AUNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA - DAMAT
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM MATEMÁTICA E CIÊNCIAS

RENATA CAMARGO DOS PASSOS BARROS

CONTRIBUIÇÕES DO SOFTWARE GEOGEBRA PARA O APRENDIZADO DA GEOMETRIA SEGUNDO A TEORIA DE VAN HIELE

LONDRINA
2017

RENATA CAMARGO DOS PASSOS BARROS

CONTRIBUIÇÕES DO SOFTWARE GEOGEBRA PARA O APRENDIZADO DA GEOMETRIA SEGUNDO A TEORIA DE VAN HIELE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Educação em Matemática e Ciências, do Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan

LONDRINA
2017

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Londrina
Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT
Curso de Especialização em Ensino em Matemática

TERMO DE APROVAÇÃO

CONTRIBUIÇÕES DO SOFTWARE GEOGEBRA PARA O APRENDIZADO DA GEOMETRIA SEGUNDO A TEORIA DE VAN HIELE

por

RENATA CAMARGO DOS PASSOS BARROS

Este Trabalho de Conclusão de Curso de Especialização foi apresentado em primeiro de março de 2017 como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista em Educação em Matemática e Ciências. A candidata foi arguida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho **aprovado**.

____
André Luis Trevisan
Prof.(a) Orientador(a)

____
Adriana Quimentão Passos
Membro titular

____
Marcele Tavares Mendes
Membro titular

À minha família, marido e filhos amados por sua capacidade de acreditar em mim. Mãe, seu cuidado e dedicação foi que deram, em alguns momentos, a esperança e a coragem para seguir. Pai, sua presença significou a segurança e certeza de que jamais estarei sozinha.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, e não somente nestes últimos meses, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

Aos meus filhos que compreenderam minha ausência nos fins de semana que tive de viajar, e até mesmo naqueles que estando em casa não pude ser a mãe que eles estavam acostumados a ter.

Aos meus pais que sempre estiveram ao meu lado. Meu pai viajando comigo e minha mãe que fazia o meu papel para os meus filhos para que eu pudesse seguir em frente e concluir meu trabalho.

A todos meus aluninhos que participaram dessa pesquisa, pois sem eles ela não teria sido possível.

Ao meu orientador Dr. André Luis Trevisan, que aceitou me orientar logo na primeira semana de aula e que foi sempre tão paciente comigo que sou tão ansiosa.

E ao amor da minha vida, que também é professor de matemática, Dr. Rui Marcos de Oliveira Barro por ter me desafiado a concluir essa curta jornada.

[...] a estratégia educacional básica para dar aos alunos a possibilidade de reprodução do pensamento teórico são as tarefas cujas possibilidades requeiram a formação de abstrações e generalizações sobre as ideias centrais do objeto. As tarefas e ações propostas pelo professor devem levar os alunos a ivestigarem um problema envolvendo o objeto de conhecimento. Eles devem descobrir seu processo de origem, compreender suas transformações e identificar a relação principal que aí se apresenta. (PERES, FREITAS, 2014, P.21)

RESUMO

BARROS, Renata Camargo dos Passos. **Contribuições do Software GeoGebra para o aprendizado da Geometria segundo a Teoria de Van Hiele**. 2017. 77 f. Monografia (Especialização em Educação em Matemática e Ciências) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2017.

A presente pesquisa foi realizada com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental II, de um colégio particular do município de Maringá, Paraná. Teve como objetivos a elaboração e análise de tarefas utilizando o *software* GeoGebra, envolvendo a formação de conceitos de triângulos e quadriláteros, a fim de responder a questão "Como a utilização do *software* GeoGebra, por meio de tarefas de caráter exploratório-investigativo, possibilita aos estudantes do 7º ano, progredir nos níveis de Van Hiele?". A ideia central do trabalho foi a preparação das tarefas que deveriam ser desenvolvidas com base em uma mediação pedagógica pautada no uso da informática, mais especificamente do *software* GeoGebra, como recurso auxiliar, e no modelo de desenvolvimento geométrico de Van Hiele. A aplicação das tarefas aos alunos aconteceu de maneira diferenciada. A primeira tarefa foi um teste diagnóstico para os níveis de Van Hiele, onde cada aluno recebeu uma folha com as questões e respondiam nela própria. Já na segunda e terceira tarefas os alunos tiveram a oportunidade de explorar, ou realizar, as construções geométricas, identificar suas características, fazer observações, pensar e responder os questionamentos de cada questão. A pesquisa se caracteriza como qualitativa e, de acordo com o processo de coleta de dados, ainda pode ser classificada como bibliográfica e de campo. Inicialmente realizamos uma pesquisa bibliográfica para elaboração de nosso referencial teórico, bem como para uma reflexão sobre a importância de integrar o ensino de geometria às tecnologias de informação e comunicação e as implicações de um trabalho docente pautado no modelo do pensamento geométrico do casal Van Hiele com o auxílio do *software* GeoGebra. Logo após, passamos a fase de pesquisa de campo, quando fomos para sala de aula aplicar as tarefas elaboradas para coleta de dados. Analisando os resultados obtidos percebemos que: uma parte considerável dos alunos conseguiu desenvolver as tarefas propostas e iniciar o processo de construção dos conceitos de triângulos e quadriláteros; os alunos não apresentaram dificuldades em utilizar o computador, porém, para manusear o *software* GeoGebra, a maioria teve de início bastante dificuldade, o que nos levou a reformular nossas tarefas, para que nossos objetivos fossem atingidos. Assim, constatamos que as tarefas baseadas no modelo do pensamento geométrico do casal Van Hiele quando aplicadas com o auxílio do *software* GeoGebra, podem contribuir positivamente para a passagem de um nível para outro como sugere tal modelo.

Palavras-chave: GeoGebra. Educação Matemática. Modelo Van Hiele. Triângulos e quadriláteros.

ABSTRACT

BARROS, Renata Camargo dos Passos. **Contribuitions GeoGebra Software for the apprenticeship according to Van Hiele theoty**, 2017. 77 s. Completion Work Course (Specialization Education Matematics and Sciences) - Federal Technology University - Paraná. Londrina, 2017.

This research was carried out with seventh grade students of the Elementary School, in a private school in the city of Maringá, Pr. The aims were the elaboration and analysis of activity using the GeoGebra Software, including concepts about triangles and quadrilaterals to answer the question: “How the GeoGebra Software through the use of exploratory – investigative activity can help the 7^{th} grade students to improve in the Van Hiele levels? “ The main idea of the project was the elaboration of the activity that should be developed using a pedagogical mediation related to the use of informatics, more specifically using the GeoGebra Software, as an auxiliary resource and in the Van Hiele model of geometric development. The application of the activity to the students happened in a different way. The first activity was a diagnostic test considering the Van Hiele levels, where each student received a paper with questions and they answered on it. During the second and third activity, the students had the opportunity to explore or do the geometrical constructions, identify their characteristics, suggest observations, think and answer each question. The research is characterized as qualitative and according to the process of data collection, it can also be classified as bibliographic and field research. Initially, we did a bibliographic research to the elaboration of our theoretical referential, as well as a reflection about the importance to integrate the geometry teaching with the information and communication technologies and the implications of a teaching work related to the Van Hiele of geometric thinking with the auxiliary of the GeoGebra Software to the development of the activity. So, we moved to the field research process, when we went to the classroom to apply the homework elaborated to the data collection. Analyzing the results, we noticed that: a significant number of students could do the proposed activity and start the process of construction about the concepts of triangles and quadrilaterals; the students didn´t have problems in use the computers but most of them had difficulties to use the GeoGebra Software in the beginning and because of it, we reformulated our activity to achieve our objectives. So, we conclude that the activity based on the Van Hiele geometric model thinking when applied using the GeoGebra Software can make a positive contribution to the transition from one to other level, as suggest such model.

Keywords: GeoGebra. Mathematical Education. Van Hiele model. Triangles and quadrilaterals.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele pode ser utilizado no sentido de organizar situações de ensino que facilitem a compreensão de conteúdos em Geometria. Seu uso como aporte teórico permite investigar também as dificuldades em ensinar e aprender geometria. O modelo de desenvolvimento geométrico e as fases de aprendizagem desenvolvidas pelos Van Hiele propõem um meio de identificar o nível de maturidade geométrica dos alunos e indicam caminhos para ajudá-los avançar de um nível para outro.

Por que os alunos apresentam tantas dificuldades na aprendizagem de geometria? Para Nasser e Sant'anna (2010), a resposta a essa pergunta deve levar em conta, não apenas a atuação didática do professor, mas também, e principalmente, a participação do aluno na construção do conhecimento.

A geometria, quando ensinada nas escolas, em geral não é compreendida pelos alunos. A maneira como é ensinada não permite a interação entre o aluno e o objeto de estudo, a falta de exemplos práticos e uma aplicação com os próprios recursos que o professor possui, impede muitas vezes sua participação no processo de construção do conhecimento, limitando-se apenas à aplicação e reprodução de conceitos e fómulas (MIGUEL; MIORIM, 1986). Por isso, a presente pesquisa se agrega à necessidade de melhoria dos processos de ensino e aprendizagem de geometria no ambiente escolar, bem como à necessidade de adaptação do ambiente escolar frente às novas tecnologias de informação e comunicação.

Atualmente um novo paradigma de educação vem sendo priorizado nos cursos de formação e capacitação de professores, discutido em eventos, congressos e seminários e se apresentando de forma constante na literatura (SANCHO, 2013). Nesse novo contexto, a aprendizagem deve ocorrer de modo dinâmico e interativo e os professores são convidados a refletir sobre a prática docente e a experimentar novas metodologias. A tecnologiavem a serviço desse novo paradigma à medida que, se bem utilizada, permite ao professor desenvolver um trabalho, no qual considere o aluno como corresponsável pela construção de seu conhecimento e se posicione como mediador desse processo (PAIS, 2008; VALENTE, 1999; BORBA 2010; PENTEADO, 2012).

De acordo com Gravina e Santarosa (1998), ao utilizar as tecnologias nas aulas de matemática, o conceito abstraído do objeto matemático representado, ganha um significado científico e um sentido para o aluno quando este tem a oportunidade de explorar de modo dinâmico as propriedades inerentes a ele.

Gravina e Basso (2012) refletem que os softwares de geometria dinâmica, permitem a criação desses ambientes informatizados, favorecem os processos de construção do conhecimento matemático e o desenvolvimento de estruturas cognitivas, pois apresentam o interessante recurso, que os autores denominam "estabilidade sob ação de movimento", ou seja, as construções das figuras geométricas são feitas a partir das propriedades que as definem, elas se transformam quanto ao tamanho e a posição, mas preservam as propriedades geométricas que foram impostas no processo de construção, bem como as propriedades delas decorrentes. A escolha do Geogebra aconteceu por ser um software gratuito que permite a criação de um ambiente com essas características.

Este texto é resultado de um estudo sobre o ensino da geometria básica utilizando o software GeoGebra amparado ao modelo dos Van Hiele buscando responder a seguinte questão de pesquisa: Como a utilização do *software* GeoGebra, por meio de tarefas de caráter exploratório-investigativo, possibilita aos estudantes do 7º ano, progredir nos níveis de Van Hiele?.

Ou seja, buscamos verificar que tipo de contribuição ocorre quando se faz a mediação pedagógica por meio da utilização do software GeoGebra no estudo de triângulos e quadriláteros com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental II. Essa busca será feita com fundamentação teórica apoiada na Teoria de Van Hiele.

Alguns objetivos mais específicos podem ser listados no interesse de propor direcionamentos para a realização da pesquisa. São eles:

- Promover uma reflexão sobre o uso das tecnologias digitais de informação e comunicação na educação e na educação matemática;
- Promover a discussão sobre a utilização do software GeoGebra em aulas da disciplina de matemática;
- Elaborar tarefas que contribuam para a formação dos conceitos de triângulo e quadriláteros;
- Utilizar o modelo de Van Hiele e a realização de tarefas na interface do software Geogebra como uma prática ensino de geometria.

Entendemos que tal estudo venha contribuir com o processo de operacionalização e modernização do ensino da matemática, apresentando uma proposta que valoriza a participação efetiva dos alunos na construção de conceitos de geometria. Além disso, acreditamos que o uso de tarefas a serem realizadas com o software GeoGebra como recurso para auxiliar a aprendizagem dos alunos, pode servir para que eles desenvolvam estratégias geométricas passando do nível de visualização a níveis mais abstratos em relação ao conceito a ser construído.

Essa pesquisa, de abordagem qualitativa, reveste-se de um caráter diagnóstico e exploratório, adotando para isto um estudo de caso. O público alvo desse projeto foram alunos do 7º ano do Ensino Fundamental II de um colégio particular da Cidade de Maringá, Paraná.

A parte teórica foi realizada principalmente com os estudos das obras de Nasser e Sant'anna (2010), intitulada **Geometria segundo a teoria de Van Hiele;** Lopes e Nasser (2010), **Geometria na era da imagem e do movimento** e Villiers (2010), **Algumas reflexões sobre a teoria de Van Hiele.**

Resumidamente, a parte experimental da pesquisa foi realizada da seguinte maneira: Primeiramente aplicamos um pré-teste para identificar o nível de conhecimento que os alunos possuíam a respeito de triângulos e quadriláteros. Para isso, utilizamos o teste de Van Hiele adaptado por Nasser que consta no anexo A. Assim, tentamos constatar as reais dificuldades e lacunas existentes no conhecimento de triângulos e quadriláteros em geometria plana, especificamente na parte de nomeação e classificação de figuras geométricas.

Após a análise dos testes aplicamos a tarefa 1. Esta tarefa foi pensada e desenvolvida com o uso do GeoGebra e pautada no modelo de Van Hiele, norteada no artigo de Villiers (2010) livro de Nasser e Sant'Anna (2010).

A primeira atividade, de carater individual, foi realizada no laboratório de informática, sem a mediação da professora (pesquisadora). Foi elaborado um roteiro com instruções contendo um passo a passo a ser seguido para que os alunos executassem as construções geométricas solicitadas de geometria e em seguida respondessem às questões referentes a sua construção.

A segunda tarefa, foi organizada no intuito de investigar contribuições do software GeoGebra na resolução de tarefas geométricas e no estudo de triângulos e quadriláteros.

Além desta introdução, o texto contém dois capítulos para melhor apresentação dessa pesquisa.

No primeiro abordamos um pouco da história da geometria e também do software GeoGebra, já no segundo abrangemos um pouco mais a respeito da Teoria do desenvolvimento Geométrico/Teoria de Van Hiele.

2 A GEOMETRIA E O GEOGEBRA

Desde as primeiras compilações teóricas na Grécia antiga até a formalização das Geometrias não euclidianas, a Geometria tem evoluído consideravelmente e contribuído para os avanços da matemática, da ciência e da tecnologia.

Para Machado (2003, p. 85) “a Geometria tem grande utilidade prática e está presente em muitos aspectos da nossa vida cotidiana, a começar por nossa casa e o que há dentro dela”. Podemos ter uma ideia dessa grande dimensão que é a Geometria, quando paramos para observar em como ela é essencial em realizações de projetos profissionais, entre eles: utilização de formas geométricas euclidianas nos modelos matemáticos utilizados por engenheiros mecânicos, engenheiros civis e arquitetos, utilização de teoremas da Geometria não euclidiana por parte de astrônomos e astrofísicos em seus estudos acerca da dinâmica dos corpos celestes.

Miguel e Miorim (1986) confirmam essa reflexão quando apontam que “as intuições geométricas revelam-se necessárias ainda, em maior ou menor intensidade, aos profissionais das mais diferentes áreas de atividades humanas” (MIGUEL; MIORIM, 1986, p. 67). Podemos verificar isso em diferentes situações do nosso próprio dia a dia, como: em uma aula de artes no colégio, onde o professor trabalha com seu aluno não apenas cores e formas geométricas utilizadas para compor uma tela, mas também o espaço para melhor apresentação das mesmas; em um desfile de modas, onde vários profissionais trabalharam com pequenas e grandes medidas para produzir peças incríveis para as modelos; um engenheiro civil quando finaliza o projeto de uma casa; no nosso telefone celular; no design moderno de uma mesa de jantar esboçado por um marceneiro.

De acordo com Melo (2014, site) os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2000) defendem que habilidades como visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de geometria. Assim os alunos poderão utilizar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca.

Sá (2010) enfatiza que, no GeoGebra, além das construções serem alteradas de maneira dinâmica, o software possui um campo destinado à inserção de coordenadas e equações, podendo trabalhar com variáveis, números, vetores e pontos, e possui uma ferramenta para encontrar derivadas e integrais de funções com comandos próprios da análise matemática.

Sobre o referido software, Vaz (2012) contribui com reflexões sobre as possibilidades de trabalho pela ação baseada em experimentar, conjecturar, formalizar e generalizar o saber matemático, incorporando a investigação matemática com o Geogebra em ambientes educacionais e ao alcance dos alunos, tanto para trabalhos a individuais como em grupos. Para o autor, isso possibilita fazer releituras, construir conceitos, valorizar a experimentação, fato esquecido no ensino atual, e descobrir fatos novos, mesmo em conteúdos elementares.

Ferreira e Barros (2016) apresentam influências dos objetos ostensivos e não-ostensivos apresentados na interface do Geogebra na compreensão do modelo do plano de Poincaré durante o estudo de geometrias não-euclidianas por parte de formandos de um curso de Licenciatura em Matemática.

Basniak e Scaldelai (2016) investigaram a influência das representações algébricas e gráficas da interface do Geogebra na aprendizagem de polinômios no contexto do ensino fundamental.

2.1 TEORIA DO DESENVOLVIMENTO GEOMÉTRICO/TEORIA DE VAN HIELE

A Teoria de Van Hiele ou Níveis de Van Hiele ou o Modelo de Van Hiele, constitui uma teoria do ensino e da aprendizagem do desenvolvimento do raciocínio em Geometria plana. A principal característica da teoria é a distinção de cinco diferentes níveis de pensamentos com relação ao desenvolvimento da compreensão dos alunos acerca da Geometria. O conhecimento desses cinco níveis tanto pode ser utilizado para orientar a formação dos alunos como também avaliar suas habilidades no tratamento de situações que envolvam conceitos geométricos, de acordo com Nasser (2010) e Villiers (2010).

Tal teoria, teve origem nas respectivas teses de doutorado de Dina Van Hiele-Geldof e de seu marido, Pierre Van Hiele, na Universiadade de Utrecht, Holanda em 1957. Mas, foi Pierre quem desenvolveu e disseminou a teoria em publicações posteriores, Villiers (2010). A Geometria é um campo amplo da matemática que possibilita diferentes formas de aprendizagem e abre um leque de caminhos para o professor construir o conhecimento com seu aluno.

Segundo esse modelo, a aprendizagem em geometria é caracterizada por uma sequência de níveis de compreensão de conceitos que estabelecem relações entre objetos de estudo e linguagem a medida que os alunos aprendem geometria.

O modelo de Van Hiele propicia ao professor a constatação de lacunas existentes na aprendizagem de seu aluno durante o processo de formação do conhecimento e assim, auxilia o mesmo a rever estratégias e métodos em sua prática pedagógica para favorecer essa parendizagem que por hora fora comprometida.

O progresso de um nível para o seguinte se dá por meio da vivência de atividades adequadas, e passa por cinco fases de aprendizagem. Portanto o progresso entre esses níveis depende mais de aprendizagem que de idade ou maturação. O aluno só atinge determinado nível de raciocínio após passar por todos os níveis inferiores.

Segundo Van Hiele, cada nível é caracterizado por relações entre objetos de estudo e linguagens próprias. Consequentemente, não pode haver compreensão quando as situações geométricas oferecidas ao aluno pertencem a um nível mais elevado do que o atingido pelo aluno.

Nasser e Sant'anna (2010), estabelecem relações, características e exemplos a respeito dos níveis:

Quadro 1 – Os níveis de Van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio em Geometria.

Nível de Van Hiele	**Características**	**Exemplos**
1º Nível (Básico) Reconhecimento ou visualização	Reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras geométricas por sua aparência global.	Classificação de recortes de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
2º Nível Análise	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas	Descrição de um quadrado através de propriedades: 4

	propriedades e uso dessas propriedades para desenvolver problemas.	lados iguais, 4 ângulos retos, lados opostos iguais e paralelos.
3º Nível Abstração	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra. Argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Descrição de um quadrado por meio de suas propriedades mínimas: 4 lados iguais, 4 ângulos retos. Reconhecimento de que o quadrado é também um retângulo.
4º Nível Dedução	Domínio do processo dedutivo e das demonstrações; reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruências de triângulos.
5º Nível Rigor	Capacidade de compreender demonstrações formais. Estebelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma geometria finita.

Fonte: Nasser e Sant'anna (2010).

Por exemplo, no nível da visualização ou reconhecimento, nível 1 os alunos reconhecem as figuras visualmente por sua aparência global. Reconhecem triângulos, quadrados, paralelogramos, entre outros, por sua forma, mas não identificam as propriedades de tais figuras explicitamente. Adquirem uma concepção de espaço em sua volta, reconhecendo as figuras apenas pela sua aparência, já no nível de análise nível 2 os alunos começam a analisar as propriedades das figuras e aprendem a terminologia técnica adequada para descrevê-las, mas não correlacionam figuras ou propriedades das mesmas, são reconhecidas partes das figuras, as quais passam a ser identificada.

Posteriormente, no nível 3 surge à dedução informal, os alunos realizam a ordenação lógica das propriedades de figuras por meio de curtas sequências de dedução e compreendem as correlações entre as figuras (por exemplo, inclusões de classe).

Ainda com relação aos níveis, Villiers (2010), menciona algumas características importantes da teoria sugeridas por Usiskin (1982:4):

• **ordem fixa:** a ordem na qual os alunos progridem por meio dos níveis de pensamento não varia. Em outras palavras, um aluno não pode estar no nível **n** sem ter passado pelo nível **n – 1**.

• **adjacência:** em cada nível de pensamento que era intrínseco no nível anterior se torna extrínseco no nível atual.

• **distinção:** cada nível possui seus próprios símbolos linguísticos e sua própria rede de relacionamentos que conecta tais símbolos.

• **separação:** duas pessoas com raciocínio em níveis diferentes não podem entender uma à outra.

A teoria de Van Hiele faz distinção entre cinco níveis de pensamento, porém, nossa pesquisa aborda apenas os três primeiros que aqui consideramos contemplar a geometria trabalhada no 7º ano do ensino fundamental II, que é nosso público alvo.

Para Van Hiele, deve ocorrer uma reestruturação antes que os alunos possam começar a explorar as relações lógicas entre tais propriedades no Nível 3, da seguinte maneira:

> A rede de relações no Nível 3 só pode ser estabelecida de maneira significativa quando a rede de relações no Nível 2 for estabelecida adequadamente. Quando a segunda rede de relações está presente de forma adequada tal que sua estrutura se torna aparente e alguém pode falar sobre ela com outras pessoas, é então que os elementos constituintes do Nível 3 estarão prontos. (VAN HIELE,1973, p. 94)

O Nível 3 também representa uma rede de relações completamente diferentes daquelas do Nível 2. Enquanto a rede de relações do Nível 2 envolve a associação de propriedades a tipos de figuras e relações entre figuras de acordo com tais propriedades a rede de relações, o Nível 3 envolve as relações lógicas entre propriedades das figuras. A rede de relações no Nível 3 não mais se refere a figuras concretas e específicas, e tampouco tais relações formam uma estrutura de referência na qual se pergunta se uma determinada figura possui determinadas propriedades. As perguntas típicas feitas no Nível 3 são relacionadas ao fato de uma determinada propriedade ser sequência de outra ou se ela pode ser deduzida a partir de um subconjunto específico de propriedades (ou seja, ela poderia ser tomada como uma definição ou se é um teorema) ou se duas definições são equivalentes.

Portanto, as redes de relações do segundo e do terceiro níveis de pensamento são muito diferentes.

> O raciocínio acerca de um sistema lógico pertence ao Terceiro Nível de pensamento. A rede de relações, que se baseia em uma descrição verbal de fatos observados, pertence ao Segundo Nível de pensamento. Esses dois níveis têm suas próprias redes de relações, com uma sendo diferente da outra: ou alguém raciocina em uma rede de relações ou na outra. (VAN HIELE,1973, p.94)

As diferenças entre os três primeiros níveis podem ser resumidas da maneira exibida no anexo B, com relações aos objetos e à estrutura de pensamento em cada nível, conforme adaptação proposta por Villiers (2010)

Os Van Hiele assinalaram que, numa sala de aula, cada aluno pensa em diferentes níveis e, além disso, apresentam modos de pensar diferentes dos professores (ALVES, 2010).

O modelo criado por Van Hiele, pode orientar o professor em como melhorar sua prática de sala de aula no ensino da geometria, contribuindo para que o aluno tenha melhor aproveitamento na aprendizagem dos conteúdos de geometria.

A utilização da teoria proporciona ao professor condições de identificar formas de raciocínio do aluno e verificar em que nível ele se encontra. Se o professor identificar que o aluno se encontra em um nível inferior aos demais da turma, ele tem subsídios para levar o aluno a avançar seu nível de compreensão (SILVA; CANDIDO, 2007).

Estudos mostram que progresso ao longo dos níveis, acontece muito mais pela orientação do professor, que pela maturidade ou idade do aluno. Para tratar estas questões os Van Hiele propuseram cinco fases de aprendizagem: interrogação (questionamento ou informação), orientação dirigida (orientação direta), explicação, orientação livre e integração. A ordenação dada a essas fases não possui correlação direta com a enumeração dos níveis anteriormente citados.

Alves (2010) resume as características dessas fases no Quadro 2, a seguir:

Quadro 2 - fases de Aprendizagem do modelo de Van Hiele.

Fases de Aprendizagem	Características
Questionamento ou informação (fase 1)	- Professor e aluno dialogam sobre o material de estudo; - Apresentação de vocabulário do nível a ser atingido; - O professor deve perceber quais conhecimentos anteriores do aluno sobre o assunto a ter estudado.
Orientação Direta (fase 2)	- Os alunos exploram o assunto de estudo através do material selecionado pelo professor; - As atividades deverão proporcionar respostas específicas e objetivas.
Explicação (fase 3)	- O papel do professor é o de observador; - Os alunos trocam experiências, os pontos de vista diferentes contribuirão para cada um analisar suas ideias.
Orientação Livre (fase 4)	- Tarefas constituídas de várias etapas, possibilitando diversas respostas, a fim de que o aluno ganhe experiência e autonomia.
Integração (fase 5)	- O professor auxilia no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem apresentar novas ou discordantes ideias.

Fonte: Alves (2010, p. 71).

As características apresentadas no quadro anterior permitem o planejamento de atividades por parte dos professores. Elas foram utilizadas no planejamento das atividades realizadas nesta pesquisa, pois o modelo de Van Hiele afirma que só é possível o avanço de um nível do pensamento geométrico passando pelo anterior.

Um dos objetivos desta pesquisa é utilizar o modelo de Van Hiele e a realização de tarefas na interface do software GeoGebra como uma prática inovadora no ensino de Geometria.

Com essa intenção, desenvolvemos algumas tarefas de caráter exploratório-investigativo, respeitando os níveis do pensamento geométrico como descreve o modelo de Van Hiele.

Escolhemos utilizar o software GeoGebra para verificar como seriam realizadas essas tarefas por meio dessa ferramenta e se o mesmo poderia contribuir positivamente para o progresso dos alunos do 7º ano nas atividades aqui propostas.

Passemos, então, à apresentação do desenvolvimento da pesquisa e de algumas análises preliminares.

3 DESENVOLVIMENTO E ANÁLISES PRELIMINARES

Essa pesquisa, de abordagem qualitativa, reveste-se de um caráter diagnóstico e exploratório, adotando para isto um estudo de caso.

O público alvo dessa pesquisa foram alunos do 7º ano do Ensino Fundamental II de um colégio particular da Cidade de Maringá, Paraná.

Inicialmente, foi realizada uma pesquisa bibliográfica para elaboração do referencial teórico, bem como para promover a reflexão sobre a importância de integrar o ensino de geometria às tecnologias digitais de informação e comunicação.

A aplicação da pesquisa incluiu o uso de um laboratório de informática para aplicação das tarefas planejadas. O laboratório tinha disponível um computador por aluno.

A realização das tarefas foi feita por 26 alunos com idades entre 12 e 13 anos pertencentes a uma mesma turma. Durante a análise dos registros das atividades os alunos serão tratados por codinomes como Aluno A, Aluno B, Aluno C, e assim por diante. Essa caracterização é individual, e o Aluno A, será sempre o mesmo até o final das análises, e assim por diante. O gênero dos alunos não é relevante em nossas análises, mas para conhecimento do leitor havia 8 alunos do sexo masculino e 16 do sexo feminino.

O tempo dedicado à realização de todas as etapas da pesquisa foi de 380 minutos divididos em quatro encontros de acordo com a explicação a seguir.

Cada encontro foi realizado em dias diferentes com intervalos não fixos.

O Quadro 3 mostra o esquema adotado para o encaminhamento da nossa pesquisa.

Quadro 3 – Resumo das atividades desenvolvidas com os alunos.

Encontro	Atividades	Objetivos	Tempo
1	Apresentação da pesquisa aos alunos	Explicar a metodologia das tarefas aos alunos envolvidos na pesquisa	10 min
	Aplicação do Teste dos níveis de Van Hiele como diagnóstico da turma	Coletar e verificar os conceitos prévios que os alunos possuem a respeito de triângulos e quadriláteros, para analisar os possíveis avanços nos níveis de Van Hiele nas tarefas posteriores 1 e 2	40 min

2	Tarefa 1:	Analisar como os alunos utilizam o software Geogebra para realizar as construções e o desenvolvimento nos níveis de Van Hiele	110 min
3	Tarefa 2:	Verificar e analisar os possíveis avanços dos alunos nos níveis de Van Hiele com o uso do software Geogebra	110 min
4	Tarefa 2: reformulada	Verificar e analisar os possíveis avanços dos alunos em comparação com as tarefas anteriores	110 min

Fonte: Elaborado pela autora (2017).

3.1 TESTE

Antes de iniciarmos o trabalho com as tarefas propriamente ditas, era preciso identificar, se possível, em qual nível de Van Hiele cada aluno da turma participante da pesquisa se encaixava.

A melhor maneira de reconhecer em que nível um determinado aluno está raciocinando é por meio da observação direta de seu modo de raciocinar, e das estratégias que ele usa para resolver problemas. Assim, foram aplicados os testes de Van Hiele adaptados por Nasser, conforme anexo A para os três primeiros níveis.

Todos os 26 alunos realizaram os testes e gastaram entre 20 a 45 minutos para finalizar e entregar. Não foi realizada nenhuma mediação por parte da professora, não houve troca de ideias entre os colegas e nem foi permitido a realização de consultas em materiais didáticos.

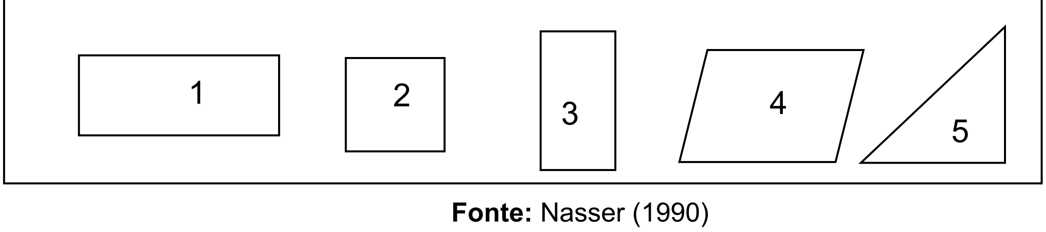
Os alunos receberam três folhas de teste com as questões, onde deveriam assinalar e/ou argumentar a respeito delas. Cada teste é composto por 5 questões, e cada folha devia ser resolvida de uma vez, para que as questões dos testes mais avançados não ajudem na solução dos mais simples.

Para classificar cada aluno, foi utilizado o mesmo critério adotado por Nasser. O aluno alcança um nível quando ele acerta pelo menos 60% das questões do teste daquele nível, ou seja, se ele respondeu a pelo menos 3 das 5 questões propostas.

Para melhor exemplificar, consta na Figura 1 a seguir uma questão que pode ser respondida em diversos níveis (Nasser, 2010).

Figura 1 – Questão 11 do teste de Van Hiele em anexo.

Questão 11. Assinale a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulo(s):

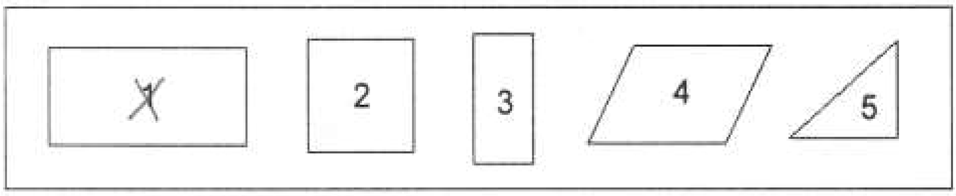


Fonte: Nasser (1990)

O que caracteriza o nível da resposta é o modo de pensar do aluno, se ele fixa só na aparência global (nível de reconhecimento) ou nos elementos da figura (nível de análise), se ele reconhece a inclusão de classes (nível de abstração), se consegue argumentar informal (nível de dedução) ou formalmente (nível de rigor), etc. Alguns exemplos de respostas aos testes de alunos da turma pesquisada foram:

Figura 2 – Teste níveis de Van Hiele- Aluno A

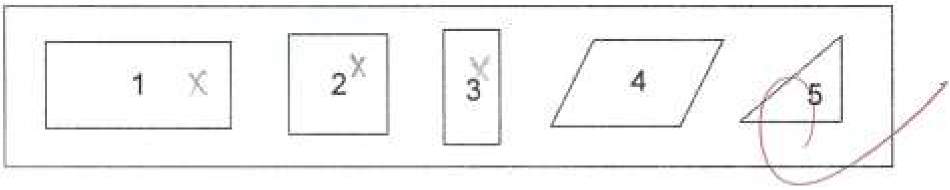
Questão 11. Assinale a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulo(s):



Fonte: Autora do trabalho

Figura 3 – Teste níveis de Van Hiele - Aluno C

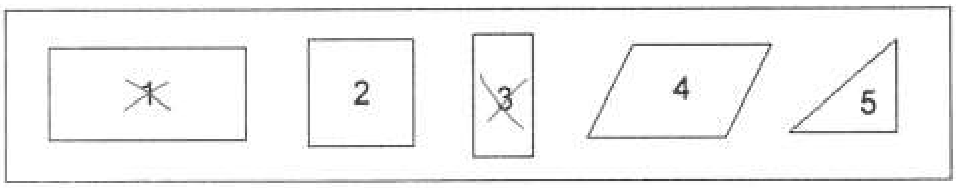
Questão 11. Assinale a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulo(s):



Fonte: Autora do trabalho

Figura 4 – Teste níveis de Van Hiele - Aluno D

Questão 11. Assinale a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulo(s):



Fonte: Autora do trabalho

Após, a aplicação dos testes, foi realizada a correção e a análise conforme critérios sugeridos por Nasser.

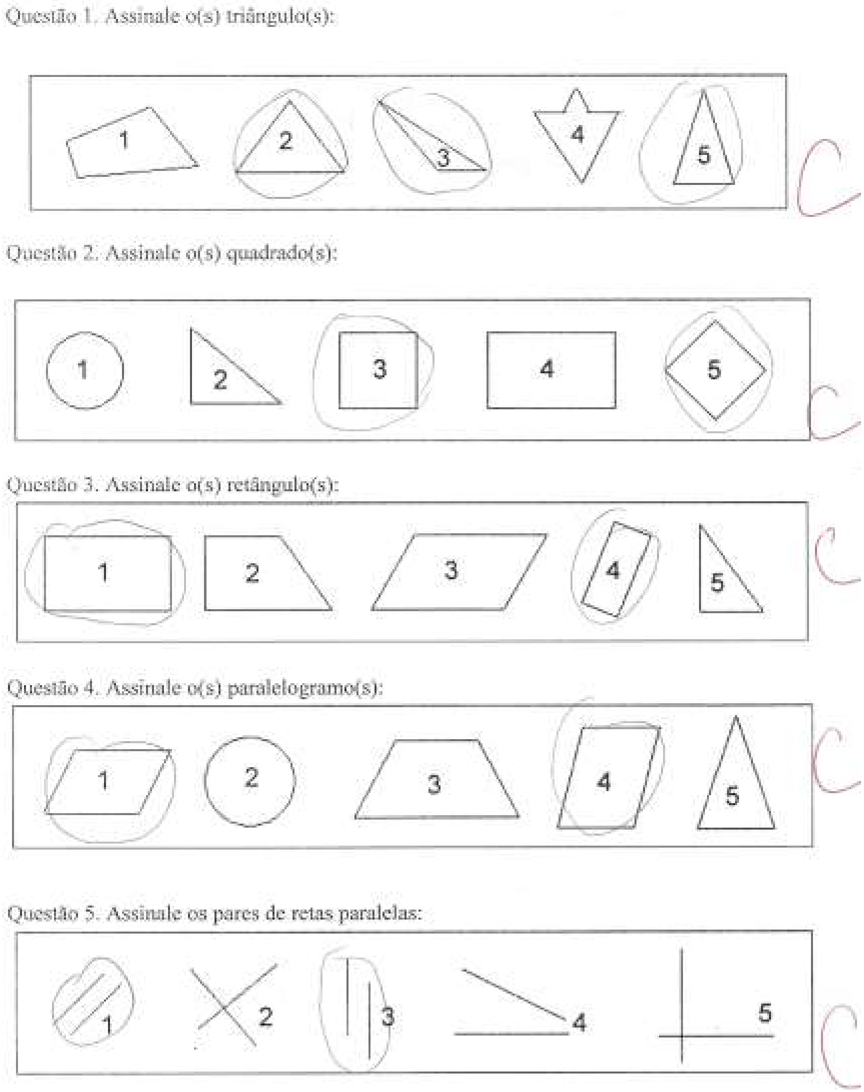
Os alunos A, C e D aqui mencionados, responderam:

- aluno A: apenas 1
- aluno D: 1 e 3
- aluno C: 1, 2 e 3.

Adotando os critérios sugeridos por Nasser temos que: o aluno A tem a imagem conceitual do retângulo apenas numa posição, e não é capaz ainda de reconhecer que a figura 3 também é um retângulo, e, portanto ainda nem atingiu o nível básico. O aluno D consegue reconhecer as duas figuras que representam um retângulo, mas não está claro se baseou-se apenas na aparência global (nível de reconhecimento), ou se reconheceu os quatro ângulos retos e o paralelismo dos lados opostos, que seriam características de raciocínio no nível de análise. Por sua vez, o aluno C, além de reconhecer como retângulos as figuras 1 e 3, ainda percebeu que o quadrado 2 também é, característica do nível de abstração.

As figuras 5, 6 e 7 ilustram o teste do aluno E e nele é possível observar o nível em que o aluno se encontra nos níveis de van Hiele, segundo critérios sugeridos por Nasser (1990), e adotados em nossa pesquisa.

Figura 5 – Teste níveis de Van Hiele - Aluno D


Questão 1. Assinale o(s) triângulo(s):

Questão 2. Assinale o(s) quadrado(s):

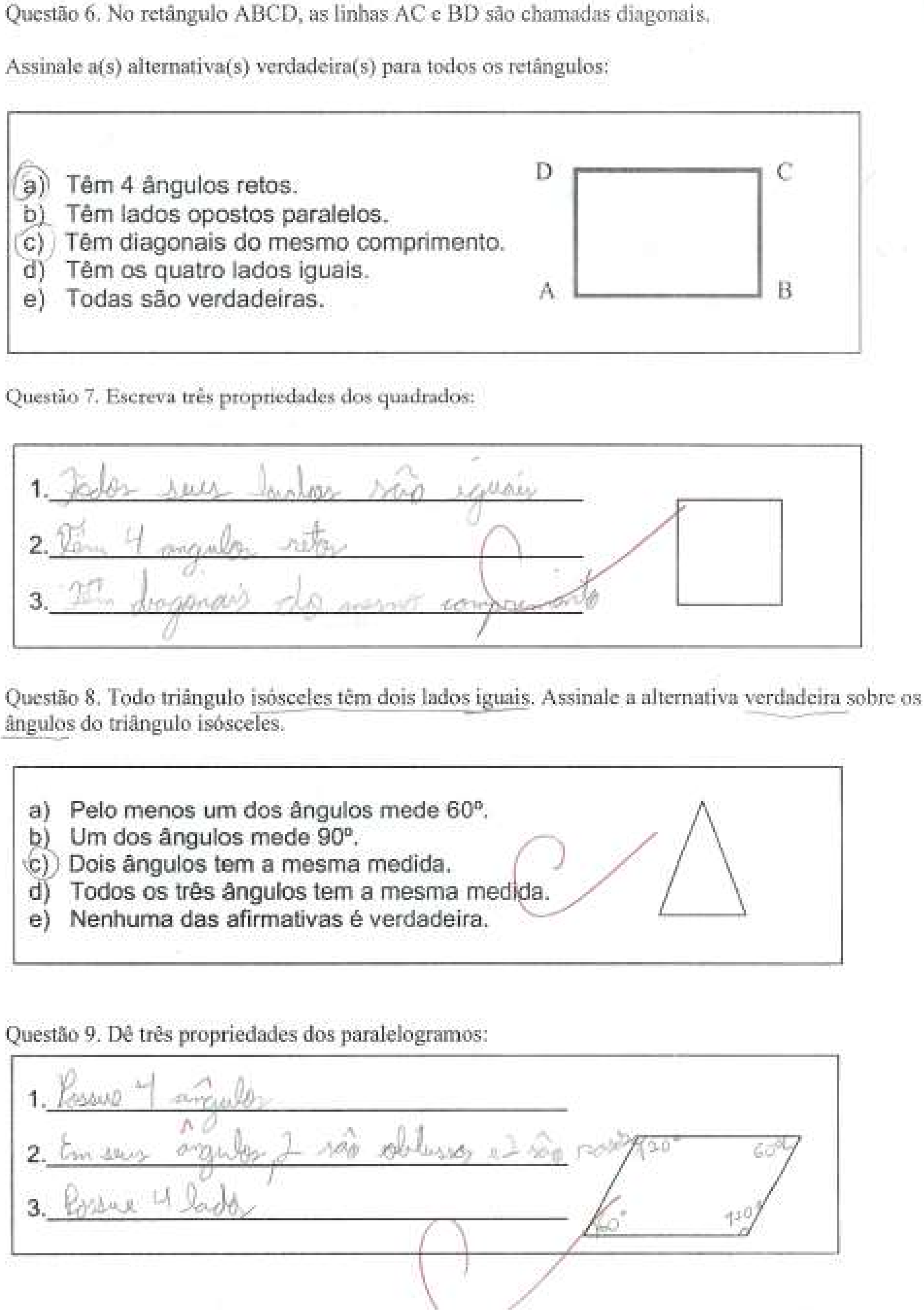
Questão 3. Assinale o(s) retângulo(s):

Questão 4. Assinale o(s) paralelogramo(s):

Questão 5. Assinale os pares de retas paralelas:

Fonte: Autora do trabalho

Figura 6 – Teste níveis de Van Hiele - Aluno D



Questão 6. No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas diagonais.

Assinale a(s) alternativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:

a) Têm 4 ângulos retos.
b) Têm lados opostos paralelos.
c) Têm diagonais do mesmo comprimento.
d) Têm os quatro lados iguais.
e) Todas são verdadeiras.

Questão 7. Escreva três propriedades dos quadrados:

1. Todos seus lados são iguais
2. Têm 4 ângulos retos
3. Têm diagonais do mesmo comprimento

Questão 8. Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a alternativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles.

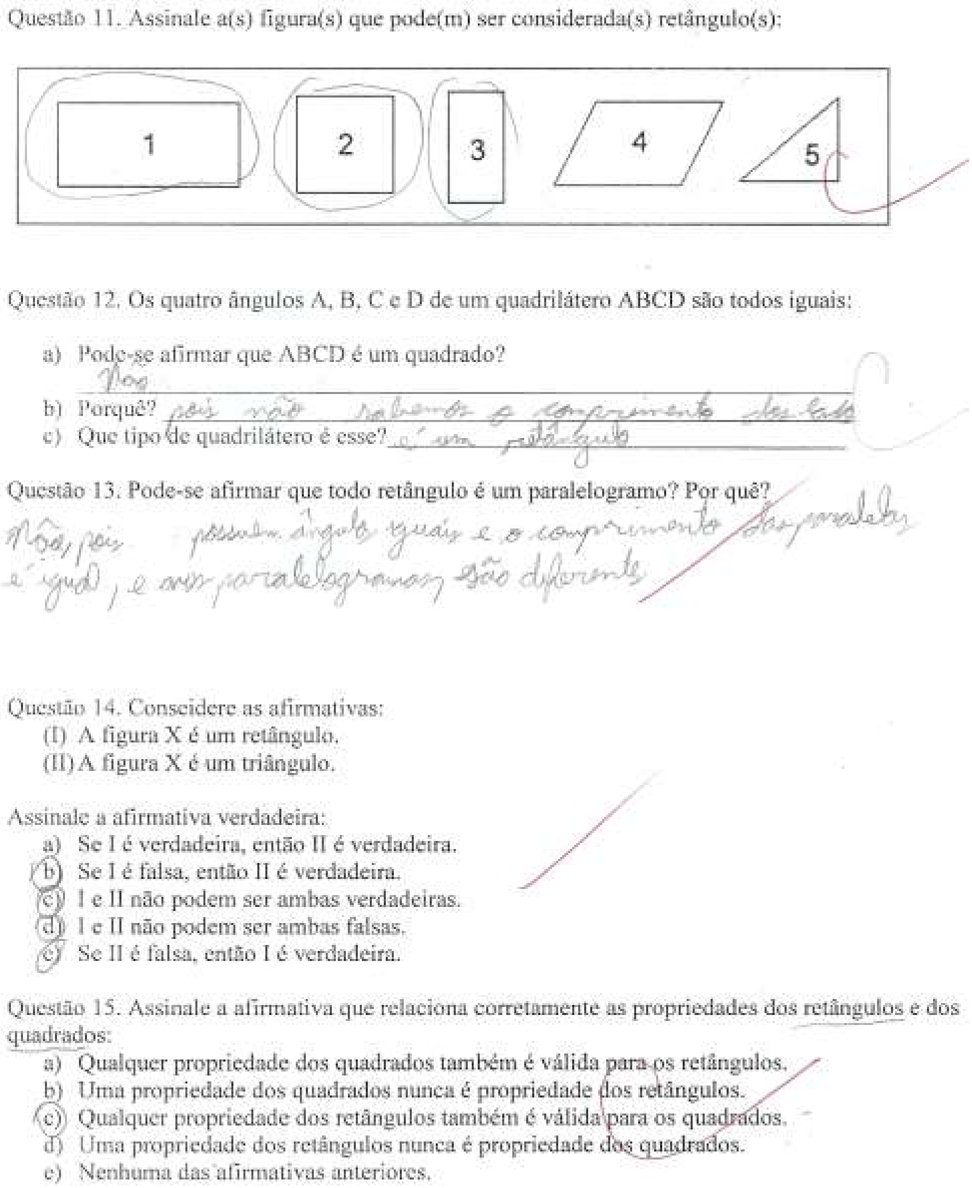
a) Pelo menos um dos ângulos mede 60º.
b) Um dos ângulos mede 90º.
c) Dois ângulos tem a mesma medida.
d) Todos os três ângulos tem a mesma medida.
e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

Questão 9. Dê três propriedades dos paralelogramos:

1. Possue 4 ângulos
2. Em seus ângulos 2 são obtusos e 2 são rasos
3. Possue 4 lados

Fonte: Autora do trabalho

Figura 7 – Teste níveis de Van Hiele - Aluno D



Questão 11. Assinale a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulo(s):

Questão 12. Os quatro ângulos A, B, C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais:

a) Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado?
Não
b) Porquê? pois não sabemos o comprimento dos lados
c) Que tipo de quadrilátero é esse? é um retângulo

Questão 13. Pode-se afirmar que todo retângulo é um paralelogramo? Por quê?
Não, pois possuem ângulos iguais e o comprimento dos paralelos é igual, e nos paralelogramos são diferentes

Questão 14. Conseidere as afirmativas:
(I) A figura X é um retângulo.
(II) A figura X é um triângulo.

Assinale a afirmativa verdadeira:
a) Se I é verdadeira, então II é verdadeira.
b) Se I é falsa, então II é verdadeira.
c) I e II não podem ser ambas verdadeiras.
d) I e II não podem ser ambas falsas.
e) Se II é falsa, então I é verdadeira.

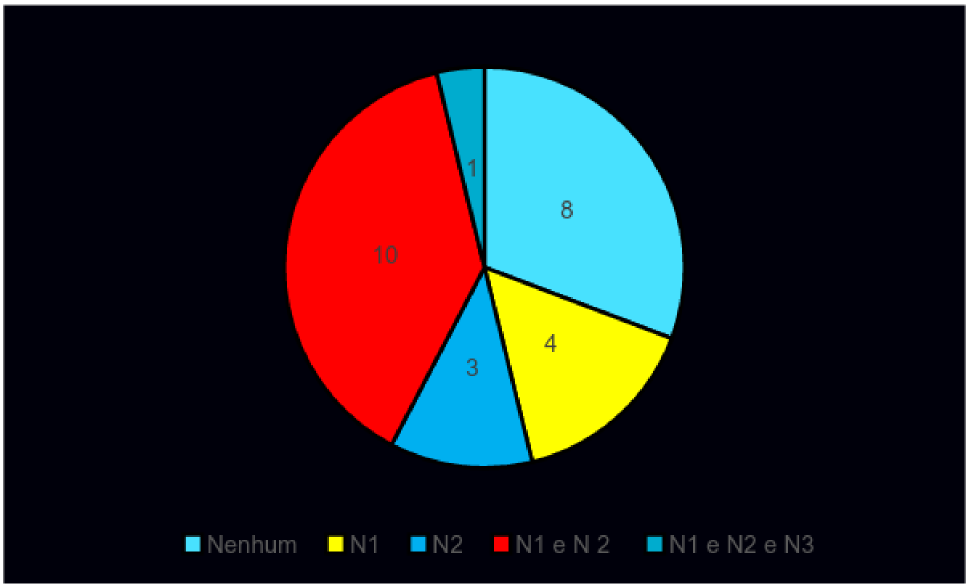
Questão 15. Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados:
a) Qualquer propriedade dos quadrados também é válida para os retângulos.
b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.
c) Qualquer propriedade dos retângulos também é válida para os quadrados.
d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.
e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

Fonte: Autora do trabalho

Considerando os critérios adotados em nossa pesquisa e pelas respostas obtidas no referido teste, classificamos o aluno D no nível 3.

O gráfico 1 e a tabela 1 ilustram os resultados obtidos para esse teste.

Gráfico 1 – Resultados obtidos nos testes quanto aos níveis de Van Hiele



Fonte: Elaborado pela autora (2017)

Tabela 1 - Desempenho dos alunos nos níveis de Van Hiele

Níveis	**Quantidade de alunos por nível**
Nenhum	8
N1	4
N2	3
N1 e N2	10
N1 e N2 e N3	1

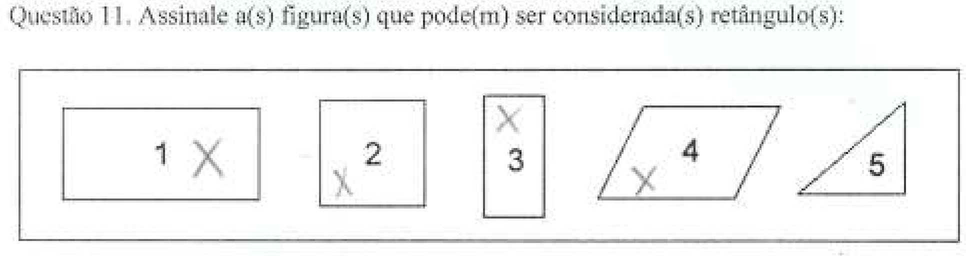
Fonte: Elaborado pela autora (2017)

Observou-se que a maioria dos alunos participantes da pesquisa foram classificados nos níveis 1 e 2 estabelecidos pelos Van Hiele, como também há um percentual que ainda não atingiu o amadurecimento geométrico e não se enquadra em nenhum dos níveis aqui considerados.

Sabe-se que o amadurecimento geométrico não tende a ser medido pelo que o aluno aprende ou pelo que se espera que ele aprenda na escola, mas sim quando ele descobre ou percebe diferenças em situações onde antes para ele era tudo semelhante.

Um exemplo de como um aluno pode progredir consideravelmente em tarefas cada vez mais complexas, é o aluno B. Inicialmente, no teste classificatório dos níveis de Van Hiele, tal aluno demonstrou que todo polígono que possui quatro lados é um retângulo, como ilustra figura 8. E o mesmo aluno no desenvolvimento das tarefas passa a realizar tarefas que antes não era capaz. Assim, mesmo que um aluno não progrida de um nível para outro, pois isso pode demandar certo tempo, ele pode amadurecer e ir construindo aos poucos seu conhecimento geométrico.

Figura 8 – Teste níveis de Van Hiele - Aluno B



Fonte: Autora do trabalho

O desenvolvimento desse aluno aqui considerado, aluno B, será tratado e discutido melhor nas próximas sessões.

3.2 TAREFA 1

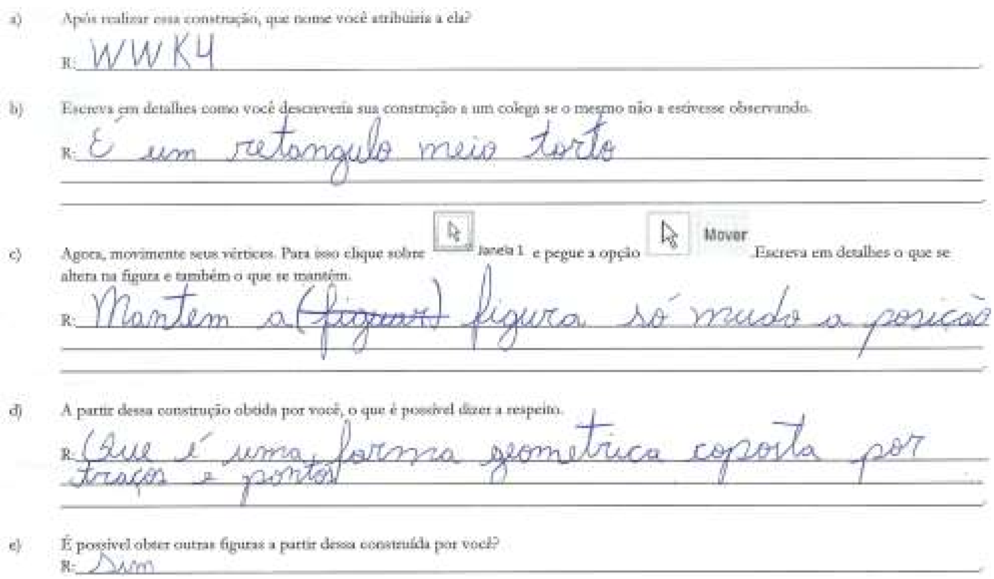
Após a análise dos testes foi pensada a tarefa 1, conforme apêndice A. Esta tarefa foi elaborada para ser desenvolvida com o uso do software Geogebra e também do software opowersoft, um gravador de tela gratuito, para que após os alunos terem realizado a tarefa fosse possível a análise passo a passo das construções realizadas e da maneira que cada um foi pensando para realizá-las. A tarefa foi pautada no modelo de Van Hiele, norteada no artigo de Villiers (2010), e elaborada pela autora mediante expectativas de que os alunos que nunca tiveram contato com o software Geogebra pudessem realizar a respeito da geometria.

A tarefa foi realizada no laboratório de informática, que já estava preparado para receber os 26 alunos, um em cada computador. Foi elaborado um roteiro com instruções que descreviam minuciosamente os passos a serem seguidos pelos alunos para que pudessem responder às questões e executassem as construções solicitadas de geometria, pois não foi ministrado anteriormente nenhum curso do software Geogebra para os alunos. No momento da aplicação da atividade não houve mediação do professor, para não comprometer os objetivos da pesquisa. Assim, poderíamos também verificar como nossos alunos reagem mediante a uma nova tecnologia para realização de suas tarefas.

Para análise dessa atividade utilizamos os vídeos com os procedimentos realizados pelos alunos e também o roteiro no qual os alunos haviam respondido questões acerca das tarefas após sua execução.

Seguem algumas imagens dos registros realizados pelos alunos, nas Figuras 9 a 14:

Figura 9 – Registro no roteiro da atividade 1 no Geogebra - Aluno B


a) Após realizar essa construção, que nome você atribuiria a ela?
R: WWK4

b) Escreva em detalhes como você descreveria sua construção a um colega se o mesmo não a estivesse observando.
R: É um retangulo meio torto

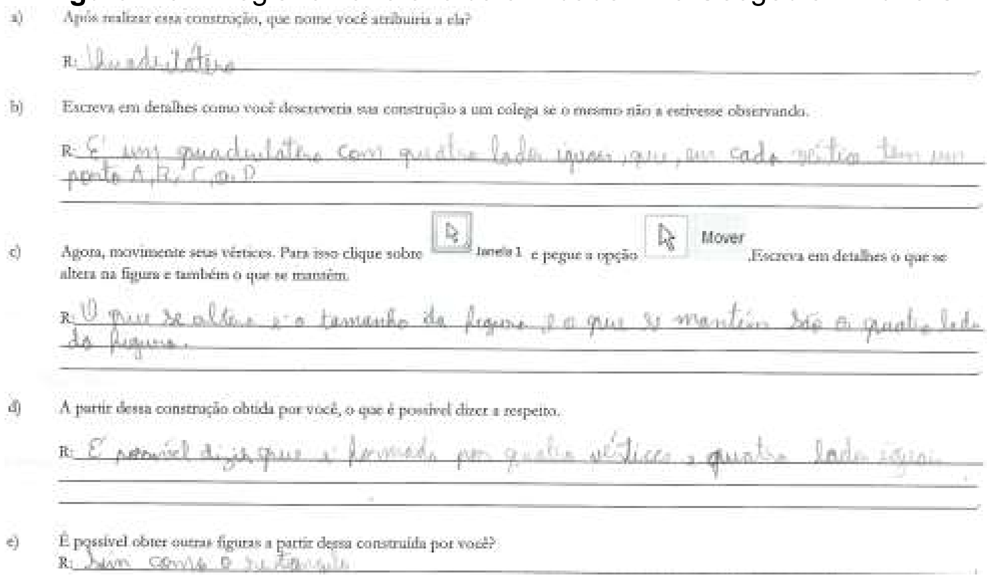
c) Agora, movimente seus vértices. Para isso clique sobre Janela 1 e pegue a opção Mover. Escreva em detalhes o que se altera na figura e também o que se mantém.
R: Mantem a ~~(figura)~~ figura só mudo a posição

d) A partir dessa construção obtida por você, o que é possível dizer a respeito.
R: Que é uma forma geometrica coposta por traços e pontos

e) É possível obter outras figuras a partir dessa construída por você?
R: Sim

Fonte: Autora do trabalho

Figura 10 – Registro no roteiro da atividade 1 no Geogebra - Aluno C


a) Após realizar essa construção, que nome você atribuiria a ela?
R: Quadrilátero

b) Escreva em detalhes como você descreveria sua construção a um colega se o mesmo não a estivesse observando.
R: É um quadrilátero com quatro lados iguais, que, em cada vértice tem um ponto A, B, C, e D

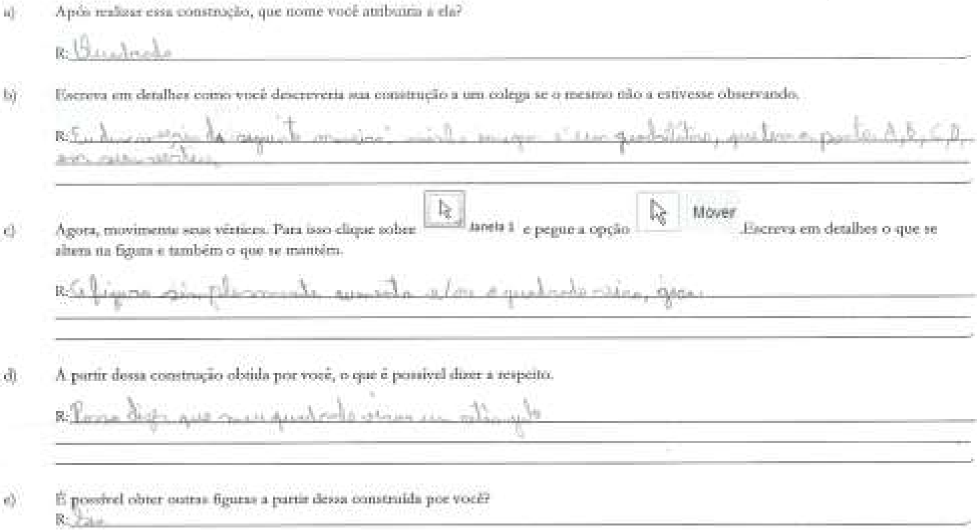
c) Agora, movimente seus vértices. Para isso clique sobre Janela 1 e pegue a opção Mover. Escreva em detalhes o que se altera na figura e também o que se mantém.
R: O que se altera é o tamanho da figura, e o que se mantém são os quatro lados da figura.

d) A partir dessa construção obtida por você, o que é possível dizer a respeito.
R: É possível dizer que é formado por quatro vértices e quatro lados iguais

e) É possível obter outras figuras a partir dessa construída por você?
R: Sim como o retangulo

Fonte: Autora do trabalho

Figura 11 – Registro no roteiro da atividade 1 no Geogebra - Aluno D



a) Após realizar essa construção, que nome você atribuiria a ela?

R: Quadrado

b) Escreva em detalhes como você descreveria sua construção a um colega se o mesmo não a estivesse observando.

R: [illegible]

c) Agora, movimente seus vértices. Para isso clique sobre Janela 1 e pegue a opção Mover. Escreva em detalhes o que se altera na figura e também o que se mantém.

R: A figura simplesmente [illegible]

d) A partir dessa construção obtida por você, o que é possível dizer a respeito.

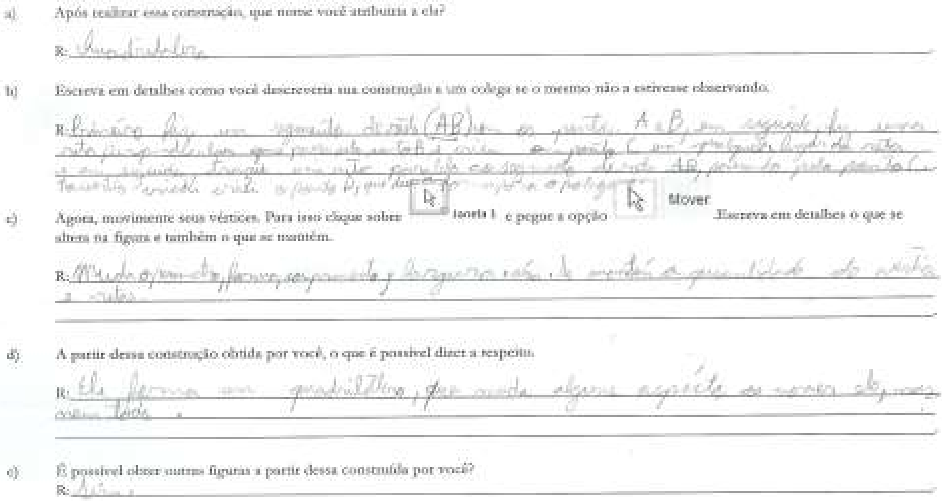
R: [illegible]

e) É possível obter outras figuras a partir dessa construída por você?

R: [illegible]

Fonte: Autora do trabalho

Figura 12 – Registro no roteiro da atividade 1 no Geogebra - Aluno E



a) Após realizar essa construção, que nome você atribuiria a ela?

R: Quadrilátero

b) Escreva em detalhes como você descreveria sua construção a um colega se o mesmo não a estivesse observando.

R: Primeiro fiz um segmento de reta (AB) com os pontos A e B, em seguida [illegible]

c) Agora, movimente seus vértices. Para isso clique sobre Janela 1 e pegue a opção Mover. Escreva em detalhes o que se altera na figura e também o que se mantém.

R: [illegible]

d) A partir dessa construção obtida por você, o que é possível dizer a respeito.

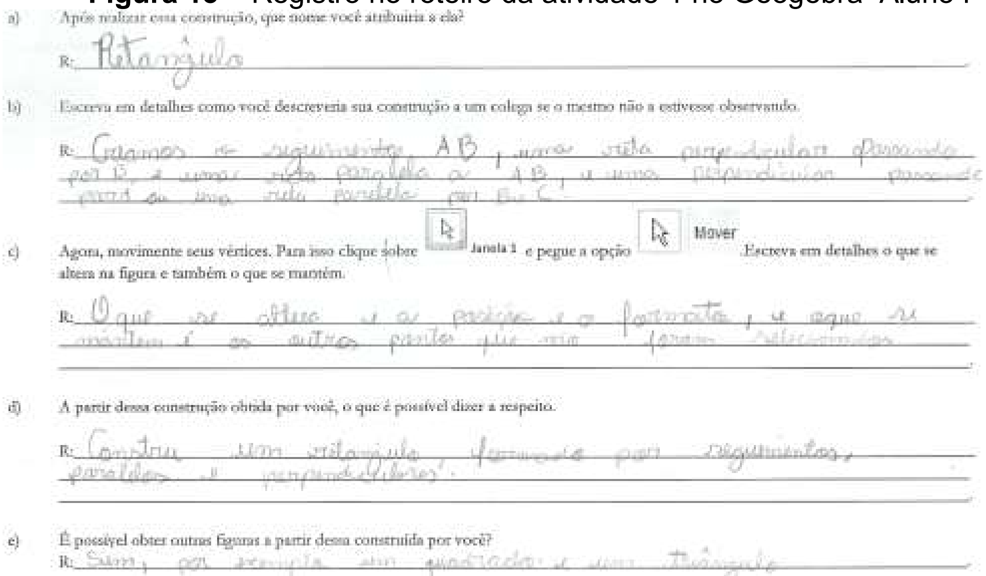
R: Ele forma um quadrilátero, [illegible]

e) É possível obter outras figuras a partir dessa construída por você?

R: [illegible]

Fonte: Autora do trabalho

Figura 13 – Registro no roteiro da atividade 1 no Geogebra Aluno F



a) Após realizar essa construção, que nome você atribuiria a ela?

R: Retângulo

b) Escreva em detalhes como você descreveria sua construção a um colega se o mesmo não a estivesse observando.

R: Criamos o segmento AB, uma reta perpendicular passando por B, e uma reta paralela a AB, e uma perpendicular passando [illegible]

c) Agora, movimente seus vértices. Para isso clique sobre Janela 1 e pegue a opção Mover. Escreva em detalhes o que se altera na figura e também o que se mantém.

R: O que se altera é a posição e o formato, e o que se mantém é os outros pontos que não foram selecionados.

d) A partir dessa construção obtida por você, o que é possível dizer a respeito.

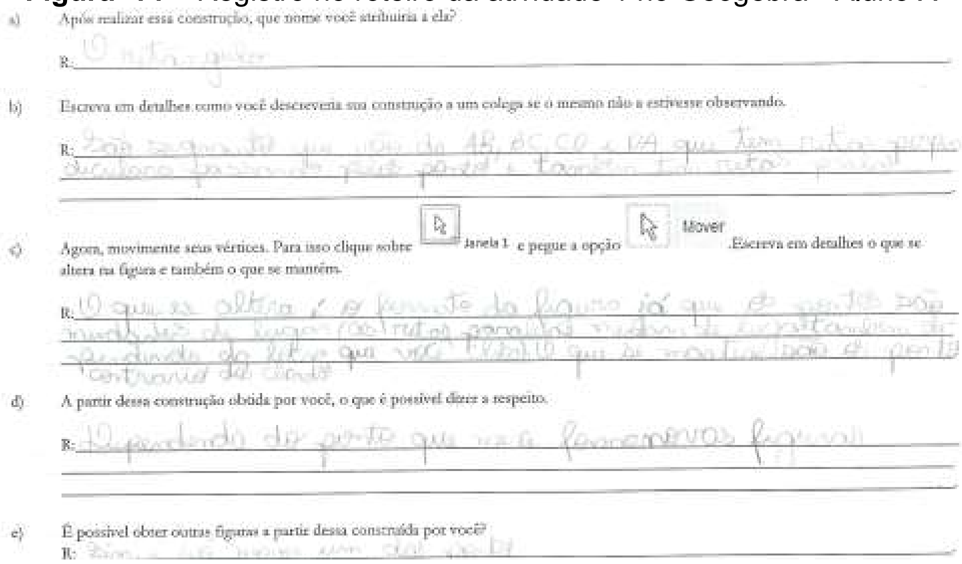
R: Construí um retângulo, formado por segmentos, paralelos e perpendiculares.

e) É possível obter outras figuras a partir dessa construída por você?

R: Sim, por exemplo um quadrado e um triângulo

Fonte: Autora do trabalho

Figura 14 – Registro no roteiro da atividade 1 no Geogebra - Aluno X



a) Após realizar essa construção, que nome você atribuiria a ela?

R: O retângulo

b) Escreva em detalhes como você descreveria sua construção a um colega se o mesmo não a estivesse observando.

R: São segmentos que vão de AB, BC, CD e DA que têm retas perpendiculares passando pelos pontos e também têm retas paralelas [illegible]

c) Agora, movimente seus vértices. Para isso clique sobre Janela 1 e pegue a opção Mover. Escreva em detalhes o que se altera na figura e também o que se mantém.

R: O que se altera é o formato da figura já que os pontos são mudados de lugar [illegible]

d) A partir dessa construção obtida por você, o que é possível dizer a respeito.

R: Dependendo do ponto que mexe formam novas figuras

e) É possível obter outras figuras a partir dessa construída por você?

R: [illegible]

Fonte: Autora do trabalho

Considerações sobre a tarefa: as respostas apresentadas nas figuras anteriores são representativas de 16 dos 26 alunos, ou seja, as respostas de qualquer um dos 16 alunos recaem, por semelhança, dentro de alguma apresentada anteriormente. É claro que existem variações no vocabulário, mas não no conteúdo.

Para a pergunta:

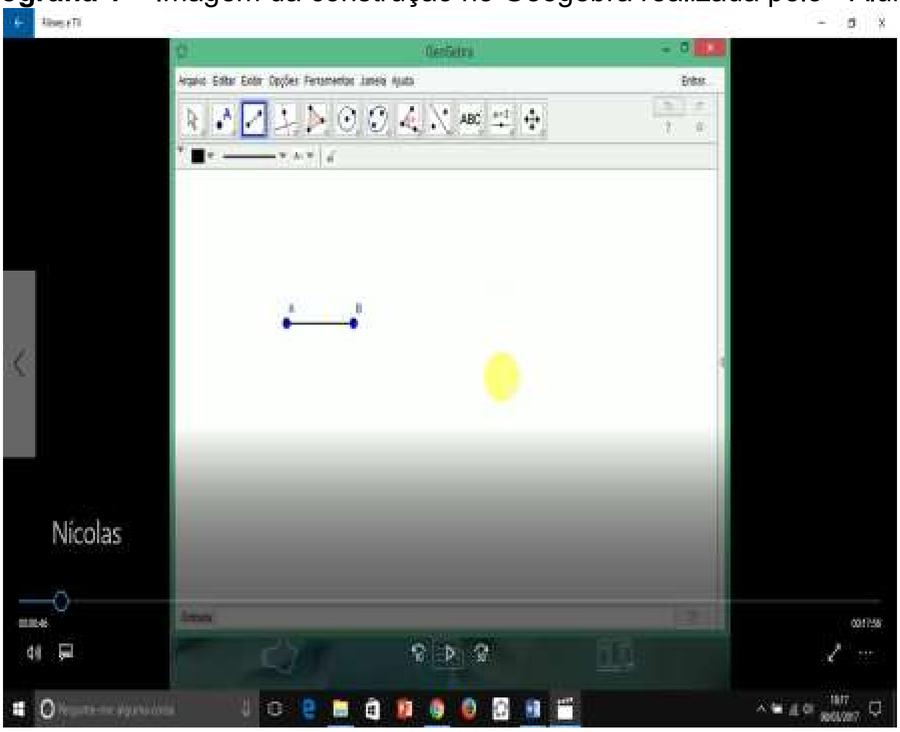
- a) Após realizar essa construção, que nome atribuiria a ela?

Respostas: Um quadrilátero, um quadrado, um retângulo, WWK4, ...

Verifica-se que a maioria dos alunos conseguiu finalizar sua tarefa e que após seguirem as instruções do roteiro e finalizarem suas construções, chegaram, mesmo que atribuindo nomes distintos à figura obtida por eles, ao objetivo da tarefa, que era de construir um retângulo ou um quadrado. Isso iria depender da distância que ele colocaria o ponto C para continuar e concluir a construção.

A seguir, é possível verificar como dois alunos procederam para realizar essa atividade. É claro que alguns tiveram mais dificuldades que outros e que foi preciso recomeçar a construção, pois nunca tinham tido acesso ao software Geogebra. Devido ao fato de estarem com um gravador de tela, foi possível verificar o andamento dessa atividade.

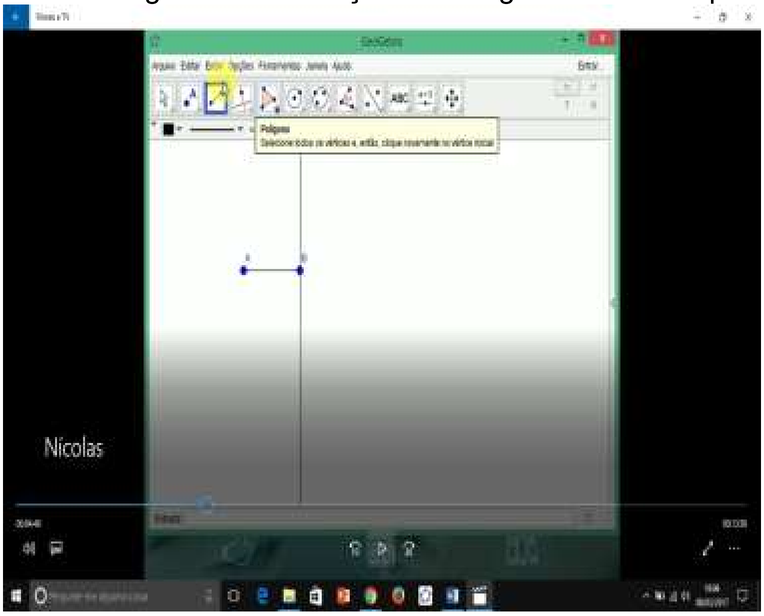
Fotografia 1 – Imagem da construção no Geogebra realizada pelo - Aluno D



Fonte: Autora do trabalho

A imagem da fotografia 1 ilustra o momento em que o aluno D utiliza a ferramenta “segmento de reta” e cria a representação do segmento AB.

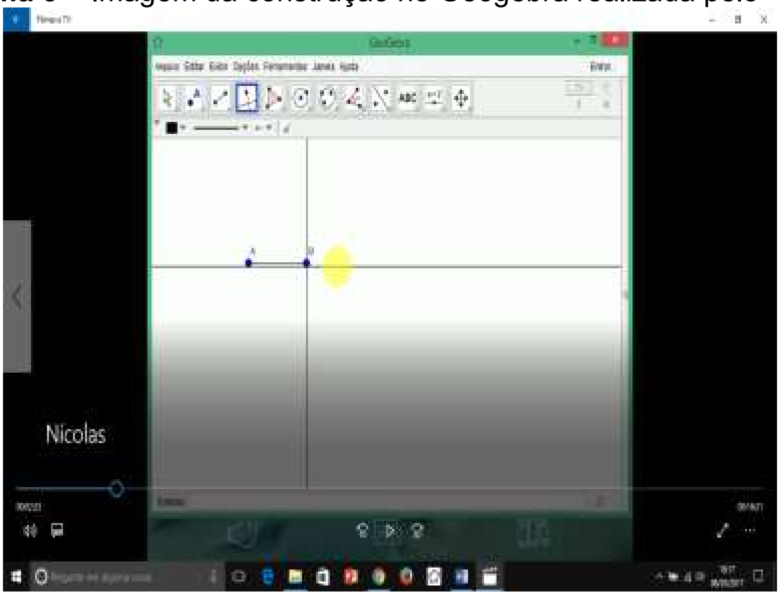
Fotografia 2 – Imagem da construção no Geogebra realizada pelo - Aluno D



Fonte: Autora do trabalho

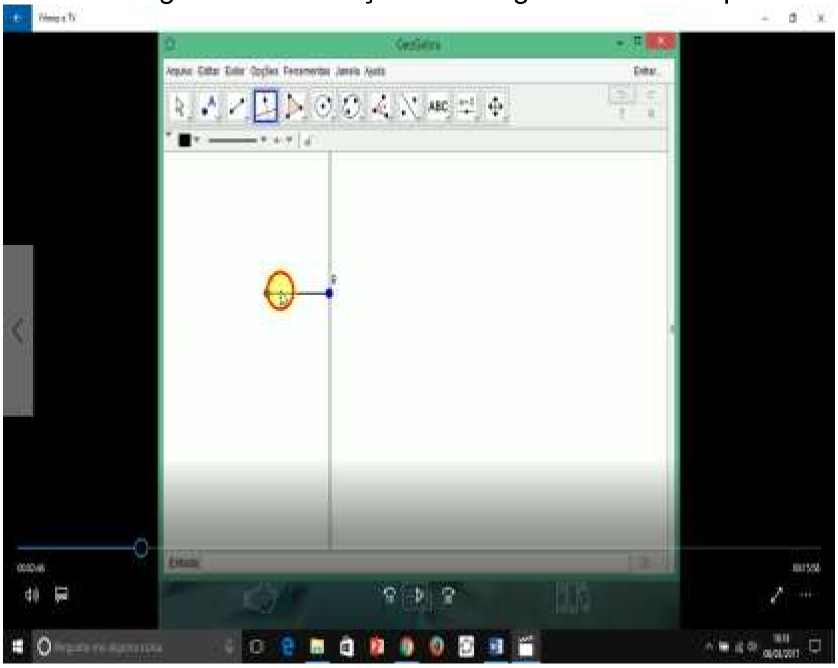
A imagem da fotografia 2 ilustra o momento em que o aluno realiza a construção da perpendicular passando pelo ponto B.

Fotografia 3 – Imagem da construção no Geogebra realizada pelo - Aluno D



Fonte: Autora do trabalho

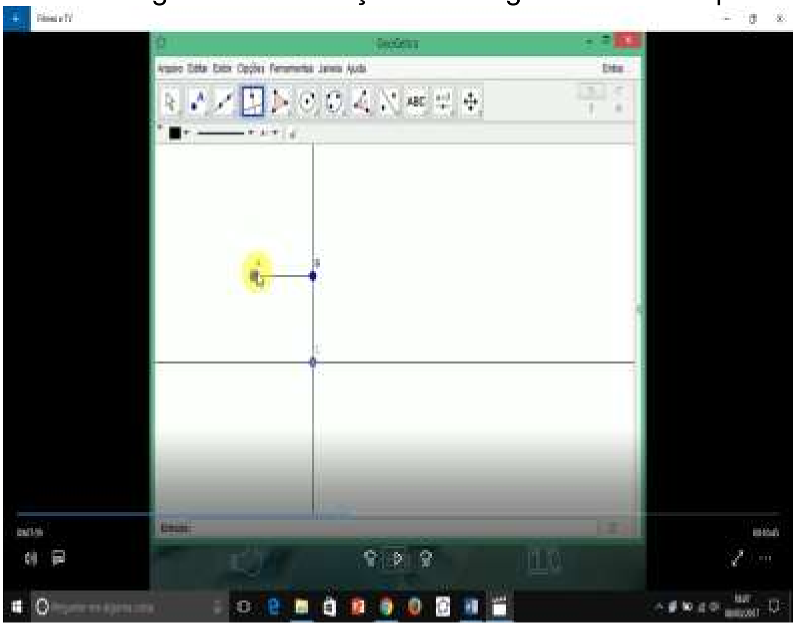
Fotografia 4 – Imagem da construção no Geogebra realizada pelo - Aluno D



Fonte: Autora do trabalho

A fotografia 3 mostra que o aluno se equivocou e na fotografia 4 pode-se observar que o aluno percebeu o erro e o corrigiu.

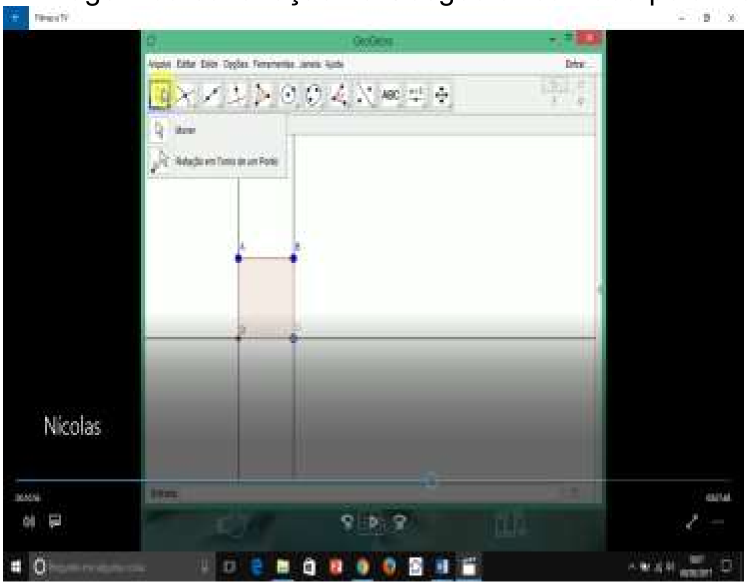
Fotografia 5 – Imagem da construção no Geogebra realizada pelo - Aluno D



Fonte: Autora do trabalho

Na fotografia 5, é possível verificar a obtenção do ponto C na perpendicular construída anteriormente e o início da construção da perpendicular passando pelo ponto A.

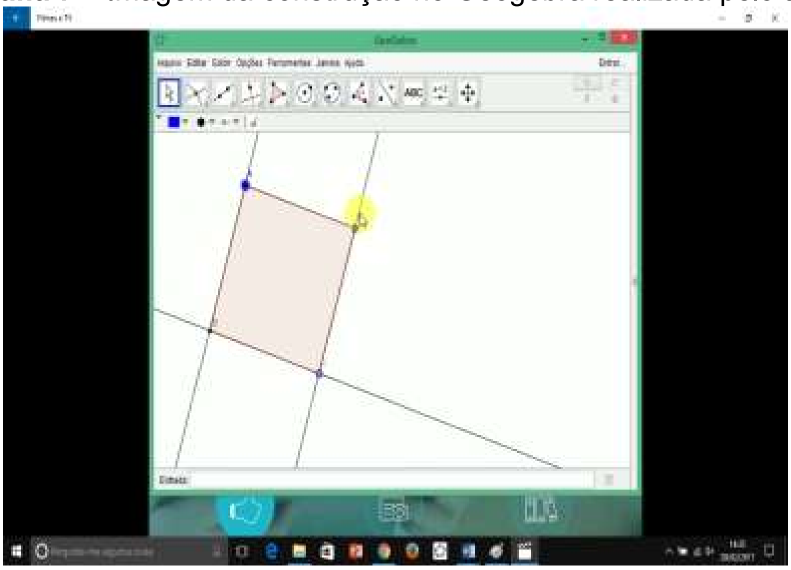
Fotografia 6 – Imagem da construção no Geogebra realizada pelo Aluno D



Fonte: Autora do trabalho

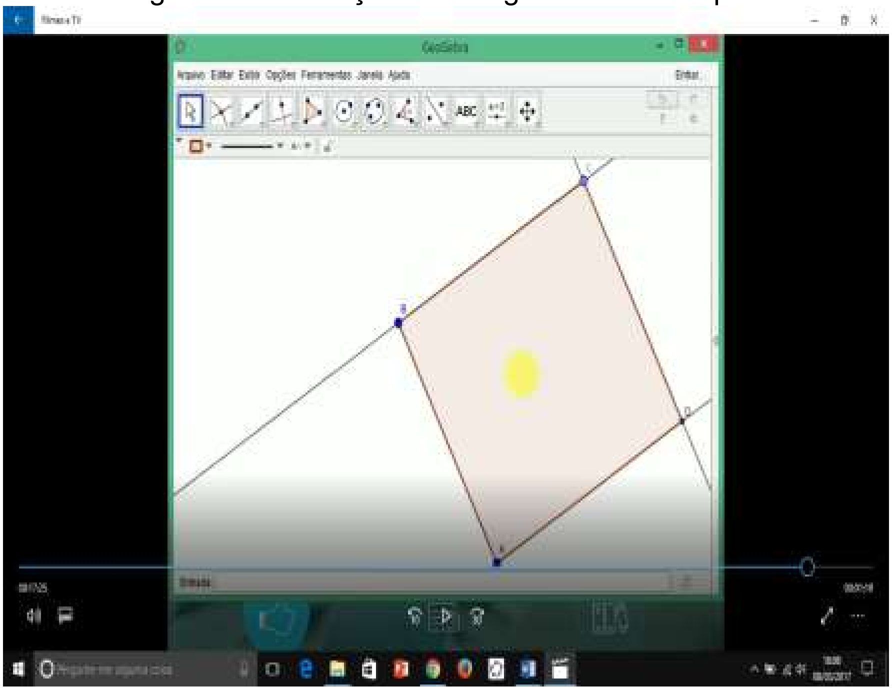
A fotografia 6 mostra a execução da tarefa, já com o polígono contruído.

Fotografia 7 – Imagem da construção no Geogebra realizada pelo aluno D



Fonte: Autora do trabalho

Fotografia 8 – Imagem da construção no Geogebra realizada pelo aluno D

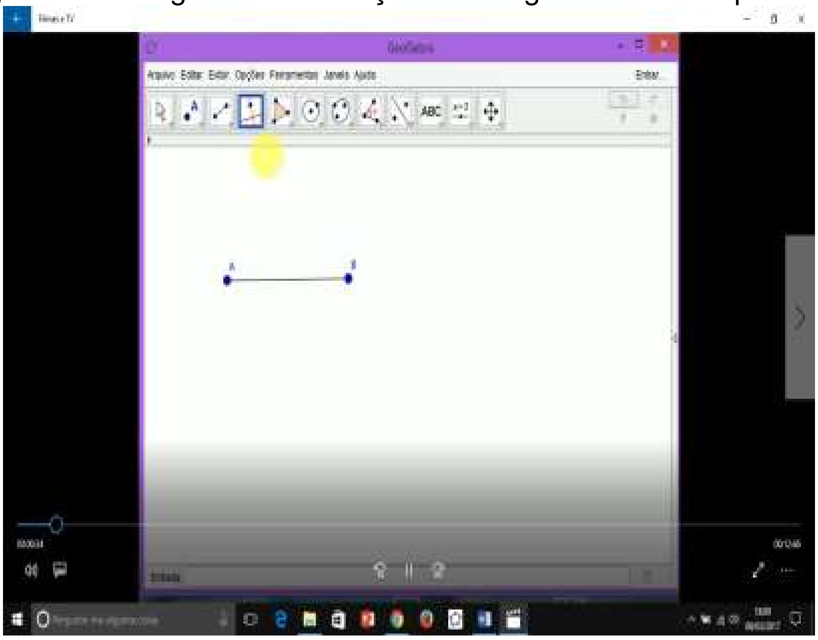


Fonte: Autora do trabalho

O aluno D, realizou a construção com facilidade, como é possível observar pelas imagens anteriores. O vídeo permite ter uma ideia de como o aluno pensou e realizou sua construção, se encontrou dificuldades, onde errou e teve de voltar. Mesmo não recebendo orientação, o aluno percebe pelas instruções do roteiro que tinha de chegar a uma figura geométrica.

Vejamos algumas etapas da realização da mesma tarefa pelo aluno X.

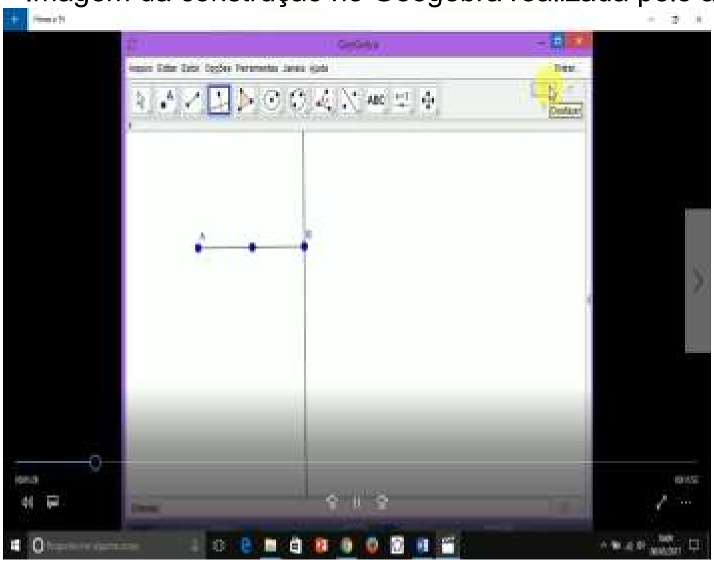
Fotografia 9 – Imagem da construção no Geogebra realizada pelo aluno X



Fonte: Autora do trabalho

Na fotografia 9, observamos a construção do segmento $\overline{AB}$.

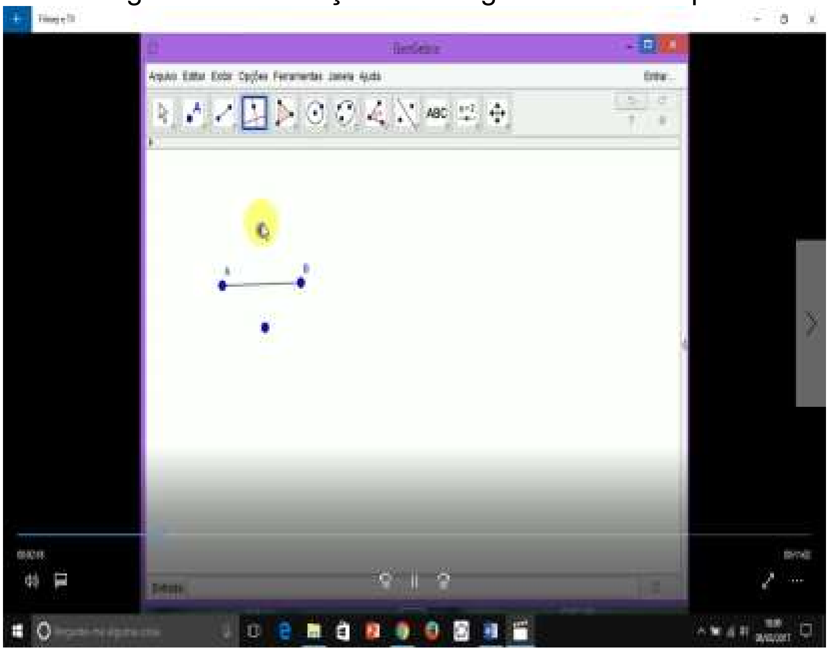
Fotografia 10 – Imagem da construção no Geogebra realizada pelo aluno X



Fonte: Autora do trabalho

A Fotografia 10, mostra a execução da perpendicular passando pelo ponto B e um erro cometido.

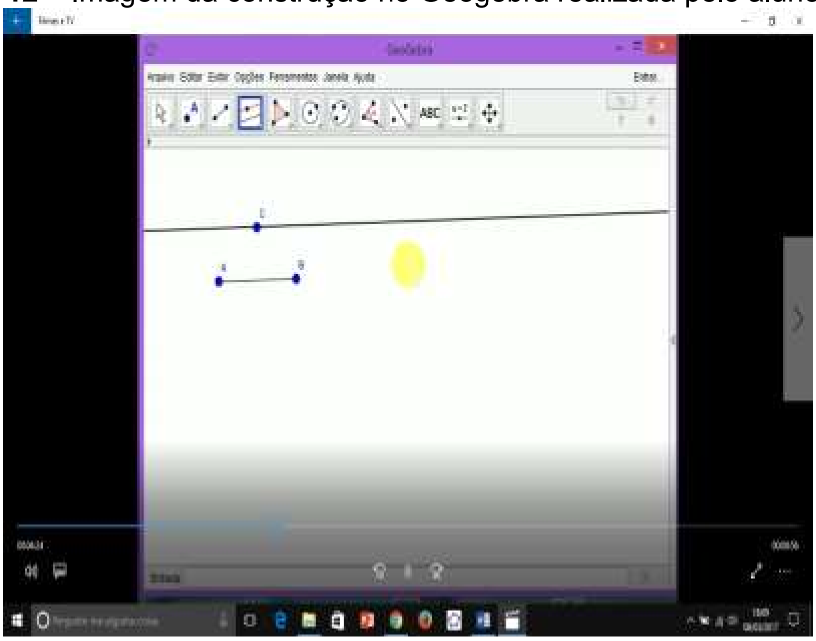
Fotografia 11 – Imagem da construção no Geogebra realizada pelo aluno X



Fonte: Autora do trabalho

A Fotografia 11, ilustra que o aluno modificou sua construção ao compararmos com a fotografia 10.

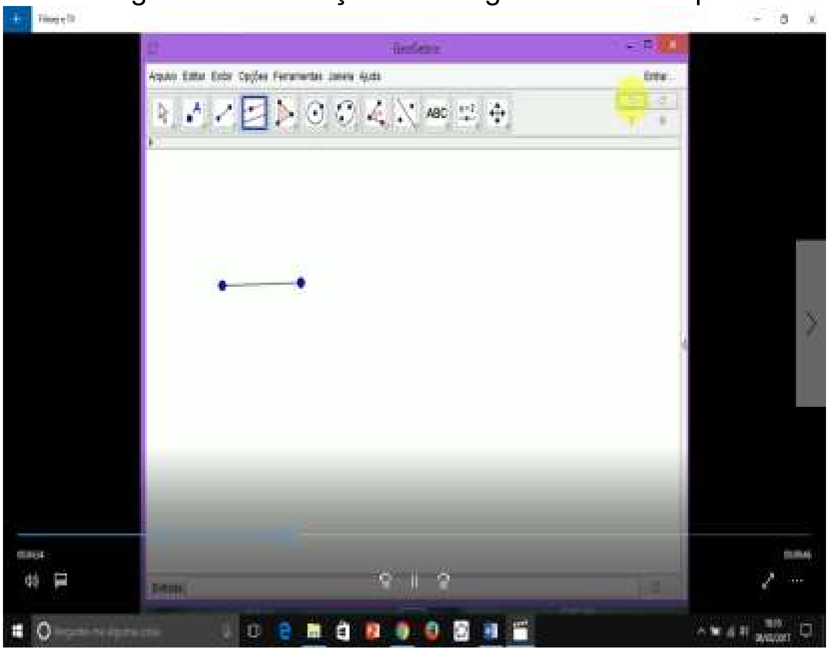
Fotografia 12 – Imagem da construção no Geogebra realizada pelo aluno X



Fonte: Autora do trabalho

Observa-se na Fotografia 12 a auxência da reta perpendicular passando pelo ponto B e uma reta paralela ao segmento $\overline{AB}$ e o ponto C pertencente a a essa reta.

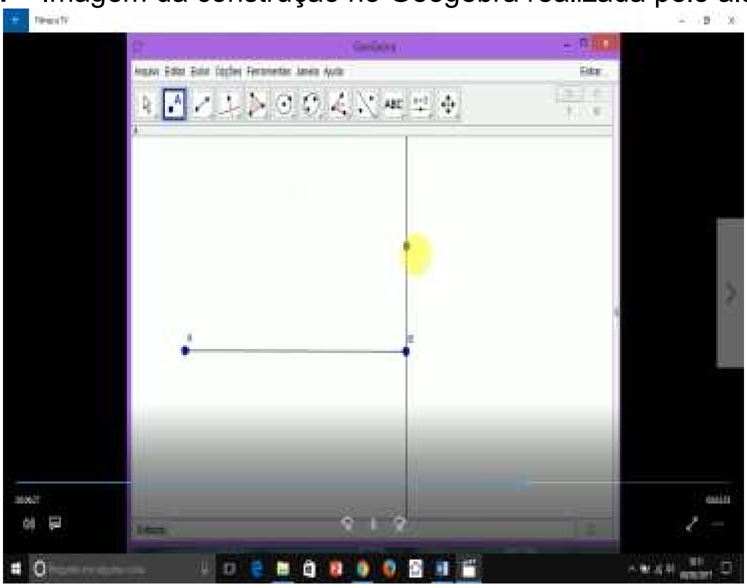
Fotografia 13 – Imagem da construção no Geogebra realizada pelo aluno X



Fonte: Autora do trabalho

Pela Fotografia 13, constata-se que o aluno percebeu o equívoco em sua construção e reinicou sua construção.

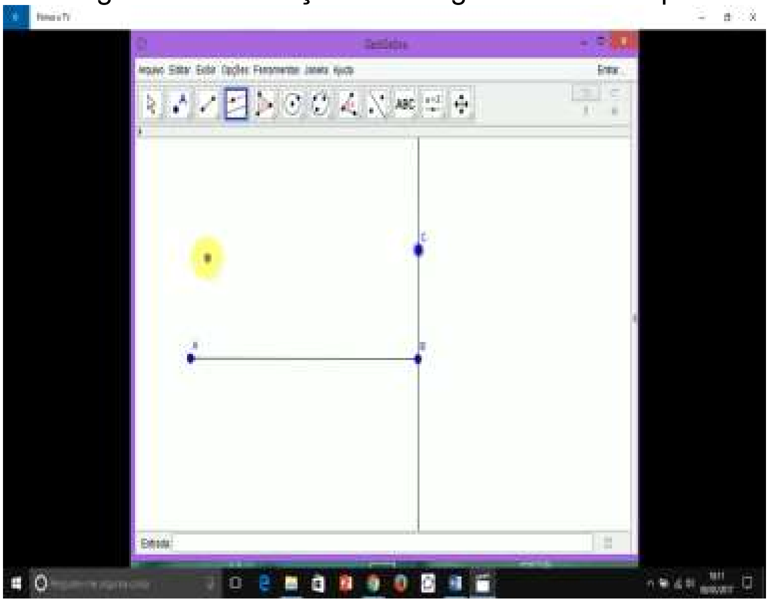
Fotografia 14 – Imagem da construção no Geogebra realizada pelo aluno X



Fonte: Autora do trabalho

Agora, pela Fotografia 14 começamos a visualizar o progresso da tarefa pela perpendicular passando pelo ponto B.

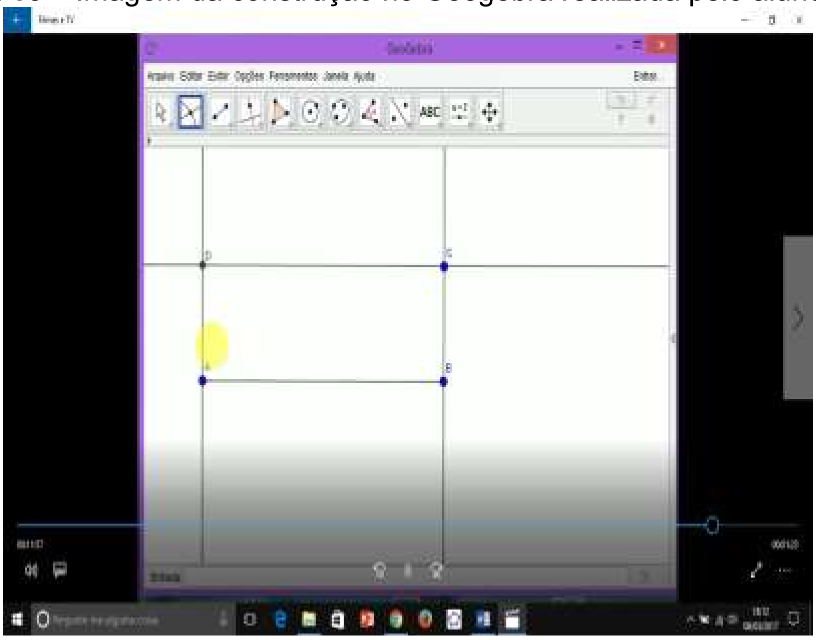
Fotografia 15 – Imagem da construção no Geogebra realizada pelo aluno X



Fonte: Autora do trabalho

A construção da reta perpendicular passando pelo ponto A tem seu início na Fotografia 15.

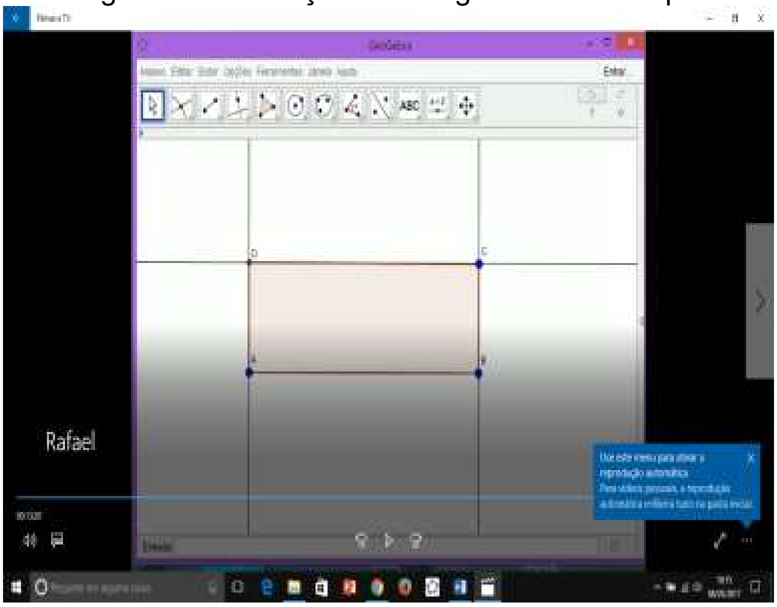
Fotografia 16 – Imagem da construção no Geogebra realizada pelo aluno X



Fonte: Autora do trabalho

Verifica-se o progresso da tarefa pela Fotografia 16, com a obtenção do polígono ABCD.

Fotografia 17 – Imagem da construção no Geogebra realizada pelo aluno X



Fonte: Autora do trabalho

As imagens nas Fotografias de 9 a 17, ilustram a maneira de interpretar e executar a tarefa pelo aluno X. O aluno por conhecer algumas formas geométricas percebe que sua construção não condiz com as orientações do roteiro e reinicia sua tarefa e a conclui com êxito, conforme pode-se observar pelas imagens. Justifica muito bem suas construções nas respostas do seu roteiro como é possível ver na figura 14.

Considerações sobre a tarefa: Com a análise dos vídeos foi possível observar que a tarefa foi realizada em conformidade com seus objetivos. Pois, 20 dos 26 alunos finalizaram suas construções e entregaram o roteiro com as respostas.

Ao comparar os vídeos com as respostas nos roteiros percebe-se que muitos alunos ainda não estão no nível 2 de Van Hiele, pois executaram a tarefa, porém no momento de atribuir um nome para figura construída ainda faltava o conhecimento para distinguí-la das formas geométricas conhecidas por ele.

Poucos alunos não conseguiram finalizar a tarefa. Apenas dois alunos faltaram no dia da aplicação, assim nossa amostra para essa tarefa fica sendo de 24 alunos. Desse número então, apenas 2 alunos deixaram de realizar a tarefa, por falta de vontade mesmo, pois quando perguntado o porque de não realizarem, responderam que não tiveram interesse pela atividade. Dos 24 alunos 3 não conseguiram terminar as construções por não compreenderem as instruções e não terem habilidade com o software e 3 alunos apresentaram construções e respostas bem distintas das apresentadas aqui.

Analisando essas construções, foi possível observar que os mesmos 8 alunos que deixaram de concluir a tarefa por algum motivo foram os 8 que no teste dos níveis de van Hiele não atingiram nenhum nível. Já o aluno B, que no teste ficou classificado no nível 1 de van Hiele teve uma pequena evolução no pensamento geométrico, pois conseguiu finalizar sua construção com certa dificuldade e chegou a nomear a figura pelos vértices e a nomeou quando solicitado para descrever sua figura, conforme mostra a figura 9.

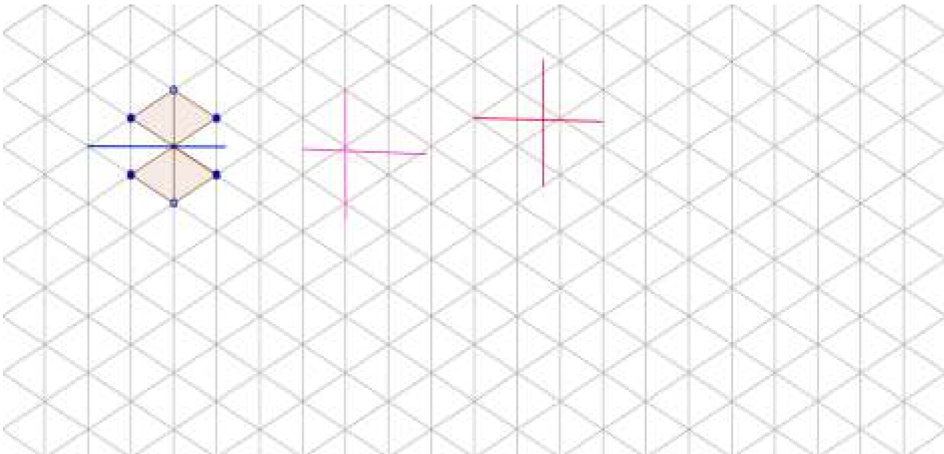
3.3 TAREFA 2

Cinquenta dias após a realização da primeira tarefa os alunos realizaram a segunda tarefa com a duração de 110 minutos. A tarefa 2 (apêndice B) foi semelhante a primeira, porém com objetivo de verificar a evolução quantitativa da aprendizagem sobre a nomeação e classificação dos triângulos e quadriláteros, almejando identificar indicativos de alguma evolução em termo dos níveis de Van Hiele após a tarefa anterior com o uso do software Geogebra.

Para o desenvolvimento e aplicação desta tarefa foi utilizado novamente o laboratório de informática do colégio e um outro roteiro com as novas instruções e questões a serem seguidas e executadas.

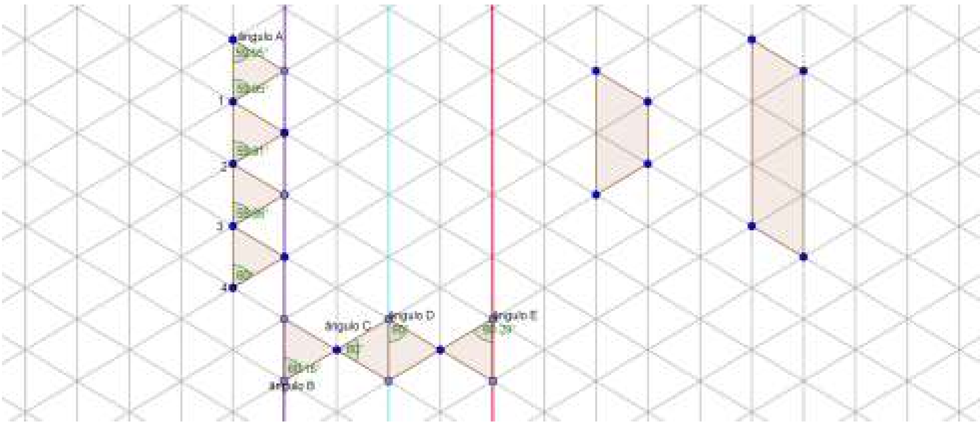
Porém, nossos objetivos para essa tarefa não foram alcançados. A malha triangular fixa do geogebra e as orientações ficaram confusas para os alunos que demonstravam estarem completamente perdidos para a execução da tarefa como mostram as ilustrações abaixo.

Figura 15 – Construção no Geogebra atividade 2 aluno A



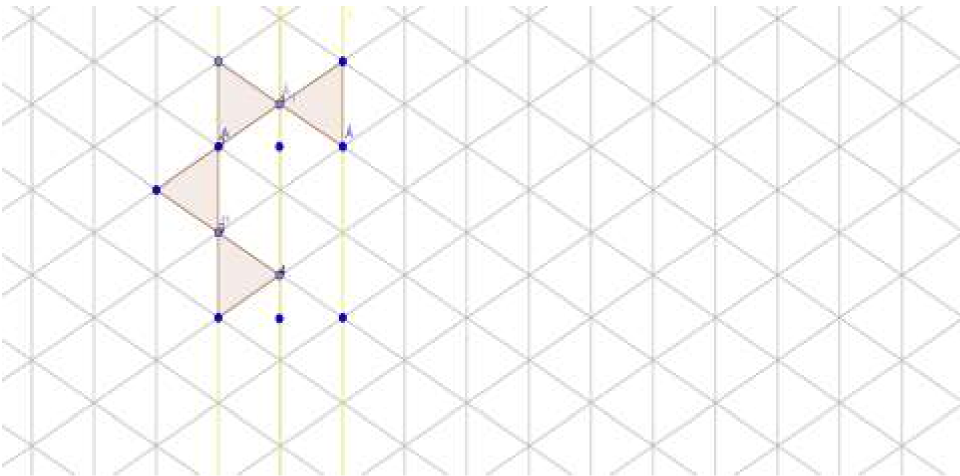
Fonte: Autora do trabalho

Figura 16 – Construção no Geogebra atividade 2 aluno B



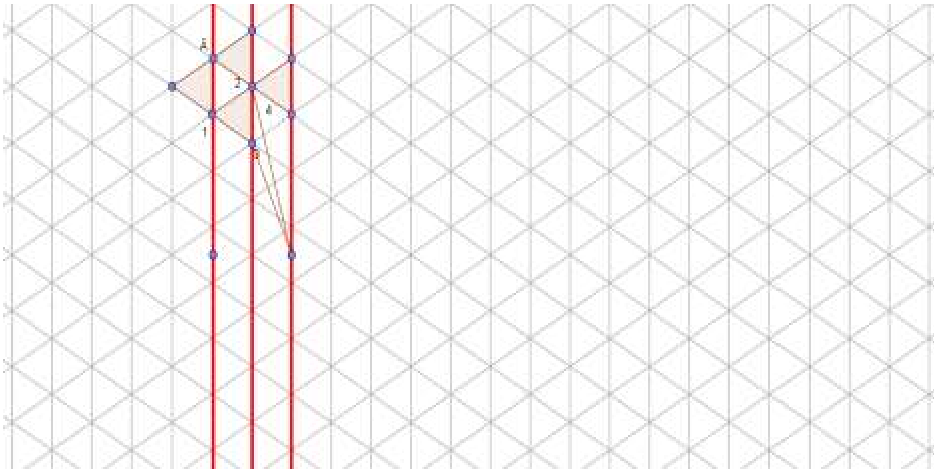
Fonte: Autora do trabalho

Figura 17 – Construção no Geogebra atividade 2 aluno C



Fonte: Autora do trabalho

Figura 18 – Construção no Geogebra atividade 2 aluno D

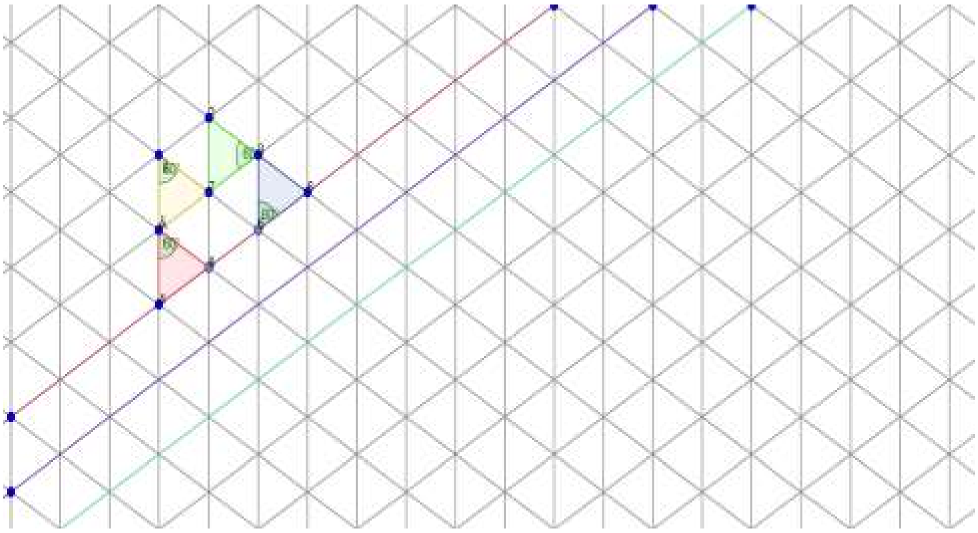


Fonte: Autora do trabalho

Figura 19 – Construção no Geogebra atividade 2 aluno E

Fonte: Autora do trabalho

Figura 20 – Construção no Geogebra atividade 2 aluno F



Fonte: Autora do trabalho

Considerações sobre a atividade: Esses poucos registros mostram como uma tarefa que, no julgamento dos investigadores, parecia ser clara em sua formulação, não foi compreendida pelos estudantes. Poucos alunos conseguiram realizar algumas construções, e nenhum aluno conseguiu finalizar a tarefa por completo como se almejava. Assim, não se teve os registros nos roteiros para que fosse possível uma análise e uma comparação com as costruções no Geogebra.

Por esse motivo, a tarefa foi totalmente reestruturada e novamente aplicada para os mesmos 26 alunos.

3.4 TAREFA 2 (REFORMULADA)

Agora, era preciso parar e analisar o que de fato não tinha dado certo, onde estava o erro que impossibilitou a execução da tarefa. O porquê dos alunos não terem conseguido realizar tal tarefa se anteriormente já haviam tido contato com o software Geogebra.

O problema de fato não era o software, mas sim a maneira em como a atividade foi pensada e estruturada. A malha triangular fixa do Geogebra não favorecia as construções. Desse modo, foi construída uma malha móvel no Geogebra e o roteiro foi reescrito para que a atividade fosse novamente aplicada, conforme consta no apêndice C.

Assim, mais uma vez os alunos foram para o laboratório e realizaram a tarefa 2, agora reformulada. Os alunos receberam o roteiro com as instruções e com as questões que deveriam responder após suas construções e sozinhos sem intervenções foram realizando suas tarefas e finalizando em até 90 minutos.

Essa tarefa não foi gravada, pois nosso objetivo era saber apenas se com o auxílio do software Geogebra os alunos progrediriam nos níveis de Van Hiele e não a habilidade de cada um deles em manusear um software.

Nas ilustrações a seguir, podemos observar que agora a maioria dos alunos conseguiu realizar a tarefa. Pois, como apresentado no gráfico 1 e na tabela 1, havia alunos que não se encaixavam em nenhum nível, outros no nível 1, 2 ou 3 de Van Hiele e com as tarefas propostas esses alunos apresentaram uma melhora significativa quanto ao pensamento geométrico.

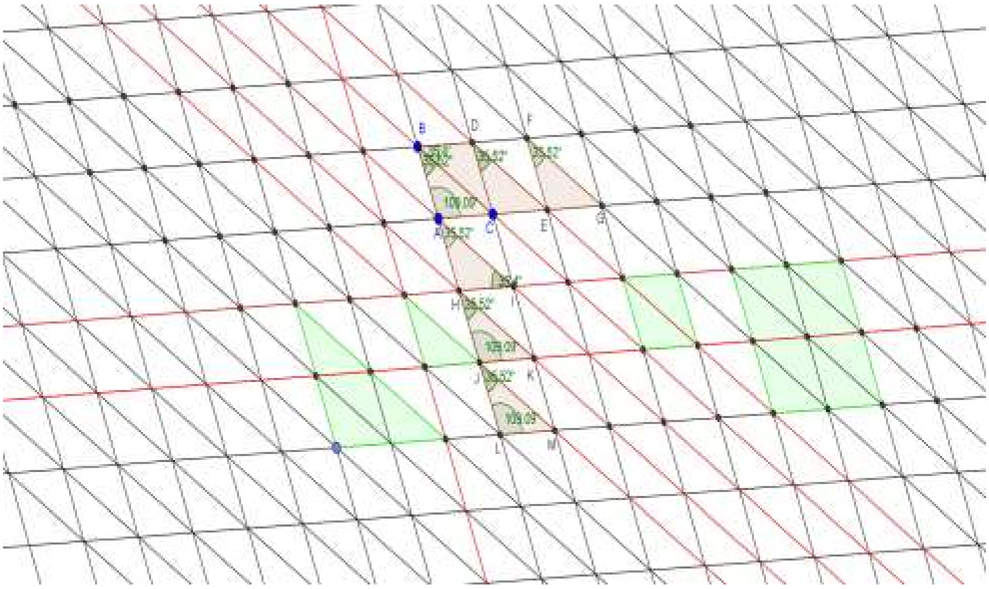
Os alunos ainda não sabem escrever matematicamente seus pensamentos ou conclusões das tarefas, mas o que escreveram como respostas nos levam a pensar que estão pensando corretamente, porém lhes faltam palavras mais adequadas, ou seja, faltam-lhes apenas vocabulário.

Assim, acredita-se pelas figuras que serão apresentadas a seguir, que são construções realizadas pelos alunos participantes da pesquisa, que houve sim um avanço associado ao uso do software Geogebra para os níveis de van Hiele.

O ocorrido na aplicação da tarefa 2 mostra que a confecção de atividades, mesmo levando em consideração as possíveis dificuldades dos alunos, pode resultar na necessidade de reestudo e reelaboração. A seguir apresentamos alguns registros da tarefa 2.

Registros do aluno A

Figura 21 – Construção no Geogebra Tarefa 2 reestruturada aluno A



Fonte: Autora do trabalho

Figura 22 – Roteiro Tarefa 2 reestruturada aluno A

(3) O que os ângulos $B\hat{A}C, A\hat{H}I, H\hat{J}K$ e $J\hat{L}M$ podem possuir em comum?

R: Eles apresentam uma reta em comum onde existem pontos que os ligam. São eles A, H e J.

(4) Analisando os ângulos $B\hat{A}C, D\hat{C}E, F\hat{E}G$, o que você consegue dizer sobre eles? Ou seja, comparando-os entre si, o que você observa geometricamente? E por quê?

R: Eu observo geometricamente que eles apresentam uma reta em comum onde os pontos C e E ligam os ângulos.

(5) Analisando os ângulos $A\hat{B}C, C\hat{D}E, E\hat{F}G$, o que você consegue dizer sobre eles? Ou seja, comparando-os entre si, o que você observa geometricamente? E por quê?

R: Eu observo que eles apresentam o ponto C e o ponto E em comum mas não há mais a reta que os ligam.

(6) Analisando os ângulos $B\hat{C}A, D\hat{E}C, F\hat{G}E$, o que você consegue dizer sobre eles? Ou seja, comparando-os entre si, o que você observa geometricamente? E por quê?

R: Eles são formados por pontos diferentes. São eles o B, o D, e o F mas continuam apresentando uma reta e os pontos C e E em comum.

(7) Agora, você irá medir os ângulos: $B\hat{A}C, D\hat{C}E, F\hat{E}G$, $A\hat{B}C, C\hat{D}E, E\hat{F}G$ e $B\hat{C}A, D\hat{E}C, F\hat{G}E$. Para fazer isso, você deve clicar na 8ª janela do geogebra e escolha a primeira opção ***ângulos*** para medir os ângulos. Para isso você deve clicar nos três vértices de cada triângulo, deixando o ângulo que quer medir para ser clicado em segundo lugar, obedecendo o sentido horário.

(8) O que você constatou agora após realizar essas medições à respeito dos ângulos e dos triângulos?

R: Eu constatei agora que todos os ângulos e triângulos apresentam a mesma medida.

Fonte: Autora do trabalho

Figura 23 – Roteiro Tarefa 2 reestruturada aluno A

(9) Agora, você irá mexer seus triângulos por meio de seus vértices. O que mudou e o que se manteve após fazer isso?

R: Os pontos em comum são os mesmos, os outros mudaram.

<u>**Observação:**</u> **Para as construções os itens a seguir, considere cada unidade de área como sendo a figura que compõe a malha, isto é, a figura que se repete nela.**

(10) Construa um triângulo com uma unidade de área.
(11) Construa um triângulo com quatro unidades de área.
(12) O que você observa em relação as áreas e aos seus perímetros? E em relação aos ângulos desses dois triângulos construídos por você, existe algo em comum? Por quê?

R: A área do triângulo com 3 unidades é 3 vezes maior e seu perímetro também. O ângulo eu apresentar a mesma medida.

(13) Como você justificaria sua resposta ao item anterior?

R: Isso acontece porque os pontos que ligam os triângulos são iguais

(14) Construa um polígono com duas unidades de área.
(15) Construa um polígono com oito unidades de área.
(16) O que você observa em relação as áreas e aos seus perímetros? E em relação aos ângulos desses dois polígonos construídos por você, existe algo em comum? Por quê?

R: A área também é 4 vezes maior e o perímetro também. Sim, o ângulo também apresenta as mesmas medidas

(17) Como você justificaria sua resposta ao item anterior?

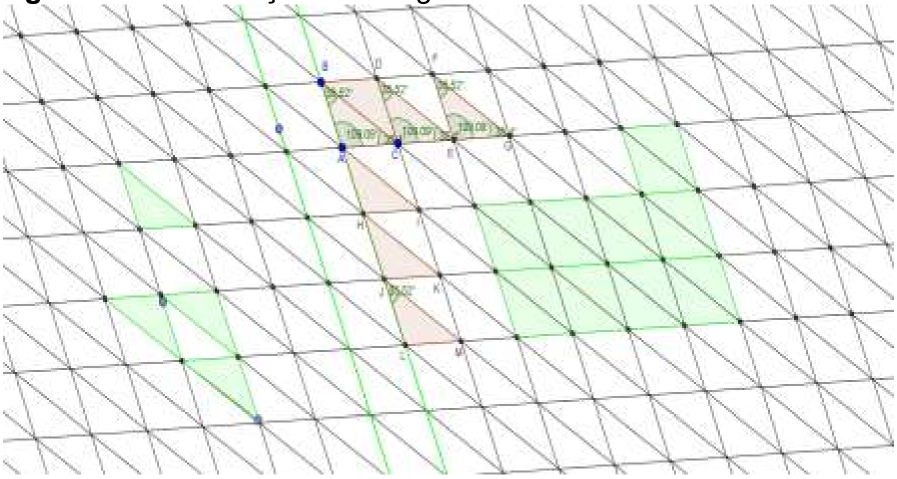
R: Isso acontece porque os vértices onde os pontos que ligam os polígonos são iguais,

Fonte: Autora do trabalho

Comparando as duas construções realizadas pelo aluno A, nas atividades que tinham o mesmo objetivo, porém formas distintas percebemos sua evolução. Na primeira atividade 2, o aluno parecia estar perdido como mostra figura 15 e seu roteiro sem registro algum. Agora, observa-se a conclusão da tarefa pelas construções apresentadas nas figuras 21, 22 e 23, como também pelas respostas em seu roteiro. O progresso do nível 1 (reconhecimento) para o nível 2 (análise) fica evidente quando se compara a atividade 2 com o teste do início da nossa pesquisa, onde o aluno foi classificado nível 1, levando-se em consideração Nasser (2010). O conhecimento geométrico começa a progredir positivamente, o que nos leva a pensar que o software Geogebra está contribuindo para tal avanço.

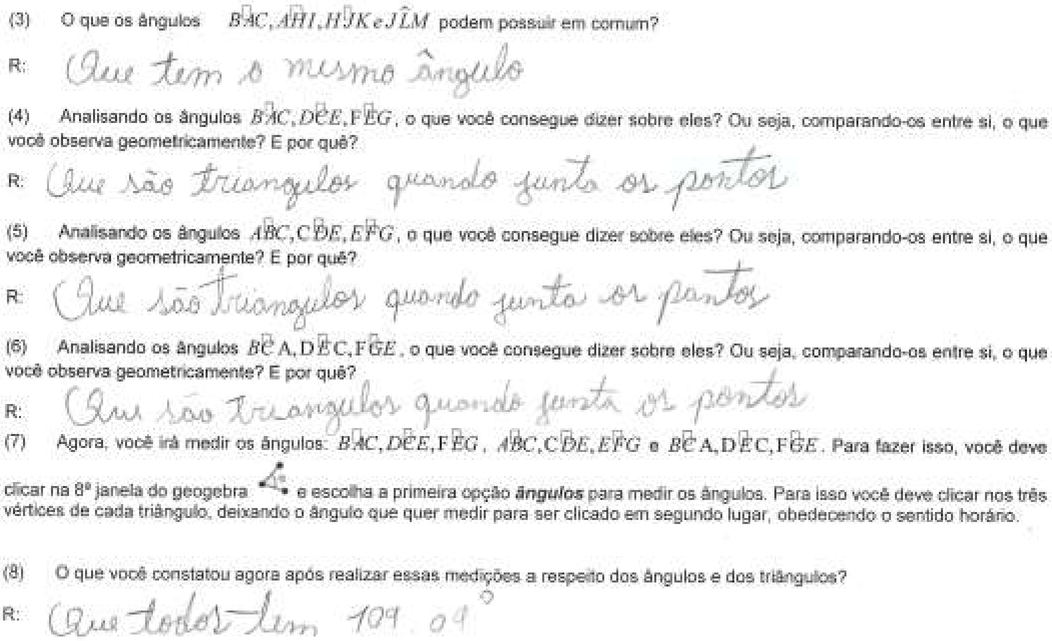
Registros do aluno B

Figura 24 – Construção no Geogebra Tarefa 2 reestruturada aluno B



Fonte: Autora do trabalho

Figura 25 – Roteiro Tarefa 2 reestruturada aluno B



(3) O que os ângulos $B\hat{A}C, A\hat{H}I, H\hat{J}K$ e $J\hat{L}M$ podem possuir em comum?

R: Que tem o mesmo ângulo

(4) Analisando os ângulos $B\hat{A}C, D\hat{C}E, F\hat{E}G$, o que você consegue dizer sobre eles? Ou seja, comparando-os entre si, o que você observa geometricamente? E por quê?

R: Que são triangulos quando junta os pontos

(5) Analisando os ângulos $A\hat{B}C, C\hat{D}E, E\hat{F}G$, o que você consegue dizer sobre eles? Ou seja, comparando-os entre si, o que você observa geometricamente? E por quê?

R: Que são triangulos quando junta os pontos

(6) Analisando os ângulos $B\hat{C}A, D\hat{E}C, F\hat{G}E$, o que você consegue dizer sobre eles? Ou seja, comparando-os entre si, o que você observa geometricamente? E por quê?

R: Que são triangulos quando junta os pontos

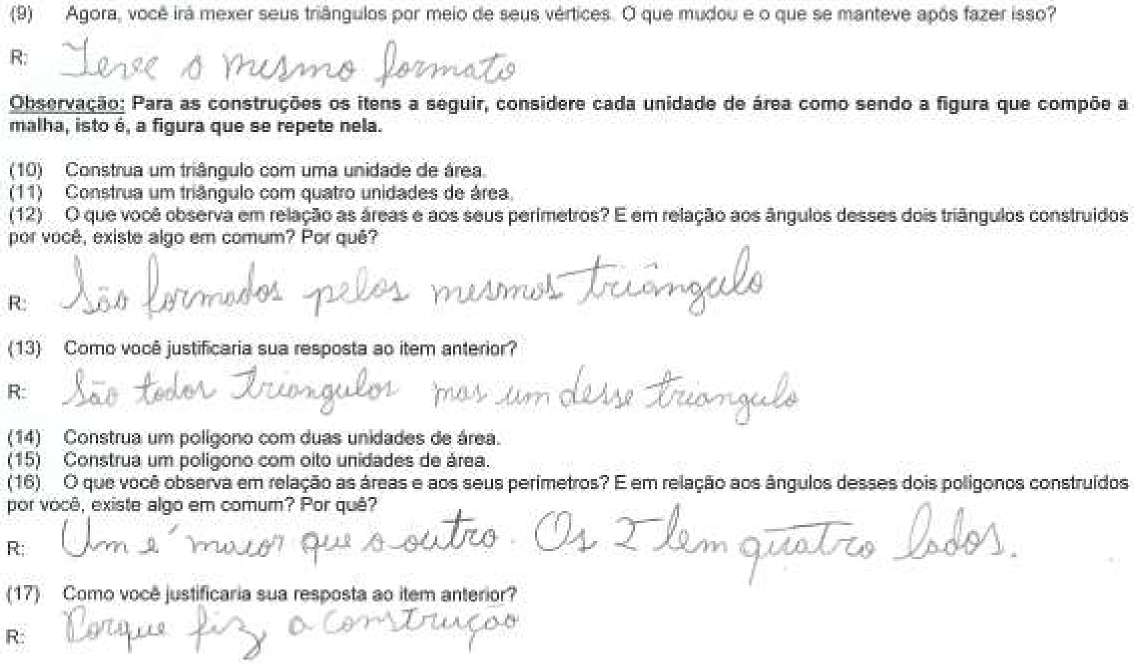
(7) Agora, você irá medir os ângulos: $B\hat{A}C, D\hat{C}E, F\hat{E}G$, $A\hat{B}C, C\hat{D}E, E\hat{F}G$ e $B\hat{C}A, D\hat{E}C, F\hat{G}E$. Para fazer isso, você deve clicar na 8ª janela do geogebra e escolha a primeira opção *ângulos* para medir os ângulos. Para isso você deve clicar nos três vértices de cada triângulo, deixando o ângulo que quer medir para ser clicado em segundo lugar, obedecendo o sentido horário.

(8) O que você constatou agora após realizar essas medições a respeito dos ângulos e dos triângulos?

R: Que todos tem 109,09°

Fonte: Autora do trabalho

Figura 26 – Roteiro Tarefa 2 reestruturada aluno B


(9) Agora, você irá mexer seus triângulos por meio de seus vértices. O que mudou e o que se manteve após fazer isso?

R: Teve o mesmo formato

<u>Observação:</u> **Para as construções os itens a seguir, considere cada unidade de área como sendo a figura que compõe a malha, isto é, a figura que se repete nela.**

(10) Construa um triângulo com uma unidade de área.
(11) Construa um triângulo com quatro unidades de área.
(12) O que você observa em relação as áreas e aos seus perímetros? E em relação aos ângulos desses dois triângulos construídos por você, existe algo em comum? Por quê?

R: São formados pelos mesmos triângulo

(13) Como você justificaria sua resposta ao item anterior?

R: São todos Triangulos mas um desse triangulo

(14) Construa um polígono com duas unidades de área.
(15) Construa um polígono com oito unidades de área.
(16) O que você observa em relação as áreas e aos seus perímetros? E em relação aos ângulos desses dois polígonos construídos por você, existe algo em comum? Por quê?

R: Um é maior que o outro. Os 2 tem quatro lados.

(17) Como você justificaria sua resposta ao item anterior?

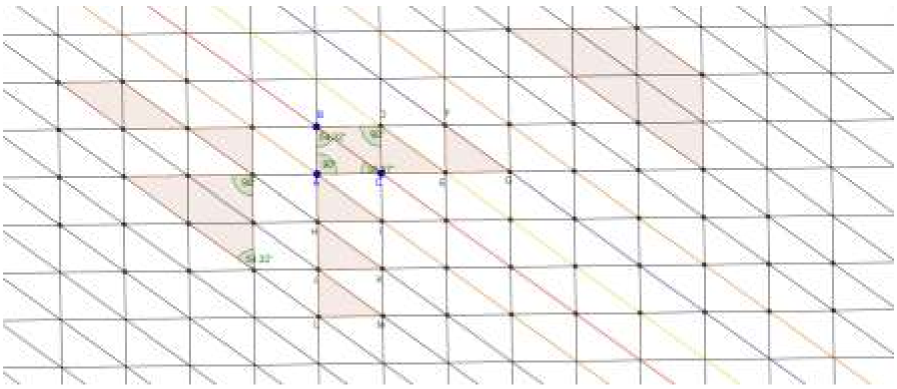
R: Porque fiz a construção

Fonte: Autora do trabalho

Analisando os registros do aluno B, mesmo percebendo que em seus registros ainda falta a construção de conceitos geométricos, nota-se que, com o novo roteiro, o aluno conseguiu realizar quase todas as construções. Assim, o aluno começa a transposição entre o nível 1 (reconhecimento) para o nível 2 (análise) de Van Hiele, conforme Nasser (2010). Assim, constata-se que o software Geogebra quando bem direcionado é capaz de conduzir progressivamente um saber geométrico para o aluno, conforme ilustram as figuras 23, 24 e 26.

Registros do aluno C

Figura 27 – Construção no Geogebra Tarefa 2 reestruturada aluno C



Fonte: Autora do trabalho

Figura 28 – Roteiro Tarefa 2 reestruturada aluno C

(3) O que os ângulos $B\hat{A}C, A\hat{H}I, H\hat{J}K$ e $J\hat{L}M$ podem possuir em comum?

R: Esses ângulos possuem 109.09°, a mesma medida, além de possuírem vértices em comum

(4) Analisando os ângulos $B\hat{A}C, D\hat{C}E, F\hat{E}G$, o que você consegue dizer sobre eles? Ou seja, comparando-os entre si, o que você observa geometricamente? E por quê?

R: Possuem a mesma medida. Formam um ângulo obtuso porque possuem ângulos acima de 90°

(5) Analisando os ângulos $A\hat{B}C, C\hat{D}E, E\hat{F}G$, o que você consegue dizer sobre eles? Ou seja, comparando-os entre si, o que você observa geometricamente? E por quê?

R: Possuem mesma medida. Formam um ângulo agudo porque medem menos de 90°

(6) Analisando os ângulos $B\hat{C}A, D\hat{E}C, F\hat{G}E$, o que você consegue dizer sobre eles? Ou seja, comparando-os entre si, o que você observa geometricamente? E por quê?

R: Possuem mesma medida. Formam um ângulo agudo porque medem menos de 90°

(7) Agora, você irá medir os ângulos: $\underbrace{B\hat{A}C, D\hat{C}E, F\hat{E}G}_{109.09°}$, $\underbrace{A\hat{B}C, C\hat{D}E, E\hat{F}G}_{36.93°}$ e $\underbrace{B\hat{C}A, D\hat{E}C, F\hat{G}E}_{33.4°}$. Para fazer isso, você deve clicar na 8ª janela do geogebra e escolha a primeira opção ***ângulos*** para medir os ângulos. Para isso você deve clicar nos três vértices de cada triângulo, deixando o ângulo que quer medir para ser clicado em segundo lugar, obedecendo o sentido horário.

(8) O que você constatou agora após realizar essas medições a respeito dos ângulos e dos triângulos?

R: Que os ângulos se repetem em todos os triângulos, ou seja possuem a mesma medida, dando a mesma forma em todos os triângulos

Fonte: Autora do trabalho

Figura 29 – Roteiro Tarefa 2 reestruturada aluno C

(9) Agora, você irá mexer seus triângulos por meio de seus vértices. O que mudou e o que se manteve após fazer isso?

R: O que mudou foi a medida dos ângulos. O que se manteve foi a soma dos ângulos

Observação: **Para as construções os itens a seguir, considere cada unidade de área como sendo a figura que compõe a malha, isto é, a figura que se repete nela.**

(10) Construa um triângulo com uma unidade de área.
(11) Construa um triângulo com quatro unidades de área.
(12) O que você observa em relação as áreas e aos seus perímetros? E em relação aos ângulos desses dois triângulos construídos por você, existe algo em comum? Por quê?

R: Tanto a área quanto o perímetro [illegible] suas medidas, [illegible] C soma deles continua sendo 180° porque para se ter um triângulo a soma dos ângulos tem que ter essa medida. Os ângulos ainda tem a mesma medida.

(13) Como você justificaria sua resposta ao item anterior?

R: Porque a soma dos seus ângulos tem que ser 180° ou não se tem um triângulo.

(14) Construa um polígono com duas unidades de área.
(15) Construa um polígono com oito unidades de área.
(16) O que você observa em relação as áreas e aos seus perímetros? E em relação aos ângulos desses dois polígonos construídos por você, existe algo em comum? Por quê?

R: A área e o perímetro [illegible] os ângulos continuam os mesmos. Sim, a medida dos ângulos por o polígono [illegible] tem a mesma forma

(17) Como você justificaria sua resposta ao item anterior?

R: Os ângulos tem mesma medida porque o polígono tem a mesma forma.

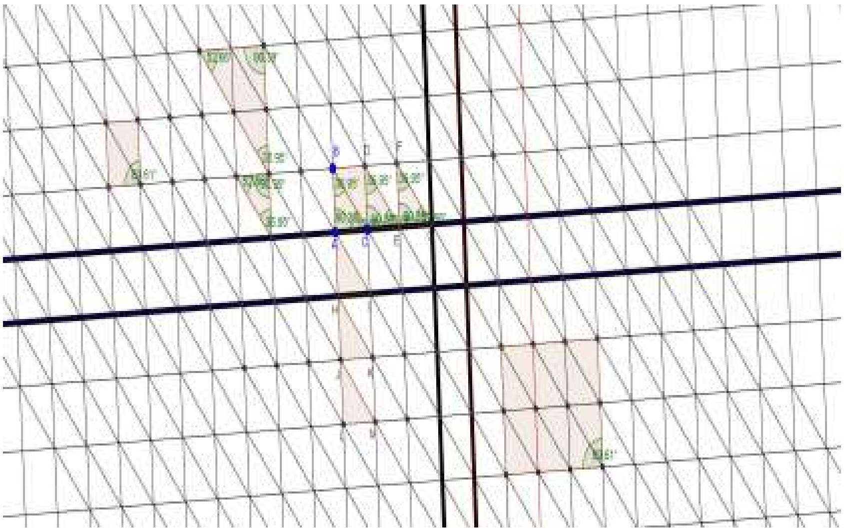
Fonte: Autora do trabalho

Quando se compara as duas construções realizadas pelo aluno C, verifica-se mais uma vez a falha na comunicação daquilo que se quer do aluno pelo roteiro proposto naquele momento. Na primeira construção da atividade 2 figura 17, o aluno chega a construir triângulos e a medir alguns ângulos, reconhece pares de retas paralelas, e não avançou mais que isso.

Já pelas construções obtidas nas figuras 27 e pelos registros em seu roteiro, figuras 28 e 29, verifica-se que agora o aluno foi capaz de concluir a tarefa e explicar o que fez. Com suas palavras e com o conhecimento geométrico que ele possui, o mesmo aluno classificado anteriormente no nível 2 (análise) segundo o teste aplicado no início de nossa pesquisa, progride para o nível 3 (abstração), conforme Nasser (2010). Pois, observamos pelas respostas em seu roteiro que o aluno conseguiu verificar que a soma das medidas de qualquer triângulo é 180º. Assim, percebemos um importante progresso no processo de elaboração do conhecimento geométrico com a conclusão da tarefa pelas construções e pelos registros realizados e apresentados nas figuras 27, 28 e 29.

Registros realizados pelo aluno D

Figura 30 – Construção no Geogebra da tarefa 2 reestruturada aluno D



Fonte: Autora do trabalho

Figura 31 – Roteiro aluno D

(3) O que os ângulos $B\hat{A}C, A\hat{H}I, H\hat{J}K$ e $J\hat{L}M$ podem possuir em comum?

R: [illegible]

(4) Analisando os ângulos $B\hat{A}C, D\hat{C}E, F\hat{E}G$, o que você consegue dizer sobre eles? Ou seja, comparando-os entre si, o que você observa geometricamente? E por quê?

R: [illegible]

(5) Analisando os ângulos $A\hat{B}C, C\hat{D}E, E\hat{F}G$, o que você consegue dizer sobre eles? Ou seja, comparando-os entre si, o que você observa geometricamente? E por quê?

R: [illegible]

(6) Analisando os ângulos $B\hat{C}A, D\hat{E}C, F\hat{G}E$, o que você consegue dizer sobre eles? Ou seja, comparando-os entre si, o que você observa geometricamente? E por quê?

R: [illegible]

(7) Agora, você irá medir os ângulos: $B\hat{A}C, D\hat{C}E, F\hat{E}G$, $A\hat{B}C, C\hat{D}E, E\hat{F}G$ e $B\hat{C}A, D\hat{E}C, F\hat{G}E$. Para fazer isso, você deve clicar na 8ª janela do geogebra e escolha a primeira opção ***ângulos*** para medir os ângulos. Para isso você deve clicar nos três vértices de cada triângulo, deixando o ângulo que quer medir para ser clicado em segundo lugar, obedecendo o sentido horário.

(8) O que você constatou agora após realizar essas medições a respeito dos ângulos e dos triângulos?

R: [illegible]

Fonte: Autora do trabalho

Figura 32 – Roteiro aluno D

(9) Agora, você irá mexer seus triângulos por meio de seus vértices. O que mudou e o que se manteve após fazer isso?

R: [illegible]

Observação: Para as construções os itens a seguir, considere cada unidade de área como sendo a figura que compõe a malha, isto é, a figura que se repete nela.

(10) Construa um triângulo com uma unidade de área.
(11) Construa um triângulo com quatro unidades de área.
(12) O que você observa em relação as áreas e aos seus perímetros? E em relação aos ângulos desses dois triângulos construídos por você, existe algo em comum? ~~Por quê?~~

R: [illegible]

(13) Como você justificaria sua resposta ao item anterior?

R: [illegible]

(14) Construa um polígono com duas unidades de área.
(15) Construa um polígono com oito unidades de área.
(16) O que você observa em relação as áreas e aos seus perímetros? E em relação aos ângulos desses dois polígonos construídos por você, existe algo em comum? ~~Por quê?~~

R: [illegible]

(17) Como você justificaria sua resposta ao item anterior?

R: [illegible]

Fonte: Autora do trabalho

Comparando as construções do aluno D, constata-se o avanço entre as atividades conforme figuras 18 e 30. Enquanto na tarefa 1 o aluno apenas construiu triângulos e identificou retas paralelas, nesta atividade o aluno realizou o que era esperado para um aluno de 7º ano. Construiu os triângulos, mediu seus ângulos, identificou retas paralelas e mesmo que não tenha visto ainda, percebeu que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre a mesma medida, conforme seu registro no ítem (9) do roteiro figura 31. Mesmo não informando que a soma das medidas dos ângulos internos de todos os triângulos analisados por ele é 180º, o aluno verifica por meio dessa construção que a soma desses ângulos se mantém e isso podemos classificar como um tipo de abstração, o que caracteriza nível de de van Hiele. Verificou também que todos os triângulos da malha eram congruentes, conforme ítem (8) do roteiro figura 31. Assim, constatamos uma transição do nível dois (análise) para nível três (abstração), considerando Nasser (2010) e conforme a tarefa realizada nos mostrou.

Verificamos que o software GeoGebra é um bom coadjuvente para que o aluno percorra as fases do desenvolvimento geométrico, que segundo a teroria podem ser elencadas dessa maneira:

Fase 1: Informação – O professor apresenta a atividade e faz algumas indagações a respeito. As respostas apresentadas pelos alunos nessa fase são apenas de percepção visual.

Fase 2: Orientação guiada – Realização de outras atividades relacionadas a mesma, para possibilitar aos alunos uma maior visão do assunto.

Fase 3: Explicação – As atividades anteriores são seguidas por uma discussão entre os alunos a respeito do que descobriram.

Fase 4: Orientação livre – O professor apresenta o problema com algumas condições.

Fase 5: Integração – Os alunos reveem e resumem o que aprenderam. O professor auxilia no processo de síntese.

Conforme Quadro 2 Alves (2010), foi possível verificar algumas das características observadas pelo autor no decorrer da pesquisa, tais como:

- O professor (pesquisadora) deve perceber quais os conhecimentos anteriores do aluno sobre o assunto a ser estudado. No nosso caso a pesquisadora foi professora dessa turma no ano anterior.
- Os alunos exploram o assunto de estudo por meio do material selecionado pelo professor. Como ficou sugerido em nossas tarefas.
- Tarefas constituídas de várias etapas, possibilitando diversas respostas, a fim de que o aluno ganhe experiência e autonomia. Conforme tarefas 1 e 2 aqui propostas.

4 CONCLUSÃO

A pesquisa realizada com a fundamentação teórica do modelo do pensamento geométrico do casal Van Hiele e com a utilização do software GeoGebra, nos forneceu embasamento teórico para compreendermos melhor como funciona o pensamento geométrico de um aluno do 7º ano do Ensino Fundamental II, forneceu também a oportunidade de compreendermos que é mais importante o que o aluno já sabe do que aquilo que queremos que ele construa.

Quando o aluno passa a compreender conceitos, relacionar novos com antigos e passa a fazer uma análise mais profunda que o leva a construir novos conceitos, esse aluno ,segundo a teoria de van Hiele, está subindo de nível.

Nosso trabalho apontou alguns equívocos na elaboração de uma das tarefas. O que nos levou a tentar interpretá-la sob o ponto de vista do aluno e não como gostaríamos que a mesma fosse realizada.

Assim, verificamos conforme mostrou a tarefa 2 que foi reestruturada, o quanto o cuidado com aquilo que se imagina que o aluno compreenda ou saiba é fundamental na elaboração e na condução de qualquer atividade.

Mesmo não ministrando um curso do sofware Geogebra anteriormente para os alunos, verificamos que quando se trata de tecnologia o aluno se mostra mais participativo e com mais interesse pelo assunto. Pois, em se tratando de geometria, quando se tem uma sala 26 alunos e apenas 6 não realizam um tarefa com êxito, temos uma porcentagem muito baixa de desinteresse quando se compara com uma aula expositiva seguida de exercícios, onde há uma chance muito grande da maioria da turma não concluir os exercícios por falta de compreensão.

A teroria de Van Hiele aliada com a utilização do software Geogebra pode contribuir para o avanço na compreensão de alguns conhecimentos geométricos.

É importante o professor saber o seu papel para desenvolver o modelo de Van Hiele, que é o de orientador. Ter muito cuidado para não responder ao questionamento dos alunos na ânsia de ajudá-los, pois o modelo se opõe completamente às respostas prontas pelo professor.

Um ponto que me fez parar e refletir após a realização das tarefas é a respeito do tipo de formação que estamos submetendo nossos alunos. Estamos oferecendo uma formação que preza a autonomia ou que preza a dependência?

Assumir a função de apenas orientar sem explicar, de apenas conduzir as tarefas não foi fácil. Varias vezes chegava perto do computador do aluno e tive a vontade de pegar o mouse e mostrar como se fazia, ou até mesmo de mostrar projetado na TV para que vissem o quão fácil eram as tarefas.

Porém, fácil para quem? Para mim, ou para eles?

Não é difífcil responder a esse questionamento, é lógico que para nós professores tudo parece muito mais simples, sem complicação alguma, já para nossos alunos a geometria é algo temido.

Assim, ao pensar nas tarefas, desenvolver um roteiro que auxiliaria os alunos na execução de suas tarefas e obedecendo as propriedades do modelo de Van Hiele, pude experimentar essa possibilidade de ser apenas uma observadora, para o ensino de geometria.

Em nossa pesquisa realizamos apenas 3 tarefas, sendo: um teste dos níveis de Van Hiele e duas tarefas utilizando o software GeoGebra para uma possível verificação do amadurecimento geométrico nos alunos e assim constatar se houve ou não o progresso entre os níveis.

Gostaríamos de relatar que para o monitoramento efetivo do avanço nos níveis de Van Hiele se faz necessário um período maior e mais atividades que levem o aluno a construção do conhecimento geométrico.

Em nossa pesquisa foi possível conseguir alguns dados que consideramos responder ao tema: De que maneira a utilização do *software* Geogebra, por meio de tarefas de caráter exploratório-investigativo, possibilita aos estudantes do 7º ano, progredir nos níveis de Van Hiele?

Pois, quando comparamos os resultados dos testes obtidos quanto aos níveis de Van Hiele dos alunos com os das tarefas 1 e 2, percebemos que com a ferramenta correta pode-se obter um resultado mais significativo para o aluno. Exemplo certo é o aluno X, que logo no início da tarefa 1 percebeu que algo estava errado em sua construção. O vídeo que tem duração de 13 minutos e 20 segundos possibilita observar mais detalhadamente essa evolução. Foi possível compreender a maneira como o aluno interpreta seu roteiro e realiza suas construções. O vídeo mostra o momento em que percebe que algo estava errado e reinicia sua construção e depois consegue finalizá-la com sucesso até o final.

Acredito que a forma como o conteúdo é apresentado limita o nosso aluno como mero espectador, e receptor dos conhecimentos que são repassados durante as aulas. Para conduzir o aluno a construir seu próprio conhecimento, se faz necessária uma mudança na prática pedagógica do professor e também nas coordenações. É preciso repensar o papel do educador como orientador do processo e não apenas em um simples transmissor.

REFERÊNCIAS

Antônio Miguel; Maria Ângela Miorim. **O ensino da matemática no 1º grau**. São Paulo: Atual, 1986.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros curriculares nacionais (matemática).** Brasília: MEC/SEF, 1998.

Duelci Aparecido de Freitas Vaz. Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando: articulando Investigação Matemática com o Geogebra. **Educativa**, Goiânia, v. 15, n. 1, 2012, p. 39-51.

George de Souza Alves; Fábio Ferrentini Samapio. O modelo de Desenvolvimento Geométrico de Van Hiele e Possíveis Contribuições da Geometria Dinâmica. **Revista de Sistemas de Informação da FSMA,** n. 5, p. 69-76, 2010.

Ilydio Pereira de Sá. Primeiros passos com o software livre – Geogebra (2010). Disponível em: http://www.magiadamatematica.com/diversos/apostilas/GEOGEBRA.pdf. Acesso em 10 out.2016.

José Armando Valente. Informática no Brasil: análise e contextualização histórica. O computador na sociedade do conhecimento. Campinas: UNICAMP/NIED,1999. Disponível em http://www.nied.unicamp.br/oea/pub/livro1/. Acesso em 28 out.2016.

Juana Maria Sancho. Em busca de respostas para as necessidades educacionais da sociedade atual: uma perspectiva multidisciplinary da tecnologia. **Revista Linhas**, Florianópolis, v.14, n.27, p.09-44, Jul/Dez, 2013.

Lílian Nasser; Neide da Fonseca Parracho Sant'anna. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. 2 ed. rev. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

Lillian Nasser; Maria Laura Mouzinho Leite Lopes. **Geometria na era da imagem e do movimento.** Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1996.

Luciano Ferreira; Rui Marcos de Oliveira Barros. Algumas Influências de Objetos Ostensivos e Não Ostensivos Na Compreensão do Plano de Poincaré com o Software Geogebra. In: SANTOS, T.S. S.; BORGES, F. A. (Orgs.). **Pesquisas em Educação Matemática**: implicações para o ensino. Campo Mourão: Fecilcam, 2016, p. 235-257. (Coleção Diversidades do Conhecimento).

Luiz Carlos Pais. **Educação escolar e as tecnologias da informática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

Marcelo de Carvalho Borba; Miriam Godoy Penteado. **Informática e educação maemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

Maria Alice Basso, Marcus Vinicius de Azevedo. Mídias digitais na educação matemática. In: GRAVINA, Maria Alice et al. **Matemática, mídias digitais e didática:** tripé para formação de professores. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

Disponível em http://www6.ufrgs.br/espmat/livros/livro2-matematica_midiasdigitais_didatica.pdf . Acesso em: 15 out.2016.

Michael VILLIERS. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. **Educ. Matem. Pesq**, São Paulo, v.12, n.3, p. 400-431, 2010.

Nilson José Machado. **A geometria na sua vida.** São Paulo: Ática, 2003.

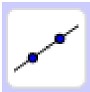
APÊNDICE A – Tarefa 1

Tarefa 1

Nome: ____.

Esta barra de ferramentas chamaremos de janelas e enumeramos para facilitar sua construção.

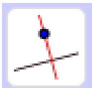
Siga os passos abaixo:

1) Clique na janela 3  e selecione a opção 

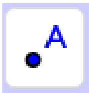
e construa um segmento A e B.

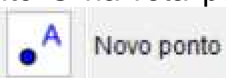
2) Para nomear os pontos A e B, clique com o botão direito do mouse sob o ponto A, aparecerá a janela abaixo:

agora clique na opção exibir rótulo e o ponto A estará nomeado. Para se obter o ponto B basta repetir o mesmo procedimento.

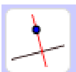
3) Clique na quarta janela  e selecione a primeira opção 

e construa uma reta perpendicular ao segmento AB passando por B. Para isso, você após pegar a ferramenta irá clicar sob o ponto B e em seguida em qualquer lugar do segmento AB.

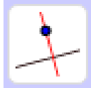
4) Obtenha um ponto C na reta perpendicular clicando na segunda janela 

escolhendo a opção 

. Para nomeá-lo faça o mesmo procedimento do passo 2.

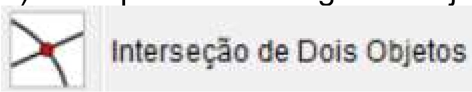
5) Construa uma reta paralela ao segmento AB passando por C clicando na quarta janela  escolhendo a opção 

. Para isso, após pegar a ferramenta clique no ponto C e em seguida sobre qualquer lugar do seguimento AB.

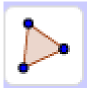
6) Construa uma reta perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto A, lembrando que para isso você voltará a clicar na quarta janela  e escolherá a opção 

.

7) Clique na segunda janela 

e selecione a quarta opção 

e obterá o ponto D.

8) Agora, para finalizar sua construção vá até o quinta janela  e selecione a opção 

e feche o polígono construído por você clicando primeiramente no vértice A e após em cada um dos outros vértices voltando por último no vértice A.

9) Salve sua construção.

Agora responda as questões:

a) Após realizar essa construção, que nome você atribuiria a ela?

R:____
____.

b) Escreva em detalhes como você descreveria sua construção a um colega se o mesmo não a estivesse observando.

R:____
____
____
____
____.

c) Agora, movimente seus vértices. Para isso clique sobre 

e pegue a opção 

.Escreva em detalhes o que se altera na figura e também o que se mantém.

R:____
____
____
____
____.

d) A partir dessa construção obtida por você, o que é possível dizer a respeito.

R:____
____
____
____
____.

e) É possível obter outras figuras a partir dessa construída por você?

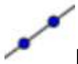
R:____
____.

APÊNDICE B – Tarefa 2

Tarefa 2 (primeira tentativa)

Nome: ____.

Na malha do geogebra realize o que está sendo solicitado.

(1) Identifique e pinte três retas paralelas. Para isso utilize a 4ª janela e escolha a segunda opção  reta . Para colorir sua retas clique sobre a mesma com o botão direito do mouse e escolha a opção propriedades, clique em cor e escolha sua preferida. Para deixar as paralelas escolhidas por você com maior espessura, repita o procedimento anterior só que clique em estilo ao invés de cor. Após isso clique em exibir e clique em janela de álgebra e clique em cada bolinha azul que representa os pontos deixados nas retas paralelas quando você fez a identificação, para limpar a construção feita por você. Feito isso feche essa janela.

<u>**Observação:**</u> **considere cada unidade de área como sendo a figura que compõe a malha, isto é, a figura que se repete nela.**

(2) Escolha a primeira reta paralela e construa um triângulo com uma unidade de área. Para isso utilize a 5ª janela 

.

(3) Construa mais um triângulo em que o um dos vértices do triângulo construído anteriormente seja o único ponto de intersecção com esse novo triângulo, ou seja, não poderá ter lados comuns e que esteja na mesma reta paralela que utilizou anteriormente, repita mais três vezes esse procedimento.

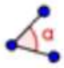
(4) Você consegue estabelecer alguma relação entre esses triângulos construídos por você? Qual?

____

____

(5) Agora clique na 10ª janela **ABC** do geogebra e clique na ferramenta caixa texto para nomear o ângulo que tenha vértice comum com o outro triângulo construído por você, chame-o de ângulo Â. Repita essa operação para todos os outros triângulos construídos por você, nomeando-os respectivamente de 1, 2, 3, e 4.

(6) Você consegue estabelecer alguma relação entre esses ângulos nomeados por você? Qual?

(7) Clique na 8ª janela do geogebra  e clique na ferramenta ângulo para medir os ângulos nomeados por você. Para isso você deve clicar nos três vértices de cada triângulo, deixando o ângulo que quer medir para ser clicado em segundo lugar, obedecendo o sentido horário. O que você constatou agora após realizar essas medições?

(8) O que você pode dizer sobre os ângulos A, 1, 2, 3 e 4, e por quê?

(9) Agora, você irá construir mais quatro triângulos iguais aos anteriores seguindo essas instruções:
- o primeiro triângulo a ser construído irá ter um dos lados do primeiro triângulo construído por você que também esteja na primeira paralela colorida por você;
- o segundo triângulo dever ter um dos lados do triângulo anterior e outro lado na segunda paralela identificada por você;
- para construir os outros dois triângulos proceda de maneira análoga as instruções anteriores.

Observação: altere a cor desses novos triângulos.

(10) Agora, vamos nomear um dos ângulos desse primeiro triângulo construído no passo (9). Para isso escolheremos o ângulo que um dos lados coincida com a primeira paralela colorida por você e que não seja adjacente ao ângulo Â. Chame-o de B. Em seguida nomearemos um dos ângulos do segundo triângulo construído no passo (9). Um lado desse ângulo deve estar na segunda paralela colorida e o outro ser também lado do triângulo anterior. Chame-o de C. Para nomear o ângulo D, um de seus lados deve estar na segunda paralela colorida e o outro lado coincidir com o lado do triângulo anterior. Finalmente para nomear o ângulo E, um lado deve coincidir com a terceira paralela colorida e o outro lado coincidir com o lado do triângulo anterior.

(11) O que você pode dizer sobre os ângulos A, B, C, D e E, e por quê?

(12) Construa uma figura com perímetro igual a três unidades de medida e outra figura com seis unidades de medida.

(13) O que você observa em comum entre essas duas construções?

(14) Construa uma figura com perímetro igual a quatro unidades de perímetro e outra com oito unidades de perímetro.

(15) O que você observa em comum entre essas duas construções?

APÊNDICE C – Tarefa 2 Reformulada

Tarefa 2 (reformulada para ser realizada na malha móvel do Geogebra)
Nome: ____.

Na malha do geogebra realize o que está sendo solicitado.

(16) Identifique linhas paralelas, colorindo-as. Para identificá-las, você deve clicar na 3ª janela do geogebra e escolherá a opção  reta. Se quiser deixá-las coloridas basta clicar na janela que abrirá e escolher a cor, como mostra figura abaixo.

(17) Você consegue identificar ângulos congruentes entre os triângulos desta malha triangular? Se sim escreva-os abaixo.

R:

(18) O que os ângulos $BAC, AHI, HJK \, e \, JLM$ podem possuir em comum?

R:

(19) Analisando os ângulos $BAC, DCE, \mathrm{F}EG$, o que você consegue dizer sobre eles? Ou seja, comparando-os entre si, o que você observa geometricamente? E por quê?

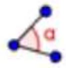
R:

(20) Analisando os ângulos $ABC, \mathrm{C}DE, EFG$, o que você consegue dizer sobre eles? Ou seja, comparando-os entre si, o que você observa geometricamente? E por quê?

R:

(21) Analisando os ângulos $BC\mathrm{A}, \mathrm{D}E\mathrm{C}, \mathrm{F}GE$, o que você consegue dizer sobre eles? Ou seja, comparando-os entre si, o que você observa geometricamente? E por quê?

R:

(22) Agora, você irá medir os ângulos: BAC, DCE, FEG, ABC, CDE, EFG e BCA, DEC, FGE. Para fazer isso, você deve clicar na 8ª janela do geogebra  e escolha a primeira opção ***ângulos*** para medir os ângulos. Para isso você deve clicar nos três vértices de cada triângulo, deixando o ângulo que quer medir para ser clicado em segundo lugar, obedecendo o sentido horário.

(23) O que você constatou agora após realizar essas medições a respeito dos ângulos e dos triângulos?

R:

(24) Agora, você irá mexer seus triângulos por meio de seus vértices. O que mudou e o que se manteve após fazer isso?

R:

<u>Observação:</u> Para as construções os itens a seguir, considere cada unidade de área como sendo a figura que compõe a malha, isto é, a figura que se repete nela.

(25) Construa um triângulo com uma unidade de área.
(26) Construa um triângulo com quatro unidades de área.
(27) O que você observa em relação as áreas e aos seus perímetros? E em relação aos ângulos desses dois triângulos construídos por você, existe algo em comum? Por quê?

R:

(28) Como você justificaria sua resposta ao item anterior?

R:

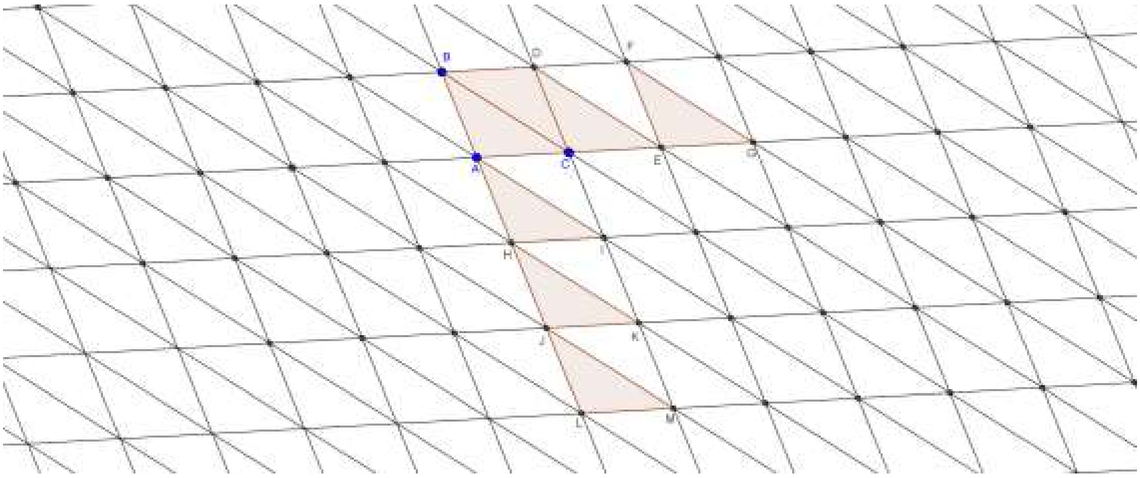
(29) Construa um polígono com duas unidades de área.
(30) Construa um polígono com oito unidades de área.
(31) O que você observa em relação as áreas e aos seus perímetros? E em relação aos ângulos desses dois polígonos construídos por você, existe algo em comum? Por quê?

R:

(32) Como você justificaria sua resposta ao item anterior?

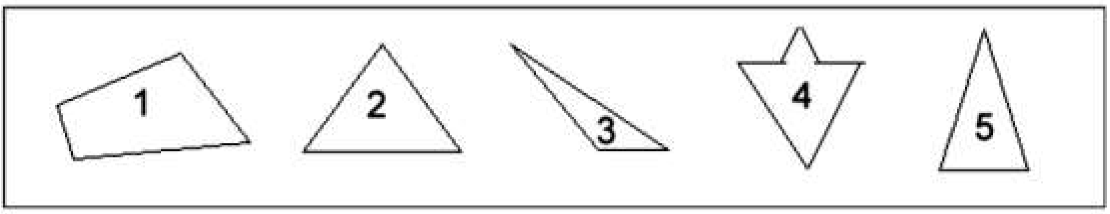
R:

APÊNDICE D - Malha móvel do Geogebra

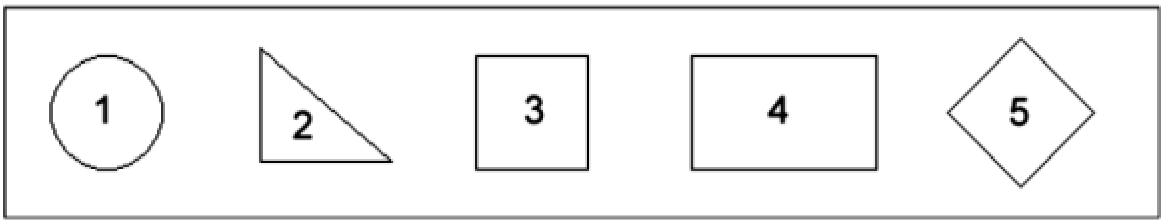


Anexo A - Testes de Van Hiele

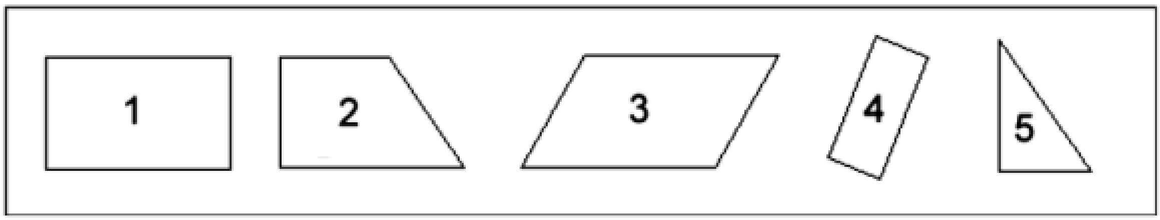
Questão 1. Assinale o(s) triângulo(s):



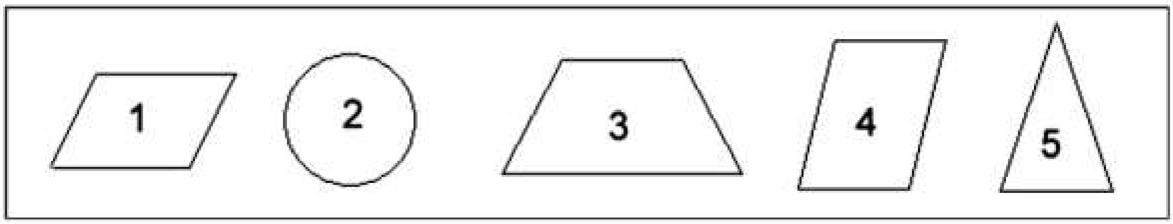
Questão 2. Assinale o(s) quadrado(s):



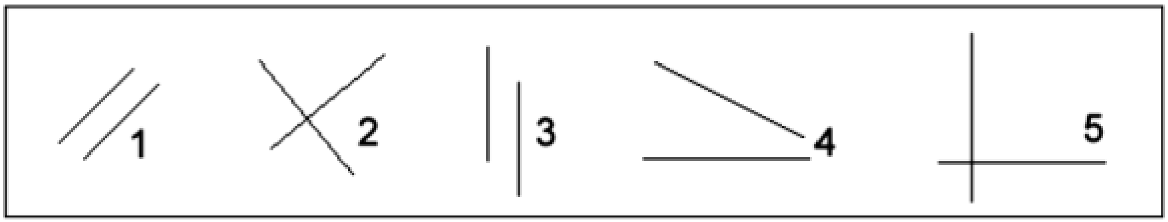
Questão 3. Assinale o(s) retângulo(s):



Questão 4. Assinale o(s) paralelogramo(s):



Questão 5. Assinale os pares de retas paralelas:



Questão 6. No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas diagonais.

Assinale a(s) alternativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:

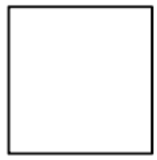
a) Têm 4 ângulos retos.
b) Têm lados opostos paralelos.
c) Têm diagonais do mesmo comprimento.
d) Têm os quatro lados iguais.
e) Todas são verdadeiras.

Questão 7. Escreva três propriedades dos quadrados:

1.______________________________________

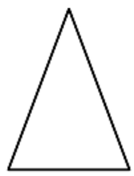
2.______________________________________

3.______________________________________



Questão 8. Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a alternativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles.

a) Pelo menos um dos ângulos mede 60º.
b) Um dos ângulos mede 90º.
c) Dois ângulos tem a mesma medida.
d) Todos os três ângulos tem a mesma medida.
e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

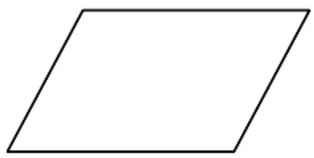


Questão 9. Dê três propriedades dos paralelogramos:

1.______________________________________

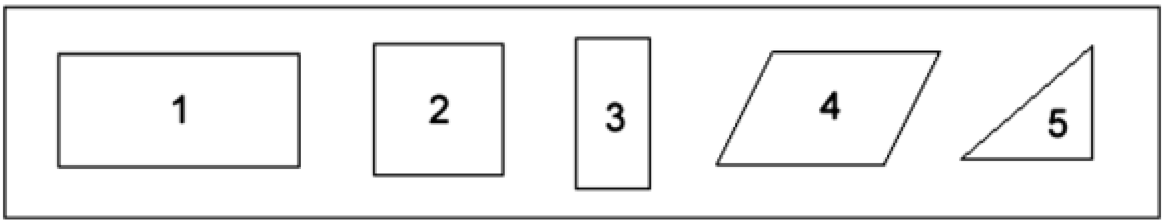
2.______________________________________

3.______________________________________



Questão 10. Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não tem mesmo comprimento:

Questão 11. Assinale a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulo(s):



Questão 12. Os quatro ângulos A, B, C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais:

a) Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado?
   ____
b) Porquê? ____
c) Que tipo de quadrilátero é
   esse?_____________________________________

Questão 13. Pode-se afirmar que todo retângulo é um paralelogramo? Por quê?

Questão 14. Considere as afirmativas:

(I) A figura X é um retângulo.
(II) A figura X é um triângulo.

Assinale a afirmativa verdadeira:

a) Se I é verdadeira, então II é verdadeira.
b) Se I é falsa, então II é verdadeira.
c) I e II não podem ser ambas verdadeiras.
d) I e II não podem ser ambas falsas.
e) Se II é falsa, então I é verdadeira.

Questão 15. Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados:

a) Qualquer propriedade dos quadrados também é válida para os retângulos.
b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.
c) Qualquer propriedade dos retângulos também é válida para os quadrados.
d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.
e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

Fonte: Nasser e Sant'Anna (2010, p. 95).

Anexo B – Diferenças entre os três primeiros níveis de Van Hiele com relação aos objetos e à estrutura de pensamento em cada nível

Objetos de pensamento	**Figuras Individuais**	**Classes de Figuras**	**Definição de classes de figuras**
Estrutura de pensamento	Reconhecimento visual Nomeação Classificação. visual	Reconhecimento das propriedades como características de classes	Observação formulação de relações lógicas entre as propriedades
Exemplos	Todos os paralelogramos ficam juntos porque "*se parecem*" Retângulos, quadrados e losangos não são paralelogramos porque "*não se parecem com eles*"	Um paralelogramo tem: • 4 lados • ângulos opostos = • lados opostos = • lados opostos // • diagonais cortam-se no ponto médio; etc. Um retângulo não é um paralelogramo, já que possui ângulos de 90º, diferentemente de um paralelogramo.	• Lados opostos = implicam em lados opostos // • Lados opostos // implicam em lados opostos = • ângulos opostos = implicam em lados opostos = • diagonais que se cortam no ponto médio implicam em simetria de meia volta.

Figura 33: Diferenças entre os três primeiros níveis de Van Hiele
Fonte: Fonte: Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.12, n.3, pp. 403, 2010