

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DÊNIS RICARDO OLIVEIRA CRUZ

**TEORIA DO POTENCIAL E SUAS APLICAÇÕES NA ENGENHARIA**

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2012

DÊNIS RICARDO OLIVEIRA CRUZ

**TEORIA DO POTENCIAL E SUAS APLICAÇÕES NA ENGENHARIA**

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Wellington José Corrêa

**CAMPO MOURÃO**

**2012**

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

Dênis Ricardo Oliveira Cruz

### Teoria do Potencial e Suas aplicações na Engenharia

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

---

Orientador: Prof. Msc. Wellington José Corrêa

---

Prof. Msc. Viviane Colucci Boromelo

---

Prof. Msc. Sara Coelho da Silva

Campo Mourão, 2012

Agradeço a minha esposa pela paciência em abrir mão de minha presença para realização de todos os estudos e viagens durante a especialização em Matemática. À Deus por tudo que passei durante o caminho percorrido que foi feito de muitas dificuldades, mas está chegando ao fim com novos conhecimentos, novas amizades e novas experiências.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por ter me dado saúde, proteção nestas estradas tão perigosas, amigos que ao longo desses meses me proporcionaram momentos felizes. Agradeço a minha família por ter me dado apoio e não me deixar desanimar completamente com as dificuldades encontradas. Ao Gerente da Agência que estou trabalhando no Banco do Brasil desde julho/2012, o Serafini que me fez entender que tenho que buscar conhecimento e desenvolvimento para ter uma excelente formação e que nada será perdido. Agradeço a Minha esposa Myllene que apesar de ser muito jovem e estar no início de casamento, foi muito compreensiva confiando sem sombras de dúvidas nas minhas Palavras ( EU TE AMO ), e ainda assim me agraciou com um lindo Bebê. Agora o maior de todos os agradecimentos ( abaixo apenas de Deus) ao Professor Wellington, uma pessoa até difícil de encontrar palavras para descrever, mas sem dúvidas as pessoas que o conhece sabe do ser humano bondoso e motivador que ele é. Quero um dia me sentir parecido com ele, não como matemático que já seria uma honra, mas como pessoa.

“A maravilhosa disposição e harmonia do universo só pode ter tido origem segundo o plano de um Ser que tudo sabe e tudo pode. Isto fica sendo a minha última e mais elevada descoberta” ( Isaac Newton)

## RESUMO

CRUZ, Dênis R. O.. Teoria do Potencial e Suas aplicações na Engenharia. 53 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2012.

Esta monografia tem o intuito de apresentar de forma didática a Teoria do Potencial aplicado à Engenharia com uso da Análise Complexa, buscando ser um material de apoio para iniciantes no estudo desta área da matemática que geralmente acaba sendo pouco explorada nas séries anteriores e o aluno acaba tendo um contato mais frequente só na graduação, e com este trabalho poderá sanar várias de suas dúvidas.

**Palavras-chave:** Análise Complexa, Teoria do Potencial, Equação de Laplace, Condução do calor, Fluido ideal

## ABSTRACT

CRUZ, Dênis R. O.. Potential Theory and Its Applications in Engineering. 53 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2012.

This monograph aims to present the didactically Potential theory applied to Engineering Analysis with use of Complex, trying to be a support material for beginners in the study of this area of mathematics that usually ends up being little explored in previous series and the student ends up having a more frequent contact only in degree, and this work could remedy many of your questions.

**Keywords:** Complex Analysis, Potential Theory, Laplace equation, heat conduction, ideal Fluid



## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS .....	12
FIGURA 2	– FORMA POLAR DO NÚMERO COMPLEXO $Z = A + BI$ .....	14
FIGURA 3	– RAÍZES DA EQUAÇÃO $Z^6 + 1 = 0$ .....	17
FIGURA 4	– CIRCUNFERÊNCIA DE RAIO $\rho$ . .....	18
FIGURA 5	– CONJUNTO ABERTO .....	19
FIGURA 6	– INTERIOR, FRONTEIRA E EXTERIOR DE $S$ . .....	19
FIGURA 7	– CONJUNTO CONEXO .....	20
FIGURA 8	– CÍRCULO UNITÁRIO .....	21
FIGURA 9	– ESFERA UNITÁRIA .....	21
FIGURA 10	– FUNÇÃO DE VARIÁVEL COMPLEXA .....	22
FIGURA 11	– IMAGEM DE $S$ SOB A TRANSFORMAÇÃO $W = F(Z)$ . .....	23
FIGURA 12	– EXEMPLO DE CONJUNTO SIMPLESMENTE CONEXO .....	31
FIGURA 13	– AS TANGENTES $L_1$ E $L_2$ EM $(X_0, Y_0)$ SÃO PERPENDICULARES. ...	37
FIGURA 14	– GRADIENTE É PERPENDICULAR À CURVA DE NÍVEL EM $(X_0, Y_0)$ . ..	37
FIGURA 15	– POTENCIAL ENTRE PLACAS PARALELAS .....	38
FIGURA 16	– POTENCIAL ENTRE CILINDROS COAXIAIS .....	39
FIGURA 17	– CAMPO ELÉTRICO .....	41
FIGURA 18	– FLUXO DE CALOR .....	45
FIGURA 19	– TEMPERATURA ENTRE PLACAS PARALELAS .....	46
FIGURA 20	– TEMPERATURA ENTRE UM CABO E UM CILINDRO .....	47
FIGURA 21	– LINHA DE CORRENTE DO MOVIMENTO .....	49
FIGURA 22	– FLUXO EM TORNO DE UMA QUINA .....	50
FIGURA 23	– FLUXO EM TORNO DE UM CILINDRO .....	51

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\nabla^2\phi = 0$	Equação de Laplace
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$i$	Unidade Imaginária
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\Re(z)$	Parte real de $z$
$\Im(z)$	Parte imaginária de $z$
$\bar{z}$	Conjugado de $z$
$ z $	Valor absoluto ou módulo de $z$
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$Arg(z)$	Argumento de $z$
$const$	Constante
$\nabla f$	Gradiente de $f$
$div F$	Divergente de $F$
$rot F$	Rotacional de $F$

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>DESENVOLVIMENTO</b>	<b>10</b>
2.1	PRELIMINARES	10
2.1.1	Números Complexos	10
2.1.2	Representação Polar	13
2.1.3	Raízes $n$ -ésimas	16
2.1.4	Conjuntos de Pontos no Plano Complexo	18
2.1.5	Funções Complexas	21
2.1.6	A Função Exponencial Complexa	23
2.1.7	Funções Trigonométricas	24
2.1.8	A Função Logaritmo Natural de $z$	26
2.1.9	Limite e Continuidade	27
2.1.10	Função Analítica	28
2.1.11	As Equações de Cauchy-Riemann	29
2.1.12	Integração Complexa	30
2.1.13	Teorema Integral de Cauchy	30
2.2	CAMPOS ELETROSTÁTICOS	33
2.2.1	Funções Harmônicas	33
2.2.2	Famílias Ortogonais	35
2.2.3	Vetor Gradiente	37
2.3	POTENCIAL COMPLEXO	40
2.4	PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DE CALOR	44
2.5	ESCOAMENTO DE FLUIDOS - FLUIDO IDEAL	48
<b>3</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>52</b>
	REFERÊNCIAS	53

## 1 INTRODUÇÃO

A equação de Laplace<sup>1</sup>  $\nabla^2\phi = 0$  é uma das mais importante EDP's ( Equações Diferenciais Parciais ) da engenharia matemática, já que ela ocorre em gravitação, eletrostática, condução de calor em estado estacionário, escoamento de fluidos incompressíveis etc. A teoria que trata da solução destas equações é conhecida como Teoria do Potencial. No caso de duas dimensões quando  $\phi$  depende somente das duas coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$ , a equação de Laplace torna-se:

$$\nabla^2\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0. \quad (1)$$

Sabemos então que suas soluções  $\phi$  estão intimamente relacionadas com as funções analíticas complexas  $\phi + i\psi$ . Essa relação é a razão principal da importância da análise complexa em física e engenharia. Neste trabalho, devemos considerar essa conexão e suas consequências detalhadamente, e ilustrá-las com exemplos de modelos típicos da eletrostática, condução do calor e hidrodinâmica. Isso nos leva aos problemas de **valores de contorno**.

Este trabalho é dividido do seguinte modo: O capítulo 2, intitulado Desenvolvimento é dividido em cinco seções. Na primeira delas, apresentamos um repasso à teoria de análise complexa versando sobre os conceitos básicos de números complexos até a integração complexa. Já na segunda seção, adentrando no ambiente proposto no título do trabalho, é apresentado os campos eletrostáticos. Nas três últimas seções, vislumbrando aplicações, são expostos os conceitos de potencial complexo, condução do calor e escoamento de fluidos, respectivamente. Por fim, o último capítulo, destina-se as considerações do trabalho.

---

<sup>1</sup>Uma outra notação para a equação de Laplace é por  $\Delta\phi = 0$

## 2 DESENVOLVIMENTO

### 2.1 PRELIMINARES

Nesta seção, apresentaremos uma breve revisão de variáveis complexas. Para mais detalhes dos resultados aqui apresentados o leitor pode consultar os clássicos (SPIEGEL, 1977), (KREYSZIG, 2011), (ÁVILA, 2000), (SHOKRANIAN, 2002), (ZILL; SHANAHAN, 2011), dentre outros. Vale ressaltar que não nos atentaremos a apresentar uma variedade de exemplos sobre os conceitos a seguir, mas, achamos mais interessante, quando oportuno, apresentar uma comparação entre análise real e análise complexa dos temas abordados.

#### 2.1.1 Números Complexos

Desde que algumas equações algébricas, tais como  $x^2 + 1 = 0$ , não tem solução em  $\mathbb{R}$ , os primeiros matemáticos foram obrigados a considerar soluções puramente formais, envolvendo raízes quadradas dos números negativos. Assim, Heron (Alexandria, 100 a. C.) obteve a solução de  $\sqrt{-63}$ , Girolamo Cardano (1545) escreveu  $40 = (5 + \sqrt{-15}) \cdot (5 - \sqrt{-15})$ . Esses números foram considerados sem utilidade e o termo imaginário foi aplicado a eles.

Se  $i$  é definido como solução da equação  $x^2 + 1 = 0$ , os números da forma  $a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  são chamados **Números Complexos**. O desenvolvimento moderno dos números complexos começou com a descoberta por meio da interpretação geométrica deles. Iniciada por John Wallis (1685), formalizada por Caspar Wessel (1799) e estabelecida e reconhecida a partir de 1806 com Jean Robert Argant e, finalmente, formalmente estudada por Carl Friedrich Gauss (1831).

Certamente, o seu primeiro contato com os números complexos foi por meio da obtenção das raízes de uma equação do 2º grau  $ax^2 + bx + c = 0$  dada pela fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Quando o discriminante for negativo, sabemos que a fórmula acima não leva a nenhuma raiz real. No entanto, os números complexos entraram na Matemática pela equação do 3º grau e não

do 2º.

**Definição 2.1** Definimos o conjunto  $\mathbb{C}$  (chamado de conjunto dos números complexos) como sendo o conjunto dos pares ordenados  $(a, b)$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  com as operações:

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

**Identificações:** Denotamos

$$(a, 0) = a \quad (0, 1) = i.$$

**Observação 2.1** Temos que

1. Dado  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = (a, b)$ , chamamos  $a = \Re(z)$  de parte real de  $z$  e  $b = \Im(z)$  de parte imaginária de  $z$ .
2. O par  $(0, 0)$  é o elemento neutro para a operação soma.
3. O par  $(1, 0)$  é o elemento neutro para a operação multiplicação.
4. Temos que  $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$  e  $b = d$ .

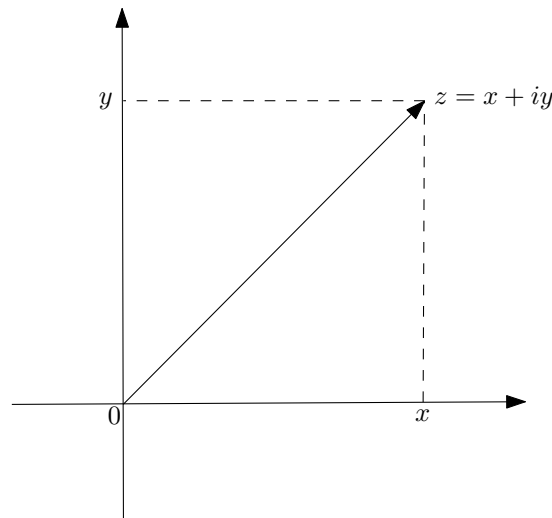
Munidos dos conceitos apresentados acima, podemos obter o plano complexo, que é o conjunto de representações de todos os números complexos  $z = x + iy$  pelos pontos  $P = (x, y)$  do plano.

A representação dos números complexos por pontos do plano é muito útil e de uso frequente. Por meio dela, o número complexo  $z = x + iy$  é identificado com o ponto  $(x, y)$ , ou com o vetor  $Oz$  de componentes  $x$  e  $y$ .

**Proposição 2.1** Dados os números complexos  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , valem as propriedades:

1. **Associativa:**  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ .
2. **Comutativa:**  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ .
3. **Distributiva:**  $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ .

Usando a 1ª definição e as identificações, temos:



**Figura 1: Representação dos números complexos**

1.  $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ , ou  $i \cdot i = -1$ , o que nos mostra que  $i^2 = -1$ .

2. Adição

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d).$$

3. Subtração

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d).$$

4. Multiplicação

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

5. Divisão

$$\begin{aligned} \frac{a + ib}{c + id} &= \frac{a + ib}{c + id} \cdot \frac{c - id}{c - id} \\ &= \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

O número complexo  $c - id$  é chamado **conjugado** do número complexo  $c + id$ . De modo geral, dado  $z = a + ib$ , denotamos por  $\bar{z} = a - ib$  como sendo o conjugado de  $z$ .

### **Observação 2.2** (*Comparação com Análise Real*)

1. *Várias das propriedades do sistema de números reais  $\mathbb{R}$  permanecem válidas no sistema de números complexos  $\mathbb{C}$ , mas há algumas diferenças notáveis.*

Por exemplo, o conceito de **ordem** do sistema de números reais não se aplica ao sistema de números complexos. Em outras palavras, não podemos comparar dois números complexos  $z_1 = a_1 + ib_1$ ,  $b_1 \neq 0$  e  $z_2 = a_2 + ib_2$ ,  $b_2 \neq 0$ , por meio de desigualdades. Asserções como  $z_1 < z_2$ , ou  $z_2 \geq z_1$  não têm qualquer significado em  $\mathbb{C}$ .

2. Algumas coisas que sabemos ser impossíveis na análise real, como  $e^x = -2$  e  $\sin x = 5$ , quando  $x$  é uma variável real, são perfeitamente corretas e corriqueiras na análise complexa, quando  $x$  é interpretado como uma variável complexa, como veremos posteriormente.

**Definição 2.2** (Valor Absoluto) Seja  $z = a + ib$  um número complexo. Definimos  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  como sendo o **valor absoluto** de  $z$ .

Propriedades de conjugação e valor absoluto.

1.  $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$ .
2.  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ .
3.  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ .
4. Se  $z = \Re(z) \Rightarrow \bar{z} = z$ .
5. Se  $z = \Im(z) \Rightarrow \bar{z} = -z$ .
6.  $z + \bar{z} = 2\Re(z)$ .
7.  $z - \bar{z} = 2\Im(z)$ .
8.  $|\Re(z)| \leq |z|$ .
9.  $|\Im(z)| \leq |z|$ .
10. Se  $z_1 = a_1 + b_1 i$  e  $z_2 = a_2 + b_2 i$  então  $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$  é a distância entre  $z_1$  e  $z_2$ .
11.  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ .
12.  $|\bar{z}| = |z|$ .
13.  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ .
14.  $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ,  $z_2 \neq 0$ .
15.  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .
16.  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ .

### 2.1.2 Representação Polar

Considerando a representação geométrica de um número complexo  $z \neq 0$ , chama-se **argumento** de  $z$  o ângulo  $\theta$  formado pelo eixo  $Ox$  e o vetor  $Oz$ , no qual denotaremos por  $\arg(z)$ . Como em trigonometria, os ângulos são aqui orientados: consideramos positivo o sentido de percurso oposto ao dos ponteiros do relógio.



Nesta definição, o argumento não é único e só fica determinado a menos de múltiplos inteiros de  $2\pi$ , isto é,  $\theta$  pode ser trocado por  $\theta + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Deste modo, temos que o

$$\begin{aligned} \arg(z) &\equiv \text{Arg}(z) \pmod{2\pi} \\ &\equiv \overline{\text{Arg}(z)} \end{aligned}$$

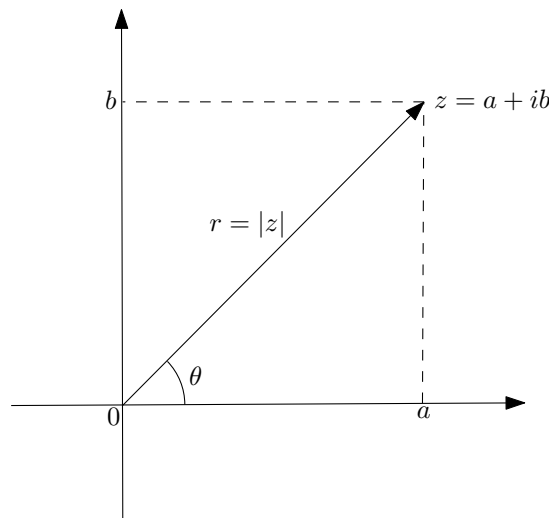
onde  $\text{Arg}(z) = \theta$  quando  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

A menos que se diga o contrário, consideraremos o argumento de um número complexo como  $\theta = \text{Arg}(z)$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

Como  $a = |z| \cos \theta$  e  $b = |z| \sin \theta$ , temos a seguinte **representação polar** ou **representação trigonométrica**:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad r = |z|; \quad (1)$$

de modo que  $r$  e  $\theta$  são designados as **coordenadas polares** de  $z$ .



**Figura 2: Forma Polar do número complexo  $z = a + bi$**

A seguir, um resultado interessante:

**Proposição 2.2** *Sejam  $z, w$  dois números complexos. Então,*

$$\arg(z \cdot w) = (\arg(z) + \arg(w)) \pmod{2\pi} \quad e \quad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = (\arg(z) - \arg(w)) \pmod{2\pi}. \quad (2)$$

### Observação 2.3 (Comparação com Análise Real)

1. Um argumento pode ser associado a qualquer número complexo **não nulo** de  $z$ . Contudo, para  $z = 0$  não é possível dar a  $\arg(z)$  qualquer definição que faça sentido.
2. Se tomarmos  $\arg(z)$  no intervalo  $(-\pi, \pi]$ , a relação entre um número complexo  $z$  e seu argumento é unívoca; ou seja, todo número complexo não nulo tem precisamente **um** ângulo entre  $(-\pi, \pi]$ . Todavia, o intervalo  $(-\pi, \pi]$  nada tem de especial; também estabelecemos uma relação unívoca se usarmos o intervalo  $(0, 2\pi]$  para definir o valor principal do argumento de  $z$ . Para o intervalo  $(-\pi, \pi]$ , o eixo real negativo é análogo a uma barreira que decidimos não cruzar; a denominação técnica dessa barreira é **corte de ramo** ou **linha de corte de ramo** (branch cut). Se usarmos  $(0, 2\pi]$ , o corte de ramo é o eixo positivo. Veremos novamente este conceito ao tratar da função logaritmo complexa.
3. A parte “cosseno i seno” da parte da forma polar de um número complexo é, às vezes, abreviada por *cis*, ou seja,

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r \operatorname{cis} \theta.$$

Esta notação, empregada principalmente na engenharia, não será utilizada neste texto.

### Fórmulas do Produto e do quociente

De posse da representação polar, vamos deduzir uma regra conveniente para a multiplicação.

Sejam

$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

dois números complexos quaisquer. Então

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

Com isto, note que  $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$ .

Vamos deduzir um resultado análogo para a divisão, no entanto, note que

$$\frac{1}{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta} = \frac{\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta,$$

temos:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1}{\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)] \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)].\end{aligned}$$

Analogamente,  $\operatorname{Arg}(z_1 / z_2) = \theta_1 - \theta_2 = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2)$ .

### Fórmula De Moivre

A fórmula da multiplicação estende-se para um número qualquer de fatores, isto é, de demonstração simples, podemos obter

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)].$$

Quando todos os fatores são iguais e de módulo unitário, obtemos a **fórmula De Moivre**:

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$

Esta fórmula também é válida para expoentes negativos. De fato,

$$\begin{aligned}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-n} &= \frac{1}{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n} = \frac{1}{\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta} \\ &= \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta = \cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta).\end{aligned}$$

### 2.1.3 Raízes $n$ -ésimas

Diz-se que um número  $z$  é **raiz  $n$ -ésima** de um dado número complexo  $a$ , se  $z^n = a$ . Como veremos logo a seguir, um número complexo não-nulo possui  $n$  raízes distintas. Para isso, consideremos o número dado  $a \neq 0$  em sua forma polar, bem como, a raiz que desejamos encontrar na sua forma polar, ou seja,

$$a = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \quad \text{e} \quad z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi).$$

Utilizando com deleite a fórmula De Moivre, a equação  $z^n = a$  assume a seguinte forma:

$$\rho^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Como a igualdade de números complexos requer a igualdade das partes reais e das partes ima-

ginárias, separadamente, devemos ter

$$\rho^n \cos n\varphi = r \cos \theta \quad \text{e} \quad \rho^n \sen n\varphi = r \sen \theta.$$

Estas equações, por sua vez, equivalem a  $\rho^n = r$  e  $n\varphi = \theta + 2k\pi$ , onde  $k$  é um inteiro. Daqui segue-se que se  $\rho$  é a raiz  $n$ -ésima positiva de  $r$ , donde

$$z = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r} \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sen \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]. \quad (3)$$

Esta fórmula produz  $n$  raízes distintas, quando  $k$  se atribuem os valores de  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

No caso particular quando  $a = 1$ , temos que  $\theta = 0$  e a fórmula (3) se reduz a

$$z = \cos \left( \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sen \left( \frac{2k\pi}{n} \right) \quad (4)$$

que são chamadas raízes  $n$ -ésimas da unidade.

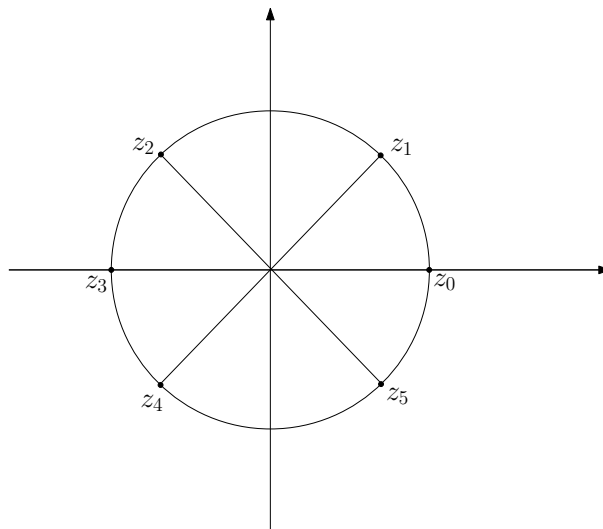
**Exemplo 2.1** Calcule as raízes de  $z^6 = 1$  e esboce tais raízes no plano complexo.

**Solução:** Note que recorrendo à (3) temos que

$$z_0 = 1,$$

$$z_1 = \cos(\pi/3) + i \sen(\pi/3) = 1/2 + i\sqrt{3}/2, \quad z_2 = -\bar{z}_1, \quad z_3 = -1, \quad z_4 = -z_1, \quad z_5 = \bar{z}_1.$$

A figura (3) ilustra as raízes para a equação  $z^6 = 1$ :



**Figura 3:** Raízes da equação  $z^6 + 1 = 0$

### Observação 2.4 (Comparação com Análise Real)

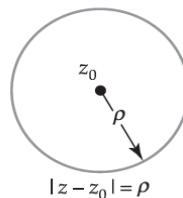
1. Como consequência de (3), podemos dizer que o sistema de números complexos é **fechado** sob a operação de extração de raízes. Isso significa que para qualquer número  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z^{1/n}$  também está em  $\mathbb{C}$ . O sistema de números reais não goza de propriedade similar de fechamento, pois se  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^{1/n}$  não está necessariamente em  $\mathbb{R}$ .
2. Do ponto de vista geométrico, as  $n$  raízes  $n$ -ésimas de um número complexo  $z$  também podem ser interpretadas como os vértices de um polígono regular com  $n$  lados que está inscrito em uma circunferência de raio  $\sqrt[n]{r}$  e centro na origem. A plausibilidade deste fato pode ser comprovada por uma reinspeção da figura anterior.
3. Quando  $m$  e  $n$  são inteiros positivos sem fator comum, (3) nos permite definir uma **potência racional** de  $z$ , ou seja,  $z^{m/n}$ . Pode ser mostrado que o conjunto de valores  $(z^{1/n})^m$  é igual ao conjunto de valores  $(z^{1/m})^n$ . Este conjunto de  $n$  valores comuns é definido como  $z^{m/n}$ .

#### 2.1.4 Conjuntos de Pontos no Plano Complexo

**Definição 2.3** Consideremos  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Como  $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  representa a distância entre os pontos  $z = x + iy$  e  $z_0 = x_0 + iy_0$ , os pontos  $z = x + iy$  que satisfazem a equação

$$|z - z_0| = \rho, \quad \rho > 0, \quad (5)$$

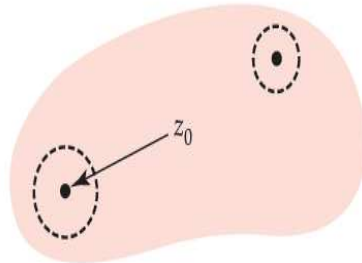
estão localizados na **circunferência** de raio  $\rho$ , centrada em  $z_0$ , como ilustrado na figura a seguir.



**Figura 4:** Circunferência de raio  $\rho$ .

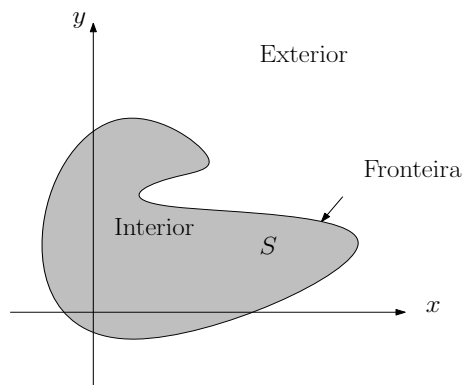
**Definição 2.4** Dizemos que o conjunto de pontos definidos por  $|z - z_0| \leq \rho$  é um **disco** de raio  $\rho$  e centro  $z_0$ . O conjunto de pontos definidos por  $|z - z_0| < \rho$  é dito **vizinhança** de  $z_0$ .

**Definição 2.5** Um ponto  $z_0$  é denominado **ponto interior** de um conjunto  $S$  do plano complexo se existir alguma vizinhança de  $z_0$  que esteja inteiramente contida em  $S$ . Se todo ponto  $z$  de um conjunto  $S$  for um ponto interior, então  $S$  é denominado **conjunto aberto**.



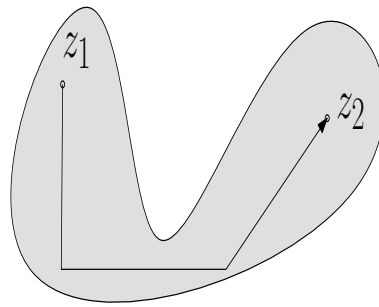
**Figura 5: Conjunto aberto**

**Definição 2.6** Se toda vizinhança de um ponto  $z_0$  contiver pelo menos um ponto que está em  $S$  e pelo menos um ponto que não está em  $S$ , então  $z_0$  é denominado **ponto de fronteira**. A coleção de pontos de fronteira de  $S$  é chamada **fronteira** de  $S$ . Um ponto  $z$  que não é um ponto interior nem um ponto de fronteira de um conjunto  $S$  é chamado **ponto exterior** de  $S$ .



**Figura 6: Interior, fronteira e exterior de  $S$ .**

**Definição 2.7** Se um par qualquer de pontos  $z_1$  e  $z_2$  de um conjunto  $S$  puder ser ligado por uma linha poligonal que consiste em segmentos de retas conectados e inteiramente contidos no conjunto,  $S$  é denominado um conjunto **conexo**. A figura a seguir, ilustra o conceito. Um conjunto conexo aberto é denominado **domínio**.



**Figura 7: Conjunto conexo**

### **Observação 2.5 (Comparação com Análise Real)**

No estudo de matemática é provável que o aluno tenha se deparado com o conceito de **infinito**. Por exemplo, em um curso de cálculo o aluno deve ter estudado **limites no infinito**, quando o comportamento de funções é examinado à medida que  $x$  aumenta ou diminui indefinidamente. Como há exatamente duas direções em uma reta de números, é conveniente representar as noções de “aumentar” indefinidamente e “diminuir” indefinidamente de forma simbólica por  $x \rightarrow +\infty$  e  $x \rightarrow -\infty$ , respectivamente. No entanto, podemos nos sair muito bem sem a designação  $\pm\infty$  usando um “ponto ideal” denominado **ponto infinito** e denotado simplesmente  $\infty$ . Para isso, associamos qualquer número real  $a$  a um ponto  $(x_0, y_0)$  na circunferência unitária  $x^2 + y^2 = 1$  da seguinte forma: traçamos uma reta do ponto  $(a, 0)$ , no eixo  $x$  ou reta horizontal de números, ao ponto  $(0, 1)$ , na circunferência. O ponto  $(x_0, y_0)$  na circunferência é a intersecção da linha reta e da circunferência. A figura (8) deixa claro que quanto mais distante o ponto  $(a, 0)$  estiver da origem, mais próximo  $(x_0, y_0)$  se torna de  $(0, 1)$ . Para completar a correspondência com **todos** os pontos na circunferência,  $(0, 1)$  é associado ao  $\infty$ . O conjunto que consiste nos números reais  $\mathbb{R}$  é dito **sistema de números reais estendido**.

Em nosso estudo, o análogo à reta de números é o plano complexo. Recordemos que como  $\mathbb{C}$  não é ordenado, a noção de “aumento” ou “diminuição” de  $z$  não faz sentido. Contudo, sabemos que se aumentarmos ou diminuirmos o módulo  $|z|$  de um número complexo  $z$  o número se distancia da origem. Se permitirmos que  $z$  cresça indefinidamente, digamos ao longo do eixo real ao do eixo imaginário, não precisaremos distinguir “direções” ao longo desses eixos, como  $z \rightarrow +\infty, z \rightarrow -\infty, z \rightarrow +i\infty$  ou  $z \rightarrow -i\infty$ . Em análise complexa, usamos apenas a noção de  $\infty$ , pois podemos estender o sistemas de números complexos  $\mathbb{C}$  de forma análoga à que acabamos de descrever para o sistema de números reais  $\mathbb{R}$ . Todavia, agora associamos um número complexo a um ponto na superfície de uma esfera de raio unitário, denominada **esfera de Riemann**. Ao desenhar uma reta do número  $z = a + ib$  no plano complexo, representado por  $A = (a, b, 0)$ , ao polo norte  $N = (0, 0, 1)$  da esfera  $x^2 + y^2 + u^2 = 1$ , determinamos um único

ponto  $A' = (x_0, y_0, u_0)$  na superfície da esfera unitária. Como mostra a figura (9), um número complexo de módulo muito grande está distante de  $S = (0, 0, 0)$  e, por conseguinte, o ponto  $A'$  está próximo de  $N$ . Assim, cada número complexo é associado a um único ponto na superfície da esfera. Como o ponto  $N$  não está associado a qualquer número  $z$  no plano, o associamos a  $\infty$ . O resultante sistema consiste em  $\mathbb{C}$  e no “ponto ideal” é denominado **sistema de números complexos estendido**.

Esta forma de associar ou mapear os números complexos a uma esfera – com polo norte em  $N$  é denominada **projeção estereográfica**.

Para um número finito  $z$ , temos  $z + \infty = \infty + z = \infty$  e, para  $z \neq 0$ ,  $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$ . Adicionalmente, para  $z \neq 0$ , escrevemos  $z/0 = \infty$  e, para  $z \neq \infty$ ,  $z/\infty = 0$ . Expressões como  $\infty - \infty$ ,  $\infty/\infty$ ,  $\infty^0$  e  $1^\infty$  não podem ser definidas se são denominadas indeterminações ou formas indeterminadas.

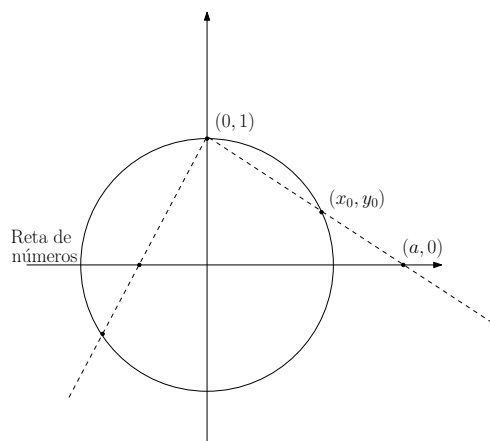


Figura 8: Círculo unitário

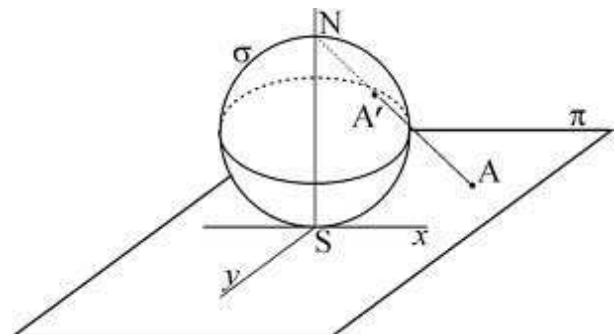
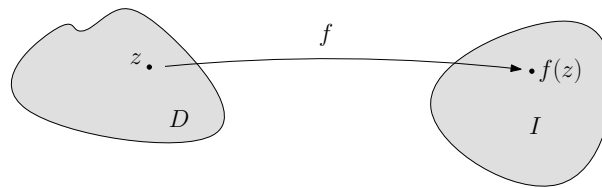


Figura 9: Esfera unitária

### 2.1.5 Funções Complexas

Vamos considerar funções definidas em conjuntos complexos, assumindo valores complexos. Mais precisamente, seja  $D$  um conjunto de números complexos e seja  $f$  a lei que faz corresponder, a cada elemento  $z$  do conjunto  $D$ , um único número complexo, que denotaremos por  $f(z)$ . Nestas condições, diz-se que  $f$  é uma função com **domínio**  $D$ . O conjunto  $I$  dos valores  $w = f(z)$ , correspondentes a todos valores de  $z$  em  $D$ , é chamado a **imagem** de  $D$  pela função  $f$  conforme ilustra figura a seguir:





**Figura 10: Função de variável complexa**

A cada função  $w = f(z)$  de uma variável complexa  $z = u + iv$  estão associadas duas funções reais de variáveis reais  $x$  e  $y$ , dadas por

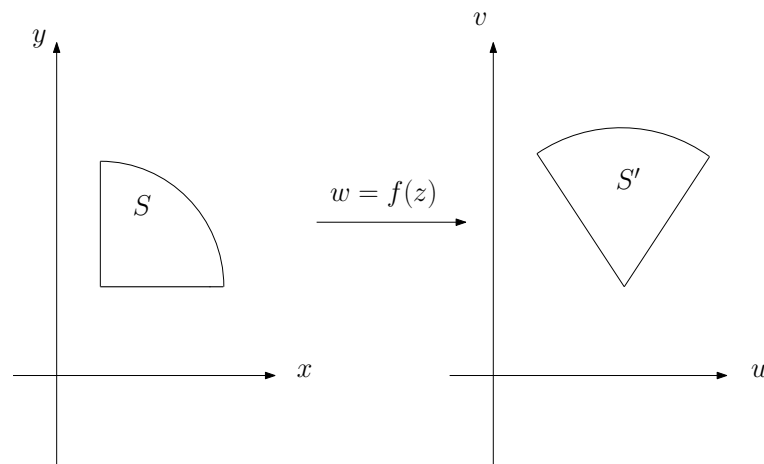
$$u = u(x, y) = \Re(f(z)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad v = v(x, y) = \Im(f(z)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

**Observação 2.6 (Comparação com Análise Real)**

*Há uma grande diferença entre as análises real e complexa:*

*não é possível desenhar o gráfico de uma função complexa*

*De fato, se  $y = f(x)$  for uma função de valor real de uma variável real  $x$ , o gráfico de  $f$  é definido como o conjunto de todos os pontos  $(x, f(x))$  no plano cartesiano bidimensional. Uma definição análoga pode ser feita para funções complexas. No entanto, se  $w = f(z)$  for uma função complexa,  $z$  e  $w$  residem no plano complexo. Por conseguinte, o conjunto de todos os pontos  $(z, f(z))$  reside no espaço quadridimensional (duas dimensões da entrada  $z$  e duas dimensões da saída  $w$ ). É óbvio que um subconjunto do espaço quadridimensional não pode ser ilustrado com facilidade. Em vez de usar um gráfico, representaremos uma função complexa por meio de uma **transformação complexa** com o uso de duas figuras: a primeira descreve um subconjunto  $S$  no plano complexo, e a segunda, a imagem  $S'$  do conjunto  $S$  sob a transformação complexa. A figura a seguir, apresenta um exemplo de uma transformação complexa.*



**Figura 11:** Imagem de  $S$  sob a transformação  $w = f(z)$ .

A primeira função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  será definida a seguir.

### 2.1.6 A Função Exponencial Complexa

Admitimos que o leitor, com sua familiaridade com as funções trigonométricas, a constante de Euler  $e$  e a função exponencial  $e^x$ , conceitos estes que são estudados nos cursos de Cálculo. Lembramos, ainda, os desenvolvimentos dessas funções em séries de MacLaurin, válidos para todos os valores reais da variável  $x$ :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots; \quad (6)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots; \quad (7)$$

$$\text{sen } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (8)$$

Vamos tomar o desenvolvimento (6) como base para definir  $e^z$  com  $z$  complexo. Formalmente, assuma que este desenvolvimento seja válido para nossos propósitos e que  $e^z$  para  $z$  complexo, então para  $y$  real, tem-se:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \dots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i\frac{y^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right),$$

ou seja, em vista de (7) e (8), obtemos:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Por outro lado, da definição da exponencial no caso de um expoente qualquer  $z = x + iy$  temos

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy},$$

doravante,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y). \quad (9)$$

### Propriedades:

1.  $e^0 = 1$ .
2.  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ ;
3.  $e^{-z} = 1/e^z$ ;
4.  $(e^z)^n = e^{nz}$ ,  $n$  inteiro;
5.  $e^z \neq 0$  para todo  $z$ ;
6.  $|e^z| = e^{\Re(z)}$ ;
7.  $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i$ ,  $k$  inteiro.
8.  $e^z$  é periódica com período puramente imaginário  $2\pi i$ .

**Observação 2.7** Se  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , então  $e^{i\theta} = e^0 (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , portanto,

$$z = r e^{i\theta}.$$

### 2.1.7 Funções Trigonométricas

Como vimos na seção anterior

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \quad \text{e} \quad e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y,$$

logo é natural definir

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (10)$$

$$\operatorname{sen} z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (11)$$

$$\operatorname{tg} z := \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \quad (12)$$

$$\operatorname{cotg} z := \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, \operatorname{sec} z := \frac{1}{\cos z}, \operatorname{cossec} z := \frac{1}{\operatorname{sen} z} \quad (13)$$

### Propriedades:

1.  $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$ .
2.  $\cos z = \cos x \cosh y + i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$ .
3.  $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$ .
4.  $\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z$  e  $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ .
5.  $\operatorname{sen}(z + \pi) = -\cos z$ ,  $\cos(z + \pi) = -\operatorname{sen} z$  e  $\operatorname{tg}(z + \pi) = \operatorname{tg} z$ .
6.  $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$  e  $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y$ .
7.  $\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$  e  $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$ .
8.  $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$  e  $\cos(-z) = \cos z$ .
9. 
$$\begin{cases} \operatorname{sen} z = 0 \Rightarrow z = 0 \text{ ou } z = \pm n\pi \\ \cos z = 0 \Rightarrow z = \pm \frac{(2n-1)\pi}{2} \end{cases}$$

As funções hiperbólicas seno e cosseno, são definidas, como no caso de variáveis reais, pelas seguintes expressões:

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

### Propriedades:

1.  $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$ .

2.  $\operatorname{sen} z = -i \operatorname{senh}(iz)$  e  $\operatorname{cos} z = \operatorname{cosh}(iz)$ .
3.  $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z$  e  $\operatorname{cosh}(-z) = \operatorname{cosh} z$ .
4.  $\operatorname{senh}(z \pm w) = \operatorname{senh} z \operatorname{cosh} w \pm \operatorname{cosh} z \operatorname{senh} w$ .
5.  $\operatorname{cosh}(z \pm w) = \operatorname{cosh} z \operatorname{cosh} w \pm \operatorname{senh} z \operatorname{senh} w$ .

### 2.1.8 A Função Logaritmo Natural de $z$

O **logaritmo** de um número complexo  $z = re^{i\theta} \neq 0$ , é definido assim:

$$\ln z = \ln r + i\theta,$$

onde  $r$  denota o logaritmo real do número  $r > 0$ . O logaritmo está definido para todo número complexo  $z \neq 0$ , e se reduz ao logaritmo real quando  $\theta = 0$ .

Na realidade, a fórmula acima permite atribuir ao logaritmo vários valores distintos, dependendo do argumento usado para o número  $z$ . Por causa disso, costuma-se dizer que o logaritmo é uma **função multivalente**. O ponto  $z = 0$  é chamado *ponto de ramificação* de  $\ln z$ , justamente porque, descreve um círculo centrado na origem e volta ao ponto inicial, a função  $\ln z$  retorna aumentada de  $2\pi i$ .

É claro que o valor de uma função tem de ser determinado univocamente. Para tanto, se considerarmos

$$\ln z = \ln r + i\theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi,$$

teremos uma função univalente. A escolha de um valor prefixado para o argumento na definição da função  $\ln$  é chamado **ramo** de  $\ln$ . Então, como dizemos acima, a função  $\ln$  está bem definida se, e somente se, o ramo da função estiver no intervalo  $(-\pi, \pi]$ . Tal ramo é dito **ramo principal** de  $\ln z$ , já que poderíamos admitir que  $\operatorname{arg}(z)$  possuam valores num intervalo da forma  $(y_0, y_0 + 2\pi]$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ .

**Observação 2.8** 1. Neste contexto, denotaremos

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i\operatorname{Arg}(z), \quad \operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]. \quad (14)$$

2. Pode-se mostrar que com o logaritmo definido acima, a função exponencial e a função logaritmo são funções inversas.

**Propriedades:** Dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , temos:

1.  $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$ .
2.  $\ln(z_1 / z_2) = \ln z_1 - \ln z_2$ .
3.  $\operatorname{Ln} z_1^n = n \operatorname{Ln} z_1$ .
4.  $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = (\operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2) \pmod{2\pi i}$ .
5.  $\operatorname{Ln}(z_1 / z_2) = (\operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2) \pmod{2\pi i}$ .
6.  $\operatorname{Ln} z_1^n = n \operatorname{Ln} z_1 \pmod{2\pi i}$ .

**Observação 2.9** Podemos dar uma definição ao número complexo  $z^\alpha$  com  $z, \alpha \in \mathbb{C}$ . Seja  $z \neq 0$ , então definimos  $z^\alpha$  pela equação

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}.$$

**Observação 2.10 (Comparação com Análise Real)**

1. A função exponencial real é biunívoca, mas a função exponencial complexa não é.
2.  $\ln x, x \in \mathbb{R}$  é uma função unívoca, enquanto  $\ln z$  é multivalente.
3. No caso complexo,  $e^z = -2$  e  $\ln(-2)$  fazem sentido, o que não ocorre no caso real.
4.  $(z^{\alpha_1})^{\alpha_2} \neq z^{\alpha_1 \alpha_2}$  a menos que  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ .
5.  $|\operatorname{sen} x|, |\operatorname{cos} x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , contudo, por exemplo,  $|\operatorname{cos}(i)|, |\operatorname{sen}(2+i)| > 1$ .
6. Nas propriedades de funções trigonométricas, item 6, pelo fato que as função seno hiperbólica real é ilimitada, temos que as funções seno e cosseno complexas são **ilimitadas**.
7. Diferentemente das funções hiperbólicas reais, as funções hiperbólicas complexas são periódicas e têm infinitos zeros.

### 2.1.9 Limite e Continuidade

A definição de limite e continuidade que daremos agora é formalmente a mesma dos cursos de Cálculo.

**Definição 2.8** Seja  $z_0$  um ponto de acumulação do domínio  $D$  de uma função  $f$ . Diz-se que  $f$  tem limite  $L$  com  $z$  tendendo a  $z_0$  se dado qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$z \in D, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Escreve-se  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ .

Quando o ponto  $z_0$  pertence ao domínio de  $f$  e  $L = f(z_0)$ , dizemos que  $f$  é contínua no ponto  $z_0$  e escrevemos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

De maneira análoga, as propriedades de limites e de continuidade de números reais podem ser estendidas aos números complexos.

### 2.1.10 Função Analítica

A definição de derivada de uma função de variável complexa é formalmente a mesma que no caso de uma função de variável real. Seja  $f$  uma função cujo domínio é uma região  $R$  e seja um ponto  $z \in R$ . Diz-se que  $f$  é **derivável** no ponto  $z$  se existe o limite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

ou equivalente, se existe

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Quando esse limite existe, ele define uma nova função de  $z$ , a **derivada** de  $f$ , denotada por  $f'$ . Assim,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

**Definição 2.9** Diz-se que uma função  $f$  é **analítica** numa região  $R$  se ela é derivável em cada ponto de  $R$ .

**Exemplo 2.2** Note que,

1.  $f(z) = \frac{(z+2)(3z-1)^2}{z(z-3)(z+i)^2}$  é analítica exceto, nos pontos  $z = 0, 3$  e  $-i$ . Em tais pontos onde a função não é analítica, daremos por abuso de notação, o nome de singularidades.
2. Os polinômios  $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$  são funções analíticas em todo o plano. Neste caso, chamamos as funções analíticas em todo o plano de funções **inteira**.
3. A função  $\exp(z)$  é inteira.

**Observação 2.11** Todas as funções com que o leitor se familiarizou em seu curso de Cálculo são analíticas, quando convenientemente estendidas ao plano complexo. Assim,

- Uma função constante é analítica e sua derivada é zero.

- A função  $f(z) = z^n$ ,  $z \in \mathbb{C}$  é analítica e sua derivada é  $f'(z) = nz^{n-1}$ .
- Se  $f$  e  $g$  são analíticas, as funções a seguir são analíticas e calcula-se com as conhecidas regras:

$$\begin{array}{ll}
 1. \frac{d}{dz}(f(z) + g(z)) = f'(z) + g'(z) & 5. \frac{d}{dz}(e^z) = e^z \\
 2. \frac{d}{dz}(f(z) \cdot g(z)) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) & 6. \frac{d}{dz}(\cos z) = -\operatorname{sen} z. \\
 3. \frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{g(z)f'(z) - f'(z)g(z)}{[g(z)]^2} & 7. \frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) = \cos z. \\
 4. \frac{d}{dz}(f(g(z))) = f'(g(z))g'(z). & 8. \frac{d}{dz}(\ln z) = \frac{1}{z}.
 \end{array}$$

### Observação 2.12 (Comparação com Análise Real)

No cálculo real, a derivada de uma função  $y = f(x)$  em um ponto  $x$  tem várias interpretações. Por exemplo,  $f'(x)$  é a inclinação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x, f(x))$ . Quando a inclinação é positiva, negativa ou nula, a função, por sua vez, está aumentando, diminuindo ou, possivelmente, tem um máximo ou mínimo. Além disso,  $f'(x)$  é a taxa de variação instantânea de  $f$  em  $x$ . Em um contexto físico, esta taxa de variação pode ser interpretada como velocidade de um objeto móvel. **Nenhuma dessas interpretações se aplica ao cálculo complexo.** Deste modo, vale a pergunta: “O que significa a derivada de uma função complexa  $w = f(z)$ ?” Eis a resposta: na análise complexa, o interesse principal **não** é o que a derivada de uma função **significa** ou **representa**, mas sim se a função  $f$  realmente **tem** derivada, fato este, há de dizer muito sobre a função analisada.

#### 2.1.11 As Equações de Cauchy-Riemann

As Equações de Cauchy-Riemann nos fornecem informações sobre a derivabilidade e a analiticidade de uma função complexa  $f(z)$  em um dado ponto  $z$  do plano complexo. Estas informações são apresentadas nos seguintes teoremas:

**Teorema 2.1** A função  $f$  é analítica em um ponto  $z$ , se e somente se,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  que satisfaz

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (15)$$



### 2.1.12 Integração Complexa

De modo análogo ao caso real, podemos definir a **integral de linha complexa**  $\int_C f(z) dz$  ou  $\oint_C f(z) dz$  é a integral de  $f(z)$  ao longo da curva  $C$ .

Tal integral pode ser definida e representada em termos das integrais reais, ou seja, fazendo-se

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{e} \quad dz = dx + i dy,$$

obtemos

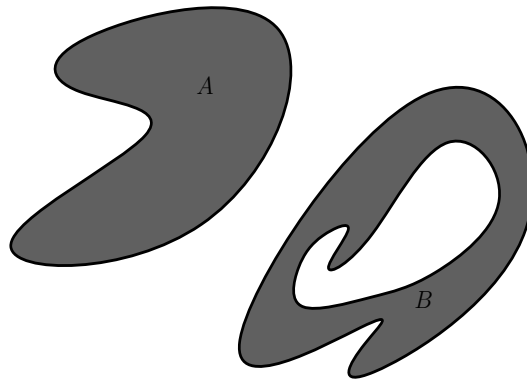
$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u(x, y)dx - v(x, y)dy) + i \oint_C (u(x, y)dy + v(x, y)dx),$$

desde que existam as integrais reais do lado direito da equação acima.

O caminho  $C$  pode ser aberto ou fechado, mas devemos especificar a direção de integração, pois uma mudança de direção resulta em mudança no sinal da integral. As integrais complexas são, portanto, redutíveis a integrais reais curvilíneas e possuem as análogas propriedades como no caso real.

### 2.1.13 Teorema Integral de Cauchy

As integrais de funções analíticas possuem algumas propriedades muito importantes. Provavelmente a mais importante delas seja descrita pelo teorema integral de Cauchy. Para apresentar este teorema precisamos do conceito de conjunto simplesmente conexo. Um conjunto  $D$  é dito **conexo** se quaisquer dois de seus pontos podem ser unidos por uma linha totalmente pertencente a  $D$ . Um conjunto  $D$  é dito **simplesmente conexo** se qualquer curva simples fechada contida em  $D$ , pode ser deformada, sempre totalmente contida em  $D$ , até se tornar um ponto. A figura abaixo ilustra duas regiões conexas  $A$  e  $B$ , dos quais  $A$  é simplesmente conexa, mas  $B$  não é, pois esta possui um “buraco”.



**Figura 12: Exemplo de conjunto simplesmente conexo**

**Teorema 2.2 (Teorema Integral de Cauchy)** *Seja  $f(z)$  uma função analítica num domínio simplesmente conexo  $D$ . Se  $C$  é um caminho fechado simples de  $D$ , então*

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

**Exemplo 2.3** *Seja  $C$  a circunferência unitária, centrada na origem, orientada positivamente.*

1.  $\int_C e^z dz = 0$ , pois  $f(z) = e^z$  é uma função analítica, para todo  $z$  complexo.
2.  $\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$ . Mas, isto não contradiz o teorema de Cauchy, pois  $f(z) = z^{-1}$  não é analítica na origem, a qual pertence a região  $R$  interior ao caminho  $C$ .

**Teorema 2.3** *Se  $f(z)$  é analítica em um domínio simplesmente conexo  $D$  e, se  $F(z)$  for uma integral indefinida de  $f(z)$ , ou seja,  $F'(z) = f(z)$ , então para todos os caminhos situados em  $D$  que ligam dois pontos  $a$  e  $b$  em  $D$ , têm-se que*

$$\int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a).$$

Este teorema permite o cálculo das integrais de linha de funções complexas através de uma integral indefinida. Com isto, podemos chegar aos seguintes resultados, donde  $C$  é uma constante arbitrária:

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$ | 3. $\int e^z dz = e^z + C$               |
| 2. $\int \frac{1}{z} dz = \ln z + C$                  | 4. $\int a^z dz = \frac{a^z}{\ln a} + C$ |

$$5. \int \operatorname{sen} z dz = -\cos z + C \qquad 7. \int \sec^2 z dz = \operatorname{tg} z + C$$

$$6. \int \cos z dz = \operatorname{sen} z + C$$

A consequência mais importante do teorema de Cauchy é a fórmula integral de Cauchy. Esta fórmula é dada pelo teorema abaixo.

**Teorema 2.4 (Fórmula Integral de Cauchy)** *Seja  $f(z)$  uma função analítica no interior e sobre um caminho fechado  $C$ . Se  $z_0$  é um ponto qualquer no interior de  $C$ , então:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta, \quad (16)$$

onde a integração é efetuada no sentido positivo ao longo de  $C$ .

A fórmula integral de Cauchy, mostra que o valor de uma função analítica numa região é determinado em toda a região por seus valores na fronteira. A demonstração deste teorema é omitida. Devemos observar também que a fórmula integral de Cauchy nos permite calcular uma integral de linha desde que a função a ser integrada tenha uma única singularidade no interior do caminho  $C$ .

### Derivadas de Todas as Ordens:

Como importante consequência da fórmula de Cauchy, enunciaremos um resultado que diz que uma função analítica possui derivadas de todas as ordens.

**Teorema 2.5** *Uma função analítica numa região  $D$  possui derivadas de todas as ordens, as quais, por sua vez, são também analíticas em  $D$  e*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

onde  $n$  é um inteiro positivo qualquer.

Demonstrando-se alguns resultados por meio do uso do Teorema de Cauchy, obtém-se o

**Teorema 2.6 (Teorema Fundamental da Álgebra)** *Todo polinômio  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  de grau  $n \geq 1$  e coeficientes  $a_n$ 's complexos possui ao menos uma raiz.*

**Exemplo 2.4** Considere o polinômio  $p(x) = x^2 + 1$ . É notório que  $p$  não possui raiz real. No entanto, ao considerarmos  $p(z) = z^2 + 1$ , donde os coeficientes são complexos, o Teorema Fundamental da Álgebra nos diz que este polinômio possui ao menos uma raiz. Como se pode ver, tal polinômio possui duas raízes, a saber  $i$  e  $-i$ .

## 2.2 CAMPOS ELETROSTÁTICOS

A força elétrica de atração ou repulsão entre partículas carregadas é governada pela Lei de Coulomb. Essa força é o gradiente da função  $\phi$ , chamada **potencial eletrostático**. Em pontos quaisquer onde se configura ausência de cargas,  $\phi$  é a solução da equação de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (17)$$

As superfícies  $\phi = \text{const}$  são chamadas de **superfícies equipotenciais**. Em cada ponto  $P$  no qual o gradiente de  $\phi$  é diferente do vetor nulo, esse gradiente é perpendicular à superfície  $\phi = \text{const}$  no ponto  $P$ ; ou seja, a força elétrica tem direção perpendicular à superfície equipotencial. Os problemas que discutiremos neste capítulo são **bidimensionais** (pela razão já citada no início do capítulo), isto é, eles modelam sistemas físicos que se encontram no espaço tridimensional, mas de tal forma que o potencial  $\phi$  independa de uma das coordenadas espaciais, dependendo somente de duas coordenadas, que chamaremos de  $x$  e  $y$ . Então a **equação de Laplace** torna-se

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}. \quad (18)$$

As superfícies equipotenciais agora aparecem como linhas equipotenciais (curvas) no plano  $xy$ .

### 2.2.1 Funções Harmônicas

**Definição 2.10** Uma função de valor real  $\phi$  de duas variáveis  $x$  e  $y$  que possui derivadas parciais de primeira e segunda ordem contínuas em um domínio  $D$  e satisfaz a equação de Laplace é dita **Harmônica** em  $D$ .

Funções harmônicas são encontradas no estudo de temperaturas e potenciais. Essas aplicações serão apresentadas posteriormente. O próximo teorema mostra que as partes real e imaginária de uma função analítica são harmônicas.

**Teorema 2.7** *Seja uma função complexa  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$  analítica em um domínio  $D$ . Então, as funções  $u(x,y)$  e  $v(x,y)$  são harmônicas em  $D$ .*

**Demonstração:** assumamos que  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$  é analítica em um domínio  $D$  e que  $u$  e  $v$  têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas em  $D$ . Como  $f$  é analítica, as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em todo ponto  $z$ . Diferenciando os dois lados de  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  em relação à  $x$  e diferenciando ambos os lados de  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  em relação à  $y$ , obtemos, respectivamente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}. \quad (19)$$

Pela hipótese de continuidade mencionada no início da demonstração, as derivadas parciais mistas  $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$  e  $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$  são iguais.

Deste modo, somando as duas equações em (20) temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 u = 0,$$

o que mostra que  $u(x,y)$  é harmônica. Analogamente, diferenciando os dois lados de  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  em relação à  $y$  e diferenciando ambos os lados de  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  em relação à  $x$ , obtemos, respectivamente,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \quad (20)$$

Assim, subtraindo as duas últimas equações obteremos  $\nabla^2 v = 0$ , o que mostra que  $v(x,y)$  é harmônica.

□

Suponhamos agora que  $u(x,y)$  seja uma dada função real que é harmônica em um domínio  $D$ . Se for possível encontrar outra função harmônica  $v(x,y)$ , de modo que  $u$  e  $v$  satisfaçam as equações de Cauchy-Riemann em todo o domínio  $D$ , a função  $v(x,y)$  é denominada **conjugada harmônica** de  $u(x,y)$ . Combinando as funções  $u(x,y) + iv(x,y)$ , obtemos uma função complexa que é analítica em  $D$ .

**Proposição 2.3** *Seja  $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$  uma função analítica em um domínio  $D$  que não*

contém a origem. Então  $u(r, \theta)$  satisfaz a equação de Laplace em coordenadas polares:

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \quad (21)$$

**Solução:** De fato, temos que as equações de Cauchy-Riemann na forma polar são

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (22)$$

$$r \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (23)$$

(consulte ((ZILL; SHANAHAN, 2011) por exemplo, para verificar a prova ).

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \\ \Rightarrow r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= -\frac{\partial v}{\partial \theta} + r \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta}. \end{aligned} \quad (24)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -r \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= -r \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta}. \end{aligned} \quad (25)$$

Deste modo, somando (22), (24) e (25), obtemos (21).

□

### 2.2.2 Famílias Ortogonais

Suponhamos que a função  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  seja analítica em algum domínio  $D$ . Então, as partes real e imaginária de  $f$  podem ser usadas para definir duas famílias de curvas em  $D$ . As equações

$$u(x, y) = c_1 \quad \text{e} \quad v(x, y) = c_2 \quad (26)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias reais, denominadas **curvas de nível** de  $u$  e  $v$ , respectivamente. As curvas de nível (26) são as **famílias ortogonais**. Isto significa que cada curva

em uma família é ortogonal a cada curva na outra família. Mais precisamente, em um ponto de intersecção  $z_0 = x_0 + iy_0$ , onde assumiremos  $f'(z_0) \neq 0$ , a reta tangente  $L_1$  à curva de nível  $u(x, y) = u_0$  e a reta tangente  $L_2$  à curva de nível  $v(x, y) = v_0$  são perpendiculares ( figura 13). Os números  $u_0$  e  $v_0$  são definidos como  $c_1 = u(x_0, y_0) = u_0$  e  $c_2 = v(x_0, y_0) = v_0$ . Para provar que  $L_1$  e  $L_2$  são perpendiculares em  $z_0$ , demonstraremos que a inclinação de uma tangente é o recíproco negativo da inclinação da outra; para isso, mostraremos que o produto das inclinações é  $-1$ .

Com efeito, inicialmente, usamos a regra da cadeia de diferenciação parcial para diferenciar  $u(x, y) = u_0$  e  $v(x, y) = v_0$  em relação à  $x$ . Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

A seguir, resolvemos cada uma das equações anteriores para  $\frac{dy}{dx}$  :

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y}$$

inclinação de uma tangente à curva  $u(x_0, y_0) = u_0$

e

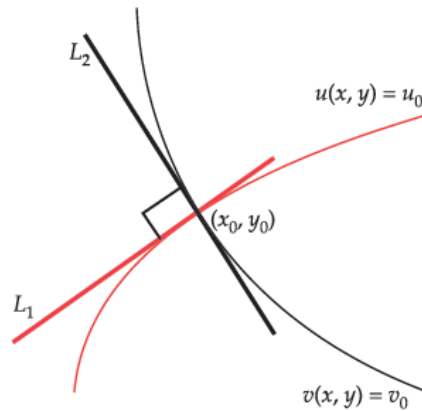
$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial v / \partial x}{\partial v / \partial y}$$

inclinação de uma tangente à curva  $v(x_0, y_0) = v_0$

Em  $(x_0, y_0)$ , pelas duas últimas equações, identificamos as equações de Cauchy-Riemann  $u_x = v_y$  e  $u_y = -v_x$ . Pelo fato que  $f'(z_0) \neq 0$ , vemos que o produto das duas funções de inclinação é

$$\left( - \frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y} \right) \cdot \left( - \frac{\partial v / \partial x}{\partial v / \partial y} \right) = -1,$$

provando o almejado.



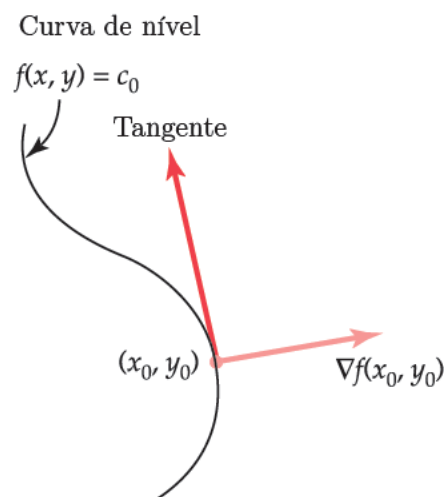
**Figura 13:** As tangentes  $L_1$  e  $L_2$  em  $(x_0, y_0)$  são perpendiculares.

### 2.2.3 Vetor Gradiente

No cálculo vetorial, se  $f(x, y)$  for uma função escalar diferenciável, o **gradiente** de  $f$  denotado por  $\nabla f$  é definido como o vetor bidimensional

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (27)$$

Como mostrado na figura (14), o vetor  $\nabla f(x_0, y_0)$  em um ponto  $(x_0, y_0)$ , é perpendicular à curva de nível de  $f(x, y) = c_0$ , onde  $c_0 = f(x_0, y_0)$  (para uma prova de fato, consulte por exemplo, (ZILL; SHANAHAN, 2011), página 124).



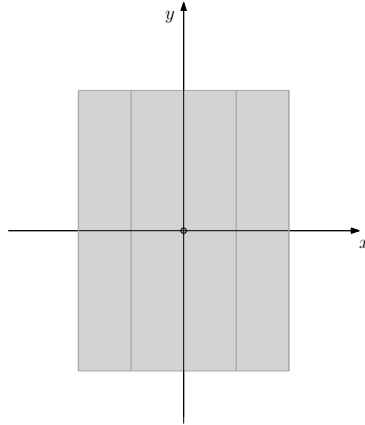
**Figura 14:** Gradiente é perpendicular à curva de nível em  $(x_0, y_0)$ .

Ilustraremos essas ideias com alguns simples exemplos:



**Exemplo 2.5** *Potencial entre placas Paralelas*

Encontre o potencial  $\phi$  do campo entre duas placas condutoras paralelas que se estendem ao infinito conforme fig. 15 e que são mantidos nos potenciais  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , respectivamente.



**Figura 15:** Potencial entre placas paralelas

**Solução:** Tendo que as placas se estendem ao infinito sentido ao eixo  $y$  logo  $\phi$  depende somente da coordenadas de  $x$  e a equação de Laplace se torna  $\phi'' = 0$ . Logo integrando duas vezes, obtemos  $\phi = ax + b$  onde as constantes  $a$  e  $b$  são determinadas pelos valores de contorno de  $\phi$  nas placas. Por exemplo, se as placas correspondem a  $x = 1$  temos:

$$\phi = ax + b$$

$$\phi_1 = 1a + b$$

$$\phi_1 - a = b$$

Por outro lado se  $x = -1$  temos:

$$\phi_2 = a(-1) + b$$

$$\phi_2 = -a + b$$

$$\phi_2 + a = b$$

Concluimos que:

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &= 2b \\ b &= \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \end{aligned}$$

e, sendo assim,

$$\begin{aligned}\phi_2 + a &= \phi_1 - a \\ \phi_2 - \phi_1 &= 2a \\ a &= \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\end{aligned}$$

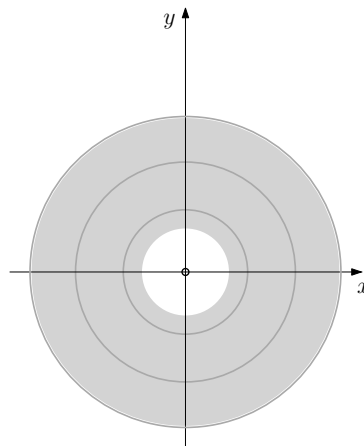
Portanto a solução é :

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_1)x + \frac{1}{2}(\phi_2 + \phi_1) \quad (28)$$

□

### Exemplo 2.6 *Potencial entre Cilindros Coaxiais*

Encontre o potencial  $\phi$  do campo entre dois condutores cilíndricos coaxiais que se estendem ao infinito em ambas as extremidades fig. 16, mantidas nos potenciais  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , respectivamente.



**Figura 16: Potencial entre cilindros coaxiais**

**Solução:** Nesta situação  $\phi$  depende de  $r$  e  $r$  depende de  $\sqrt{x^2 + y^2}$  por razão de simetria e a equação de Laplace com coordenadas polares conforme proposição (2.3) se torna  $r^2 U_{rr} + rU_r + U_{\theta\theta} = 0$  com  $U_{\theta\theta} = 0$  e  $U = \phi$ . Portanto,  $r^2 \phi'' + r\phi' = 0$  e por conseguinte,

$$\begin{aligned}r^2 \phi'' + r\phi' &= 0 \\ r^2 \phi'' &= -r\phi' \\ \phi'' &= -\frac{1}{r}\phi' \\ \frac{\phi''}{\phi'} &= -\frac{1}{r}\end{aligned}$$

Fazendo o processo de Integração obtemos:

$$\begin{aligned}\ln \phi' &= -\ln r + \tilde{a} \\ \ln \phi' &= \ln r^{-1} + \tilde{a} \\ \phi' &= \frac{1}{r} a \\ \phi' &= \frac{a}{r}\end{aligned}$$

Integrando novamente obtemos:

$$\phi = a \ln r + b$$

Podemos encontrar os valores de  $a$  e  $b$  atribuindo valores para  $r$ . Para  $r = 1$ , veja que

$$\begin{aligned}\phi_1 &= a \ln 1 + b \\ \phi_1 &= b\end{aligned}$$

Para  $r = 3$ , vem que

$$\begin{aligned}\phi_2 &= a \ln 3 + b \\ \phi_2 - b &= a \ln 3 \\ \phi_2 - \phi_1 &= a \ln 3 \\ \frac{\phi_2 - \phi_1}{\ln 3} &= a\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\phi_2 - \phi_1}{\ln 3} \ln r + \phi_1 \\ \phi &= (\phi_2 - \phi_1) \frac{\ln r}{\ln 3} + \phi_1 \\ \phi &= (\phi_2 - \phi_1) \log_3 r + \phi_1\end{aligned}\tag{29}$$

□

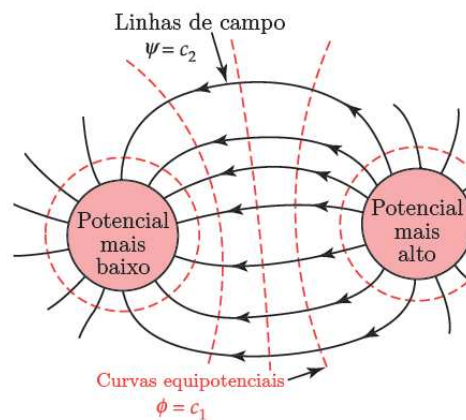
### 2.3 POTENCIAL COMPLEXO

Consideremos que  $\phi(x, y)$  seja harmônica num certo domínio  $D$  e que  $\psi(x, y)$  seja o conjugado harmônico de  $\phi$  em  $D$ . Então:

$$F(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y) \quad (30)$$

é uma função analítica de  $z = x + iy$ . Essa função  $F$  é chamada de **potencial complexo** correspondente ao potencial real  $\phi$ . Sabendo que para um dado  $\phi$ , o conjugado  $\psi$  é determinado de modo único, exceto pela adição de uma constante real. Logo podemos dizer o potencial complexo, sem causar quaisquer desentendimentos. O uso de  $F$  tem duas vantagens, uma técnica e outra física. Tecnicamente,  $F$  é mais fácil de manipular do que as partes reais ou imaginárias, em associação com os métodos de análise complexa. Fisicamente,  $\psi$  tem um significado. Como vimos anteriormente, as curvas de nível  $\phi$  e  $\psi$  são famílias ortogonais, isto é, as curvas  $\psi = const.$  interceptam em ângulos retos as curvas de nível denominadas **linhas equipotenciais**  $\phi = const.$  no plano  $xy$  [exceto quando  $F'(z) = 0$ ].

Consequentemente elas têm a direção da força elétrica, sendo, por isso, chamadas **linhas de força**. Elas correspondem aos caminhos ao longo dos quais uma partícula carregada se moverá no campo eletrostático, como ilustra a figura a seguir( elétrons em um microscópio eletrônico etc. )



**Figura 17: Campo elétrico**

### **Exemplo 2.7 Potencial Complexo**

À luz do exemplo (2.5), mostre que o conjugado vale  $\psi = ay$  e encontre o potencial complexo correspondente.

**Solução:** Para obter o potencial complexo é necessário encontrar a conjugada harmônica através das Equações de Cauchy-Riemann, sendo assim como a Parte real do potencial é  $\phi = ax + b$

encontraremos o conjugado como se segue:

$$\begin{aligned}\phi &= ax + b \\ \phi'(x) &= a \\ \Rightarrow \psi'(y) &= a \\ \Rightarrow \psi &= ay.\end{aligned}$$

Assim, o potencial complexo é

$$\begin{aligned}F(z) &= \phi + i\psi \\ &= ax + b + iay\end{aligned}$$

e as linhas de forças são retas horizontais  $y = \text{const.}$  paralelas ao eixo  $x$ .

□

**Exemplo 2.8** No exemplo (2.6), temos  $\phi = a \ln r + b = a \ln |z| + b$ . O conjugado vale  $\phi = a \text{Arg}z$  como notaremos a seguir:

**Solução:** Veja que

$$\begin{aligned}\phi &= a \cdot \ln r + b \\ \phi &= a \cdot \ln |z| + b \\ \phi &= a \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \frac{a}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

Encontrando as derivadas de  $\phi$  com relação a  $x$  e  $y$  podemos usar as equações de Cauchy-Riemann para encontrar  $\psi$  ( a parte imaginária da função do Potencial complexo).

Assim,

$$\phi_x = a \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{a}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} \quad (31)$$

e

$$\phi_y = a \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} = a \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{y}{x^2} \quad (32)$$

Para encontrarmos o conjugado harmônico usando Cauchy-Riemann novamente, temos:

$$\phi_x = \psi_y \quad (33)$$

$$\phi_y = -\psi_x \quad (34)$$

Logo, integrando (31) com respeito à  $y$  e usando (33), obtemos:

$$\begin{aligned} \int \phi_x dy &= \int \frac{a}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} dy \\ \int \psi_y dy &= a \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + h(y) \\ \psi &= a \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + h(y). \end{aligned} \quad (35)$$

De modo análogo, integrando (32) com respeito à  $x$  e usando (34), resulta que

$$\begin{aligned} -\int \phi_y dx &= -a \cdot \int \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{y}{x^2} dx \\ \psi = \int \psi_x dx &= a \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + f(x) \end{aligned} \quad (36)$$

Deste modo, derivando (35) com respeito à  $x$  e comparando com (31) (usando novamente (33)), vem que  $h'(y) = 0$ , donde  $h(y) = c_1$ . Usando o mesmo raciocínio para equação (36), resulta que  $f(x) = c_2$ . Tomando  $c_1 = c_2 = 0$ , obtemos que  $\psi = a \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \text{Arg}z$ .

Portanto, o Potencial Complexo é dado por:

$$a \cdot \ln|z| + b + ai\text{Arg}z$$

$$a(\ln|z| + i\text{Arg}z) + b$$

$$aLnz + b$$

□

**Exemplo 2.9** Encontraremos agora o Potencial Complexo no exemplo 3, donde naquela ocasião,  $\phi(x, y) = a + b\text{Arg}z$ .

**Solução:** de fato, como

$$\phi(x, y) = a + b\text{Arg}z = a + b \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Note que

$$\begin{aligned}\phi_x &= \frac{-b}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{y}{x^2} \\ &= \frac{-b}{\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)} \frac{y}{x^2} \\ &= \frac{-by}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

Pela primeira equação de Cauchy-Riemann  $\phi_x = \psi_y$  observe que da identidade anterior, temos:

$$\begin{aligned}\psi_y &= \frac{-b}{2} \cdot \frac{2y}{x^2+y^2} \\ \int \psi_y dy &= \frac{-b}{2} \cdot \int \frac{2y}{x^2+y^2} dy \\ \psi &= \frac{-b}{2} \cdot \ln(x^2+y^2) \\ \psi &= -b \cdot \ln \sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

O leitor pode verificar que chegaríamos ao mesmo resultado se trabalhássemos com  $\phi_y$  ao invés de  $\phi_x$ . Sendo assim, concluímos que:

$$\begin{aligned}F(z) &= \phi(x,y) + i\psi(x,y) \\ &= a + b \operatorname{Arg}z - ib \cdot \ln|z| \\ &= a - ib \cdot (i \operatorname{Arg}z + \ln|z|) \\ &= a - ib \operatorname{Ln}z.\end{aligned}$$

□

## 2.4 PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DE CALOR

A equação de Laplace também governa os problemas de condução de calor que são estacionários, ou seja, independentes do tempo. Com efeito, a condução de calor em um corpo de material homogêneo é modelada pela **equação de calor**

$$T_t = c^2 \nabla^2 T \quad (37)$$

onde a função  $T$  é a temperatura,  $T_t = \frac{\partial T}{\partial t}$ ,  $t$  é o tempo e  $c^2$  é uma constante positiva (dependendo do material constituinte do corpo). Logo, se o problema é estacionário, então  $T_t = 0$ , e em duas dimensões a equação do calor reduz-se a uma equação de Laplace bidimensional.

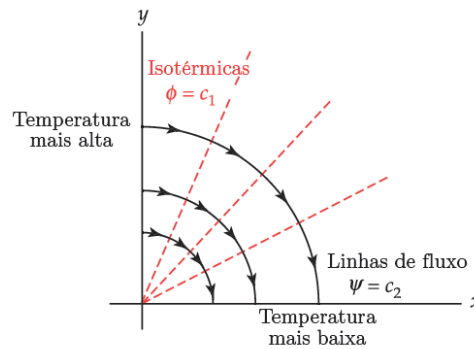
$$\nabla^2 T = T_{xx} + T_{yy} = 0 \quad (38)$$

de modo que é possível tratar esse problema pelos métodos que estamos estudando.

$T(x,y)$  é o chamado **potencial de calor**, sendo a parte real do **potencial complexo do calor**

$$F(z) = T(x,y) + i\psi(x,y). \quad (39)$$

As curvas  $T(x,y) = c_1$  são chamadas de **isotermas** (= linhas de temperatura constante) e as curvas  $\psi(x,y) = c_2$  são as **linhas de fluxo de calor**, pois ao longo delas ocorre o fluxo de calor das altas temperaturas para as baixas.



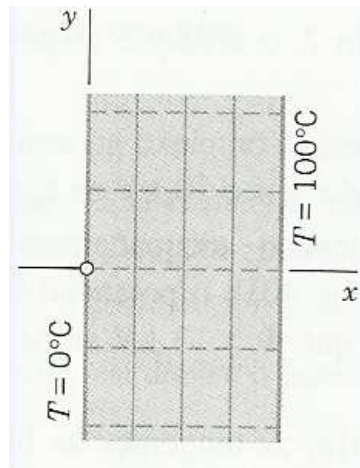
**Figura 18: Fluxo de calor**

Isso significa que todos os exemplos até aqui considerados agora podem ser reinterpretados como problemas de condução de calor. As linhas equipotenciais eletrostáticas  $\phi(x,y) = c_1$  agora são isotermas  $T(x,y) = c_1$ . e as linhas de força elétrica são linhas de condução de calor, como veremos nos dois exemplos seguintes.

### **Exemplo 2.10** *Temperatura entre Placas Paralelas*

*Encontre a temperatura entre duas placas paralelas  $x = 0$  e  $x = d$  na fig. 19, com valores de temperatura  $0$  e  $100^\circ\text{C}$ , respectivamente.*





**Figura 19: Temperatura entre Placas Paralelas**

**Solução:** Temos que se  $x = 0$  a temperatura é 0, e quando  $x = d$  a temperatura é  $100^\circ$ . Como o potencial é entre placas paralelas, como feito no exemplo (2.5), concluímos que  $T(x,y) = ax + b$ , vamos então encontrar os valores de  $a$  e  $b$  para modelar a situação:

Quando  $x = 0$ , temos  $T = 0$ , logo,

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + b &= 0 \\ \Rightarrow b &= 0 \end{aligned}$$

quando  $x = d$ , então,  $T = 100$  e assim,

$$\begin{aligned} a \cdot d + b &= 100 \\ a \cdot d + 0 &= 100 \\ a \cdot d &= 100 \\ \Rightarrow a &= \frac{100}{d} \end{aligned}$$

Logo como obtemos os valores de  $a$  e  $b$  encontramos a modelagem dessa situação

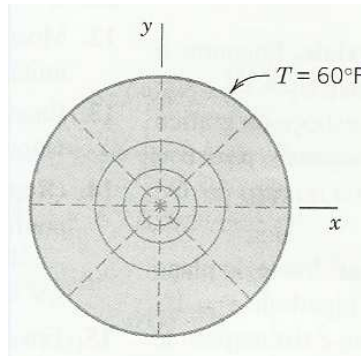
$$T(x,y) = \frac{100}{d} \times [^\circ\text{C}]$$

O Potencial complexo correspondente é  $F(z) = \left(\frac{100}{d}\right)z$ . O calor flui horizontalmente na direção negativa de  $x$  ao longo da linha  $y = \text{const.}$

□

**Exemplo 2.11** *Distribuição de Temperatura entre um Cabo e um Cilindro*

Obtenha o campo de temperatura ao redor de um cabo longo e fino de raio  $r_1 = 1\text{ mm}$  que é eletricamente aquecido a  $T_1 = 500^\circ\text{F}$  e envolto por um cilindro de raio  $r_2 = 100\text{mm}$ , o qual é mantido à temperatura  $T_2 = 60^\circ\text{F}$  por meio de resfriamento com ar. veja a fig. 20 (o cabo está na origem do sistema de coordenadas)



**Figura 20:** Temperatura entre um Cabo e um Cilindro

**Solução:** Temos que  $T$  depende somente de  $r$  por razões de simetria. Logo,

$$T(x,y) = a \ln r + b.$$

As condições de contorno são  $r_1 = 1\text{mm}$  e  $T_1 = 500^\circ\text{F}$  e  $r_2 = 100\text{mm}$  e  $T_2 = 60^\circ\text{F}$ .

Sendo assim para  $T = 500$  e  $r = 1$ , temos que

$$500 = a \ln 1 + b$$

$$500 = a \cdot 0 + b$$

$$\Rightarrow 500 = b.$$

Por outro lado, para  $T = 60$  e  $r = 100$  resulta que

$$60 = a \ln 100 + b$$

$$60 = a \ln 100 + 500$$

$$-440 = a \ln 100$$

$$\frac{-440}{\ln 100} = a$$

$$\Rightarrow -95,54 = a$$

Logo  $T(x,y)$  é dada por:

$$T(x,y) = 500 - 95,54 \ln r$$

□

## 2.5 ESCOAMENTO DE FLUIDOS - FLUIDO IDEAL

A equação de Laplace também desempenha um papel fundamental em hidrodinâmica, no escoamento estacionário de fluidos não viscosos sob condições físicas que discutiremos mais adiante nesta seção. Para podermos aplicar os métodos de análise Complexa, nossos problemas serão **bidimensionais**, de modo que o **vetor velocidade**  $V$  pelo qual se fornece o movimento do fluido depende apenas de duas variáveis espaciais  $x$  e  $y$ , e o movimento do fluido é o mesmo em todos os planos paralelos ao plano  $xy$ .

Dessa forma, podemos usar para o vetor velocidade  $V$  uma função complexa

$$V = V_1 + iV_2 \quad (40)$$

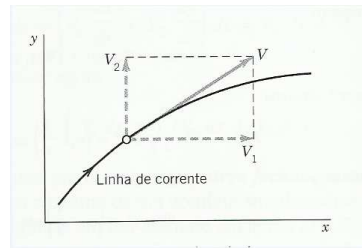
que fornece a magnitude  $|V|$  e a direção  $ArgV$  da velocidade em cada ponto  $z = x + iy$ . Aqui,  $V_1$  e  $V_2$  são os componentes da velocidade nas direções  $x$  e  $y$  e,  $V$  é tangente à trajetória das partículas em movimento, sendo chamado de **linha de corrente do movimento** do fluido fig. 21.

Mostramos que, sob suposições adequadas (que explicaremos em detalhes nos exemplos a seguir), para um dado escoamento existe uma função analítica

$$F(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y) \quad (41)$$

chamada de **potencial complexo** do escoamento, de tal forma que as linhas de corrente do movimento do fluido são dadas por  $\psi(x,y) = const.$ , e o vetor velocidade ou, de forma reduzida, a **velocidade** é dada por

$$V = V_1 + iV_2 = \overline{F'(z)} \quad (42)$$



**Figura 21: Linha de corrente do movimento**

onde a barra em  $F'(z)$  denota o complexo conjugado. A função  $\psi$  é chamada de **função corrente**. A função  $\phi$  é chamada de **potencial de velocidade**. As curvas  $\phi(x,y) = cte$  são chamadas de **linhas equipotenciais**. O vetor velocidade  $V$  é o **gradiente** de  $\phi$ ; por definição, isso significa que

$$V_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad V_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (43)$$

Além disso, como  $F(z)$  é analítica,  $\phi$  e  $\psi$  satisfazem à equação de Laplace

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \text{e} \quad \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \quad (44)$$

Ao passo que, em eletrostática, os contornos (placas condutoras) são linhas equipotenciais, no escoamento de fluidos nos contornos dos quais o fluido não pode escoar, devem corresponder a linhas de corrente do movimento. Logo, no escoamento de fluidos, a função de corrente é de particular importância.

**Observação 2.13** *Em mecânica, um fluxo é denominado **fluxo bidimensional** se o fluido (que pode ser água, ou até mesmo, o ar que se desloca em baixa velocidade) se desloca em planos paralelos ao plano  $xy$  e as características físicas e de movimento do fluido em cada plano forem precisamente as mesmas que no plano  $xy$ . Suponhamos que  $F(x,y)$  seja o campo de velocidade bidimensional de um fluido viscoso que é **incompressível**, ou seja, um fluido para o qual  $\text{div}F=0$  ou  $\nabla \cdot F = 0$ . O fluxo é **irrotacional** se  $\text{rot}F=0$  ou  $\nabla \times F = 0$ . Um fluxo fluido cujo fluxo bidimensional seja irrotacional é denominado **fluido ideal**. O campo de velocidades  $V$  de um fluido ideal é um campo gradiente e pode ser representado por (42).*

Antes de discutirmos as condições para a validade das afirmações envolvendo (41)-(44), consideremos dois escoamentos de interesse prático, de modo que veremos primeiramente o que está se passando do ponto de vista prático.

**Observação 2.14** *Muitos problemas que envolvem escoamento de fluidos podem ser resolvidos*

usando transformações conformes. Assim, para determinar o potencial complexo de velocidade determinamos uma transformação conforme da região  $D$  em um domínio no plano  $w$  que mapeie a fronteira  $C$  de  $D$  em uma reta horizontal. Neste manuscrito mediante nossa proposta, não abordaremos tais transformações. Para mais detalhes, consulte por exemplo, (ZILL; SHANAHAN, 2011) e (KREYSZIG, 2011) ou (SPIEGEL, 1977).

**Exemplo 2.12** Analisemos o escoamento em torno de uma Quina, isto é, construamos um fluxo de um fluido ideal na região  $D$ , o primeiro quadrante  $x > 0, y > 0$ .

**Solução:** Para a região  $D$ , temos que o Potencial Complexo é

$$F(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

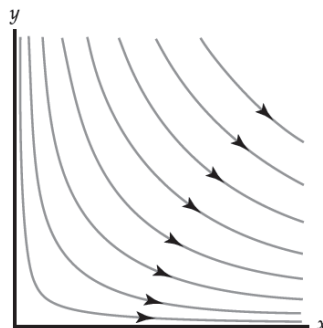
que modela o escoamento com

Linhas Equipotenciais	$\phi = x^2 + y^2 = \text{cte.}$
Trajetórias de escoamento (função corrente)	$\psi = 2xy = \text{cte.}$

O Vetor Velocidade  $V_1 = 2x$  e  $V_2 = 2y$  portanto a Velocidade (módulo do vetor velocidade vale:

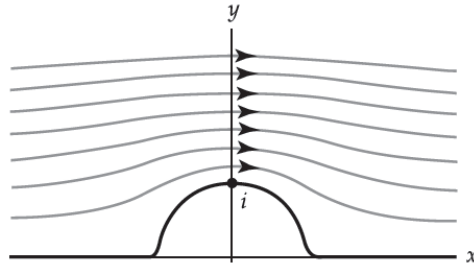
$$|v| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Deve-se interpretar esse escoamento como o fluxo em um canal cujas as fronteiras são os eixos coordenados positivos e uma hipérbole, digamos,  $2xy = \text{cte}$ . Algumas linhas de corrente foram desenhadas na figura (22). Esta figura deve deixar claro o porquê deste fluxo é referido como “fluxo em torno de uma quina”.



**Figura 22: Fluxo em torno de uma quina**

**Exemplo 2.13** *Construamos um fluxo em torno de um cilindro no domínio que consiste em todos os pontos fora da circunferência unitária  $|z| = 1$  e no semiplano superior  $y > 0$ , mostrado na figura (23).*



**Figura 23: Fluxo em torno de um cilindro**

**Solução:** Seja  $D$  o domínio mostrado na figura (23). Por meio de transformação conforme, mostra-se que o Potencial Complexo é

$$F(z) = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

que modela o escoamento com

Linhas Equipotenciais

$$\phi = x + \frac{x}{x^2 + y^2} = \text{cte.}$$

Trajatórias de escoamento (função corrente)

$$\psi = y - \frac{y}{x^2 + y^2} = \text{cte.}$$

Algumas linhas de fluxo são ilustradas na figura (23).

□

### 3 CONCLUSÃO

Nas ciências e na engenharia a equação diferencial parcial de Laplace aparece, com frequência, como um modelo matemático de alguns fenômenos invariantes no tempo e, neste contexto, nosso problema foi resolver a equação sujeita a certas exigências físicas denominadas condições de contorno ou condições de fronteira. Devido a relação obtida graças ao teorema (2.7), isto é,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

funções analíticas são fontes de um número ilimitado de soluções da equação de Laplace, e fomos capazes de identificar uma que atenda os diversos exemplos apresentados. Esta é apenas uma razão porque a teoria de análise complexa é tão essencial no estudo de matemática aplicada.

## REFERÊNCIAS

KREYSZIG, E. **Matemática superior para engenharia**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

SHOKRANIAN, S. **Variável Complexa I**. Brasília: UNB, 2002.

SPIEGEL, M. **Variáveis Complexas. Coleção Schaum**. São Paulo: Ed McGraw Hill, 1977.

ÁVILA, G. **Variáveis Complexas e Aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

ZILL, D. G.; SHANAHAN, P. D. **Curso Introdutório à Análise Complexa com Aplicações**. São Paulo: LTC, 2011.