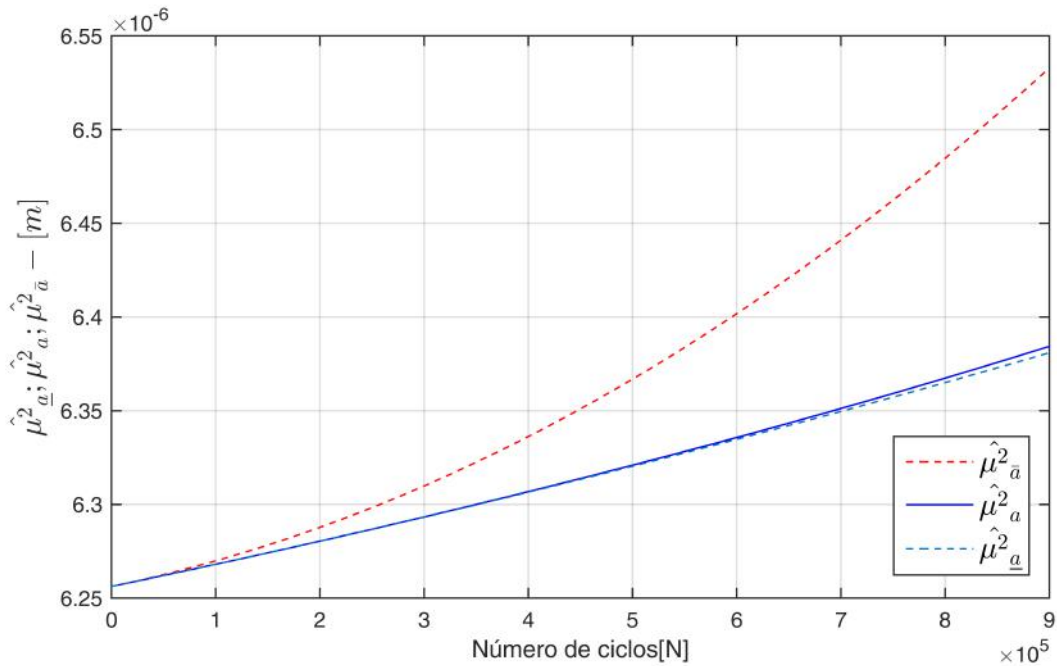
Figura 53 – Primeiro momento - desvio relativo em “C” e dispersão  $\delta = 3/10$ 

Fonte – Autoria própria (2020).

A figura 54 e 57 são os resultados da randomização para o parâmetro tamanho de trinca em função do número de ciclos e relativo ao segundo momento estatístico para as cotas do MC-FCB e MC-RK4. Neste caso considera-se uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  com incerteza no parâmetro “C” e “ $k_C$ ”.

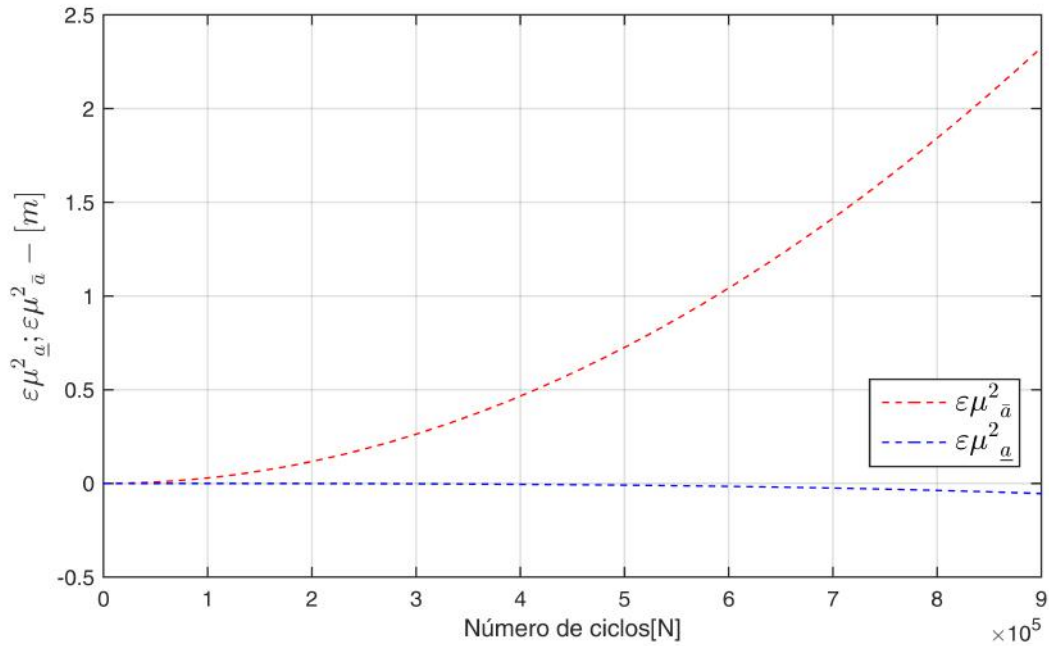
Figura 54 – Primeiro momento - incerteza em “ $a_0$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$ 

Fonte – Autoria própria (2020).

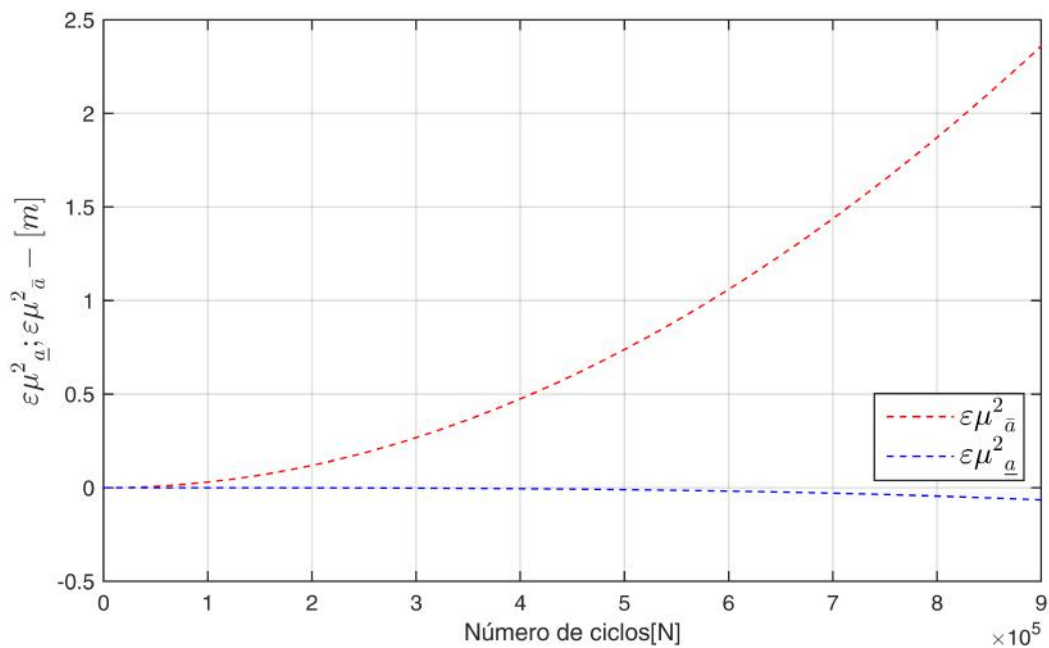
Figura 55 – Primeiro momento - desvio relativo em “C” e dispersão  $\delta = 1/10$ 

Fonte – Autoria própria (2020).

A figura 56 e 57 são os resultados da randomização para o desvio relativo em função do número de ciclos e relacionado ao segundo momento estatístico para as cotas do MC-FCB e MC-RK4. Neste caso considera-se uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  com incerteza no parâmetro “C” e “ $k_C$ ”.

Figura 56 – Segundo momento - incerteza em “C” e dispersão  $\delta = 1/10$ 

Fonte – Autoria própria (2020).

Figura 57 – Segundo momento - desvio relativo em “ $k_c$ ” e dispersão  $\delta = 1/10$ 

Fonte – Autoria própria (2020).

A tabela 13 pertence ao exemplo de placa finita com trinca na borda e mostra todos os valores coletados, via implementação computacional, dos parâmetros randomizados “C”, “m”, “ $k_c$ ”, “ $K_{th}$ ” e “ $a_0$ ” para o primeiro momento estatístico, considerando a dispersão de 1/10 e com  $a^* = 1, 1a_0$ . Esta tabela relaciona os parâmetros randomizados e o número de ciclos para as cotas inferior e superior,  $\underline{a}(N)$  e  $\bar{a}(N)$ , respectivamente. Os parâmetros de referência do material e dimensional, para obtenção destes valores, estão dispostos na tabela 1. Nota-se que alguns pontos

das cotas do MC-FCB violaram os limites da função, ou seja não satisfazendo a desigualdade em (2.8), sendo assim deve-se, neste caso, alterar coeficiente  $a^* = 1,1a_0$  e substituindo-o por uma valor loga acima, por exemplo fazendo  $a^* = 1,2a_0$ .

Tabela 13 – Resultado no primeiro momento,  $\delta = 1/10$  - placa finita e trinca na borda

$N(\text{ciclos})$		Parâmetro x $10^{-3}$				
		$C$	$m$	$K_c$	$K_{th}$	$a_0$
$1 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,503	2,503	2,503	2,523	2,511
	$a(N)$	2,502	2,502	2,502	2,522	2,511
	$\underline{a}(N)$	2,502	2,502	2,502	2,522	2,511
$2 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,506	2,507	2,507	2,546	2,523
	$a(N)$	2,505	2,505	2,505	2,544	2,521
	$\underline{a}(N)$	2,505	2,505	2,505	2,544	2,521
$3 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,511	2,512	2,511	2,570	2,535
	$a(N)$	2,507	2,508	2,508	2,566	2,532
	$\underline{a}(N)$	2,507	2,507	2,508	2,566	2,532
$4 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,516	2,518	2,517	2,595	2,548
	$a(N)$	2,510	2,510	2,511	2,588	2,544
	$\underline{a}(N)$	2,510	2,510	2,511	2,587	2,543
$5 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,522	2,525	2,523	2,620	2,563
	$a(N)$	2,513	2,513	2,514	2,610	2,555
	$\underline{a}(N)$	2,513	2,513	2,514	2,608	2,555
$6 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,529	2,534	2,530	2,646	2,578
	$a(N)$	2,516	2,516	2,517	2,632	2,567
	$\underline{a}(N)$	2,516	2,516	2,517	2,628	2,566
$7 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,536	2,543	2,538	2,673	2,593
	$a(N)$	2,519	2,519	2,520	2,654	2,580
	$\underline{a}(N)$	2,519	2,519	2,520	2,647	2,578
$8 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,545	2,553	2,547	2,700	2,610
	$a(N)$	2,522	2,523	2,524	2,676	2,593
	$\underline{a}(N)$	2,522	2,522	2,523	2,667	2,589
$9 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,554	2,565	2,557	2,728	2,628
	$a(N)$	2,525	2,526	2,527	2,699	2,606
	$\underline{a}(N)$	2,525	2,525	2,526	2,686	2,601

Fonte – Autoria própria (2020).

A tabela 14 mostra todos os valores dos parâmetros randomizados “ $C$ ”, “ $m$ ”, “ $k_c$ ”, “ $K_{th}$ ” e “ $a_0$ ” para o primeiro momento estatístico, dispersão de  $\delta = \frac{3}{10}$  e com  $a^* = 1,1a_0$ .



Tabela 14 – Resultado no primeiro momento,  $\delta = 1/10$  - placa finita e trinca na borda

$N(\text{ciclos})$		Parâmetro x $10^{-3}$				
		$C$	$m$	$K_c$	$K_{th}$	$a_0$
$1 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,503	2,505	2,504	2,584	2,539
	$a(N)$	2,502	2,503	2,504	2,584	2,538
	$\underline{a}(N)$	2,502	2,503	2,504	2,583	2,538
$2 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,506	2,515	2,510	2,665	2,578
	$a(N)$	2,505	2,505	2,508	2,663	2,577
	$\underline{a}(N)$	2,505	2,505	2,508	2,661	2,576
$3 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,511	2,530	2,516	2,742	2,619
	$a(N)$	2,507	2,508	2,512	2,738	2,615
	$\underline{a}(N)$	2,507	2,508	2,512	2,734	2,614
$4 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,517	2,550	2,524	2,814	2,660
	$a(N)$	2,510	2,512	2,517	2,810	2,654
	$\underline{a}(N)$	2,510	2,511	2,517	2,801	2,652
$5 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,523	2,575	2,533	2,883	2,703
	$a(N)$	2,513	2,515	2,523	2,880	2,694
	$\underline{a}(N)$	2,513	2,515	2,522	2,862	2,689
$6 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,530	2,604	2,544	2,948	2,746
	$a(N)$	2,516	2,519	2,528	2,947	2,735
	$\underline{a}(N)$	2,516	2,518	2,527	2,917	2,726
$7 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,539	2,639	2,555	3,009	2,789
	$a(N)$	2,519	2,523	2,535	3,013	2,777
	$\underline{a}(N)$	2,519	2,522	2,533	2,967	2,763
$8 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,548	2,679	2,568	3,066	2,834
	$a(N)$	2,523	2,528	2,542	3,078	2,820
	$\underline{a}(N)$	2,522	2,525	2,539	3,011	2,799
$9 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,558	2,724	2,582	3,119	2,880
	$a(N)$	2,526	2,533	2,549	3,142	2,865
	$\underline{a}(N)$	2,525	2,529	2,545	3,050	2,835

Fonte – Autoria própria (2020).

Conforme tabela 14 acima, as cotas do MC-FCB apresentaram valores numéricos que extrapolaram o sistema para o parâmetro “ $K_{th}$ ”. Neste caso deve-se ajustar o coeficiente de “ $a^*$ ” em  $a^* = 1, 2a_0$  afim de obter uma curva que melhor se ajusta a função, conforme mostrado nos casos anteriores placa infinita com trinca central placa finita com trinca central.

A tabela 15 mostra os valores dos parâmetros para uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  do tamanho de trinca no segundo momento estatístico.

Tabela 15 – Resultado no segundo momento,  $\delta = 1/10$  - placa finita e trinca na borda

$N(\text{ciclos})$		Parâmetro x $10^{-6}$				
		$C$	$m$	$K_c$	$K_{th}$	$a_0$
$1 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,270	6,271	6,271	6,371	6,311
	$a(N)$	6,268	6,268	6,269	6,369	6,309
	$\underline{a}(N)$	6,268	6,268	6,269	6,369	6,309
$2 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,288	6,290	6,289	6,491	6,370
	$a(N)$	6,280	6,281	6,282	6,481	6,364
	$\underline{a}(N)$	6,280	6,281	6,282	6,481	6,363
$3 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,310	6,316	6,312	6,616	6,433
	$a(N)$	6,293	6,294	6,295	6,594	6,420
	$\underline{a}(N)$	6,293	6,294	6,295	6,592	6,419
$4 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,336	6,347	6,340	6,745	6,502
	$a(N)$	6,307	6,308	6,310	6,708	6,478
	$\underline{a}(N)$	6,306	6,307	6,309	6,702	6,476
$5 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,366	6,383	6,372	6,879	6,575
	$a(N)$	6,321	6,322	6,325	6,823	6,538
	$\underline{a}(N)$	6,320	6,322	6,324	6,810	6,534
$6 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,401	6,425	6,408	7,017	6,652
	$a(N)$	6,335	6,337	6,341	6,940	6,601
	$\underline{a}(N)$	6,334	6,336	6,340	6,918	6,593
$7 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,440	6,473	6,449	7,161	6,735
	$a(N)$	6,351	6,353	6,357	7,060	6,666
	$\underline{a}(N)$	6,349	6,351	6,355	7,024	6,654
$8 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,484	6,527	6,495	7,309	6,822
	$a(N)$	6,367	6,370	6,375	7,182	6,735
	$\underline{a}(N)$	6,365	6,367	6,372	7,129	6,717
$9 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	6,531	6,587	6,545	7,462	6,915
	$a(N)$	6,384	6,388	6,393	7,308	6,807
	$\underline{a}(N)$	6,380	6,384	6,389	7,233	6,781

Fonte – Autoria própria (2020).

A tabela 16 mostra os valores dos parâmetros para uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  do desvio relativo no primeiro momento estatístico.

Tabela 16 – Resultado no primeiro momento,  $\delta = 1/10$  - placa finita e trinca na borda

$N(\text{ciclos})$		Parâmetros x $10^{-3}$				
		$C$	$m$	$K_c$	$K_{th}$	$a_0$
$1 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,014	0,019	0,015	0,020	0,012
	$\underline{a}(N)$	0,014	0,019	0,015	0,020	0,012
$2 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,058	0,078	0,060	0,075	0,049
	$\underline{a}(N)$	0,058	0,078	0,060	0,075	0,049
$3 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,130	0,174	0,134	0,160	0,107
	$\underline{a}(N)$	0,130	0,174	0,134	0,160	0,107
$4 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,231	0,309	0,238	0,271	0,186
	$\underline{a}(N)$	0,231	0,309	0,238	0,271	0,186
$5 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,360	0,481	0,370	0,403	0,283
	$\underline{a}(N)$	0,360	0,481	0,370	0,403	0,283
$6 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,516	0,691	0,531	0,551	0,396
	$\underline{a}(N)$	0,516	0,691	0,531	0,551	0,396
$7 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,700	0,937	0,720	0,711	0,523
	$\underline{a}(N)$	0,700	0,937	0,720	0,711	0,523
$8 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	0,911	1,219	0,936	0,880	0,663
	$\underline{a}(N)$	0,911	1,219	0,936	0,880	0,663
$9 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	1,148	1,536	1,179	1,052	0,812
	$\underline{a}(N)$	1,148	1,536	1,179	1,052	0,812

Fonte – Autoria própria (2020).

A razão do tempo computacional, obtido no MC-RK4 em relação às cotas do MC-FCB, são calculadas pela equação (4.65) apresentados na tabela abaixo. Estes valores são da placa infinita com trinca central no primeiro momento estatístico e dispersão  $\delta = \frac{1}{10}$  a 900000 ciclos e simulando  $N_s = 20000$  amostras para cada parâmetro randômico de Collipriest.

Tabela 17 – Tempos computacionais - placa finita e trinca na borda

Parâmetro	Tempos computacionais (s)		
	FCB	RK4	$\rho$
$C$	7,7	566,7	7259
$m$	7,6	561,6	7289
$K_c$	7,3	584,1	7902
$K_{th}$	9,0	901,4	9915
$a_0$	26,7	870,8	3161

Fonte – Autoria própria (2020).

Analisando os tempos computacionais nota-se uma performance muito melhor das metodologia MC-FCB em relação à metodologia MC-RK4. A eficiência do MC-RK4 chega a ser numericamente maior quando comparado com a metodologia MC-RK4.

#### 4.5 SÍNTESE DOS RESULTADOS NUMÉRICOS

O capítulo 4 mostra de forma mais abrangente os resultados numéricos das metodologias MC-FCB e MC-RK4, dispostos em gráficos e tabelas para três tipos de exemplos determinísticos. O primeiro exemplo é uma placa de largura infinita e com trinca central, o segundo exemplo é uma placa finita com trinca central e o terceiro exemplo é uma placa finita com trinca na borda. Estes exemplos apresentam um fator de correção de FIT conforme equações (4.66), (4.68) e (4.67), respectivamente. O material que constitui estas placas é uma liga de Inconel 600, cujo parâmetros químicos e mecânicos são mostrados na tabela 2 e na tabela 1. Através destes dados de entrada foi possível medir o desempenho de ambas as metodologias, buscando parâmetros do primeiro e segundo momento estatístico do processo estocástico tamanho de trinca. Este desempenho pode ser avaliado em função dos valores numéricos apresentados através de gráficos, tabelas e pelo tempo computacional para os parâmetros randômicos do modelo de Collipriest: “ $C$ ”, “ $m$ ”, “ $K_C$ ”, “ $K_{th}$ ” e “ $a_0$ ”. São realizadas  $N_s=20000$  simulações para cada amostra de 0 até 900000 ciclos. No exemplo clássico e determinístico placa infinita com trinca central com coeficiente de dispersão em  $\delta = \frac{1}{10}$  todos os parâmetros randomizados enveloparam a solução numérica conforme desigualdade mostrada na equação (2.8). Entretanto ao se usar um coeficiente de dispersão de  $\delta = \frac{3}{10}$  nota-se que há violação do parâmetro “ $K_{th}$ ”. Neste caso faz-se necessário ajustar  $a^* = 1,1a_0$  para  $a^* = 1,2a_0$ , isto melhora o comportamento da curva. Através deste processo também é possível obter o desvio relativo, em percentagem, da cota em relação a vários pontos do ciclo. Estes dados são mostrados em forma de figura e tabelas em cada exemplo determinístico mostrado durante o trabalho. O desvio relativo nos dá um valor, em percentagem, do afastamento da curva em relação a solução numérica. Abaixo segue a tabela 18 resumida contendo a randomização do parâmetro “ $C$ ” no primeiro momento estatístico e com dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$ .

Tabela 18 – Resultado no primeiro momento estatístico e com dispersão de  $\delta = 1/10$

$N(\text{ciclos})$		Parâmetro x $10^{-3}$				
		$C$	$m$	$K_C$	$K_{th}$	$a_0$
$1 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,524	2,526	2,524	2,535	2,525
	$a(N)$	2,524	2,525	2,524	2,534	2,525
	$\underline{a}(N)$	2,524	2,525	2,524	2,534	2,525
$5 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,615	2,622	2,616	2,660	2,620
	$a(N)$	2,607	2,611	2,608	2,653	2,611
	$\underline{a}(N)$	2,605	2,608	2,606	2,649	2,609
$9 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,697	2,708	2,699	2,762	2,707
	$a(N)$	2,675	2,679	2,677	2,747	2,680
	$\underline{a}(N)$	2,665	2,661	2,667	2,725	2,669

Fonte – Autoria própria (2020).

Os tempos computacionais são medidos para cada metodologia e comparados entre si, conforme equação (4.65). Avaliando, por exemplo, o tempo computacional para o parâmetro “ $C$ ”

nota que o tempo de execução do algoritmo do FCB-MC em relação ao MC-RK4 é na ordem de 89 vezes maior. Estes tempos estão na tabela 7. É importante ressaltar que a capacidade do computador em termos de processamento e ambiente operacional pode influenciar nos resultados. Outro ponto importante que afeta o tempo computacional é o modo como o algoritmo é escrito. A tabela 19 abaixo mostra o resultado do tempo computacional do parâmetro “ $C$ ” das metodologias MC-FCB para o exemplo da placa infinita com trinca central. e MC-RK4.

Tabela 19 – Tempos computacionais

Tempos computacionais (s)			
Parâmetro	FCB	RK4	$\rho$
$C$	8,2	771,8	9412

Fonte – Autoria própria (2020).

No exemplo clássico e determinístico placa finita com trinca central usa-se o mesmo material. Neste exemplo com uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  e randomizados os parâmetros de Collipriest no primeiro momento estatístico observa-se que as cotas envelopam a solução numérica. Houve violação do parâmetro “ $K_{th}$ ” nos resultados numéricos de dispersão  $\delta = \frac{3}{10}$ . Como no exemplo anterior foi necessário alterar “ $a^*$ ”. Abaixo segue a tabela 20 e tabela 21, que mostram respectivamente, resultados para o parâmetro “ $C$ ” no primeiro momento estatístico e o tempo computacional.

Tabela 20 – Resultado no primeiro momento estatístico e com dispersão de  $\delta = 1/10$

$N(\text{ciclos})$	Parâmetro x $10^{-3}$					
	$C$	$m$	$K_C$	$K_{th}$	$a_0$	
$1 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,524	2,525	2,524	2,534	2,524
	$a(N)$	2,524	2,525	2,524	2,533	2,524
	$\underline{a}(N)$	2,524	2,525	2,524	2,533	2,524
$5 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,615	2,621	2,616	2,655	2,616
	$a(N)$	2,607	2,610	2,608	2,648	2,607
	$\underline{a}(N)$	2,605	2,607	2,606	2,644	2,605
$9 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,697	2,706	2,698	2,754	2,699
	$a(N)$	2,675	2,677	2,676	2,739	2,675
	$\underline{a}(N)$	2,665	2,660	2,666	2,718	2,664

Fonte – Autoria própria (2020).

Tabela 21 – Tempos computacionais

Tempos computacionais (s)			
Parâmetro	FCB	RK4	$\rho$
$C$	7,1	798,3	11143

Fonte – Autoria própria (2020).

No exemplo clássico e determinístico placa finita com trinca na borda usando o mesmo material. Neste exemplo com uma dispersão de  $\delta = \frac{1}{10}$  e randomizados os parâmetros de Collipriest no primeiro momento estatístico observa-se que as cotas envelopam a solução numérica. Houve violação do parâmetro “ $K_{th}$ ” nos resultados numéricos de dispersão  $\delta =$

$\frac{3}{10}$ . Como no exemplo anterior foi necessário alterar “ $a^*$ ”. A tabela 22 e tabela 23 mostram, respectivamente, resultados para o parâmetro “ $C$ ” no primeiro momento estatístico e o tempo computacional.

Tabela 22 – Resultado no primeiro momento estatístico e com dispersão de  $\delta = 1/10$

$N(\text{ciclos})$	Parâmetro x $10^{-3}$					
	$C$	$m$	$K_C$	$K_{th}$	$a_0$	
$1 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,503	2,503	2,503	2,523	2,511
	$a(N)$	2,502	2,502	2,502	2,522	2,511
	$\underline{a}(N)$	2,502	2,502	2,502	2,522	2,511
$5 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,522	2,525	2,523	2,620	2,563
	$a(N)$	2,513	2,513	2,514	2,610	2,555
	$\underline{a}(N)$	2,513	2,513	2,514	2,608	2,555
$9 \times 10^5$	$\bar{a}(N)$	2,554	2,565	2,557	2,728	2,628
	$a(N)$	2,525	2,526	2,527	2,699	2,606
	$\underline{a}(N)$	2,525	2,525	2,526	2,686	2,601

Fonte – Autoria própria (2020).

Tabela 23 – Tempos computacionais

Tempos computacionais (s)			
Parâmetro	FCB	RK4	$\rho$
$C$	7,7	566,7	7259

Fonte – Autoria própria (2020).

## 5 CONCLUSÃO

O presente trabalho, em nível de mestrado do programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais (PPGEM), área de concentração em mecânica dos sólidos computacional, apresentou uma proposta de estudo que consiste da aplicação do método FCB para a quantificação da incerteza do modelo de Collipriest, sob orientação do Prof. Dr. Cláudio Ávila. Este modelo pertence à classe dos métodos de propagação de trincas em amplitude de tensão constante.

Neste trabalho fez-se a análise de cotas geradas pela metodologia MC-FCB e comparando-a com a metodologia MC-RK4, que se aproximam com os estimadores dos momentos estatísticos de uma função tamanho de trinca. Na metodologia MC-FCB envolve um certo custo computacional menor quando comparado com métodos numéricos de integração, como por exemplo, a metodologia MC-RK4. Os estimadores dos momentos estatísticos do “tamanho de trinca” foram obtidos através do método de simulação de Monte Carlo que gerou, a partir de 20000 amostras dos parâmetros do modelo de Collipriest, realizações do processo estocástico tamanho de trinca. As cotas geradas pelas metodologias dos estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem foram obtidas a partir de três configurações geométricas de placas sujeitas a um carregamento CATC. São as configurações: placa infinita com trinca central, placa finita com trinca central e placa finita com trinca na lateral. Os valores obtidos pelas metodologias foram comparadas entre si com seus respectivos momentos estatísticos. Através dos gráficos de desvio relativo foi possível avaliar o desempenho das metodologias. Também foram geradas as médias aritméticas e geométricas para avaliar a performance dos resultados.

A incerteza está presente nos parâmetros de definição da lei de propagação de trincas. A modelagem matemática e quantificação da incerteza foi realizada através de variáveis randômicas do modelo de Collipriest. Na quantificação da incerteza, via metodologia MC-FCB, utilizou-se, conjuntamente, os métodos *Fast Crack Bounds* e simulação de Monte Carlo e o estudo destas incertezas proporcionam confiabilidade na análise na propagação de trinca de um modo geral. Isto significa que, em algumas aplicações onde o tempo e o baixo custo computacional são diretrizes, pode-se utilizar a metodologia MC-FCB, visto que apresentou um desempenho superior em relação à metodologia MC-RK4. Observando os resultados numéricos obtidos foi possível verificar o quanto a metodologia MC-FCB é eficiente para a avaliação de um determinada função “tamanho de trinca”. Esta eficiência foi medida através dos tempos computacionais e os resultados numéricos das cotas no primeiro e segundo momento estatístico para as três configurações de placas. De modo geral os desvios das médias aritméticas e geométricas para o primeiro momento estatísticos são pequenas em relação a solução numérica. Isto significa que o metodologia MC-FCB apresentou um bom desempenho.

De forma geral, em aplicações onde é exigido performance em tempo e custo computacional para avaliar o tamanho de uma trinca em fadiga, justifica-se utilizar uma metodologia de grande praticidade como o MC-FCB. A metodologia proposta permitiu, também, uma abordagem

estatística em que os momentos estatísticos do “tamanho de trinca” foram avaliados a partir de um grande número de amostras de parâmetros do material.

## 5.1 TRABALHOS FUTUROS

Para efeito de continuidade deste trabalho, com a metodologia MC-FCB, há possibilidade de:

- (i) Avaliar alguma forma de obtenção de um valor ótimo de “ $a^*$ ” que faz a aproximação da solução numérica de uma função “tamanho de trinca”. Entretanto este valor foi determinado de forma empírica para o desenvolvimento desta dissertação;
- (ii) Aplicar o carregamento CATV usando a metodologia MC-FCB no modelo de Collipriest;
- (iii) Avaliar este estudo de metodologia MC-FCB utilizando-o em outros tipos de materiais e em diferentes configurações geométricas e aplicadas a alguns exemplos práticos na indústria.



## REFERÊNCIAS

- AL-RUBAIE, k.; GODERFLOID, L.; LOPES, J. **Statistical modeling of fatigue crack growth rate in Inconel alloy 600**. International Journal of Fatigue, v29, p. 931–940, 2007.
- BANNATINE, J.; COMER, J.; HANDROCK, J. **Fundamentals of Metal Fatigue Analysis**. Prentice Hall, 1989.
- BUNTIN, W.D. **concept and Conduct of Proof Test of F-111 Production Aircraft**. Royal Aeronautical society, 1791.
- BURDEN, R.; FAIRES, J. **Análise numérica**. Cengage learning, 2008.
- CALLISTER, W. **Ciência e engenharia dos materiais**. v. 7 ed. Rio de Janeiro, RJ:LTC, 2011.
- CASTRO, P.; MEGGIOLARO, M. **Fadiga - Técnicas e Práticas de Dimensionamento Estrutural sob Cargas Reais de Serviço**. v. 1 ed. Create Space, 2009.
- COLLIPRIEST, J. E. **An Experimentalists View Of The Surface Flaw Problem**. American Society for Testing and Materials, p. 43–62, 1972.
- FORMAN, R. G. **Study Of Fatigue Crack Initiation From Flaws Using Fracture Mechanics Theory**. Engineering Fracture Mechanics. v. 4, p. 333–346, 1972.
- GRIFFITH, A. **The Phenomena Of Rupture And Flow In Solids**. Philosophical Transactions of the Royal Society, v. 221, p. 163–198, 1920.
- GUSTON, B. **The Great Book of Modern Warplanes**. Salamander Books, p. 266–238, 1987.
- INWIN, G. **Analysis Of Strains Near The End Of Crack Traversing A Plate**. Journal of Applied Mechanics, v. 24, n. 3, p. 361–364, 1957.
- MACHADO, W. M. **Aplicação da Metodologia Fast Crack Bounds Para a Estimativa Eficiente da Evolução do Tamnho de Trinca**. 2015. 65 f. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.
- MURAKAMI, Y. **Stress intensity factors handbook**. Peragamon Press, Oxford, 1987.
- PADILHA, A. **Materiais de engenharia - Microestrutura e propriedades**. Editora Hemus, Curitiba, 1997.

PARIS, P.; ERDONGAN, F. **A Critical Analysis Of Crack Propagation Laws**. J. Basic Eng., Trans. ASME, p. 528–534, 1963.

PASTOUKHOV, V.; VOORWALD, H. **Introdução a integridade da mecânica estrutural**. Editora Unesp, São Paulo, 1995.

PETERSON, R. E. **Stress Concentration Design Factors**. John Wiley and Sons, 1953.

PRIDDLE, E. **High Cycle Fatigue Crack Propagation Under Random And Constant Amplitude Loadings**. International Journal of Pressure Vessels and Piping, v. 4, n. 2, p. 89–117, 1976.

ROOKE, D. **Compendium of stress intensity factors**. Stationery Office, London, 1976.

ROSA, E. Da. **Mecânica da Fratura**. Apostila do Curso de Mestrado UFSC, 2002.

SCHIJVE, J. **Fatigue of structures and materials**. v. 2 ed. Springer, 2009.

SOBOL, L. M. **Primer for the Monte Carlo Method**. CRC Press Florida: Boca Raton, 1994.

ÁVILA, C.; SANTOS, R.; BECK, T. **Analytical Bounds for Efficient Crack Growth Computation**. Applied Mathematical Modelling, v. 40, p. 2312–2321, 2016.

WILLIAMS, G. **On the stress distribution at the base of a stationary crack**. Journal of applied mechanics, v24, p. 109–114, 1957.