

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MECÂNICA  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MATHEUS HENRIQUE JURACH

**MODELAGEM DAS TENSÕES E DEFORMAÇÕES MICROSCÓPICAS  
DE CONTATO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO  
(TCC2)

CURITIBA

2019

MATHEUS HENRIQUE JURACH

**MODELAGEM DAS TENSÕES E DEFORMAÇÕES MICROSCÓPICAS  
DE CONTATO**

Monografia do Projeto de Pesquisa apresentada à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso - Tcc2 do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para aprovação na disciplina.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Cousseau

CURITIBA

2019

## TERMO DE APROVAÇÃO

Por meio deste termo, aprovamos a monografia do Projeto de Pesquisa “Modelagem das tensões e deformações microscópicas de contato”, realizado pelo aluno Matheus Henrique Jurach, como requisito para aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Prof. Dr. Tiago Cousseau

Departamento Acadêmico de Mecânica, UTFPR

Orientador

Prof. Dr. Marco Antônio Luersen

Departamento Acadêmico de Mecânica, UTFPR

Avaliador

Doutorando Rodrigo de Sá Martins

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais,  
UTFPR

Avaliador

Curitiba, 25 de Novembro de 2019.

## **DEDICATÓRIA**

Dedico a presente monografia a todos os professores do curso de engenharia mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, ao orientador do trabalho, aos familiares, amigos e a todos aqueles que de certa forma contribuíram para a realização deste projeto.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a todos os professores da UTFPR que fizeram parte durante todo curso de engenharia mecânica, em especial o professor Tiago Cousseau, que acreditou no meu potencial para realização deste trabalho.

Aos meus pais, Marilene Jurach e Jorge Jose Jurach, por terem me dado força e sustentabilidade financeira durante o curso para chegar até este momento.

## RESUMO

JURACH, Matheus Henrique. **Modelagem das tensões e deformações microscópicas de contato**. 69 f. Trabalho de conclusão de curso – Tcc2, Bacharelado em Engenharia Mecânica, Departamento Acadêmico de Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2019.

A mecânica do contato é responsável por estudar as distribuições de deformações, deslocamentos e tensões em sólidos em contato. Esse conhecimento é necessário para evitar problemas como deformações irreversíveis ou falhas por fadiga que possam ocorrer na peça. A partir da observação da presença de rugosidade no material, nota-se que o contato gerado entre duas superfícies normalmente não ocorre em toda a área nominal de contato. Essa falta de uniformidade no contato faz com que as tensões no material atinjam valores maiores do que esperado e conseqüentemente podem causar deformações plásticas, assim como uma falha por fadiga antes do esperado. Além disso o contato tem relevância para fatores como transferência de calor, atrito e desgaste. Em função disso, o contato entre duas superfícies é um assunto que tem interessado diversos pesquisadores desde o trabalho pioneiro realizado por Hertz em 1882. Atualmente pode-se determinar valores para tensões e deformações que ocorrem no material, com isso esse trabalho tem como foco validar um modelo apresentado na literatura e verificar se este pode ser aplicado para superfícies reais.

**Palavras-chave:** Mecânica do contato. Rugosidade. Teoria de Hertz.

## ABSTRACT

JURACH, Matheus Henrique. **Modeling of stresses and deformations in Hertzian contacts.** 69 p. Undergraduate Thesis, Mechanical Engineering, Academic Mechanical Department, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2019.

Contact Mechanics is responsible to understand the deformations, dislocations and stresses associated to solids in contact. This knowledge is necessary in order to avoid problems, such as irreversible deformation or contact fatigue that may occur in a material. Through the observation of roughness in the material, is possible to notice that the contact between surfaces do not occur in all the extension of the contact area. This lack in the contact area is responsible for stresses in the material, which may reach values that surpass what is expected, consequently causing plastic deformations, and fatigue failure before expected. Furthermore, the contact between solids is related to variables such as heat transfer, friction and wear. With this in mind, this theme has interested many scientists, since the pioneer theory of Hertz in 1882. We can already determinate values for tension and deformation that happens in the material, with this in mind, this work has the objective of validate the model shown by Seabra and see if this model can be applied to real surfaces.

**Keywords:** Mechanics of contact. Roughness. Hertz theory.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Contato linear entre dois cilindros.....	12
Figura 2 - Exemplos de elementos de máquinas cujo contato é classificado como linear.....	13
Figura 3 - Tensão máxima de cisalhamento, linhas de isotensão.....	15
Figura 4 - Semi-espaço elástico linear sujeito a pressão normal e tangencial distribuídas.....	16
Figura 5 - Esquema representativo da definição da geometria de contato liso.....	18
Figura 6 - Contato entre um cilindro ondulado e um plano.....	19
Figura 7 - Representação da superfície discretizada.....	20
Figura 8 - Fluxograma do algoritmo utilizado para resolução do problema de contato.....	21
Figura 9 - Fluxograma da metodologia utilizada.....	25
Figura 10 - Valores de $\Delta p_r$ e $\Delta S_r$ em função do parâmetro $A_{mp}/\lambda * R/a$ .....	27
Figura 11 - (a) classes de rugosidade da NBR 8404; (b) diferentes processos de fabricação com suas faixas de classe de rugosidade.....	28
Figura 12 - Analogia entre $R_a$ e amplitude ( $A_{mp}$ ).....	29
Figura 13 - Analogia para superfícies com asperezas extremamente agudas.....	30
Figura 14 - Ilustração do cálculo da inclinação (ângulo $\theta$ ).....	30
Figura 15 - Ilustração de duas topografias e os respectivos perfis bidimensionais.....	32
Figura 16 - Ilustração utilizada no caso #1: cilindro liso sobre plano liso.....	33
Figura 17 - campo de pressão e penetração, campo de tensão cisalhante máxima $\tau_{m\acute{a}x}$ , campo de tensão cisalhante ortogonal $\tau_{xz}$ .....	35
Figura 18 - Ilustração utilizada no caso #2: cilindro rugoso sobre plano liso.....	36
Figura 19 - Campo de pressão obtido por Seabra, Campo de pressão do algoritmo proposto, Penetração, Campo de tensão cisalhante máxima $\tau_{m\acute{a}x}$ , Campo de tensão cisalhante ortogonal $\tau_{xz}$ .....	37
Figura 20 - Gráfico da influência do coeficiente de Poisson na tensão máxima cisalhante em relação a profundidade.....	39
Figura 21 - Tensões principais ao longo do eixo OZ, para um contato linear (Timoshenko e Goodyear, 1970).....	40
Figura 22 - Gráfico da influência do módulo de elasticidade na tensão máxima cisalhante em relação a profundidade.....	40
Figura 23 - Gráfico de tensão cisalhante máxima em relação a profundidade.....	41
Figura 24 - Análise de $\Delta p_r$ e $\Delta S_r$ para validação.....	42
Figura 25 - Gráficos de $\Delta p_r$ e $\Delta S_r$ por $A_{mp}/\lambda$ .....	43
Figura 26 - Gráficos de $\Delta p_r$ e $\Delta S_r$ para valores distintos de raio R.....	44
Figura 27 - Perfil de rugosidade, a) Processo de brunimento e b) Processo de retifica.....	45
Figura 28 - Gráficos de $\Delta p_r$ e $\Delta S_r$ para superfícies reais.....	46

## LISTA DE SÍMBOLOS

	<b>Descrição</b>	<b>Unidade</b>
$F_n$	Força normal	[N]
$l$	Comprimento	[m]
$\alpha$	Semi-largura do contato	[m]
$R_{x1}$	Raio de curvatura do corpo 1 na direção x	[m]
$R_x$	Raio de curvatura equivalente na direção x	[m]
$A_c$	Área de contato	[m <sup>2</sup> ]
$u_x$	Deformação em x	[m]
$u_z$	Deformação em z	[m]
$\sigma_x$	Tensão normal em x	[Pa]
$\sigma_z$	Tensão normal em z	[Pa]
$\tau_{xz}$	Tensão cisalhante na face x na direção z	[Pa]
$\sigma_y$	Tensão normal em y	[Pa]
$\tau_{max}$	Tensão cisalhante máxima	[Pa]
$E_1$	Módulo de elasticidade do corpo 1	[Pa]
$E_2$	Módulo de elasticidade do corpo 2	[Pa]
$E^*$	Módulo de elasticidade combinado	[Pa]
$\nu_1$	Coefficiente de Poisson do corpo 1	[ - ]
$\nu_2$	Coefficiente de Poisson do corpo 2	[ - ]
$p_0$	Máxima pressão de contato	[Pa]
$A_{mp}$	Amplitude da rugosidade	[m]
$\lambda$	Comprimento de onda	[m]
$\Delta p_r$	Sobrepessão relativa	[ - ]
$\Delta S_r$	Variação relativa da área de contato	[ - ]
$\beta$	Raio média das asperezas	[ - ]
$\sigma$	Desvio padrão das asperezas	[ - ]
$\psi$	Índice de plasticidade	[ - ]

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO E OBJETIVOS.....</b>	<b>10</b>
1.1 INTRODUÇÃO.....	10
1.2 OBJETIVOS.....	11
<b>2 FUNDAMENTAÇÕES TEÓRICA.....</b>	<b>12</b>
2.1 TEORIA DE HERTZ – CONTATO LINEAR.....	12
2.2 CAMPOS DE PRESSÃO E TENSÃO.....	15
2.3 ANÁLISE DO PROBLEMA RUGOSO.....	17
<b>3 EFEITO DA RUGOSIDADE NAS TENSÕES DE CONTATO.....</b>	<b>23</b>
<b>4 METODOLOGIA.....</b>	<b>25</b>
4.1 VALIDAÇÃO PARA UM CASO LISO.....	25
4.2 VALIDAÇÃO PARA UM CASO RUGOSO SENOSOIDAL.....	26
4.3 AVALIAÇÃO DAS PROPRIEDADES MATERIAIS.....	26
4.4 AVALIAÇÃO DA RUGOSIDADE EM SUPERFÍCIES SENOSOIDAIS.....	27
4.5 AVALIAÇÃO DA RUGOSIDADE EM SUPERFÍCIES REAIS.....	31
<b>5 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>33</b>
5.1 VALIDAÇÃO PARA UM CASO LISO.....	33
5.2 VALIDAÇÃO PARA UM CASO RUGOSO SENOSOIDAL.....	36
5.3 AVALIAÇÃO DAS PROPRIEDADES MATERIAIS.....	38
5.4 AVALIAÇÃO DA RUGOSIDADE EM SUPERFÍCIES SENOSOIDAIS.....	41
5.5 AVALIAÇÃO DA RUGOSIDADE EM SUPERFÍCIES REAIS.....	45
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>48</b>
6.1 CONCLUSÕES.....	48
6.2 TRABALHOS FUTUROS.....	48
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>50</b>
<b>ANEXO A – SCRIPT DO PROGRAMA MATLAB.....</b>	<b>53</b>

# 1 INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

## 1.1 INTRODUÇÃO

Diversos componentes de máquinas operam com o carregamento concentrado em uma pequena área de contato, tais como engrenagens, mancal de rolamentos, came-seguidor, rodatrilha e outros. A parte da mecânica dos sólidos que estuda os fenômenos de contato é denominada mecânica do contato, a qual é responsável por estimar as deformações, deslocamentos e tensões nos sólidos em contato. É de extrema importância tal conhecimento visto que estes são usados nos critérios de falha mais usuais, assegurando assim que problemas como deformações irreversíveis ou falhas por fadiga que possam decorrer do contato sejam evitados ou minimizados. Em decorrência, o contato entre superfícies é um assunto que tem interessado diversos pesquisadores desde o trabalho pioneiro realizado por Hertz em 1882. Segundo Seabra (2003) e Persson (2006), o que gera esse interesse no estudo sobre o contato entre duas superfícies é o fato de que esse tem alta relevância na transferência de calor, desgaste, atrito e adesão, que são fenômenos que ocorrem em qualquer tipo de contato tribológico.

Segundo Johnson (1985), Hertz em seu trabalho estudou o contato entre sólidos que estão em equilíbrio, considerando materiais homogêneos, sem a presença de forças tangenciais e desconsiderando as rugosidades que estão presentes nas superfícies. Nestas condições observou-se que a área de contato apresenta uma variação não linear com a força normal aplicada, sendo essa relação de  $F_n^{1/2}$  para um contato que se dá em uma linha antes da aplicação da carga, o qual é designado como contato linear. Desde os estudos de Hertz, vários trabalhos têm sido publicados nesse domínio, o que atesta a sua relevância científica e tecnológica. Muitos destes trabalhos estão associados a aplicação da teoria de Hertz, cuja solução analítica é bastante simples, para avaliação do desempenho de elementos cujo desempenho está associado a mecânica do contato; outros, estão associados a evolução da teoria de Hertz. Atualmente existem algoritmos sofisticados que permitem determinar as tensões e deformações de contato incluindo forças tangenciais e rugosidade em materiais não homogêneos. A desvantagem é que estes algoritmos não estão disponíveis e são de complexa implementação. Consequentemente, há poucos trabalhos avaliando sistematicamente o efeito do material, do atrito e das rugosidades nas tensões e deformações de contato. Dos trabalhos mais reconhecidos sobre o efeito da rugosidade nas tensões de contato cita-se Seabra e Berthe (1987) e Greenwood e Williamson (1966). Em ambos os casos, as superfícies são modeladas como uma combinação

de várias esferas ou como uma onda senoidal, as quais diferem significativamente de muitas superfícies de engenharia. Os artigos mais recentes e atualizados sobre modelos de mecânica do contato (Persson et al., 2004 e Afferrante et al., 2018), que também incluem plasticidade, não fazem uma análise sobre o efeito de diferentes acabamentos superficiais nas repostas de contato. Neste sentido, verifica-se uma lacuna de aplicação de ferramentas / algoritmos já desenvolvidos por vários pesquisadores para definir características / parâmetros topográficos de superfícies reais que são relevantes para avaliação do contato.

## 1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é avaliar o efeito da rugosidade das superfícies e das propriedades elásticas dos materiais em termos de pressão, área e tensões para um contato linear. Para atingir este objetivo é necessário desenvolver os seguintes objetivos específicos:

- Implementar no algoritmo desenvolvido por Seabra e Berthe (1987) a possibilidade de avaliar superfícies reais de engenharia medidas por perfilometria ótica<sup>1</sup>;
- Selecionar propriedades materiais ( $E$ ,  $\nu$ ) e topografias que sejam relevantes aos problemas de contato;
- Executar sistematicamente o programa a fim de gerar quantidade de dados significativa para realizar uma análise de tendência dos resultados.

---

<sup>1</sup> O algoritmo desenvolvido por Seabra e Berthe (1987) foi implementado e disponibilizado em Matlab pelo orientador do TCC.

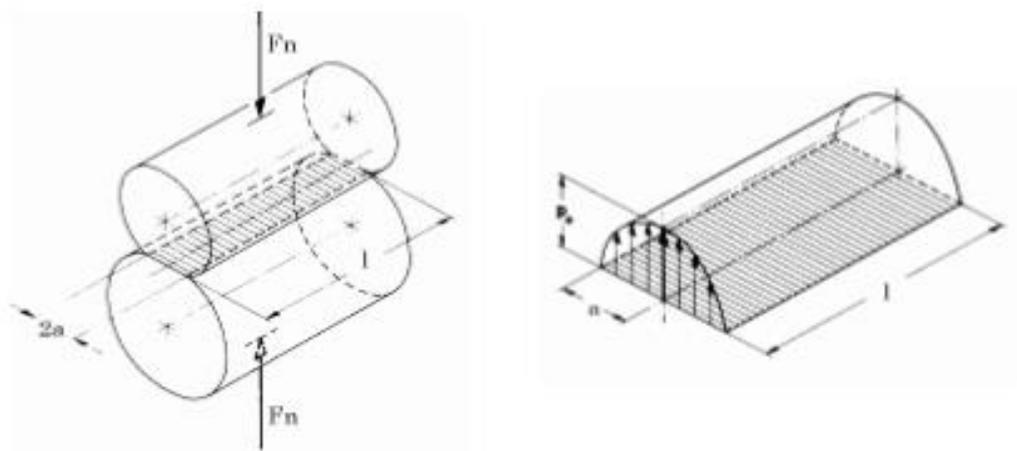
## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo os principais conceitos aplicados por Seabra e Berthe (1987) no desenvolvimento do algoritmo de contato a ser utilizado neste trabalho serão apresentados para um contato linear, que é o objeto de estudo deste trabalho. Na seção 3.1 a teoria de Hertz será brevemente introduzida para um contato linear sem rugosidades (liso). O intuito da aplicação da teoria de Hertz é a obtenção da área de contato e do campo de pressão. Conhecendo-se o campo de pressão, as equações usadas para determinação das tensões e deformações, advindas das teorias de Bousinesq e Cerutti, serão introduzidas na seção 3.2. Por fim, o algoritmo desenvolvido por Seabra e Berthe (1987), que usa as equações descritas nas seções 3.1 e 3.2, para o cálculo do contato rugoso será explicado.

### 2.1 TEORIA DE HERTZ – CONTATO LINEAR

A teoria de mecânica do contato é aplicada quando dois sólidos elásticos de revolução são postos em contato um com o outro, tocam-se, inicialmente, num único ponto ou segundo uma linha. Ao serem solicitados por uma determinada carga, mesmo que de pequena intensidade, eles deformam-se na vizinhança do ponto inicial de contato, originando uma pequena área de contato de pequenas dimensões quando comparadas com as dos dois corpos. Na Figura 1 mostra-se um exemplo típico de contato linear submetido a um carregamento radial, que é o objeto de estudo deste trabalho.

**Figura 1. Contato linear entre dois cilindros.**



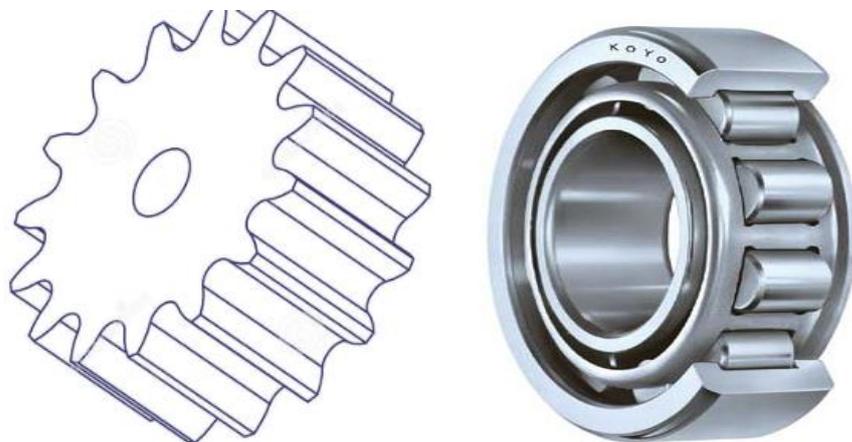
Fonte: Seabra, 2003

A teoria de Hertz só pode ser aplicada para obtenção dos campos de pressão e deformação se as seguintes hipóteses forem satisfeitas:

- i. Os sólidos que estão em contato precisam ser de materiais que possuam comportamento homogêneo, linear elástico e isotrópico, conforme as leis de Hooke;
- ii. As geometrias dos sólidos precisam ter a segunda derivada continua e o contato deve ser não conforme, tendo conhecimento sobre os raios de curvatura principais no ponto de contato inicial;
- iii. Não existe forças tangenciais que atuem nos corpos (sem atrito), tendo assim uma força aplicada puramente normal ao plano tangente comum;
- iv. Comparado em relação as dimensões dos sólidos que estão em contato, as dimensões da área de contato têm que ser pequenas;
- v. Quando comparado com os raios de curvatura equivalentes, as dimensões que ocorrem na área de contato devem ser pequenas.

Muitos elementos de máquinas, como engrenagens, mancal de rolamentos de rolos cilíndricos, cônicos e de agulha, came-seguidor e outros apresentam um contato que ocorre em uma linha antes da aplicação da carga, conforme mostrado Figura 2. Nesse caso o contato inicial é dado por uma linha, tornando o problema bidimensional e portanto, de mais fácil resolução.

**Figura 2. Exemplos de elementos de máquinas cujo contato é classificado como linear.**



**Fonte: Catálogo comercial Gerbi**

Segundo Johnson (1985), para simplificação adota-se que o contato seja realizado entre dois cilindros de raios representativos do contato, que quando for aplicado uma força normal por unidade de comprimento para esse contato, os dois cilindros vão gerar uma área de contato retangular, de largura de  $2a$  muito estreita e comprimento  $l$  igual ao comprimento dos cilindros (ver Figura 1). A solução do problema de contato passa pela resolução das equações (1) a (7), descritas abaixo.

O raio de curvatura equivalente na direção  $x$ , que representa o raio combinado de onde as superfícies de revolução se tocam, é calculado pela equação (1).

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{x1}} + \frac{1}{R_{x2}} \right) \quad (1)$$

Onde:

$R_x$  é o raio de curvatura equivalente na direção  $x$ ;

$R_{x1}$  é o raio de curvatura do corpo 1 na direção  $x$ ;

$R_{x2}$  é o raio de curvatura do corpo 2 na direção  $x$ .

O módulo de elasticidade combinado  $E^*$ , que leva em consideração as propriedades de ambos os materiais e é obtido pela equação (2).

$$\frac{1}{E^*} = \frac{(1 - \nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1 - \nu_2^2)}{E_2} \quad (2)$$

Sendo que  $\nu_1$  e  $\nu_2$  são referentes aos coeficientes de Poisson dos materiais dos sólidos 1 e 2 respectivamente, enquanto que  $E_1$  e  $E_2$  são os módulos de elasticidade dos materiais dos sólidos 1 e 2 respectivamente.

Com estes dados, e conhecendo-se o comprimento do contato  $l$ , é possível calcular a pressão máxima de contato  $p_0$  (equação (3));

$$p_0 = \sqrt{\frac{2F_n E^*}{\pi l R_x}} \quad (3)$$

E por fim, a semi-largura do contato,  $a$ , e a área de contato  $A_c$  pelas equações (4) e (5), respectivamente.

$$a = \frac{R_x}{E^*} p_0 \quad (4)$$

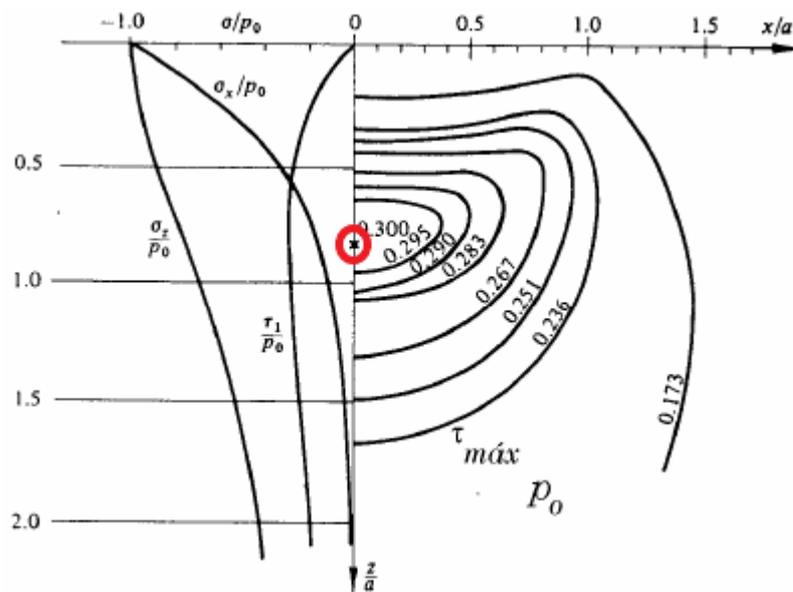
$$A_c = 2al \quad (5)$$

Com posse dos valores de pressão máxima de contato  $p_0$  e semi-largura do contato  $a$ , obtém-se por meio das equações (6) e (7) a tensão máxima de cisalhamento  $\tau$  e a profundidade em que a mesma ocorre  $z$ , respectivamente. A Figura 3 ilustra a distribuição desta tensão com a posição do seu valor de máximo especificada.

$$\tau_{max} = 0,3 p_0 \quad (6)$$

$$z = 0,7861 a \quad (7)$$

**Figura 3. Tensão máxima de cisalhamento, linhas de isotensão.**



**Fonte: Seabra, 2003**

## 2.2 CAMPOS DE PRESSÃO E TENSÃO

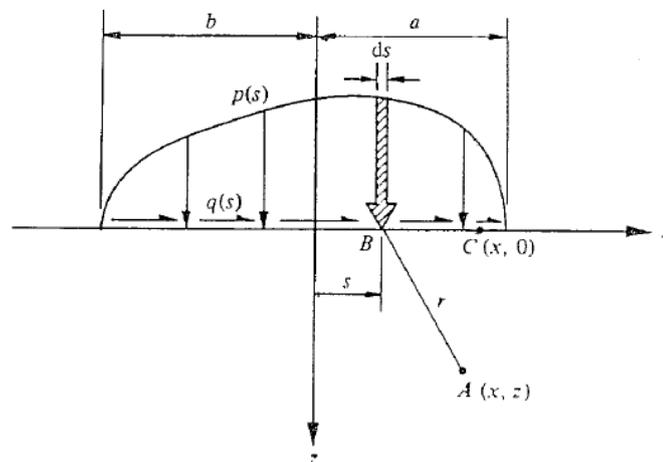
As equações apresentadas na seção anterior são referentes apenas aos valores máximos de pressão de contato hertziana e tensão de cisalhamento, bem como a localização da tensão na sub-superfície. Porém, também é possível expandir o equacionamento para obtenção dos campos de pressão e de tensão. Visto que o campo de pressão tem um formato paraboloide (Seabra, 2003), o mesmo é simplesmente descrito pela equação (8).

$$p(x) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (8)$$

A partir do campo de pressões, e considerando que os corpos em contato poder ser considerados como um semi-espço elástico, a análise desses problemas é dada pelas equações de Boussinesq e Cerruti, as quais conseguem representar as tensões e deformações que ocorrem no interior dos corpos em contato.

Como o problema a ser analisado se trata de um contato linear, o modelo para fazer a análise das tensões e deformações é dado pela Figura 4. Os eixos de referência são definidos a partir da superfície limite do semi-espço elástico que é configurada com base no plano XOY, onde  $z$  é igual a 0 ( $z = 0$ ) e está direcionado para o interior do sólido. As pressões superficiais tangenciais e normais são representadas por  $q(x)$  e  $p(x)$  respectivamente e estão aplicadas em uma banda  $-b < x < a$ , ao passo que o restante da superfície não está sob nenhuma solicitação. As pressões atuantes na superfície estão divididas uniformemente em uma banda estreita, a qual está no mesmo sentido do eixo  $y$ , com uma largura  $a+b$  na direção  $x$ .

**Figura 4. Semi-espço elástico linear sujeito a pressão normal e tangencial distribuídas.**



**Fonte: Seabra, 2003**

Sendo assim, as pressões tanto normais como tangenciais, são apenas função de  $x$ , tornando o problema bidimensional. Visto que as solicitações produzem uma deformação estreita em relação ao comprimento dos corpos de contato na direção  $Y$ , supõe-se ainda que as solicitações produzam um estado plano de deformação.

As tensões subsuperficiais num ponto  $A$  qualquer no interior de um sólido solicitado em  $B$ , conforme apresentado pela Figura 4, apresentam solução analítica conhecida (Johnson, 1985), a qual é apresentada pelas equações (9) a (12).

$$\sigma_x = -\frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)(x-s)^2 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} - \frac{2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(s)(x-s)^3 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \quad (9)$$

$$\sigma_z = -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} - \frac{2z^2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(s)(x-s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \quad (10)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2z^2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)(x-s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} - \frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(s)(x-s)^2 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \quad (11)$$

$$\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z) \quad (12)$$

Similarmente, os deslocamentos num ponto  $C$  qualquer na superfície de um sólido (ver Figura 4), que tenha sido solicitado em  $B$ , apresentam solução analítica conhecida (Johnson, 1985), a qual é apresentada pelas equações (13) a (14).

$$\begin{aligned} \bar{u}_x = & -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} \left\{ \int_{-b}^x p(s) ds - \int_x^a p(s) ds \right\} \\ & - \frac{2(1-\nu^2)}{2E} \int_{-b}^a q(s) \ln|x-s| ds + C_1 \end{aligned} \quad (13)$$

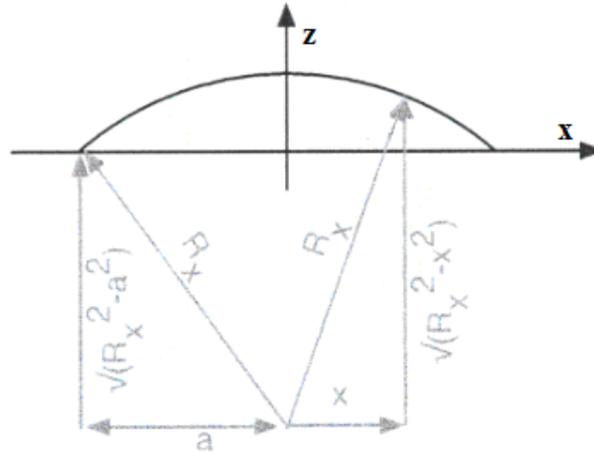
$$\begin{aligned} \bar{u}_z = & -\frac{2(1-\nu^2)}{2E} \int_{-b}^a p(s) \ln|x-s| ds \\ & - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} \left\{ \int_{-b}^x q(s) ds - \int_x^a q(s) ds \right\} + C_2 \end{aligned} \quad (14)$$

### 2.3 ANÁLISE DO PROBLEMA RUGOSO

A formulação do problema de contato para análise do efeito da rugosidade no regime elástico foi dada por Seabra e Berthe (Seabra e Berthe, 1987). Como neste caso o contato é realizado entre superfícies que não são geometricamente definidas, por causa da presença de rugosidade, torna-se necessário utilizar uma solução numérica para o problema. Inicialmente as superfícies lisas devem ser descritas conforme a equação (15), as quais derivam do esquema geométrico apresentado pela Figura 5.

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{R_{x1}^2 - x^2} - \sqrt{R_{x1}^2 - a^2} \\ z_2 &= \sqrt{R_{x2}^2 - a^2} - \sqrt{R_{x2}^2 - x^2} \end{aligned} \quad (15)$$

**Figura 5. Esquema representativo da definição da geometria de contato liso**



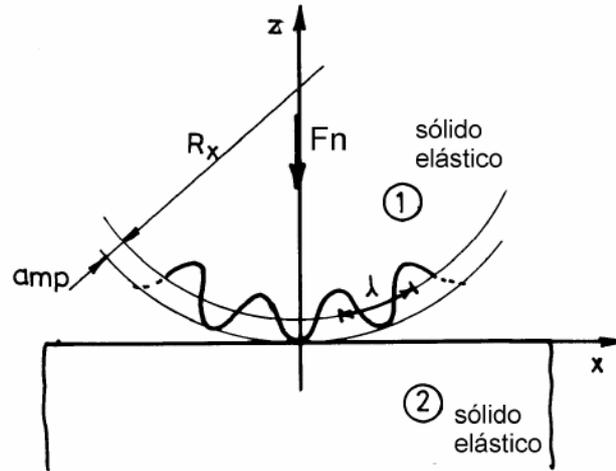
**Fonte: Seabra,2003**

Então, visto que para um contato rugoso a definição da geometria já não é mais apresentada pela equação (15), pois nestes casos o raio descrito por  $R_x$  na Figura 5 já não tem o mesmo valor de  $-a$  até  $a$ , a equação das superfícies de contato deve ser descrita adicionando o contributo da rugosidade, conforme equação (16).

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{R_{x1}^2 - x^2} - amp_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{2 \cdot n_1 \cdot a}\right) \\ z_2 &= \sqrt{R_{x2}^2 - x^2} \cdot amp_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{2 \cdot n_2 \cdot a}\right) \end{aligned} \quad (16)$$

Onde os parâmetros  $amp$  e  $n$  ( $\lambda$ ) descrevem a rugosidade da superfície através da sua amplitude e do comprimento de onda, respectivamente, cujo significado físico é apresentado pela Figura 6.

**Figura 6. Contato entre um cilindro ondulado e um plano.**



**Fonte: Seabra,2003**

A solução numérica demanda que seja feita a discretização das superfícies de contato, e fazendo com que no interior de cada elemento os parâmetros se mantenham constantes. A partir da discretização as inequações (17) e (18) e a equação (19) devem ser satisfeitas para a resolução do problema no contato entre as superfícies.

$$D_{ij}p_j - \delta + h_i \geq 0 \quad (17)$$

$$p_i \geq 0 \quad (18)$$

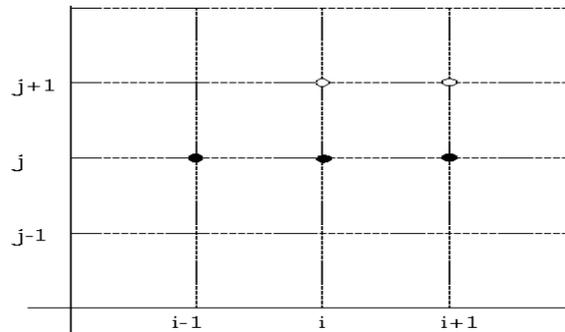
$$\sum_{I=1}^N p_i A_i = F_n \quad (19)$$

Onde P é a pressão de contato,  $\delta$  é a penetração, h é distância entre dois pontos na geometria não deformada das superfícies e  $D_{ij}$  é o coeficiente de influência, sendo dado por:

$$D_{ij} = \frac{1 - \nu}{\pi E} \int_{x_j - \frac{\Delta x}{2}}^{x_j + \frac{\Delta x}{2}} \frac{\partial x_i}{\sqrt{(x_i - x_j)^2}} \quad (20)$$

Observe que para cada ponto  $x_i$  é associado à pressão  $p_i$  aplicada sobre o segmento de largura  $d_i$  centrada neste ponto. Feitas estas considerações, pode-se obter o deslocamento vertical no ponto  $x_i$  provocado pela pressão  $p_j$  aplicada ao segmento  $j$ . (ver Figura 7)

**Figura 7. Representação da superfície discretizada.**



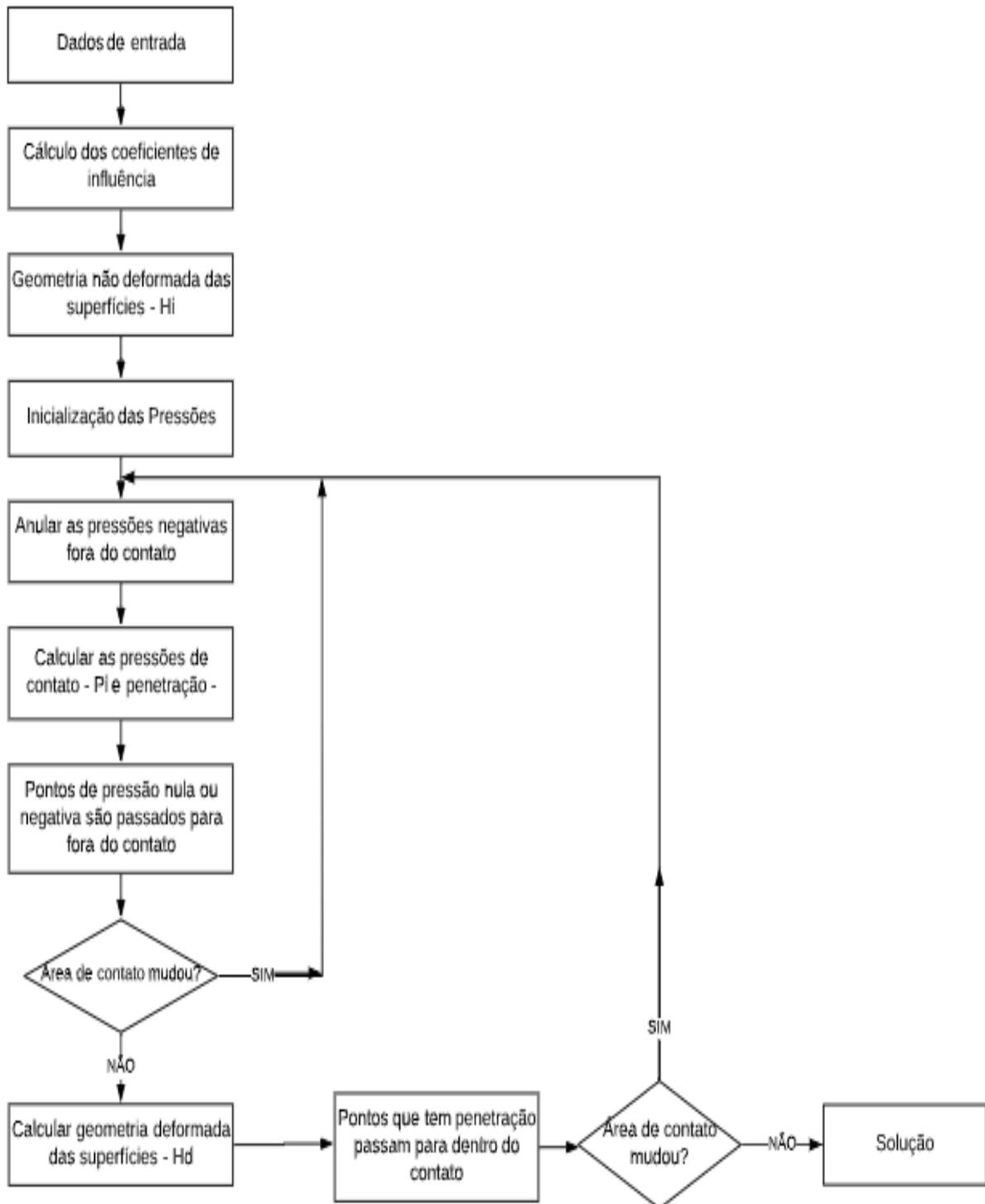
**Fonte: Seabra, 2003**

Segundo Seabra e Berthe (1987), o coeficiente de influência  $D_{ij}$  é essencial para um cálculo mais preciso das pressões, e conseqüentemente das tensões que ocorrem no sólido. O coeficiente é responsável por levar em consideração a pressão dos pontos vizinhos para o cálculo da pressão de cada ponto. Essa alteração se faz necessário já que superfícies rugosas apresentam dentro da sua semi-largura de contato pontos que não estão em contato, algo que não são representados na teoria de Hertz que considera apenas superfícies lisas.

O algoritmo proposto por Seabra e Berthe é iniciado pelo cálculo da pressão de contato sem considerar as rugosidades utilizando a solução analítica proposta por Hertz (Equações (1) a (4)). Na sequência, novamente é calculado a distribuição de pressão e penetração que ocorre no contato, entretanto nessa parte as superfícies utilizadas para o cálculo já são as superfícies com as devidas rugosidades. Caso seja obtido pontos de pressão negativa ou nula, é necessário que esses pontos sejam retirados da área de contato.

Após esses cálculos deve-se realizar o cálculo das geometrias deformadas que estão em contato, assim como determinar a penetração que ocorre entre os dois sólidos. Essa etapa é importante devido ao fato de que com a deformação das geometrias e a penetração que ocorre devido a força normal aplicada novas asperezas da superfície podem acabar entrando em contato. Caso novas asperezas entrem em contato quando a penetração é calculada, faz-se necessário retornar ao cálculo de distribuição de pressão até em que a área de contato entre as duas superfícies não sofra mais nenhuma alteração. A Figura 8 apresenta o fluxograma com os passos descritos acima.

**Figura 8. Fluxograma do algoritmo utilizado para resolução do problema de contato.**



**Fonte: Autoria própria**

Com a solução para a distribuição de pressão e penetração já realizada, torna-se possível calcular a distribuição das tensões que ocorrem para o sólido rugoso em questão com as equações (9) a (12).

### 3 EFEITO DA RUGOSIDADE NAS TENSÕES DE CONTATO

Este capítulo visa introduzir brevemente os principais parâmetros topográficos associados a pressão de contato via revisão de literatura.

A literatura de mecânica do contato rugoso é vasta. Com as palavras chave “*rough contact mechanics*” no *google* acadêmico obtêm-se 16.400 resultados<sup>2</sup>. Obviamente não é viável analisar todos os artigos existentes sobre o tópico. Neste sentido, analisou-se os 10 artigos mais relevantes<sup>3</sup> buscando informações que relacionam parâmetros topográficos e tensões de contato. Verificou-se em Whitehouse e Archard (1970), Greenwood e Tripp (1970), Nayak (1971), Onions (1973), Francis (1977), Bhushan (1984) e Chang (1987) que há um consenso que os três parâmetros mais relevantes são:

- i) Raio média das asperezas ( $R_p$  ou  $\beta^2$ );
- ii) Densidade de asperezas ( $\eta$ )
- iii) Desvio padrão dos picos de rugosidade ( $\sigma_p$ ).

Em algumas literaturas observa-se o uso da inclinação das asperezas ( $S_{dq}$ ), a qual pode ser derivada dos parâmetros  $R_p$  e  $\sigma_p$ .

O aumento da pressão de contato (ou a redução da área de contato) em função da rugosidade, definida pela razão entre a pressão máxima (ou área) de contato considerando a rugosidade e a pressão máxima (ou área) de contato para o caso liso, ocorre para:

- i) Aumento do desvio padrão dos picos de rugosidade ( $\sigma_p$ );
- ii) Redução do raio média das asperezas ( $R_p$  ou  $\beta$ );
- iii) Redução da densidade de asperezas ( $\eta$ )

Esta análise está de acordo com o senso comum, ou seja, se existirem muitas asperezas por unidade de área, estas tiverem a mesma altura e a ponta com raio grande, tem-se uma situação em que a pressão de contato estará bem distribuída e não ocorrerá um aumento significativo ao comparar com um caso liso. De fato, no limite, ( $\sigma_p \rightarrow 0$ ;  $R_p \rightarrow \infty$ ;  $\eta \rightarrow \infty$ ) converge-se para uma superfície plana.

<sup>2</sup> Acessado em 10/10/2019

<sup>3</sup> Opção de filtro do google acadêmico

O índice de plasticidade, proposto por Greenwood e Williamson (1966), permite associar tanto as propriedades do material quanto os parâmetros geométricos das asperezas para analisar a severidade do contato (equação (21)).

$$\psi = \frac{E^*}{H} \left( \frac{\sigma}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

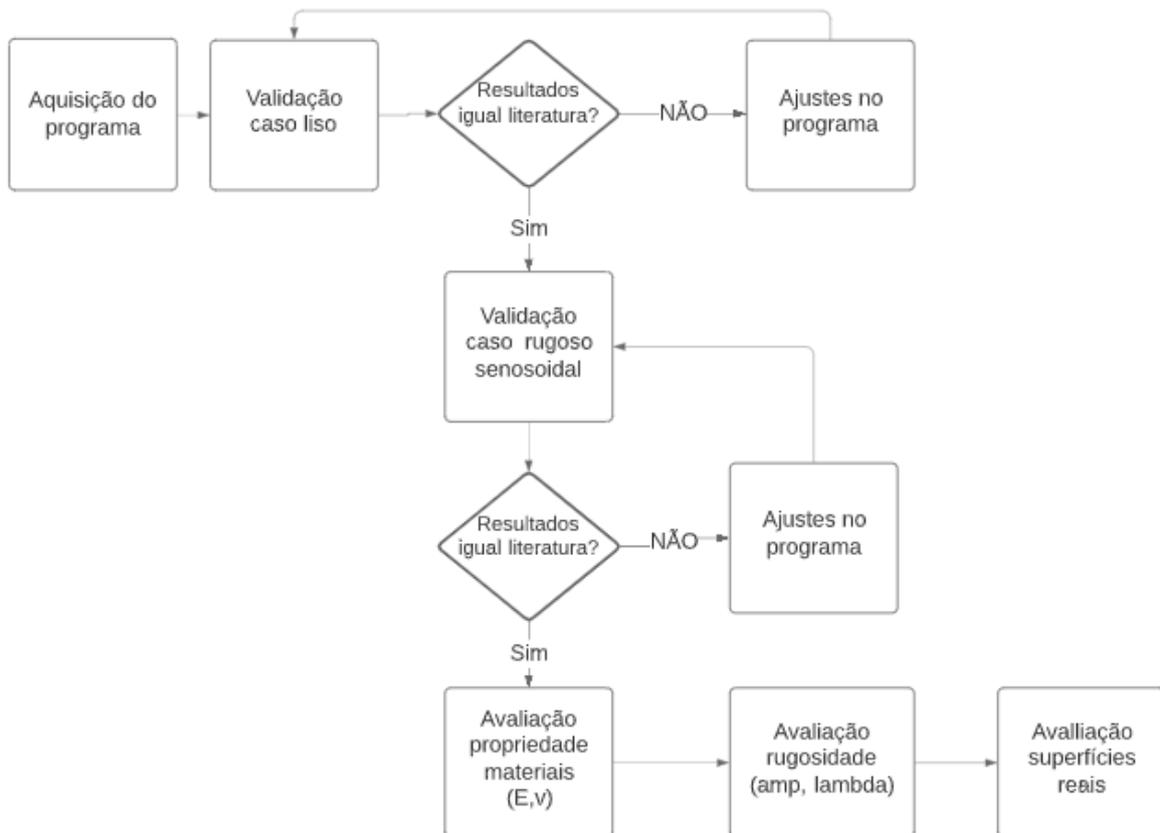
Onde  $\sigma$  é o desvio padrão da distribuição de alturas das asperezas,  $\beta$  é o raio médio das asperezas,  $E^*$  é o módulo de elasticidade combinado e  $H$  é a dureza do material. Para um mesmo material, verifica-se que quanto maior o desvio padrão dos picos de rugosidade ( $\sigma$ ) e menor o raio médio das asperezas ( $\beta$ ), maior o índice de plasticidade, e portanto maior a severidade de contato. Segundo Greenwood e Williamson (1966), quando o índice de plasticidade tem valores menores que 0,6 a deformação plástica acontecerá somente se a pressão nominal aplicada a superfície for muito alta, entretanto para valores maiores que 1 a deformação plástica ocorre mesmo para valores muito baixos de pressão.

Visto que na grande maioria dos modelos de contato que verificaram os efeitos dos parâmetros  $\sigma_p$ ,  $R_p$ , e  $\eta$  são computacionais, esse trabalho visa verificar tais observações para superfícies reais de engenharia.

## 4 METODOLOGIA

Este capítulo descreve detalhadamente os casos que foram executados com sua devida justificativa. Um fluxograma da metodologia é apresentado na Figura 9.

**Figura 9: Fluxograma da metodologia utilizada.**



**Fonte: Autoria própria**

### 4.1 VALIDAÇÃO PARA UM CASO LISO

Com o algoritmo apresentado no Anexo A, resolveu-se o exercício da seção 6.2.1 da apostila de mecânica do contato do Seabra, e ainda comparou-se os valores numéricos com as equações analíticas apresentadas na seção 3 (Equações (1) a (4)).

#### 4.2 VALIDAÇÃO PARA UM CASO RUGOSO SENOSOIDAL

Com o algoritmo apresentado no Anexo A, resolveu-se o exemplo 6.2.1 da apostila de Mecânica do Contato (Seabra, 2003). Neste exemplo considera-se o contato entre um cilindro ondulado contra uma superfície lisa.

A avaliação da variação de pressão ou área de contato em função do acréscimo de rugosidade é apresentada em função dos termos:

- i) Sobrepressão relativa  $\rightarrow \Delta p = \frac{p_{rug} - p_0}{p_0}$
- ii) Variação relativa da área de contato  $\rightarrow \Delta S = \frac{S_{rug} - S_0}{S_0}$

Estes termos foram utilizados para que a comparação com a fonte original (Seabra, 2003) seja direta.

#### 4.3 AVALIAÇÃO DAS PROPRIEDADES MATERIAIS

As propriedades materiais ( $E$ ,  $\nu$ ) podem ser facilmente avaliadas usando as equações analíticas. Aqui não há dúvidas ou divergência na literatura sobre o efeito do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson na pressão de contato. Ainda assim, estes parâmetros serão avaliados sistematicamente. Variou-se o coeficiente de Poisson entre 0,2 e 0,5, visto que materiais isotrópicos típicos de engenharia apresentam coeficiente de Poisson nesta faixa (Mott, 2009). Valores próximos a 0,5 são referentes a borracha ou ouro, em torno de 0,3 encontram-se muitos dos materiais de engenharia, como alumínio, aço, cobre, titânio, magnésio, e próximos a 0,2 destacam-se os ferros fundidos. Para o módulo de elasticidade, utilizou-se valores típicos de materiais distintos de engenharia: 15 GPa (Madeira), 70 GPa (Alumínio), 210 GPa (Aço), 407 GPa (Tungstênio). É importante mencionar que as propriedades da madeira não se enquadram nas hipóteses apresentadas por Hertz, ainda assim manteve-se a escolha para que a avaliação do efeito do módulo de elasticidade pudesse ser bastante abrangente.

Para essa etapa o contato será entre um sólido de revolução contra um plano, onde as propriedades do plano não se alteram para nenhum teste realizado. As propriedades escolhidas para o plano foram de 210 GPa para módulo de elasticidade e 0,3 para coeficiente de Poisson (aço).

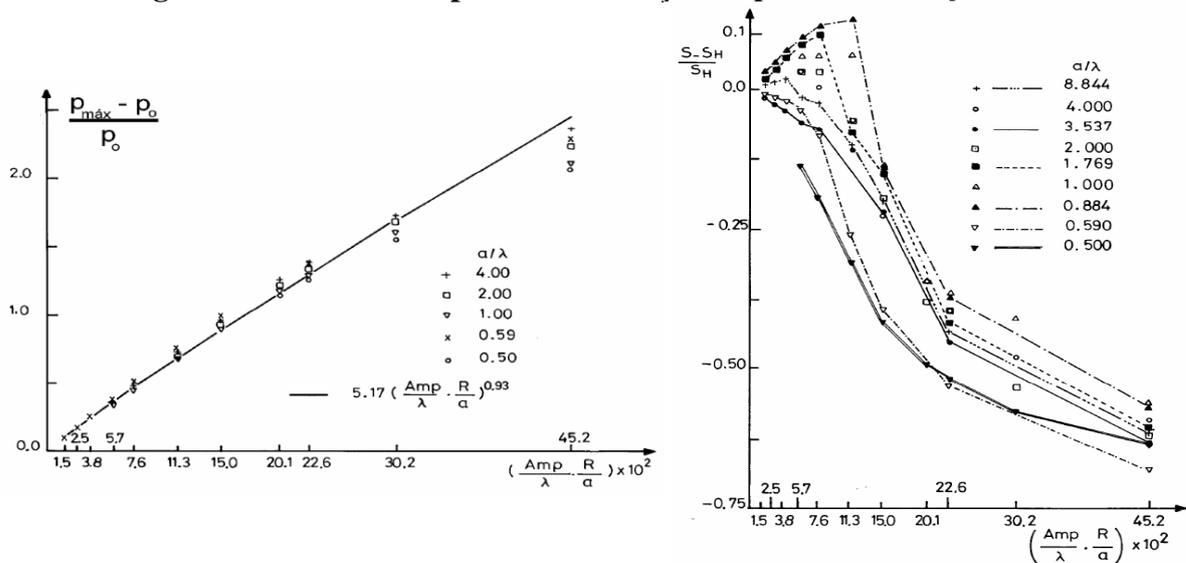
#### 4.4 AVALIAÇÃO DA RUGOSIDADE EM SUPERFÍCIES SENOSOIDAIS

Nesta etapa serão rodados vários casos alterando-se os parâmetros de amplitude (*amp*) e comprimento de onda ( $\lambda$ ), ver Figura 6. O objetivo é avaliar o efeito dos parâmetros topográficos correspondentes a **superfícies manufaturáveis de forma isolada**, a fim de verificar a relevância única e exclusivamente da topografia.

Este item é de extrema importância visto que, apesar de existirem muitos modelos de contato publicados na literatura, Seabra e Berthe (1987) foram os únicos que executaram centenas de casos numéricos e propuseram uma equação analítica para descrever a variação da pressão de contato hertziana incluindo rugosidades senosoidais (ver Equação (22) e Figura 10). Porém, a equação proposta, visando ser de uso genérico, incorpora alterações macrogeométricas ( $R_{x1}$  e  $R_{x2}$ ) e de carregamento (associado ao valor de *a*). Logo, torna-se muito difícil isolar o efeito do acabamento superficial, visto que uma análise criteriosa da Figura 10 mostra que os parâmetros raio de curvatura *R* e a carga (associada a variação de *a*) tem efeitos dominantes sobre a sobrepressão relativa.

$$\Delta p_r = \frac{P_{m\acute{a}x} - P_0}{P_0} = 5.172 \left( \frac{amp}{\lambda} \cdot \frac{R}{a} \right)^{0.931} \quad (22)$$

**Figura 10: Valores de  $\Delta p_r$  e  $\Delta S_r$  em função do parâmetro  $Amp/\lambda * R/a$ .**

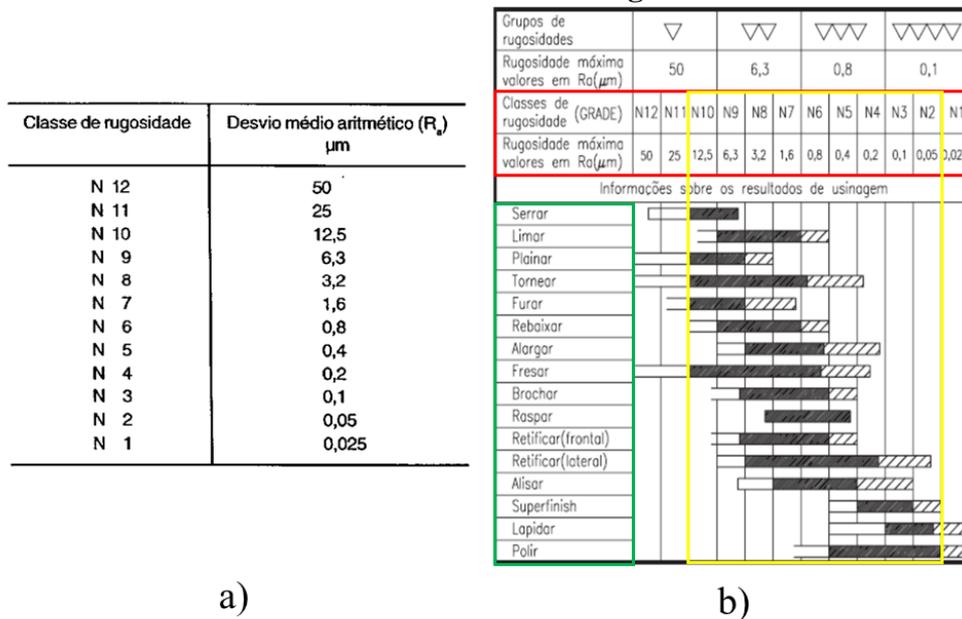


Fonte: Seabra,2003

Além disso, verifica-se que muitas das combinações de  $A_{mp}$  e  $\lambda$  usadas por Seabra e Berthe (1987) resultam em superfícies que não são manufaturáveis com ferramentas e equipamentos convencionais. Por exemplo, o uso de uma amplitude muito grande ( $A_{mp}$ ) associada a um comprimento de onda ( $\lambda$ ) muito pequeno resulta em uma superfície com asperezas extremamente delgadas, cujo ângulo de inclinação da aspereza é muito alto. De acordo com Hutchings e Shipway (2017), as superfícies reais de engenharia não possuem ângulos de inclinação maiores que  $10^\circ$  para as asperezas. Logo, os resultados previstos pela equação (22) tem aplicação limitada para o entendimento do efeito das rugosidades na sobrepressão relativa.

Considerando os processos mais comuns de fabricação, algumas limitações quanto a características topográficas são encontradas. Sendo assim, ao considerar os processos de fabricação em conjunto com as classes de rugosidades definidas pela norma NBR 8404, uma primeira faixa de rugosidade pode ser estabelecida para análise. Conforme mostra a Figura 11, a parte pintada de preto apresenta quais são as classes de rugosidade mais comuns para cada tipo de processo de fabricação, com isso valores limites de  $R_a$  para os processos de fabricação vão de uma classe de rugosidade N10( $R_a=12.5\mu m$ ) à N2( $R_a=0.05\mu m$ ).

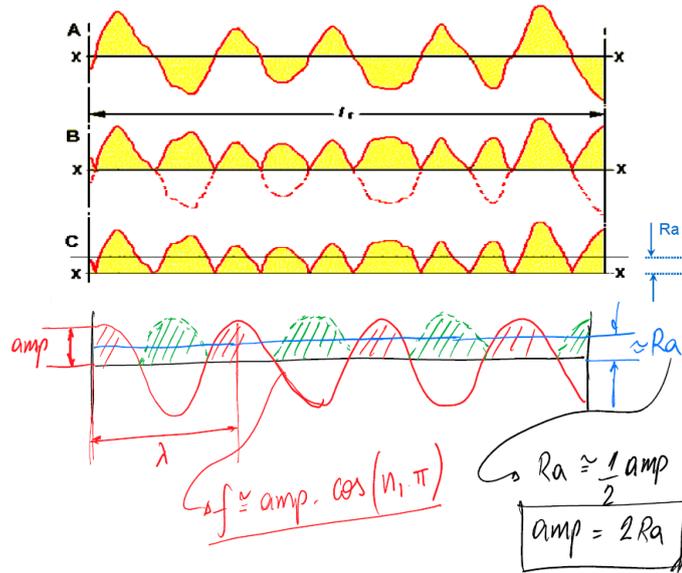
**Figura 11: (a) classes de rugosidade da NBR 8404; (b) diferentes processos de fabricação com suas faixas de classe de rugosidade.**



Fonte: NBR 8404

Para a análise, torna-se necessário uma associação entre os valores de  $R_a$  com o parâmetro amplitude ( $A_{mp}$ ) como é mostrado na Figura 12. Sendo assim, de uma forma simplificada usando de uma função seno ou cosseno, tem-se que  $A_{mp} = 2 * R_a$ , indicado na figura.

**Figura 12: Analogia entre  $R_a$  e amplitude ( $A_{mp}$ ).**



**Fonte: Autoria própria**

Outro parâmetro para superfícies rugosas que permite uma análise distinta é o valor do parâmetro  $R_q$ . De acordo com Hutchings e Shipway (2017), os valores de  $R_q$  e  $R_a$  são próximos e se relacionam através de  $R_q = 1,25 * R_a$  para superfícies gaussianas

Uma segunda análise quanto aos parâmetros de uma superfície rugosa deve ser feita com relação ao comprimento de onda ( $\lambda$ ). Deve-se isso ao fato de que os processos de manufatura existentes não são capazes de produzir superfícies com asperezas extremamente agudas, como a cama de Faquir que está representada na Figura 13, onde se tem valores altos de amplitude com um pequeno espaçamento (baixo valor para comprimento de onda).

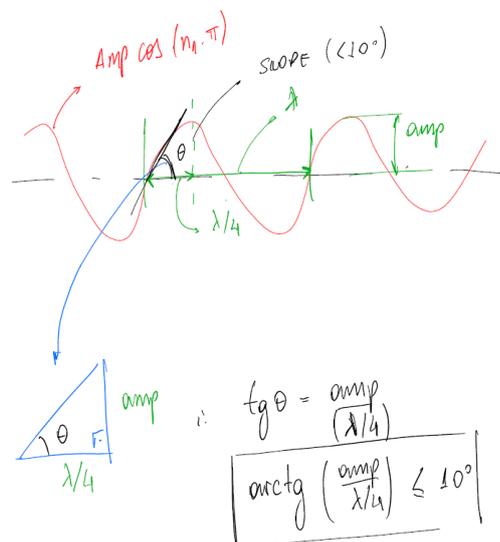
**Figura 13: Analogia para superfícies com asperezas extremamente agudas.**



Fonte: istockphoto.com

De acordo com Hutchings e Shipway (2017), as superfícies reais de engenharia não possuem ângulos de inclinação maiores que  $10^\circ$  para as asperezas. Portanto, da limitação proposta para amplitudes a partir de valores de  $R_a$  obtidos para cada processo de fabricação, valores para o comprimento de onda podem ser obtidos conforme mostra a Figura 14.

**Figura 14: Ilustração do cálculo da inclinação (ângulo  $\theta$ )**



Fonte: Autoria própria

A partir da determinação dos valores viáveis para os parâmetros amplitude e comprimento de onda, que podem ser representados pelos parâmetros topográficos  $R_a$  e  $R_{sm}$ , obtêm-se os valores de sobrepressão para o contato entre as superfícies com rugosidade representada por senoides. Com esses valores serão realizados gráficos de sobrepressão relativa incluindo os parâmetros macrogeométricos  $R$  e  $a$   $[(\Delta p) \times ((A_{mp}/\lambda) \cdot (R/a))]$  e não incluindo estes

parâmetros  $[(\Delta p) \times (A_{mp}/\lambda)]$ . O objetivo de incluir os mesmos é validar os resultados com aqueles apresentados na Figura 10.

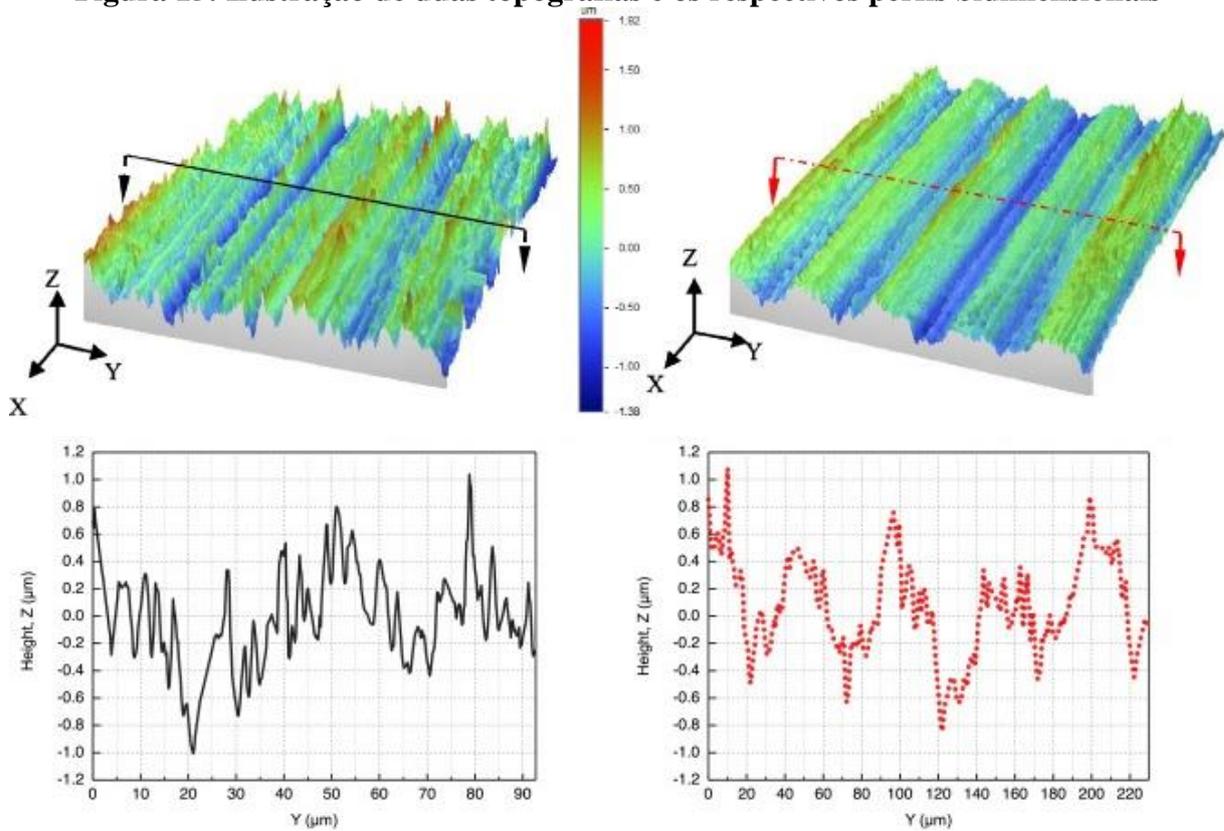
#### 4.5 AVALIAÇÃO DA RUGOSIDADE EM SUPERFÍCIES REAIS

Nesta etapa perfis de rugosidade medidos por perfilometria ótica usando um equipamento Taylor Hobson e tratados conforme procedimento normalizado pela ISO 4288 serão avaliados. Selecionou-se superfícies com acabamentos superficiais distintos a fim de verificar se as relações entre topografia e pressão de contato apresentadas no capítulo 4 são válidas para diferentes processos de fabricação. As superfícies analisadas foram obtidas por processos de brunimento e retificação plana.

Ao utilizar o perfilômetro ótico alguns passos precisam ser realizados para que a medição seja feita de forma correta. Primeiramente deve-se posicionar a peça no equipamento tentando deixá-la mais perpendicular possível em relação a lente. Após este passo deve-se localizar o foco e definir os limites superior e inferior de medição para que seja possível obter dados de todas as asperezas que estão presentes na superfície. Em termos de pós processamento, é sempre necessário realizar o nivelamento da peça, pois o posicionamento manual não garante o mesmo, e aplicar um filtro de forma para a superfície medida, a fim de separar a macrogeometria da microgeometria. Além disso, para eliminar pontos espúrios (muito abaixo ou acima da média), é necessário aplicar um filtro denominado *threshold*, para retirar esses valores que poderiam implicar em resultados errôneos para a análise. Depois desses passos serem realizados, pontos que não foram medidos por limitações que impedem a medição da superfície no equipamento, como por exemplo oxidação, foram preenchidos considerando os 8 pontos mais próximos. Com isso feito, torna-se necessário aplicar o filtro responsável por separar dados de ondulação da rugosidade, esse passo deve ser feito seguindo a norma ISO 4288.

Para cada medição de área realizada (tamanho  $0,83 \times 0,83 \text{ mm}^2$ ) com resolução de  $256 \times 256$  pontos de medição, 4 perfis foram extraídos para análise bidimensional de contato. A seleção dos perfis foi arbitrária, sendo que para cada medição extraiu-se um perfil para as linhas referentes ao ponto 50, 100, 150 e 200. A Figura 15 apresenta esquematicamente imagens tridimensionais e o processo de obtenção dos perfis bidimensionais.

**Figura 15: Ilustração de duas topografias e os respectivos perfis bidimensionais**



**Fonte: Autoria própria**

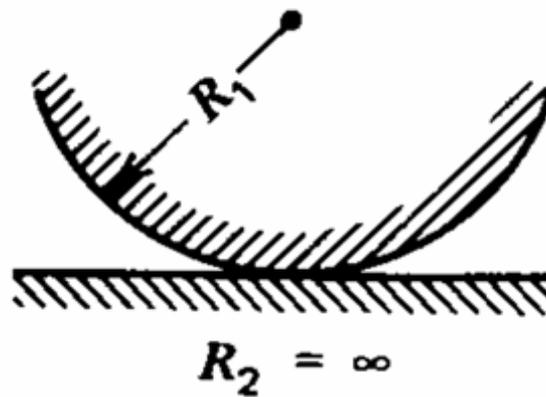
Com a escolha dessas linhas, tabelas com parâmetros de rugosidade foram geradas para cada linha usando o software MountainsMap. Dado que os perfis foram obtidos de superfícies reais, os valores de  $A_{mp}$  e  $\lambda$  são substituídos por parâmetros de rugosidade que apresentem o mesmo significado. Para este trabalho foram escolhidos os parâmetros  $R_a$  para amplitude da aspereza e  $R_{sm}$  para o comprimento de onda. Logo, a avaliação da sobrepressão relativa, em termos de parâmetros topográficos, torna-se:  $(\Delta p) \times ((R_a/R_{sm}) \cdot (R/a))$  e  $(\Delta p) \times (R_a/R_{sm})$ .

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 5.1 VALIDAÇÃO PARA UM CASO LISO

Contato entre cilindro e plano considerando as superfícies lisas conforme a Figura 16. As entradas são apresentadas na Tabela 1.

**Figura 16: Ilustração utilizada no caso #1: cilindro liso sobre plano liso**



Fonte: Seabra,2003

**Tabela 1: Parâmetros de entrada utilizados para o caso#1.**

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
F	Força normal	2770	N
Rx1	Raio do corpo 1	10	mm
Rx2	Raio do corpo 2	$\infty$	mm
l	Comprimento do contato	10	mm
E1	Módulo de elasticidade do corpo 1	$205,8 \times 10^3$	MPa
E2	Módulo de elasticidade do corpo 2	$205,8 \times 10^3$	MPa
v1	Coefficiente de Poisson do corpo 1	0,3	-
N2	Coefficiente de Poisson do corpo 2	0,3	-
Amp1	Amplitude da rugosidade do corpo 1	0	$\mu\text{m}$
Amp2	Amplitude da rugosidade do corpo 2	0	$\mu\text{m}$
$\lambda_1$	Comp. de onda da rugosidade do corpo 1	0	$\mu\text{m}$
$\lambda_2$	Comp. de onda da rugosidade do corpo 2	0	$\mu\text{m}$

Fonte: Autoria própria

As saídas de interesse para validação do programa são:

- i) Pressão máxima de contato ( $P_0$ );
- ii) Tensão cisalhante máxima ( $\tau_{\text{máx}}$ );
- iii) Posição em que ocorre a máxima tensão de cisalhamento ( $z$ );

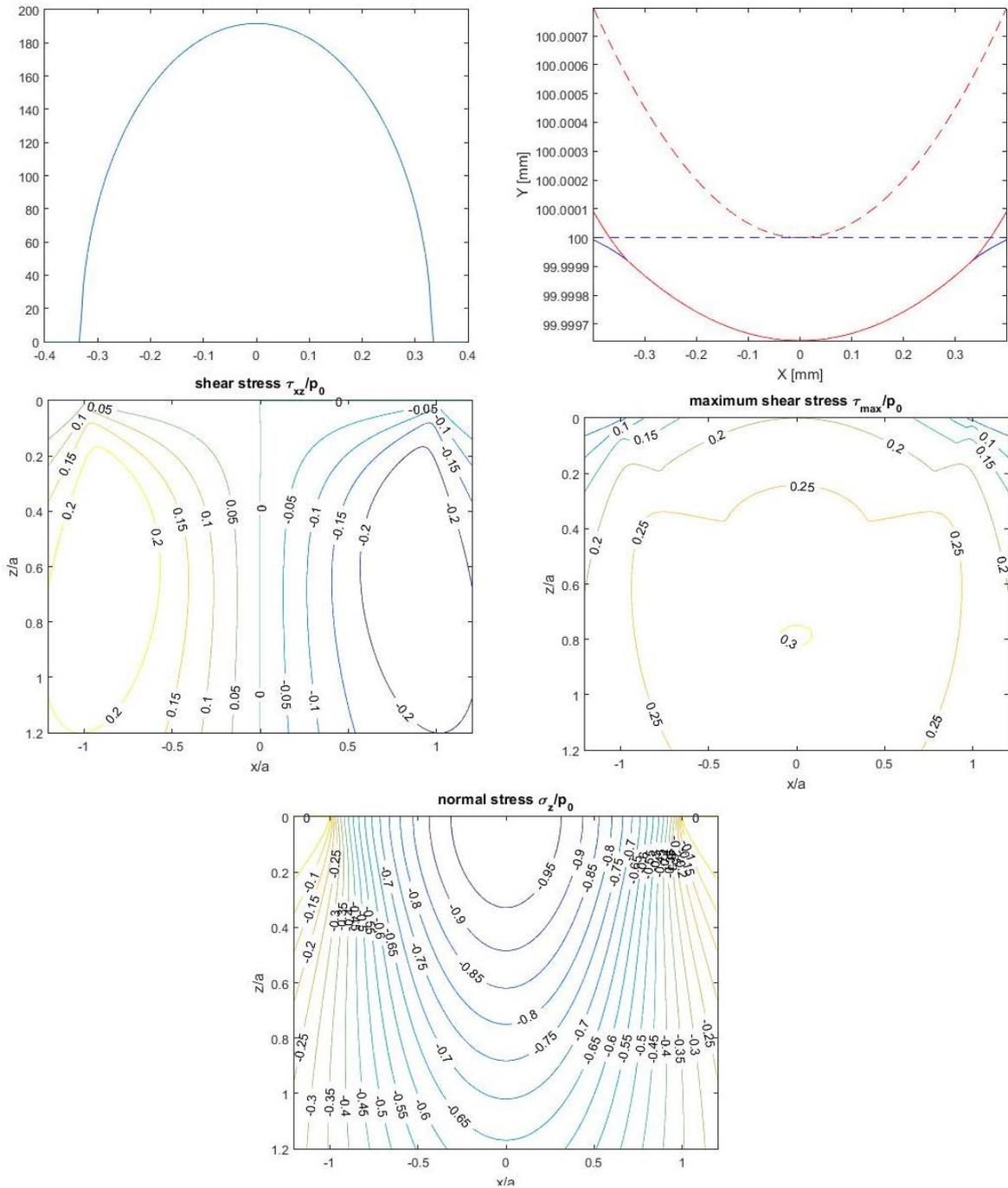
Os resultados dessas saídas estão apresentados graficamente na Figura 17 e reportados na Tabela 2, juntamente com o resultado analítico e do exercício da seção 6.2.1 da apostila de mecânica do contato. O erro observado para qualquer um dos dados de saída é inferior a 0,1% e por tanto, verifica-se que o algoritmo a ser usado é válido.

**Tabela 2: Valores máximos e posição dos valores máximos para os parâmetros analisados**

Parâmetros	Algoritmo proposto	Solução da apostila de Seabra	Solução analítica
Pressão de Contato (MPa)	998.50	998,50	998,50
Tensão Cisalhante $\tau_{\text{máx}}$ (MPa)	299,83	299,83	299,55
Posição da Tensão Cisalhante $\tau_{\text{máx}}$ (MPa)	0,1389	0.1389	0,1388

**Fonte: Autoria própria**

**Figura 17: campo de pressão e penetração, campo de tensão cisalhante máxima  $\tau_{\text{máx}}$ , campo de tensão cisalhante ortogonal  $\tau_{xz}$**

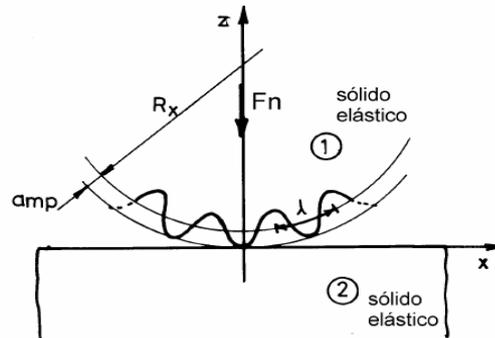


**Fonte: Autoria própria**

## 5.2 VALIDAÇÃO PARA UM CASO RUGOSO SENOSOIDAL

O caso aqui analisado é o de contato entre cilindro rugoso e plano liso conforme a Figura 18. As entradas são apresentadas na Tabela 3.

**Figura 18: Ilustração utilizada no caso #2: cilindro rugoso sobre plano liso**



Fonte: Seabra, 2003

**Tabela 3: Parâmetros de entrada utilizados para o caso#2.**

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
F/l	Força normal por unidade de comprimento	277	N/mm
Rx1	Raio do corpo 1	10	mm
Rx2	Raio do corpo 2	$\infty$	mm
E1	Módulo de elasticidade do corpo 1	$205,8 \times 10^3$	MPa
E2	Módulo de elasticidade do corpo 2	$205,8 \times 10^3$	MPa
v1	Coefficiente de Poisson do corpo 1	0,3	-
v2	Coefficiente de Poisson do corpo 2	0,3	-
Amp1	Amplitude da rugosidade do corpo 1	0,3532	$\mu\text{m}$
Amp2	Amplitude da rugosidade do corpo 2	0	$\mu\text{m}$
$\lambda 1$	Comp. de onda da rugosidade do corpo 1	88,3	$\mu\text{m}$
$\lambda 2$	Comp. de onda da rugosidade do corpo 2	0	$\mu\text{m}$

Fonte: Autoria própria

As saídas de interesse para validação do programa são:

- i) sobrepressão relativa de contato ( $\Delta P_r$ );
- ii) variação relativa da área de contato ( $\Delta S_r$ ).

Os resultados dessas saídas estão apresentados graficamente na Figura 19 e reportados na Tabela 4, juntamente com o resultado do exercício da seção 6.2.1 da apostila de mecânica

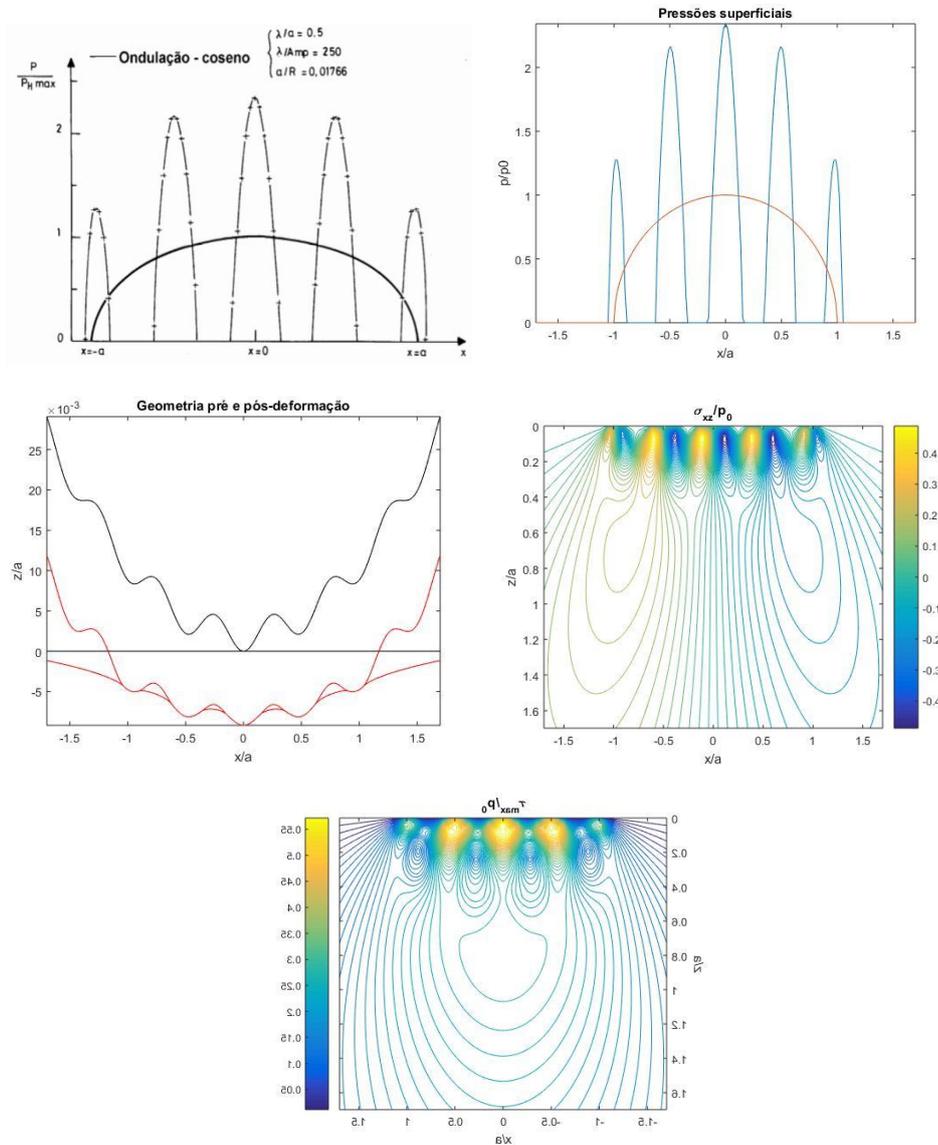
do contato. O erro observado para qualquer um dos dados de saída é inferior a 0,1% e por tanto, verifica-se que o algoritmo a ser usado é válido.

**Tabela 4: Valores máximos e posição dos valores máximos para os parâmetros analisados**

Parâmetros	Algoritmo proposto	Solução Exemplo 6.2.1 (Notas de aula Seabra)
Sobrepresão relativa, $\Delta P_r$ (-)	1,3	1,3
Variação da área de contato, $\Delta S_r$ (-)	-0,4	-0,4

Fonte: Autoria própria

**Figura 19: Campo de pressão obtido por Seabra, Campo de pressão do algoritmo proposto, Penetração, Campo de tensão cisalhante máxima  $\tau_{m\acute{a}x}$ , Campo de tensão cisalhante ortogonal  $\tau_{xz}$**



Fonte: Autoria própria

### 5.3 AVALIAÇÃO DAS PROPRIEDADES MATERIAIS

Para avaliação do material utilizou-se novamente o contato entre cilindro liso e plano liso, conforme apresentado na Figura 16. As entradas do problema são apresentadas na Tabela 5.

**Tabela 5: Parâmetros de entrada utilizados para estudo da propriedade dos materiais.**

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
F	Força normal	1000	N
Rx1	Raio do corpo 1	100	mm
Rx2	Raio do corpo 2	$\infty$	mm
l	Comprimento do contato	10	mm
E2	Módulo de elasticidade do corpo 2	$210 \times 10^3$	MPa
v2	Coefficiente de Poisson do corpo 2	0,3	-
Amp1	Amplitude da rugosidade do corpo 1	0	$\mu\text{m}$
Amp2	Amplitude da rugosidade do corpo 2	0	$\mu\text{m}$
$\lambda 1$	Comp. de onda da rugosidade do corpo 1	0	$\mu\text{m}$
$\lambda 2$	Comp. de onda da rugosidade do corpo 2	0	$\mu\text{m}$
<b>CASO 1: Variação do coeficiente de Poisson para módulo de elasticidade fixo</b>			
E1	Módulo de elasticidade do corpo 1	$210 \times 10^3$	MPa
v1	Coefficiente de Poisson do corpo 1	0,1 a 0,5	-
<b>CASO 2: Variação do módulo de elasticidade para coeficiente de Poisson fixo</b>			
E1	Módulo de elasticidade do corpo 1	15 a 407	GPa
v1	Coefficiente de Poisson do corpo 1	0,3	-

**Fonte: Autoria própria**

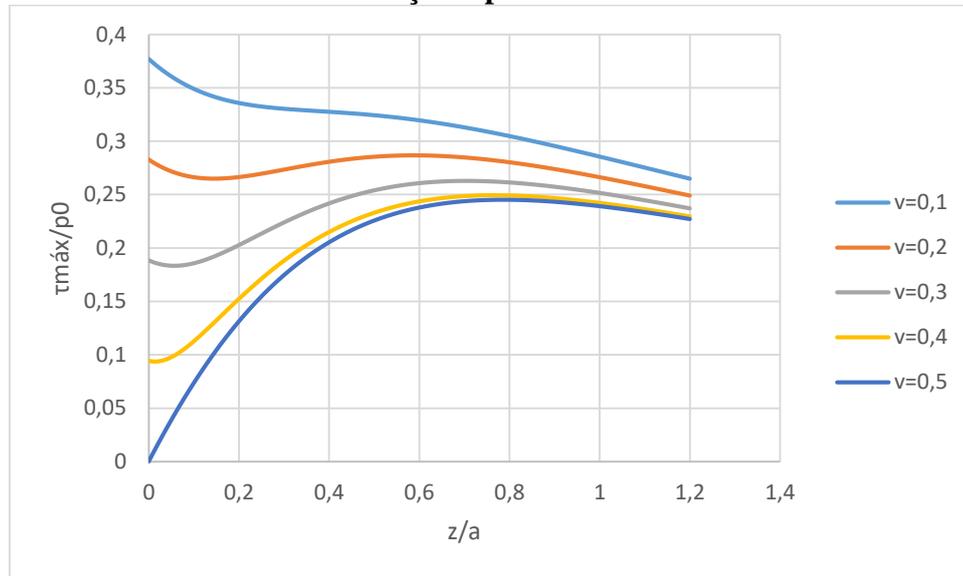
As saídas de interesse para validação do programa são:

- i) Tensão cisalhante máxima adimensional ( $\tau_{\text{máx}}/ P_0$ );

A escolha deste parâmetro é relevante pois a tensão cisalhante máxima adimensional é utilizada como critério de falha para a maioria dos contatos hertzianos. Os resultados dessas saídas estão apresentados graficamente nas Figuras 20 e 22 para o CASO 1 e CASO 2, respectivamente.

Para o CASO 1 variou-se o coeficiente de Poisson de 0,1 até 0,5, de 0,1 em 0,1. Como descrito anteriormente essa variação foi escolhida para atingir uma grande gama de materiais de engenharia. A resposta obtida é apresentada na Figura 20.

**Figura 20: Gráfico da influência do coeficiente de Poisson na tensão máxima cisalhante em relação a profundidade.**

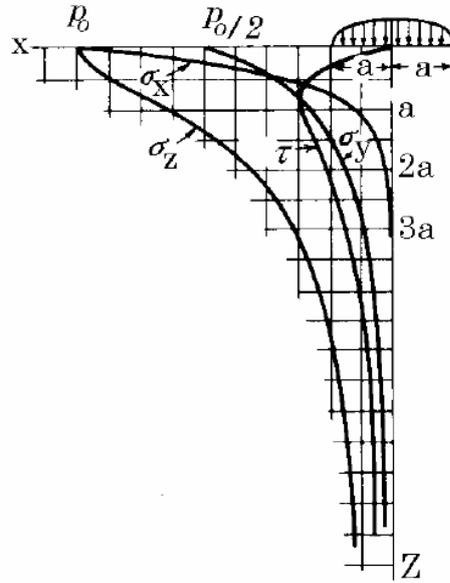


**Fonte: Autoria própria**

Neste gráfico observa-se que quanto menor for o coeficiente de Poisson, a tensão cisalhante na superfície do material ( $z/a \rightarrow 0$ ) tende a crescer. Isso faz com que a tensão máxima cisalhante que ocorre no interior do material para aços ( $\nu \approx 0,3$ ) acabe passando para a sua superfície, e severizando significativamente o contato. Pois os danos sub-superficiais ocasionados pela tensão cisalhante máxima demoram até chegar a superfície e gerar a falha. Este percurso, associado a propagação de um dano sub-superficial será reduzido quanto menor for o coeficiente de Poisson.

O formato da curva da tensão de cisalhamento, apresentando valor máximo na sub-superfície para valores de  $\nu > 0,2$  é facilmente explicável. A tensão máxima cisalhante é calculada pelo critério de Tresca, ou seja,  $\tau = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$ . Porém, como as tensões principais propagam-se de modo distinto no interior do sólido (direção  $z$ ), verifica-se que até uma profundidade a tensão cisalhante máxima é dada por  $\tau = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} - \sigma_{yy})$  e após uma determinada profundidade por  $\tau = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})$ . Essa transição é dependente do valor  $\nu$ , que entra no cálculo utilizado para definir o valor de  $\sigma_{yy}$  (ver equações (9), (10) e (12)). As distribuições das tensões de contato no interior de um sólido são apresentadas de forma adimensional na Figura 21.

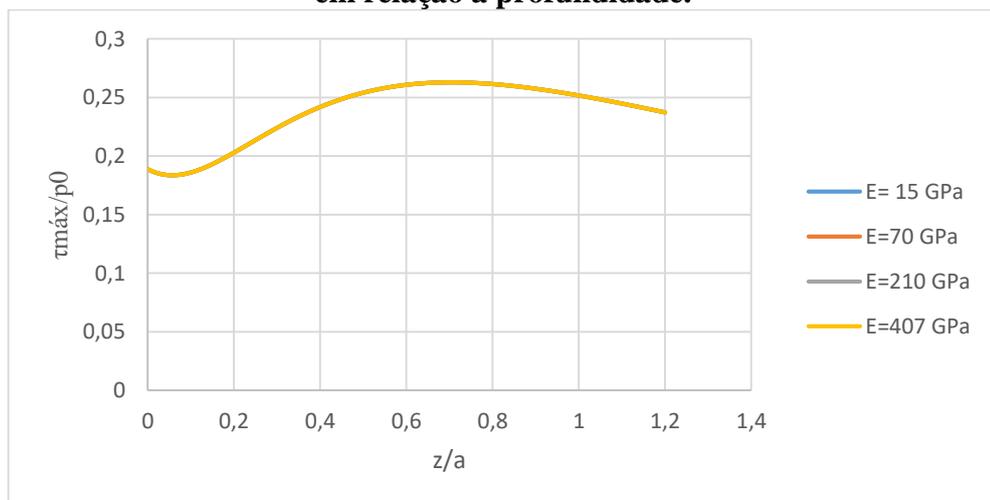
**Figura 21: Tensões principais ao longo do eixo OZ, para um contato linear.**



**Fonte: Timoshenko e Goodyear, 1970**

Para o CASO 2 manteve-se o coeficiente de Poisson fixo em  $\nu = 0,3$  e variou-se o módulo de elasticidade para 4 valores distintos considerando materiais bastante distintos: 15 GPa(Madeira), 70 GPa(Alumínio), 210 GPa(Aço), 407 GPa(Tungstênio). A partir desses valores um gráfico semelhante comparando a tensão máxima cisalhante adimensional pela profundidade foi gerado, conforme ilustrado na Figura 22.

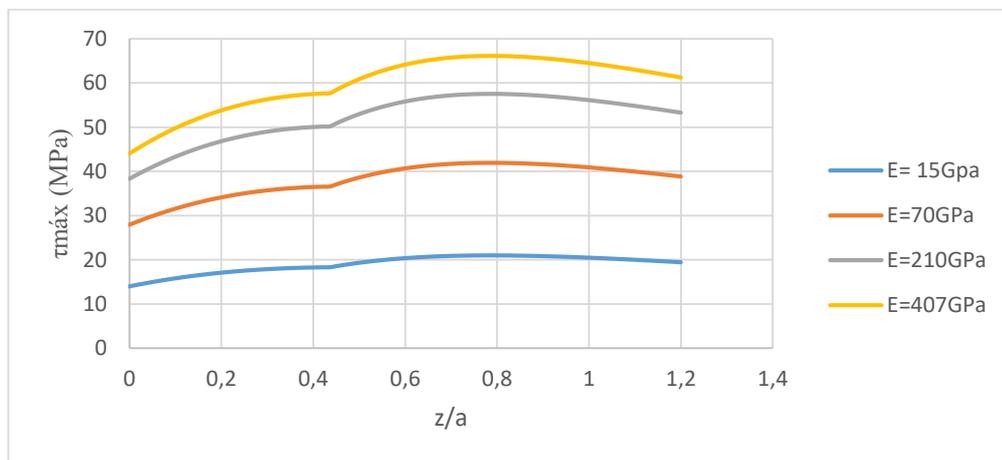
**Figura 22: Gráfico da influência do módulo de elasticidade na tensão máxima cisalhante em relação a profundidade.**



**Fonte: Autoria própria**

Visto que o módulo de elasticidade altera a pressão de contato, mas não a maneira como as tensões se distribuem no interior do contato, o valor adimensional da tensão cisalhante máxima é igual para todos os casos. Isso decorre do módulo de elasticidade entrar apenas no equacionamento da pressão e área de contato (equações (1) a (4)), mas não para determinar as tensões de contato (equações (9) a (12)). Em decorrência, apresenta-se também a tensão máxima cisalhante na Figura 23. Aqui verifica-se que com o aumento do módulo de elasticidade, a tensão máxima cisalhante que ocorre no material também aumenta e como mostrado na equação (7) na seção 3, a profundidade em que essa tensão máxima ocorre no material se mantém a mesma para todos os materiais.

**Figura 23: Gráfico de tensão cisalhante máxima em relação a profundidade.**



**Fonte: Autoria própria**

#### 5.4 AVALIAÇÃO DA RUGOSIDADE EM SUPERFÍCIES SENOSOIDAIS

Para avaliação dos parâmetros de amplitude e comprimento de onda (ou  $R_a$  e  $R_{sm}$ ) utilizou-se novamente o contato entre cilindro senoidal e plano liso, conforme apresentado na Figura 18. As entradas do problema são as mesmas apresentadas na Tabela 3. Note que a combinação de comprimento de onda e amplitude geram 25 padrões de rugosidade, e que cada padrão foi avaliado para 4 macrogeometrias. Os valores de  $Amp$  e  $\lambda$  foram obtidos através dos dados de  $R_a$  e  $R_{sm}$  calculados a partir dos perfis de rugosidade medidos no perfilômetro óptico e estão representados na Tabela 6 junto dos raios utilizados.

**Tabela 6: Valores de  $A_{mp}$ ,  $\lambda$  e R utilizados.**

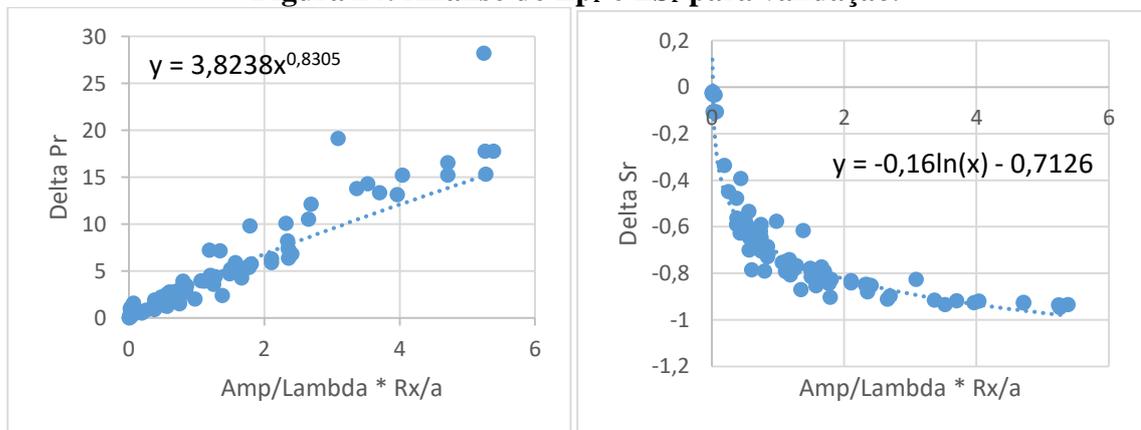
Amp ( $\mu\text{m}$ )	$\lambda$ (mm)	R(mm)
0,0333	0,0883	10
1,150	0,1492	50
2,267	0,2911	100
3,385	0,433	500
4,502	0,575	

**Fonte: Autoria própria**

As saídas de interesse para este estudo de caso são:

- i) Gráfico da sobrepressão relativa de contato ( $\Delta P_r$ ) em função do parâmetro ( $A_{mp}/\lambda * R/a$ );
- ii) Gráfico da variação relativa da área de contato ( $\Delta S_r$ ) em função do parâmetro ( $A_{mp}/\lambda * R/a$ );
- iii) Gráfico da sobrepressão relativa de contato ( $\Delta P_r$ ) em função do parâmetro ( $A_{mp}/\lambda$ );
- iv) Gráfico da variação relativa da área de contato ( $\Delta S_r$ ) em função do parâmetro ( $A_{mp}/\lambda$ ).

As duas primeiras saídas (i e ii) são relevantes para que se possa realizar uma comparação com os resultados apresentados por Seabra na Figura 10. Porém, convém lembrar que as combinações de  $A_{mp}/\lambda * R/a$  não são as mesmas usadas por Seabra e Berthe (1987), e sim aquelas obtidas conforme descrito na seção 5.4. Os resultados dessas saídas estão apresentados graficamente na Figura 24 para  $\Delta p_r$  e  $\Delta S_r$

**Figura 24: Análise de  $\Delta p_r$  e  $\Delta S_r$  para validação.**

**Fonte: Autoria própria**

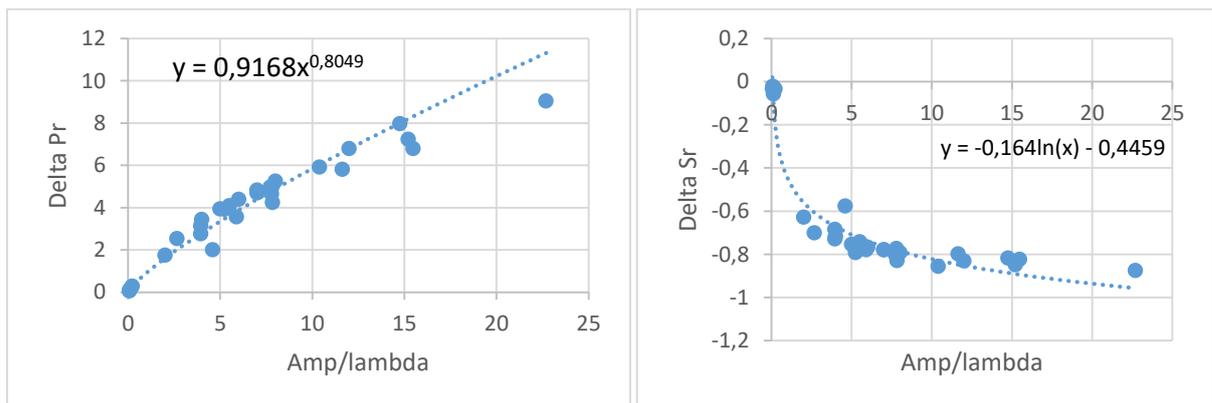
É possível notar que ambas as curvas têm um comportamento similar ao apresentado na Figura 10, porém, as equações (22) e (23) que descrevem as tendências observadas para  $\Delta p_r$  e  $\Delta S_r$  não são iguais as apresentadas por Seabra.

$$\Delta p_r = 3,8238 * \left( \frac{Amp}{\lambda} * \frac{R}{a} \right)^{0,8305} \quad (22)$$

$$\Delta S_r = -0,16 \ln \left( \frac{Amp}{\lambda} * \frac{R}{a} \right) - 0,7126 \quad (23)$$

As duas últimas saídas (iii e iv) são relevantes para avaliar o efeito da rugosidade de modo isolado, ou seja, desconsiderando a influência de  $R/a$ . Nesta situação utilizou-se raio constante  $R_{x1} = 50$  mm. Como pode ser observado na Figura 25, apesar de considerar apenas parâmetros rugosos do sólido, os gráficos de  $\Delta p_r$  e  $\Delta S_r$  mantêm-se similar aos gráficos obtidos levando em consideração parâmetros geométricos como  $R/a$ .

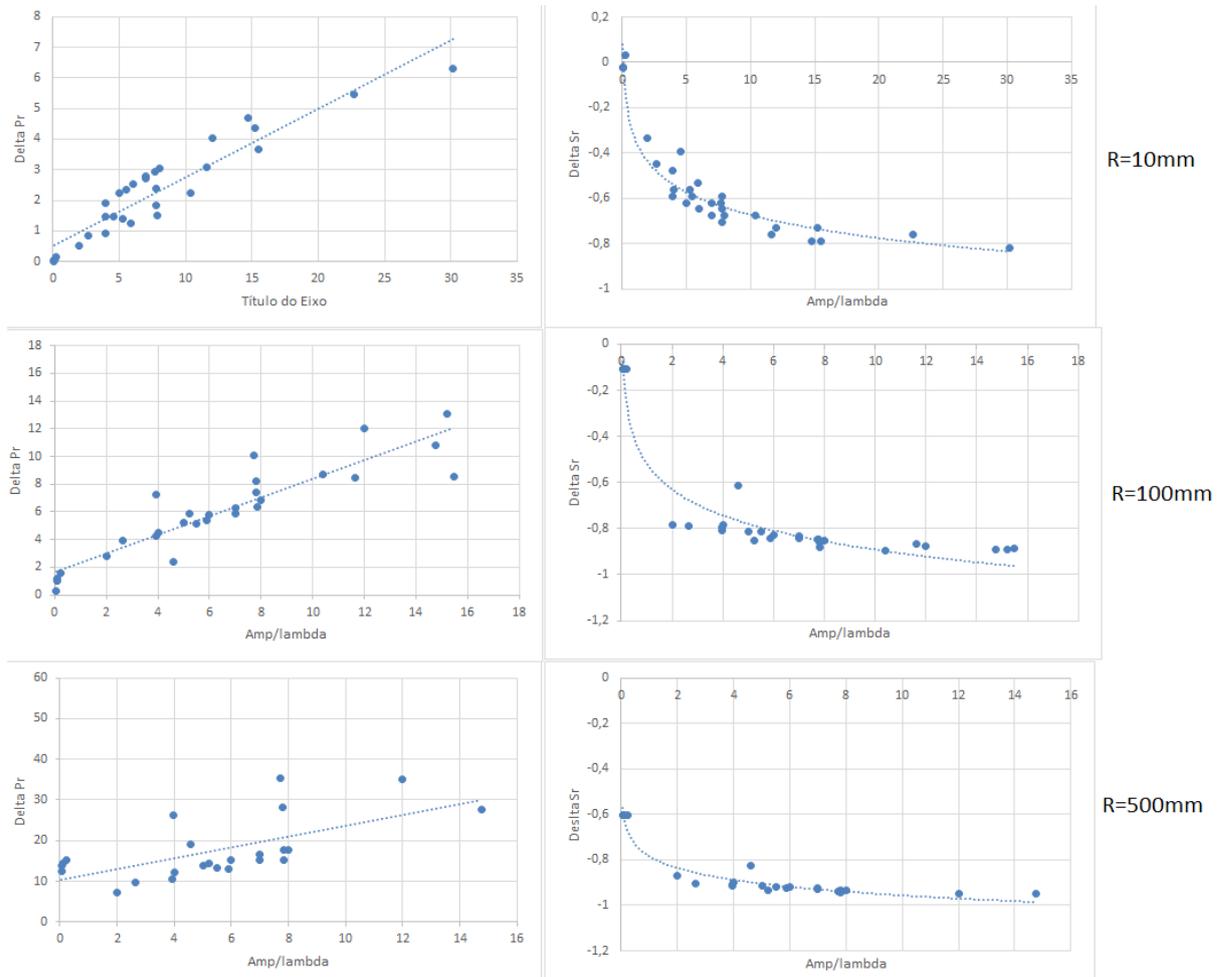
**Figura 25: Gráficos de  $\Delta p_r$  e  $\Delta S_r$  por  $A_{mp}/\lambda$ .**



**Fonte: Autoria própria**

Visto que há um efeito de escala entre macro ( $R$ ) e micro ( $A_{mp}/\lambda$ ) geometria, é relevante verificarmos se as tendências apresentadas na Figura 25 para um  $R = 50$  mm se mantêm para outros valores de raio ( $R$ ). Logo, uma análise com os mesmos valores de  $A_{mp}$  e  $\lambda$  do caso anterior foi realizada, porém considerando novos valores de raio, sendo eles 10 mm, 100 mm e 500 mm. A partir disso, novos gráficos de  $\Delta p_r$  e  $\Delta S_r$  foram gerados e estão representados na Figura 26, enquanto suas linhas de tendência estão representadas na Tabela 7.

**Figura 26: Gráficos de  $\Delta p_r$  e  $\Delta S_r$  para valores distintos de raio R.**



**Fonte: Autoria própria**

**Tabela 7: Equações das linhas de tendência para diferentes raios.**

R(mm)	$\Delta p_r$	$\Delta S_r$
10	$0,3675x^{0,9029}$	$-0,146\ln(x) - 0,3368$
100	$2,4741x^{0,506}$	$-0,162\ln(x) - 0,5184$
500	$14,707x^{0,0895}$	$-0,075\ln(x) - 0,7844$

**Fonte: Autoria própria**

Ao comparar os gráficos das Figuras 25 e 26, pode-se notar que quanto maior o raio, maior são os valores de  $\Delta p_r$  e  $\Delta S_r$ , e menor é o impacto da variação da microgeometria na variação de  $\Delta p_r$  e  $\Delta S_r$  (menor inclinação da curva).

Tais observações podem ser justificadas pelo efeito de escala previamente mencionado. A amplitude máxima utilizada, por exemplo, foi de 4,5  $\mu\text{m}$ . Para um raio de 10mm, tal

amplitude corresponde a uma variação de rugosidade considerável, entretanto para um raio de 500mm essa mesma variação de rugosidade não é mais tão significativa. Além disso,  $\Delta p_r$  e  $\Delta S_r$  são calculados em relação a pressão e a área de contato considerando a superfície lisa. Nesta situação, ao aumentar o raio R tem-se redução da pressão de contato. Logo, para uma pequena pressão de contato, qualquer aumento provocado por uma aspereza gera um aumento significativo da sobrepressão relativa.

### 5.5 AVALIAÇÃO DA RUGOSIDADE EM SUPERFÍCIES REAIS

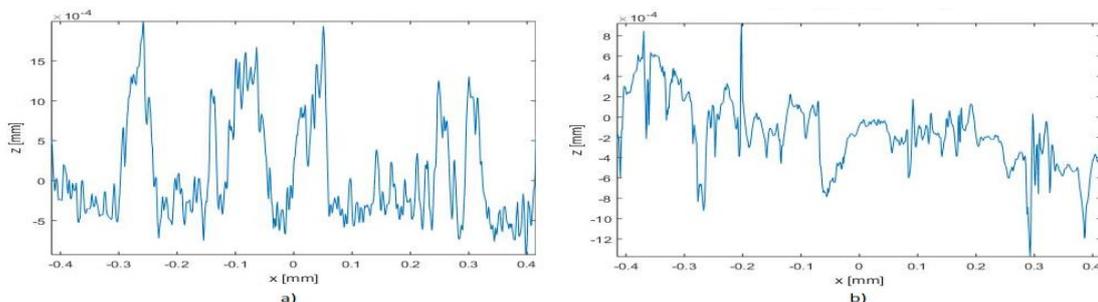
Após realizar todas as análises para superfícies criadas a partir de funções seno e cosseno, avaliou-se  $\Delta p_r$  e  $\Delta S_r$  utilizando perfis de rugosidade medidos no perfilômetro óptico. Novamente considerou-se o caso de contato de um cilindro em um plano conforme Figura 18. As entradas são apresentadas na Tabela 8 na Figura 27.

**Tabela 8: Parâmetros de entrada utilizados para o caso 6.5.**

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
F/l	Força normal por unidade de comprimento	277	N/mm
Rx1	Raio do corpo 1	10	mm
Rx2	Raio do corpo 2	$\infty$	mm
E1	Módulo de elasticidade do corpo 1	$205,8 \times 10^3$	MPa
E2	Módulo de elasticidade do corpo 2	$205,8 \times 10^3$	MPa
$\nu_1$	Coefficiente de Poisson do corpo 1	0,3	-
$\nu_2$	Coefficiente de Poisson do corpo 2	0,3	-
Amp2	Amplitude da rugosidade do corpo 2	0	$\mu\text{m}$
$\lambda_2$	Comp. de onda da rugosidade do corpo 2	0	$\mu\text{m}$

Fonte: Autoria própria

**Figura 27: Perfil de rugosidade, a) Processo de brunimento e b) Processo de retifica**



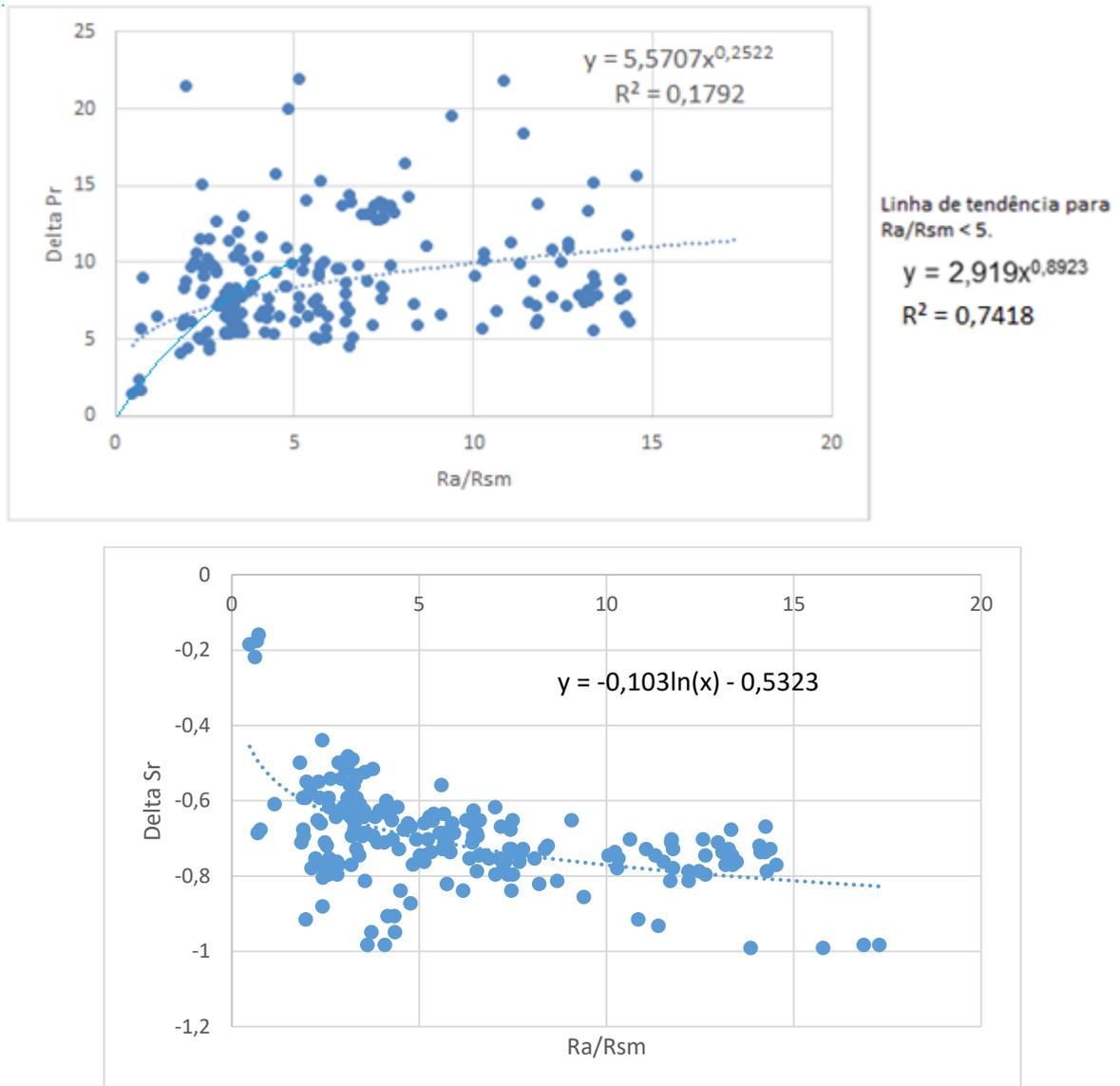
Fonte: Autoria própria

As saídas de interesse são novamente a:

- i) sobrepressão relativa de contato ( $\Delta P_r$ );
- ii) variação relativa da área de contato ( $\Delta S_r$ ).

as quais estão representados na Figura 28.

**Figura 28: Gráficos de  $\Delta P_r$  e  $\Delta S_r$  para superfícies reais.**



**Fonte: Autoria própria**

Diferente do que foi obtido para as superfícies com perfil de rugosidade geradas por funções seno ou cosseno, os gráficos de  $\Delta P_r$  e  $\Delta S_r$  para superfícies com perfil de rugosidade medidos apresentam grande dispersão nos resultados ( $R^2$  valor baixo). Apesar de que para valores mais baixos de  $R_a/R_{sm}$  ( $<5$ ) as curvas terem tendência similar às observadas com superfícies senoidais, ao aumentar esses valores a dispersão aumenta significativamente. Isso

aponta que para superfícies com perfil de rugosidade reais, os modelos apresentados na literatura, podem não representar adequadamente o que ocorre na realidade. Ainda assim, estes são válidos para avaliação conceitual de superfícies.

É importante também ressaltar que os perfis avaliados são provenientes de superfícies que nunca foram utilizadas. Nessa situação, a altura das asperezas apresentam alto desvio padrão. Após poucas horas de uso, ocorre um período definido como amaciamento (*running-in*) em que ocorre uma homogeneização das asperezas. Nestas condições, talvez uma superfície real se aproxime mais de uma superfície modelada.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1 CONCLUSÕES

Com relação a mecânica do contato, que visa o estudo das tensões e deformações que ocorrem em um contato entre dois sólidos, este trabalho produziu resultados interessantes quanto a teoria de Hertz e o modelo apresentado por Seabra tanto para superfície com perfil de rugosidade gerado por função seno ou cosseno, como para perfil de rugosidade gerado diretamente pelo perfilômetro óptico.

Destaca-se que apesar da solução analítica da teoria de Hertz para contato entre dois sólidos lisos ser bastante simples, esta fornece resultados práticos muito relevantes. A máxima tensão cisalhante na subsuperfície não é afetada pelas rugosidades e portanto, se mantém como um critério de falha válido para análise de fadiga de contato.

Com relação ao modelo apresentado por Seabra, para superfícies com perfil de rugosidade gerado por funções seno ou cosseno, pode-se verificar que o modelo funciona para vários valores de amplitude e comprimento de onda. Além disso, foi possível também chegar a resultados que mostram que para cada raio existe uma curva própria de  $\Delta p_r$  e  $\Delta S_r$  dependente apenas de amplitude e comprimento de onda, permitindo avaliar isoladamente o efeito do acabamento superficial no contato.

Além disso, com a verificação que o modelo e o programa são válidos, uma análise de superfícies reais foi realizada para que assim pudesse ter um modelo a ser aplicado para situações que ocorrem na realidade. Entretanto, os resultados obtidos apresentaram grande dispersão, em particular para asperezas muito delgadas. Esta situação demanda estudos mais detalhados com superfícies amaciadas.

A validação experimental do modelo deveria ser realizada para corroborar os resultados numéricos. Isso pode ser realizado utilizando um tribômetro ou um durômetro. Basta aplicar um carregamento normal de uma superfície cilíndrica polida e rígida em um plano rugoso para validar a área real de contato.

### 6.2 TRABALHOS FUTUROS

Repetir o procedimento desenvolvido com superfícies amaciadas (usadas), visto que para as análises realizadas nesse trabalho, todos os perfis de superfícies reais utilizadas foram medidos logo após o seu processo de fabricação.

Comparar os resultados com modelos estatísticos, como por exemplo o modelo de Greenwood e Williamson.

Verificar se outros parâmetros topográficos apresentam melhor correlação com a sobrepressão relativa;

## REFERÊNCIAS

ABNT NBR 8404/1984. **Indicação do estado de superfícies em desenhos técnicos - Procedimento.**

ARCHARD, J. F. Elastic deformation and the laws of friction. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, v. 243, n. 1233, p. 190-205, 1957.

BHUSHAN, Bharat. Analysis of the real area of contact between a polymeric magnetic medium and a rigid surface. **Journal of Tribology**, v. 106, n. 1, p. 26-34, 1984.

BHUSHAN AND, Bharat; PENG, Wei. Contact mechanics of multilayered rough surfaces. **Appl. Mech. Rev.**, v. 55, n. 5, p. 435-480, 2002.

CALLISTER WILLIAM, D.; RETHWISCH DAVID, G. **Materials science and engineering 5** (NY. 2011).

CHANG, W. R.; ETSION, I.; BOGY, D. BASME. An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces. **Journal of tribology**, v. 109, n. 2, p. 257-263, 1987.

DIMKOVSKI, Zlate. **Surfaces of honed cylinder liners**. 2011. Tese de Doutorado. Chalmers University of Technology.

FRANCIS, H. A. Application of spherical indentation mechanics to reversible and irreversible contact between rough surfaces. **Wear**, v. 45, n. 2, p. 221-269, 1977.

GREENWOOD, J. A.; WILLIAMSON, JB Pl. Contact of nominally flat surfaces. **Proceedings of the royal society of London. Series A. Mathematical and physical sciences**, v. 295, n. 1442, p. 300-319, 1966.

GREENWOOD, James A.; TRIPP, J. H. The contact of two nominally flat rough surfaces. **Proceedings of the institution of mechanical engineers**, v. 185, n. 1, p. 625-633, 1970.

GREENWOOD, J. A.; JOHNSON, K. L. An alternative to the Maugis model of adhesion between elastic spheres. **Journal of Physics D: Applied Physics**, v. 31, n. 22, p. 3279, 1998.

HUTCHINGS, Ian; SHIPWAY, Philip. **Tribology: friction and wear of engineering materials**. Butterworth-Heinemann, 2017.

JOHNSON, K. L. Contact mechanics cambridge univ. **Press, Cambridge**, v. 95, p. 365, 1985.

MACHADO, Margarida et al. Compliant contact force models in multibody dynamics: Evolution of the Hertz contact theory. **Mechanism and Machine Theory**, v. 53, p. 99-121, 2012.

MICHAU, B.; BERTHE, D.; GODET, M. Influence of pressure modulation in a linear hertzian contact on the internal stress-field. **Wear**, v. 28, n. 2, p. 187-195, 1974.

MOTT, P. H.; ROLAND, C. M. Limits to Poisson's ratio in isotropic materials—general result for arbitrary deformation. **Physica Scripta**, v. 87, n. 5, p. 055404, 2013.

NAYAK, P. Ranganath. Random process model of rough surfaces. 1971.

NORTON, Robert L. et al. **Design of machinery: an introduction to the synthesis and analysis of mechanisms and machines**. Boston: McGraw-Hill Higher Education,, 2004.

NOVASKI, Olívio. **Introdução à engenharia de fabricação mecânica**. E. Blucher, 1994.

ONIONS, R. A.; ARCHARD, J. F. The contact of surfaces having a random structure. **Journal of Physics D: Applied Physics**, v. 6, n. 3, p. 289, 1973.

PERSSON, Bo NJ et al. On the nature of surface roughness with application to contact mechanics, sealing, rubber friction and adhesion. **Journal of physics: Condensed matter**, v. 17, n. 1, p. R1, 2004.

PERSSON, Bo NJ. Contact mechanics for randomly rough surfaces. **Surface science reports**, v. 61, n. 4, p. 201-227, 2006.

PERSSON, B. N. J. Relation between interfacial separation and load: a general theory of contact mechanics. **Physical review letters**, v. 99, n. 12, p. 125502, 2007.

SEABRA, J.; BERTHE, D. Influence of surface waviness and roughness on the normal pressure distribution in the Hertzian contact. 1987.

SEABRA, Jorge HO. Mecânica do contacto hertziano. **Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto**, 2003.

TABOR, David. **The hardness of metals**. Oxford university press, 1951.

SAYLES, R. S.; THOMAS, T. R. **Rough Surfaces**. TR Thomas, Ed., Longman, London, 1982.

TIMOSHENKO, S. P. Goodier. **JN" Theory of Elasticity (3rd ed.)"** New York, NY: **McGraw-Hill**, 1970.

WHITEHOUSE, David J.; ARCHARD, J. F. The properties of random surfaces of significance in their contact. **Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences**, v. 316, n. 1524, p. 97-121, 1970.

YANG, C.; PERSSON, B. N. J. Contact mechanics: contact area and interfacial separation from small contact to full contact. **Journal of Physics: Condensed Matter**, v. 20, n. 21, p. 215214, 2008.

## ANEXO A – SCRIPT DO PROGRAMA MATLAB

```

%% PROGRAMA ORIGINAL: TIAGO COUSSEAU %%
% MODIFICADO POR: LUCAS BIAZON
% MODIFICADO POR: MATHEUS JURACH

%TRABALHO DE MECÂNICA DO CONTATO - ANÁLISE PARAMÉTRICA DA AMPLITUDE E
%COMPRIMENTO DE ONDA

% Preparação do ambiente de trabalho
close all
clear all
clc

%% CLASSE DE RUGOSIDADE %%
% Geometria e propriedades dos corpos 1 e 2
Ra = [0.05,0.1,0.2,0.4,0.8,1.6,3.2,6.3,12.5]; %Classe e Rugosidade Ra N2-
N10
Rq = Ra*1.25; %Rq ~ 1.25 Ra - Hutchings Cap 2
AmpRa = Ra.*2;

%% DEFINIÇÃO DAS CONSTANTES%%
% Geometria e propriedades dos corpos 1 e 2

%Corpo 1

Rx1=10; % [mm]
E1=205.8e3; % [MPa]
niu1=0.3; % Poisson
amp1=[0.1E-3,0.2E-3,0.3E-3, 0.4E-3, 0.8E-3, 1.0E-3, 1.6E-3, 3.2E-3, 6.4E-3,
12.8E-3]; % Amplitude da rugosidade
n1=[1,2,3,4,5,10,15,20,25,30]; % Número de picos
de rugosidade

%Caso #0 - Apostila Mecânica do Contato - Figura 6.3
% amp1=[0]; % Amplitude da rugosidade
% n1=[0]; % Número de picos de rugosidade

%Caso #1 - Apostila Mecânica do Contato - Figura 6.4 e 6.5
% amp1=linspace(0.0625E-3,7.785E-3,50); % Amplitude da rugosidade
% n1=linspace(1,30,50); % Número de picos de rugosidade

%Caso #2 - Ambas superfícies com rugosidade, simulando rolamentos de rolos
cilíndricos sobre um plano
% amp1=linspace(0.3532E-3,5.5E-3,30); % Amplitude da rugosidade
% n1=linspace(4,30,30); % Número de picos de rugosidade

%Caso #3 - Ambas superfícies com rugosidade, simulando ensaio twin disk
% amp1=linspace(0.3532E-3,5.5E-3,30); % Amplitude da rugosidade
% n1=linspace(4,30,30); % Número de picos de rugosidade

%Corpo 1

Rx2=10000000; % [mm]
E2=205.8e3; % [MPa]
niu2=0.3; % Poisson

```

```

amp2=0;           % Amplitude da rugosidade
n2=0;            % Número de picos de rugosidade

%Comprimento

l=3.6101;       % Comprimento do contacto [mm]

% Carga aplicada e coeficiente de atrito
FN=1000;       % [N]
miu=0;        %coeficiente de atrito

%% CONTACTO CONFORMAL ENTRE DOIS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO DE EIXOS PARALELOS
%%
% Solução analítica
Fn=FN/l;
E=((1-niu1^2)/E1+(1-niu2^2)/E2)^-1; % Modulo de Young Equivalente

if Rx2<0
    Rx=(1/2*(1/Rx1+1/Rx2))^-1;           % Raio equiavlente
end
if ((Rx2 > 0) && (Rx2 < 1000))
    Rx=(1/2*(1/Rx1+1/Rx2))^-1;           % Raio equiavlente
end
if Rx2>=1000
    Rx=(1/2*(1/Rx1))^-1;                 % Raio equiavlente
end

p0_t=sqrt(2*Fn/pi*E/Rx);                 % Pressão máxima de Hertz
a_t=sqrt(2*Fn/pi*Rx/E);                   % Semi-largura hertziana

%% DISCRETIZAÇÃO DO SEMI-ESPAÇO ELÁSTICO %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Denifção dos limites do campo a se discretizar

x_i=-a_t*1.2;                             % Limite inferior do campo
discretizado
x_f=-x_i;                                  % Limite superior do campo
discretizado
discr_x=201;                               % Número de pontos da discretização
x=linspace(x_i,x_f,discr_x);               % Definição do vetor X
dx=(x_f-x_i)/(discr_x-1);                  % Subdivisões de X
% xn=linspace(-a_t,a_t,discr_x)
p_t=p0_t*sqrt(1-(x./a_t).^2).*(abs(x)<=a_t); % Distribuição de pressão
hertziana

%% CÁLCULO DAS GEOMETRIAS E SOLUÇÃO ANÁLITICA %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Selecionar o bloco de notas com valores obtidos da topografia (?)

%Início do 'for' para valores de amp1 e n1

for r=1:length(amp1);
for s=1:length(n1);

% Corpo 1

```

```

z1=0.5*((-sqrt(Rx1^2-x.^2))+(-sqrt(Rx1^2-x.^2)));
rug1=(-amp1(r)*cos(pi*n1(s)*(x./(a_t))));
z_1=z1+rug1;

% Corpo 2
z2=0.5*(sqrt(Rx2^2-x.^2)+(sqrt(Rx2^2-x.^2)));
rug2=(-amp2*cos(pi*n2*(x./(a_t))));
z_2=z2+rug2;

%% SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO E DESLOCAMENTOS %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DO DESLOCAMENTO Uz %
% DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE DE INFLUÊNCIA Aij %
% x - Ponto onde a deformação é calculada
% s - Ponto onde a carga é aplicada
a_cell=(x_f-x_i)/(2*(discr_x-1));          % Métade do tamanho de cada célula
discretizada
sj=x;
A=zeros(length(x),length(sj));
for i=1:length(x)
    for j=1:length(sj)
        lim_sup=sj(j)+a_cell;              % limite superior da integral
        lim_inf=sj(j)-a_cell;              % limite inferior da integral
        A(i,j)=(log(abs(lim_sup-x(i)))*(lim_sup-x(i))-...
            (log(abs(lim_inf-x(i)))*(lim_inf-x(i))));
    end
end
A_aux=A;          % Guarda o valor original do desenvolvimento da integral
A=(2/(E*pi))*A;   % Determina o coeficiente de influência

% Adiciona uma nova linha e uma nova coluna para resolução do algoritmo
apresentado
A(length(x)+1,:)=1;
A(:,length(sj)+1)=-1;
A(length(A),length(A))=0;

Ai=2*a_cell;          % Área de cada célula

% Aproximação das duas superfícies
h=z_1-z_2;           % Distância inicial entre superfícies
min_h=min(h);        % Valor mínimo de h
z_1=z_1-min_h;       % Aproximação das superfícies de modo a se
                    % tocarem em um único ponto

% Determinação da distribuição de pressão inicial em cada célula
h(length(h)+1)=Fn/Ai; % Adiciona um célula para h
p_i=A^-1*(h)';        % calculo numérico para
                    % distribuição de pressão por célula

%% APLICAÇÃO DO ALGORÍTMO %%
iteration=0;
while and(min(p_i)<0,iteration<10) % Parars se todas p_i>=0 ou
iteração>=100
    iteration=iteration+1;
    for i=1:length(x)
        if p_i(i)<0

```

```

                h(i)=0;                                % Pressão negativa os corpos estão
em contacto
                A(i,:)=0;
                A(:,i)=0;
                A(i,i)=1;
            end
        end
        p_i=A^-1*(h)';
    end
    pv=p_i;
    pv(length(p_i))=[];                                % Elimina o ultimo valor (delta)

% Calculo das deformações - pg 10
uz1=(2/pi)*(1-niu1^2)/E1*A_aux*pv;
uz2=(2/pi)*(1-niu2^2)/E2*A_aux*pv;
Penetracao=(min(uz1));
Penetracaoa_t=Penetracao/a_t;

%% SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA SOBREPRESSÃO E VARIAÇÃO DA ÁREA DE CONTACTO %%

% Sobrepressão relativa e variação da área de contacto
Sc=dx/2.*sum(pv>0);
DeltaSr(r,s)=(Sc*100)/a_t-100;
Deltapr(r,s)=(max(pv)*100)/p0_t-100;
[C,V]=max(pv);

%% PLOT INICIAIS %%

% Distribuição de pressão

figure
plot(x,pv,'--',x,p_t);
xlabel('x [mm]');
ylabel('P [MPa]');
axis tight
title ('Distribuição de Pressão')

% Superfícies pré e pós aplicação da carga
figure
plot(x,z_1,'--r',x,z_2,'--b',x,z_2+uz2,'b',...
     x,z_1-uz1+(min(uz1)+min(uz2)), 'r');
xlabel('X [mm]');
ylabel('Y [mm]');
axis tight
title ('Deformação Elástica das Superfícies')

%% TENSÕES %%
% Definição dos parâmetros para o cálculo das tensões %
a_rough=Sc;                                           % Semi largura hertziana calculada na direcção x
p=pv;
pt=pv.*miu;
% Discretização para os gráficos a plotar %

NPtz=(discr_x-1)/2;
z_inf=0;
z_sup=(x(end)-x(1))/2;
z=linspace(z_inf,z_sup,NPtz);
[xa,za]=meshgrid(x,z);

```

```

xa=reshape(xa,discr_x*Nptz,1);
za=reshape(za,discr_x*Nptz,1);
[xx,xa]=meshgrid(x,xa');
za=repmat(za,1,discr_x);

%% cálculo das tensões normais
tmp1=xa-xx-0.5*dx;
tmp2=xa-xx+0.5*dx;
tau_xzN=(-za.^2./(tmp1.^2+za.^2)+za.^2./(tmp2.^2+za.^2))*p./pi;
tmp3=za.*(tmp1./(tmp1.^2+za.^2)-tmp2./(tmp2.^2+za.^2));
za=za+(za==0)*1e-20;
tmp4=atan(tmp1./za)-atan(tmp2./za);
sig_xN=(-tmp3+tmp4)*p./pi;
sig_zN=(tmp3+tmp4)*p./pi;
%% cálculo das tensões tangenciais
sig_xT=(za.^2./(tmp1.^2+za.^2)-za.^2./(tmp2.^2+za.^2)+log(tmp1.^2+za.^2)-
log(tmp2.^2+za.^2))*pt./pi;
sig_zT=(-za.^2./(tmp1.^2+za.^2)+za.^2./(tmp2.^2+za.^2))*pt./pi;
tau_xzT=(-tmp3+tmp4)*pt./pi;

sig_x=sig_xN+sig_xT;
sig_z=sig_zN+sig_zT;
tau_xz=tau_xzN+tau_xzT;
sig_y=niul.*(sig_x+sig_z);

sig_x=reshape(sig_x,Nptz,discr_x);
sig_z=reshape(sig_z,Nptz,discr_x);
tau_xz=reshape(tau_xz,Nptz,discr_x);

sp(:,:,3)=sqrt((sig_x-sig_z)./2).^2+tau_xz.^2);
sp(:,:,1)=(sig_x+sig_z)./2+sp(:,:,3);
sp(:,:,2)=(sig_x+sig_z)./2-sp(:,:,3);
sp(:,:,3)=niul*(sig_x+sig_z);

%% Tensões de corte principal
% Critério de Tresca - Tensão de corte máxima
tau_max=0.5*(max(sp,[],3)-min(sp,[],3));

% Critério de von-Mises - Tensão de corte octaédrica máxima
tau_oct=sqrt((sp(:,:,1)-sp(:,:,2)).^2+(sp(:,:,2)-sp(:,:,3)).^2+(sp(:,:,3)-
sp(:,:,1)).^2)/3);
% Os três valores extremos da tensão de corte
tau1=0.5*(max(sp,[],3)-min(sp,[],3));
tau2=0.5*(sp(:,:,1)-sp(:,:,2));
tau3=0.5*(sp(:,:,2)-sp(:,:,3));

xplot=x./(a_t); zplot=z./(a_t);

%% PLOTTING DA DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES %%
%
% Gráfico das Tensões
v=(3:-0.05:-3);
% Sigma 1
% figure
% [su1,su2]=contour(xplot,zplot,sp(:,:,1)/p0_t,v);

```

```

% xlabel('x/a')
% ylabel('z/a')
% title('tangential stress \sigma_1/p_0')

clear xplot zplot pv z1

% %Outro modo de fazer os gráficos
% % Sigma 1
% %figure
% [su1,su2]=contour(x,z,sp(:,:,1)/p0_t,v);
% %xlabel('x/a')
% %ylabel('z/a')
% %title('tangential stress \sigma_1/p_0')
%
% % Sigma 2
% figure
% [suu1,suu2]=contour(x,z,sp(:,:,2)/p0_t,v);
% xlabel('x/a')
% ylabel('z/a')
% title('tangential stress \sigma_2/p_0')
%
% % Sigma 3
% figure
% [suuu1,suuu2]=contour(x,z,sp(:,:,3)/p0_t,v);
% xlabel('x/a')
% ylabel('z/a')
% title('tangential stress \sigma_3/p_0')
%
% % Sigma X
% figure
% [sx1,sx2]=contour(x,z,sig_x/p0_t,v);
% xlabel('x/a')
% ylabel('z/a')
% title('tangential stress \sigma_x/p_0')
%
% % Sigma Z
% figure
% [sz1,sz2]=contour(x,z,sig_z/p0_t,v);
% xlabel('x/a')
% ylabel('z/a')
% title('normal stress \sigma_z/p_0')
%
% % Tau 1
% figure
% [tauu1,tauu2]=contour(x,z,tau1/p0_t,v);

```

```

% clabel(tauu1,tauu2);
% axis ij tight
% xlabel ('x/a')
% ylabel ('z/a')
% title ('tangential stress \tau_1/p_0')
%
% % Tau 2
% figure
% [tauuu1,tauuu2]=contour(x,z,tau2/p0_t,v);
% clabel(tauuu1,tauuu2);
% axis ij tight
% xlabel ('x/a')
% ylabel ('z/a')
% title ('tangential stress \tau_2/p_0')
%
% % Tau 3
%
% figure
% [tauuuu1,tauuuu2]=contour(x,z,tau3/p0_t,v);
% clabel(tauuuu1,tauuuu2);
% axis ij tight
% xlabel ('x/a')
% ylabel ('z/a')
% title ('tangential stress \tau_3/p_0')
%
% Tau xz
figure
[txz1,txz2]=contour(x,z,tau_xz/p0_t,v);
clabel(txz1,txz2);
axis ij tight
xlabel ('x/a')
ylabel ('z/a')
title ('Tensão ortogonal máxima \tau_{xz}/p_0')

figure
surf(x,z,tau_xz/p0_t,'edgecolor','none');
colorbar
axis ij tight
xlabel ('x/a')
ylabel ('z/a')
zlabel ('tau_xz/p0')
title ('Tensão ortogonal máxima \tau_{xz}/p_0')

% Tresca
figure
[tmax1,tmax2]=contour(x,z,tau_max/p0_t,v);
clabel(tmax1,tmax2);
axis ij tight
xlabel ('x/a')
ylabel ('z/a')
title ('Tensão cisalhante máxima de acordo com Tresca \tau_{max}/p_0')

figure
surf(x,z,tau_max/p0_t,'edgecolor','none');
colorbar
axis ij tight
xlabel ('x/a')
ylabel ('z/a')
zlabel ('tau_max/p0')

```

```

title ('Tensão cisalhante máxima de acordo com Tresca \tau_{max}/p_0')

% von Mises
% figure
% [toct1,toct2]=contour(x,z,tau_oct/p0_t,v);
% clabel(toct1,toct2);
% axis ij tight
% xlabel ('x/a')
% ylabel ('z/a')
% title ('maximum stress according to von Mises \tau_{oct}/p_0')
%
% figure
% surfc(x,z,tau_oct/p0_t,'edgecolor','none');
% colorbar
% axis ij tight
% xlabel ('x/a')
% ylabel ('z/a')
% zlabel ('tau_oct/p0')
% title ('maximum stress according to Von Mises \tau_{oct}/p_0')

%% Posição e magnitude das tensões máximas

% Tresca - Cisalhante Máxima
[i,~]=max(max(tau_max));
[m,n] = find(tau_max==i);
za(m,n);
%Valores Absolutos (MPa, micrometro)
zTAU(r,s) = za (m,n);
TAU(r,s)= i;
%Valores Relativos (TAU/po, z/a)
TAUp0(r,s) = TAU(r,s)./p0_t;
zTAUa_t(r,s) = zTAU(r,s).*a_t;

% von Mises
[k,~]=max(max(tau_oct));
[t,u] = find(tau_oct==k);
za(t,u);
%Valores Absolutos (MPa, micrometro)
zTAUVM(r,s) = za (t,u);
TAUVM(r,s)= k;
%Valores Relativos (TAUVM/po, z/a)
TAUVMp0(r,s) = TAUVM(r,s)./p0_t;
zTAUVMa_t(r,s) = zTAUVM(r,s).*a_t;

% Tau xz - Cisalhante Ortogonal
[q,~]=max(max(tau_xz));
[f,g] = find(tau_xz==q);
za(f,g);
%Valores Absolutos (MPa, micrometro)
zTAUORT(r,s) = za (f,g);
TAUORT(r,s)= q;
%Valores Relativos (TAUORT/po, z/a)
TAUORTp0(r,s) = TAUORT(r,s)./p0_t;
zTAUORTa_t(r,s) = zTAUORT(r,s).*a_t;

%% Análise de inclinação (slope), comprimento de onda (Lbd) e curvatura (curv)

```

```

amplscale = ampl.*1E4;%Artimanha para plotar ampl juntamente com outras
variáveis de maior valor absoluto
amplscale2 = ampl.*1E1;
Lbd(s) = a_t./nl(s); %Comprimento de onda
Slp(r,s) = atan(4*ampl(r)./Lbd(s)); %Através de Geometria
[rad]
Slpdg(r,s) = Slp(r,s)*180/pi; %Conversão para graus
[°]
curv(r,s) = ampl(r)./((4*ampl(r)./Lbd(s)).^2); %Curvatura segundo
Hutchings

%Comparação com gráfico Seabra - Fig 6.4 e 6.5
Rx_sobre_a = Rx/a_t;
amplambda(r,s) = ampl(r)./Lbd(s);
paraseabra1(r,s) = amplambda(r,s).*Rx_sobre_a;
paraseabra2(r,s) = amplambda(r,s).*Rx_sobre_a./4; %Dividir por 4 para
compactilizar com os gráficos gerados por Seabra
end
end

%% Análise Caso #1 - Objetivo 1 - Comparar gráficos Deltapr e Deltasr com
Seabra%%

%Linearizar e ordenar o vetor paraseabra (amp/lambda*Rx/a)
paraseabravector = paraseabra2(:);
paraseabravectorsort = sort(paraseabravector);
% sbr1 = (paraseabravectorsort < 100E-2);

% %Gráfico Deltapr
%Linearizar e ordenar
Deltaprvector = Deltapr(:);
Deltaprvector sort = sort(Deltaprvector);
% figure
% plot(paraseabravectorsort(sbr1),Deltaprvector sort(sbr1),'r-o')
% axis([0 0.9 0 350])
% xlabel('Ampl/Lambda*Rx/a_t');
% ylabel('Deltapr');
% title ('Deltapr x Ampl/Lambda*Rx/a_t')
% grid on

% %Gráfico Deltasr
%Linearizar e ordenar
DeltaSrvector = DeltaSr(:);
DeltaSrvector sort = sort(DeltaSrvector, 'descend');
% figure
% plot(paraseabravectorsort,DeltaSrvector sort,'r-o')
% axis([0 1 -95 10])
% xlabel('Ampl/Lambda*Rx/a_t');
% ylabel('DeltaSr');
% title ('DeltaSr x Ampl/Lambda*Rx/a_t')
% grid on

%% Análise Caso #1 - Objetivo 2 - analisar individualmente o parâmetro
ap/lambda nos gráficos Deltapr e Deltasr %%

%Linearizar e ordenar o vetor paraseabra (amp/lambda)
amplambda vector = amplambda(:);

```

```

amplambdavectorsort = sort(amplambdavector);

% Gráfico Deltapr
% figure
% plot(amplambdavectorsort,Deltaprvectorssort,'r-o')
% axis([0 0.03 0 350])
% xlabel('Amp1/Lambda');
% ylabel('Deltapr');
% title ('Deltapr x Amp1/Lambda')
% grid on

% Gráfico Deltasr
% figure
% plot(amplambdavectorsort,DeltaSrvectorssort,'r-o')
% axis([0 0.1 -95 10])
% xlabel('Amp1/Lambda');
% ylabel('DeltaSr');
% title ('DeltaSr x Amp1/Lambda')
% grid on

%% Análise Caso #1 - Objetivo 3 - Análise paramétrica de Amp e lambda %%

% Pós processamento - filtro para superfícies de engenharia reais %%
aa = (Slpdg < 10); %Inclinação de superfície de engenharia mais usual
Hutchings
aavector = aa(:);
aavectorsort = sort(aavector,'descend');
Slpdgvector = Slpdg(:);
Slpdgvectorssort = sort(Slpdgvector);
Slpdgmatrixsort = sort(Slpdg);

% Análise paramétrica - Gráficos

% Em função de Teta

% DeltaPR
% figure
% plot(Slpdgvectorssort(aavectorsort), Deltaprvectorssort(aavectorsort),
'r');
% axis([0 10 -10 1000])
% xlabel('Inclinação (ângulo teta)');
% ylabel('Deltapr');
% title ('Deltapr x Inclinação')
% grid on
%
% DeltaSR
% figure
% plot(Slpdgvectorssort(aavectorsort), DeltaSrvectorssort(aavectorsort),
'b');
% axis([0 10 -90 10])
% xlabel('Inclinação (ângulo teta)');
% ylabel('DeltaSr');
% title ('DeltaSr x Inclinação')
% grid on
%
% TAUMAX
TAUvector = TAU(:);
TAUvectorssort = sort(TAUvector);
% figure

```

```

% plot(Slpdg(aa), TAU(aa));
% % axis([0 10 -90 10])
% xlabel('Inclinação (ângulo teta)');
% ylabel('TAU_Max');
% title ('TAU_Max x Inclinação')
% grid on
%
% %Z_TAUMAX
zTAUvector = zTAU(:);
zTAUvectorsort = sort(zTAUvector, 'descend');
% figure
% plot(Slpdg(aa), zTAUa_t(aa));
% % axis([0 10 -90 10])
% xlabel('Inclinação (ângulo teta)');
% ylabel('DeltaSr');
% title ('DeltaSr x Inclinação')
% grid on
%
% %TAUXZ
TAUORTvector = TAUORT(:);
TAUORTvectorsort = sort(TAUORTvector);
% figure
% plot(Slpdgvectorsort(aavectorsort), TAU(r,s));
% % axis([0 10 -90 10])
% xlabel('Inclinação (ângulo teta)');
% ylabel('TAU_Max');
% title ('TAU_Max x Inclinação')
% grid on
%
% %Z_TAUXZ
zTAUORTvector = zTAUORT(:);
zTAUORTvectorsort = sort(zTAUORTvector, 'descend');
% figure
% plot(Slpdgvectorsort(aavectorsort), zTAU(r,s));
% % axis([0 10 -90 10])
% xlabel('Inclinação (ângulo teta)');
% ylabel('DeltaSr');
% title ('DeltaSr x Inclinação')
% grid on

% % Análise Deltapr
%
% figure
% plot(n1,Deltapr)
%
% figure
% plot(amp1,Deltapr)
%
% figure
% plot(amp1scale,Deltapr, 'b-*', n1,Deltapr, 'r-o')%,
Slpdgvectorsort(aa),Deltaprvectorssort(aa),'r-o')
% xlabel ('amp1*10^4, n1')
% ylabel ('DeltaPr')
% grid on
%
% figure
% plot(Slpdg(aa),Deltapr(aa),'b-
*',Slpdgvectorsort(aa),Deltaprvectorssort(aa),'r-o')
% xlabel ('inlinação (graus)')

```

```

% ylabel ('Deltapr')
% legend('Inclinação com restrição','Inclinação sem restrição')
% grid on
%
% figure
% plot(Slpdg(aa),Deltapr(aa),'b-
*',Slpdgvectorssort(aa),Deltaprvectorssort(aa),'r-o')
% axis([0 3 0 120])
% xlabel ('inlinação (graus)')
% ylabel ('Deltapr')
% legend('Inclinação com restrição','Inclinação sem
restrição','location','south')
%
%
% figure
% plot(amp1scale2,Deltapr, 'b-*', Lbd,Deltapr, 'r-o');%,
Slpdgvectorssort(aa),DeltaSrvectorssort(aa),'r-o')
% xlabel ('amp1*10, Lbd')
% ylabel ('Deltapr')
% grid on
%
% figure
% plot(Slpdg,Deltapr)
%
% figure
% surfc(amp1,n1,Deltapr)
% axis([0 12E-3 0 30 0 600]) %Com retrição
% xlabel ('amp1')
% ylabel ('n1')
% zlabel ('DeltaPr')
% grid on
%
% figure
% contour(amp1,n1,Deltapr)
%
% figure
% surfc(amp1,Lbd,Deltapr)
% axis([0 12E-3 0 0.18 0 600])
% xlabel ('amp1')
% ylabel ('lambda')
% zlabel ('DeltaPr')
% grid on
%
% figure
% contour(amp1,Lbd,Deltapr)
%
% % Análise DeltaSr
%
% figure
% plot(n1,DeltaSr)
%
% figure
% plot(amp1,DeltaSr)
%
% figure
% plot(amp1scale,DeltaSr, 'b-*', n1,DeltaSr, 'r-o');%,
Slpdgvectorssort(aa),DeltaSrvectorssort(aa),'r-o')
% xlabel ('amp1*10^4, n1')
% ylabel ('Deltasr')
% grid on

```

```

%
% figure
% plot(amp1scale2,DeltaSr, 'b-*', Lbd,DeltaSr, 'r-o');%,
Slpdgvectorsort(aa),DeltaSrvectorssort(aa),'r-o')
% xlabel ('amp1*10, Lbd')
% ylabel ('Deltasr')
% legend('amp1*10','Lambda')
% grid on
%
%
% figure
% plot(Slpdgvectorsort(aa),DeltaSrvectorssort(aa))
%
% figure
% plot(Slpdg(aa),DeltaSr(aa),'b-
*',Slpdgvectorsort(aa),DeltaSrvectorssort(aa),'r-o')
% axis([0 90 -90 10])
% xlabel ('inlinação (graus)')
% ylabel ('Deltasr')
% legend('Inclinação com restrição','Inclinação sem restrição')
% grid on
%
% figure
% plot(Slpdg(aa),DeltaSr(aa),'b-
*',Slpdgvectorsort(aa),DeltaSrvectorssort(aa),'r-o')
% axis([0 5 -90 10])
% xlabel ('inlinação (graus)')
% ylabel ('Deltasr')
% legend('Inclinação com restrição','Inclinação sem restrição')
% grid on
%
%
% figure
% surfc(amp1,n1,DeltaSr)
% axis([0 12E-3 0 30 -75 15])
% xlabel ('amp1')
% ylabel ('n1')
% zlabel ('Deltasr')
% grid on
%
% figure
% contour(amp1,n1,DeltaSr)
%
% figure
% surfc(amp1,Lbd,DeltaSr)
% axis([0 12E-3 0 0.18 -75 15])
% xlabel ('amp1')
% ylabel ('lambda')
% zlabel ('Deltasr')
% grid on
%
% figure
% contour(amp1,Lbd,DeltaSr)

%% Análise TAU e TAUORT

% TAU
% figure
% plot(amp1scale,TAU, 'b-*', n1,TAU, 'r-o')

```

```

% xlabel ('amp1*10^4, n1')
% ylabel ('Tensão - MPa')
% grid on
%
% figure
% plot(amp1scale2,TAU, 'b-*', Lbd,TAU, 'r-o')
% xlabel ('amp1*10, Lbd')
% ylabel ('Tensão - MPa')
% grid on
%
% figure
% plot(amp1scale,TAUORT, 'b-*', n1,TAUORT, 'r-o')
% xlabel ('amp1*10^4, n1')
% ylabel ('Tensão - MPa')
% grid on
%
% figure
% plot(amp1scale2,TAUORT, 'b-*', Lbd,TAUORT, 'r-o')
% xlabel ('amp1*10, Lbd')
% ylabel ('Tensão - MPa')
% grid on
%
% figure
% plot(Slpgvectorsort(aa),TAUvectorsort(aa), '-o',
% Slpgvectorsort(aa),TAUORTvectorsort(aa),'-o')
%
% figure
% plot(Slpg(aa),TAU(aa), Slpg(aa),
% TAUORT(aa),Slpgvectorsort(aa),TAUvectorsort(aa),'-*',
% Slpgvectorsort(aa),TAUORTvectorsort(aa),'-o')
% axis([0 10 0 1500]) %com restrição
% xlabel ('inclinação')
% ylabel ('Tensão - MPa')
% legend ('inclinação (<10°) x Tau_max','inclinação (<10°) x
% Tau_xz','inclinação x Tau_max','inclinação x Tau_xz','location','south')
% grid on
%
% figure
% surfc(amp1,n1,TAU)
% axis([0 12E-3 0 30 0 1400]) %com restrição
% xlabel ('amp1')
% ylabel ('n1')
% zlabel ('TAU_max')
% grid on
%
% figure
% surfc(amp1,Lbd,TAU)
% axis([0 12E-3 0 0.18 0 1400]) %com restrição
% xlabel ('amp1')
% ylabel ('lambda')
% zlabel ('TAU_max')
% grid on
%
% figure
% surfc(amp1,n1,TAUORT)
% axis([0 12E-3 0 30 0 1200])
% xlabel ('amp1')

```

```

% ylabel ('n1')
% xlabel ('TAU_ORT')
% grid on
%
% figure
% surfc(amp1,Lbd,TAUORT)
% axis([0 12E-3 0 0.18 0 1200])
% xlabel ('amp1')
% ylabel ('lambda')
% xlabel ('TAU_ORT')
% grid on

%% Análise posição ZTAU e ZTAUORT

% TAU
% figure
% plot(amp1scale,TAU, 'b-*', n1,TAU, 'r-o')
% xlabel ('amp1*10^4, n1')
% ylabel ('Tensão - MPa')
% grid on
%
% figure
% plot(amp1scale2,zTAU, 'b-*', Lbd,zTAU, 'r-o')
% xlabel ('amp1*10, Lbd')
% ylabel ('Posição de valor máximo - mm')
% grid on
%
% figure
% plot(amp1scale,zTAUORT, 'b-*', n1,zTAUORT, 'r-o')
% xlabel ('amp1*10^4, n1')
% ylabel ('Posição de valor máximo - mm')
% grid on
%
% figure
% plot(amp1scale2,zTAUORT, 'b-*', Lbd,zTAUORT, 'r-o')
% xlabel ('amp1*10, Lbd')
% ylabel ('Posição de valor máximo - mm')
% grid on
%
% figure
% plot(Slpgdgvectorsort(aa),TAUvectorsort(aa), '-o',Slpgdgvectorsort(aa),TAUORTvectorsort(aa),'-o')
%
% figure
% plot(Slpgdgvectorsort(aa),zTAUvectorsort(aa),'-*',Slpgdgvectorsort(aa),zTAUORTvectorsort(aa),'-o')
% axis([0 3 0 0.12]) %com restrição
% xlabel ('inclinação')
% ylabel ('Posição de valor máximo - mm')
% legend ('inclinação (<10°) x zTau_max','inclinação (<10°) x zTau_xz','inclinação x zTau_max','inclinação x zTau_xz','location','north')
% grid on
%
%
% figure
% surfc(amp1,n1,zTAU)

```

```
% axis([0 12E-3 0 30 0]) %com restrição
% xlabel ('amp1')
% ylabel ('n1')
% zlabel ('zTAU_max')
% grid on
%
%
% figure
% surfc(amp1,Lbd,zTAU)
% axis([0 12E-3 0 0.18 0 1400]) %com restrição
% xlabel ('amp1')
% ylabel ('lambda')
% zlabel ('zTAU_max')
% grid on
%
% figure
% surfc(amp1,n1,zTAUORT)
% axis([0 12E-3 0 30 0 1200])
% xlabel ('amp1')
% ylabel ('n1')
% zlabel ('zTAU_ORT')
% grid on
%
% figure
% surfc(amp1,Lbd,zTAUORT)
% axis([0 12E-3 0 0.18 0 1200])
% xlabel ('amp1')
% ylabel ('lambda')
% zlabel ('zTAU_ORT')
% grid on
```