UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TAÍS FRANCINI DA SILVA

ESTUDO DAS GEOMETRIAS AFIM E PROJETIVA SOB O PONTO DE VISTA DE FELIX KLEIN

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO
2019

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TAÍS FRANCINI DA SILVA

ESTUDO DAS GEOMETRIAS AFIM E PROJETIVA SOB O PONTO DE VISTA DE FELIX KLEIN

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Loreci Zanardini

TOLEDO
2019

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado ”ESTUDO DAS GEOMETRIAS AFIM E PROJETIVA SOB O PONTO DE VISTA DE FELIX KLEIN”foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata nº __ de __/__/____

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Professor Orientador Me. Loreci Zanardini

Professora Ma. Larissa Hagedorn Vieira

Professor Dr. Wilian Francisco de Araujo

TOLEDO
2019

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma introdução das Geometrias Afim e Projetiva e suas principais características através de grupos de transformações. Assim define-se suas propriedades, apresenta-se teoremas e resultados específicos de cada geometria. Desse modo, caracteriza-se então a possibilidade de integração de três áreas da matemática, a Geometria, Álgebra Linear e Álgebra. Para a realização do mesmo utiliza-se uma bibliografia específica que além da Geometria Afim e Projetiva trata também de outras geometrias ambas sob o ponto de vista de Felix Klein, porém para esse trabalho optou-se por trabalhar apenas com duas dessas geometrias, tendo como alternativas de futuros estudos as demais. Alguns exemplos foram construídos utilizando o software Geogebra e Cabri 3D para explorar os detalhes através de figuras de modo a obter uma melhor compreensão do conteúdo apresentado. A partir desse trabalho, consegue-se rever alguns resultados como por exemplo, o Teorema de Ceva utilizando o Teorema Fundamental da Geometria Afim, e o Teorema de Desargues utilizando o Teorema Fundamental da Geometria Projetiva, sendo essas demonstrações diferentes das quais são realizadas na Geometria Euclidiana. Com isso, além de fazer uma introdução dessas geometrias, caracterizando seus aspectos geométricos e algébricos procedendo uma classificação baseada em grupos de transformações, abre-se caminhos para continuação dos estudos de outras geometrias com o mesmo propósito, ou seja, proceder a classificação de diferentes geometrias via aspectos algébricos.

Palavras-chave: Geometria Afim. Geometria Projetiva. Felix Klein.

ABSTRACT

This work aims to present an introduction to Afim and Projective Geometries and their main resources through groups of transformations. Thus, it defines its properties, presents the theorems and the results of each geometry. Also, features the possibility of integrating three areas of mathematics, Geometry, Linear Algebra and Algebra. To make this work, used a specific bibliography that, in addition to Affine and Projective Geometry, also deals with other geometries, from the point of view of Felix Klein, but for this work he chose to work with only two of these geometries, having as alternatives for futures studies. Some examples were built using Geogebra and Cabri 3D software to explore details through figures in order to obtain a better understanding of the content presented. From this work, some results are obtained, for example, Ceva's Theorem using Fundamental Theorem of Affine Geometry, and Desargues Theorem that use the Fundamental Projective Geometry Theorem, which being different from those proof in Euclidean Geometry . Thus, in addition to making an introduction to these geometries, characterizing their geometric and algebraic aspects, proceeding to the classification of transformation groups, it opens the way for the continuation of studies of other geometries with the same purpose, that is, proceeding to the classification of different geometries via algebraic aspects.

Keywords: Affine Geometry. Projective Geometry. Felix Klein.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho apresenta um estudo de algumas geometrias via grupo de transformações do ponto de vista de Felix Klein. Desse modo define-se as geometrias afim e projetiva, bem como suas propriedades via um grupo de transformações. Para isso é necessário fazer uma revisão dos conceitos da geometria euclidiana, rever tal geometria via grupo de transformações, possibilitando assim trabalhar com geometrias não euclidianas que de certo modo contenham a geometria euclidiana.

Entretanto, há aspectos históricos da geometria que são interessantes de serem abordados, uma vez que todo conhecimento é historicamente construído. Durante o século XIX desenvolveram-se as primeiras ideias e estudos sobre geometrias diferentes da euclidiana. Uma delas é a geometria projetiva, onde vários matemáticos, e dentre eles, Felix Klein (1849-1925), obtiveram uma das primeiras pesquisas dessa geometria, que foi o estudo de propriedades invariantes sob um grupo de transformações. [3]

Assim, Felix Klein caracterizou cada geometria através de um grupo de transformações. Entretanto, nem todas as geometrias podem ser caracterizadas sob esse ponto de vista, a geometria algébrica e a geometria diferencial por exemplo, não podem ser incorporadas via grupo de transformações.

Durante o período em que Felix Klein esteve em Paris, ele iniciou uma amizade e uma cooperação com o matemático norueguês Sophus Lie (1842–1899). Sophus Lie estudou a teoria dos grupos de transformação contínua e Felix Klein estudou grupos de transformação descontínua do ponto de vista geométrico. [3]

Em 1872 equanto estava na Universidade de Erlangen Felix Klein desenvolveu um programa (o Programa Erlangen) para classificar geometrias. Sua ideia era considerar a geometria como um espaço juntamente com um grupo de transformações desse espaço e as propriedades de figuras que não são alteradas por nenhuma transformação no grupo são suas propriedades geométricas. [2]

Felix Klein apresentou uma ideia muito ampla da geometria, de modo que não tinha sido feito anteriormente. Nessa época era muito discutido sobre a validade das geometrias não euclidianas. Entretanto, além da classificação, Felix Klein em seu programa fez uma associação das geometrias não euclidianas com a geometria euclidiana. Desse modo a aceitação das “novas geometrias” foi maior, uma vez que ninguém duvidava da validade dos resultados da geometria euclidiana.[2]

Assim as geometrias, na visão de Felix Klein, podem ser unificadas e vistas em diferentes aspectos de uma mesma ideia. Ele argumentou que em qualquer geometria existem propriedades de figuras que se discutem, mas essas propriedades variam de uma geometria pra outra. Por exemplo, as transformações na geometria euclidiana que preservam comprimentos e distâncias, são as que dão origem à geometria euclidiana mas na geometria afim as propriedades preservadas pelas transformações são de razões de comprimento, logo não faz sentido perguntar sobre preservação de distâncias nessa geometria. Com isso percebe-se que uma geometria não é mais verdadeira que outra, embora em alguns momentos seja mais conveniente.

Nesse sentido, esse trabalho será realizado noformato de pesquisa bibliográfica, na qual serão apresentados duas geometrias não euclidinanas, com suas propriedades e resultados. A principal referência utilizada, nos fornece algumas demonstrações, mas optou-se por não trazê-las novamente aqui, dando espaço maior à interpretações de resultados importantes para a geometria.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo Geral

O objetivo deste trabalho é estudar as geometrias afim e projetiva através de um grupo de transformações adequado.

2.2 Objetivos Específicos

- Estudar as transformações do plano no plano;
- Rever a geometria euclidiana via transformações;
- Definir geometria afim, suas propriedades via grupo de transformações;
- Definir geometria projetiva, suas propriedades via grupo de transformações;
- Usar as geometrias vistas para fornecer demonstrações de resultados da geometria euclidiana.

3 JUSTIFICATIVA

Na geometria euclidiana, vários resultados exigem uma abstração maior do leitor, dificultando muitas vezes a compreensão da demonstração. Com o uso das geometrias não euclidianas que aqui serão vistas, alguns resultados são explorados de maneira simples e com maior clareza, assim esse estudo se justifica como o estudo de novas geometrias, que geralmente não são vistas numa licenciatura em matemática, e ainda como uma oportunidade de revisitar conceitos chaves da geometria euclidiana de um ponto de vista avançado.

Durante todo o estudo serão revistas questões essenciais de álgebra linear, na definição de transformações do plano no plano que preservam algumas características, como medida de comprimento, de ângulo, entre outras. Para o estudo do grupo de transformações é necessário um conhecimento mínimo da teoria de grupos, sendo então oportunizada a revisão destes conceitos.

Esse trabalho, portanto tem o viés de revisão de conteúdos de disciplinas importantes vistas e o de descoberta e aprendizagem de novas geometrias através de um caminho histórico vislumbrado pelo matemático Felix Klein, o qual teve grande importância na construção da geometria.

Pelo fato das geometrias não euclidianas serem ainda recentes na história quando comparado com a geometria euclidiana, existem menos trabalhos nessa área e geralmente não são introdutórios, exigindo um conhecimento prévio mais elaborado. Nesse sentido, ressalta-se a importancia de explorar essas geometrias.

4 GEOMETRIA EUCLIDIANA

Antes de apresentar as geometrias, as quais são o foco do trabalho, será realizada uma revisão da Geometria Euclidiana sob ponto de vista das transformações. Primeiramente define-se alguns pontos importantes dentro da Geometria Euclidiana antes de dizer o que ela é de fato.

Assim tem-se que as rotações, translações e reflexões são as transformações da geometria euclidiana e são definidas por isometrias no $\mathbb{R}^2$ como funções que mapeiam $\mathbb{R}^2$ no $\mathbb{R}^2$ e preservam distâncias. Portanto tem-se que uma translação ao longo de uma reta no $\mathbb{R}^2$, uma reflexão em torno de uma reta no $\mathbb{R}^2$, uma rotação de um ângulo dado sobre um ponto no $\mathbb{R}^2$ e as composições de translações, reflexões e rotações no $\mathbb{R}^2$ são isometrias.

Desse modo tem-se que a composição de quaisquer duas isometrias é também uma isometria, que a tansformação que leva cada ponto nele mesmo é uma isometria e é o elemento neutro da operação composição de transformações e ainda que cada isometria possui uma isometria inversa de forma que a composição de ambas resulta na transformação identidade, conclui-se assim que o conjunto $S(\mathbb{R}^2)$ de isometrias no $\mathbb{R}^2$ forma um grupo com a operação de composição de funções.

Então tem-se que a Geometria Euclidiana é o estudo das propriedades de figuras geométricas invariantes sob ações dessas transformações ou seja que permanecem inalteradas sob ação dessas isometrias. Essas propriedades são chamadas propriedades euclidianas, e incluem distâncias, ângulos, colinearidade de pontos e concorrência de retas.

A visão Kleiniana da geometria é a ideia que a geometria pode ser pensada em termos de um grupo de transformações agindo no espaço e o estudo das propriedades invariantes sob as mesmas.

As tranformações do $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{e}, \tag{4.1}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

são isometrias; elas representam respectivamente uma rotação no sentido anti-horário ao redor da origem de um ângulo θ seguida por uma translação na direção dada pelo vetor (e, f), e uma reflexão em relação a uma reta que passa pela origem que faz o ângulo $\frac{\theta}{2}$ com o eixo x seguida por uma translação dada por (e, f).

Define-se uma Transformação Euclidiana do $\mathbb{R}^2$ como uma função $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

da forma:

$$t(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{a} \tag{4.3}$$

Onde $\mathbf{U}$ é uma matriz ortogonal 2×2 e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$. O conjunto de todas as transformações euclidianas no $\mathbb{R}^2$ é denotado por $E(2)$.

Observa-se que toda isometria do $\mathbb{R}^2$ é uma transformação euclidiana do $\mathbb{R}^2$, e que o conjunto das transformações euclidianas do $\mathbb{R}^2$ formam um grupo sob a operação de composição de funções.

Com isso, da mesma forma que a Geometria Euclidiana, pode ser vista do ponto de vista das transformações, a intenção é expandir o estudo das geometrias, de modo que as propriedades da nova geometria, serão válidas para a anterior. Em outras palavras, uma geometria estará contida na outra por meio dos grupos de transformações, sendo essa uma característica eminente desse estudo.

5 GEOMETRIA AFIM

Introdução à Geometria Afim

Taís Francini da Silva
UTFPR - TD
taisfrancini@live.com

Loreci Zanardini
UTFPR - TD
loreci@utfpr.edu.br

RESUMO

O presente artigo tem como objetivo apresentar uma Introdução à Geometria Afim e suas principais características, assim definem-se suas propriedades, apresentam-se teoremas e resultados específicos da Geometria Afim que são fundamentais para o desenvolvimento desse estudo e ainda relaciona tais resultados com a sua forma algébrica através de um grupo de transformações. Com isso, caracteriza-se então a possibilidade de integração de três áreas da matemática, a Geometria, Álgebra Linear e Álgebra. Para a realização do mesmo utiliza-se uma bibliografia específica que além da geometria afim trata ainda das geometrias projetiva, inversiva, hiperbólica e elíptica, porém nesse momento optou-se por apresentar apenas essa geometria, tendo como alternativas de futuros estudos as demais geometrias tratadas a partir do ponto de vista de Felix Klein. Alguns exemplos foram construídos utilizando o software Geogebra para explorar os detalhes através de figuras de modo a obter uma melhor compreensão do conteúdo apresentado. A partir desse trabalho, consegue-se rever alguns resultados, como por exemplo, o Teorema de Ceva e de Menelau, utilizando o Teorema Fundamental da Geometria Afim, sendo essa uma demonstração diferente da qual é realizada na Geometria Euclidiana. Com isso, além de fazer uma introdução dessa geometria, caracterizando seus aspectos geométricos e algébricos procedendo uma classificação baseada em grupos de transformações, abre-se caminhos para continuação dos estudos de outras geometrias com o mesmo propósito, ou seja, proceder a classificação de diferentes geometrias via aspectos algébricos que possam ainda recuperar a Geometria Euclidiana em seus aspectos principais.

Palavras-chave:Geometria Afim. Transformação Afim. Álgebra. Álgebra Linear.

5.1 Introdução

O presente artigo surge a partir dos estudos realizados para um trabalho de conclusão de curso (TCC) que está em andamento, portando, o objetivo é fazer uma introdução à geometria afim, sendo essa uma das geometrias estudadas pelos autores. Desse modo, apresenta-se alguns conceitos, propriedades, teoremas e exemplos de aplicações dessa geometria.

A Geometria Afim não faz parte da ementa de nenhuma disciplina do curso de licenciatura em matemática a qual os autores estão inseridos, assim o propósito desse trabalho é mostrar aos alunos e participantes da semana acadêmica uma nova geometria de modo introdutório. Além disso, uma característica importante dessa geometria é ser definida através de um grupo de transformações, o que implica na junção de três áreas da matemática: a Álgebra linear, Álgebra e Geometria.

A partir dessa união é possível mostrar uma propriedade de modo geométrico e fazer uma demonstração dela de modo algébrico, além disso, através de um teorema tem-se que o conjunto de todas as transformações afins forma um grupo sob a composição de funções. Essas ideias aqui apresentadas, são interessantes para mostrar à comunidade acadêmica, uma nova forma de ver a geometria, e atrair aqueles que tem interesse em pesquisar na área.

5.2 Metodologia

O trabalho tem cunho bibliográfico e tem como referência principal os autores Brannan, Esplen e Gray (2012) [1]. Apresentam-se aqui alguns tópicos importantes da Geometria Afim, tais como as transformações afins e projeções paralelas, grupo de transformações e o Teorema Fundamental da Geometria Afim. Como se trata de uma introdução da Geometria Afim, algumas provas de teoremas não serão realizadas, e, portanto, para aqueles que tiverem interesse e curiosidade em conhecer as demonstrações, basta procurar na referência principal desse trabalho.

5.2.1 Transformações Afins e Projeções Paralelas

Nesta subseção apresenta-se algumas definições e e teoremas importantes para o desenvolvimento da geometria afim. Desse modo temos as seguintes definições e teoremas:

Definição 5.2.1 *Uma Transformação Afim no $\mathbb{R}^2$ é uma função $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ da forma:*

$$t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \tag{5.1}$$

Onde $\boldsymbol{A}$ é uma matriz inversível 2×2 e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$. O conjunto de todas as transformações afins no $\mathbb{R}^2$ é denotado por $A(2)$.

Teorema 5.2.1 *O conjunto das transformações afins $A(2)$ forma um grupo sob a operação de composição de funções. [1][Teorema 1, pág. 72]*

- Dado t_1 e t_2 transformações afins, a composição $(t_1 \circ t_2)$ é fechada para operação;
- Dado $i(\mathbf{x}) = \mathbf{I}\mathbf{x} + \mathbf{0}$ e $t(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, tem-se a composição $(t \circ i) = (i \circ t) = t$. Logo i é a transformação identidade;
- Dado $t(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ e $t^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, tem se a composição $(t \circ t^{-1}) = (t^{-1} \circ t) = i$. Logo t^{-1} é a transformação inversa;
- A operação composição de funções é associativa, desde que esteja bem definida.

Projeções Paralelas

Uma projeção paralela é uma aplicação uma a uma do $\mathbb{R}^2$ nele mesmo definida do seguinte modo. Primeiramente imagine seu domínio e contradomínio como duas cópias separadas do $\mathbb{R}^2$.

Geometricamente, pode-se representar essas cópias do $\mathbb{R}^2$ por dois planos separados, cada um equipado com um par de eixos retangulares.

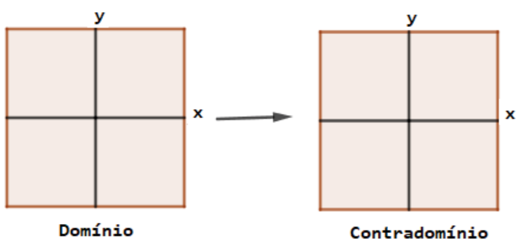

Figura 5.1: Domínio e Contradomínio

Em seguida, coloque esses planos no espaço tridimensional: denota-se o domínio por π_1 e o contradomínio por π_2. Agora imagine raios de luz paralelos através de π_1 e π_2. Cada ponto P no plano π_1 tem uma (única) reta passando através dele que também passa através de um ponto P' no plano π_2. Isso fornece uma correspondência uma a uma entre os dois planos. Chama-se de projeção paralela de π_1 para π_2, a função p a qual mapeia cada ponto P em π_1 ao ponto correspondente P'em π_2.

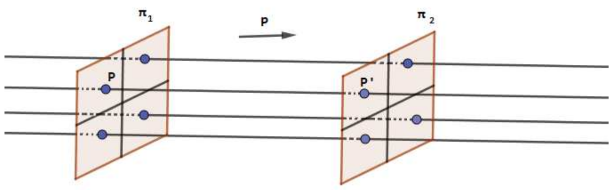

Figura 5.2: Projeção Paralela

Diferente da Geometria Euclidiana onde as distâncias são preservadas através de isometrias, na Geometria Afim as projeções paralelas nem sempre preservam distâncias. Entretanto, há três propriedades básicas de projeções paralelas, as quais estão listadas abaixo:

- Mapeia retas em retas;
- Mapeia retas paralelas em retas paralelas;
- Preserva razões de comprimento ao longo de uma reta.

A seguir, serão apresentados duas demonstrações de cada uma das propriedades. A primeira do ponto de vista geométrico e a segunda do ponto de vista algébrico.

Propriedade 1: Uma projeção paralela mapeia retas em retas.

Dada l uma reta no plano π_1 e dado p uma projeção paralela mapeando π_1 no plano π_2. Agora consideramos todos os raios associadas com p que passam por l. Uma vez que essas raios são paralelos, eles estão contidos em um plano. Chamamos de plano π.

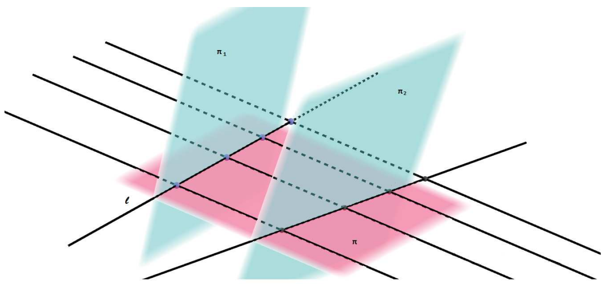

Figura 5.3: Propriedade 1

A imagem de l sob p consiste nesses pontos onde os raios passam através de l e encontram π_2, mas esses pontos são os pontos de interseção de π com π_2. Uma vez que quaisquer dois planos em $\mathbb{R}^3$ não paralelos intersectam-se em uma reta, segue que a imagem de l sob p é uma reta.

Propriedade 2: Uma projeção paralela mapeia retas paralelas em retas paralelas.

Dadas l_1 e m_1 retas paralelas distintas no plano π_1, e dada p uma projeção paralela mapeando π_1 no plano π_2. Dadas l_2 e m_2 retas em π_2 que são as imagens sob p de l_1 e m_1. Se l_2 e m_2 não fossem paralelas, elas se intersectariam em algum ponto P_2. Dado P_1 um ponto no plano π_1 o qual é mapeado em P_2, ou seja, $P_1 = p^{-1}(P_2)$. Então P_1 deve pertencer a ambas l_1 e m_1. Uma vez que l_1 e m_1 são paralelas não pode existir nenhum ponto que intersecta ambas, sendo uma contradição. Segue que l_2 e m_2 devem ser de fato paralelas.

Propriedade 3: Uma projeção paralela preserva razões de comprimento ao longo de uma reta dada.

Dados A, B e C três pontos em uma reta no plano π_1 e dado p uma projeção paralela mapeando π_1 em π_2. Dados P, Q e R pontos de π_2 que são as imagens de A, B e C sob p respectivamente. Sabemos da propriedade 1 que P, Q e R são colineares, temos que mostrar que a razão $AB : AC$ é igual a razão $PQ : PR$. Se os planos forem paralelos, então a projeção p é uma isometria, pois isometrias preservam distâncias, e então as razões são iguais, como desejado. Por outro lado, se os planos não são paralelos então temos que construir um plano π através de P o qual seja paralelo a π_1.

Esse plano intersecta a reta que passa por B e Q em algum ponto B', e a reta através de C e R em algum ponto C'. Então nesse caso as razões $AB : AC$ e $PB' : PC'$ são iguais. Agora considere o triângulo $PC'R$, as retas $B'Q$ e $C'R$ são paralelas, uma vez que são retas da projeção paralela. Consequentemente $B'Q$ intersecta os lados PR e PC' em razões iguais. Portanto $PQ : PR = PB' : PC'$ segue que $PQ : PR = AB : AC$.

5.2.2 Imagens de conjuntos sob transformações afins

Antes de demonstrar as propriedades citadas acima começa-se descrevendo como encontrar a imagem de uma reta sob uma transformação afim. Para isso, recorda-se que uma transformação afim é uma aplicação $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada pela forma

$$t(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{5.2}$$

onde A é uma matriz inversível 2×2. O conjunto de tais transformações forma um grupo, sob a operação de composição em que a transformação inversa é dada por

$$t^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \tag{5.3}$$

Quando as equações (5.2) e (5.3) são usadas para encontrar imagens sob t, pode-se confundir os pontos do plano do domínio com os pontos do plano do contradomínio, pois ambos os planos são cópias do $\mathbb{R}^2$. Por isso utilizaremos o símbolo $\mathbf{x}$ e coordenadas (x, y) para o domínio e usaremos o símbolo **x'** e coordenadas (x', y') para denotar a imagem de $\mathbf{x}$ sob t. Com essa notação reescre-se as equações (5.2) e (5.3) da forma:

$$\mathbf{x'} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{5.4}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \tag{5.5}$$

Exemplo 5.2.1 : Determine a imagem da reta $y = 2x$ sob a transformação afim

$$t(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2). \tag{5.6}$$

Solução:

Seja (x, y) um ponto arbitrário da reta $y = 2x$ e seja (x', y') a imagem de (x, y) sob t. Então

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Agora usa-se a equação (6) para expressar (x, y) em termos de (x', y'). Tem-se que

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{e} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -4 \end{pmatrix}$$

então

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

Segue que sob o mapeamento inverso t^{-1} tem-se

$$x = \tfrac{1}{2}x' - \tfrac{1}{2}y' - \tfrac{3}{2} \text{ e } y = -x' + 2y' + 4$$

Uma vez que x e y são relacionados pela equação $y = 2x$, segue que x' e y' são relacionados pela equação

$$-x' + 2y' + 4 = 2(\frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2})$$

a qual simplifica-se para

$$2x' - 3y' = 7$$

. Tirando as aspas, tem-se que a imagem da reta $y = 2x$ sob t é a reta $2x - 3y = 7$.

Segue a ilustração do exemplo realizado no software Geogebra, onde a reta f é a reta $y = 2x$ e g é a imagem.

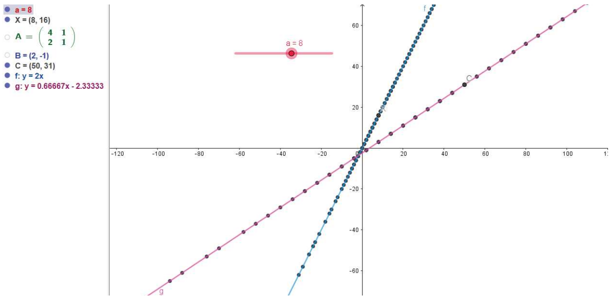

Figura 5.4: Imagem da reta

Provas algébricas das propriedades básicas das transformações afins

Teorema 5.2.2 *Uma transformação afim mapeia retas em retas.*

Seja l uma reta através de um ponto com o vetor de posição $\mathbf{p}$, e dada a direção de l por algum vetor $\mathbf{a}$. Então $l = \{\mathbf{p} + \lambda\mathbf{a} : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Agora seja $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação afim dada por $t(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$

Nós podemos encontrar a imagem sob t de um ponto arbitrário $\mathbf{p} + \lambda\mathbf{a}$ em l como segue:

$$t(\mathbf{p} + \lambda\mathbf{a}) = \mathbf{A}(\mathbf{p} + \lambda\mathbf{a}) + \mathbf{b} = (\mathbf{Ap} + \mathbf{b}) + \lambda\mathbf{Aa} = t(\mathbf{p}) + \lambda\mathbf{Aa}. \tag{5.7}$$

Então a imagem de l é o conjunto

$$t(l) = \{t(\mathbf{p}) + \lambda\mathbf{Aa} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

A qual é uma reta através de $t(\mathbf{p})$ na direção do vetor $\mathbf{Aa}$.

Teorema 5.2.3 *Uma transformação afim mapeia retas paralelas em retas paralelas.*

Seja l_1 e l_2 retas paralelas através dos pontos com vetor posição $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ respectivamente, e seja a direção das retas dadas pelo vetor $\mathbf{a}$. Então $l_1 = \{\mathbf{p} + \lambda\mathbf{a} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ e $l_2 = \{\mathbf{q} + \lambda\mathbf{a} : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Como na prova do teorema anterior, a imagem de l_1 e l_2 sob uma transformação afim $t(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$ são os conjuntos $t(l_1) = \{t(\mathbf{p}) + \lambda\mathbf{Aa} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ e $t(l_2) = \{t(\mathbf{q}) + \lambda\mathbf{Aa} : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Esses conjuntos são retas que passam pelos pontos da imagem $t(\mathbf{p})$ e $t(\mathbf{q})$, ambas na mesma direção que a do vetor $\mathbf{Aa}$. Consequentemente as duas retas imagens sob t são paralelas como afirmado.

Ao invés de provar que as transformações afins preservam razões de comprimento ao longo de uma reta dada, vamos provar um resultado mais geral. O resultado original segue porque qualquer reta é paralela a ela mesma.

Teorema 5.2.4 *Uma transformação afim preserva razões de comprimento ao longo de retas paralelas.*

Começamos examinando o que acontece com o comprimento de um segmento de reta sob uma transformação afim. Seja l uma reta que passa através de um ponto $\mathbf{P}$ com vetor posição $\mathbf{p}$ e seja a direção de l que é algum vetor unitário $\mathbf{a}$. Então

$$l = \{\mathbf{p} + \lambda\mathbf{a} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Como na prova do Teorema 2.2, a imagem de l sob uma transformação afim $t(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}+\mathbf{b}$ é a reta

$$t(l) = \{t(\mathbf{p}) + \lambda\mathbf{Aa} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Agora consideramos um segmento de l com extremidades $\mathbf{p} + \lambda_1\mathbf{a}$ e $\mathbf{p} + \lambda_2\mathbf{a}$. Uma vez que $\mathbf{a}$ é um vetor unitário, o comprimento do segmento é

$$||(\mathbf{p} + \lambda_2\mathbf{a}) - (\mathbf{p} + \lambda_1\mathbf{a})|| = |\lambda_1 - \lambda_2|.||\mathbf{a}|| = |\lambda_1 - \lambda_2|.$$

A imagem do segmento tem extremidades $t(\mathbf{p}) + \lambda_1\mathbf{Aa}$ e $t(\mathbf{p}) + \lambda_2\mathbf{Aa}$, então a imagem do segmento tem comprimento

$$||(t(\mathbf{p}) + \lambda_2\mathbf{Aa}) - (t(\mathbf{p}) + \lambda_1\mathbf{Aa})|| = |\lambda_1 - \lambda_2|.||\mathbf{Aa}||$$

Então, no processo de mapear segmentos ao longo de l para segmentos ao longo de $t(l)$, comprimentos são aumentados ou diminuidos pelo fator $||\mathbf{Aa}||$.Uma vez que o fator é o mesmo para todos os segmentos que estão ao longo das retas paralelas de $\mathbf{a}$, segue que as razões de comprimento ao longo de retas paralelas são inalteradas por t

5.2.3 Resultados sobre elipses

Teorema 5.2.5 *(Teorema do Ponto Médio) Seja l uma corda de uma elipse. Então os pontos médios das cordas paralelas a l estão sobre o diâmetro da elipse. [1][Teorema 2, pág. 78]*

Teorema 5.2.6 *(Teorema dos Diâmetros Conjugados) Seja l um diâmetro de uma elipse, então existe outro diâmetro m da elipse tal que:*

(a) O ponto médio de todas as cordas paralelas a l está em m;

(b) O ponto médio de todas as cordas paralelas a m está em l.

[1][Teorema 3, pág. 78]

Teorema 5.2.7 *Dada uma elipse, existe uma projeção paralela que mapeia a elipse em um círculo. [1][Teorema 4, pág. 79]*

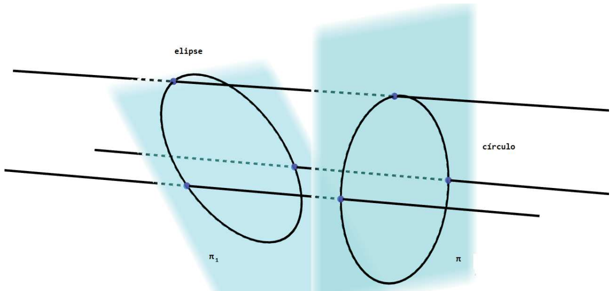

Figura 5.5: Elipse mapeada em um círculo

5.2.4 Projeções Paralelas e Transformações Lineares

As projeções paralelas formam uma classe especial de transformações lineares. Agora será apresentado um exemplo desse caso. Primeiro considere uma projeção paralela p de um plano π_1 para um plano π_2. Suponha que os planos estão alinhados de modo que a origem em π_1 é mapeada para a origem em π_2. Uma vez que razões de comprimento são preservadas ao longo de uma reta, tem-se que para qualquer vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$p(\lambda \mathbf{v}) = \lambda p(\mathbf{v}). \tag{5.8}$$

Agora dado $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ dois vetores posição em π_1. Sua soma é encontrada a partir da regra do paralelogramo. A imagem sob p em π_2 são $p(\mathbf{v})$ e $p(\mathbf{w})$, e a soma desses dois vetores é $p(\mathbf{v}) + p(\mathbf{w})$.

Mas uma projeção paralela mapeia retas paralelas em retas paralelas, então deve mapear paralelogramos para paralelogramos. Consequentemente deve mapear o paralelogramo em π_1 para o paralelogramo em π_2, e em particular deve mapear $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ para $p(\mathbf{v}) + p(\mathbf{w})$. Assim podemos reescrever da seguinte forma:

$$p(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = p(\mathbf{v}) + p(\mathbf{w}) \tag{5.9}$$

Segue que das equações (5.8) e (5.9) que p deve ser uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$

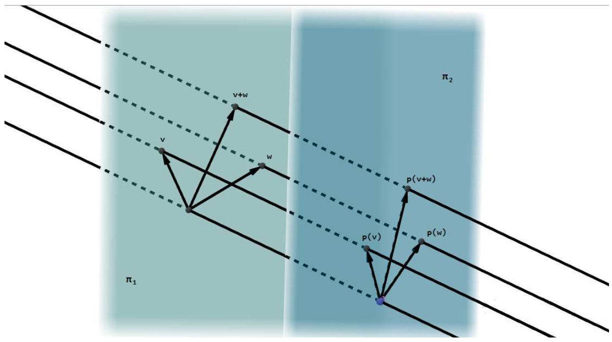

Figura 5.6: Soma de vetores

nele mesmo. Consequentemente existe alguma matriz $\mathbf{A}$, 2×2 tal que, para cada $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$,

$$p(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}. \tag{5.10}$$

Uma vez que a transformação linear p é inversível segue que $\mathbf{A}$ é inversível. Agora, suponha que a projeção paralela mapeia a origem de π_1 em algum ponto B com o vetor posição $\mathbf{b}$ em π_2. Se temporariamente for construído um novo conjunto de eixos em π_2 que sejam paralelos aos eixos originais, mas que se intersectam no ponto B, então a respeito desses novos eixos $p(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$ para alguma matriz inversível $\mathbf{A}$, 2×2 como antes. Para expressar $p(\mathbf{v})$ com relação aos eixos originais, simplesmente adiciona-se o vetor $\mathbf{b}$ para obter

$$p(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{b} \tag{5.11}$$

para alguma matriz A inversível 2x2.

Com isso, obtém-se o seguinte resultado:

Teorema 5.2.8 *Cada projeção paralela é uma transformação afim.*

Entretanto, a recíproca não é verdadeira, pois nem toda transformação afim pode ser representado como uma projeção paralela. Por exemplo, considere a "aplicação dobrada"do $\mathbb{R}^2$ nele mesmo dada por:

$$t(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}(\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2).$$

Essa é uma transformação afim, uma vez que pode ser escrita da forma $t(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}$ com $\mathbf{A} = 2\mathbf{I}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Contudo, uma projeção paralela ou está entre dois planos paralelos, e nesse caso todos os comprimentos são inalterados, ou está entre dois planos que se intersectam e de novo, as distâncias ao longo de uma reta de interseção são inalteradas. A "aplicação dobrada"não tem nenhuma dessas propriedades e, portanto, não é uma projeção paralela.

Assim segue o seguinte teorema:

Teorema 5.2.9 *Uma transformação afim pode ser expressa como uma composição de duas projeções paralelas. [1][Teorema 6, pág. 84]*

5.3 Teorema Fundamental da Geometria Afim

A abordagem algébrica pode ser utilizada para investigar se existe uma transformação afim que mapeia uma figura dada em outra. Se existe tal transformação então as duas figuras são ditas afins-congruentes, tal que compartilham das mesmas propriedades afins.

Agora será apresentado um exemplo de um mapeamento de três pontos não colineares a outros três pontos não colineares.

Exemplo 5.3.1 : Determine a transformação afim que mapeia os pontos $(0, 0), (1, 0)$ e $(0, 1)$ para os pontos $(3, 2), (5, 8)$ e $(7, 3)$ respectivamente.

Solução: Seja a transformação afim dada por

$$t : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

Uma vez que $t(0, 0) = (3, 2)$ segue de (5.11) que $e = 3$ e $f = 2$. Em seguida, $t(1, 0) = (5, 8)$ então segue de (5.12) que

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A primeira coluna da matriz para t é, portanto

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Uma vez que um triângulo é determinado por três vértices, pode-se realizar o mapeamento dos pontos que determinam os três vértices, para outros três pontos. Desse modo tem-se que os triângulos são afins-congruentes, pois compartilham das mesmas propriedades. Essa congruência de triângulos é dada a partir do teorema a seguir:

Teorema 5.3.1 (Teorema Fundamental da Geometria Afim) *Seja* $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ *e* $\boldsymbol{P'}, \boldsymbol{Q'}, \boldsymbol{R'}$ *dois conjuntos de três pontos não colineares no* $\mathbb{R}^2$*. Então:*

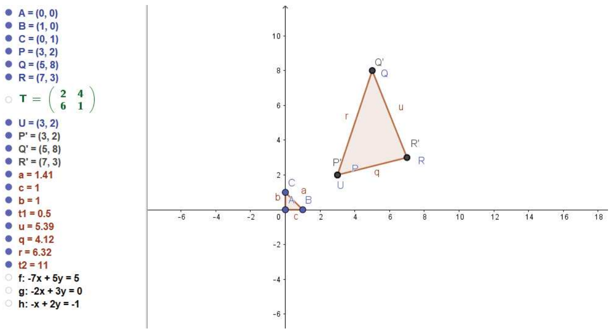

Figura 5.7: Três pontos mapeados em outros três pontos

(a) existe uma transformação afim t que mapeia ***P***, ***Q*** *e* ***R*** *em* ***P'***, ***Q'****e* ***R'****, respectivamente;*

(b) a transformação afim t é única. [1][Teorema 1, pág. 88]

A partir da prova desse teorema é possível mostrar que quaisquer três pontos não colineares podem ser mapeados para outros três pontos não colineares quaisquer. Logo, tem-se o seguinte corolário:

Corolário 5.3.1 *Todos os triângulos são afins-congruentes.[1][Corolário, pág. 89]*

Para encontrar a transformação afim que mapeia um triângulo, vértice a vértice, para outro triângulo, segue-se a estratégia abaixo utilizando parte da prova do teorema fundamental da geometria afim, a qual está disponível em [1].

Estrégia:

Para determinar a transformação afim t que mapeia três pontos não colineares **P**, **Q** e **R** em outros três pontos não colineares **P'**, **Q'** e **R'**, respectivamente:

1. determine a transformação afim t_1 que mapeia $(0,0), (1,0), (0,1)$ para os pontos **P**, **Q** e **R**, respectivamente;

2. determine a transformação afim t_2 que mapeia $(0,0), (1,0), (0,1)$ para os pontos **P'**, **Q'** e **R'**, respectivamente;

3. calcule a composição $t = t_2 \circ t_1^{-1}$.

5.3.1 Usando o Teorema Fundamental da Geometria Afim

O Teorema Fundamental da Geometria Afim pode ser utilizado para deduzir o fato de que as medianas de qualquer triângulo são concorrentes a partir do caso especial de que as medianas de um triângulo equilátero são concorrentes. Com isso é realizada a prova do Teorema de Ceva, o qual será apenas enunciado.

Teorema 5.3.2 *Seja ABC um triângulo, e seja X um ponto que não está em nenhum de seus (ou prolongamento dos) lados. Se AX encontra BC em P, BX encontra CA em Q e CX encontra BA em R, então*

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

[1][Teorema 2, pág. 94]

Exemplo 5.3.2 : O triângulo ABC de vértices $A = (1, 3)$, $B = (-1, 0)$ e $C = (4, 0)$ e sabendo-se que os pontos $P = (0, 0)$, $Q = (\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$ e $R = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ estão sobre BC, CA e AB respectivamente.

(a) Determine a razão na qual P, Q e R dividem os lados do triângulo.

(b) Determine se os segmentos AP, BQ e CR são concorrentes.

Solução: (a) Usando as fórmulas coordenadas para calcular razões, obtém-se

$$\frac{AR}{RB} = \frac{XR - XA}{XB - XR} = \frac{-\frac{2}{3} - 1}{-1 + \frac{2}{3}} = 5$$

,

$$\frac{BP}{PC} = \frac{XP - XB}{XC - XP} = \frac{0 + 1}{4 - 0} = \frac{1}{4}$$

,

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{XQ - XC}{XA - XQ} = \frac{\frac{8}{3} - 4}{1 - \frac{8}{3}} = \frac{4}{5}$$

de modo que P divide BC na razão $1 : 4$, Q divide CA na razão $4 : 5$ e R divide AB na razão $5 : 1$.

(b) Segue das equações acima que o produto

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 5 . \frac{1}{4} . \frac{4}{5} = 1.$$

Então pela recíproca do Teorema de Ceva os segmentos AP, BQ e CR são concorrentes.

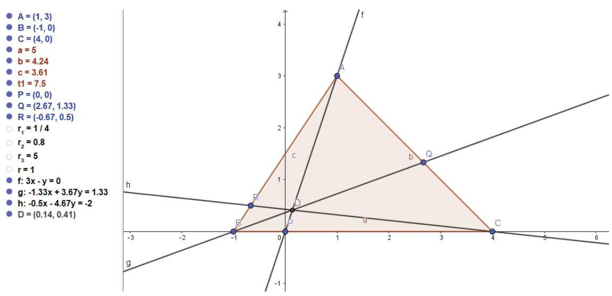

Figura 5.8: Exemplo do Teorema de Ceva

5.4 Conclusão

Na construção desse trabalho, percebemos que pouco se tem discutido sobre as geometrias não euclidianas, por serem ainda recentes na história quando comparadas com a geometria euclidiana. Nesse sentido, acreditamos que é importante explorar mais esse campo, o qual ainda é pouco estudado nos cursos de licenciatura.

Assim esse trabalho é importante para mostrar aos alunos do curso de licenciatura uma nova geometria do ponto de vista das transformações. Mostramos aqui uma relação entre a Geometria, Álgebra Linear e Álgebra, sendo essa relação pouco conhecida, a qual pode abrir caminho para os alunos que têm interesse em pesquisar nessas áreas, e para os outros, ter uma noção da existência união.

Desse modo, concluímos que é importante explorar novos campos de conhecimento, e analisar a geometria sob outro ponto de vista. Nessa geometria, mostramos resultados que não são possíveis na Geometria Euclidiana, o que a torna diferente. Entretanto, ela contém a geometria euclidiana, ou seja, o grupo das transformações euclidianas é um subgrupo do grupo das transformações afim. Como esse trabalho é parte de uma pesquisa em andamento, podemos adiantar que há outras geometrias das quais são “maiores” que a geometria apresentada. Portanto, podemos afirmar que não há uma geometria melhor que outra, apenas mais conveniente.

REFERÊNCIAS

BRANNAN, David A.; ESPLEN, Matthew F.; GRAY, Jeremy J. Geometry. United Kingdom: Cambridge University Press 2012.

6 GEOMETRIA PROJETIVA

Introdução à Geometria Projetiva

Taís Francini da Silva
UTFPR - TD
taisfrancini@live.com

Loreci Zanardini
UTFPR - TD
loreci@utfpr.edu.br

RESUMO

O presente artigo tem como objetivo apresentar uma Introdução à Geometria Projetiva. Assim definem-se suas propriedades, apresentam-se teoremas e resultados específicos da Geometria Projetiva que são fundamentais para o desenvolvimento desse estudo e ainda relaciona tais resultados com a sua forma algébrica através de um grupo de transformações. Para a realização do mesmo utiliza-se a referência [1] como base para o estudo. Ainda, faz-se o uso do software Cabri 3D para construção das figuras. Com isso, além de apresentar essa geometria, pretende-se mostrar possibilidades para pesquisas nessa área.

Palavras-chave: Geometria Projetiva. Transformação Projetiva. Perspectiva. Álgebra. Álgebra Linear.

6.1 Introdução

O presente artigo trata-se de uma introdução à Geometria projetiva. Desse modo, apresenta-se alguns conceitos, propriedades, teoremas e exemplos de aplicações dessa geometria. A Geometria Projetiva teve grande importância na arte durante o período do Renascimento, onde grandes pintores queriam dar mais realismo aos seus quadros, para isso usavam noções de perspectiva de forma intuitiva.

A Geometria Projetiva é o estudo de propriedades do espaço em três dimensões, projetadas em um espaço bidimensinal. Assim, caracteriza-se como uma geometria não euclidiana, pois de acordo com o plano de projeção, as propriedades válidas vão além do espaço euclidiano. Uma característica importante dessa geometria é ser definida através de um grupo de transformações, o que implica na junção de três áreas da matemática: a Álgebra linear, Álgebra e Geometria.

Com isso, há a possibilidade de mostrar algumas propriedades de modo geométrico e algébrico, além disso, o conjunto de todas as transformações projetivas formam um grupo sob a composição de funções. Isso caracteriza o ponto de vista de Felix Klein sob a geometria. Portanto, a intenção em apresentar essas ideias é mostrar a Geometria Projetiva através de um grupo de transformações.

6.2 Metodologia

O trabalho tem cunho bibliográfico e tem como referência principal os autores Brannan, Esplen e Gray (2012) [1]. Apresentam-se aqui alguns tópicos importantes da Geometria Projetiva, tais como perspectividade, transformação perspectiva, transformações projetivas, o Teorema Fundametal da Geometria Projetiva e dentre outros resultados. Como trata-se de uma introdução, algumas provas de teoremas não serão realizadas, no entanto está diponível na referência principal desse trabalho. Para as figuras foram utilizados os softwares Geogebra e Cabri3D, obtendo assim mais detalhes das principais ideias aqui apresentadas.

6.3 Perspectiva Matemática

A Geometria Projetiva busca explorar como figuras em três dimensões podem ser representadas em duas dimensões? No final do século XIII artistas começaram a retratar situações reais em suas obras, de forma realista. Ao longo do tempo, na tentativa de encontrar a melhor forma de representar essas situações buscavam pintar objetos sob vários pontos de vista e diferentes distâncias do "olho". Assim, na Geometria Projetiva, tenta-se explicar como o "olho"percebe o mundo real e para que isso seja possível, deve-se entender o conceito de perspectiva.

Na arte, a perspectividade foi utilizada por vários pintores, tais como Leonardo Da Vinci (1452-1519), nessa época era muito importante utilizar técnicas que pudessem melhorar o realismo em suas obras. Para criar uma profundidade em seus quadros, os artistas começaram a observar o que o olho vê do objeto a ser pintado através de vários raios de luz que passam pelo objeto até o olho.

Assim através dessa noção de perspectiva pode-se introduzir o conceito de perspectiva matemática. No lugar do olho e dos raios de luz, utiliza-se a família de todas as retas do $\mathbb{R}^3$ que passam através de um ponto dado. Por conveniência, esse ponto será frequentemente a origem O. A tela será substituída por um plano no $\mathbb{R}^3$ que não passa pela origem.

Agora considere dois planos π e π' os quais não passam por O. Um ponto P em π e um ponto P' em π' são perspectivas de O se existe uma reta que passa por O, P e P'. Uma perspectivade de π para π' centrada em O é uma aplicação que mapeia um ponto P em π para um ponto P' em π', onde P e P' estão na perspectiva de O.

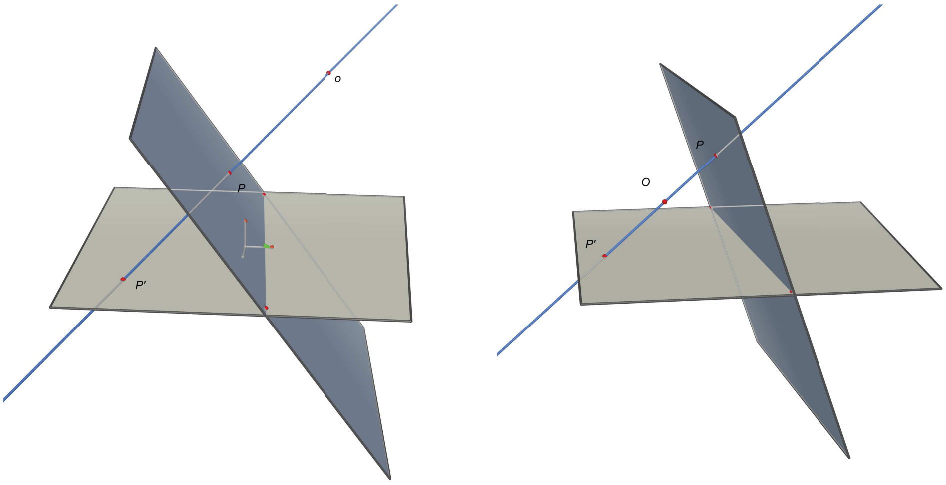

Figura 6.1: Perspectividade

Para que essa função esteja bem definida todos os pontos do domínio devem ter imagem. Entretanto, se P é um ponto de π tal que OP é paralelo a π', então P não pode ter imagem em π' e não pode portanto pertencer ao domínio da perspectiva. Para isso define-se a imagem de P em um ponto o qual está no infinito, chamado de ponto ideal.

Observe a figura abaixo. O ponto P não tem imagem em nenhum ponto de π.

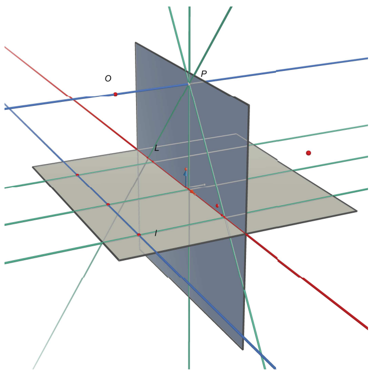

Figura 6.2: Ideia de Ponto Ideal

6.4 O plano projetivo

Antes de definir as principais propriedades e apresentar os teoremas da geometria projetiva, define-se as propriedades e os objetos do espaço projetivo. De modo geral, o plano projetivo $\mathbb{RP}^2$ é a representação no espaço bidimensional de objetos dados no espaço tridimensional.

Assim pode-se definir um ponto projetivo da seguinte forma: Imagine um olho situado na origem do $\mathbb{R}^3$ olhando para um plano fixado. Essa correspondência entre cada reta que passa pelo olho e intersecta o plano define o espaço de pontos dessa nova geometria. Desse modo tem-se a seguinte definição.

Definição 6.4.1 *Um **Ponto projetivo** é uma reta no $\mathbb{R}^3$ que passa através da origem de $\mathbb{R}^3$. O **plano projetivo** real $\mathbb{RP}^2$ é o conjunto de todos esses pontos.*

Afim de realizar provas de resultados dessa geometria algebricamente, é necessário utilizar uma notação algébrica para expressar os pontos do $\mathbb{RP}^2$, para isso utiliza-se o fato de que a reta l que passa pela origem em $\mathbb{R}^3$ e por outro ponto distinto é única, pois é determinada por um ponto qualquer e pela origem. Por exemplo, existe uma única reta em $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e pelo ponto de coordenadas $(4, 2, 6)$, então serão utilizadas essas coordenadas para especificar um ponto projetivo. Desse modo tem-se a seguinte definição.

Definição 6.4.2 *A expressão $[a, b, c]$ na qual número a, b, c nem todos são diferentes de zeros, representa o Ponto P no $\mathbb{RP}^2$ que consiste em uma única reta no $\mathbb{R}^3$ que passa através de $(0, 0, 0)$ e (a, b, c). Refere-se a $[a, b, c]$ como **coordenadas homogêneas** de P. Se (a, b, c) tem posição do vetor $\boldsymbol{v}$, então muitas vezes denota-se P por $[\boldsymbol{v}]$ e diz que P pode ser **representado** por $\boldsymbol{v}$.*

Exemplo 6.4.1 : Para cada uma das seguintes coordenadas homogêneas encontre a coordenada inteira que representam os mesmos pontos no $\mathbb{RP}^2$.

(a) $[\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}]$.

(b) $[0, 4, \frac{2}{3}]$.

(c) $[\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}]$.

Solução:

(a) $[6, 4, -1]$.

(b) $[0, 12, 2]$.

(c) $[1, -2, -3]$.

Tendo definido os pontos projetivos, agora define-se uma figura projetiva. Assim como na Geometria Euclidiana, uma figura é definida como um subconjunto do $\mathbb{R}^2$, na Geometria Projetiva segue que:

Definição 6.4.3 *Uma **figura projetiva** é um subconjunto do* $\mathbb{RP}^2$.

As figuras projetivas então são conjuntos de retas no $\mathbb{R}^3$ que passam pela origem. Portanto cones duplos com vétice em O e pirâmides duplas de base quadradas com vértice em O são exemplos de figuras projetivas.

Um tipo particularmente simples de figuras projetivas é um plano que passa através da origem. Ele é uma figura projetiva pois pode ser formado por um conjunto de todos os pontos (retas do $\mathbb{R}^3$que passam pela origem) que estão em um plano. Portanto tem-se a definição a seguir.

Definição 6.4.4 *Uma **Reta** (ou **reta projetiva**) em* $\mathbb{RP}^2$ *é um plano no* $\mathbb{R}^3$ *que passa através da origem. Pontos no* $\mathbb{RP}^2$ *são **colineares** se eles estão contidos na reta.*

Uma vez que uma reta em $\mathbb{RP}^2$ é um plano em $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem, deve consistir em pontos Euclidianos (x, y, z) que satisfaz a equação da forma $ax + by + cz = 0$ onde a, b, c são números reais diferentes de zero. Para isso tem-se o seguinte teorema:

Teorema 6.4.1 *A equação geral da reta no* $\mathbb{RP}^2$ *é*

$$ax + by + cz = 0$$

onde a, b, c *nem todos são iguais a zero.*

Na Geometria Euclidiana existe uma única reta que passa por dois pontos distintos. Análogamente na Geometria Projetiva, dois Pontos (retas que passam pela origem) determinam uma única Reta (plano que passa pela origem). Assim segue o teorema abaixo.

Teorema 6.4.2 ***Propriedade de colinearidade do*** $\mathbb{RP}^2$

Quaisquer dois pontos distintos do $\mathbb{RP}^2$ *estão contidos em uma única reta.*

Estratégia para determinar a equação da reta.

Para determinar a equação da reta do $\mathbb{RP}^2$ que passa pelos pontos $[d, e, f]$ e $[g, h, k]$.

- Escreva a equação abaixo:
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 0$$

- Expanda o determinante em termos de entrada da primeira linha para obter a requerida equação da forma $ax + by + cz = 0$.

Exemplo 6.4.2 : Determine uma equação para a reta que passa pelos pontos $[2, 5, 4]$ e $[3, 1, 7]$ em $\mathbb{RP}^2$.

Solução:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Logo a equação é dada por

$$31x + 2y - 13z = 0$$

.

Definição 6.4.5 *Os pontos* $[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]$ *são conhecidos como o triângulo de referência. O ponto* $[1, 1, 1]$ *é chamado ponto unidade.*

Observe que duas retas distintas necessariamente se encontram em um único ponto. De fato, uma reta no $\mathbb{RP}^2$ é um plano em $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem, e dois planos distintos que passam pela origem em $\mathbb{R}^3$ devem se intersectar em uma única reta euclidiana que é um Ponto. Isso é diferente da situação da Geometria Euclidiana onde retas paralelas não se encontram.

Teorema 6.4.3 ***Propriedade de Incidência***

Duas retas quaisquer no $\mathbb{RP}^2$ *se intersectam em um único ponto em* $\mathbb{RP}^2$.

Definição 6.4.6 *Um plano imerso é um plano* π *que não passa pela origem, juntamente com o conjunto de pontos ideais de* π. *O plano em* $\mathbb{R}^3$ *com equação* $z = 1$ *é chamado* *plano imerso padrão. A aplicação do $\mathbb{RP}^2$ no plano imerso padrão é chamada imersão padrão do $\mathbb{RP}^2$.*

Embora pode-se escolher qualquer plano que não passa pela origem para representar figuras do $\mathbb{RP}^2$, a representação dela depende dessa escolha. Por exemplo, supondo que π_1 é um plano que não passa pela origem com equação $y = -1$ e π_2 outro plano com equação $z = -1$. Agora considere as figuras projetivas que consistem em duas Retas l_1 e l_2 com equação $x = -z$ e $x = z$ respectivamente. Essas Retas se intersectam no Ponto $[0, 1, 0]$.

No plano π_1 as retas l_1 e l_2 são representadas por duas retas que se encontram no ponto $[0, 1, 0]$. Entretando, no plano π_2 o ponto $[0, 1, 0]$ é um Ponto ideal, pois as retas são representadas por retas paralelas, logo não se encontram. O contraste entre essas duas representações das retas l_1 e l_2 é particularmente impressionante se extrairmos os dois planos que não passam pela origem do $\mathbb{R}^3$ e colocarmos lado a lado, como na imagem abaixo.

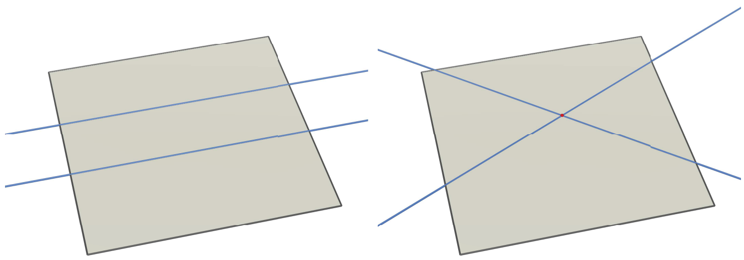

Figura 6.3: Retas em um plano imerso

Esse exemplo mostra que se duas retas parecem ser paralelas em um plano, podem não ser paralelas em outro. Logo paralelismo não é uma propriedade projetiva, já que depende da escolha do plano de projeção. Assim nessa geometria não faz sentido falar em retas paralelas.

6.5 Transformações projetivas

Tendo introduzido o espaço de pontos projetivos $\mathbb{RP}^2$, agora basta descrever as transformações do $\mathbb{RP}^2$. Primeiramente serão definidas as transformações projetivas algebricamente, então será realizada uma interpretação geométrica das transformações utilizando a ideia de perspectividade, introduzida anteriormente e finalmente utilizar o Teorema Fundamental da Geometria Projetiva.

6.5.1 O grupo de transformações projetivas

A ideia de um grupo de transformações projetivas é pensar em uma geometria que consiste num espaço de pontos junto com um grupo de transformações agindo nesse espaço.

Relembrando, um ponto do $\mathbb{R}^3$ (outro diferente da origem) em um plano π que não passa pela origem tem coordenadas $\mathbf{x} = (x, y, z)$ com a respectiva base canônica do $\mathbb{R}^3$, e coordenadas homogêneas do Ponto correspondente $[\mathbf{x}]$ no $\mathbb{RP}^2$ (o qual representa os pontos $[\lambda\mathbf{x} : \lambda \in \mathbb{R}]$) são $[\lambda x, \lambda y, \lambda z]$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ diferente de zero. Uma vez que os pontos do $\mathbb{RP}^2$ são retas que passam pela origem do $\mathbb{R}^3$, precisamos de um grupo de transformações que mapeiam retas através da origem no $\mathbb{R}^3$ em retas que passam pela origem no $\mathbb{R}^3$. Transformações adequadas do $\mathbb{R}^3$ que fazem isso são transformações lineares inversíveis.

Se $\mathbf{A}$ é uma matriz de transformação inversível do $\mathbb{R}^3$ nele mesmo, a transformação mapeia pontos $\mathbf{x} = (x, y, z)$ do $\mathbb{R}^3$ para pontos $\mathbf{Ax}$ do $\mathbb{R}^3$ então a transformação projetiva com a matriz $\mathbf{A}$ mapeia Pontos $[\mathbf{x}]$ do $\mathbb{RP}^2$ para pontos do $\mathbb{RP}^2$. Assim pode-se definir uma transformação da Geometria Projetiva da forma a seguir.

Definição 6.5.1 *Uma **transformação projetiva** do $\mathbb{RP}^2$ é uma função $t : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ da forma:*

$$t : [\boldsymbol{x}] \mapsto [\boldsymbol{Ax}]$$

onde $[\boldsymbol{A}]$ é uma matriz inversível de ordem 3. Dizemos que $[\boldsymbol{A}]$ é a matriz associada a t.

O conjunto de todas as transformações projetivas do $\mathbb{RP}^2$ é denotado por $P(2)$.

Teorema 6.5.1 *O conjunto das transformações projetivas $P(2)$ forma um grupo sob a operação de composição de funções.*

- Dado t_1 e t_2 transformações projetivas definidas por $t_1 : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{A}_1\mathbf{x}]$ e $t_2 : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{A}_2\mathbf{x}]$ onde $\mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2$ são inversíveis, a composição $(t_1 \circ t_2)$ é uma transformação projetiva.
- Dado $i : \mathbb{RP}^2 \mapsto \mathbb{RP}^2$ a transformação definida por $i : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{Ix}]$ onde I é a matriz identidade. A composição $(t \circ i) = (i \circ t) = t$. Logo i é a transformação identidade;
- Dado $t : \mathbb{RP}^2 \mapsto \mathbb{RP}^2$ a transformação definida por $t : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{Ax}]$, tem se a composição $(t \circ t^{-1}) = (t^{-1} \circ t) = i$. Logo t^{-1} é a transformação inversa;
- Toda composição de funções é associativa.

E portanto, segue que o conjunto das transformações projetivas $P(2)$ forma um grupo.

Se t_1 e t_2 são transformações projetivas com as matrizes associadas $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ respectivamente, então $(t_1 \circ t_2)$ é uma transformação projetiva com uma matriz associada $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$. Então segue a estratégia para a composição de transformações projetivas.

Estratégia para fazer a composição de duas transformações t_1 e t_2.

- Escreva as matrizes $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ associadas com t_1 e t_2;
- Calcule $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$;
- Escreva a composição $t_1 \circ t_2$ na qual $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ é associada.

Se t é uma transformação projetiva com uma matriz $\mathbf{A}$ associada, então t^{-1} é uma transformação projetiva com uma matriz associada $\mathbf{A}^{-1}$. Então tem-se a seguinte estratégia para calcular a inversa da transformação projetiva.

Estratégia para encontrar a inversa da transformação projetiva t.

- Escreva a matriz $\mathbf{A}$ associadas com t_1;
- Calcule $\mathbf{A}^{-1}$;
- Escreva a inversa t^{-1} na qual $\mathbf{A}^{-1}$ é associada.

6.5.2 Algumas propriedades das transformações projetivas

Agora serão verificadas duas importantes propriedades das transformações projetivas, que são incidência e colinearidade.

Um reta do $\mathbb{RP}^2$ é um plano do $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem, portanto consiste em um cojunto de pontos (x, y, z) do $\mathbb{R}^3$ que satisfaz a equação da forma:

$$ax + by + cz = 0$$

onde a, b, c são diferentes de zero. Pode-se escrever essa condição como uma matriz da forma $\mathbf{Lx} = 0$, onde $\mathbf{L}$ é uma matriz linha não nula (a, b, c) e $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$.

Agora dado t a transformação projetiva definida por $t : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{Ax}]$, onde A é uma matriz inversível 3×3 e dado $[\mathbf{x}]$ um Ponto arbitrário da reta $\mathbf{Lx} = 0$. A imagem de $[\mathbf{x}]$ sob t é um Ponto $[\mathbf{x'}]$ onde $\mathbf{x'} = \mathbf{Ax}$. Uma vez que $\mathbf{x}$ satisfaz a equação $\mathbf{Lx} = 0$, segue que $[\mathbf{x'}]$ satisfaz $(\mathbf{LA}^{-1}\mathbf{x'}) = 0$ ou $(\mathbf{LA}^{-1})\mathbf{x'} = 0$. Tirando a “linha” pode-se concluir que a imagem da reta $\mathbf{Lx} = 0$ sob t é a equação da reta

$$(\mathbf{LA}^{-1})\mathbf{x} = 0$$

.

Uma vez que a imagem de uma Reta no $\mathbb{RP}^2$ é uma Reta, segue que a colinearidade é preservada sob uma transformação projetiva.

Note que se $\mathbf{B}$ é qualquer matriz associada a t^{-1}, então $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{A}^{-1}$ para algum λ real não nulo e então $(\mathbf{LA}^{-1})\mathbf{x} = 0$ se, e somente se, $(\mathbf{LB})\mathbf{x} = 0$.

Portanto, a discussão acima é resumida na forma de uma estratégia apresentada a seguir:

Estratégia para encontrar a imagem da Reta

Para encontrar a imagem da Reta $ax + by + cz = 0$ sob a transformação projetiva $t : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{AX}]$:

- Escreva a equação da Reta da forma $\mathbf{Lx} = 0$, onde $\mathbf{L}$ é a matriz (a, b, c);
- Encontre a matriz $\mathbf{B}$ associada com t^{-1};
- Escreva a equação da imagem como $(\mathbf{LB})\mathbf{x} = 0$

Agora considere a propriedade de incidência. Se duas Retas se intersectam no Ponto P, então P está em ambas as Retas. Então se t uma transformação projetiva, então $t(P)$ está na imagem de ambas as Retas. Segue que a imagem sob t do Ponto de interseção das duas Retas é o Ponto de interseção da imagem das duas Retas. Em outras palavras, incidência também é preservada sob uma transformação projetiva. Desse modo segue o seguinte teorema.

Teorema 6.5.2 *Colinearidade e incidência ambas são propriedades projetivas.*

6.5.3 Teorema Fundamental da Geometria Projetiva

No artigo anterior, o qual apresenta o Teorema Fundamental da Geometria Afim, mostra que existe uma transformação única que leva um conjunto de três pontos não colineares em outro conjunto de três pontos não colineares. Então uma transformação afim é determinada exclusivamente por seu efeito em qualquer triângulo.

Agora será explorado um resultado análogo para Geometria Projetiva conhecido como o Teorema Fundamental da Geometria Projetiva. Para isso vamos começar com o seguinte exemplo:

Exemplo 6.5.1 : Seja t_1 e t_2 transformações projetivas com as seguintes matrizes associadas:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$A_2 = \begin{bmatrix} -8 & -6 & -2 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

respectivamente. Encontrar a imagem dos Pontos $[1, -1, 1], [1, -2, 2]$ e $[-1, 2, -1]$ sob t_1 e t_2.

Solução: Tem-se que ambas as transformações t_1 e t_2 levam os Pontos $[1, -1, 1], [1, -2, 2]$ e $[-1, 2, -1]$ para os Pontos $[-2, 0, 1], [0, 3, -2]$ e $[1, -2, 1]$ respectivamente. Note, entretanto, que as transformações t_1 e t_2 não são as mesmas, uma vez que suas matrizes não são múltiplas entre si. Assim, diferente das transformações afins, as transformações projetivas não são unicamente determinadas pelo seu efeito em três Pontos não colineares.

Isso faz pensar sobre se é possível especificar quantos Pontos são necessários para determinar uma transformação projetiva. Para entender o por quê um triângulo é insuficiente para determinar uma transformação projetiva única, considere o que acontece quando olha-se para a transformação projetiva que mapeia o triângulo de referência $([1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1])$ em três pontos não colineares. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 6.5.2 : Encontrar a transformação projetiva que leva os pontos $[1, 0, 0], [0, 1, 0]$ e $[0, 0, 1]$ nos pontos não colineares $[1, -1, 1], [1, -2, 2]$ e $[-1, 2, -1]$ respectivamente.

Solução: Seja $\mathbf{A}$ a matriz associada a t, e seja a primeira coluna de $\mathbf{A}$ sendo $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

Então uma vez que

$$\left[\begin{pmatrix} a & * & * \\ b & * & * \\ c & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

.

Assim tomando $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ como a primeira coluna da matriz $\mathbf{A}$.

Analogamente,

$$\left[\begin{pmatrix} * & d & * \\ * & e & * \\ * & f & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

e

$$\left[\begin{pmatrix} * & * & g \\ * & * & h \\ * & * & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

.

Logo a transformação adequada é dada por $t : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{Ax}]$ onde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Obs: Os Pontos $[1,-1,1], [1,-2,2]$ e $[-1,2,-1]$ não são colineares, logo as colunas da matriz $\mathbf{A}$ são linearmente independentes, e portanto a matriz é inversível.

Esse exemplo ilustra o fato de que sempre é possível encontrar uma transformação projetiva $t : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{Ax}]$ que leva o triângulo de referência em três Pontos não colineares. Entretanto, note que a transformação obtida não é única. De fato, rescrevendo os Pontos $[1,-1,1], [1,-2,2]$ e $[-1,2,-1]$ como $[u,-u,u], [v,-2v,2v]$ e $[-w,2w,-w]$ onde u, v e w são números reais diferentes de zero. A transformação $t : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{Ax}]$ ainda leva o triângulo de referência nos Pontos $[1,-1,1], [1,-2,2]$ e $[-1,2,-1]$, mas o efeito que t tem em outros pontos do $\mathbb{RP}^2$ depende dos valores de u, v e w. Então para obter uma transformação única, deve-se atribuir um valor particular para u, v e w. Podemos fazer isso incluindo um quarto Ponto, o Ponto unidade $[1,1,1]$.

Observe o seguinte exemplo:

Exemplo 6.5.3 : Encontrar a transformação projetiva t que mapeia os Pontos $[1,0,0]$,$[0,1,0]$, $[0,0,1]$ e $[1,1,1]$ nos pontos $[1,-1,1]$, $[1,-2,2]$, $[-1,2,-1]$ e $[0,1,2]$ respectivamente.

Solução: Se $\mathbf{A}$ é uma matriz associada a t então suas colunas devem ser múltiplas das cooordenadas homogêneas $[1,-1,1], [1,-2,2]$ e $[-1,2,-1]$, ou seja,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & v & -w \\ -u & -2v & 2w \\ u & 2v & -w \end{pmatrix}$$

Também para garantir que t mapeia $[1,1,1]$ em $[0,1,2]$ deve-se escolher u, v e w de forma que:

$$\left[\begin{pmatrix} u & v & -w \\ -u & -2v & 2w \\ u & 2v & -w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right].$$

Resolvendo as equações então:

$$u + v - w = 0$$

$$-u - 2v + 2w = 1$$

$$u + 2v - w = 2$$

Somando a segunda e a terceira equação temos $w = 3$. Subtraindo a primeira com a terceira temos $v = 2$. Finalmente, substituindo v e w na primeira equação obtém-se $u = 1$. Logo a transformação projetiva é dada por $t : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{Ax}]$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -4 & 6 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

.

Obs: a matriz $\mathbf{A}$ é inversível pois os vetores das colunas são linearmente independentes.

A partir dos exemplos mostrados acima, podemos resumir em uma estratégia a qual serve para encontrar a transformação projetiva, que mapeia os pontos do triângulo de referência mais o ponto unitário, em outros quatro pontos. Entretanto, isso funciona se os pontos não são colineares, o método deve falhar se três de quatro pontos são colineares, logo devemos excluir essa possibilidade. Assim segue a seguinte estratégia:

Estratégia para Encontrar Transformações Projetivas

- Para encontrar a transformação projetiva que mapeia os pontos

$$[1,0,0]; [a_1, a_2, a_3]$$

$$[0,1,0]; [b_, b_2, b_3]$$

$$[0,0,1]; [c_1, c_2, c_3]$$

$$[1,1,1]; [d_1, d_2, d_3]$$

onde nenhum dos pontos

$$[a_1, a_2, a_3], [b_, b_2, b_3], [c_1, c_2, c_3], [d_1, d_2, d_3]$$

são colineares:

encontre u, v e w tal que,

$$\left[\begin{pmatrix} a_1u & b_1v & c_1w \\ a_2u & -b_2v & c_2w \\ a_3u & b_3v & c_3w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}\right];$$

- Escreva a transformação projetiva requerida na forma $t : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{A}\mathbf{x}]$ onde $\mathbf{A}$ é é qualquer múltiplo real diferente de zero da matriz

$$\begin{pmatrix} a_1u & b_1v & c_1w \\ a_2u & -b_2v & c_2w \\ a_3u & b_3v & c_3w \end{pmatrix}$$

.

Então, de modo análogo ao que foi realizado acima, pode-se encontrar a transformação projetiva que leva um conjunto de quatro pontos em outros quatros pontos, apenas com a restrição de que três deles não podem ser colineares. Com isso, pode-se resolver essa restrição exigindo que cada ponto esteja sob o vértice de um quadrilátero, o qual define-se da seguinte forma.

Definição 6.5.2 *Um quadrilátero é um conjunto de quatro pontos A, B, C e D (três deles não colineares), com os segmentos AB, BC, CD e DA.*

Assim pode-se enunciar o Teorema Fundamental da Geometria Projetiva.

Teorema 6.5.3 ***(Teorema Fundamental da Geometria Projetiva)***

Seja $ABCD$ e $A'B'C'D'$ dois quadriláteros em $\mathbb{RP}^2$ então:

(a) existe uma transfomração projetiva t que mapeia A em A', B em B', C em C' e D em D'.

(b) a transformação projetiva é única. [1][Pág. 162]

O Teorema Fundamental da Geometria Projetiva diz que existe uma transformação projetiva que leva um quadrilátero em outro quadrilátero. Então tem-se o seguinte corolário.

Corolário 6.5.1 *Todos os qudriláteros são projetivos-congruentes.*

Para encontrar a transformação projetiva que leva um quadrilátero em outro, basta usar a simplificação da estratégia que foi utilizada acima. Desse modo segue a estrégia abaixo.

Estratégia para determinar a transformação projetiva

Para determinar a transformação projetiva t que mapeia os vértices de um quadrilátero $ABCD$ aos correspondentes $A'B'C'D'$:

- Encontre a transformação projetiva t_1 que mapeia o triângulo de referência e o ponto unitário dos pontos A, B, C, D respectivamente.
- Encontre a transformação projetiva t_2 que mapeia o triângulo de referêcia e o ponto unitário dos pontos A', B', C', D' respectivamente.
- Calcule $t = t_2 \circ t_1^{-1}$.

6.5.4 Interpretação Geométrica das transformações projetivas

A partir da definição geométrica de perspectiva, apresentada anteriormente, será definido o termo *transformação perspectiva* mostrando como ela pode ser interpretada por uma transformação projetiva, e ainda provar que qualquer transformação projetiva pode ser expressa como uma composição de no máximo três transformações perspectivas.

A ideia é construir uma transformação biunívoca que leva os pontos de π unido com os pontos ideais de π em π' unido com os pontos ideais de π'. Na aplicação que leva π em π' existem alguns pontos que não terão imagem, como será visto depois. Nesses casos não basta apenas levar as imagens em pontos ideais, pois desse modo não há como fazer o caminho inverso (lembrando que a transformação devem formar um grupo), assim será realizada uma construção de modo geométrico para que haja um mapeamento um a um desses pontos.

Então sejam π e π' dois planos que não passam pela origem O no espaço $\mathbb{R}^3$, e seja $C(\neq O)$ um ponto de $\mathbb{R}^3$ tal que OC não é paralelo a π ou π'. Suponha que C tem como vetor posição $\mathbf{c}$ com origem em O. E também seja σ uma perspectiva arbitrária do ponto C que mapeia o plano π no plano π'. Agora a perspectiva σ mapeia qualquer ponto P (com vetor de posição $\mathbf{p}$) em π em algum ponto P' (com vetor posição **p'**), desde que o vetor $\mathbf{p} - \mathbf{c}$ não seja paralelo ao plano π'. Nós então definimos a transformação perspectiva, associada a σ que mapeia $\mathbb{R}^3$ nele mesmo, como sendo a transformação que mapeia a reta $[\mathbf{p}-\mathbf{c}]$ na reta $[\mathbf{p'}-\mathbf{c}]$. Mas, uma vez que C', P e P' são colineares, segue que os vetores $\mathbf{p}-\mathbf{c}$ e $\mathbf{p'}-\mathbf{c}$ devem ser paralelos (equivalentemente, $[\mathbf{p}-\mathbf{c}]=[\mathbf{p'}-\mathbf{c}]$); consequentemente existe algum número real t tal que

$$\mathbf{p'}-\mathbf{c}=t(\mathbf{p}-\mathbf{c})$$

Pode-se escrever então essa fórmula do seguinte modo

$$\mathbf{p'}=t\mathbf{p}-t\mathbf{c}+\mathbf{c}$$

ou

$$\mathbf{p'}=t\mathbf{p}+(1-t)\mathbf{c}$$

então

$$[\mathbf{p}]\mapsto[t\mathbf{p}+(1-t)\mathbf{c}]$$

.

Dessa maneira, a perspectividade σ fornece um mapeamento um a um de π para π' exceto para aqueles pontos da da reta l em π onde π corta o plano através de C paralelo a π', também, não existem pontos de π que são mapeados em pontos de π' na reta l' onde π corta o plano através de C paralelo a π.

Para estender a aplicação a esses pontos, será utilizado o fato de que os pontos ideais nos planos correspondem às direções das retas no plano, ao invés de pontos no plano.

Então, primeiramente, seja P um ponto de π que está na reta l, então os pontos O, C, P não são colineares, uma vez que OC não é paralelo ao plano π'. Denote o vetor de posição $\vec{OP}$ por $\mathbf{p}$. Seja o plano que passa por O, P, C que intersecta o plano π' em uma reta, e seja $\mathbf{p}'$ o vetor posição com origem em O que é paralelo a essa reta. Então pode-se especificar que a aplicação (estendida) σ mapeia a reta $[\mathbf{p}]$ através de O na reta $[\mathbf{p'}]$ através de O.

Analogamente, seja P' um ponto de π' que está sobre a reta l', então os pontos O, C, P' não são colineares uma vez que OC não e paralelo a π. Denote o vetor de posição $\vec{OP'}$ por $\mathbf{p'}$. Seja o plano que passa por O, C e P' ele encontra o plano π em uma reta, e seja $\mathbf{p}$ o vetor posição com origem em O que é paralelo a essa reta. Então pode-se especificar que a aplicação (estendida) σ mapeia a reta $[\mathbf{p}]$ através de O na reta $[\mathbf{p'}]$ através de O.

Finalmente, a aplicação estendida mapeia a reta que passa através de O que é paralela a reta de interseção de π e π' nela mesma.

Desse modo, é construída transformação que é biunívoca de $\pi \cup$ [Pontos ideais de π] para $\pi' \cup$ [Pontos ideais de π'] associada a uma maneira natural com a perspectiva dada σ, a qual é chamada de transformação perspectiva. Isso mapeia a família das retas euclidianas através de O nela mesma, em outras palavras do $\mathbb{RP}^2$ nele mesmo.

Analogamente tem-se que uma transformação perspectiva pode ser pensada como uma transformação projetiva.

Além disso segue o seguinte resultado.

Teorema 6.5.4 ***Teorema da Perspectividade***

Toda transformação projetiva pode ser expressa como uma composição de três transformações perspectivas.

6.5.5 Teorema de Desargues

Teorema 6.5.5 ***Teorema de Desargues***

Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ triângulos do $\mathbb{R}^2$ tal que as retas AA', BB' e CC' se encontram no ponto U. Se BC, $B'C'$ se encontram em P, CA e $C'A$ se encontram em Q e AB e $A'B'$ se econtram em R, então P, Q e R são colineares.

A prova desse teorema é pensada a partir das propriedades projetivas de colinearidade e incidência, as quais podem ser interpretadas como projetividades do $\mathbb{RP}^2$. Através do Teorema Fundamental da Geometria Projetiva sabe-se que qualquer configuração do teorema é projetiva-congruente a uma configuração em que $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, 1, 0]$, $C = [0, 0, 1]$ e $U = [1, 1, 1]$. Se é possível provar o teorema nesse caso especial, então pode-se usar o fato de que a congruência-projetiva preserva propriedades projetivas para deduzir o teorema em um caso geral.

Primeiro observe que a reta que passa por AU através dos pontos $[1, 0, 0]$ e $[1, 1, 1]$ tem equação $y = z$. Uma vez que A' é um ponto de AU, deve ter coordenadas homogêneas da forma $[a, b, b]$, para algum número real a e b. Agora $b \neq 0$ uma vez que $A \neq A'$, então pode-se reescrever as coordenadas homogêneas de A' da forma $[p, 1, 1]$ (onde $p = \frac{a}{b}$).

Analogamente, as coordenadas homogêneas dos pontos B' e C' podem ser reescritas da forma $[1, q, 1]$ e $[1, 1, r]$, respectivamente para algum número real q e r.

Agora encontra-se o ponto P onde BC intersecta $B'C'$. A reta BC tem equação $x = 0$. Uma vez que a reta $B'C'$ passa através dos pontos $B' = [1, q, 1]$ e $C' = [1, 1, r]$ deve ter equação

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & q & 1 \\ 1 & 1 & r \end{vmatrix} = 0 \tag{6.1}$$

a qual pode-se reescrever da seguinte forma

$$(qr-1)x-(r-1)y+(1-q)z=0$$

Segue que o ponto de interseção das retas BC e $B'C'$ deve ter $x=0$ e $(r-1)y = (1-q)z$ de modo que P tem coordenadas homogêneas $[0, 1-q, r-1]$.

Analogamente os pontos Q e R tem coordenadas homogêneas $[1-p, 0, r-1]$ e $[1-p, q-1, 0]$ respectivamente.

Agora, os pontos P, Q e R são colineares se

$$\begin{vmatrix} 0 & 1-q & r-1 \\ 1-p & 0 & r-1 \\ 1-p & q-1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Logo
$$-(1-q)(1-p)(1-r)+(r-1))(1-p)(q-1)=0$$

Segue que P, Q e R são colineares. O resultado geral algora vale para congruência-projetiva.

Exemplo 6.5.4: Seja $\triangle ABC$ um triângulo em $\mathbb{R}^2$ e seja U um ponto qualquer de $\mathbb{R}^2$ que não é colinear com quaisquer dois pontos A, B e C. Sejam as retas AU, BU e CU que se encontram com as retas BC, CA e AB nos pontos A', B' e C' respectivamente. A seguir, as retas BC e $B'C'$ se encontram no ponto P, AC e $A'C'$ se encontram em Q e AB e $A'B'$ se encontram em R. Segue do teorema de Desargues que P,Q e R são colineares.

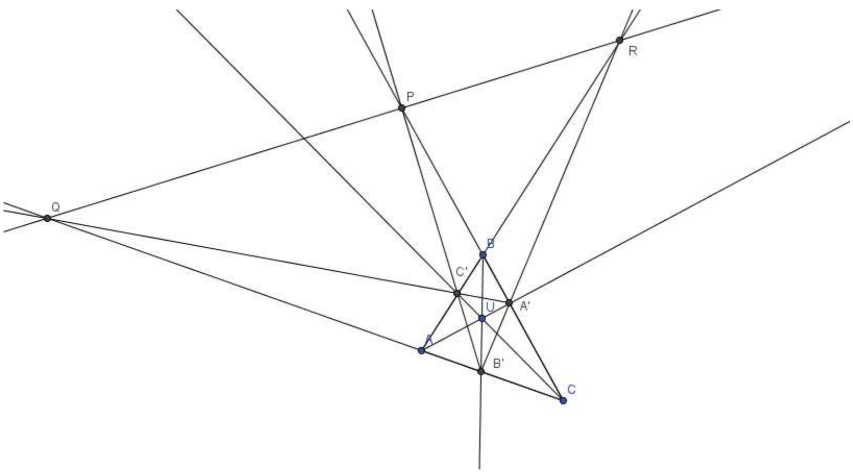

Figura 6.4: Exemplo - Teorema de Desargues

REFERÊNCIAS

BRANNAN, David A.; ESPLEN, Matthew F.; GRAY, Jeremy J. Geometry. United Kingdom: Cambridge University Press 2012.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o estudo das Geometrias Afim e Projetiva foi possível vislumbrar o caminho realizado pelo matemático Felix Klein, através de um grupo de transformações. Assim, esse trabalho propiciou uma revisão de conteúdos das disciplinas de Álgebra, e Álgebra Linear, e além disso, como a Geometria Euclidiana pode ser vista sob o ponto de vista das transformações.

As geometrias apresentadas, tinham como foco estudá-las através de um grupo de transformações adequado, mas para isso foi preciso explorar outros elementos cruciais para o desenvolvimento das mesmas, assim como definir suas propriedades, mostrar alguns teoremas e resultados que podem ser demonstrados de modo menos abstrato. Nesse sentido ressalta-se, por exemplo, a demonstração do Teorema de Ceva disponível em [4].

Portanto, a realização desse trabalho, contribuiu para o desenvolvimento de conhecimentos muito importantes da matemática. O desejo de continuar pesquisando na área, e ainda o rigor matemático nas aplicações são essenciais para que haja um crescimento individual, as vezes coletivo, sobre a matemática.

REFERÊNCIAS

BRANNAN, David A.; ESPLEN, Matthew F.; GRAY, Jeremy J. Geometry. In: *Cambridge University Press*. New York, USA. 2012.

KLINE, Morris. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times *Oxford University Press* Oxford, United Kingdom : 1990.

TRKOVSKA, Dana. Felix Klein and his Erlanger Programm. *Annual Conference of Doctoral Students - WDS 2007*, 2007. Prague, Czech Republic

COXETER, Harold S. M.; GREITZER Samuel L. Geometry Revisited. In: *The Mathematical Association of America*. Washington, DC. USA. 1967.