

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM  
MATEMÁTICA

DEIZE REGINA POLONI

APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS AO MODELO DE  
CRESCIMENTO DE TILÁPIA-DO-NILO

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO

2018

DEIZE REGINA POLONI

**APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS AO MODELO  
DE CRESCIMENTO DE TILÁPIA-DO-NILO**

Trabalho de Conclusão de Curso do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná campus Toledo.

Orientadora: Ma. Márcia Regina Piovesan

TOLEDO  
AGOSTO/2018

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM  
MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS AO MODELO DE CRESCIMENTO DE TILÁPIA-DO-NILO, foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata n<sup>o</sup> -- de --/--/----

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Ma. Márcia Regina Piovesan orientadora

Ma. Jahina Fagundes de Assis Hattori

Dra. Suellen Ribeiro Pardo Garcia

TOLEDO

2018

## RESUMO

A presente pesquisa aborda um estudo sobre equações diferenciais e modelagem matemática aplicada ao crescimento de peixes. Com isso avaliar-se-á um modelo matemático, que mostre a determinação da conversão alimentar (CA), sabendo que o tempo de cultivo da tilápia é fundamental para avaliar a relação custo/benefício das rações comerciais disponíveis. O índice de conversão alimentar é calculado dividindo a quantidade total de ração fornecida (em um viveiro, tanque rede ou raceway) pelo ganho de peso dos peixes. O ganho de peso é calculado subtraindo-se da produção obtida em um viveiro, tanque rede ou raceway, o peso total dos peixes na estocagem. Por meio de uma pesquisa bibliográfica e amostral, apresentaremos definições, classificações, métodos e por fim, a aplicação dos dados coletados ao modelo de Von Bertalanffy.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais. Modelos Matemáticos. Tilápia-do-Nilo.

## ABSTRACT

The present research deals with a study on differential equations and mathematical modeling applied to fish growth. This will evaluate a mathematical model, which shows the determination of the food conversion (AC), knowing that the time of cultivation of the tilapia is fundamental to evaluate the cost / benefit relation of the commercial roots available, the food conversion index shall be calculated by dividing the total (in a nursery, tank network or raceway) by weight gain of the fish. The weight gain is calculated by subtracting from the production obtained in a nursery, tank network or raceway, the total weight of fish in storage. Through bibliographic research sample, we will present definitions, classifications, methods and, finally, the application of the data collected from the Von Bertalanffy model.

**Keywords:** Differential Equations. Mathematical models. Nile Tilapia

## **Agradecimentos**

A Deus por ter me dado saúde força e fé para superar as dificuldades.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior.

A minha orientadora Ma Marcia Regina Piovesan, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções, incentivos e paciência.

A minha mãe Ilsa de Camargo Poloni pelo amor, apoio, incentivo, paciência, orações sem ela essa jornada seria muito mais difícil.

A minha namorada e companheira pela, paciência e apoio incondicional.

A minhas irmãs e sobrinhos, que nos momentos de minha ausência dedicados ao estudo, sempre fizeram entender que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente!

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte de minha formação, o meu muito obrigado.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

4.1	Gráfico do modelo de regressão linear . . . . .	27
5.1	Gráfico da aplicação do modelo de regressão linear . . . . .	34
5.2	Gráfico do Modelo de Malthus . . . . .	37
5.3	Curva de Gompertz para o crescimento da tilápia . . . . .	39

## LISTA DE TABELAS

5.1	Peso da Tilápia . . . . .	33
5.2	Dados aplicados ao Modelo de Malthus . . . . .	36
5.3	Dados aplicados ao modelo de Gompertz . . . . .	38
5.4	Valores taxa de catabolismo . . . . .	41
5.5	Dados aplicados ao Modelo de Von Bertalanffy . . . . .	42
5.6	Comparação de Modelos . . . . .	44



# SUMÁRIO

<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES . . . . .</b>	<b>IV</b>
<b>LISTA DE TABELAS . . . . .</b>	<b>V</b>
<b>1 INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>2 Tilápia-do-Nilo . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>3 Modelagem Matemática e Equações Diferenciais . . . . .</b>	<b>5</b>
3.1 Modelagem Matemática . . . . .	5
3.2 Equações Diferenciais . . . . .	6
3.3 Classificação pelo tipo: . . . . .	7
3.4 Classificação pela ordem . . . . .	8
3.5 Classificação pela Linearidade: . . . . .	8
3.6 Soluções . . . . .	9
3.7 Existência e unicidade de solução . . . . .	9
3.8 Problemas de valor inicial e problemas de valores de contorno . . . . .	10
3.9 Equações Diferenciais de Primeira ordem . . . . .	12
3.10 Equações lineares . . . . .	12
3.11 Equações separáveis . . . . .	14
3.12 Equações homogêneas . . . . .	16
3.13 Equações exatas . . . . .	17
3.14 Fatores integrantes para as Equações Exatas . . . . .	17
3.15 Equação de Bernoulli . . . . .	18
<b>4 Modelos Matemáticos . . . . .</b>	<b>20</b>
4.1 Modelo de Malthus . . . . .	20
4.2 Modelo de Gompertz . . . . .	21
4.3 Modelo de Von Bertalanffy. . . . .	23
4.4 Método de Ford-Walford . . . . .	26
4.5 Regressão linear . . . . .	27
4.6 Avaliação do peso máximo $p_{\infty}$ . . . . .	30
4.7 Crescimento específico ou lei da Alometria . . . . .	30
<b>5 Coleta de dados e Aplicações dos Modelos . . . . .</b>	<b>32</b>
5.1 Coleta de dados . . . . .	32

5.2	Aplicações . . . . .	32
5.3	Aplicação do método de regressão linear . . . . .	32
5.4	Aplicação ao Modelo de Malthus . . . . .	34
5.5	Aplicação ao Modelo de Gompertz . . . . .	37
5.6	Aplicação ao Modelo de Von Bertalanffy . . . . .	39
5.7	Comparação dos Modelos . . . . .	43
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>45</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>45</b>

# 1 INTRODUÇÃO

As atividades econômicas do estado do Paraná são bastante variadas, destacando-se entre os estados com a melhor economia do país. A economia está alicerçada na agricultura, pecuária, mineração, extrativismo vegetal e indústria. O desenvolvimento da região oeste do estado reforça uma produção bastante especializada em dois segmentos, sendo eles: grãos e carnes. Especialmente para o município de Toledo e região, a produção de tilápia é uma das atividades importantes de trabalho e renda.

Um estudo feito por Risatto (1993) mostrou que na década de 90, no oeste do Paraná o cultivo de peixe em sua grande maioria era feito por busca de peixes de pequeno porte e variadas espécies de peixe medianos. Muitas indústrias de ração e fórmulas se instalaram na região, sistemas do estilo pesque-pague, em especial para tilápias revertidas sexualmente e a procura por filé de tilápia cresceu nessa região.

Entre os diversos setores da piscicultura está o cultivo da tilápia do Nilo e da tilápia vermelha, peixe com grande benefício produtivo e de bastante procura no mercado nacional e internacional. Mesmo sendo a China o maior produtor mundial de tilápia, responsável por 60% da produtividade mundial, o grande consumo é interno e o filé é de baixa qualidade, sendo a exportação uma pequena parte da produção de tilápia, seus maiores compradores são os Estados Unidos. Logo, o Brasil tem grande capacidade para ser um grande produtor e fornecedor mundial no setor de tilapicultura, conforme várias condições apontadas por Lovshin (1998) das quais destaca-se:

1. Condições climáticas, sendo 70% do território nacional predominante o clima tropical, clima esse favorável para a criação de tilápias, sendo possível o desenvolvimento do peixe durante todo o ano;
2. Independência na produção de grãos como o milho e a soja, gerando assim a ração;
3. O Brasil dispõe da maior quantia de água doce não congelada do planeta e a um baixo custo;
4. Um mercado interno em constante crescimento.

O fornecimento e comercialização da tilápia pode ser dividido em duas vertentes: a) comércio do peixe vivo, esses vendidos por intermediários e transportadores e b) comércio da carne do peixe, ficando a indústria responsável pelos processos de produção e venda para o consumidor final. Isso posto, percebe-se que o Brasil conta com uma alta tecnologia no que diz respeito ao método de transformação industrial usada na indústria pesqueira, no entanto para usufruir completamente dessa estrutura, deve-se ter volume,

qualidade e preço compatível às necessidades das empresas processadoras, enfatiza Shirota (2000).

De acordo com relatório da FAO (2016) estima-se que o Brasil deva aumentar consideravelmente em termos de produção pesqueira e aquícola, isto tem acontecido pelo alto valor nutricional do peixe e pelos benefícios a saúde do consumidor. O estudo demonstra que a produção brasileira será a maior na região sul americana ficando a frente de países como o México e a Argentina, isso devido aos investimentos feitos no setor.

Diante da crescente importância no cenário mundial e nacional, a aquicultura passou a ser considerada estratégica para o Governo Brasileiro. Assim, em 2003, de um pequeno departamento ligado ao Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento, foi criada a Secretaria Especial de Aquicultura e Pesca da Presidência da República (Seap/PR), transformada, em 2009, em Ministério da Pesca e Aquicultura (MPA). O MPA é responsável pela implantação e desenvolvimento da política nacional pesqueira e aquícola, o que fez com que o setor produtivo recebesse mais atenção e, assim, foi estabelecido um marco de governança adequado às suas necessidades.

Na pesquisa, com vistas ao retorno econômico, é necessário coletar dados de animais melhorados geneticamente, ou seja, apesar de a tilápia em nossa região ser de boa qualidade, ela pode ser melhorada através do manejo correto de seus alevinos, assegurando assim uma melhor taxa de crescimento. Variáveis como peso, idade, tamanho, testar diferentes rações adequadas podem gerar resultados importantes para redução de custo da criação, sem perder a qualidade do desenvolvimento dos animais. O relacionamento entre essas variáveis pode ser compreendido com o uso da matemática.

Para o sucesso do uso do modelo matemático primeiramente é imprescindível conhecer a área da aquicultura que se quer trabalhar, e assim abstrair e substituir a linguagem natural das hipóteses por linguagem matemática coerente, que é geralmente traduzida por Equações Diferenciais.

A matemática esta presente em diversas situações e seu desenvolvimento está ligado à pesquisa e ao interesse em descobrir o novo e a investigar situações.

Para Barbosa (2001) a contribuição matemática para sociedade está na resolução de problemas naturais ou sociais, especialmente com a utilização de modelos matemáticos que possam descrever os fenômenos que os promovem.

Segundo Bassanezi (2011) a modelagem se torna eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos trabalhando com a aproximação da realidade, e que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele.

A problemática do presente trabalho é ajustar os padrões dos modelos de Von Bertalanffy e Gompertz aplicados no crescimento da tilápia-do-Nilo, buscando um melhor resultado, que condiz com a expectativa de melhor desenvolvimento na aquicultura. Iniciamos com uma breve abordagem às Equações Diferenciais.

Primeiramente iremos fazer um estudo teórico sobre a tilápia-do-Nilo, também

analisaremos o que a bibliografia fala sobre Equações Diferenciais e em seguida sobre Modelagem Matemática.

Após esse estudo do referencial teórico iremos utilizar uma tabela de dados fornecida por uma empresa privada, que contém dados como peso e a idade da tilápia desde a fase de alevino até a fase adulta, em seguida faremos a análise dos dados e o levantamento das hipóteses, feito isso iremos fazer a transferência da linguagem materna para a linguagem matemática. Para que em seguida possamos fazer a validação dos resultados.

O trabalho será apresentado através de tópicos que abordam, o referencial teórico, onde falaremos sobre a Tilápia-do-Nilo e sua importância socioeconômica. Na sequência, iremos tratar sobre Modelagem Matemática, Equações Diferenciais e suas classificações. Posteriormente, faremos um estudo dos Modelo de Malthus, Modelo de Gompertz e Modelo de Von Bertalanffy, e por fim, faremos a aplicação dos modelos em dados coletados por uma empresa privada do segmento.

## 2 Tilápia-do-Nilo

A tilápia-do-Nilo tem origem africana vêm da família dos ciclídeos, algumas ilustrações arqueológicas em tumbas egípcias sugerem que este peixe já era cultivado há mais de três mil anos. A tilápia-do-Nilo é uma das espécie mais cultivadas. No mundo, estando em segundo lugar (atrás apenas das carpas).No Brasil, a tilápia do Nilo foi introduzida na década de 1970.

Alguns relatos mostram que a primeira tilápia a ser introduzida no Brasil foi a tilápia do Congo por volta de 1952 e logo em seguida foi introduzida a tilápia do Zanzibar, mas essas duas espécies não se mostraram interessantes para o cultivo, e só em 1971 foi trazida para o Brasil a tilápia-do-Nilo. Por apresentar melhor conversão alimentar, maior resistência a doenças e uma excelente adaptação a tanques redes e ser a espécie que melhor se adaptou ao clima é a melhor opção para o cultivo.

O Brasil dentre os países com um alto potencial para à aquicultura se destaca pela sua grande capacidade hídrica e clima favorável. “O Brasil conta com 8.400 km de costa marítima e 5.500.000 ha de reservatórios de água doce, o que corresponde a aproximadamente 12% dos reservatórios do planeta”(Sebrae, 2014).

Segundo o IBGE a produção de tilápia teve um aumento de 9,7% no ano de 2015, a maior parte da produção da tilápia-do-Nilo está concentrada em quatro estados sendo eles o Paraná como sendo o maior produtor onde se produz 28,8% em seguida o Estado de São Paulo que fica com uma fatia de 13,2% seguido pelo Ceará com 12,7% e Santa Catarina com 11,4% dados do IBGE divulgados pela EBC Agência Brasil.

A produção de tilápia não seria satisfatória se não fossem as pesquisas de melhoramento genético, atualmente essa linhagem melhorada tem um ciclo de produção mais curta, assim garante maior rentabilidade à indústria.

Algumas atividades têm sido desenvolvidas ao longo dos anos com o intuito de evoluir e gerar a sustentabilidade da vida rural, com isso a piscicultura passou a assumir um papel de grande importância econômica.

Para Sabbag et al. (2007): “A piscicultura pode ser uma alavanca de desenvolvimento social e econômico, possibilitando o aproveitamento efetivo dos recursos naturais locais, principalmente os hídricos e a criação de postos de trabalhos assalariado”.

É necessário o conhecimento dos custos de produção, pois dentro da gestão empresarial principalmente na atividade rural o empreendedor está muito mais propício a sofrer perdas, sejam elas por variação do câmbio e barreiras sanitárias. O empreendedor também é um pesquisador de preços tanto na compra de insumos como na venda dos peixes.

## 3 Modelagem Matemática e Equações Diferenciais

### 3.1 Modelagem Matemática

Para entender a modelagem matemática, vamos seguir a definição de Biembengut e Hein (2009): “a modelagem é, assim uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias”.

Em outras palavras, podemos entendê-la como um conjunto de ações que como resultado gera um modelo com o propósito de não unicamente obter a modelagem matemática propriamente dita mas achar a solução de uma questão investigada. São 4 ações de acordo com Almeida et al. (2012):

- **Inteiração:** o ponto central dessa ação é observar o tema que está sendo explorado e buscar o máximo de informações possível sobre, utilizando dados quantitativos e qualitativos, por exemplo. É aqui que devem ser definidos os escopos para a solução do problema;
- **Matematização:** é transformar a linguagem em símbolos matemáticos por meio de fórmulas e seleção de variáveis e constantes sobre o problema indicado na primeira ação;
- **Resolução:** é aqui que se cria a modelagem matemática com o propósito da solução do problema levantado na primeira ação por meio de recursos matemáticos;
- **Interpretação de resultados e validação:** é a ação que visa fazer um diagnóstico do resultado encontrado para o problema, averiguando se é compatível com a problemática levantada na primeira ação.

Uma questão fundamental na modelagem de processos evolutivos é a **analogia** pois quando já se conhece os modelos tradicionais fica mais fácil de modelar novas situações, até mesmo porque uma única equação pode servir de modelo para situações de diversas naturezas.

Segundo Bassanezi (2011): “A importância da analogia como instrumento de transferência de conhecimentos é marcante em qualquer situação de aprendizagem - aprende-se uma língua nova muito mais facilmente quando já se conhece bem outras línguas”.

A utilização de modelos matemáticos para o estudo de níveis de crescimento em animais é uma prática que pode auxiliar na escolha do melhor método de exploração

de determinada espécie zootécnica. As curvas de crescimento relacionam o peso de um animal com sua idade, sendo importante para pesquisas e recomendações sobre eficiência de produção, contribuindo, assim, para aumentar o lucro do produtor (Guedes et al.,2004).

Para Bassanezi (2011) “Em geral, a fidelidade de um modelo com relação à realidade retratada é proporcional à complexidade matemática do modelo. O que se procura numa modelagem é estabelecer um ponto de partida com modelos simples, não comprometedores e que possam ser modificados conforme os objetivos vão sendo ampliados”.

Os modelos que servirão como base neste trabalho serão os modelo de Gompertz, Malthus e de Von Bertalanffy. O modelo de Gompertz defende que a taxa de crescimento é grande no início do processo, mudando rapidamente para um crescimento mais lento, o modelos de Malthus trata sobre o crescimento populacional de algumas espécies ele é um modelo de crescimento exponencial e o modelo de Von Bertalanffy é estudado para a curva de crescimento em peso da tilápia.

## 3.2 Equações Diferenciais

Todo o nosso universo é regido por determinadas leis naturais, e muitas destas importantes leis, estão ou podem ser escritas em linguagem matemática.

A álgebra consegue resolver muitos problemas, porém, como alguns fenômenos naturais envolvem certas mudanças, eles podem ser melhor descritos se utilizarmos equações que conseguem relacionar quantidades variáveis.

Para Boyce e Diprima (2006): “Vários problemas, quando escritos em termo matemáticos, exigem a determinação de uma função que obedece a uma equação que contém uma ou mais derivadas da função desconhecida. Estas equações são as equações diferenciais”.

Um modelo matemático em forma de equações diferenciais é utilizado quando as situações modeladas envolvem variáveis contínuas progredindo em relação a outras variáveis contínuas. Onde a associação entre as variáveis dependentes e independentes são atingidas através de hipóteses com relação as taxas de variações instantâneas.

A principal razão para o estudo de equações diferenciais é a tentativa de aprender algo sobre o processo físico, onde acredita-se, que a equação modela. É importante ressaltar que mesmo as equações simples, se apropriam de modelos físicos úteis (crescimento e decrescimento exponenciais, sistemas massa-mola, circuitos elétricos, etc.,). Além disso, a compreensão de um complicado processo natural é adquirida, em geral, por meio da compreensão de modelos mais simples. Assim, devemos entender que a investigação de um problema mais complexo, pode necessitar tanto de análise, quanto de avaliação, e que resultados podem ser apresentados, muitas vezes de diversas formas.

Equações diferenciais, formam a base matemática para diversas áreas da ciência



e da engenharia, aparecem à partir da experiência de elaborar e explicar certos sistemas físicos em termos matemáticos.

Uma Equação Diferencial (ED) estuda quantidades que variam com o tempo, associando uma função  $f$  incógnita a uma ou mais de suas derivadas, ao resolver uma ED significa encontrar funções que satisfaçam a equação.

**Definição 1.1:** Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de **Equação Diferencial (ED)**.

Essas equações diferenciais são classificadas de acordo com o **tipo**, a **ordem** e a **linearidade**.

### 3.3 Classificação pelo tipo:

Segundo Zill e Cullen (2001), “se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente, ela é chamada de **equação diferencial ordinária (EDO)**.”

As equações abaixo são exemplos de equações diferenciais ordinárias.

$$\frac{dy}{dt} - 5y = 1$$

$$(y - x)dx + 4xdy = 0$$

$$\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} = x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Uma equação que envolve derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial parcial (EDP)**.

As equações abaixo são classificadas como equações diferenciais parciais.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

### 3.4 Classificação pela ordem

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada que nela aparece.

A equação,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (ou de ordem dois).

A equação diferencial  $(y - x)dx + 4xdy = 0$ , pode ser escrita na forma,

$$4x \frac{dy}{dx} + y = x$$

trata-se então de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.

A equação,

$$a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

é uma equação diferencial de quarta ordem.

Uma equação diferencial ordinária geral de n-ésima ordem é frequentemente representada da seguinte forma,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

### 3.5 Classificação pela Linearidade:

Uma equação diferencial é chamada de **linear** quando pode ser escrita na forma,

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Observe que as equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

1. A variável dependente  $y$  e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cada termo envolvendo  $y$  é 1.
2. Cada coeficiente depende apenas da variável independente  $x$ .

As equações,

$$x dy + y dx = 0$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

e

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

são equações diferenciais ordinárias de primeira, segunda e terceira ordem lineares, respectivamente.

Por outro lado,

$$yy' - 2y = xe \frac{d^3 y}{dx^3} + y^2$$

é uma equação diferencial ordinária não-linear.

## 3.6 Soluções

**Definição 1.2:** Qualquer função  $f$  definida em algum intervalo  $I$ , que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de **solução** para a equação no intervalo.

Uma solução para equação diferencial ordinária,

$$F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$$

é uma função  $f$  que possui pelo menos  $n$  derivadas e satisfaz a equação

De acordo com Zill e Cullen (2001): Para todo  $x$  no intervalo  $I$ . Deixamos vaga à forma precisa do intervalo  $I$  na Definição 1.2. Dependendo do contexto da discussão,  $I$  pode representar um intervalo aberto  $(a, b)$ , um intervalo fechado  $[a, b]$ , um intervalo infinito  $(0, \infty)$  e assim por diante.

Segundo Zill e Cullen (2001, p.5): “Uma solução para uma equação diferencial que é identicamente nula em um intervalo  $I$  é em geral referida como **solução trivial**”.

## 3.7 Existência e unicidade de solução

Questões referentes as soluções de uma EDO tais como: Esta equação tem solução? Caso a resposta seja sim, quantas soluções ela tem? Quais condições adicionais devemos caracterizar para se obter única solução? são relevantes do ponto de vista das aplicações e são indagadas pela Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias. Temos que

o Teorema da Existência e Unicidade garante que as condições em que as situações acima são respondidas de forma assertiva, e que algumas técnicas de análise qualitativa permite o estudo das soluções mesmo quando não são analiticamente explícitas.

**Teorema:** Existência de uma única solução

Seja  $R$  uma região retangular no plano  $xy$  definida por  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ , que contém o ponto  $(x_0, y_0)$  em seu interior. Se  $f(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são contínuas em  $R$ , então existe um intervalo  $I$  centrado em  $x_0$  e uma única função  $y(x)$  definida em  $I$ .

Problemas de existência e unicidade são importantes nos processos de modelagem matemática.

De acordo com Bassanezi (2011): No geral, a representação de um fenômeno da realidade é diretamente relacionado com a complexidade matemática do modelo que o representa. E quando o modelo matemático é uma equação diferencial, não é sempre que se pode obter informações relevantes acerca do fenômeno estudado pelo meio de solução explícita desta equação, já que na maioria dos casos as equações diferenciais envolvidas não admitem soluções na forma de uma função analiticamente explícita.

### 3.8 Problemas de valor inicial e problemas de valores de contorno

Um problema de valor inicial é uma equação diferencial que possui determinadas condições referentes a função incógnita e suas derivadas.

Para resolver:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

$$\text{Sujeito } a : y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1} \quad (3.1)$$

em que  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{n-1}$  são constantes arbitrárias, é chamado de um **problema de valor inicial**, os valores específicos  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1}$  são chamados de **condições iniciais**. Procuramos um intervalo  $I$  contendo  $x_0$ .

O problema  $y'' + 2y = e^x$ , onde  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = 2$ , é um problema de valor inicial, pois duas condições são dadas para o ponto  $x = 0$

Resolvendo esse problema temos a seguinte equação característica associada:

$$y'' + 2y' = 0$$

$$m^2 + 2m = 0$$

$$m(m + 2) = 0$$

Obtem-se

$$m = 0$$

ou

$$m = -2$$

Solução referente a parte homogênea

$$y_c = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-2x}$$

Referente a parte não-homogênea, ou seja,  $y_p$ , temos:

$$y_p = Ae^x$$

$$y'_p = Ae^x$$

$$y''_p = Ae^x$$

$$Ae^x + 2Ae^x = e^x$$

$$3Ae^x = e^x$$

$$3A = 1$$

$$A = \frac{1}{3}$$

$$y_p = \frac{1}{3}e^x$$

Solução geral:

$$y = c_1 + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$$

$$y' = -2c_2 e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$$

Resolvendo o PVI, determinamos o valor das constantes, como segue:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 e^{-0} + \frac{1}{3}e^0 = 1 \\ -2c_2 e^{-0} + \frac{1}{3}e^0 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = 1 \\ -2c_2 + \frac{1}{3} = 2 \end{cases}$$

$$-2c_2 = 2 - \frac{1}{3}$$

$$-2c_2 = \frac{5}{3}$$

$$c_2 = -\frac{5}{6}$$

$$\begin{cases} c_1 = -c_2 + 1 - \frac{1}{3} \\ c_1 = \frac{5}{6} + 1 - \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{5 + 6 - 2}{6}$$

$$c_1 = \frac{9}{6}$$

$$c_1 = \frac{3}{2}$$

Temos como solução do PVI:

$$y = \frac{3}{2} + \frac{5}{6}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$$

Na próxima seção trataremos das Equações Diferenciais de primeira ordem e da Equação de Bernoulli.

## 3.9 Equações Diferenciais de Primeira ordem

### 3.10 Equações lineares

Lembre-se de que a linearidade significa que todos os coeficientes são funções de  $x$  que  $y$  e todas as suas derivadas são elevadas à primeira potência.

De acordo com Zill e Cullen (2001): Agora, quando  $n = 1$ , obtemos uma equação linear de primeira ordem da forma:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Dividindo a equação pelo coeficiente  $a_1(x)$ , e reescrevendo os coeficientes, obtemos a equação:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \quad (3.2)$$

Procuramos uma solução para (3.2) em um intervalo  $I$  no qual as funções  $P(x)$  e  $f(x)$

são contínuas. A seguir, supomos que (3.2) possui uma solução. Podemos escrever a equação (3.2) como

$$dy + [P(x)y - f(x)]dx = 0. \quad (3.3)$$

Para as equações lineares podemos determinar uma função  $\mu(x)$  tal que:

$$\mu(x)dy + \mu(x)[P(x)y - f(x)]dx = 0 \quad (3.4)$$

é uma equação diferencial exata. Pelo teorema, que enunciaremos abaixo, de critério para uma diferencial exata, o lado esquerdo da equação (3.4) é uma diferencial exata se

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)[P(x)y - f(x)] \quad (3.5)$$

ou

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P(x).$$

**TEOREMA:** Critério para uma Diferencial Exata

Sejam  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  funções contínuas com derivadas parciais contínuas em uma região retangular  $R$  definida por  $a < x < b, c < y < d$ . Então, uma condição necessária e suficiente para que

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

seja uma diferencial exata é

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Da equação separável, (3.5), em que podemos determinar  $\mu(x)$ . Temos

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx \quad (3.6)$$

$$\ln|\mu| = \int P(x)dx \quad (3.7)$$

assim

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \quad (3.8)$$

A função  $\mu(x)$  definida (3.8) é um **fator de integração** para a equação linear. Note que não precisamos usar uma constante de integração em (3.6), pois (3.4) não se altera se multiplicarmos por uma constante. Ainda,  $\mu(x) \neq 0$  para todo  $x$  em  $I$ , e é contínua e diferenciável.

É interessante observar que a equação (3.4) é ainda uma equação diferencial exata mesmo quando  $f(x) = 0$ . Na verdade,  $f(x)$  não desempenha papel algum na determinação de  $\mu(x)$ , pois vemos de (3.5) que  $(\partial/\partial y)\mu(x)f(x) = 0$ . Logo,

$$e^{\int P(x)dx} dy + e^{\int P(x)dx} [P(x)y - f(x)] dx$$

e

$$e^{\int P(x)dx} dy + e^{\int P(x)dx} P(x)y dx$$

são diferenciais exatas. Agora, escrevemos (3.4) na forma

$$e^{\int P(x)dx} dy + e^{\int P(x)dx} P(x)y dx = e^{\int P(x)dx} f(x) dx$$

e verificamos que podemos escrevê-la como

$$d[e^{\int P(x)dx} y] = e^{\int P(x)dx} f(x) dx.$$

integrando a última equação, temos

$$e^{\int P(x)dx} y = \int e^{\int P(x)dx} f(x) dx + c$$

ou

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x) dx + ce^{-\int P(x)dx} \quad (3.9)$$

Em outras palavras, se (3.2) tiver uma solução, ela deverá ser da forma (3.8). Reciprocamente, é imediato que (3.8) constitui uma família a um parâmetro de soluções para equação (3.2).

### 3.11 Equações separáveis

De acordo com: Zill e Cullen (2001), se  $g(x)$  é uma função contínua dada, então a equação de primeira ordem,

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \quad (3.10)$$

pode ser resolvida por integração. A solução para (3.10) é

$$y = \int g(x) dx + c$$

Um exemplo de equações separáveis pode ser da seguinte forma:



$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}x$$

tal equação pode ser resolvida por integração:

$$y = \int \operatorname{sen}x dx$$

$$y = -\operatorname{cos}x + c.$$

### DEFINIÇÃO: Equação Separável

Uma equação diferencial da forma,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

pode ser escrita como,

$$h(y) \frac{dy}{dx} = g(x). \quad (3.11)$$

É imediato que (3.11) se reduz a (3.10) quando  $h(y) = 1$ .

Agora, se  $y = f(x)$  denota uma solução para (3.11), temos

$$h(f(x))f'(x) = g(x)$$

logo,

$$\int h(f(x))f'(x)dx = \int g(x)dx + c \quad (3.12)$$

Mas  $dy = f'(x)dx$ , assim (3.12) é o mesmo que

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c. \quad (3.13)$$

### Método de Solução

A equação (3.13) indica o procedimento na resolução para equações diferenciais separáveis.

Não há necessidade de usar duas constantes na integração de uma equação separável pois,

$$\int h(y)dy + c_1 = \int g(x)dx + c_2$$

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c_2 - c_1 = \int g(x)dx + c,$$

em que  $c$  é completamente arbitrária.

### 3.12 Equações homogêneas

Uma função  $h(x, y)$  é dita homogênea de grau  $n$  se,

$$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n h(x, y)$$

se  $h(x, y)$  é homogênea de grau zero, então

$$h(x, y) = h\left(1, \frac{y}{x}\right) = H\left(\frac{y}{x}\right)$$

Em analogia a esta definição, a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = H(x, y)$$

é dita homogênea de grau  $n$  quando  $h(x, y)$  for homogênea de grau  $n$ . As equações homogêneas mais frequentes em modelos matemáticos são as de grau zero e a equação diferencial,

$$\frac{dy}{dx} = H\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3.14)$$

é simplesmente dita homogênea. Para solucionarmos equações deste tipo utilizamos o procedimento descrito a seguir.

Como o segundo membro depende apenas da expressão  $\frac{y}{x}$ , o caminho natural é fazer a mudança de variável  $z = \frac{y}{x}$  ou  $y = zx$  e, portanto,  $y' = z \cdot x' + x \cdot z'$ . Substituindo esta expressão em (3.14), temos  $x \frac{dz}{dx} + z = H(z)$ , ou

$$\frac{dz}{dx} = \frac{H(z) - z}{x} \quad (3.15)$$

que é resolvida separando as variáveis.

Um exemplo de equação homogêneas é:

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + 5y^2$$

Pela definição temos:

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2 - 3(tx)(ty) + 5(ty)^2 \\ &= t^2 x^2 - 3t^2 xy + 5t^2 y^2 \\ &= t^2 [x^2 - 3xy + 5y^2] = t^2 f(x, y) \end{aligned}$$

A função é homogênea de grau dois.

### 3.13 Equações exatas

Para Bassanezi e Ferreira (1988): entre todas as equações diferenciais de primeira ordem, a forma mais geral que podemos resolver é,

$$\frac{d}{dx}[\varphi(x, y)] = 0 \quad (3.16)$$

para alguma função  $\varphi(x, y)$ .

Seu resultado é puramente  $\varphi(x, y) = k$  (constante) de onde, algumas vezes, se pode explicar  $y$  como uma função de  $x$ . Assim, é essencial reconhecer quando uma equação diferencial de primeira ordem tem a forma da equação (3.16).

Como  $\frac{d}{dx}\varphi(x, y(x)) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx}$  (diferencial total de  $\varphi(x, y)$ ), então uma equação diferencial,

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3.17)$$

pode ser escrita sob a forma  $\frac{d}{dx}[\varphi(x, y)] = 0$  se, e somente se, existe uma função  $\varphi(x, y)$  tal que

$$\omega = (x, y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad e \quad N(x, y) = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad (3.18)$$

Dizemos neste caso, que (3.17) é exata.

O resultado seguinte nos dá condições para que uma forma diferencial

$$\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

seja a diferencial total de alguma função  $\varphi(x, y)$ .

Para as equações diferenciais que não atendem a condição tratada, utiliza-se os fatores integrantes para transformá-la em exata, e assim obtermos a solução da equação.

### 3.14 Fatores integrantes para as Equações Exatas

De acordo com Bassanezi e Ferreira (1988, p.96): Em alguns casos em que a equação diferencial  $M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$  não é exata, podemos encontrar uma função  $I(x, y)$  que,

$$I(x, y) \left[ M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} \right] = 0 \quad (3.19)$$

seja exata. Se  $I \neq 0$ , então as soluções de  $M + N \frac{dy}{dx} = 0$  e  $I(M + N \frac{dy}{dx}) = 0$  são as mesmas.

A função  $I(x, y)$ , não identicamente nula, que torna a equação (3.19) uma equação diferencial exata, é denominada *fator integrante*.

Infelizmente não existe uma regra para encontrar o fator integrante de uma dada equação. De qualquer forma para que (3.19) seja exata, deve satisfazer a condição de Euler:

$$\frac{\partial}{\partial y}[I(x, y)M(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[I(x, y)N(x, y)]$$

ou seja

$$M \frac{\partial I}{\partial y} + I \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial I}{\partial x} + I \frac{\partial N}{\partial x} \quad (3.20)$$

Tal equação estabelece, a condição necessária e suficiente para que  $I(x, y) \neq 0$  seja fator integrante da equação  $M + N \frac{dy}{dx} = 0$ .

### 3.15 Equação de Bernoulli

Segundo Bassanezi e Ferreira (1988): Existem poucos tipos de equações diferenciais de primeira ordem que possam ser resolvidas por métodos analíticos. “Às vezes, é possível resolver uma equação não linear efetuando uma mudança conveniente da variável dependente, que a transforma numa equação linear.”

A equação de Bernoulli, é uma equação diferencial de primeira ordem, não linear, e faz uma homenagem ao matemático-físico Jacob Bernoulli (1654-1705), foi obtida a partir do Teorema da Conservação de Energia Mecânica e da relação entre o trabalho mecânico e a energia dos corpos. Esta equação aparece naturalmente no estudo do crescimento de peixes, modelo Von Bertalanffy.

A equação diferencial,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = h(x)y^{(n)} \quad (3.21)$$

em que  $n$  é um número real qualquer, é chamada de **equação de Bernoulli**. Para  $n = 0$  e  $n = 1$ , a equação (7.1) é linear em  $y$ . Agora, se  $y \neq 0$ , 3.21 pode ser escrita como

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = f(x) \quad (3.22)$$

se fizermos  $w = y^{1-n}$ ,  $n \neq 0$ ,  $n \neq 1$ , então

$$\frac{dw}{dx} = (1 - n)y^{-n} \frac{dy}{dx}.$$

Com essa substituição, (3.22) transforma-se na equação linear

$$\frac{dw}{dx} + (1 - n)P(x)w = (1 - n)f(x). \quad (3.23)$$

Resolvendo (3.23) e depois fazendo  $y^{1-n} = w$ , obtemos uma solução para (3.21).

Na sequência estudaremos alguns modelos que serão importantes na aplicação do modelo de crescimento da tilápia.

## 4 Modelos Matemáticos

Nesta seção descreveremos os modelos de Malthus, Gompertz e na sequência o modelo de Von Bertalanffy.

### 4.1 Modelo de Malthus

No ano de 1798, Thomas Robert Malthus um economista publicou um artigo sobre o estudo do crescimento populacional humano que atualmente é conhecido como a primeira proposta de utilização da matemática na tentativa de avaliar a dinâmica populacional, para Malthus, sob certas condições, a variação populacional ocorre à razão geométrica.

Ao desenvolver esse modelo Malthus tinha uma preocupação com o crescimento exacerbado da população, que com esse crescimento traria fome e miséria para a população. Assim ele propôs a seguinte solução para o problema:

1. A sujeição moral de retardar o casamento.
2. A prática da castidade antes do casamento.
3. Ter somente o número de filhos que se pudesse sustentar.

Matematicamente falando podemos dizer que muitos tentam modelar o crescimento populacional começando com a suposição de que taxa de crescimento populacional depende do tamanho da população. Se  $P$  representa a população no instante  $t$ , então todos os modelos têm a forma

$$\frac{dP}{dt} = f(P),$$

em que  $f$  é alguma função da quantidade de habitantes  $P$ . Como  $f$  deve ser escolhida?

Malthus argumentou que a forma apropriada para  $f(P)$ , pelo menos quando a população fosse pequena, deveria ser um múltiplo constante de  $P$ , isto é,

$$\frac{dP}{dt} = rP,$$

em que  $r$  é uma constante.

Como temos visto, esse modelo conduz ao **crescimento exponencial**, pois a solução para a equação diferencial é

$$P(t) = P_0 e^{rt}.$$

Uma característica do crescimento exponencial é **tempo de duplicação constante**: leva exatamente a mesma quantidade de tempo,  $\frac{\ln 2}{r}$ , para a população se duplicar de  $P_0$  para  $2P_0$ , independentemente do tamanho inicial  $P_0$ . Uma outra maneira de examinar o crescimento exponencial é verificar a população em unidades sucessivas de tempo:

$$P(0), P(1), P(2), P(3), \dots, P(k+1), \dots$$

Como  $P(k) = P_0 e^{rk} = P_0 (e^r)^k$ , essas populações formam uma **sequência geométrica**

$$a, ac, ac^2, ac^3, ac^4, ac^5, \dots$$

com termo inicial  $a = P_0$  e razão constante  $c = e^r$ .

No entanto a teoria Malthusiana não presumia os avanços tecnológicos, como a mecanização do campo que influenciou no aumento da produção alimentícia, o fato da emancipação da mulher o que acarretou no controle da fertilidade, as políticas de bem estar social que contribui para o controle da taxa de natalidade.

## 4.2 Modelo de Gompertz

O modelo de Gompertz, de forma geral, utiliza uma taxa de inibição da variável do estado proporcional ao logaritmo desta variável. Ou seja, a taxa de crescimento é grande no início do processo, mudando rapidamente para um crescimento mais lento. É um modelo bastante adequado para traduzir o desenvolvimento de células.

De acordo com Bassanezzi (2011, p. 343): O modelo Gompertz é possível monitorar a taxa de crescimento de massa intrínseca característica da espécie como uma função do tempo, segundo a equação

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bx \ln(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

com  $a > 0$  e  $b > 0$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - b \ln(x)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

com  $a > 0$  e  $b > 0$ .

A taxa de crescimento  $r(x) = a - b \ln x$ , com  $x > 0$ , decresce com  $x$  e o valor de estabilidade de  $x$  é obtido considerando-se  $r(x) = 0$ , isto é,

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow (a - b \ln x) = 0 \Leftrightarrow x_\infty = e^{\frac{a}{b}}, \text{ com } x > 0.$$

Observamos que quando  $x$  é muito pequeno,  $r(x)$  é muito grande, pois.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} r(x) = +\infty$$

Agora, como  $0 = a - b \ln x_\infty$ , podemos tomar  $a = b \ln x_\infty$  na equação (4.1) e reescrevê-la como

$$\frac{dx}{dt} = b \ln x_\infty - b \ln x = b x \ln \left( \frac{x_\infty}{x} \right) x \ln \left( \frac{x_\infty}{x} \right)^b \quad (4.3)$$

e neste caso,  $r(x) = \ln \left( \frac{x_\infty}{x} \right)^b$ .

A solução (4.1) é obtida considerando-se a mudança de variável  $z = \ln x$ :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{x dt} = a - bz$$

$$\int \frac{dz}{a - bz} = \int dt \Leftrightarrow -\frac{1}{b} \ln |a - bz| = t + c$$

Para  $t=0$ , obtemos  $c = -\frac{1}{b} \ln |a - b \ln x_0|$

Portanto,  $\ln |a - bz| = -bt + \ln |a - b \ln x_0|$ ,

$$a - bz = (a - b \ln x_0) e^{-bt} \Leftrightarrow z(t) = \frac{1}{b} [a - (a - b \ln x_0) e^{-bt}].$$

Voltando à variável  $x = e^z$ , obtem-se:

$$x(t) = e^{\frac{a}{b}} \cdot e^{[-(\frac{a}{b} - \ln x_0) e^{-bt}]}, \quad \text{ou} \quad (4.4)$$

$$x(t) = x_\infty \left( \frac{x_0}{x_\infty} \right)^{e^{-bt}} \quad (4.5)$$

A curva  $x(t)$  tem um ponto de inflexão quando,

$$t = t_m = \frac{1}{b} \ln \left( \frac{a}{b} - \ln x_0 \right) \quad (4.6)$$

e

$$x(t_m) = \frac{1}{e} x_\infty = \frac{1}{e} e^{\frac{a}{b}} = e^{\frac{a-b}{b}} \quad (4.7)$$



### 4.3 Modelo de Von Bertalanffy.

O modelo matemático elaborado pelo biólogo Von Bertalanffy demonstra-se adequado para descrever o crescimento de peixes.

O modelo proposto por Von Bertalanffy, para descrever o crescimento de peixes é baseado no princípio da alometria: “A taxa de variação do peso do peixe é proporcional à área da superfície fisiológica (anabolismo). E a perda de massa (catabolismo) do indivíduo da espécie” Araújo e Márquez, (2008, p,42). Esse princípio traduzido em termos de equação fica na forma,

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha P^{\frac{2}{3}} - \beta P \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Scapim et al (2008)

Para descrever esse modelo temos:

$P(t)$  : como sendo a massa do peixe, no tempo  $t$ ,  $\alpha$  : a constante de anabolismo,  $\beta$  : a constante do catabolismo, e  $\frac{2}{3}$  como sendo o peso relacionado com a área corporal do peixe.

Bassanezi, sugeriu uma generalização para o modelo ( 4.9 ) , dada por:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha P^\gamma - \beta P \\ P(0) = P_0 \cong 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

$\gamma$  sendo o parâmetro alométrico, ou seja, o peso relacionado a área corporal do peixe,  $0 < \gamma < 1$ .

De acordo com Langaro et al (2017) o modelo proposto por Bassanezi, é uma equação de Bernoulli. Portanto realizando a substituição de variável,  $z = P^{1-\gamma}$ , temos que:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{dz}{dP} \frac{dP}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= (1 - \gamma) P^{1-\gamma-1} \frac{dP}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= (1 - \gamma) P^{-\gamma} \frac{dP}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= (1 - \gamma) P^{-\gamma} (\alpha P^\gamma - \beta P) \\ \frac{dz}{dt} &= (1 - \gamma) (\alpha - \beta P^{1-\gamma}) \\ \frac{dz}{dt} &= (1 - \gamma) (\alpha - \beta z) \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{dz}{dt} = (1 - \gamma)\alpha - (1 - \gamma)\beta z$$

Ou seja:

$$\frac{dz}{dt} + (1 - \gamma)\beta z = (1 - \gamma)\alpha \quad (4.10)$$

Podemos perceber que a equação acima é linear em  $z$ .

Para obtermos a solução geral da equação linear não-homogênea, resolveremos a equação homogênea associada a (4.10), dada por  $\frac{dz}{dt} + (1 - \gamma)\beta z = 0$ . Utilizando o método de variáveis separáveis, temos que:

$$\frac{dz}{z} = -(1 - \gamma)\beta dt$$

Aplicando integral em ambos os lados,

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{z} &= \int -(1 - \gamma)\beta dt \\ \Rightarrow \ln z &= -(1 - \gamma)\beta t + C \end{aligned}$$

Portanto obtemos que a solução homogênea ( $z_h$ ) é

$$z_h = C e^{-(1-\gamma)\beta t}$$

A solução particular ( $z_p$ ) pode ser obtida considerando  $\frac{dz}{dt} = 0$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} + (1 - \gamma)\beta z &= (1 - \gamma)\alpha \\ \Rightarrow 0 + (1 - \gamma)\beta z_p &= (1 - \gamma)\alpha \\ \Rightarrow (1 - \gamma)\beta z_p &= (1 - \gamma)\alpha \\ \Rightarrow z_p &= \frac{(1 - \gamma)\alpha}{(1 - \gamma)\beta} \\ \Rightarrow z_p &= \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

A solução geral (4.10) é encontrada através da combinação linear da solução homogênea ( $z_h$ ) com a solução particular ( $z_p$ ). Logo,

$$\begin{aligned} z(t) &= z_p + z_h \\ z(t) &= \frac{\alpha}{\beta} + C e^{-(1-\gamma)\beta t} \end{aligned}$$

$$z(t) = \frac{\alpha}{\beta} \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} C e^{-(1-\gamma)\beta t} \right)$$

Voltando a substituição, isto é tomando  $P(t) = z(t)^{\frac{1}{1-\gamma}}$ , temos:

$$P(t) = \left[ \frac{\alpha}{\beta} \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} C e^{-(1-\gamma)\beta t} \right) \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

$$P(t) = \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} C e^{-(1-\gamma)\beta t} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Sabemos que:

$$P_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t),$$

assim  $P_{\infty} = \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$ .

Fazendo  $K = \beta(1 - \gamma)$ , temos:

$$P(t) = P_{\infty} \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} C e^{-kt} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (4.11)$$

Utilizando o PVI, ou seja  $P(0) = P_0$  encontra-se o valor de  $C$ .

$$P_0 = P_{\infty} \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} C e^{-k \cdot 0} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

$$P_0 = P_{\infty} \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} C \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

$$\frac{P_0}{P_{\infty}} = \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} C \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Elevando ambos os lados por  $(1 - \gamma)$ ,

$$\left( \frac{P_0}{P_{\infty}} \right)^{1-\gamma} = \left[ \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} C \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \right]^{1-\gamma}$$

$$\left( \frac{P_0}{P_{\infty}} \right)^{1-\gamma} = 1 + \frac{\beta}{\alpha} C$$

$$C = \frac{\left( \frac{P_0}{P_{\infty}} \right)^{1-\gamma} - 1}{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$C = \left[ \left( \frac{P_0}{P_{\infty}} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] \frac{\alpha}{\beta}$$

Fazendo a substituição do valor  $C$  encontrado na equação  $\left( P(t) = P_{\infty} \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} C e^{-k \cdot t} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \right)$

obtemos que:

$$P(t) = P_\infty \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} \left[ \left( \frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] \frac{\alpha}{\beta} e^{-kt} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Fazendo a substituição do valor de  $K$ , sendo  $K = \beta(1 - \gamma)$ ,

$$P(t) = P_\infty \left( 1 + \left[ \left( \frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] e^{-\beta(1-\gamma)t} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (4.12)$$

Este é o modelo generalizado para o crescimento em peso de um animal qualquer, onde  $P(0) = P_0$  é o peso inicial e  $P_\infty$  é o peso máximo.

A condição inicial onde  $P(0) = P_0$  é diferente para as várias classes de animais. Para aqueles de maior peso como suínos, bovinos, frangos etc.  $P_0 \neq 0$ , enquanto que para animais de pequeno porte como peixe, camarão, etc,  $P_0 \cong 0$ . Vale salientar que a condição inicial de  $P_0 \cong 0$  e  $P_0 \neq 0$  não influencia no cálculo do ponto de inflexão.

O parâmetro  $P_\infty$  pode ser encontrado utilizando o Método de Ford-Walford, enquanto o valor de  $\gamma$  é necessário considerar o ponto de inflexão da curva ( $P_*$ ).

## 4.4 Método de Ford-Walford

De acordo com Nunes e Mello o método de Ford-Walford é aplicado a modelos de dinâmica populacional, cujas soluções  $P = P(t)$  apresentam um comportamento assintótico, estabilizando com o decorrer do tempo. O método tem como objetivo determinar o valor de estabilização,  $P_\infty$ , a partir de um número finito de dados experimentais e sem que a expressão matemática da função  $P = P(t)$  seja conhecida.

O método de Ford-Walford é, também, um método de ajuste de curva que considera valores subsequentes de dados experimentais  $(P_t, P_{t+1})$  onde  $P_t = P(t)$  e visa estabelecer uma função de ajuste,  $P_{t+1} = g(P_t)$  relacionando os dados  $(P_t, P_{t+1})$ .

Próximo ao valor de estabilização,  $P_\infty$ , observa-se que  $P_t$  é aproximadamente igual a  $P_{t+1}$  ( $P_t \approx P_{t+1}$ ). Assim, supondo que a função de ajuste,  $P_{t+1} = g(P_t)$ , seja contínua, o valor de estabilização é um ponto fixo da função  $g$  isto é  $P_\infty = g(P_\infty)$ . De fato,  $P_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} P_t = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{t+1}$ . Sendo a função de ajuste,  $g$ , contínua,

$$P_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} g(P_t) = g(\lim_{t \rightarrow \infty} P_t) = g(P_\infty).$$

Portanto, pelo método de Ford-Walford, o peso de estabilização  $P_\infty$  é determinado encontrando a função de ajuste  $g$  e resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} P_{t+1} = g(P_t) \\ P_{t+1} = P_t \end{cases} \quad (4.13)$$

Como o método de Ford-Walford será aplicado a dados  $(t, P_t)$  para os quais a curva de tendência,  $P = P(t)$ , irá se estabilizar com o tempo, para a determinação da função  $g$  em (9.13), não há a necessidade de considerar todos os dados  $P_t$  disponíveis, mas somente aqueles para os quais a tendência a estabilização já possa ser observada. Dessa forma, o método de Ford-Walford se mostrará mais eficiente, quanto maior for o número desses dados.

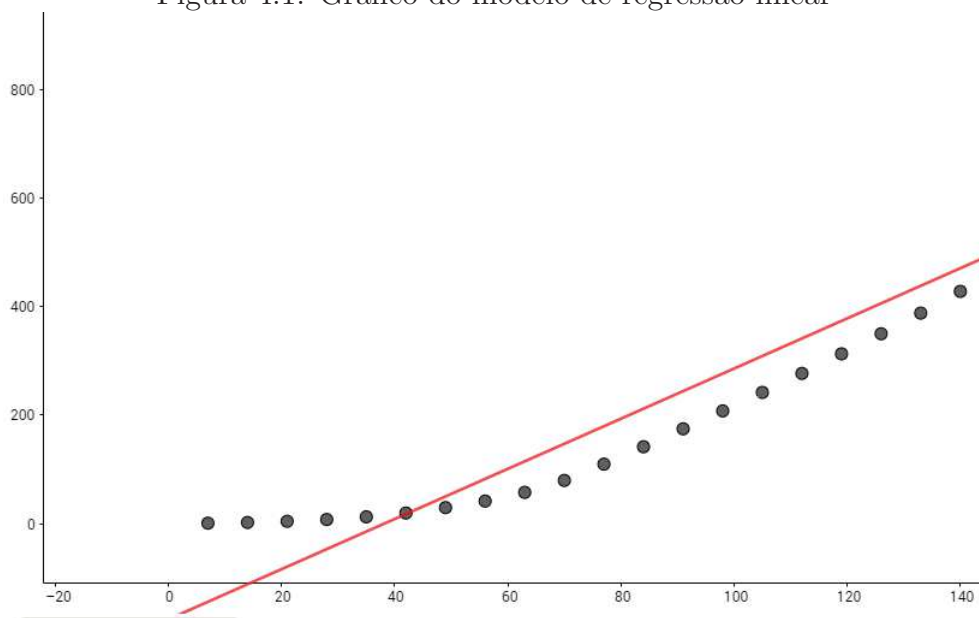
## 4.5 Regressão linear

De acordo com Bassanezi (2011, p.54): O termo regressão linear surgiu no século *XIX*, aplicado por Sir Francis Galton que estudou a relação entre altura de pais e filhos, observando que, na média, havia um decréscimo nos valores encontrados entre as duas gerações. O que fez com que ele considerasse esta tendência como sendo uma regressão genética.

Admitimos que a lei que rege o fenômeno possa ser representada por uma função contínua  $y = f(x)$  no intervalo  $[x_1, x_n]$ . Porém não sabemos quem é  $f(x)$ .

Se os dados da tabela, num gráfico cartesiano, se distribuem em torno de uma reta, podemos supor que  $f(x) = y = a + bx$ , conhecida como regressão linear.

Figura 4.1: Gráfico do modelo de regressão linear



Fonte: Autor

Partindo de valores tabelados, deseja-se determinar os valores numéricos de  $a$  e  $b$ , tais que a função  $y = ax + b$ , represente uma aproximação satisfatória da verdadeira função  $y = f(x)$ .

Não tem sentido procurarmos valores  $a$  e  $b$ , que tornem válida a igualdade  $y_i = a + bx_i$ , para todos os pares  $(x_i, y_i)$  dos valores observados, pois ocorrem erros nas medidas das grandezas observadas.

De maneira geral,  $y_i \neq a + bx_i$  chama-se de resíduos, a diferença entre o valor tabelado e o valor calculado, isto é,  $r_i = y_i - (a + bx_i)$ , onde  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Também não é possível encontrar valores  $a$  e  $b$ , que tornem os resíduos nulos, mas percebemos que quanto menor for cada um dos resíduos, melhor será a aproximação ou ajustamento da função. Para medir essa aproximação, vamos utilizar o critério dos mínimos quadrados, que propõe que os valores numéricos de  $a$  e  $b$ , são calculados com a condição de tornarem mínima a soma dos quadrados dos resíduos, isto é

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2.$$

Temos que  $S$  é uma função de  $a$  e  $b$ , pois os valores  $x_i$  e  $y_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) são conhecidos. O correspondente valor de  $S$ , mínimo ou máximo, são obtidos mediante solução do sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

Calculando as derivadas obtemos:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - (a + bx_i))(-1) = - \sum_{i=1}^n 2[y_i - (a + bx_i)]$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - (a + bx_i))(-x_i) = - \sum_{i=1}^n 2x_i[y_i - (a + bx_i)].$$

$$\sum_{i=1}^n 2y_i - \sum_{i=1}^n 2(a + bx_i) = 0. \text{ Logo, } \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n a - \sum_{i=1}^n bx_i = 0, \text{ ou seja,}$$

$$a \sum_{i=1}^n 1 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i.$$

$$\text{Da mesma forma, como } \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \text{ temos } \sum_{i=1}^n 2x_i y_i - \sum_{i=1}^n 2x_i a - \sum_{i=1}^n 2bx_i^2 = 0,$$

$$\text{ou seja } a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_i.$$

Temos então o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n 1 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{cases}$$

Este sistema linear é representado matricialmente por

$$\begin{bmatrix} a \sum_{i=1}^n 1 + b \sum_{i=1}^n x_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{bmatrix}$$

Então

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Consideramos as seguintes matrizes:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Temos então que

$$X^t X Z = X^t Y$$

## 4.6 Avaliação do peso máximo $p_\infty$

O valor máximo do peso dos peixes, pode ser estimado com a utilização do método de Ford-Walford. Este método baseia-se em considerar  $p_t = p_{t+1}$  quando o peso está estabilizado.

Ajustando linearmente os pontos  $p_t$  e  $p_{t+1}$  e calculando a intersecção desta reta com a reta  $p_t = p_{t+1}$ , obteremos um ponto de intersecção, que será o  $p_\infty$ , pois quando temos em dois instantes consecutivos o mesmo peso, é sinal de que não houve aumento de peso, e isto só acontece quando o peso está estabilizado.

Suponha que a equação da reta ajustada para os valores de  $p_t$  é dada por  $p_{t+1} = bp_t + a$ .

O ponto de intersecção é calculado fazendo  $p_\infty = bp_\infty + a$ . Logo  $p_\infty = \frac{a}{1-b}$ .

## 4.7 Crescimento específico ou lei da Alometria

Sabe-se que nem todas as partes do corpo de um indivíduo desenvolve proporcionalmente. A alometria estuda esses diferentes padrões de crescimento. Para Bassanezi e Ferreira (1988): “o tamanho de um órgão pode ser a medida do volume, peso, comprimento ou área lateral”.

Segundo Bassanezi e Ferreira (1988): “A Lei da Alometria estabelece que, no mesmo indivíduo, os crescimentos específicos de seus órgãos são proporcionais”.

Para se calcular esse crescimento específico devemos considerar o ponto de inflexão da curva ou seja ( $p_*$ ), isto é onde a variação da curva é máxima. Este ponto pode ser encontrado da seguinte forma:

$$\frac{d^2 p_*}{dt^2} = 0$$

Então temos que:

$$\frac{d^2 p_*}{dt^2} = \alpha \gamma p^{\gamma-1} \frac{dp}{dt} - \beta \frac{dp}{dt}$$

Logo,

$$0 = \alpha \gamma p^{\gamma-1} \frac{dp}{dt} - \beta \frac{dp}{dt}$$

E no ponto,  $p_*$

$$0 = \left( \frac{dp}{dt} \right) (\alpha \gamma p_*^{\gamma-1} - \beta)$$

Logo temos  $\frac{dp}{dt} > 0$ , isso ocorre pelo fato de  $\frac{dp}{dt}$  considerar a taxa do aumento de peso do animal. Mas para que isso aconteça é necessário que o animal esteja sendo



alimentado de maneira eficiente.

Logo temos que  $(\alpha p_*^{\gamma-1} - \beta)$ .Então

$$\begin{aligned}\alpha p_*^{\gamma-1} &= \beta \\ \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \gamma p_*^{\gamma-1} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{1}{\gamma p_*^{\gamma-1}} \\ \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{p_*^{-\gamma+1}}{\gamma}\end{aligned}$$

Como já sabemos que  $p_\infty = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$ , ou seja  $(p_\infty)^{1-\gamma} = \frac{\alpha}{\beta}$  substituindo temos:

$$\begin{aligned}(p_\infty)^{1-\gamma} &= \frac{p_*^{1-\gamma}}{\gamma} \\ \Rightarrow \left(\frac{p_\infty}{p_*}\right)^{1-\gamma} &= \frac{1}{\gamma} \\ \Rightarrow (1-\gamma) \ln\left(\frac{p_\infty}{p_*}\right) &= \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right) \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{p_\infty}{p_*}\right) &= \frac{1}{1-\gamma} \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right)\end{aligned}$$

Pela equação acima pode-se encontrar o valor de  $\gamma$ , porém devemos conhecer o valor de  $p_*$ .

Para se encontrar o valor de  $\gamma$ , basta calcular a intersecção das curvas  $y = \frac{1}{1-\gamma} \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right)$  e  $y = \ln\left(\frac{p_\infty}{p_*}\right)$ .

Na sequência utilizaremos esse estudo na aplicação dos dados coletados.

## 5 Coleta de dados e Aplicações dos Modelos

### 5.1 Coleta de dados

Para o desenvolvimento deste trabalho, utilizamos dados que foram coletados por piscicultores através de uma empresa privada do setor. Eles forneceram uma tabela contendo os dados referentes a idade e peso da tilápia, no entanto vale salientar que não foi fácil conseguir os dados para realização deste trabalho, pois a maior parte dos piscicultores com o qual tivemos contato, não fazem essa coleta, pois é trabalhosa e o manejo dos peixes se torna difícil pelo seu tamanho na fase inicial. Para esse segmento dá-se o nome de biometria, e caracteriza-se pelo processo de pesagem de amostras da coleta de peixes ou alevinos de forma a calcular a biomassa total. Na sequência faremos a análise e aplicação dos dados coletados ao modelo matemático, visando alcançar o objetivo proposto.

### 5.2 Aplicações

Primeiramente faremos um ajuste linear dos dados peso e idade dos peixes. Iniciando assim o processo de obtenção dos parâmetros do modelo de Von Bertalanffy. Na sequência, aplicaremos ao modelo de Malthus e de Gompertz e o modelo de Von Bertalanffy, após faremos a comparação do modelo de acordo com os dados.

### 5.3 Aplicação do método de regressão linear

A partir da tabela (5.1), construiu-se um modelo de regressão linear para os valores de  $(t)$  de 7 a 189 dias e peso em gramas, nesse período.

Tabela 5.1: Peso da Tilápia

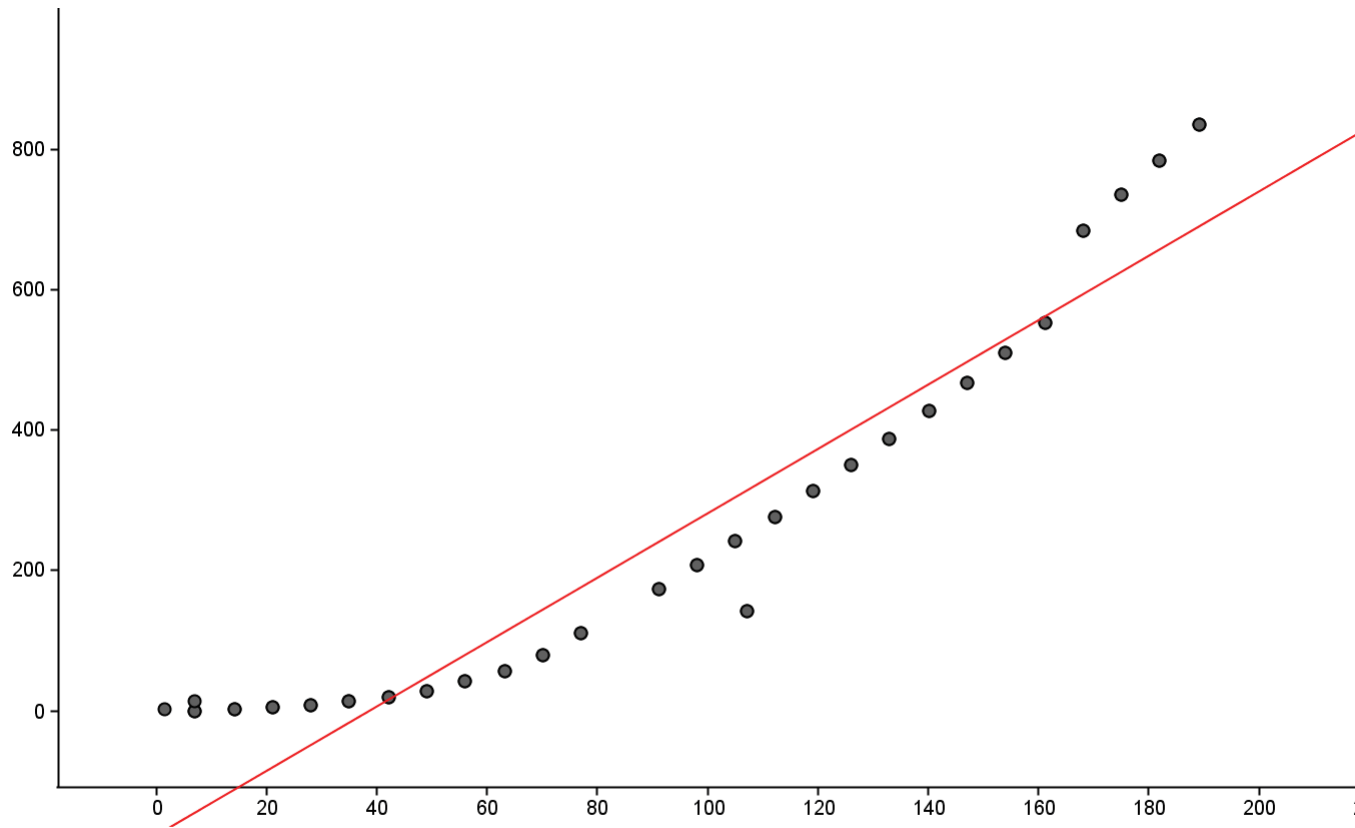
Tempo (t)	Dias	Peso (g)
0	7	1.3
1	14	2.6
2	21	4.8
3	28	8.0
4	35	13.0
5	42	20.0
6	49	30.0
7	56	42.0
8	63	58.0
9	70	80.0
10	77	110.0
11	84	142.0
12	91	175.0
13	98	208.0
14	105	242.0
15	112	277.0
16	119	313.0
17	126	350.0
18	133	388.0
19	140	428.0
20	147	469.0
21	154	511.0
22	161	555.0
23	168	686.0
24	175	736.0
25	182	786.0
26	189	835.0

---

Fonte: Autor

Com os dados tabelados utilizou-se o software GeoGebra para obter o ajuste linear do conjunto de dados, que descreve o peso das tilápias no intervalo de 7 a 189 dias.

Figura 5.1: Gráfico da aplicação do modelo de regressão linear



Fonte: Autor

Assim pode-se considerar que o crescimento da tilápia pode ser descrito por  $y = 4.62x - 175.73$ , obtido através de regressão linear.

## 5.4 Aplicação ao Modelo de Malthus

Pelo Modelo de Malthus, visto anteriormente, temos a solução geral dada por:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{r \cdot t}$$

Como  $t$  inicial é 7 dias, consideremos  $t = 189 - 7 = 182$  dias e respectivamente  $P(t) = 835$  gramas assumindo  $P_0 = P(0) = 1,3$  gramas.

Para obter o coeficiente  $r$  substitui-se esses valores na formula geral e obtem-se:

$$835 = 1,3 \cdot e^{r \cdot 182}$$

$$\frac{835}{1,3} = e^{r \cdot 182}$$

$$\ln \left( \frac{835}{1,3} \right) = r \cdot 182$$

Aplicando logaritmo em ambos os membros da expressão anterior obtém-se

$$\ln \left( \frac{835}{1,3} \right) = \ln (e^{r \cdot 182})$$

$$6,46506746 = r \cdot 182$$

$$r = \frac{6,46506746}{182}$$

$$r = 0,0355$$

Desta forma reescreve-se a fórmula geral do modelo de Malthus como:

$$P(t) = 1,3 \cdot e^{0,0355 \cdot t}$$

Através do software Excel, temos a tabela (5.2) que nos mostra o crescimento aplicado no Modelo de Malthus. Observe que no instante  $t(0)$  até o instante  $t(25)$ , seu crescimento é mais lento e descompassado do que seria o normal, conforme nos mostra a tabela. A partir do instante  $t(25)$  há um crescimento mais elevado até  $t(26)$  e com isso, podemos dizer que o modelo de Malthus para a expansão da tilápia não é adequado. No entanto, o modelo de Malthus nos fornece o fator  $r$  em que utilizaremos na sequência para a aplicação do modelo de Gompertz.

Tabela 5.2: Dados aplicados ao Modelo de Malthus

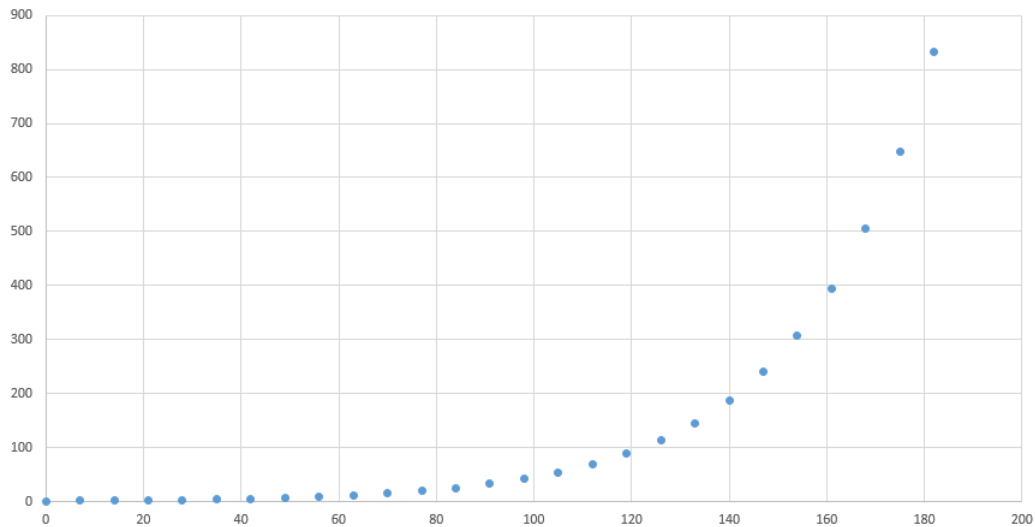
t	Dias	Peso	Malthus
0	7	1.3	1.666
1	14	2.6	2.136
2	21	4.8	2.739
3	28	8	3.512
4	35	13	4.503
5	42	20	5.773
6	49	30	7.402
7	56	42	9.491
8	63	58	12.168
9	70	80	15.601
10	77	110	20.002
11	84	142	25.645
12	91	175	32.879
13	98	208	42.155
14	105	242	54.047
15	112	277	69.294
16	119	313	88.842
17	126	350	113.904
18	133	388	146.037
19	140	428	187.235
20	147	469	240.054
21	154	511	307.773
22	161	555	394.594
23	168	686	505.912
24	175	736	648.631
25	182	786	831.631
26	189	835	1066.209

---

Fonte: Autor

Através do software Excel temos o gráfico que representa as dados do modelo de Malthus.

Figura 5.2: Gráfico do Modelo de Malthus



Fonte: Autor

## 5.5 Aplicação ao Modelo de Gompertz

Para aplicação dos dados ao modelo de Gompertz, aproveitemos o fator  $r$  obtido através do modelo de Malthus, tomando-o como valor de  $b$  para a formula geral do modelo de Gompertz. Além disso assume-se que  $x_{\infty} = 850$  gramas pois esse é o peso ideal para o abate da tilápia-do-Nilo,  $x_0 = 1,3$  gramas como sendo o peso mínimo e então reescreve-se a fórmula geral como:

$$x(t) = x_{\infty} \left( \frac{x_0}{x_{\infty}} \right)^{e^{-b \cdot t}}$$

$$x(t) = 850 \cdot \left( \frac{1,3}{850} \right)^{e^{-0,0355 \cdot t}}$$

Através do software Geogebra, obtemos a tabela (5.3) que nos mostra os dados de crescimento para o Modelo de Gompertz. Observamos nos dados reais que o crescimento no instante  $t(9)$  até o instante  $t(20)$ , sofre uma oscilação em peso que fica em torno de 30 a 40 gramas de uma semana para a outra. Isso pode estar relacionado com a conversão alimentar e o nível de proteína fornecida aos peixes. Nota-se também que no instante  $t(22)$  até o instante  $t(23)$ , temos um pico de crescimento em torno de 130 gramas na semana.

Com o modelo de Gompertz o que obtivemos do instante  $t(0)$  até aproximadamente  $t(9)$ , foi um crescimento mais acentuado que pode estar relacionado com o tipo de ração, onde os valores de proteína podem ser mais elevados, e que do instante  $t(9)$  até  $t(26)$  esse crescimento desacelera, chegando muito próximo dos valores de estabilidade do

peixe para o abate.

Tabela 5.3: Dados aplicados ao modelo de Gompertz

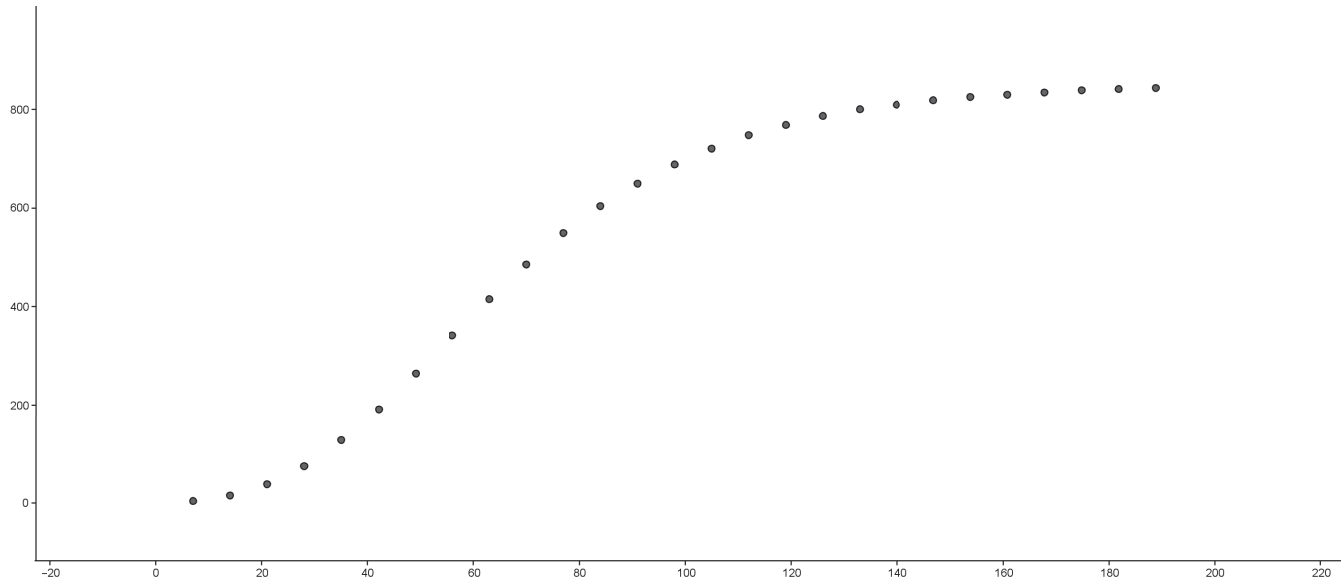
t	Dias	Peso	Gompertz
0	7	1.3	5.318
1	14	2.6	16.017
2	21	4.8	37.965
3	28	8	74.6
4	35	13	126.576
5	42	20	191.576
6	49	30	191.456
7	56	42	341.064
8	63	58	415.921
9	70	80	485.804
10	77	110	548.599
11	84	142	603.36
12	91	175	650.009
13	98	208	689.024
14	105	242	721.188
15	112	277	747.406
16	119	313	768.591
17	126	350	785.591
18	133	388	799.158
19	140	428	808.941
20	147	469	818.482
21	154	511	825.23
22	161	555	830.55
23	168	686	834.738
24	175	736	838.031
25	182	786	840.617
26	189	835	842.647

Fonte: Autor

Utilizando o software Geogebra obtemos o seguinte gráfico que nos mostra a curva de Gompertz para o crescimento da tilápia.



Figura 5.3: Curva de Gompertz para o crescimento da tilápia



Fonte: Autor

## 5.6 Aplicação ao Modelo de Von Bertalanffy

No Modelo de Von Bertalanffy é necessário obter o valor de  $P_\infty$ , ou seja o peso máximo que o peixe pode atingir. Para isso utilizaremos um ajuste linear através do software Geogebra. Como vimos, a reta que se ajusta aos dados é dada pela expressão

$$f(x) = 4,62x - 175,73$$

Logo o valor de  $P_\infty$  é dado por:

$$P_\infty = \frac{-175,73}{1 - 4,62}$$

$$P_\infty \cong 48,5441989$$

Após a análise dos dados e utilizando  $\gamma = \frac{2}{3}$ , conforme sugerido por Bassanezi, temos

$$\gamma = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \ln \left( \frac{1}{\frac{2}{3}} \right)$$

$$y = \frac{1}{\frac{1}{3}} \ln \left( \frac{3}{2} \right)$$

$$y = 3 \ln \left( \frac{3}{2} \right)$$

Por outro lado,

$$y = \ln \left( \frac{48,54}{P_*} \right)$$

igualando as duas funções temos:

$$3 \ln \left( \frac{3}{2} \right) = \ln \left( \frac{48,54}{P_*} \right)$$

$$1,216395 = \ln \left( \frac{48,54}{P_*} \right)$$

$$3,375 = \frac{48,54}{P_*}$$

$$P_* = \frac{48,54}{3,375}$$

$$P_* = 14,3822$$

Assim, com o valor alométrico, e realizando a intersecção das curvas  $y = \frac{1}{1-x} \ln \left( \frac{1}{x} \right)$  e  $y = \ln \left( \frac{P_\infty}{P_*} \right)$ , temos o valor de  $P_* = 14,3822$ .

Para encontrarmos a taxa de catabolismo  $\beta$ , faremos a substituição dos valores encontrados na equação:

$$\beta = - \frac{\ln \left( \frac{\frac{p(t)}{48,5441989}^{(1-1.2)} - 1}{\left( \frac{7}{48,5441989} \right)^{1-1.2} - 1} \right)}{t(1-1.2)}$$

Com auxílio do software excel encontramos os valores de  $\beta$ , taxa de catabolismo, para todos os intervalos de tempo, conforme a tabela (5.4).

Tabela 5.4: Valores taxa de catabolismo

t	$\beta$
0	-
7	-0.14631
14	-0.07186
21	-0.04695
28	-0.03449
35	-0.02693
42	-0.02188
49	-0.01822
56	-0.0155
63	-0.01336
70	-0.0116
77	-0.01011
84	-0.00892
91	-0.00794
98	-0.00714
105	-0.00645
112	-0.00587
119	-0.00536
126	-0.00491
133	-0.00452
140	-0.00416
147	-0.00385
154	-0.00356
161	-0.00331
168	-0.0029
175	-0.00269
182	-0.0025
189	-0.00233

Fonte: Autor

Para realizar um ajuste de curva aos dados de beta em relação ao tempo, utilizamos o software Geogebra, com esse ajuste observa-se que a curva que melhor descreve esses dados é a curva logística, determinada pela equação:

$$\beta = \frac{1222,39243}{1 + 82,62179e^{-0,0273 \cdot t}}$$

Realizando a substituição dos parametros encontrados, no modelo que representa a solução geral (4.12), obtem-se a seguinte expressão para o modelo do crescimento

de tilápia-do-Nilo:

$$P(t) = 48,5441989 \left( 1 + \left[ \left( \frac{1,3}{48,5441989} \right)^{1-1,2} - 1 \right] e^{\left( \frac{1222,39243}{1+82,62179e^{-0,0273-t}} \right) \cdot (1-1,2)t} \right)^{\frac{1}{1-1,2}}$$

Através do software Excel obtem-se a seguinte tabela de dados para os valores do modelo de Von Bertalanffy.

Tabela 5.5: Dados aplicados ao Modelo de Von Bertalanffy

t	Dias	Peso	Von Bertalanffy
0	7	1.3	1.94
1	14	2.6	5.91
2	21	4.8	1.45
3	28	8	3.01
4	35	13	8.06
5	42	20	6.71
6	49	30	2.47
7	56	42	4.67
8	63	58	4.75
9	70	80	2.61
10	77	110	7.42
11	84	142	1.03
12	91	175	6.34
13	98	208	1.55
14	105	242	1.31
15	112	277	3.23
16	119	313	1.87
17	126	350	2.0
18	133	388	2.92
19	140	428	4.07
20	147	469	3.52
21	154	511	1.12
22	161	555	7.05
23	168	686	4.07
24	175	736	8.51
25	182	786	2.06
26	189	835	1.4

Fonte: Autor

Como podemos observar, os dados obtidos através do modelo não descrevem de forma satisfatória o crescimento da tilápia-do-Nilo neste intervalo de tempo. Isso se deve aos parâmetros obtidos através da regressão linear, pois com ela obtem-se o valor do  $P_\infty$ , esse valor deveria se aproximar de 850 gramas, pois é onde o peixe estabiliza seu peso para o abate.

## 5.7 Comparação dos Modelos

Após obter os valores dos modelos, devemos fazer uma comparação dos mesmos para saber qual modelo foi mais adequado para o peso da tilápia-do-Nilo. Para isso, devemos analisar os dados da tabela (5.1).

No modelo de Malthus, podemos observar que seu crescimento se dá através de um crescimento exponencial, onde na fase inicial é muito lento e após um determinado período acontece um pico de crescimento, o que para essa pesquisa comparando com os dados reais, não se mostram adequados.

Para o modelo de Von Bertalanffy, através das comparações dos dados reais com os dados obtidos, observa-se que o modelo não é satisfatório, pois pode ter sido influenciado pelos parâmetros,  $P_\infty$ , como citamos anteriormente e ainda o valor alométrico,  $\gamma$ , que nesse caso utilizou-se o valor sugerido por Bassanezzi (2011). Esses parâmetros podem ter sido um fator que influenciou nos resultados alcançados.

Para esta pesquisa, o modelo que melhor representou o crescimento da tilápia-do-Nilo foi o modelo de Gompertz, no entanto o tal modelo também apresentou divergência com o tamanho real da tilápia pois o crescimento na fase inicial deu-se de forma acentuada, onde a partir do tempo  $t(24)$  ele começa se estabilizar atingindo os valores desejados para o abate. Com isso, podemos dizer que o modelo que mais se aproximou foi o modelo de Gompertz, diferente do que sugerem as bibliografias.

Tabela 5.6: Comparação de Modelos

t	Dias	Peso	Malthus	Gompertz	Von Bertalanffy
0	7	1.3	1.662	5.318	1.94
1	14	2.6	2.125	16.017	5.91
2	21	4.8	2.717	37.965	1.45
3	28	8	3.474	74.6	3.01
4	35	13	4.441	126.576	8.06
5	42	20	5.678	191.576	6.71
6	49	30	7.259	191.456	2.47
7	56	42	9.281	341.064	4.67
8	63	58	11.866	415.921	4.75
9	70	80	15.171	485.804	2.61
10	77	110	19.396	548.599	7.42
11	84	142	24.798	603.36	1.03
12	91	175	31.705	650.009	6.34
13	98	208	40.535	689.024	1.55
14	105	242	51.825	721.188	1.31
15	112	277	66.259	747.406	3.23
16	119	313	84.713	768.591	1.87
17	126	350	108.306	785.591	2.0
18	133	388	138.471	799.158	2.92
19	140	428	177.038	808.941	4.07
20	147	469	226.346	818.482	3.52
21	154	511	289.387	825.23	1.12
22	161	555	369.986	830.55	7.05
23	168	686	473.033	834.738	4.07
24	175	736	604.78	838.031	8.51
25	182	786	773.221	840.617	2.06
26	189	835	988.575	842.647	1.4

Fonte: Autor

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Concluimos com o estudo, o quão importante a modelagens matemática é na resolução de problemas do dia a dia, e por meio de modelos que já existem podemos realizar a análise de situações pontuais, como observar o crescimento de tilápias-do-Nilo, que foi o objeto de estudo da pesquisa.

No presente diagnóstico, foi feito um estudo de equações diferenciais e uma análise de seus conceitos juntamente com as modelagens matemáticas. Aplicamos os dados coletados nos modelos de Malthus, Gompertz e Von Bertalanffy.

Os resultados da pesquisa foram satisfatórios, pois o objetivo foi atingido, que era averiguar o crescimento da tilápia-do Nilo, e tivemos sucesso com a aplicação do modelo de Gompertz, confrontando as bibliografias que pesquisamos, visto que todas elas defendem o que o modelo que melhor se encaixa para o crescimento da tilápia é o de Von Bertalanffy.

Considerando projetos futuros, propomos a realização do estudo do modelo de Von Bertalanffy, mas utilizando cálculos dos parâmetros de alometria, e não aplicar o parâmetro proposto por Bassanezzi (2011), que é a aplicação de  $\gamma = \frac{2}{3}$ , como fizemos no presente trabalho, e trouxe um resultado bem diferente do esperado.

Consideramos que talvez esse tenha sido um dos problemas para que não se tenha obtido o resultado esperado, então a sugestão é fazer novamente um estudo aplicando o modelo de Von Bertalanffy e algum outro modelo estudado desenvolvido para o crescimento de peixes.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ARAÚJO, C. J.; MÁRQUEZ, G. M .R. **Modelos de VON BERTALANFFY E GOMPERTZ para descrever os parâmetros de tamanho e peso médio de tilápias**. Cadernos do IME - Série Matemática Vol. 20 (2008).

Disponível em: < <http://www.e-publicacoes.uerj.br/index.php/cadmat/article/view/11849/9282>>.

Acesso em: 20 jun. 2017.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática**. Caxambu,Rio Janeiro: 2001.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**.3.ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BASSANEZI, R. C.; FERREIRA, W. C. JR. **Equações Diferenciais com Aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2009.

BOSCOLO, R. W.; MEURER, F. **Desempenho e Características de Carcaça de Machos Revertidos de Tilápias do Nilo (*Oreochromis niloticus*), Linhagens Tailandesa e Comum, nas Fases Iniciais e de Crescimento** (2001).

Disponível em: < <http://www.scielo.br/pdf/0Drbzv30n56672.pdf>> Acesso em: 19 abr 2017

BOYCE, W. E.;DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

FAO- (Food and Agriculture Organization of the United Nations). Disponível em: < [www.fao.org/brasil](http://www.fao.org/brasil)>. Acesso em: 19 abr 2017



KUBITZA, F. **Tilápia tecnologia e planejamento na produção comercial**. Jundiaí, SP, 2000.

LANGARO, N. L. **Modelagem Matemática: Um Estudo De Modelos Existentes Na Literatura**. Toledo, PR, 2017.

LOVSHIN, L. L. **Status of commercial fresh water fish culture in Brazil**. In: **SIMPÓSIO SOBRE MANEJO E NUTRIÇÃO DE PEIXES**, Piracicaba. Anais. Piracicaba, 1998.

SABBAG, O. J; ROZALES, R. DOS R.; TARSITANA, M. A. A; SILVEIRA, A. N.A. **Análise econômica da produção de tilápia (*oreochromis niloticus*) em um modelo de propriedade associativista de Ilha solteira SP**(2007).

Disponível em: < <http://www.e-publicacoes.uerj.br/index.php/cadmat/article/view/118499282>>. Acesso em: 17 abr 2017

SCAPIM, J.; BASSANEZI, R. C.; ABC-UFABC, S. A. **Modelo de Von Bertalanffy generalizado aplicado à curvas de crescimento animal**. *IMECC-UNICAMP*. Campinas, SP, 2008.

SEBRAE **A evolução da piscicultura no Brasil**.

Disponível em: < <http://www.sebraemercados.com.br/evolucao-da-piscicultura-no-brasil> >. Acesso em: 08 jul 2017.

SHIROTA, R.; OBA, L.C.; SONODA, D.Y.; **Estudo dos aspectos econômicos das processadoras de peixes provenientes da piscicultura**. III Simpósio sobre recursos naturais e sócio-econômicos do Pantanal. Os Desafios do Novo Milênio. Corumbá, MT. 2000.

SATO, D. **Diagnóstico econômico da atividade piscícola ao nível de produtor associado à Associação de Aqüicultores do Oeste do Paraná (AQUIOPAR)**. 1993.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**, vol. 1. São Paulo, Makron, 2001.