UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CRISTIANE BENDER

UM ESTUDO DE ANÁLISE REAL ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2011

CRISTIANE BENDER

UM ESTUDO DE ANÁLISE REAL ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Adilandri Mércio Lobeiro

Co-orientador: Juan Amadeo Soriano Palomino

CAMPO MOURÃO

2011

TERMO DE APROVAÇÃO

Cristiane Bender

Um estudo de análise real através da resolução de exercícios

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Adilandri Mércio Lobeiro

Prof. PhD. Juan Amadeo Soriano Palomino

Prof. Msc. Nayene Michele Pitta Paião

Campo Mourão, 2011

Aos meus pais Darci e Ana Maria

AGRADECIMENTOS

À Deus em primeiro lugar, pois é aquele que possibilita e acrescenta todas as outras coisas.

Aos meus pais, pela vida, pelo exemplo e por tudo o que representam para mim.

Ao meu namorado, que talvez não tenha compreendido, mas respeitou a distância quando precisei buscar algo melhor para minha vida.

Ao meu orientador que fez da loucura dos seus sonhos a possibilidade de realizar os meus. Este que muito me ensinou e me deu esperança e condições para ir mais além.

À minha amiga, minha irmã, Tatiane, que sem dúvida foi quem me deu o maior empurrão para fazer esta especialização e que esteve a cada dia estudando e construindo os seus conhecimentos junto com os meus.

À mais dois membros da minha família de Campo Mourão, Marco e Vanessa, que também contribuiram para que os momentos de estudo fossem mais agradáveis.

Juntando-se a esses, posso citar o Roney, o Alex, a Tita, o Michael, a Renata, o Brill, o Wilian, a Jéssica, a Keila, a Hissai, a Simone, a Valéria, a Luciana, o Fernando, a Elieger, o Izonei, a Clícia e a Joice que não foram apenas colegas de curso, tornaram-se amigos, pessoas muito especiais para mim.

“O detalhe é o tudo que completa o todo”

(Autor desconhecido)

RESUMO

BENDER, Cristiane. Um estudo de análise real através da resolução de exercícios. 122 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

Este trabalho é um estudo de análise real através da resolução alternada de exercícios do livro Análise Real volume 1 Funções de uma variável real. Cujo objetivo principal é aprender esta disciplina e ainda minimizar as dificuldades encontradas pelos estudantes da mesma, procurando oferecer ao leitor uma resolução detalhada dos exercícios de forma a contribuir para o aprendizado dessa disciplina que é tão importante para o saber matemático. Em cada capítulo consta uma revisão dos principais resultados utilizados para resolução dos exercícios. Foram abordados os seguintes conteúdos: Conjuntos Finitos e Infinitos, Números Reais, Sequências de Números Reais, Séries Numéricas, Algumas Noções Topológicas, Limites de Funções e Funções Contínuas.

Palavras-chave: estudo, análise real, resolução de exercícios.

ABSTRACT

BENDER, Cristiane. A study of real analysis by solving exercises. 122 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

This is a study of real analysis by solving alternating exercises from the book Real Analysis Volume 1 Functions of one variable real. Whose main objective is to learn the subject and minimizeg the difficulties encountered by students of it, trying to offer the reader a comprehensive resolution of the exercises in order to contribute to the learning of that subject which is so important when learning math. Each chapter contains a review of the main results used for solving exercises. We addressed the following contents: Finite and Infinite Sets, Real Numbers, Sequences of Real Numbers, Numerical Series, Some Topological Notions, Limits of Functions and Continuous Functions.

Keywords: study, real analysis, solving exercises.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como foco a resolução de parte dos exercícios do livro “Análise Real volume 1 Funções de Uma Variável”do autor Elon Lages Lima.

Preciso deixar claro que estudar Análise, é o grande objetivo deste trabalho. E que uma pessoa com o mesmo objetivo deve tomar cuidado ao utilizá-lo. Devo alertá-lo que o conhecimento é um processo que depende de cada etapa. Digo isso, porque os erros fazem parte deste processo, e pode ser muito útil desde que aprendamos com eles. Você deve ler a teoria quantas vezes seja necessário até entender muito bem, depois deve ler o exercício com atenção para então tentar resolvê-lo, nunca olhe a resolução antes de tentar exaustivamente resolvê-lo, pois é neste momento que você realmente estará aprendendo os conceitos.

Utilize este trabalho para ver um jeito diferente do seu de resolver o exercício e talvez encontrar uma forma mais fácil. Não há uma única maneira de resolver, tentamos fazer da forma mais didática possível, para facilitar o entendimento de cada passagem.

Este trabalho possibilitou o estudo dos seguintes conteúdos: conjuntos finitos e infinitos, números reais, sequências de números reais, séries numéricas, noções topológicas, limites de funções e funções contínuas. E contém a resolução dos exercícios de forma alternada, pois é um trabalho realizado junto com a aluna Tatiane Tambarussi que traz em sua monografia os exercícios não resolvidos aqui.

Em cada capítulo, além dos exercícios, consta uma lista dos principais resultados utilizados para resolução destes, porém para um estudo do conteúdo recomenda-se o uso do livro base, (LIMA, 2008), onde se encontra a demonstração dos resultados, além de exemplos, muito importantes para a compreensão do conteúdo. Ou ainda as seguintes bibliografias (LIMA, 2009), (ÁVILA, 2004) ou (FIGUEIREDO, 1975).

2 CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

2.1 NÚMEROS NATURAIS

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado pelos seguintes fatos:

1. Existe uma função injetiva $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada número natural $n \in \mathbb{N}$ chama-se o sucessor de n.

2. Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Princípio da Indução: Se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$ tem-se também $s(n) \in X$ $(s(X) \subset X)$, então $X = \mathbb{N}$.

As propriedades (1),(2),(3) acima chamam-se os axiomas de Peano. O Princípio da Indução (axioma (3)) significa que todo número natural n pode ser obtido a partir de 1, tomando-se seu sucessor $s(1)$, o sucessor deste, $s(s(1))$, e assim por diante.

O princípio da indução serve de base para um método de demonstração de teoremas sobre números naturais, conhecido como o método de indução (ou recorrência), o qual funciona assim: "se uma propriedade P é válida para o número 1 e se, supondo P válida para o número n daí resultar que P é válida também para seu sucessor $s(n)$, então P é válida para todos os números naturais".

No conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais são definidas duas operações fundamentais:

- Adição:
$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & (m,n) & & m+n \end{array}$$

- Multiplicação:
$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & (m,n) & & m \cdot n \end{array}$$

que são caracterizadas pelas seguintes igualdades, que lhes servem de definição:

1. $m+1 = s(m)$;

2. $m+s(n) = s(m+n)$;

3. $m\cdot 1 = m$;

4. $m\cdot(n+1) = m\cdot n+m$;

Temos as seguintes propriedades da adição e da multiplicação:

1. Associatividade:
   - $(m+n)+p = m+(n+p)$;
   - $m\cdot(n\cdot p) = (m\cdot n)\cdot p$

2. Distributividade: $m\cdot(n+p) = m\cdot n+m\cdot p$;

3. Comutatividade:
   - $m+n = n+m$;
   - $m\cdot n = n\cdot m$

4. Lei do corte:
   - $m+n = m+p \Rightarrow n = p$;
   - $m\cdot n = m\cdot p \Rightarrow n = p$

Abordaremos agora a relação de ordem entre números naturais. Dados os números naturais m,n, dizemos que:

- m é menor do que n ($m<n$) quando existe $p\in\mathbb{N}$ tal que $n = m+p$;

- $m\leq n$ significa que $m<n$ ou $m = n$.

Proposição 2.1 *(Transitividade) Se $m<n$ e $n<p$ então $m<p$.*

Dados $m,n\in\mathbb{N}$ quaisquer, vale uma, e somente uma, das três alternativas:

$$m<n,\quad m>n\quad \text{ou}\quad m=n.$$

Uma das mais importantes propriedades da relação de ordem $m<n$ entre os números naturais é o chamado princípio da boa-ordenação.

Teorema 2.1 (Princípio da Boa Ordenação) . *Todo subconjunto não vazio* $A \subset \mathbb{N}$ *possui um menor elemento, isto é, um elemento* $n_0 \in A$ *tal que* $n_0 \leq n$ *para todo* $n \in A$.

2.2 CONJUNTOS FINITOS

Indicaremos pelo símbolo I_n o conjunto $\{1, \cdots, n\}$ dos números naturais desde 1 até n. Notação: $I_n = \{p \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq n\}$

Definição 2.1 *Um conjunto* X *diz-se finito quando é vazio* ($X = \emptyset$) *ou quando existe, para algum* $n \in \mathbb{N}$, *uma bijeção* $\varphi : I_n \rightarrow X$. *Escrevendo* $x_1 = \varphi(1), x_2 = \varphi(2), \cdots, x_n = \varphi(n)$ *temos então* $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

Observação 2.1

- *A bijeção* φ *chama-se uma contagem dos elementos de* X *e o número* n *chama-se o número de elementos, ou número cardinal do conjunto finito* X. *Notação:* $Card\, X = n$.
- *Se* $X = \emptyset$, *diz que o número de elementos de* X *é zero, ou seja,* $Card\, X = 0$;
- *Cada conjunto* I_n *é finito e possui* n *elementos, ou seja,* $Card\, I_n = n$;
- *Se* $f : X \rightarrow Y$ *é uma bijeção, um desses conjuntos é finito se, e somente se, o outro é.*

Lema 2.1 *Se* $f : X \rightarrow Y$ *é uma bijeção e* $a \in X$, $b \in Y$. *Então existe uma bijeção* $g : X \rightarrow Y$ *tal que* $g(a) = b$.

Teorema 2.2 *Se* A *é um subconjunto próprio de* I_n ($A \subset I_n$ *e* $A \neq I_n$). *Então não existe uma bijeção* $f : A \rightarrow I_n$.

Corolário 2.1 *Se existem bijeções* $f : I_n \rightarrow X$ *e* $g : I_m \rightarrow X$ *então* $m = n$.

Corolário 2.2 *Seja* X *um conjunto finito. Uma aplicação* $f : X \rightarrow X$ *é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva.*

Corolário 2.3 *Se* Y *é subconjunto próprio de* X ($Y \subset X$ *e* $Y \neq X$) *e* X *é finito então não pode existir uma bijeção* $f : X \rightarrow Y$.

Teorema 2.3 *Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.*

Corolário 2.4 *Dada* $f : X \rightarrow Y$

1. *Se* f *é injetiva e* Y *é finito então* X *é finito.*

2. *Se* f *é sobrejetiva e* X *é finito então* Y *é finito.*

Definição 2.2 *Um subconjunto* $X \subset \mathbb{N}$ *diz-se limitado quando existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $x \leq p$ *para todo* $x \in X$.

Corolário 2.5 *Um subconjunto* $X \subset \mathbb{N}$ *é finito se, e somente se, é limitado.*

2.3 CONJUNTOS INFINITOS

Definição 2.3 X *é um conjunto infinito quando* X *não é finito (*$X \neq \emptyset$ *e não existe, seja qual for* $n \in \mathbb{N}$*, bijeção* $f : I_n \rightarrow X$*).*

Teorema 2.4 *Se* X *é infinito, então existe uma aplicação injetiva* $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

Corolário 2.6 *Um conjunto* X *é infinito se, e somente se, existe uma bijeção* $\varphi : X \rightarrow Y$ *sobre um subconjunto próprio* $Y \subset X$.

2.4 CONJUNTOS ENUMERÁVEIS

Definição 2.4 *Um conjunto* X *é enumerável quando é finito ou existe uma bijeção* $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

Observação 2.2

- $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ *chama-se uma enumeração dos elementos de* X. *Escrevendo* $f(1) = x_1, f(2) = x_2, \cdots, f(x_n) = x_n, \cdots$ *tem-se então* $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$.

- *Se* X *é um conjunto infinito então existe uma* $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ *injetiva onde* $f(\mathbb{N}) \subset X$. *Logo* $f : \mathbb{N} \rightarrow f(\mathbb{N}) \subset X$ *é uma bijeção, e portanto todo conjunto infinito possui um subconjunto infinito enumerável.*

Teorema 2.5 *Todo subconjunto* $X \subset \mathbb{N}$ *é eunumerável.*

Corolário 2.7 *Seja* $f : X \rightarrow Y$ *injetiva. Se* Y *é enumerável então* X *também é. Em particular, todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.*

Corolário 2.8 *Seja* $f : X \to Y$ *sobrejetiva. Se* X *é enumerável então* Y *também é.*

Corolário 2.9 *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.*

Corolário 2.10 *A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

2.5 EXERCÍCIOS

2.5.1 Seção 1: Números Naturais

1. Usando indução, prove:

   (a) $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

   (b) $1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$.

2. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ com $n > m$, prove que ou n é múltiplo de m ou existem $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $n = mq + r$ e $r < m$. Prove que q e r são únicos com esta propriedade.

   Resolução:

   Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $n > m$, há duas possibilidades:

   (a) n é múltiplo de m. Se n é múltiplo de m, temos $n = mq$ para algum q conveniente.

   (b) n não é múltiplo de m.

   Se n não é múltiplo de m, segue que n está situado entre dois múltiplos consecutivos de m, isto é, existe um natural q, tal que

   $$mq < n < m(q+1)$$

   o que é equivalente a

   $$0 < n - mq < m. \tag{1}$$

   Considerando $n - mq = r \in \mathbb{N}$, temos de (1)

   $$0 < r < m$$

   onde $n = mq + r$.

   Segue de (a) e (b) que se $n > m$ então ou n é múltiplo de m ou existem $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $n = mq + r$ e $0 < r < m$.

   Vamos provar a unicidade.

   Suponhamos que existem $q_1, r_1 \in \mathbb{N}$ tais que $n = mq_1 + r_1$ e $0 < r_1 < m$. Vamos mostrar que $r = r_1$ e $q = q_1$. Sendo $mq + r = mq_1 + r_1$, então

   $$m(q - q_1) = r_1 - r. \tag{2}$$

   Dados r e r_1, pela tricotomia temos:

(a) $r_1 < r$.

Se $r_1 < r$ então $r_1 - r < 0$.

Logo, de (2) temos $m(q - q_1) < 0$

Como $m > 0$, segue que $q - q_1 < 0$, assim $q_1 - q > 0$, ou ainda, $q_1 - q \geq 1$.

De (2) segue:

$$r = r_1 + m(q_1 - q),$$

levando em conta que $m > 0$, $r_1 > 0$ e $q_1 - q \geq 1$, temos

$$r > m$$

o que é um absurdo, pois $r < m$.

(b) $r_1 > r$.

Se $r_1 > r$ então $r_1 - r > 0$, logo de (2) obtemos $m(q - q_1) > 0$. Sendo $m > 0$, então $q - q_1 > 0$, ou melhor, $q - q_1 \geq 1$.

Analisando (2) temos

$$r_1 = m(q - q_1) + r$$

e como $m > 0$, $r > 0$ e $q - q_1 \geq 1$, chegamos em $r_1 > m$, o que é um absurdo já que $r_1 < m$.

De (a) e (b) concluímos que $r_1 = r$. Usando este fato e observando (2), temos $q = q_1$.

■

3. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um subconjunto não-vazio tal que $m, n \in X \Leftrightarrow m \cdot n, m + n \in X$. Prove que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que X é o conjunto dos múltiplos de k.

4. Dado $n \in \mathbb{N}$, prove que não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $n < x < n + 1$.

Resolução:

Suponhamos por absurdo que dado $n \in \mathbb{N}$, $\exists\, x \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n < x < n + 1. \tag{3}$$

Como n, $x \in \mathbb{N}$ e $x > n$ segue que existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $x = n + p$. Substituindo x em (3) temos

$$n < n + p < n + 1$$

Adicionando $(-n)$ obtemos

$$0 \quad < \quad p \quad < \quad 1$$

o que é um absurdo, pois $p \in \mathbb{N}$.

Portanto nossa hipótese do raciocínio por absurdo é refutada, ou seja, dado $n \in \mathbb{N}$, não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \quad < \quad x \quad < \quad n+1.$$

■

5. Prove o princípio de indução como uma conseqüência do princípio da boa ordenação.

2.5.2 Seção 2: Conjuntos Finitos

1. Indicando com *card* X o número de elementos do conjunto finito X, prove.

   (a) Se X é finito e $Y \subset X$ então $card\ Y \leq card\ X$.

   Resolução:

   Se X é um conjunto finito então há dois casos a considerar:

   i. $X = \emptyset$.

   Se $X = \emptyset$, como $Y \subset X$ então $Y = \emptyset$, logo

   $$card\, Y \quad = \quad 0 \quad \leq \quad 0 \quad = \quad card\, X$$

   o que satisfaz $card\ Y \leq card\ X$.

   ii. $X \neq \emptyset$.

   Se $X \neq \emptyset$ temos duas possibilidades para o conjunto $Y \subset X$:

   A. $Y = \emptyset$.

   Sendo $Y = \emptyset$ temos $card\ Y = 0$. Como $X \neq \emptyset$ consideramos $card\ X = m$, $m \in \mathbb{N}$.

   Assim,

   $$\text{card}\, Y \quad = \quad 0 \quad \leq \quad m \quad = \quad \text{card}\, X,$$

   o que mostra card $Y \leq card\ X$.

   B. $Y \neq \emptyset$.

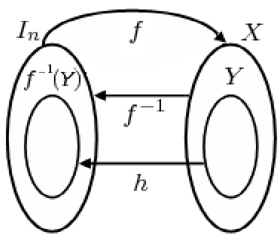
Por hipótese X é finito e $Y \subset X$, logo Y é finito pois todo subconjunto de um conjunto finito é finito.
Como X e Y são finitos e diferentes do conjunto vazio, temos que existem bijeções:

$$f : I_n \to X \text{ e } g : I_m \to Y$$

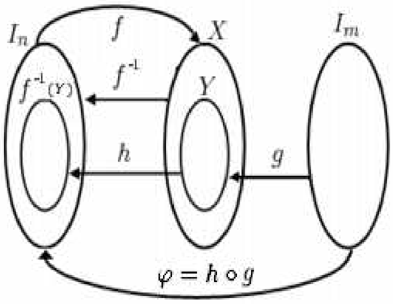
onde $I_\lambda = \{p \in \mathbb{N}, p \leq \lambda\}$. Segue que $card\ X = n$ e $card\ Y = m$. Queremos provar que $m \leq n$, ou seja, $card\ Y \leq card\ X$.
Suponhamos por absurdo que $m > n$.
Como $Y \subset X$, a função $h : Y \to I_n$ é a restrição de uma função $f^{-1} : X \to I_n$. Sendo f^{-1} uma bijeção temos que

$$h = f^{-1}|Y : Y \to f^{-1} \subseteq I_n,$$

é bijeção, conforme a ilustração:



Como $g : I_m \to Y$ é uma bijeção podemos estender a representação:



onde $\varphi = h \circ g : I_m \to f^{-1}(Y) \subseteq I_n$ é uma bijeção, pois é a composta das bijeções h e g.
Dizer que φ é uma bijeção de I_m em $f^{-1}(Y)$, significa que $card\ f^{-1}(Y) = m$.

Considerando que $f^{-1}(Y) \subseteq I_n$ ($f^{-1}(Y) \subset I_n$ e $f^{-1}(Y) \neq I_n$), assim *card* I_n $>$ *card* $f^{-1}(Y)$, ou seja $n > m$. Isso contradiz a suposição de que $m > n$. Portanto $m \leq n$, ou seja, concluímos que *card* $Y \leq$ *card* X.

$\blacksquare$

(b) Se X e Y são finitos então $X \cup Y$ é finito e

$$card\ (X \cup Y) = card\ X + card\ Y - card\ (X \cap Y).$$

Resolução:

Como X e Y são conjuntos finitos temos quatro possibilidades a analisar:

i. $X = \emptyset$ e $Y = \emptyset$.
Se $X = \emptyset = Y$, então $card\ X = 0 = card\ Y$. Também, $X \cup Y = \emptyset = X \cap Y$ e $card\ (X \cup Y) = 0 = card\ (X \cap Y)$. Portanto,

$$card\ (X \cup Y) = card\ X + card\ Y - card\ (X \cap Y).$$

ii. $X = \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$.
Se $X = \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$, então $card\ X = 0$ e $card\ Y \neq 0$. Nota-se que $X \cup Y = Y$ e $X \cap Y = \emptyset$, daí $card\ (X \cup Y) = card\ Y$ e $card\ (X \cap Y) = 0$.
Portanto,

$$\begin{aligned} card\ (X \cup Y) &= card\ Y \\ &= card\ Y + 0 + 0 \\ &= card\ Y + card\ X - card\ (X \cap Y). \end{aligned}$$

iii. $X \neq \emptyset$ e $Y = \emptyset$.
Raciocínio análogo ao anterior.

iv. $X \neq \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$.
Sendo $X \neq \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$ temos, $card\ X \neq 0$ e $card\ Y \neq 0$ e como X e Y são finitos temos que existem as bijeções:

$$f : I_{card\ X} \to X \quad \text{e} \quad g : I_{card\ Y} \to Y$$

Vamos analisar agora a interseção entre X e Y. Temos dois casos a considerar:

A. $X \cap Y = \emptyset$.
Se $X \cap Y = \emptyset$, então $card\ (X \cap Y) = 0$. Seja $h : I_{card\ X + card\ Y} \to X \cap Y$ uma função bijetiva definida por

$$h(n) = \begin{cases} f(n), & \text{se} \quad n \leq card\ X. \\ g(card\ X + card\ Y - (n-1)), & \text{se} \quad n \geq card\ Y. \end{cases}$$

Como $I_{card\ X = card\ Y}$ é finito e h é uma bijeção, segue que $X \cap Y$ é finito e $card\ (X \cup Y) = card\ X + card\ Y$. Portanto,

$$card\ (X \cup Y) \quad = \quad card\ X + card\ Y - card\ (X \cap Y).$$

B. $X \cap Y \neq \emptyset$.

Se $X \cap Y \neq \emptyset$, temos três casos:

- $X \subset Y$.

  Se $X \subset Y$, então $X \cup Y = Y$ e $X \cap Y = X$, logo $card\ (X \cup Y) = card\ Y$ e $card\ (X \cap Y) = card\ X$. Assim:

$$\begin{aligned} card\ (X \cup Y) &= card\ Y \\ &= card\ Y + 0 \\ &= card\ Y + (card\ X - card\ X) \\ &= card\ Y + card\ X - card\ (X \cap Y). \end{aligned}$$

- $Y \subset X$.

  Raciocínio análogo ao anterior.

- $X \not\subset Y$ e $Y \not\subset X$.

  Sabemos que $X \cap Y \neq \emptyset$ e se $X \not\subset Y$ e $Y \not\subset X$, então $Y - X \neq \emptyset$. Como $(Y - X) \cup (X \cap Y) = Y$ temos que $card\ ((Y - X) \cup (X \cap Y)) = card\ Y$. Pelo fato de $(Y - X) \cap (X \cap Y) = \emptyset$, segue do item A que $card\ (Y - X) + card\ (X \cap Y) - card\ ((Y - X) \cap (X \cap Y)) = card\ Y$, então

$$card\ (Y - X) + card\ (X \cap Y) \quad = \quad card\ Y. \tag{4}$$

  Como $X \cup Y = X \cup (Y - X)$ temos que $card\ (X \cup Y) = card\ (X \cup (Y - X))$. Sendo $X \neq \emptyset$ e $Y - X \neq \emptyset$ segue que, $X \cap (Y - X) = \emptyset$. Portanto pelo item A, temos $card\ (X \cup Y) = card\ X + card\ (Y - X) - card\ (X \cap (Y - X))$ então

$$card\ (X \cup Y) \quad = \quad card\ X + card\ (Y - X). \tag{5}$$

De (4) e (5), temos

$$card\ (X \cup Y) \quad = \quad card\ X + card\ Y - card\ (X \cap Y).$$

■

(c) Se X e Y são finitos então $X \times Y$ é finito e

$$card\ (X \times Y) \quad = \quad card\ X \cdot card\ Y.$$

Resolução:

Como X e Y são conjuntos finitos, podemos considerar:

i. $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$.

A. Se $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$, então $X \times Y = \emptyset$, $card\ X = 0$ e $card\ Y \neq 0$. Isto mostra que $X \times Y$ é finito e $card\ (X \times Y) = 0$. Portanto,

$$card\ (X \times Y) \quad = \quad 0 \quad = \quad 0 \cdot n \quad = \quad card\ X \cdot card\ Y.$$

B. $X \neq \emptyset$ ou $Y = \emptyset$.
Análogo ao anterior.

C. $X = \emptyset$ e $Y = \emptyset$.
Se $X = \emptyset$ e $Y = \emptyset$ então $X \times Y = \emptyset$ e $card\ X = 0 = card\ Y$. Isto mostra que $X \times Y$ é finito e $card\ (X \times Y) = 0$.
Assim,

$$card\ (X \times Y) \quad = \quad 0 \quad = \quad 0 \cdot 0 \quad = \quad card\ X \cdot card\ Y.$$

ii. $X \neq \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$.
Se $X \neq \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$, temos $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ para $m \in \mathbb{N}$ e $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.
Logo, $card\ X = m$ e $card\ Y = n$. Então, $X \times Y = \{X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n\}$ é um conjunto finito, onde $X_i = X \times \{y_i\}$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$. Segue que:

$$\begin{array}{rcccccc} X_1 & = & X \times \{y_1\} & = & \{x_1, x_2, \cdots, x_m\} \times \{y_1\} & = & \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), \cdots, (x_m, y_1)\} \\ & \vdots & & & & & \\ X_n & = & X \times \{y_n\} & = & \{x_1, x_2, \cdots, x_m\} \times \{y_n\} & = & \{(x_1, y_n), (x_2, y_n), \cdots, (x_m, y_n)\} \end{array}$$

Como $X_i \cap X_j = \emptyset$, $\forall\ i \neq j$ e $card\, X_i = m$, $\forall\ i = 1, \cdots, n$ temos,

$$\begin{aligned} card\ (X \times Y) &= card\ (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n) \\ &= card\ X_1 + card\ X_2 + \cdots + card\ X_n \\ &= \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n} \\ &= m \cdot n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$card\ (X \times Y) = card\ X \cdot card\ Y.$$

$\blacksquare$

2. Seja $\wp(X)$ o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de X. Prove por indução que se X é finito então $card\, \wp(X) = 2^{card\, X}$.

3. Seja $\mathscr{F}\,(X;Y)$ o conjunto das funções $f : X \to Y$. Se $card\ X = m$ e $card\ Y = n$, prove que $card\ \mathscr{F}\,(X;Y) = n^m$.

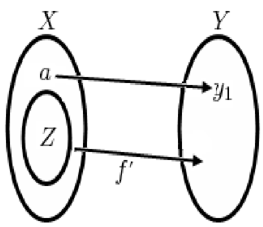
   Resolução:

   Seja $X = Z \cup \{a\}$, $a \notin Z$ então para cada função $f' : Z \to Y$ há exatamente n maneiras de estendê-la a uma função $f : X \to Y$, pois $card\ Y = n$.

   De fato, basta considerarmos

   - $n = 1$,

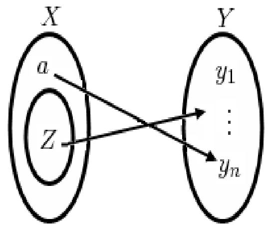
$$\begin{aligned} f_1 \ :\ X &\to Y \\ x &\mapsto f_1(x) = \begin{cases} y_1, & \text{se } x = a \\ f'(x), & \text{se } x \in Z \end{cases} \end{aligned}$$



$\vdots$

- $n = n$,

$$\begin{array}{rcccl} f_n & : & X & \longrightarrow & Y \\ & & x & \longmapsto & f_n(x) = \begin{cases} y_n, & \text{se } x = a \\ f'(x), & \text{se } x \in Z \end{cases} \end{array}$$



Logo,

$$card\,\mathscr{F}\,(X;Y) \quad = \quad [card\,\mathscr{F}\,(X;Y)] \cdot n$$

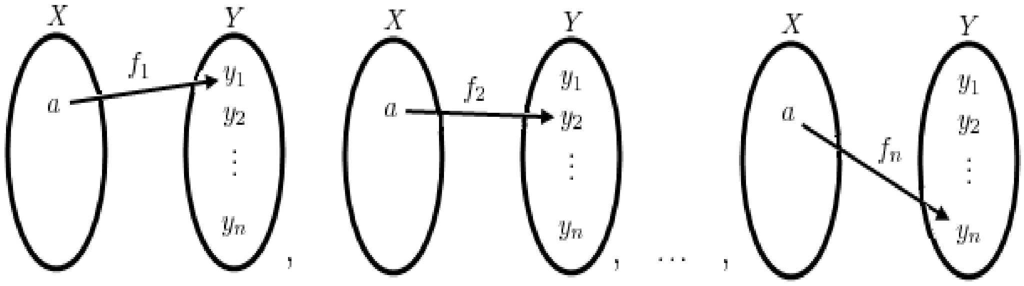
onde $x = Z \cup \{a\}$, tal que $a \notin Z$, (usaremos esta ideia para provar a proposição abaixo, usando o princípio de indução).

Considere a proposição:

$P(m)$: $card\ \mathscr{F}\ (X;Y) = n^m$, $card\ X = m$ e $card\ Y = n$, $\forall\ n, m \geq 1$.

Utilizaremos o método de indução sobre m para provar que $P(m)$ é verdadeira, $\forall\ m \geq 1$.

Se $m = 1$, temos $card\ X = 1$ e como $X = Z \cup \{a\}$, $a \notin Z$, concluímos que $Z = \emptyset$.

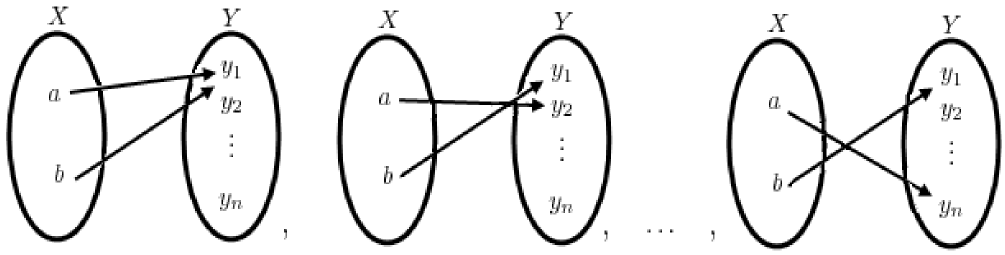


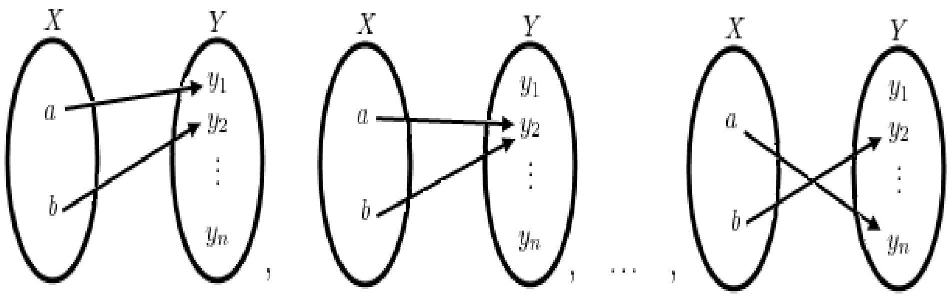
O que mostra,

$$card\ \mathscr{F}\ (X;Y) \quad = \quad n$$

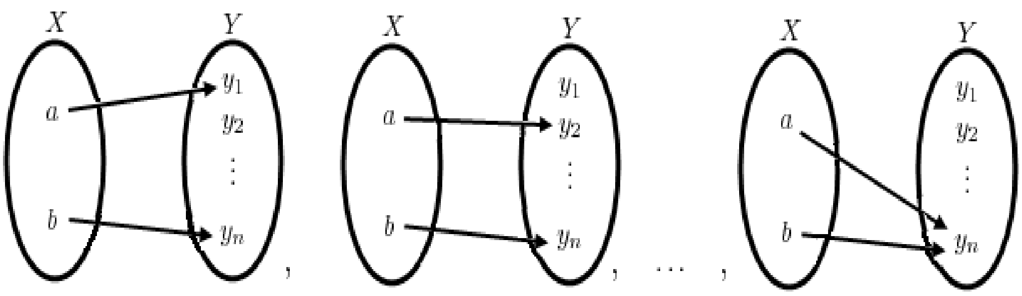
isto implica que $P(1)$ é verdadeira.

Se $m = 2$, temos $card\ X = 2$, daí $X = Z \cup \{a\}$, onde $card\ Z = 1$, ou seja, $Z = \{b\}$.





$\vdots$



Isto significa que,

$$card\ \mathscr{F}(X;Y) \;=\; card\ \mathscr{F}(X;Y) \cdot n$$

o que mostra que $P(2)$ é verdadeira.

Suponhamos que $P(m)$ é verdadeira para $m = k$, ou seja,

$$card\ \mathscr{F}(X;Y) \;=\; n^k.$$

Mostraremos que $P(m)$ é verdadeira para $m = k+1$, ou seja,

$$card\ \mathscr{F}(X;Y) \;=\; n^{k+1}.$$

Para $m = k+1$ temos $card\ X = k+1$ e como $X = Z \cup \{a\}$ temos $card\ Z = k$ e $card\ \{a\} = 1$. Sabemos que $card\ \mathscr{F}(X;Y) = card\ \mathscr{F}(X;Y) \cdot n$, onde $card\ \mathscr{F}(X;Y) = n^k$ por hipótese de indução. Portanto,

$$\begin{aligned} card\ \mathscr{F}(X;Y) &= card\ \mathscr{F}(X;Y) \cdot n \\ &= n^k \cdot n \\ &= n^{k+1} \end{aligned}$$

isto mostra que $P(k+1)$ é verdadeira.

Concluímos pelo método de indução, que $P(m)$ é verdadeira, $\forall\ m \geq 1$, ou seja,

$$card\ \mathscr{F}(X;Y) \;=\; n^m$$

onde $card\ X = m$ e $card\ Y = n$.

$\blacksquare$

4. Prove que todo conjunto finito não-vazio X de números naturais contém um elemento máximo (isto é, existe $x_0 \in X$ tal que $x \leq x_0\,,\ \forall x \in X$).

2.5.3 Seção 3: Conjuntos Infinitos

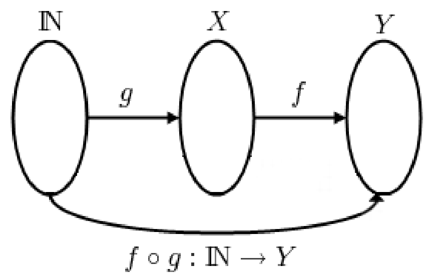
1. Dada $f\colon X \to Y$, prove:

   (a) Se X é infinito e f é injetiva então Y é infinito.

   Resolução:

   Temos por hipótese que X é infinito e a aplicação $f: X \to Y$ é injetiva, queremos mostrar que Y é infinito.

   Como X é infinito, podemos definir uma função injetiva $g: \mathbb{N} \to X$, conforme diagrama:



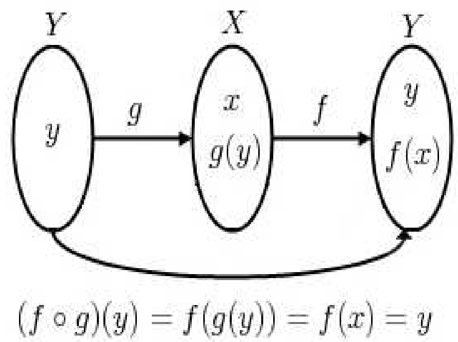
Sabendo que f e g são injetivas temos que $f \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow Y$ é injetiva, pois a composta de funções injetivas é injetiva. Donde concluímos que Y é infinito.

$\blacksquare$

(b) Se Y é infinito e f é sobrejetiva, então X é infinito.

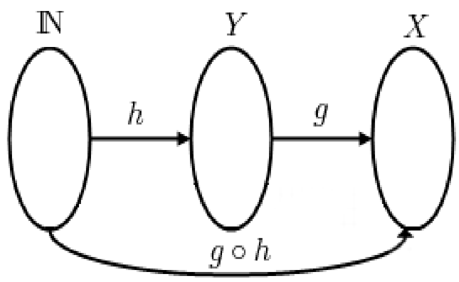
Resolução:

Sendo $f : X \longrightarrow Y$ sobrejetiva por hipótese, temos que $\forall\ y \in Y$ podemos escolher $x = g(y) \in Y$ tal que $f(x) = y$. Isto define uma aplicação $g : Y \longrightarrow X$ injetiva, como iremos provar. Note que



De fato, g é injetiva pois considerando $y_1, y_2 \in Y$, com $g(y_1) = g(y_2)$. Aplicando a f em ambos os membros obtemos $f(g(y_1)) = f(g(y_2))$, o que implica em $(f \circ g)(y_1) = (f \circ g)(y_2)$. Devido a definição da composta temos $y_1 = y_2$.

Como por hipótese Y é infinito, temos que existe uma aplicação injetiva $h : \mathbb{N} \longrightarrow Y$, tal que



$g \circ h : \mathbb{N} \to X$ é injetiva, por ser a composta de funções injetivas.

Portanto, X é infinito.

■

2. Sejam X um conjunto finito e Y um conjunto infinito. Prove que existe uma função injetiva $f \colon X \to Y$ e uma função sobrejetiva $g \colon Y \to X$.

3. Prove que o conjunto $\mathscr{P}$ dos números primos é infinito.

   Resolução:

   Seja $\mathscr{P}$ o cojunto dos números primos, suponhamos por absurdo que $\mathscr{P}$ é finito então $\mathscr{P} = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ com $x_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \cdots, m$.

   Considerando um número natural p, tal que $p = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m$ e adicionando 1 a este resultado, determinamos $y = p + 1 \in \mathbb{N}$. Desta forma, y não é primo pois é diferente de todos os $x_i \in \mathscr{P}$, ou ainda, $y > x_i$, $\forall\, x_i \in \mathscr{P}$.

   Logo se y não é primo, então pode ser decomposto em um produto de fatores primos.

   Sendo $p = x_1 \cdot \ldots \cdot x_m$, onde $x_i \in \mathscr{P}$, temos que p é divisível por todos os x_i. Como $y = p + 1$, exclui-se a possibilidade de y ser divisísel por qualquer $x_i \in \mathscr{P}$. Logo, y não pode ser decomposto em fatores primos, portanto, y é primo.

   Concluímos que existe y primo tal que $y \notin \mathscr{P}$, isto contradiz a hipótese do raciocínio por absurdo, o que implica em $\mathscr{P}$ ser infinito.

■

4. Dê exemplo de uma seqüencia decrescente $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ de conjuntos infinitos cuja intersecção $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ seja vazia.

2.5.4 Seção 4: Conjuntos Enumeráveis

1. Defina $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ pondo $f(1,n)=2n-1$ e $f(m+1,n)=2^m(2n-1)$. Prove que f é uma bijeção.

   Resolução:

   Seja $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} 2n-1, & \text{se } x=1 \text{ e } y=n \\ 2^m(2n-1), & \text{se } x=m+1 \text{ e } y=n \end{cases}$$

   Vamos provar que f é uma bijeção.

Parte 1- f é injetiva.

(a) $x_1=1$ e $x_2=1$.

Seja $x_1=1$ e $x_2=1$. Suponhamos que $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$, daí,

$$\begin{aligned} f(1,y_1) &= f(1,y_2) \\ 2y_1-1 &= 2y_2-1 \\ 2y_1 &= y_2 \\ y_1 &= y_2. \end{aligned}$$

Portanto, $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$.

(b) $x_1=1$ e $x_2\neq 1$.

Como $x_1=1$ e $x_2\neq 1$, temos $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$. Sendo $x_2\neq 1$, então $x_2=x_2'+1$, onde $x_2'\in\mathbb{N}$. Daí $f(x_1,y_1)=f(1,y_1)=2y_1-1$ e $f(x_2,y_2)=f(x_2'+1,y_2)=2x_2'(2y_2-1)$. Como $f(x_1,y_1)$ é ímpar e $f(x_2,y_2)$ é par concluímos que $f(x_1,y_1)\neq f(x_2,y_2)$.

(c) $x_1\neq 1$ e $x_2=1$.

Análogo ao anterior.

(d) $x_1\neq 1$ e $x_2\neq 1$.

Como $x_1\neq 1$ e $x_2\neq 1$, temos $x_1=x_1'+1$ e $x_2=x_2'+1$. Há dois casos a considerar:

i. $x_1=x_2$.

Se $x_1=x_2$, então $x_1'=x_2'$. Considerando $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$, temos

$$\begin{aligned} & 2^{x_1'}(2y_1-1) &= 2^{x_1}(2y_2-1) \\ \Rightarrow & 2y_1-1 &= 2y_2-1 \\ \Rightarrow & y_1 &= y_2. \end{aligned}$$

logo $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$.

ii. $x_1 \neq x_2$.

Como $x_1 \neq x_2$ temos que $(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2)$ e $x_1' = x_2'$. Vamos considerar dois casos:

A. $y_1 = y_2$.

Considerando $y_1 = y_2$ e sabendo que $x_1 \neq x_2$, ou seja, $x_1' \neq x_2'$ temos:

$$f(x_1,y_1) = 2^{x_1'}(2y_1-1) = 2^{x_1'} f(1,y_1)$$

e

$$f(x_2,y_2) = 2^{x_2'}(2y_2-1) = 2^{x_1'} f(1,y_2).$$

Como $2^{x_1'} \neq 2^{x_2'}$ obtemos $2^{x_1'} f(1,y_1) \neq 2^{x_2'} f(1,y_2)$, pois $f(1,y_1) = f(1,y_2)$. Concluímos que $f(x_1,y_1) \neq f(x_2,y_2)$.

B. $y_1 \neq y_2$.

Como $y_1 \neq y_2$ temos que $2y_1 - 1 \neq 2y_2 - 1$, onde $2y_1 - 1$ e $2y_2 - 1$ são números primos. Pelo fato de $x_1 \neq x_2$ temos $x_1' \neq x_2'$, daí $2^{x_1'} \neq 2^{x_2'}$. Sabendo que $f(x_1,y_1) = 2^{x_1'}(2y_1-1)$ e $f(x_2,y_2) = 2^{x_2'}(2y_2-1)$, concluímos que $f(x_1,y_1) \neq f(x_2,y_2)$, pois a fatoração de números primos é única.

Parte 2- f é sobre.

(a) Dado um número ímpar $k \in \mathbb{N}$ temos

$$k = 2n-1,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, logo existe $n = \frac{k+1}{2} \in \mathbb{N}$ e $x = 1$ tal que

$$f(1,n) = 2n-1 = 2\left(\frac{k+1}{2}\right) - 1 = k.$$

(b) Dado um número par $k \in \mathbb{N}$, seja m o maior número natural tal que k é divisível por 2^m, logo $k = 2^m \cdot l$, onde l é ímpar. Como l é ímpar temos $l = 2n-1$, ou seja, $n = \frac{l+1}{2}$. Daí existe m e $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} f(m+1,n) &= 2^m(2n-1) \\ &= 2^m\left(2\left(\frac{l+1}{2}\right)-1\right) \\ &= 2^m(l+1-1) \\ &= 2^m \cdot l. \end{aligned}$$

Portanto, f é sobre.

■

2. Prove que existe $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sobrejetiva tal que $g^{-1}(n)$ é infinito, para cada $n \in \mathbb{N}$.

3. Exprima $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \ldots \cup \mathbb{N}_n \cup \ldots$ como união infinita de subconjuntos infinitos, dois a dois disjuntos.

   Resolução:

   Seja $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos:

$$\begin{array}{rcccccc} \varphi_1 & : & \overline{\mathbb{N}} & \to & I_m(\varphi_1) & & \\ & & n & \mapsto & \varphi_1(n) & = & 2^n, \end{array}$$

   onde $\mathbb{N}_1 = I_m(\varphi_1) \subset \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcccccc} \varphi_2 & : & \overline{\mathbb{N}} \times \overline{\mathbb{N}} & \to & I_m(\varphi_2) & & \\ & & (n_1, n_2) & \mapsto & \varphi_2(n_1, n_2) & = & 2^{n_1} \cdot 3^{n_2}, \end{array}$$

   sendo $\mathbb{N}_2 = I_m(\varphi_2) - \mathbb{N}_1$ e $\mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2 = \emptyset$.

$$\begin{array}{rcccccc} \varphi_3 & : & \overline{\mathbb{N}} \times \overline{\mathbb{N}} \times \overline{\mathbb{N}} & \to & I_m(\varphi_3) & & \\ & & (n_1, n_2, n_3) & \mapsto & \varphi_3(n_1, n_2, n_3) & = & 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 5^{n_3}, \end{array}$$

   onde $\mathbb{N}_3 = I_m(\varphi_3) - (\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2)$, com $\mathbb{N}_3 \cap \mathbb{N}_1 = \emptyset$ e $\mathbb{N}_3 \cap \mathbb{N}_2 = \emptyset$.

$$\begin{array}{rcccccc} \varphi_4 & : & \overline{\mathbb{N}} \times \overline{\mathbb{N}} \times \overline{\mathbb{N}} \times \overline{\mathbb{N}} & \to & I_m(\varphi_4) & & \\ & & (n_1, n_2, n_3, n_4) & \mapsto & \varphi_4(n_1, n_2, n_3, n_4) & = & 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 5^{n_3} \cdot 7^{n_4}, \end{array}$$

   com $\mathbb{N}_4 = I_m(\varphi_4) - (\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \mathbb{N}_3)$ e $\mathbb{N}_4 \cap \mathbb{N}_3 = \emptyset$, $\mathbb{N}_4 \cap \mathbb{N}_2 = \emptyset$, $\mathbb{N}_4 \cap \mathbb{N}_1 = \emptyset$.

   $\vdots$

$$\begin{array}{rcccccc} \varphi_k & : & \overline{\mathbb{N}} \times \overline{\mathbb{N}} \times \cdots \times \overline{\mathbb{N}} & \to & I_m(\varphi_k) & & \\ & & (n_1, n_2, \cdots, n_k) & \mapsto & \varphi_k(n_1, n_2, \cdots, n_k) & = & 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 5^{n_3} \cdot \cdots \cdot p^{n_k}, \end{array}$$

   sendo p o k-ésimo número primo. E $\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_k = I_m(\varphi_k) - (\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \cdots \cup \mathbb{N}_{k-1})$, onde $\mathbb{N}_k \cap \mathbb{N}_1 = \emptyset$, $\mathbb{N}_k \cap \mathbb{N}_2 = \emptyset$, $\cdots$, $\mathbb{N}_k \cap \mathbb{N}_{k-1} = \emptyset$.

   $\vdots$

   Como todo número natural pode ser decomposto em um produto de números primos, temos pela definição da φ_i, com $i \in \mathbb{N}$, que $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \cdots \cup \mathbb{N}_k \cup \cdots$, onde $\mathbb{N}_i$ é infinito e $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_j = \emptyset$, para $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}$.

■

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\wp_n = \{X \subset \mathbb{N};\, \text{card}\, X = n\}$. Prove que $\wp_n$ é enumerável. Conclua que o conjunto $\wp_f$ dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ é enumerável.

5. Prove que o conjunto $\wp(\mathbb{N})$ de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ não é enumerável.

6. Sejam Y enumerável e $f\colon X \to Y$ tal que, para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ é enumerável. Prove que X é enumerável.

3 REAIS

3.1 $\mathbb{R}$ É UM CORPO

Isto significa que estão definidas em $\mathbb{R}$ duas operações $(\mathbb{R},+,\cdot)$ chamadas adição e multiplicação, que cumprem certas condições

$$\begin{array}{rrcl} +: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rrcl} \cdot: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x\cdot y \end{array}$$

que satisfazem os axiomas:

1. Associatividade: para quaisquer $x,y,z \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\begin{aligned} x+(y+z) &= (x+y)+z \\ x.(y.z) &= (x.y).z \end{aligned}$$

2. Comutatividade: para quaisquer $x,y \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\begin{aligned} x+y &= y+x \\ x.y &= y.x \end{aligned}$$

3. Existência do elemento neutro: para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \exists 0 \in \mathbb{R} \quad &; \quad x+0=x \\ \exists 1 \in \mathbb{R} \quad &; \quad x.1=x \end{aligned}$$

4. Existência do elemento inverso:
   Dado $x \in \mathbb{R}$; $\exists\ (-x) \in \mathbb{R}$ tal que $x+(-x)=0$.
   Dado $x \in \mathbb{R}$; $x \neq 0$, $\exists\ x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x.x^{-1}=1$.

5. Distributividade: para $x,y,z \in \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Dos axiomas acima resultam todas as regras de manipulação com os números reais. A título de exemplo, estabeleceremos algumas delas.

a) da Comutatividade

- **(i)** $0 + x = x$.
- **(ii)** $(-x) + (x) = 0$.
- **(iii)** $1.x = x$.
- **(iv)** $x^{-1}.x = 1$.

b) da Distributividade

- **(i)** $x.0 = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- **(ii)** $x.y = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $y = 0$.
- **(iii)** Regra de sinais
  - **(a)** $x.(-y) = (-x).y = -(xy)$;
  - **(b)** $(-x)(-y) = xy$.
- **(iv)** $x^2 = y^2 \Longrightarrow x = \pm y$.

3.2 $\mathbb{R}$ É UM CORPO ORDENADO

Isto significa que existe um subconjunto $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$, chamado o conjunto dos números reais positivos, que cumpre as seguintes condições:

(P_1) Seja $x,y \in \mathbb{R}_+$ então $x+y \in \mathbb{R}_+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}_+$

(P_2) Dado $x \in \mathbb{R}$ tem-se uma das três alternativas:

$$x \in \mathbb{R}_+ \quad \text{ou} \quad (-x) \in \mathbb{R}_+ \quad \text{ou} \quad x = 0.$$

Se indicarmos com $\mathbb{R}_-$ o conjunto dos números $(-x)$ onde $x \in \mathbb{R}_+$, a condição P_2 diz que $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- \cup \{0\}$ e os conjuntos, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$ e $\{0\}$ são dois a dois disjuntos. Os números $y \in \mathbb{R}_-$ chama-se negativos.

Proposição 3.1 $\forall\, x \neq 0$ *tem-se* $x^2 \in \mathbb{R}_+$.

Definição 3.1 *Diz-se que x é menor do que y e escreve-se $x < y$ quando $y - x \in \mathbb{R}_+$, isto é, $y = x + z$ onde $z \in \mathbb{R}_+$. Neste caso, escreve-se também $y > x$ e diz-se que y é maior do que x. Em particular,*

- *$x > 0$ significa $x \in \mathbb{R}_+$, isto é, x é positivo;*
- *$x < 0$ significa que $-x \in \mathbb{R}_+$, ou seja, x é negativo.*

A relação de ordem $x < y$ em $\mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. Transitividade: se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.
2. Tricotomia: Dados $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se uma das três alternativas.
$$x = y, \quad x < y \quad \text{ou} \quad y < x.$$
3. Monotonicidade da adição: se $x < y$ então $x + z < y + z$, $\forall z \in \mathbb{R}$.
4. Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$ então $\begin{cases} z > 0 & \Rightarrow & x \cdot z < y \cdot z \\ z < 0 & \Rightarrow & x \cdot z > y \cdot z \end{cases}$

Mais geralmente, $\forall\, x, y, x', y' \in \mathbb{R}$

(i) $x < y$ e $x' < y' \Longrightarrow x + x' < y + y'$;

(ii) $0 < x < y$ e $0 < x' < y' \Longrightarrow x.x' < y.y'$;

(iii) $0 < x < y \Longrightarrow y^{-1} < x^{-1}$.

Como $1 \in \mathbb{R}$ é positivo, segue que

$$1 < 1 + 1 + 1 + 1 < \cdots$$

podemos então considerar $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Segue que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ pois $0 \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{R} \Rightarrow -n \in \mathbb{R}$. Além disso, se $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$ então

$$\frac{m}{n} = m.n^{-1} \in \mathbb{R}$$

o que nos permite concluir que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Assim

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Proposição 3.2 *(Desigualdade de Bernoulli) Para todo número real* $x \geq -1$ *e todo* $n \in \mathbb{N}$*, tem-se*

$$(1+x)^n \quad \geq \quad 1+nx.$$

Definição 3.2 *(Módulo) Dado* $x \in \mathbb{R}$*, definimos o módulo de* x *por*

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

ou ainda

$$|x| = \max\{-x, x\}$$

é o maior dos números reais x *e* $-x$*.*

Observação 3.1

1. $-|x| \leq x \leq |x|, \forall\, x \in \mathbb{R}$.
2. $|x|$ *é o único número não negativo cujo quadrado é* x^2*, ou seja,* $|x|^2 = x^2$*.*

Proposição 3.3 *Se* $x, y \in \mathbb{R}$ *então*

(i) $|x+y| \leq |x| + |y|$;

(ii) $|x.y| = |x|.|y|$.

Teorema 3.1 *Sejam* $x, a \in \mathbb{R}$*. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(i) $-a \leq x \leq a$;

(ii) $x \leq a$ *e* $-x \leq a$;

(iii) $|x| \leq a$.

Corolário 3.1 *Dados* $a, x, b \in \mathbb{R}$*, tem-se* $|x-a| \leq b$ *se, e somente se,* $a-b \leq x \leq a+b$*.*

Usaremos as seguintes notações para representar tipos especiais de conjuntos de números reais, chamados intervalos:

- Intervalos limitados com extremos a, b.

fechado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$;

aberto: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$;

fechado à esquerda: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$;

fechado à direita: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$.

- Intervalos ilimitados

  Semi-reta esquerda fechada de origem b**:** $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$;

  Semi-reta esquerda aberta de origem b**:** $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$;

  Semi-reta direita fechada de origem a**:** $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$;

  Semi-reta direita aberta de origem a**:** $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$;

  Reta: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Teorema 3.2 *Num corpo ordenado* K*, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\mathbb{N} \subset K$ *é ilimitado superiormente.*

(ii) *dados* $a, b \in K$*, com* $a > 0$*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \cdot a > b$*.*

(iii) *dado qualquer* $a > 0$ *em* K*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < \dfrac{1}{n} < a$*.*

Definição 3.3 *Um corpo ordenado* K *chama-se arquimediano quando nele é válida qualquer das três condições equivalentes citadas no teoerema 3.2.*

Observação 3.2 *O corpo* $\mathbb{Q}$ *dos números racionais é arquimediano.*

3.3 $\mathbb{R}$ É UM CORPO ORDENADO COMPLETO

Nada do que foi dito até agora permite distinguir $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ pois os números racionais também constituem um corpo ordenado. Acabaremos agora nossa caracterização de $\mathbb{R}$, descrevendo-o como um corpo ordenado completo, propriedade que $\mathbb{Q}$ não tem.

Definição 3.4 *Seja* $X \subset \mathbb{R}$*. Dizemos que* X *é limitado superiormente quando existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x \leq k, \ \forall\, x \in X$$

e todo k com esta proriedade é denominado uma **cota superior de** X.

Definição 3.5 *Seja* $X \subset \mathbb{R}$ *limitado superiormente e não vazio. Dizemos que b é* **supremo de** X. *Se b é a menor das cotas superiores*

$$b = \sup X.$$

Equivalentemente, b é supremo de X se, e somente se:

(i) $x \leq b, \forall\, x \in X$.

(ii) Se c é uma cota superior de X, então $b \leq c$.

(iii) $\forall\, \varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $b - \varepsilon < x$.

Definição 3.6 *Seja* $X \subset \mathbb{R}$ *dizemos que* X *é limitado inferiormente quando existe* $m \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$m \leq x, \forall\, x \in X$$

e todo m com esta propriedade é denominado uma **cota inferior de** X.

Definição 3.7 *Seja* $X \subset \mathbb{R}$ *limitado inferiormente e não vazio. Dizemos que a é o* **ínfimo de** X *se a é a maior das cotas inferiores*

$$a = \inf X.$$

Equivalentemente, a é o ínfimo de X se, e somente se:

(i) $a \leq x, \forall\, x \in X$.

(ii) Se c é uma cota inferior de X então $c \leq a$.

(iii) $\forall\, \varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x < a + \varepsilon$.

Definição 3.8 *Um número* $b \in X$ *é o maior elemento (***elemento máximo***) do conjunto* X *quando*

$$b \geq x, \forall\, x \in X$$

Isto quer dizer que $b = \sup X$ *que pertence a* X.

Definição 3.9 *Um número $a \in X$ é o menor elemento (***elemento mínimo***) do conjunto X quando*

$$a \leq x, \forall\, x \in X$$

Isto quer dizer que $a = \inf X$ que pertence a X.

Definição 3.10 *Se X é limitado superiormente e inferiormente, diz-se que X é um conjunto limitado. Isto significa que X esta contido em algum intervalo limitado $[a,b]$ ou que existe $k > 0$ tal que se $x \in X$ então $|x| \leq k$.*

A insuficiência mais grave dos números racionais, para efeitos da análise matemática, é o fato de alguns conjuntos limitados de números racionais não possuirem supremo (ou ínfimo). Este fato está ligado à inexistência de raízes quadradas racionais de certos números inteiros, mas é uma dificuldade que vai muito além dessa falta.

Pitágoras e seus discípulos descobriram o seguinte:

Lema 3.1 *Não existe um número racional cujo quadrado seja igual a 2.*

Proposição 3.4 *Sejam*

$$X = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$$

e

$$Y = \{y \in \mathbb{Q}; y > 0 \text{ e } y^2 > 2\} \subset \mathbb{Q}$$

então não existem $\sup X$ nem $\inf Y$ em $\mathbb{Q}$.

Observação 3.3 *Com base na proposição (3.4), observamos que se existir um corpo ordenado no qual todo conjunto não-vazio, limitado superiormente, possua supremo, existirá, nesse dito corpo, um elemento $a > 0$ cujo quadrado é 2. Com efeito, tal corpo, sendo ordenado contém $\mathbb{Q}$, logo contém o conjunto X e nele existirá $a = \sup X$, cujo quadrado, não podendo ser menor nem maior do que 2, deverá ser igual a 2. Escreve-se $a = \sqrt{2}$.*

Definição 3.11 (Corpo Ordenado Completo) *Um corpo ordenado K chama-se completo quando todo subconjunto não vazio, limitado superiormente, $X \subset K$, possui supremo em K.*

Resulta da definição que, num corpo ordenado completo, todo conjunto não-vazio, limitado inferiormente, $Y \subset K$, possui um ínfimo.

Adotaremos, a partir de agora, o axioma fundamental da Análise Matemática.

Axioma 3.1 (Axioma Fundamental da Análise Matemática) *Existe um corpo ordenado completo,* $\mathbb{R}$*, chamado o corpo dos números reais.*

Como foi observado, existe em $\mathbb{R}$ um número positivo a tal que $a^2 = 2$. Este número é representado pelo símbolo $\sqrt{2}$ o qual não é número racional.

Aos elementos do conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, isto é, aos números que não são racionais, chamaremos de números irracionais. Assim $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Proposição 3.5 *Dados* $m, n \in \mathbb{N}$*, se* $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{N}$ *então* $\sqrt[n]{m} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.

Mostraremos agora que os números irracionais se acham espalhados por toda parte entre os números reais. Em seguida, provaremos que há mais números irracionais do que racionais. Para explicar precisamente o que significa "espalhados por toda parte", começaremos com uma definição.

Definição 3.12 (Denso) *Um conjunto* $X \subset \mathbb{R}$ *chama-se denso em* $\mathbb{R}$ *quando todo intervalo aberto* (a, b) *contém algum ponto de* X*. Em outras palavras, diremos que o conjunto* X *de números reais é denso em* $\mathbb{R}$ *quando, dados arbitrariamente* $a < b$ *em* $\mathbb{R}$*, for possível encontrar* $x \in X$ *tal que* $a < x < b$*.*

Teorema 3.3 *O conjunto* $\mathbb{Q}$ *dos números racionais e o conjunto* $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *dos números irracionais são ambos densos em* $\mathbb{R}$*.*

Teorema 3.4 (Intervalos Encaixados) *Seja* $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ *uma sequência decrescente de intervalos limitados e fechados* $I_n = [a_n, b_n]$ *então* $\cap_{n=1}^{+\infty} I_n$ *não é vazia.*

Teorema 3.5 *O conjunto dos números reais não é enumerável.*

Corolário 3.2 *Todo intervalo não-degenerado de números reais é não-enumerável.*

Corolário 3.3 *O conjunto dos números irracionais não é enumerável.*

3.4 EXERCÍCIOS

3.4.1 Seção 1: $\mathbb{R}$ é um Corpo

1. Prove as seguintes unicidades:

   (a) Se $x+\theta = x$ para algum $x \in \mathbb{R}$ então $\theta = 0$;

   Resolução:

   Temos $x+\theta = x$, $x \in \mathbb{R}$.

   Somando $(-x)$ a ambos os membros da igualdade obtemos:

$$\begin{array}{rrcl} & x+\theta+(-x) & = & x+(-x) \\ \Rightarrow & x+(-x)+\theta & = & 0 \\ \Rightarrow & 0+\theta & = & 0 \\ \Rightarrow & \theta & = & 0. \end{array}$$

■

   (b) Se $x \cdot u = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $u = 1$;

   Resolução:

   Seja $x \cdot u = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, há dois casos a considerar:

   i. $x = 0$.
      Se $x = 0$, então $0 \cdot u = 0$. Segue que u pode ser qualquer número real, em particular, $u = 1$.

   ii. $x \neq 0$. Se $x \neq 0$, multiplicamos a identidade $x \cdot u = x$ por x^{-1}, assim

$$\begin{array}{rrcl} & x^{-1}\cdot x \cdot u & = & x^{-1}\cdot x \\ \Rightarrow & 1 \cdot u & = & 1 \\ \Rightarrow & u & = & 1. \end{array}$$

■

   (c) Se $x+y = 0$ então $y = -x$;

   Resolução:

   Adicionando $(-x)$ a $x+y = 0$ temos:

$$\begin{array}{rrcl} & (-x)+x+y & = & 0+(-x) \\ \Rightarrow & 0+y & = & -x \\ \Rightarrow & y & = & -x. \end{array}$$

■

(d) Se $x.y = 1$ então $y = x^{-1}$.

Resolução:

Como $x \cdot y = 1$, temos que $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Multiplicando $x \cdot y = 1$ por x^{-1}, obtemos:

$$\begin{array}{rrcl} & x^{-1} \cdot x \cdot y & = & 1 \cdot x^{-1} \\ \Rightarrow & 1 \cdot y & = & x^{-1} \\ \Rightarrow & y & = & x^{-1}. \end{array}$$

■

2. Dados $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, se $b \neq 0$ e $d \neq 0$ prove que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{(ad+bc)}{bd}$ e $\left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{c}{d}\right) = \dfrac{ac}{bd}$

3. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ em $\mathbb{R}$, prove que $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ e conclua que $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$.

   Resolução:

   Sejam $a \neq 0$ e $b \neq 0$ números reais, logo:

$$\begin{array}{rcl} (a \cdot b)^{-1} & = & (a \cdot b)^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot a) \cdot (b \cdot b^{-1}) \\ & = & (a \cdot b)^{-1} \cdot a^{-1} \cdot (a \cdot b) \cdot b^{-1} \\ & = & (a \cdot b)^{-1} \cdot (a \cdot b) \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} \\ & = & 1 \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} \\ & = & a^{-1} \cdot b^{-1}. \end{array}$$

   Temos ainda que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \quad = \quad \left(a \cdot b^{-1}\right)^{-1} \quad a^{-1} \cdot \left(b^{-1}\right)^{-1} \quad = \quad a^{-1} \cdot b \quad = \quad b \cdot a^{-1} \quad = \quad \frac{b}{a}.$$

■

4. Prove que $\dfrac{(1-x^{n+1})}{(1-x)} = 1 + x + \ldots + x^n$ para todo $x \neq 1$.

3.4.2 Seção 2: $\mathbb{R}$ é um Corpo Ordenado

1. Para quaisquer $x,y,z \in \mathbb{R}$, prove que $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$.

   Resolução:

   Sejam x, y, $z \in \mathbb{R}$. Temos

$$\begin{array}{rcl} |x-y| & = & |x + (-y+y) - z| \\ & = & |(x-y) + (y-z)| \\ & \leq & |x-y| + |y-z|\,. \end{array}$$

Portanto,

$$|x-z| \leq |x-y| + |y-z|\,.$$

$\blacksquare$

2. Prove que $||x|-|y|| \leq |x-y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x^2 + y^2 = 0$ prove que $x = y = 0$.

   Resolução:

   Sejam $x,\, y \in \mathbb{R}$, onde $x^2 + y^2 = 0$. Logo

$$x^2 \;=\; -y^2 \tag{1}$$

   e como todo número real diferente de zero tem quadrado positivo (Proposição (3.1)), temos:

   (a) $x^2 \notin \mathbb{R}_-$.

   (b) $x^2 \notin \mathbb{R}_+$.

   pois se $x^2 \in \mathbb{R}_+$ então de (1) $-y^2 \in \mathbb{R}^2$, o que é um absurdo.

   De (a), (b) e pelo fato de $\mathbb{R}$ ser um corpo ordenado, temos que $x^2 = 0$, ou ainda, $x \cdot x = 0$, o que implica que $x = 0$.

   Como $x^2 = 0$, segue de (1) que $-y^2 = 0$, ou melhor, $y^2 = 0$, de onde concluímos que $y = 0$.

   Portanto, $x = y = 0$.

$\blacksquare$

4. Prove por indução que $(1+x)^n \geq 1 + nx + \left[\dfrac{n(n-1)}{2}\right] x^2$ se $x \geq 0$.

5. Para todo $x \neq 0$ em $\mathbb{R}$, prove que $(1+x)^{2n} > 1 + 2nx$, $\forall\, n \geq 1$.

   Resolução:

   Seja $x \neq 0$ um número real qualquer, logo

$$(1+x)^{2n} \;=\; \left[(1+x)^2\right]^n \;=\; (1+2x+x^2)^n, \tag{2}$$

   onde $n \geq 1$.

Para mostrarmos que $(1+x)^{2n} > (1+2nx)$ queremos aplicar a Desigualdade de Bernoulli em $(1+2x+x^2)^n$. Para isso é necessário verificar que $2x+x^2 \geq -1$. De fato, como $(x=1)^2 \geq, \forall\, x \in \mathbb{R}$, temos que $x^2+2x+1 \geq 0$, o que acarreta $x^2+2x \geq -1$.

Aplicamos a Desigualdade de Bernoulli em (2) e temos

$$\begin{aligned} (1+x)^{2n} &= (1+2x+x^2)^n \geq 1+(2x+x^2)n \\ &= 1+2nx+x^2n \\ &> 1+2nx \end{aligned}$$

Concluímos que $(1+x)^{2n} > 1+2nx$, $\forall\, x \neq 0$ e $n \geq 1$.

■

6. Prove que $|a-b| < \varepsilon \Rightarrow |a| < |b|+\varepsilon$.

7. Use o fato de que trinômio do segundo grau $f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}(x_i+\lambda y_i)^2$ é ≥ 0 para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ para provar a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Prove ainda que vale a igualdade se, e somente se, existe λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$, ou $y_1 = \cdots = y_n = 0$.

Resolução:

Sejam $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, x$, tal que $f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}(x_i+\lambda y_i)^2 \geq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} & f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2+2x_i\lambda y_i+\lambda^2 y_i^2) \geq 0 \\ \Rightarrow\ & f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda^2\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ \Rightarrow\ & f(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\lambda^2 + \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right). \end{aligned}$$

Podemos escrever $f(\lambda) = a\lambda^2+b\lambda+c$, onde $a = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$, $b = 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ e $c = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Como $f(\lambda) \geq 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, devemos ter $\Delta \leq 0$, ou seja, $b^2-4ac \leq 0$. Daí

$$\left(2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq 4\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

Portanto,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right),$$

o que verifica a Desigualdade de Cauchy Schwarz.

Além disso, se $x_i = \lambda y_i$, para todo $i = 1, \cdots, n$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda y_i) y_i\right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda y_i^2\right)^2 \\
&= \lambda^2 \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^2 y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)
\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

■

8. Se $\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ pertencem a um intervalo (α, β) e $b_1, \ldots, b_n$ são positivos, prove que $\frac{(a_1 + \ldots + a_n)}{(b_1 + \ldots + b_n)}$ pertence a (α, β). Nas mesmas condições, se $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$ prove que $\frac{(t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n)}{(t_1 b_1 + \ldots + t_n b_n)}$ também pertence ao intervalo (α, β).

3.4.3 Seção 3: $\mathbb{R}$ é um Corpo Ordenado Completo

1. Diz-se que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *limitada superiormente* quando sua imagem $f(X) = \{f(x); x \in X\}$ é um conjunto limitado superiormente. Então põe-se $\sup f = \sup\{f(x), x \in X\}$. Prove que se $f,\ g : X \to \mathbb{R}$ são limitadas superiormente o mesmo ocorre com a soma $f + g : X \to \mathbb{R}$ e tem-se $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$. Dê um exemplo de $\sup(f+g) < \sup f + \sup g$. Enuncie e prove um resultado análogo para inf.

Resolução:

Sejam f, g funções reais definidas em X limitadas superiormente. Logo, os conjuntos $f(X)=\{f(x);\ x\in X\}$, $g(X)=\{g(x);\ x\in X\}$ são limitados superiormente. E, $\sup f=\sup\{f(x);\ x\in X\}$ e $\sup g=\sup\{g(x);\ x\in X\}$.

Vamos provar que $f+g:X\to\mathbb{R}$ é limitada superiormente, ou seja, que o conjunto $(f+g)(X)=\{(f+g)(x);\ x\in X\}$ é limitado superiormente e

$$\begin{aligned}\sup(f+g) &= \sup\{(f+g)(x);\ x\in X\}\\ &= \sup\{f(x)+g(x);\ x\in X\}.\end{aligned}$$

Para isso basta encontrar uma cota superior do conjunto $(f+g)(X)=\{f(x)+g(x);\ x\in X\}$. Vamos mostrar que $\sup f+\sup g$ é uma cota superior para esse conjunto.

Com efeito,

$$\begin{aligned}\sup f &= \sup\{f(x);\ x\in X\} &\geq& f(x),\forall\, x\in X.\\ \sup g &= \sup\{g(x);\ x\in X\} &\geq& g(x),\forall\, x\in X.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sup f+\sup g &= \sup\{f(x);\ x\in X\}+\sup\{g(x);\ x\in X\}\\ &\geq f(x)+g(x),\forall\, x\in X\\ &= (f+g)(x),\forall\, x\in X.\end{aligned}$$

Isto mostra que

$$\sup(f+g)\ \leq\ \sup f+\sup g.$$

Portanto, $(f+g):X\to\mathbb{R}$ é limitada superiormente.

Uma função $f:X\to\mathbb{R}$ é *limitada inferiormente* quando sua imagem $f(X)=\{f(x);x\in X\}$ é um conjunto limitado inferiormente. Então põe-se $\inf f=\inf\{f(x),x\in X\}$. Devemos provar que se f, $g:X\to\mathbb{R}$ são limitadas inferiormente o mesmo ocorre com a soma $f+g:X\to\mathbb{R}$ e tem-se $\inf(f+g)\leq\inf f+\inf g$.

De fato, sejam f, g funções reais definidas limitadas inferiormente. Logo, $f(X)=\{f(x);\ x\in X\}$ e $g(X)=\{g(x);\ x\in X\}$ são conjuntos limitados inferiormente. E, $\inf f=\inf\{f(x);\ x\in X\}$ e $\inf g=\inf\{g(x);\ x\in X\}$.

Vamos provar que $f+g:X\to\mathbb{R}$ é limitada inferiormente, isto é, que o conjunto $(f+$

$g)(X) = \{(f+g)(x);\ x \in X\}$ é limitado inferiormente e

$$\begin{aligned} \inf(f+g) &= \inf\{(f+g)(x);\ x \in X\} \\ &= \inf\{f(x)+g(x);\ x \in X\}. \end{aligned}$$

Para isso basta encontrar uma cota inferior do conjunto $(f+g)(X) = \{f(x)+g(x);\ x \in X\}$. Vamos mostrar que $\inf f + \inf g$ é uma cota inferior para esse conjunto.

Com efeito,

$$\begin{aligned} \inf f &= \inf\{f(x);\ x \in X\} &\leq& \quad f(x), \forall\, x \in X. \\ \inf g &= \inf\{g(x);\ x \in X\} &\leq& \quad g(x), \forall\, x \in X. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \inf f + \inf g &= \inf\{f(x);\ x \in X\} + \inf\{g(x);\ x \in X\} \\ &\leq f(x)+g(x), \forall\, x \in X \\ &= (f+g)(x), \forall\, x \in X. \end{aligned}$$

Disto podemos concluir que

$$\inf f + \inf g \leq \inf(f+g).$$

Portanto, $(f+g) : X \to \mathbb{R}$ é limitada inferiormente.

Exemplo:

Sejam

$$\begin{aligned} f : \ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = -\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Temos que $(f+g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x) \\ &= \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, ou seja, $f+g$ é a função nula.

Observe que:

(a) $\sup f = 1$, $\sup g = 1$ e $\sup(f+g) = 0 < 1+1 = \sup f + \sup g$.

Portanto,

$$\sup(f+g) \quad < \quad \sup f + \sup g.$$

(b) $\inf f = -1$, $\inf g = -1$ e $\inf(f+g) = 0 > -1-1 = \inf f + \inf g$.

De onde concluímos que

$$\inf(f+g) \quad > \quad \inf f + \inf g.$$

$\blacksquare$

2. Dadas as funções $f,\ g : X \to \mathbb{R}_+$ limitadas superiormente, prove que o produto $f \cdot g : X \to \mathbb{R}_+$ é uma função limitada (superior e inferiormente) com $\sup(f \cdot g) \leq \sup f \cdot \sup g$ e $\inf(f \cdot g) \geq \inf f \cdot \inf g$. Dê exemplos onde se tenha $<$ e não $=$.

4 SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

4.1 LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA

Definição 4.1 *Denominamos sequência de números reais a toda função*

$$\begin{aligned} x \ : \ \mathbb{N} &\rightarrow \quad \mathbb{R} \\ n &\mapsto \ x(n) = x_n \end{aligned}$$

que associa a cada número natural n um real x_n, chamado o n-ésimo termo da sequência.

Escreve-se $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n), para indicar a sequência x.

A notação da sequência (x_n) não deve levar o leitor a confundir com o conjunto dos seus valores ou conjunto dos seus termos que é dado por $x(\mathbb{N}) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$.

Definição 4.2 *Dizemos que uma sequência de números reais (x_n) é limitada superiormente quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$x_n \leq c, \ \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Definição 4.3 *Dizemos que uma sequência de números reais (x_n) é limitada inferiormente quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$x_n \geq c, \ \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Definição 4.4 *Dizemos que uma sequência de números reais (x_n) é limitada se (x_n) é limitada inferiormente e superiormente. Ou seja, existem números reais a, b tais que*

$$a \leq x_n \leq b, \ \forall \, n \in \mathbb{N},$$

ou ainda, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$|x_n| \leq k, \ \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Definição 4.5 *Seja $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Dado $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ com $\mathbb{N}'$ infinito, isto é, ilimitado, ou ainda, $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}'$ tal que $n_0 < n_k$ então a restrição da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ao conjunto $\mathbb{N}'$ é denominada uma subsequência da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Denota-se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.*

Definição 4.6 *Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite $a \in \mathbb{R}$ quando para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter um número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n, com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - a| < \varepsilon$ e escreve*

$$\begin{array}{c} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ ou \\ x_n \to a \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tal que} \\ \textit{se } n > n_0 \textit{ então } |x_n - a| < \varepsilon \end{array}$$

Uma sequência que possui limite é convergente, caso contrário diz-se divergente.

Teorema 4.1 (Unicidade do Limite) *O limite de uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é único.*

Teorema 4.2 *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a então toda subsequência de (x_n) também converge para a.*

Observação 4.1 *Temos pela contrapositiva do teorema (4.2) que se existe uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que não converge para a então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para a.*

Teorema 4.3 *Toda sequência convergente é limitada.*

Observação 4.2 *Porém nem toda sequência limitada é convergente.*

Observação 4.3 *Temos pela contrapositiva do teorema (4.3) que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente.*

Definição 4.7 (Sequência Monótona) *Para todo $n \in \mathbb{N}$,*

i) *se $x_n \leq x_{n+1}$ dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é não-decrescente.*

ii) *se $x_n \geq x_{n+1}$ dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é não-crescente.*

iii) *se $x_n < x_{n+1}$ dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.*

iv) *se $x_n > x_{n+1}$ dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente.*

Teorema 4.4 *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Teorema 4.5 (Teorema de Bolzano Weierstrass) *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Teorema 4.6 *A fim de que $a \in \mathbb{R}$ seja limite de uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$, exista uma infinidade de índices n tais que $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.*

4.2 LIMITES E DESIGUALDADES

Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz uma propriedade P para n suficientemente grande quando existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que P se verifica $\forall\, n > n_0$.

Teorema 4.7 *Seja $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Se $b < a$ então para n suficientemente grande tem-se $b < x_n$. Analogamente, se $a < b$ então para todo n suficientemente grande tem-se $x_n < b$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Corolário 4.1 *Seja $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Se $0 < a$ então para n suficientemente grande tem-se $0 < x_n$. Analogamente, se $a < 0$ então para todo n suficientemente grande tem-se $x_n < 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Corolário 4.2 *Seja $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ e $b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Se $x_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande então $a \leq b$. Em particular, se $x_n \leq b$ para n suficientemente grande então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq b$.*

Teorema 4.8 (Teorema do Sanduíche) *Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$ para n suficientemente grande, então $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.*

4.3 OPERAÇÕES COM LIMITES

Teorema 4.9 *Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada (convergente ou não) então*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = 0$$

Teorema 4.10 *Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, então:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, *se* $b \neq 0$.

Observação 4.4 *Uma das constantes mais importantes da Análise Matemática é o número e, que é limite da sequência* $(1+\frac{1}{n})^n$. *Tem-se* $2 < e < 3$.

Exemplo 4.1 *Consideremos a sequência cujo n-ésimo termo é* $x_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n}$. *Temos* $x_n \geq 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Esta sequência é decrescente a partir do seu terceiro termo. Com efeito, a desigualdade* $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ *é equivalente a* $n^{1/n} > (n+1)^{1/n+1}$. *Elevando a desigualdade acima a* $n(n+1)$ *obtemos:*

$$n^{n+1} > (n+1)^n \Rightarrow n \cdot n^n > (n+1)^n \Rightarrow n > \left(\tfrac{n+1}{n}\right)^n \Rightarrow n > \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n.$$

Como $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ *para todo n, a desigualdade acima é verdadeira para todo* $n \geq 3$.

Portanto, existe $L = \lim n^{1/n}$. *E tem-se* $L \geq 1$, *pois* $x_n \geq 1$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Considerando a subsequência $(2n)^{1/2n}$, *como a subsequência converge para o mesmo limite da sequência temos:*

$$L^2 = \lim\left[(2n)^{1/2n}\right]^2 = \lim\left[(2n)^{1/n}\right] = \lim\left[2^{1/n} \cdot n^{1/n}\right] = \lim 2^{1/n} \cdot \lim n^{1/n} = L.$$

Como $L \geq 1$, *segue que* $L = 1$. *Concluímos que* $\lim n^{1/n} = 1$.

4.4 LIMITES INFINITOS

Entre as sequências divergentes, destacaremos um tipo que se comporta com certa regularidade, a saber, aquelas cujos valores se tornam e mantêm arbitrariamente grandes positivamente ou arbitrariamente grandes negativamente.

Definição 4.8 *Dizemos que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *se* $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $x_n > A$.

Definição 4.9 *Dizemos que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *se* $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $x_n < -A$.

Observação 4.5 1. $+\infty$ *e* $-\infty$ *não são números;*

2. *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ *as sequências* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não convergem;*

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -\infty$;

4. *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *então a sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não é limitada superiormente. A recíproca é falsa, ou seja, se a sequência não é limitada (é ilimitada) superiormente então não necessariamente* $\lim_{n\to\infty}(x_n) = +\infty$*. Basta observar a sequência*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n + (-1)^n \cdot n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

5. *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é não-decrescente e* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é ilimitada superiormente temos que* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Teorema 4.11 1. *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada inferiormente então*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty.$$

2. *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e existe* $c > 0$ *tal que* $y_n > c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = +\infty.$$

3. *Se* $x_n > c > 0$, $y_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ *então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

4. *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada e* $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Observação 4.6 *As hipóteses feitas nas diversas partes do teorema anterior tem por objetivo evitar algumas das chamadas "expressões indeterminadas". Tais como:*

1. $+\infty - \infty$;
2. $0 \cdot (+\infty)$;
3. $\frac{0}{0}$ *e* $\frac{\infty}{\infty}$;
4. ∞^0;
5. 1^∞;
6. 0^0.

4.5 EXERCÍCIOS

4.5.1 Seção 1: Limite de uma Sequência

1. Uma sequência (x_n) diz-se *periódica* quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+p} = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que toda sequência periódica convergente é constante.

   Resolução:

   Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência periódica convergente. Suponhamos, por absurdo, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é constante. Então existem elementos $x_i \neq x_k$ em $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $i \neq k$, tais que:

   - A sequência $\left(x_i, x_{i+p}, x_{i+2p}, \cdots\right)$, onde $x_i = x_{i+np}$, $n \in \mathbb{N}$, converge para x_i.
   - A sequência $\left(x_k, x_{k+p}, x_{k+2p}, \cdots\right)$, onde $x_k = x_{k+np}$, $n \in \mathbb{N}$, converge para x_k.

   Isto mostra que existem pelo menos duas subsequências de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que convergem respectivamente para x_i e x_k, com $x_i \neq x_k$, o que contraria a hipótese de convergência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é constante.

   ■

2. Dadas as sequências (x_n) e (y_n), defina (z_n) pondo $z_{2n-1} = x_n$ e $z_{2n} = y_n$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$, prove que $\lim z_n = a$.

3. Se $\lim x_n = a$, prove que $\lim |x_n| = |a|$.

   Resolução:

   Temos por hipótese que $\lim x_n = a$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $|x_n - a| < \varepsilon$.

   Devemos provar que $\lim |x_n| = |a|$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $||x_n| - |a|| < \varepsilon$.

   Sabemos que no conjunto dos números reais vale

   $$||x_n| - |a|| \quad \leq \quad |x_n| - |a|.$$

   Disto segue que

   $$||x_n| - |a|| \quad \leq \quad |x_n| - |a| \quad < \quad \varepsilon, \quad \forall\, n > n_0.$$

Logo, se $n > n_0$ então

$$||x_n| - |a|| \quad < \quad \varepsilon.$$

Portanto, $\lim |x_n| = |a|$.

■

4. Se uma sequência monótona tem uma subsequência convergente, prove que a sequência é, ela própria, convergente.

5. Um número a chama-se valor de aderência da sequência (x_n) quando é limite de uma subsequência de (x_n). Para cada um dos conjuntos A, B e C abaixo, ache uma sequência que o tenha como conjunto dos seus valores de aderência. $A = \{1,2,3\}$, $B = \mathbb{N}$, $C = [0,1]$.

   Resolução:

   Dado o conjunto $A = \{1,2,3\}$ considere a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,2,3,1,2,3,\cdots)$ limitada e não convergente, pois possui três subsequências constantes, $x_{3n-2} = 1$, $x_{3n-1} = 2$ e $x_{3n} = 3$, com limites $1,2$ e 3, respectivamente. Isto mostra que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem $A = \{1,2,3\}$ como conjunto dos seus valores de aderência.

   Agora, dado o conjunto $B = \mathbb{N}$ vamos encontrar uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que possua B como o conjunto dos seus valores de aderência, para isso considere o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \cdots \cup \mathbb{N}_n \cup \cdots$, $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ (veja o exercício (3) da seção 4 do capítulo 1).

   Fazendo $y_n = k$ se $n \in \mathbb{N}$, obtemos a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,1,2,1,3,2,4,1,2,3,5,2,6,4,3,1,\cdots)$. Pelo fato de que cada conjunto $\mathbb{N}_k$, $k \in \mathbb{N}$ é infinito, podemos afirmar que cada número natural se repetirá infinitas vezes na sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, isso significa que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequências $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $k \in \mathbb{N}$, definida por $y_{n_k} = k$ que convergem para k, respectivamente. Concluímos que $B = \mathbb{N}$ é o conjunto dos valores de aderência da sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Seja $x \in [0,1]$, segue que existem infinitos números racionais $r_i, i \in \mathbb{N}$ no intervalo $(x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon)$, ou seja, dado uma enumeração arbitrária $(r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots)$ dos números racionais existe uma infinidade de índices n tais que $r_n \in (x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$. Isto mostra que $x \in [0,1]$ é limite de uma subsequência de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, conforme teorema (4.6). Como $x \in [0,1]$ é qualquer, concluímos que $C = [0,1]$ é o conjunto dos valores de aderência da sequência $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

■

6. A fim de que o número real a seja valor de aderência de (x_n) é necessário e suficiente que, para todo o $\varepsilon > 0$ e todo $k \in \mathbb{N}$ dados, exista $n > k$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$.

7. A fim de que o número real b não seja valor de aderência da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é necessário e suficiente que existam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ tais que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - b| \geq \varepsilon$.

   Resolução:

   Se b é valor de aderência da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, então para todo $\varepsilon > 0$ e todo $k > 0$ dados, existe $n > k$ tal que $|x_n - b| < \varepsilon$. Temos pela contrapositiva que existem $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que se $n > k$ então $|x_n - b| \geq \varepsilon$ implica que b não é valor de aderência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

   Analogamente, sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ e todo $k \in \mathbb{N}$ dados, existe $n > k$ tal que $|x_n - b| < \varepsilon$ acarreta que b é valor de aderência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Novamente pela contrapositiva, se b não é valor de aderência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ então existe $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ tal que se $n > k$ então $|x_n - b| \geq \varepsilon$

   ■

4.5.2 Seção 2: Limites e desigualdades

1. Se $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = b$ e $|x_n - y_n| \geq \varepsilon$ para todo $n \varepsilon \mathbb{N}$, prove que $|a - b| \geq \varepsilon$.

2. Sejam $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = b$. Se $a < b$, prove que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Longrightarrow x_n < y_n$.

   Resolução:

   Temos $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = b$. Disto segue que dado $\varepsilon > 0$, existem n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$
\begin{array}{lcl}
n > n_1 & \Rightarrow & |x_n - a| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\,; \\
n > n_2 & \Rightarrow & |y_n - b| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad y_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)\,.
\end{array}
$$

   Se $a < b$, tomemos $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$ e $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. Desta foma, se $n > n_0$ temos:

$$
\begin{array}{rcl}
a - \varepsilon & < x_n < & a + \varepsilon \\
a - \dfrac{b-a}{2} & < x_n < & a + \dfrac{b-a}{2} \\
\dfrac{3a-b}{2} & < x_n < & \dfrac{a+b}{2}
\end{array}
\qquad \text{e} \qquad
\begin{array}{rcl}
b - \varepsilon & < y_n < & b + \varepsilon \\
b - \dfrac{b-a}{2} & < y_n < & b + \dfrac{b-a}{2} \\
\dfrac{b+a}{2} & < y_n < & \dfrac{3b-a}{2}.
\end{array}
$$

   Daí, $x_n < \dfrac{a+b}{2} < y_n$, ou seja,

$$
x_n \;<\; y_n, \;\; \forall \;\; n > n_0.
$$

■

3. Se o número real a não é o limite da sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, prove que alguma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um limite $b \neq a$.

4. Prove que uma sequência limitada converge se, e somente se, possui um único valor de aderência.

   Resolução:

   $(\Rightarrow)$ Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada convergente, logo existe $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Daí toda subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a. Ou seja, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui um único valor de aderência.

   $(\Leftarrow)$ Seja a o único valor de aderência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, logo existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para a. Como a é o único valor de aderência, concluímos que toda subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a. Vamos mostrar que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a.

   Suponhamos que existe um número real a que não é limite da sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, logo existe alguma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para c, onde $c \neq a$, o que é um absudo, pois toda subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a.

■

5. Quais são os valores de aderência da subsequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{2n-1} = n$ e $x_{2n} = \dfrac{1}{n}$? Esta sequência converge?

6. Dados, $a, b \in \mathbb{R}^+$, defina indutivamente as sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pondo $x_1 = \sqrt{ab}$, $y_1 = \dfrac{(a+b)}{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{(x_n y_n)}{2}$. Prove que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem para o mesmo limite.

   Resolução:

   Temos que a média aritmética é maior que a média geométrica, pois dados a, $b \in \mathbb{R}_+$, segue que:

$$\begin{array}{rccc} & (a-b)^2 & > & 0 \\ \Rightarrow & a^2-2ab-b^2 & > & 0 \\ \Rightarrow & a^2-2ab+4ab+b^2 & > & 4ab \\ \Rightarrow & a^2+2ab+b^2 & > & 4ab \\ \Rightarrow & (a+b)^2 & > & 4ab \\ \Rightarrow & \sqrt{(a+b)^2} & > & \sqrt{4ab} \\ \Rightarrow & (a+b) & > & 2\sqrt{ab} \\ \Rightarrow & \dfrac{a+b}{2} & > & \sqrt{ab}, \end{array}$$

isto é, $y_1 > x_1$. Analogamente $y_n > x_n$, $\forall\ n$.

Vamos mostrar agora que $x_n < x_{n+1}$, temos que

$$\begin{array}{rccc} & x_n & < & y_n \\ \Rightarrow & x_n x_n & < & y_n x_n \\ \Rightarrow & x_n^2 & < & y_n x_n \\ \Rightarrow & \sqrt{x_n^2} & < & \sqrt{y_n x_n} \\ \Rightarrow & x_n & < & x_{n+1} \end{array}$$

com isso concluimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente.

Mostraremos agora que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente, segue que:

$$\begin{array}{rccc} & x_n & < & y_n \\ \Rightarrow & x_n & < & 2y_n-y_n \\ \Rightarrow & x_n+y_n & < & 2y_n \\ \Rightarrow & \dfrac{x_n+y_n}{2} & < & y_n \\ \Rightarrow & y_{n+1} & < & y_n. \end{array}$$

Disto resulta que

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots < y_{n+1} < y_n < \cdots < y_2 < y_1 < b.$$

Logo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências monótonas limitadas, daí existem $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ e $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. Vamos mostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possuem o mesmo limite, ou seja, $x = y$. Temos,

$$y = \lim_{n\to+\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}(x_n+y_n) = \frac{1}{2}(x+y).$$

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow \quad y & = & \frac{x+y}{2} \\ \Rightarrow \quad 2y & = & x+y \\ \Rightarrow \quad x & = & y. \end{array}$$

■

7. Diz-se que (x_n) é uma *sequência de Cauchy* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$.

   (a) Prove que toda sequência de Cauchy é limitada.

   (b) Prove que a sequência de Cauchy não pode ter dois valores de aderência distintos.

   (c) Prove que uma sequência (x_n) é convergente se, e somente se, é de Cauchy.

4.5.3 Seção 3: Operações com Limites

1. Prove que, para todo $p \in \mathbb{N}$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+p]{n} = 1$.

   Resolução:

   Vamos mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+p]{n} = 1$, $\forall\, n, p \in \mathbb{N}$.

   Considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $x_n = n^{\frac{1}{n+p}}$. Temos que $x_n \geq 1\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Observe também que

$$\begin{array}{rcl} n+p & > & n \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{n+p} & < & \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \quad n^{\frac{1}{n+p}} & \leq & n^{\frac{1}{n}}. \end{array}$$

   Portanto,

$$1 \quad \leq \quad n^{\frac{1}{n+p}} \quad \leq \quad n^{\frac{1}{n}}.$$

   Daí,

$$\lim_{n\to\infty} 1 \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n+p}} \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}.$$

   Como $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ (pelo exemplo (4.1)), concluímos pelo Teorema do Sanduíche que $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n+p}} = 1$.

■

2. Se existem $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $\varepsilon \leq x_n \leq n^k$ para todo n suficientemente grande, prove que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$. Use este fato para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+k}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+\sqrt{n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log n}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \log n}$.

3. Dado $a > 0$, defina indutivamente a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pondo $x_1 = \sqrt{a}$ e $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$. Prove que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e calcule seu limite

$$L = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots}}}$$

Resolução:

Podemos observar que $x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a + x_1} = x_2$. E supondo $x_{n-1} < x_n$, vem que $x_n^2 = a + x_{n-1} < a + x_n = x_{n+1}^2$, donde $x_n < x_{n+1}$, ou seja, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente.

Considerando c a única raiz positiva da equação $x^2 - x - a = 0$, com efeito

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

logo

$$x' = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2} > 0$$

e

$$x'' = \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{2} > 0$$

pois como $a > 0$, temos

$$\begin{aligned} 4a &> 0 \\ 1+4a &> 1 \\ \sqrt{1+4a} &> 1 \\ 1-\sqrt{1+4a} &< 0 \\ \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} &< 0. \end{aligned}$$

Daí, temos $c^2 = a + c$. Logo podemos afirmar que $x_n < c$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, ou seja, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

De fato, para $n = 1$, temos $x_1 = \sqrt{a} < c$, já que $c^2 = a + c$, isto é, $c^2 > a$, então, $c > \sqrt{a}$. Supondo a afirmação verdadeira para $n = k$, temos $x_k < c$. Logo para $n = k+1$ temos $x_{k+1} = (\sqrt{a + x_k})^2 = a + x_k < a + c = c^2$, daí $x_{k+1} < c$. Portanto, $x_n < c$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Donde podemos concluir que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, isto é, existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.

Sabendo que $(x_{n+1})^2 = a + x_n$, temos:

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2 & = & \lim\limits_{n\to\infty} (a + x_n) \\ \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2 & = & \lim\limits_{n\to\infty} a + \lim\limits_{n\to\infty} x_n \\ \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2 - \lim\limits_{n\to\infty} x_n - a & = & 0 \\ \Rightarrow \quad L^2 - L - a & = & 0 \\ \Rightarrow \quad L & = & c. \end{array}$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

∎

4. Seja $e_n = (x_n - \sqrt{a}/\sqrt{a})$ o *erro relativo* na n-ésima etapa do cálculo de $\sqrt{a}$. Prove que $e_{n+1} = {e_n}^2/2(1+e_n)$. Conclua que $e_n \leq 0,01 \Rightarrow e_{n+1} \leq 0,00005 \Rightarrow e_{n+2} \leq 0,00000000125$ e observe a rapidez de convergência do método.

5. Dado $a > 0$, defina indutivamente a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pondo x_1/a e $x_{n+1} = 1/(a+x_n)$. Considere o número c, raiz positiva da equação $x^2 + ax - 1 = 0$, o único número positivo tal que $c = 1/(a+c)$. Prove que

$$x_2 < x_4 < \ldots < x_{2n} < \ldots < c < \ldots < x_{2n-1} < \ldots < x_3 < x_1,$$

e que $\lim x_n = c$. O número c pode ser considerado como a soma da *fração contínua*

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ldots}}}}$$

Resolução:

Sabendo que $x_{n+1} = \dfrac{1}{a+x_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ temos:

$n = 1 \Rightarrow x_2 = \dfrac{1}{a+x_1}$.

$n = 2 \Rightarrow x_3 = \dfrac{1}{a+x_2} = \dfrac{1}{a + \frac{1}{a+x_1}} = \dfrac{a+x_1}{a^2+ax_1+1}$.

$\vdots$

$n = k-1 \Rightarrow x_k = \dfrac{1}{a+x_{k-1}}$.

$n = k \Rightarrow x_{k+1} = \dfrac{1}{a+x_k} = \dfrac{1}{a+\frac{1}{a+x_{k-1}}} = \dfrac{a+x_{k-1}}{a^2+ax_{k-1}+1}$.

$n = k+1 \Rightarrow x_{k+2} = \dfrac{1}{a+x_{k+1}} = \dfrac{1}{a+\frac{1}{a+x_k}} = \dfrac{a+x_k}{a^2+ax_k+1}$.

Considerando c a única raiz positiva da equação $x^2+ax+1=0$, obtemos $c=\dfrac{1}{a+c}$.
Temos por hipótese que $x_1=\dfrac{1}{a}$, logo

$$x_1 \;=\; \frac{1}{a} \;>\; \frac{1}{a+c} \;=\; c,$$

o que acarreta $x_1>c$. Daí,

$$x_1>c=\frac{1}{a+c}>\frac{1}{a+x_1}=x_2,$$

o que implica $x_1>c>x_2$. Tendo $x_1>\dfrac{1}{a+x_1}$, obtemos $x_1(a+x_1)>1$. Multiplicando ambos os membros da inequação por a e somando x_1 temos: $x_1(a^2+ax_1+1)>a+x_1$. Daí,

$$x_1 \;>\; \frac{a+x_1}{a^2+ax_1+1} \;=\; x_3.$$

Como $x_2<c$ e $x_3=\dfrac{1}{a+x_2}>\dfrac{1}{a+c}=c$, temos

$$x_1 \;>\; x_3 \;>\; c \;>\; x_2.$$

Analogamente, $x_4=\dfrac{1}{a+x_3}<\dfrac{1}{a+c}=c$, então $x_4<c$. Além disso, observe que

$$x_4 \;=\; \frac{1}{a+x_3} \;=\; \frac{a^2+ax_1+1}{a^3+a^2x_1+2a+x_1}.$$

Ainda $x_2<x_3=\dfrac{a+x_1}{a^2+ax_1+1}$. Então, $x^2(a^2+ax_1+1)<a+x_1$, multiplicando por a e somando 1, temos:

$$\begin{array}{rrcl}
 & x_2\left(a^3+a^2x_1+a\right)+1 & < & a^2+ax_1+1\\
\Rightarrow & x_2\left(a^3+a^2x_1+a+\frac{1}{x_2}\right) & < & a^2+ax_1+1\\
\Rightarrow & x_2\left(a^3+a^2x_1+2a+x_1\right) & < & a^2+ax_1+1\\
\Rightarrow & x_2 & < & \dfrac{a^2+ax_1+1}{a^3+a^2x_1+2a+x_1} \;=\; x_4.
\end{array}$$

Assim temos $x_1>x_3>c>x_4>x_2$.

Vamos mostrar por indução sobre n que $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $x_{2n-3}>x_{2n-1}>c>x_{2n}>x_{2n-2}$.

Para $n=1$ é verdade, pois já foi mostrado que $x_1>c>x_2$. É verdade também para $n=2$, pois vimos que $x_1>x_3>c>x_4>x_2$.

Supondo que é válido para $n = k$, ou seja,

$$x_1 > \cdots > x_{2k-3} > x_{2k-1} > c > x_{2k} > x_{2k-2} > \cdots > x_2.$$

Vamos mostrar que é válido para $n = k+1$.

$$x_1 > \cdots > x_{2k-1} > x_{2k+1} > c > x_{2k+2} > x_{2k} > \cdots > x_2.$$

Como $x_{2k} < c$ temos:

$$x_{2k+1} = \frac{1}{a+x_{2k}} > \frac{1}{a+c} = c \Rightarrow x_{2k+1} > c.$$

Daí

$$x_{2k+2} = \frac{1}{a+x_{2k+1}} < \frac{1}{a+c} = c \Rightarrow x_{2k+2} < c.$$

Pela hipótese de indução $x_{2k-2} < c$, então:

$$x_{2k-1} = \frac{1}{a+x_{2k-2}} > \frac{1}{a+c} = c \Rightarrow x_{2k-1} > c.$$

Donde,

$$x_{2k} = \frac{1}{a+x_{2k-1}} < \frac{1}{a+c} = c \Rightarrow x_{2k} < c.$$

Sabemos que $x_{2k} > x_{2k-2}$, daí

$$\begin{aligned} a+x_{2k} &> a+x_{2k-2} \\ \Rightarrow \frac{1}{a+x_{2k}} &< \frac{1}{a+x_{2k-2}} \\ \Rightarrow x_{2k+1} &< x_{2k-1}. \end{aligned}$$

Disto segue que

$$\begin{aligned} a+x_{2k+1} &< a+x_{2k-1} \\ \Rightarrow \frac{1}{a+x_{2k+1}} &> \frac{1}{a+x_{2k-1}} \\ \Rightarrow x_{2k+2} &> x_{2k}. \end{aligned}$$

Logo,

$$x_1 > x_3 > \cdots > x_{2n-1} > \cdots > c > \cdots > x_{2n} > \cdots > x_4 > x_2,$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$. Disto segue que as subsequências x_{2n} e x_{2n-1} são limitadas e monótonas. Portanto, $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \eta$ e $\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \xi$.

A relação $x_{n+2} = \dfrac{1}{a+x_{n+1}} = \dfrac{1}{a+\frac{1}{a+x_n}} = \dfrac{a+x_n}{a^2+ax_n+1}$, por passagem ao limite, fornece $\xi = \dfrac{a+\xi}{a^2+a\xi+1}$ e $\eta = \dfrac{a+\eta}{a^2+a\eta+1}$, logo $\xi^2+a\xi-1=0$ e $\eta^2+a\eta-1=0$. Como ξ e η são positivos, vem $\xi=\eta=c$.

$\blacksquare$

6. Dado $a>0$, defina indutivamente a sequência (y_n), pondo $y_1 = a$ e $y_{n+1} = a+1/y_n$. Mostre que $\lim y_n = a+c$, onde c é como no exercício anterior.

7. Defina a sequência (a_n) indutivamente, pondo $a_1 = a_2 = 1$ e $a_{n+2} = a_{n+1}+a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escreva $x_n = a_n/a_{n+1}$ e prove que $\lim x_n = c$, onde c é único número positivo tal que $1/(c+1) = c$. O termo a_n chama-se o n-ésimo *número de Fibonacci* e $c = (-1+\sqrt{5})/2$ é o *número de ouro* da Geometria Clássica.

   Resolução:

   Temos $c>0$. Disto segue que
   $x_1 = \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{1}{1} > \dfrac{1}{c+1} = c.$
   $x_2 = \dfrac{a_2}{a_3} = \dfrac{a_2}{a_2+a_1} = \dfrac{1}{1+x_1} < \dfrac{1}{c+1} = c$, logo $x_1 > x_2$.
   $x_3 = \dfrac{a_3}{a_4} = \dfrac{a_3}{a_3+a_2} = \dfrac{1}{1+x_2} > \dfrac{1}{1+c} = c \Rightarrow x_3 > c.$
   Além disso,
   $x_3 = \dfrac{1}{1+x_2} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+x_1}} = \dfrac{1+x_1}{2+x_1}.$

   Como $x_1 > \dfrac{1}{1+x_1} = x_1 + x_1^2 > 1 \Rightarrow x_1(1+x_1) > 1$, somando x_1 a desigualdade temos,

$$
\begin{array}{rcl}
x_1(1+x_1)+x_1 & > & 1+x_1 \\
\Rightarrow\quad x_1(1+x_1+1) & > & 1+x_1 \\
\Rightarrow\quad x_1 & > & \dfrac{1+x_1}{2+x_1} \quad = \quad x_3.
\end{array}
$$

   Daí $x_1 > x_3 > c > x_2$.

   Temos ainda
   $x_4 = \dfrac{1}{1+x_3} = \dfrac{1}{1+\frac{1+x_1}{2+x_2}} = \dfrac{2+x_1}{3+2x_1}.$

   Note que
   $x_4 = \dfrac{1}{1+x_3} < \dfrac{1}{1+c} = c \Rightarrow x_4 < c.$

Como $x_2 < x_3 = \dfrac{1+x_1}{2+x_1}$. Então, $x_2(2+x_1) < 1+x_1$, somando 1, obtemos:

$$\begin{array}{rrcl} & x_2(2+x_1)+1 & < & 1+x_1+1 \\ \Rightarrow & x_2(2+x_1+\frac{1}{x_2}) & < & 2+x_1 \\ \Rightarrow & x_2(2+x_1+\frac{1}{\frac{1}{1+x_1}}) & < & 2+x_1 \\ \Rightarrow & x_2(2+x_1+1+x_1) & < & 2+x_1 \\ \Rightarrow & x_2(3+2x_1) & < & 2+x_1 \\ \Rightarrow & x_2 & < & \dfrac{2+x_1}{3+2x_1} \quad = \quad x_4. \end{array}$$

Segue que $x_1 > x_3 > c > x_4 > x_2$.

Mostraremos por indução sobre n que as subsequências x_{2n} e x_{2n-1} são monótonas limitadas, ou seja,

$$x_{2n-3} > x_{2n-1} > c > x_{2n} > x_{2n-2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vimos que é verdade para $n = 1$, já que $x_1 > c > x_3$. Também para $n = 2$, pois $x_1 > x_3 > c > x_4 > x_2$. Suponhamos que é válido para $n = k$ então temos

$$x_1 \;>\; \cdots \;>\; x_{2k-3} \;>\; x_{2k-1} \;>\; c \;>\; x_{2k} \;>\; x_{2k-2} \;>\; \cdots \;>\; x_2.$$

Vamos provar que vale para $n = k+1$,

$$x_1 \;>\; \cdots \;>\; x_{2k-1} \;>\; x_{2k+1} \;>\; c \;>\; x_{2k+2} \;>\; x_{2k} \;>\; \cdots \;>\; x_2.$$

Temos da hipótese de indução que $x_{2k} < c$, então

$$x_{2k+1} \;=\; \frac{1}{1+x_{2k}} \;>\; \frac{1}{1+c} \;=\; c \;\Rightarrow\; x_{2k+1} \;>\; c.$$

Daí

$$x_{2k+2} \;=\; \frac{1}{1+x_{2k+1}} \;<\; \frac{1}{1+c} \;=\; c \;\Rightarrow\; x_{2k+2} \;<\; c.$$

Também da hipótese de indução $x_{2k-2} < c$, então:

$$x_{2k-1} \;=\; \frac{1}{1+x_{2k-2}} \;>\; \frac{1}{1+c} \;=\; c \;\Rightarrow\; x_{2k-1} \;>\; c.$$

Donde,

$$x_{2k} \;=\; \frac{1}{1+x_{2k-1}} \;<\; \frac{1}{1+c} \;=\; c \;\Rightarrow\; x_{2k} \;<\; c.$$

Temos da hipótese de indução que $x_{2k-2} < x_{2k}$, então

$$\begin{array}{rcl} 1+x_{2k} & > & 1+x_{2k-2} \\ \Rightarrow \dfrac{1}{a+x_{2k}} & < & \dfrac{1}{a+x_{2k-2}} \\ \Rightarrow x_{2k+1} & < & x_{2k-1}. \end{array}$$

Disto segue que

$$\begin{array}{rcl} 1+x_{2k+1} & < & 1+x_{2k-1} \\ \Rightarrow \dfrac{1}{1+x_{2k+1}} & > & \dfrac{1}{1+x_{2k-1}} \\ \Rightarrow x_{2k+2} & > & x_{2k}. \end{array}$$

Logo,

$$x_1 > x_3 > \cdots > x_{2n-1} > \cdots > c > \cdots > x_{2n} > \cdots > x_4 > x_2,$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$. Portanto, existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = b$.

A relação $x_{n+2} = \dfrac{1}{1+x_{n+1}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{a+x_n}} = \dfrac{1+x_n}{2+x_n}$, por passagem ao limite, fornece

$a = \dfrac{1+a}{2+a} \Rightarrow 2a+a^2 = 1+a \Rightarrow a^2+a-1 = 0$

e

$b = \dfrac{1+b}{2+b} \Rightarrow b^2+2b = 1+b \Rightarrow b^2+b-1 = 0.$

Como a e b são positivos, podemos concluir que $a = b = c$.

∎

4.5.4 Seção 4: Limites Infinitos

1. Prove que $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

2. Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ e $a \in \mathbb{R}$, prove: $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{\log(x_n+a)} - \sqrt{\log x_n}\right] = 0$

   Resolução:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\log(x_n+a)}-\sqrt{\log x_n}\right]\\
=\;&\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{\log(x_n+a)}-\sqrt{\log x_n}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{\log(x_n+a)}+\sqrt{\log x_n}\right)}{\left(\sqrt{\log(x_n+a)}+\sqrt{\log x_n}\right)}\right]\\
=\;&\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{\log(x_n+a)}\right)^2-\left(\sqrt{\log x_n}\right)^2}{\sqrt{\log(x_n+a)}+\sqrt{\log x_n}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\log(x_n+a)-\log x_n}{\sqrt{\log(x_n+a)}+\sqrt{\log x_n}}\right]\\
=\;&\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\log\left(\frac{x_n+a}{x_n}\right)}{\sqrt{\log(x_n+a)}+\sqrt{\log x_n}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\log\left(1+\frac{a}{x_n}\right)}{\sqrt{\log(x_n+a)}+\sqrt{\log x_n}}\right]\\
=\;&\frac{\lim_{n\to\infty}\left[\log\left(1+\dfrac{a}{x_n}\right)\right]}{\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\log(x_n+a)}+\sqrt{\log x_n}\right]}=\frac{\log\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x_n}\right)\right]}{\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\log(x_n+a)}+\sqrt{\log x_n}\right]}\\
=\;&\frac{\log\left[\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{x_n}\right)\right]}{\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\log(x_n+a)}+\sqrt{\log x_n}\right]}=\frac{\log[1+0]}{\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\log(x_n+a)}+\sqrt{\log x_n}\right]}\\
=\;&\frac{\log 1}{\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\log(x_n+a)}+\sqrt{\log x_n}\right]}=\frac{0}{\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\log(x_n+a)}+\sqrt{\log x_n}\right]}\\
=\;&0.
\end{aligned}
$$

Concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\log(x_n+a)}-\sqrt{\log x_n}\right]\quad=\quad 0.$$

■

3. Dado $k \in \mathbb{N}$ e $a > 0$, determine o limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^k\cdot a^n}.$$

Supondo $a > 0$ e $a \neq e$ calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n} \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^k \cdot a^n \cdot n!}{n^n}.$$

(Para o caso $a = e$, ver exercício 9, seção 1, capítulo 11.)

4. Mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \log(n+1)/\log n = 1$.

Resolução:

Note que

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} - 1 = \frac{\log(n+1) - \log n}{\log n} = \frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\log n} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}.$$

E ainda,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n} = \frac{\log\left(\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty} \log n} = \frac{\log 1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \log n} = \frac{0}{\lim\limits_{n\to+\infty} \log n} = 0.$$

Logo

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\log(n+1)}{logn} - 1\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n} = 0,$$

então,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} - \lim_{n\to+\infty} 1 = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} = 1.$$

■

5. Sejam (x_n) uma sequência arbitrária e (y_n) uma sequência crescente, com $\lim y_n = +\infty$. Supondo que $\lim(x_{n+1} - x_n)/(y_{n+1} - y_n) = a$, prove que $\lim x_n/y_n = a$. Conclua que se $\lim(x_{n+1} - x_n) = a$ então $\lim x_n/n = a$. Em particular, de $\lim \log(1 + 1/n) = 0$, conclua que $\lim(\log n)/n = 0$.

6. Se $\lim x_n = a$ e (t_n) é uma sequência de números positivos com

$$\lim(t_1 + \ldots + t_n) = +\infty,$$

prove que

$$\lim \frac{t_1x_1 + \ldots + t_nx_n}{t_1 + \ldots + t_n} = a.$$

Em particular, se $y_n = \dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n}$, tem-se ainda $\lim y_n = a$.

Resolução:

Considere as sequências

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

e

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

onde $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

Pelo exercício anterior, temos que se $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = a$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = a$.

Observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n+t_{n+1}x_{n+1}-(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}{t_1+t_2+\cdots+t_n+t_{n+1}-(t_1+t_2+\cdots+t_n)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{t_{n+1}x_{n+1}}{t_{n+1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} \\
&= a.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = a.$$

Então,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{t_1x_1+\ldots+t_nx_n}{t_1+\ldots+t_n} = a.$$

Em particular, considere a sequência

$$(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1+1+1+\cdots+1)_{n\in\mathbb{N}},$$

temos pelo exercício anterior que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números positivos onde

$$\lim_{n\to+\infty} t_n \quad = \quad \lim_{n\to+\infty} (1+1+1+\cdots+1) \quad = \quad +\infty.$$

Daí

$$
\begin{aligned}
a &= \lim_{n\to+\infty} \frac{t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n}{t_1 + t_2 + \cdots + t_n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1x_1 + 1x_2 + \cdots + 1x_n}{1 + 1 + \cdots + 1} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.
\end{aligned}
$$

■

5 SÉRIES NUMÉRICAS

5.1 SÉRIES CONVERGENTES

Definição 5.1 *Dada uma sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números reais, denomina-se série a soma infinita*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Indicaremos a série por $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$*, ou seja,*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Como algebricamente só tem sentido somas finitas, é necessário definir "soma infinita".

Definição 5.2 *Dada uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$*, denomina-se sequência de somas parciais da série dada à sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definida por*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Definição 5.3 *Dizemos que uma série converge se a sequência de somas parciais converge, isto é,* $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$*,* $s \in \mathbb{R}$*. Neste caso*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s = \lim_{n\to+\infty} s_n$$

Teorema 5.1 *Se* $|a| < 1$*. A série geométrica*

$$1 + a^1 + a^2 + \cdots + a^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$$

converge.

Observação 5.1 *1. Suponha que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de termos não negativos $(a_n \geq 0, \forall\, n \in \mathbb{N})$. Assim, a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{n=1}^{n} a_k$$

é não decrescente, pois

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n \leq a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_{n+1}$$

então

$$s_n \leq s_{n+1}$$

Para que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convirja basta que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja limitada superiormente (pois toda sequência monótona e limitada é convergente).

2. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está nas mesmas condições do ítem anterior e se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge e $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ então $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n$ converge.

Exemplo 5.1 (A Série Harmônica) *A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.*

De fato se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = s$ fosse convergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} = t$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} = u$ também seriam convergentes. Além disso, como $S_{2n} = t_n + u_n$, fazendo $n \to \infty$ teríamos $s = t + u$. Mas $t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \frac{s}{2}$, portanto $u = t = \frac{s}{2}$.

Por outro lado

$$\begin{aligned}
u - t &= \lim_{n\to\infty}(u_n - t_n) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \cdots + \left(\frac{1}{(2n-1)2n}\right)\right) > 0,
\end{aligned}$$

logo $u > t$ contradição. Portanto $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

Teorema 5.2 *Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge então $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.*

Observação 5.2 1. *A contrapositiva do teorema (5.2) diz que: Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ *então a* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

2. *Não vale a recíproca do teorema (5.2): Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ *então nada podemos dizer a respeito da convergência da série.*

Teorema 5.3 (Critério de Comparação) *Sejam* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *séries de termos não negativos. Suponha que existam* $c > 0$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tais que* $a_n \leq c \cdot b_n$, $\forall\, n \geq n_0$. *Logo*

1. *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*

2. *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge então* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverge.*

Teorema 5.4 *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ *diverge se* $p \leq 1$ *e converge se* $p > 1$.

5.2 SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES

Definição 5.4 *Uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diz-se absolutamente convergente quando* $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *converge.*

Observação 5.3 1. *Quando* $-1 < a < 1$ *a série geométrica* $\sum_{n=1}^{+\infty} a^n$ *é absolutamente convergente.*

2. *Uma série convergente cujos termos não mudam de sinal é absolutamente convergente.*

Teorema 5.5 (Leibniz) *Se* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência monótona decrescente que tende para zero então* $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *é uma série convergente.*

Definição 5.5 *Uma série convergente* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *tal que* $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *diverge chama-se condicionalmente convergente.*

Observação 5.4 *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *é condicionalmente convergente.*

Teorema 5.6 *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

5.3 TESTES DE CONVERGÊNCIA

Teorema 5.7 *Seja* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *uma série absolutamente convergente, com* $b_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se a sequência* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *for limitada (em particular, se for convergente) então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *será absolutamente convergente.*

Corolário 5.1 (Teste de d'Alembert) *Seja* $a_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se existir uma constante* c *tal que* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq c < 1$ *para todo* n *suficientemente grande então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *será absolutamente convergente.*

Corolário 5.2 (Teste de d'Alembert ou Teste da Razão) *Se* $a_n \neq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *e suponha que exista o limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

1. *Se* $L < 1$ *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge absolutamente;*
2. *Se* $L > 1$ *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge;*
3. *Se* $L = 1$ *nada podemos afirmar.*

Teorema 5.8 (Teste de Cauchy) *Se existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$ *para todo* n *suficientemente grande então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *será absolutamente convergente.*

Corolário 5.3 (Teste de Cauchy ou Teste da Raiz) *Suponha que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

1. *Se* $L < 1$ *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é absolutamente convergente;*
2. *Se* $L > 1$ *então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente;*
3. *Se* $L = 1$ *nada podemos afirmar.*

Teorema 5.9 *Seja* $a_n \neq 0$. *Se* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ *então* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$

5.4 EXERCÍCIOS

5.4.1 Seção 1: Séries convergentes

1. Dadas as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, com $a_n = \sqrt{n+1}$ e $b_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Calcule explicitamente as n-ésimas reduzidas s_n e t_n destas séries e mostre que $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$, logo as séries dadas são divergentes.

2. Use o critério de comparação para provar que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, a partir da convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)}$.

   Resolução:

   Sabemos da hipótese que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ é convergente.

   Temos $n^2 \geq n, \forall\, n$.

   Adicionando n^2 e dividindo por 2 obtemos:

$$n^2 \geq \frac{n(n+1)}{2}.$$

   Disto segue que,

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}.$$

   Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ é convergente e utilizando o Critério de comparação, podemos concluir que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente.

   ■

3. Seja s_n a n-ésima reduzida da série harmônica. Prove que para $n = 2^m$ tem-se $s_n > 1 + \frac{m}{2}$ e conclua daí que a série harmônica é divergente.

4. Mostre que a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverge.

   Resolução:

Tomando a reduzida s_n da série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}$, temos:

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{2\log 2}+\left(\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{4\log 4}\right)+\left(\frac{1}{5\log 5}+\frac{1}{6\log 6}+\frac{1}{7\log 7}+\frac{1}{8\log 8}\right)+\cdots+\\
&\quad \left(\frac{1}{(2^{n-1}+1)\log(2^{n-1}+1)}+\cdots+\frac{1}{2^n\log 2^n}\right)\\
&\geq \frac{1}{2\log 2}+\frac{2}{4\log 4}+\frac{4}{8\log 8}+\frac{8}{16\log 16}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{2^n\log 2^n}\\
&= \frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{2\log 2^2}+\frac{1}{2\log 2^3}+\frac{1}{2\log 2^4}+\cdots+\frac{1}{2\log 2^n}\\
&> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\\
&= t_n.
\end{aligned}$$

Temos que t_n é a soma parcial da série harmônica, e como a série harmônica $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}$ é divergente, concluímos pelo critério de comparação que $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\log n}$ diverge.

■

5. Mostre que se $r>1$ a série $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\log n)^r}$ converge.

6. Prove que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log n}{n^2}$ converge.

   Resolução:

   Observe que $\log n < \sqrt{n}$, para n suficientemente grande. Assim, dividindo essa desigualdade por n^2 obtemos:

$$0 < \frac{\log n}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2}.$$

   Como

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{-\frac{1}{2}}\cdot n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

   Note que $0<\frac{1}{n}<1$, e $\frac{3}{2}>1$, logo $\sum\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$ é convergente, conforme teorema (5.4).

Portanto, pelo critério de comparação temos que a série $\sum \frac{\log n}{n^2}$ converge para n suficientemente grande.

■

7. Prove: se $a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge então $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

5.4.2 Seção 2: Séries absolutamente convergentes

1. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente e $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente para todo $x \in [-1,1]$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)\ ,\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$$

são absolutamente convergentes para todo $x \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Vamos provar inicialmente que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente, $\forall\, x \in [-1,1]$.

- Se $x = -1$, então:

$$\sum |(-1)^n a_n| \ = \ \sum |(-1)|^n |a_n| \ = \ \sum |a_n| \ = \ \sum a_n.$$

- Se $x = 1$, temos:

$$\sum |1^n a_n| \ = \ \sum |a_n| \ = \ \sum a_n.$$

- Se $|x| < 1$, então $|x^n| < 1$, daí:

$$\sum |a_n x^n| \ = \ \sum |a_n|\,|x^n| \ < \ \sum |a_n| \ = \ \sum a_n.$$

  Logo $\sum |a_n x^n| \leq \sum a_n$, $\forall\, x \in [-1,1]$. Como $\sum a_n$ é convergente, temos pelo critério de comparação que $\sum |a_n x^n|$ é convergente, logo $\sum a_n x^n$ converge absolutamente.

Agora vamos mostrar que $\sum a_n \operatorname{sen}(nx)$ e $\sum a_n \cos(nx)$ são absolutamente convergentes para todo número real.

Temos que $\sum |a_n \operatorname{sen}(nx)| = \sum |a_n|\,|\operatorname{sen}(nx)|$ e $\sum |a_n \cos(nx)| = \sum |a_n|\,|\cos(nx)|$.

Comos as funções sen e cos são limitadas, com $|\operatorname{sen}(nx)| \leq 1$ e $|\cos(nx)| \leq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Concluímos pelo que provamos acima que

$$\sum |a_n \operatorname{sen}(nx)| \leq \sum a_n \quad \text{e} \quad \sum |a_n \cos(nx)| \leq \sum a_n,$$

ou seja, que $\sum a_n \operatorname{sen}(nx)$, $\sum a_n \cos(nx)$ convergem absolutamente, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

■

2. A série $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} + \cdots$ tem termos alternadamente positivos e negativos e seu termo geral tende para zero. Entretanto é divergente. Por que isto não contradiz o Teorema de Leibniz?

3. Dê exemplo de uma série convergente $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$ e de uma sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ seja divergente. Examine o que ocorre se uma das hipóteses seguintes for verificada:

   (a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

4. Prove que é convergente a série obtida alterando-se os sinais dos termos da série harmônica, de modo que fiquem p termos positivos ($p \in \mathbb{N}$ fixado) seguidos de p termos negativos, alternadamente.

5. Se $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, ponha $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ e prove que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$.

   Resolução:

   Seja $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ absolutamente convergente, digamos $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| = A$ e $|b_n| \leq B$, para todo $n \geq 0$.

   Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $|b_n - 0| < \dfrac{\varepsilon}{2A}$ e $|a_n| + |a_{n+1}| + \cdots < \dfrac{\varepsilon}{2B}$.

   Considerando $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n_0} b_{n-n_0} + \cdots + a_n b_0$, temos:

$$\begin{aligned}
|c_n| &= |a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n_0} b_{n-n_0} + \cdots + a_n b_0| \\
&\leq |a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n_0} b_{n-n_0}| + |a_{n_0+1} b_{n-n_0-1} + \cdots + a_n b_0| \\
&< (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n_o}|) \cdot \frac{\varepsilon}{2A} + (|a_{n_0+1}| + \cdots + |a_n|) \cdot B \\
&< A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} + \frac{\varepsilon}{2B} \cdot B \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $|c_n| < \varepsilon$, daí $|c_n - 0| < \varepsilon$.

Portanto, $\lim c_n = 0$.

$\blacksquare$

6. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente, prove que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge.

7. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ convergem, prove que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ converge absolutamente.

   Resolução:

   Vamos mostrar que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot b_n$ é absolutamente convergente, para tanto basta provarmos que $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \cdot b_n|$ converge.

   Utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \cdot b_n| \quad \leq \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \cdot b_n| \right)^2 \quad = \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot b_n \right)^2 \quad \leq \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2.$$

   Daí, como por hipótese $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2$ convergem, temos que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2$ converge. Desta forma, pelo critério de comparação, podemos afirmar que $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \cdot b_n|$ converge, portanto, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot b_n$ converge absolutamente.

$\blacksquare$

8. Prove: uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente se, e somente se, é limitado o conjunto de todas as somas finitas formadas com os termos a_n.

5.4.3 Seção 3: Testes de convergência

1. Prove que se existir uma infinidade de índices n tais que $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge. Se $a_n \neq 0$ para todo n e $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ para todo $n > n_0$ então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

   Resolução:

   Se existir uma infinidade de índices n tais que $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, então existe uma infinidade de índices n para os quais $|a_n| \geq 1$. Logo a_n não tende para zero. Portanto $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.

Agora se $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ para todo $n > n_0$, então $|a_{n+1}| \geq |a_n|$, $\forall\, n > n_0$, e consequentemente, $\lim a_n \neq 0$, logo a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.

■

2. Se $0 < a < b < 1$, a série $a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+\cdots$ é convergente. Mostre que o teste de Cauchy conduz a este resultado mas o teste de d'Alembert é inconclusivo.

3. Determine se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{\log n}{n}\right)^n$ é convergente usando ambos os testes, de d'Alembert e Cauchy.

Resolução:

Inicialmente vamos provar a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{\log n}{n}\right)^n$ empregando o Teste de Cauchy:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n]{\left|\left(\frac{\log n}{n}\right)^n\right|}\right] = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\log n}{n}\right| = 0.$$

Logo $L = 0 < 1$. Portanto, $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{\log n}{n}\right)^n$ é convergente.

Agora vamos mostrar que $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{\log n}{n}\right)^n$ converge usando o teste de d'Alembert:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(\dfrac{\log(n+1)}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{\log n}{n}\right)^n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\log(n+1)}{n+1}\right)^1\left(\frac{\log(n+1)}{n+1}\right)^n\left(\frac{n}{\log n}\right)^n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\log(n+1)}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n\right].
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\log(n+1)}{n+1}\right] = 0,$$

e,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right] = \frac{1}{e},$$

precisamos mostrar que $\left(\dfrac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n$ é limitada.

De fato, para $n \geq 3$ temos $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n < n$, logo $(n+1)^n < n^{n+1}$ e tomando logaritmos temos $n\log(n+1) < (n+1)\log n$, donde $\dfrac{\log(n+1)}{\log n} < \dfrac{n+1}{n}$. Então $\left(\dfrac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n < \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n < e$.

Logo, $\left(\dfrac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n$ é limitada. Disto resulta que $L = 0 < 1$. Portanto, o teste de d'Alembert confirma a convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\log n}{n}\right)^n$.

■

4. Dada um sequência de números positivos x_n, com $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, prove que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = a$.

5. Determine para quais valores de x cada uma das séries abaixo é convergente

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^k x^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n!x^n$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$

   Resolução:

   (a) Para determinar o valor de x que possibilita a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^k x^n$ empregamos o teste de Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|n^k x^n\right|} = \lim_{n\to\infty}|x|\cdot n^{\frac{k}{n}} = \lim_{n\to\infty}|x|\cdot\lim_{n\to\infty}n^{\frac{k}{n}} = |x|\cdot 1 = |x|.$$

   Logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^k x^n$ converge se $|x| < 1$.

   (b) Para o caso da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n$ também usaremos o teste de Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n^n x^n|} = \lim_{n\to\infty}|n|\cdot|x| = L.$$

Assim, a série converge somente se $L < 1$, ou seja, se $x = 0$.

(c) Utilizaremos novamente o teste de Cauchy para a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^n}\right|} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n}\right|^{\frac{n}{n}} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n}\right| \quad = \quad 0.$$

Como $0 < 1$, a série converge para todo $-\infty < x < \infty$.

(d) No caso da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n!x^n$ empregaremos o teste de d'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)! \cdot x^{n+1}}{n! \cdot x^n}\right| \quad = \quad \lim_{n\to\infty} |(n+1) \cdot x| \quad = \quad L.$$

Portanto, a série converge somente se $L < 1$, isto é, somente se $x = 0$.

(e) Para a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ utilizaremos o teste de Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^2}\right|} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{\frac{n}{n}}}{n^{\frac{2}{n}}} \quad = \quad |x|\,.$$

Disto segue que a série converge se $|x| < 1$.

■

6 ALGUMAS NOÇÕES TOPOLÓGICAS

6.1 CONJUNTOS ABERTOS

Definição 6.1 (Ponto Interior) *Dado $X \subset \mathbb{R}$ dizemos que a é ponto interior de X quando existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset X$.*

Definição 6.2 (Interior de X) *O conjunto de todos os pontos interiores de X é denomindado interior de X, denotado por $\operatorname{int} X$.*

Definição 6.3 (Conjunto Aberto) *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se $\operatorname{int} A = A$, isto é, todo ponto de A é ponto interior a A.*

Definição 6.4 (Vizinhança de a) *Quando $a \in \operatorname{int} X$ diz-se que o conjunto X é uma vizinhança do ponto a.*

Observação 6.1

1. *Se o conjunto X possui algum ponto interior, ele deve conter pelo menos um intervalo aberto, logo é infinito. Assim, se $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ é um conjunto finito, nenhum dos seus pontos é interior, ou seja, temos $\operatorname{int} X = \emptyset$. Melhor ainda, como todo intervalo aberto é um conjunto não-enumerável, se $\operatorname{int} X \neq \emptyset$ então X é não-enumerável. Em particular, temos:*

   (a) *O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é enumerável logo não possui pontos interiores, isto é, $\operatorname{int} \mathbb{N} = \emptyset$, isto mostra que $\mathbb{N}$ não é aberto.*

   (b) *O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável logo não possui pontos interiores, isto é, $\operatorname{int} \mathbb{Z} = \emptyset$, isto mostra que $\mathbb{Z}$ não é aberto.*

   (c) *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável logo não possui pontos interiores, isto é, $\operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset$, isto mostra que $\mathbb{Q}$ não é aberto.*

   (d) *O conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais, apesar de ser não-enumerável, não possui pontos interiores. De fato, todo intervalo aberto deve conter números racionais,* *logo* $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ *não pode conter um intervalo aberto. Assim* $int(\mathbb{R}-\mathbb{Q})=\emptyset$*, isto mostra que* $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ *não é aberto.*

2. *Se* $X=(a,b)$*, ou* $X=(-\infty,b)$*, ou* $X=(a,+\infty)$*, então* $int X = X$*, ou seja,* X *é aberto.*

3. *Se* $Y=[c,+\infty)$ *e* $Z=(-\infty,d]$ *então* $int Y=(c,+\infty)$ *e* $int Z=(-\infty,d)$*. Portanto não são abertos.*

4. *O conjunto vazio é aberto. Com efeito, um conjunto* X *só pode deixar de ser aberto se existir em* X *algum ponto que não seja interior. Como não existe ponto algum em* $\emptyset$*, somos forçados a admitir que* $\emptyset$ *é aberto.*

5. *A reta* $\mathbb{R}$ *é um conjunto aberto.*

6. *Um intervalo (limitado ou não) é um conjunto aberto se, e somente se, é um intervalo aberto.*

O limite de uma sequência pode ser reformulado em termos de conjuntos abertos.

Teorema 6.1 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$ *se, e somente se, para todo aberto* A *contendo* L*, existe* $n_0\in\mathbb{N}$ *tal que* $x_n\in A$*,* $\forall\, n\geq n_0$*.*

Teorema 6.2

1. *Se* A_1 *e* A_2 *são conjuntos abertos, então* $A_1\cap A_2$ *é um conjunto aberto.*

2. *Se* $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ *é uma família de conjuntos abertos, então a reunião* $A=\bigcup\limits_{\lambda\in L} A_\lambda$ *é um conjunto aberto.*

Observação 6.2 *A interseção de um número finito de conjuntos abertos é ainda um conjunto aberto. O caso de uma família infinita de conjuntos abertos pode ter uma interseção que não é um conjunto aberto. Observe o próximo exemplo.*

Teorema 6.3 *Se* $F=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ *é um conjunto finito de números reais então o complementar* $\mathbb{R}-F$ *é aberto.*

6.2 CONJUNTOS FECHADOS

Definição 6.5 (Ponto aderente) *Dado* $X\subset\mathbb{R}$*, dizemos que* a *é ponto aderente de* X *quando* a *é limite de uma sequência de pontos* $x_n\in X$*.*

Observação 6.3 1. *Todo ponto* $a \in X$ *é aderente a* X*, basta tomar os* $x_n = a$*, daí* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$*.*

2. *Pode-se ter a aderente a* X *sem que* $a \in X$*. Por exemplo,* $X = (0, +\infty)$*, então* $a = 0 \notin X$*, mas* $a = 0$ *é aderente a* X*, pois* $0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}$*, onde* $\frac{1}{n} \in X$*.*

3. *Um número a chama-se valor de aderência da sequência* (x_n) *quando é limite de uma subsequência de* (x_n)*.*

4. *Todo valor de aderência de uma sequência* (x_n) *é um ponto aderente de um conjunto* X*. Mas, a recíproca é falsa. Nem todo ponto aderente a de* X *é valor de aderência de* (x_n)*. Por exemplo, como* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$*, o único valor de aderência de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *é* 0*, mas todos os pontos* x_n *por pertencerem a* $X = (0, +\infty)$*, são pontos aderentes a* X*.*

Definição 6.6 (Fecho) *O conjunto dos pontos aderentes a* X *é denominado fecho de* X*, denotado por* $\overline{X}$*.*

Definição 6.7 (Conjunto Fechado) *Um conjunto* $X \subset \mathbb{R}$ *é fechado quando* $X = \overline{X}$*.*

Observação 6.4 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Um conjunto* $X \subset \mathbb{R}$ *é fechado se, e somente se, todo ponto aderente a* X *pertence a* X*.*

2. *Para que* $X \subset \mathbb{R}$ *seja fechado é necessário e suficiente que cumpra a seguinte condição: se* $x_n \in X$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$*, então* $a \in X$*.*

Teorema 6.4 *Um ponto a é aderente ao conjunto* X *se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de* X *(*$V \cap X \neq \emptyset$ *para toda vizinhança de a)*

Pelo teorema acima, a fim de que um ponto a não pertença a $\overline{X}$ é necessário e suficiente que exista uma vizinhança V, onde $a \in V$ tal que $V \cap X = \emptyset$.

Teorema 6.5 *Um conjunto* F *é fechado se, e somente se, o complementar* $A = \mathbb{R} - F$ *é aberto.*

Teorema 6.6 *O fecho de qualquer conjunto é um conjunto fechado. (Ou seja,* $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ *para todo* $X \subset \mathbb{R}$*.)*

Teorema 6.7 1. *Se* F_1 *e* F_2 *são conjuntos fechados então* $F_1 \cup F_2$ *é fechado.*

2. *Se* $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ *é uma família qualquer de conjuntos fechados então* $F = \bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda$ *é fechado.*

Uma reunião infinita de conjuntos fechados pode não ser um conjunto fechado.

Observação 6.5 1. *Todo conjunto finito* $F = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *é fechado pois, seu complementar* $\mathbb{R} - F$ *é aberto (Teorema (6.3)).*

2. $\mathbb{Z}$ *é fechado pois, seu complementar* $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ *é aberto.*

3. $\mathbb{N}$ *é fechado pois, seu complementar* $\mathbb{R} - \mathbb{N}$ *é aberto.*

4. $\mathbb{R}$ *e o conjunto vazio são fechados pois, seus respectivos complementares, o conjunto vazio e* $\mathbb{R}$ *são abertos.*

5. *Existem conjuntos que não são fechados nem abertos, como* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, *ou um intervalo do tipo* $[a,b)$ *ou* $(a,b]$.

Definição 6.8 (Denso) *Sejam* X, Y *conjuntos de números reais, com* $X \subset Y$. *Dizemos que* X *é denso em* Y *quando* $Y \subset \overline{X}$, *isto é, quando todo* $b \in Y$ *é aderente a* X.

Observação 6.6 *As seguintes afirmações são equivalentes a dizer que* X *é denso em* Y. *(Em todas elas, supõe-se* $X \subset Y$.*)*

1. *Todo ponto de* Y *é limite de uma sequência de pontos de* X.

2. $Y \subset \overline{X}$.

3. *Para todo* $y \in Y$ *e todo* $\varepsilon > 0$ *tem-se* $(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.

4. *Todo intervalo aberto que contenha um ponto de* Y *deve conter também algum ponto de* X. *(Note que um intervalo aberto contendo* $y \in Y$ *deve conter um intervalo da forma* $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$.*)*

Observação 6.7 1. $\mathbb{Q}$ *é denso em* $\mathbb{R}$, *ou seja,* $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{Q}}$.

2. $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *é denso em* $\mathbb{R}$, *ou seja,* $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R} - \mathbb{Q}}$.

Definição 6.9 (Cisão do Conjunto) *Uma cisão do conjunto* $X \subset \mathbb{R}$ *é uma decomposição* $X = A \cup B$ *tal que* $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ *(isto é, nenhum ponto de A é aderente a B e nenhum ponto de B é aderente a A). (Em particular, A e B são disjuntos.)*

A decomposição $X = X \cup \emptyset$ chama-se a cisão trivial.

Teorema 6.8 *Um intervalo da reta só admite a cisão trivial.*

Corolário 6.1 *Os únicos subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *que são simultaneamente abertos e fechados são* $\mathbb{R}$ *e* $\emptyset$.

6.3 PONTOS DE ACUMULAÇÃO

Definição 6.10 (Ponto de Acumulação) *Um número $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando toda vizinhança V de a contém algum ponto de X diferente do próprio a, isto é, $V \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$. Equivalentemente: $\forall\, \varepsilon > 0$, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$. Indica-se com X' o conjunto dos pontos de acumulação de X.*

Observação 6.8

1. *A condição $a \in X'$ (a é ponto de acumulação de X) exprime-se simbolicamente do seguinte modo:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x \in X;\ 0 < |x-a| < \varepsilon.$$

2. $a \in X' \Leftrightarrow a \in \overline{X - \{a\}}$.

Definição 6.11 (Ponto Isolado) *Se $a \in X$ não é ponto de acumulação de X, então a é ponto isolado de X. Isto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que a é o único ponto de X no intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.*

Definição 6.12 (Conjunto Discreto) *Quando todos os pontos do conjunto X são isolados, X chama-se conjunto discreto.*

Teorema 6.9 *Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *a é um ponto de acumulação de X;*
2. *a é limite de uma sequência de pontos $x_n \in X - a$;*
3. *Todo intervalo aberto de centro a contém uma infinidade de pontos de X.*

Observação 6.9

1. *Se X é finito então $X' = \emptyset$. (Conjunto finito não tem ponto de acumulação). A contra positiva diz: Se $X' \neq \emptyset$ então X é infinito. Observe o ítem 2 e verifique que não vale a volta da contra positiva;*

2. *$\mathbb{Z}$ é infinito mas todos os pontos de $\mathbb{Z}$ são isolados, ou seja, $\mathbb{Z}' = \emptyset$;*

3. $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$;

4. $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})' = \mathbb{R}$;

5. $(a,b)' = (a,b]' = [a,b)' = [a,b]$;

6. *Dado $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ onde $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, temos:*

   (a) *Se $a \notin X$ temos $a \neq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $X' = \{a\}$. Por exemplo, se $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$ onde $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ então $X' = \{0\}$, isto é, 0 é o único ponto de acumulação de X.*

   (b) *Se $a \in X$, pode-se ter $X' = \{a\}$ ou $X' = \emptyset$. Por exemplo:*

      i. *A sequência $(a, a, a, \cdots)$ tem $X' = \emptyset$.*

      ii. *A sequência $\left(a, a+1, a+\frac{1}{2}, a+\frac{1}{3}, \cdots, a+\frac{1}{n}, \cdots\right)$ tem-se $X' = \{a\}$.*

Segue-se uma versão do Teorema de Bolzano-Weierstrass em termos de ponto de acumulação.

Teorema 6.10 *Todo conjunto infinito limitado de números reais admite pelo menos um ponto de acumulação.*

Teorema 6.11 *Para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $\overline{X} = X \cup X'$. Ou seja, o fecho de um conjunto X é obtido acrescentando-se a X os seus pontos de acumulação.*

Corolário 6.2 *X é fechado se, e somente se, $X' \subset X$.*

Corolário 6.3 *Se todos os pontos do conjunto X são isolados então X é enumerável.*

6.4 CONJUNTOS COMPACTOS

Definição 6.13 (Conjunto Compacto) *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto se X é fechado e limitado.*

Teorema 6.12 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em X possui uma subsequência que converge para um ponto de X.*

Observação 6.10 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto (não vazio). Por ser limitado, existem*

$$\beta = \inf x_n \;\; e \;\; \alpha = \sup x_n$$

Por ser compacto, pelo teorema anterior β e α pertencem a X. Portanto todo conjunto $X \subset \mathbb{R}$ possui um elemento máximo e um elemento mínimo, ou seja, se X é compacto então existem $x_1, x_2 \in X$ tais que

$$x_1 \leq x \leq x_2$$

$\forall x \in X$.

O teorema a seguir generaliza o principío dos intervalos encaixados.

Teorema 6.13 *Dada uma sequência decrescente $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \cdots X_n \supset \cdots$ de conjuntos compactos não vazios, existe (pelo menos) um número real que pertence a todos os X_n, ou seja, $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} X_n \neq \emptyset$.*

Definição 6.14 (Cobertura de X) *Dado um conjunto X chama-se cobertura de X uma família*

$$C = \{C_\lambda ; \lambda \in L\}$$

de conjunto C_λ tais que $X \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} C_\lambda$.

Observação 6.11

1. *Se C_λ é um conjunto aberto, $\forall\, \lambda$, a cobertura chama-se cobertura aberta.*

2. *Se $L = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ é um conjunto finito e ainda se tem $X \subset C_{\lambda_1} \cup C_{\lambda_2} \cup \cdots \cup C_{\lambda_n}$ diz-se que $C = \{C_{\lambda_i} ; \lambda_i \in L\}$ é uma cobertura finita.*

3. *Se $L' \subset L$ é tal que ainda se tem $X \subset \bigcup\limits_{\lambda' \in L'} C_{\lambda'}$ então $C' = \{C_{\lambda'} ; \lambda' \in L'\}$ é denominada uma subcobertura de C.*

Teorema 6.14 (Borel-Lebesgue) *Toda cobertura aberta de um conjunto compacto possui uma subcobertura finita.*

6.5 EXERCÍCIOS

6.5.1 Seção 1: Conjuntos abertos

1. Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$ tem-se $int(int\,X) = int\,X$ e conclua que $int\,X$ é um conjunto aberto.

   Resolução:

   Precisamos provar que $int\,(int\,X) \subset int\,X$ e $int\,X \subset int\,(int\,X)$.

   $(\Rightarrow)$ É fácil ver que $int\,(int\,X) \subset int\,X$, já que o interior de todo conjunto está contido no mesmo.

   $(\Leftarrow)$ Para mostrarmos que $int\,X \subset int\,(int\,X)$ tomamos $a \in int\,X$. Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset X$. Logo, basta mostrarmos que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset int\,X$, isto é, $a \in int\,(int\,X)$.

   Se $y \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, seja δ o menor dos números positivos $y-(a-\varepsilon)$, $(a+\varepsilon)-y$. Então, $(y-\delta, y+\delta) \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset X$.

   Desta forma, $y \in int\,X$. Portanto, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset int\,X$.

   Concluímos que $int\,(int\,X) = int\,X$, ou seja, que todos os pontos de $int\,X$ são interiores a $int\,X$, isto é, $int\,X$ é um conjunto aberto.

   $\blacksquare$

2. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto com a seguinte propriedade: "toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para um ponto $a \in A$ tem seus termos x_n pertencentes a A para todo n suficientemente grande". Prove que A é aberto.

3. Prove que $int(A\cup B) \supset int\,A \cup int\,B$ e $int(A\cap B) = int\,A \cap int\,B$ quaisquer que sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Se $A = (0,1]$ e $B = [1,2)$, mostre que $int(A\cup B) \neq int\,A \cup int B$.

   Resolução:

   - Para provarmos que $int\,(A\cup B) \supset (int\,A \cup int\,B)$, tomemos $x \in (int\,A \cup int\,B)$, assim $x \in int\,A$ ou $x \in int\,B$.

     Se $x \in int\,A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A \subset A\cup B$, logo $x \in int(A\cup B)$.

     Da mesma forma, se $x \in int\,B$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset B \subset (A\cup B)$, logo $x \in int\,(A\cup B)$.

Note que em qualquer dos casos $x \in int\,(A \cup B)$, então

$$int\,(A \cup B) \quad \supset \quad int\,A \cup int\,B.$$

- Agora vamos mostrar que $int\,(A \cap B) = int\,A \cap int\,B$.

  Para tanto, seja $x \in int\,(A \cap B)$. Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que

  $$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (A \cap B) \subset A \quad \text{e} \quad (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (A \cap B) \subset B.$$

  Daí, $x \in int\,A$ e $x \in int\,B$, isto é, $x \in int\,A \cap int\,B$. Então,

  $$int\,(A \cap B) \quad \subset \quad int\,A \cap int\,B. \tag{1}$$

  Tomando $x \in (int\,A \cap int\,B)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

  $$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A \quad \text{e} \quad (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset B,$$

  ou seja, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (A \cap B)$. Logo, $x \in int\,(A \cap B)$. E portanto,

  $$(int\,A \cap int\,B) \quad \subset \quad int\,(A \cap B). \tag{2}$$

  De (1) e (2) segue que:

  $$(int\,A \cap int\,B) \quad = \quad int\,(A \cap B).$$

- Seja $A = (0,1]$ e $B = [1,2]$, devemos mostrar que $int\,(A \cup B) \neq (int\,A \cup int\,B)$.

  Temos que $A \cup B = (0,2)$. Então, $int\,(A \cup B) = (0,2)$. Temos ainda que $int\,A = (0,1)$ e $int\,B = (1,2)$, daí $(int\,A \cup int\,B) = (0,2) - \{1\}$.

  Portanto, $int\,(A \cup B) \neq (int\,A \cup int\,B)$.

$\blacksquare$

4. Para todo $X \subset \mathbb{R}$, prove que vale a reunião disjunta $\mathbb{R} = int\,X \cup int(\mathbb{R} - X) \cup F$, onde F é formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que toda vizinhança de x contém pontos de X e pontos de $\mathbb{R} - X$. O conjunto $F = fr\,X$ chama-se a fronteira de X. Prove que $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se, e somente se $A \cap fr\,A = \emptyset$.

5. Para cada um dos conjuntos seguintes, determine sua fronteira: $X = [0,1]$, $Y = (0,1) \cup (1,2)$, $Z = \mathbb{Q}$, $W = \mathbb{Z}$.

   Resolução:

Seja $X \subset \mathbb{R}$, chama-se fronteira de X o conjunto $fr X$, formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que toda vizinhança de x contém pontos de X e pontos de $\mathbb{R} - X$. Desta forma temos:

- $fr X = fr[0,1] = \{0,1\}$, pois para todo $\varepsilon > 0$, temos $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ e $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon) \cap (\mathbb{R} - X) \neq \emptyset$. Da mesma forma $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ e $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \cap (\mathbb{R} - X) \neq \emptyset$, $\forall\, \varepsilon > 0$. Para qualquer ponto x a esquerda de 0 e a direita de 1, existe $\varepsilon > 0$ tal que a vizinhança $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X = \emptyset$. E para os pontos y tais que $0 < y < 1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $y - \varepsilon, y+\varepsilon) \cap (\mathbb{R} - X) = \emptyset$.
- $fr Y = fr[(0,1) \cup (1,2)] = \{0,1,2\}$
- $fr Z = fr \mathbb{Q} = \mathbb{R}$
- $fr W = fr \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

6. Sejam $I_1 \supset I_2 \supset \cdots I_n \supset \cdots$ intervalos limitados dois a dois distintos, cuja interseção $I = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} I_n$ não é vazia. Prove que I é um intervalo, o qual nunca é aberto.

6.5.2 Seção 2: Conjuntos fechados

1. Sejam I um intervalo não-degenerado e $k > 1$ um número natural. Prove que o conjunto dos números racionais $\frac{m}{k^n}$, cujos denominadores são potenciais de k com expoente $n \in \mathbb{N}$, é denso em I.

   Resolução:

   Temos que $R \subset I$ é denso em I se, e somente se, há pontos de R em todo o intervalo $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ com $y \in I$.

   Se n é tão grande que $k^n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, os intervalos $\left[\dfrac{m}{k^n}, \dfrac{m+1}{k^n}\right]$ tem comprimento menor do que ε, pois $\dfrac{m+1}{k^n} - \dfrac{m}{k^n} = \dfrac{1}{k^n}$, e $\dfrac{1}{k^n} < \varepsilon$. Logo, se m é o menor inteiro tal que $y + \varepsilon \leq \dfrac{m+1}{k^n}$, então $\dfrac{m}{k^n} < y + \varepsilon$, desta forma $\dfrac{m}{k^n} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

   ∎

2. Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, vale $\overline{X} = X \cup fr(X)$. Conclua que X é fechado se, e somente se, $X \supset fr X$.

3. Para todo $X \subset \mathbb{R}$, prove que $\mathbb{R} - int\, X = \overline{\mathbb{R} - X}$ e $\mathbb{R} - \overline{X} = int(\mathbb{R} - X)$.

   Resolução:

   Provaremos inicialmente que $\mathbb{R} - int\, X = \overline{\mathbb{R} - X}$.

(a) $(\mathbb{R} - int\,X) \subset \overline{\mathbb{R} - X}$.

Seja $a \in (\mathbb{R} - int\,X)$, logo $a \in \mathbb{R}$ e $a \notin int\,X$. Isso significa que toda vizinhança de a contém pontos que não estão em X, ou seja, toda vizinhança de a contém pontos de $(\mathbb{R} - X)$, assim $a \in \overline{\mathbb{R} - X}$. Daí $(\mathbb{R} - int\,X) \subset \overline{\mathbb{R} - X}$.

(b) $\overline{\mathbb{R} - X} \subset (\mathbb{R} - int\,X)$.

O exercício anterior (2) nos trás que $\overline{X} = X \cup fr\,X$. Assim, seja $a \in \overline{\mathbb{R} - X}$, temos que $a \in (\mathbb{R} - X)$ ou $a \in fr\,(\mathbb{R} - X)$ (toda vizinhança de a contém pontos de $\mathbb{R} - X$ e de $\mathbb{R} - (\mathbb{R} - X) = X$).

Se $a \in (\mathbb{R} - X)$, como $int\,X \subset X$, temos que $a \in (\mathbb{R} - int\,X)$. Senão, a é ponto de fronteira de X e do mesmo modo $a \in (\mathbb{R} - int\,X)$. De qualquer forma, temos que $\overline{\mathbb{R} - X} \subset (\mathbb{R} - int\,X)$.

De (a) e (b) segue que $\mathbb{R} - int\,X = \overline{\mathbb{R} - X}$.

Agora vamos mostrar que $\mathbb{R} - \overline{X} = int\,(\mathbb{R} - X)$.

(c) $\mathbb{R} - \overline{X} \subset int\,(\mathbb{R} - X)$.

Considere $b \in \mathbb{R} - \overline{X}$. Desta forma $b \in \mathbb{R}$ e $b \notin \overline{X}$. Logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$, porém $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap X = \emptyset$. Daí, $b \in int\,(\mathbb{R} - X)$, donde $\mathbb{R} - \overline{X} \subset int\,(\mathbb{R} - X)$.

(d) $int\,(\mathbb{R} - X) \subset \mathbb{R} - \overline{X}$.

Seja $b \in int\,(\mathbb{R} - X)$, logo existe uma vizinhança de b inteiramente contida em $(\mathbb{R} - X)$. Daí, tal vizinhança de b não contém pontos de X, ou seja, $a \notin \overline{X}$. Portanto, $a \in (\mathbb{R} - \overline{X})$ e $int\,(\mathbb{R} - X) \subset (\mathbb{R} - \overline{X})$.

Concluímos de (c) e (d) que $int\,(\mathbb{R} - X) = \mathbb{R} - \overline{X}$.

■

4. Se $X \subset \mathbb{R}$ é aberto (respectivamente, fechado) e $X = A \cup B$ é uma cisão, prove que A e B são abertos (respectivamente, fechados).

5. Prove que se $X \subset \mathbb{R}$ tem fronteira vazia então $X = \emptyset$ ou $X = \mathbb{R}$.

Resolução:

Considere $X \subset \mathbb{R}$ e $fr\,X = \emptyset$ então os dois casos seguintes ocorrem:

- $X \supset fr\,X$, já que o conjunto $\emptyset$ está contido em Y, seja qual for o conjunto Y.
- $X \cap fr\,X = \emptyset$, pois $Y \cap \emptyset = \emptyset$, qualquer que seja Y.

No primeiro caso temos que X é um conjunto fechado e no segundo X é um conjunto aberto. Porém os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são simultaneamente fechados e abertos são $\emptyset$ e $\mathbb{R}$. Daí, $X = \emptyset$ ou $X = \mathbb{R}$.

■

6. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$. Prove que $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e que $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dê exemplo em que $\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cup \overline{Y}$.

7. Dada uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, prove que o fecho do conjunto $X = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é $\overline{X} = X \cup A$, onde A é o conjunto dos valores de aderência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

   Resolução:

   Devemos mostrar que $\overline{X} = X \cup A$.

   1. $X \cup A \subset \overline{X}$.

      Seja $x \in X \cup A$, logo $x \in X$ ou $x \in A$. Se $x \in X$, como $X \subset \overline{X}$, temos $x \in \overline{X}$. Se $x \in A$, então x é valor de aderência de alguma $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou seja, x é limite de uma sequência de X, logo $x \in \overline{X}$.

      De qualquer forma $x \in \overline{X}$. Portanto, $X \cup A \subset \overline{X}$.

   2. $\overline{X} \subset X \cup A$.

      Seja $x \in \overline{X}$, logo x é aderente a X, ou seja, x é limite de alguma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$, então $x \in A$.

      Disto segue que $x \in X \cup A$. Donde resulta que $\overline{X} \subset X \cup A$.

   De (1) e (2) podemos concluir que $\overline{X} = X \cup A$.

■

6.5.3 Seção 3: Pontos de acumulação

1. Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $\overline{X} = X \cup X'$. Conclua que X é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos de acumulação.

2. Prove que toda coleção de intervalos não degenerados dois a dois disjuntos é enumerável.

   Resolução:

   Seja $X = \{I_\lambda, \lambda \in \mathbb{N}\}$ uma coleção de intervalos não degenerados dois a dois disjuntos. Logo, $I_p \cap I_q = \emptyset$, $\forall\ p, q \in \mathbb{N}$.

Uma vez que tais intervalos são não-degenerados, existe infinitos números racionais dentro de cada um deles. Assim, podemos escolher em cada intervalo I_λ da coleção um número racional r_λ. A correspondência $X \to$ Q é injetiva. Como o conjunto dos números racionais é enumerável, podemos concluir que X é enumerável.

■

3. Prove que se todos os pontos do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ são isolados então pode-se escolher, para cada $x \in X$, num intervalo aberto I_x, de centro x. tal que $x \neq y \Rightarrow I_x \cap I_y = \emptyset$.

4. Prove que se todo conjunto não enumerável $X \subset \mathbb{R}$ possui algum ponto de acumulação $a \in X$.

   Resolução:

   Vamos provar a contrapositiva: "Se um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ não possui ponto de acumulação, então X é enumerável."

   De fato, temos do exercício (2) que se todos os pontos do conjunto X são isolados, então existe uma família de intervalos abertos I_x, com centro em $x \in X$, tais que os mesmos são dois a dois disjuntos. Como toda família de intervalos não degenerados, dois a dois disjuntos, é enumerável, exercício (3), segue-se que X é enumerável. Provando a contrapositiva e desta forma o exercício.

■

5. Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, X' é um conjunto fechado.

6. Seja a um ponto de acumulação do conjunto X. Prove que existe uma sequência crescente ou uma sequência decrescente de pontos $x_n \in X$ com $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

   Resolução:

   Seja a ponto de acumulação de X. Logo $\forall\ \varepsilon > 0$, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$.

   Consideremos $\varepsilon_1 = 1$. Então existe $x_1 \in X$ tal que $|x_1 - a| < 1$. Seja $\varepsilon_2 = min\left\{|x_1 - a|, \frac{1}{2}\right\}$. Então existe $x_2 \in X$ tal que $|x_2 - a| < \varepsilon_2$. Seja $\varepsilon_3 = min\left\{\left|x_2 - a, \frac{1}{3}\right|\right\}$. Então existe $x_3 \in X$ tal que $|x_3 - a| < \varepsilon_3$.

   Procedendo assim, obteremos uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X tais que $|x_n - a| < \dfrac{1}{n}$ e $0 < |x_{n+1} - a| < |x_n - a|$.

   Desta forma, se $a \geq x_n$ para n suficientemente grande, obtemos uma sequência crescente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X, tais que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = a$. Se $a \leq x_n$ para n suficientemente grande obtemos uma sequência decrescente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = a$.

■

6.5.4 Seção 4: Conjuntos compactos

1. Prove que o conjunto A dos valores de aderência de uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é fechado. Se a sequência for limitada, A é compacto, logo existem l e L, respectivamente o menor e o maior valor de aderência da sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Costuma-se escrever $l = \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n$ e $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$.

2. Prove que uma reunião finita e uma interseção arbitrária de conjuntos compactos é um conjunto compacto.

   Resolução:

   Sejam A e B conjuntos compactos, mostraremos que $A\cup B$ é um conjunto compacto.

   Tomando $x \in A\cup B$ temos que $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$ então existe $k_1 \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq k_1$, $\forall\ x \in A$. E se $x \in B$ existe $k_2 \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq k_2$ $\forall\ x \in B$. Seja $k = max\{k_1, k_2\}$ então $x \leq k$, $\forall\ x \in A\cup B$, isto é, $A\cup B$ é limitado.

   Como A e B são fechados, segue do Teorema 6.7 que $A\cup B$ é fechado.

   Portanto, $A\cup B$ é compacto.

   Agora, vamos provar que a intersecção arbitrária de conjuntos compactos é um conjunto compacto.

   Considere $F = \bigcap\limits_{\lambda\in L} F_\lambda$, onde F_λ é compacto, $\forall\ \lambda \in L$. Seja $x \in F$ então $x \in F_\lambda$, para todo $\lambda \in L$. Como F_λ é limitado, segue que existe k_λ tal que $x \leq k_\lambda$, $\forall\ x \in F_\lambda$. Supondo, sem perda de generalidade, que F_λ forma uma sequência não-decrescente tal que $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots \subset F_\lambda \subset \cdots$ e seja k o maior dos k_λ, assim $x \leq k$ para todo $x \in F = \bigcap\limits_{\lambda\in L} F_\lambda$. Logo a interseção é limitada.

   Como F_λ é fechado, $\forall\ \lambda \in L$, segue do Teorema 6.7 que F é fechado.

   ■

3. Dê exemplo de uma sequência decrescente de conjuntos fechados não-vazios $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ e uma sequência decrescente de conjuntos limitados não-vazios $L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_n \supset \cdots$ tais que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ e $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} L_n = \emptyset$.

4. Sejam X, Y conjuntos disjuntos e não-vazios, com X compacto e Y fechado. Prove que existem $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ tais que $|x_0 - y_0| \leq |x - y|$ para quaisquer $x \in X$, $y \in Y$.

Resolução:

Seja $\alpha = \inf\{|x-y|\,; x \in X, y \in Y\}$. Então, $\alpha \leq |x-y|$, $\forall\ x \in X$ e $y \in Y$. Vamos provar que $\alpha = |x_0 - y_0|$.

De fato, existem sequências de pontos $x_n \in X$ e $y_n \in Y$ tais que $\lim |x_n - y_n| = \alpha$.

Como X é compacto podemos admitir que $\lim x_n = x_0 \in X$. Temos ainda que $|y_n| = |y_n - x_n + x_n| \leq |y_n - x_n| + |x_n|$, ou seja, (y_n) é uma sequência limitada, daí temos que (y_n) possui uma subsequência convergente, isto é, $\lim y_n = y_0 \in Y$. Logo, $\lim |x_n - y_n| = |x_0 - y_0| = \alpha$.

■

5. Um conjunto compacto cujos pontos são todos isolados é finito. Dê exemplo de um conjunto fechado ilimitado X e um conjunto limitado não-fechado Y, cujos pontos são todos isolados.

6. Prove que se X é compacto então os seguintes conjuntos também são compactos:

   (a) $S = \{x+y; x,y \in X\}$;

   (b) $D = \{x-y; x,y \in X\}$;

   (c) $P = \{x \cdot y; x,y \in X\}$;

   (d) $Q = \{x/y; x,y \in X\}$.

   Resolução:

   Se X é compacto temos que X é limitado e fechado. Como X é limitado segue que existe $k > 0$ tal que $|x| \leq k$, $\forall\ x \in X$.

   (a) Para provarmos que S é compacto precisamos provar que:

   - S é limitado;
     Com efeito, se $x,y \in X$, daí $|x| \leq k$ e $|y| \leq k$. Seja $s = x+y$, $s \in S$. Então,

     $$|x+y| \leq |x|+|y| \leq k+k = 2k \Rightarrow |s| \leq 2k.$$

     Portanto, S é limitado.

   - S é fechado;
     Suponhamos que $\lim(x_n + y_n) = s$, $x_n, y_n \in X$. Devemos mostrar que $s \in S$. Como X é limitado, toda sequência de pontos de X é limitada e possui uma subsequência convergente. Logo, existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}'} x_n = x_0 \in X$ (pois X é fechado).

Então, como $y_n = y_n + x_n - x_n$, temos:

$$\lim_{n\in\mathbb{N}'} y_n \;=\; \lim_{n\in\mathbb{N}'}(y_n + x_n) - \lim_{n\in\mathbb{N}'} x_n \;=\; s - x_0,$$

chamando $s - x_0$ de y_0, temos que existe o limite $\lim_{n\in\mathbb{N}'} y_n = y_0 \in X$. E daí, $s = \lim_{n\in\mathbb{N}'}(x_n + y_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}'} x_n + \lim_{n\in\mathbb{N}'} y_n = x_0 + y_0 \in S$, ou seja, $s \in S$. Portanto, S é fechado.

Donde concluímos que S é compacto.

(b) Vamos provar que D é compacto:

- D é limitado;

  Sejam $x, y \in X$, tomando $d = x - y \in D$ temos:

$$|d| \;=\; |x - y| \;\leq\; |x| + |y| \;\leq\; k + k \;=\; 2k.$$

  Portanto, D é limitado.

- D é fechado;

  Suponhamos que $\lim(x_n - y_n) = d$, $x_n, y_n \in X$. Da mesma forma que no item anterior, como X é limitado, existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $\lim_{n\in\mathbb{N}'} y_n = y_0 \in X$, como $x_n = x_n - y_n + y_n$ temos

$$\lim_{n\in\mathbb{N}'} x_n \;=\; \lim_{n\in\mathbb{N}'}(x_n - y_n) + \lim_{n\in\mathbb{N}'} y_n \;=\; d + y_0.$$

  Fazendo $d + y_0 = x_0$ temos que existe $\lim_{n\in\mathbb{N}'} x_n = x_0 \in X$. Daí

$$d \;=\; \lim_{n\in\mathbb{N}'}(x_n - y_n) \;=\; \lim_{n\in\mathbb{N}'} x_n - \lim_{n\in\mathbb{N}'} y_n \;=\; x_0 - y_0 \in S,$$

  então $d \in S$. Logo D é fechado.

Portanto, D é compacto.

(c) Agora mostraremos que P é compacto.

- P é limitado;

  Seja $p = x \cdot y \in P$, então temos:

$$|p| \;=\; |x \cdot y| \;=\; |x| \cdot |y| \;\leq\; k \cdot k \;=\; k^2, \;\; \forall\, p \in P.$$

  Logo, P é limitado.

- P é fechado;

  Suponhamos que $\lim(x_n \cdot y_n) = p$, $x_n, y_n \in X$. Como X é compacto existe $\mathbb{N}' \subset$

$\mathbb{N}$ infinito tal que $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}'} x_n = x_0 \in X$. Como $y_n = \dfrac{x_n \cdot y_n}{x_n}$, segue que

$$\lim_{n\in\mathbb{N}'} y_n = \lim_{n\in\mathbb{N}'} \frac{x_n \cdot y_n}{x_n} = \frac{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}'} (x_n \cdot y_n)}{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}'} x_n} = \frac{p}{x_0},$$

considerando $\dfrac{p}{x_0} = y_0$, existe o $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}'} y_n = y_0 \in X$. Daí,

$$p = \lim_{n\in\mathbb{N}'} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}'} x_n \cdot \lim_{n\in\mathbb{N}'} y_n = x_0 \cdot y_0 \in P$$

Portanto $p \in P$, donde segue que P é fechado.

Logo, P é compacto.

(d) Mostraremos que Q também é compacto.

- Q é limitado;
  Seja $q = \dfrac{x}{y} \in Q$, então:

$$|q| = \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \leq \frac{k}{k} = 1.$$

  Portanto, Q é limitado por 1.

- Q é fechado;
  Suponhamos que $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = q$, com $x_n, y_n \in X$. Como X é compacto existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}'} y_n = y_0 \in X$. Como $x_n = \dfrac{x_n \cdot y_n}{y_n}$, segue que

$$\lim_{n\in\mathbb{N}'} x_n = \lim_{n\in\mathbb{N}'} \frac{x_n \cdot y_n}{y_n} = \lim_{n\in\mathbb{N}'} \frac{x_n}{y_n} \cdot \lim_{n\in\mathbb{N}'} y_n = q \cdot y_0.$$

  Fazendo $x_0 = q \cdot y_0 \in X$, existe o limite $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}'} y_n = y_0 \in X$. Daí,

$$q = \lim_{n\in\mathbb{N}'} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}'} x_n}{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}'} y_n} = \frac{x_0}{y_0} \in Q.$$

  Logo $q \in Q$ então Q é fechado.

Portanto, Q é compacto.

■

7 LIMITES DE FUNÇÕES

7.1 DEFINIÇÃO E PRIMEIRAS PROPRIEDADES

Definição 7.1 *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto de números reais, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real cujo domínio é X e $a \in X'$ um ponto acumulação do conjunto X. Diz-se que o número real L é limite de $f(x)$ quando x tende para a, e escreve-se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, quando para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que se tem $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.*

Teorema 7.1 *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Se $L < M$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$ como $0 < |x - a| < \delta$.*

Teorema 7.2 (Teorema do Sanduíche) *Sejam $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$. Se $f(x) \le h(x) \le g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$ então $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.*

Teorema 7.3 *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. A fim de que seja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X - a$ com $\lim x_n = a$, tenha-se $\lim f(x_n) = L$.*

Corolário 7.1 (Unicidade do limite) *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$ então $L = M$.*

Corolário 7.2 *(Operações com limites). Sejam $f, g :\to \mathbb{R}$, $a \in X'$, com $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Então*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x) = L \pm M$;
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$;
3. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$;
4. *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *e g é limitada numa vizinhança de a, tem-se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0$

Teorema 7.4 *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$, se existe $\lim_{x \to a} f(x)$ então f é limitada numa vizinhança de a, isto é, existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que $x \in X$, $0 < |x-a| < \delta$ implica $|f(x)| \leq c$.*

7.2 LIMITES LATERAIS

Definição 7.2 *(Ponto de acumulação à direita) Um número real a é dito ponto de acunulação á direita de $X \subset \mathbb{R}$, quando toda vizinhança de a contém algum ponto $x \in X$ com $x > a$. Escreve-se: $a \in X'_+$.*

Equivalentemente para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $X \cap (a, a+\varepsilon) \neq \emptyset$. A fim de que $a \in X'_+$ é necessário e suficiente que a seja limite de uma sequência de pontos $x_n > a$, pertencentes a X. Finalmente a é um ponto de acumulação à direita para o conjunto X se, e somente se, é um ponto de acumulação ordinário do conjunto $Y = X \cap (a, +\infty)$.

Definição 7.3 *(Ponto de acumulação à esquerda) Diz-se que a é um ponto de acunulação á esquerda de $X \subset \mathbb{R}$, quando para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $X \cap (a-\varepsilon, a) \neq \emptyset$, ou seja, $a \in Z'$ onde $Z = (-\infty, a) \cap X$. Representa-se: $a \in X'_-$.*

Para que isto aconteça, é necessário e suficiente que $a = \lim x_n$, onde (x_n) é uma sequência cujos termos $x_n < a$ pertencem a X.

Quando $a \in X'_+ \cap X'_-$ diz-se que a é um ponto de acumulação bilateral de X.

Definição 7.4 *(Limite à direita) Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'_+$. Diz-se que o número real L é limite á direita de $f(x)$ quando x tende para a, e dado $\varepsilon > 0$, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < x - a < \delta$. Escreve-se $L = \lim_{x \to a^+} f(x)$. Simbolicamente: $\lim_{x \to a^+} f(x) = L. \equiv .\forall \varepsilon \exists \delta > 0; x \in X \cap (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.*

Definição 7.5 *(Limite à esquerda) Considerando $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_-$, dizemos que L é limite à esquerda de $f(x)$ quando para todo $\varepsilon > 0$, pode-se $\delta > 0$ tal que $x \in X \cap (a-\delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Escreve-se: $L = \lim_{x \to a^-} f(x)$.*

Os resultados enunciados para limites também são válidos para limites laterais.

Dado $a \in X'_+ \cap X'_-$, existe $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad = \quad \lim_{x \to a^-} f(x) \quad = \quad L.$$

Teorema 7.5 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função monótona limitada. Para todo $a \in X'_+$ e todo $b \in X'_-$ existem $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = M$. Ou seja, existem sempre limites laterais de uma função monótona limitada.*

7.3 LIMITES NO INFINITO, LIMITES INFINITOS

Definição 7.6 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ ilimitado superiormente. Dada $f : X \to \mathbb{R}$, escreve-se: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, quando o número real L satisfaz à seguinte condição:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0; \quad x \in X, x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definição 7.7 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ ilimitado inferiormente. Dada $f : X \to \mathbb{R}$, escreve-se: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, quando o número real $\varepsilon > 0$ dado, existir $A > 0$ tal que $x < -A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.*

Os limites para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ são de certo modo, limites laterais, o primeiro é um limite à esquerda e o segundo à direita. O limite de uma sequência é um caso particular de limite no infinito.

Definição 7.8 *(Limites Infinitos) Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$, $f : X \to \mathbb{R}$. Diremos que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ quando, para todo $A > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X \Rightarrow f(x) > A$*

Definição 7.9 *(Limites Infinitos) Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$, $f : X \to \mathbb{R}$. Temos que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ quando, para todo $A > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X \Rightarrow f(x) < -A$*

7.4 EXERCÍCIOS

7.4.1 Seção 1: Definição e primeiras propriedades

1. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $Y = f(X - \{a\})$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ então $L \in \overline{Y}$.

2. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X^{'}$. A fim de que exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ é suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, a sequência $(f(x_n))$ seja convergente.

   Resolução:

   Suponhamos que exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $x_n, y_n \in X - \{a\}$ tal que $\lim x_n = \lim y_n = a$.

   Desta forma, definimos (z_n), considerando $z_{2n-1} = x_n$ e $z_{2n} = y_n$. Daí, temos $\lim z_{2n-1} = \lim x_n = a$ e $\lim z_{2n} = \lim y_n = a$. Logo, $\lim z_n = a$. Como pelo Teorema (7.3) $f(x)$ convergir e x_n convergir implica na convergência de $f(x_n)$, então $(f(z_n))$ converge. Portanto, $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$, já que $(f(x_n))$ e $(f(y_n))$ são subsequências de $(f(z_n))$.

   ∎

3. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ com $f(X) \subset Y$, $a \in X'$ e $b \in Y' \cap Y$.

   Se
   $$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ e } \lim_{y\to b} g(y) = c,$$
   prove que $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$, contanto que $c = g(b)$ ou então que $x \neq a$ implique $f(x) \neq b$.

4. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = x$ se $x \in \mathbb{Q}$; $g(0) = 1$ e $g(x) = 0$ se $x \neq 0$. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 0$, porém não existe $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$.

   Resolução:

   Temos
   $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}|\mathbb{Q} \\ x, & x \in \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

   Vamos provar inicialmente que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

   - Se $x \in \mathbb{R}|\mathbb{Q}$ temos:

     $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0.$
   - Se $x \in \mathbb{Q}$ temos:

     $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0.$

O que mostra que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Mostraremos agora que $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$.

De fato, $\lim_{y\to 0} g(y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$, já que $y \to 0$, mas $y \neq 0$.

Agora calcularemos $\lim_{x\to 0} g(f(x))$:

- No caso de $x \in \mathbb{Q}$, segue:

  $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$.
- Porém para $x \in \mathbb{R}|\mathbb{Q}$, temos:

  $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} g(0) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$.

Como $\lim_{x\to 0} g(f(x))$ quando $x \in \mathbb{Q}$ é diferente de $\lim_{x\to 0} g(f(x))$ quando $x \in \mathbb{R}|\mathbb{Q}$, segue que $\lim_{x\to 0} g(f(x))$ não existe.

$\blacksquare$

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(x) = \sin(1/x)$ se $x \neq 0$. Mostre que para todo $c \in [-1, 1]$ existe uma sequência de pontos $x_n \neq 0$ tais que $\lim x_n = 0$ e $\lim f(x_n) = c$.

7.4.2 Seção 2: Limites laterais

1. Prove que $a \in X'_+$ (respectivamente, $a \in X'_-$) se, e somente se, $a = \lim x_n$ é limite de uma sequência decrescente (respectivamente, crescente) de pontos pertencentes ao conjunto X.

   Resolução:

   $(\Rightarrow)$ Seja $a \in X'_+$, tal que $\lim x_n = a$, devemos mostrar que (x_n) é uma sequência decrescente de pontos de X.

   Como $a \in X'_+$, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $X \cap (a, a+\varepsilon) \neq \emptyset$.

   Assim, dado $\varepsilon_1 = 1$ temos $X \cap (a, a+1) \neq \emptyset$, ou seja, existe $x_1 \in (a, a+1) \cap X$.

   Seja $\varepsilon_2 = \min\{|x_1 - a|, 1/2\}$, então $X \cap (a, a+\varepsilon_2) \neq \emptyset$, isto é, existe $x_2 \in (a, a+\varepsilon_2) \cap X$.

   $\vdots$

   Seja $\varepsilon_n = \min\{|x_{n-1} - a|, 1/n\}$, então $X \cap (a, a+\varepsilon_n) \neq \emptyset$, ou seja, existe $x_n \in (a, a+\varepsilon_n) \cap X$.

   Procedendo desta forma, obtemos uma sequência (x_n) de pontos de X tal que

$$0 < |x_{n+1} - a| < |x_n - a| \quad \text{e} \quad |x_n - a| < \frac{1}{n}.$$

Como $x_n > a$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, temos $x_n - a > 0$, o que implica em $|x_n - a| = x_n - a$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Daí, da primeira desigualdade segue que $x_{n+1} < x_n$, isto é, a sequência (x_n) é decrescente, e da segunda desigualdade resulta que $\lim x_n = a$.

$(\Leftarrow)$ Reciprocamente, seja $a = \lim x_n$ tal que (x_n) é uma sequência decrescente de pontos de X. Vamos mostrar que $a \in X'_+$.

De fato, como $\lim x_n = a$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap [(x_n) - \{a\}] \quad \neq \quad \emptyset. \tag{1}$$

Mas como (x_n) é decrescente temos $a \leq x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$(a-\varepsilon, a) \cap (x_n) \quad = \quad \emptyset. \tag{2}$$

De (1) e (2) segue que

$$(a, a+\varepsilon) \cap (x_n) \quad \neq \quad \emptyset,$$

ou seja, $a \in X'_+$.

$\blacksquare$

2. Prove que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ (respectivamente, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$) se, e somente se, para toda sequência decrescente (respectivamente, crescente) de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$ tem-se $\lim f(x_n) = L$.

3. Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/\left(1 + a^{1/x}\right)$, onde $a > 1$. Prove que $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = 1$.

Resolução:

Devemos provar que $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{1 + a^{1/x}} = 0$.

De fato, $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Daí, como $a > 1$, $\lim\limits_{x \to 0+} a^{1/x} = +\infty$.

Logo, $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{1 + a^{1/x}} = 0$.

Vamos provar agora que $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{1}{1 + a^{1/x}} = 1$.

Com efeito, $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Logo, para $a > 1$ temos $\lim\limits_{x \to 0-} a^{1/x} = 0$.

Segue que $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{1+a^{1/x}} = \dfrac{1}{1+0} = 1.$

■

4. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ monótona e $a \in X'_+$. Se existir uma sequência de pontos $x_n \in X$ com $x_n > a$, $\lim x_n = a$ e $\lim f(x_n) = L$ então $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.

5. Dada $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)/(1+2^{1/x})$, determine o conjunto dos números L tais que $L = \lim f(x_n)$, com $\lim x_n = 0$, $x_n \neq 0$.

   Resolução:

   Como a função seno é limitada por 1, isto é, $|\operatorname{sen}\theta| \leq 1$, $\forall\ \theta$. Seja $c \in [-1,1]$ e tome uma sequência (x_n) tal que $x_n < 0$ com $\lim x_n = 0$ e $\operatorname{sen}(1/x_n) = c$, para todo n.

   Assim, $f(x_n) = \dfrac{\operatorname{sen}(1/x_n)}{1+2^{1/x_n}} = \operatorname{sen}(1/x_n) \cdot \dfrac{1}{1+2^{1/x_n}} = c \cdot \dfrac{1}{1+2^{1/x_n}}$.

   Logo, $\lim f(x_n) = \lim \left(c \cdot \dfrac{1}{1+2^{1/x_n}} \right)$.

   Como $\lim x_n = 0$ e $x_n < 0$, temos $\lim \dfrac{1}{x_n} = -\infty$.

   Daí, $\lim 2^{1/x_n} = 0$.

   Desta forma, $\lim \dfrac{1}{1+2^{1/x_n}} = \dfrac{1}{1+0} = 1$.

   Portanto, $\lim \left(c \cdot \dfrac{1}{1+2^{1/x_n}} \right) = c \cdot 1 = c$.

   Concluímos que o conjunto dos números L tais que $L = \lim f(x_n)$ é $[-1,1]$.

■

7.4.3 Seção 3: Limites no infinito, limites infinitos, expressões indeterminadas

1. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio não constante, isto é, para todo $x \in \mathbb{R}$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, com $a_n \neq 0$ e $n \geq 1$. Prove que se n é par então $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = +\infty$ se $a_n > 0$ e $= -\infty$ se $a_n < 0$. Se n é ímpar então $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$ quando $a_n > 0$ e os sinais dos limites são trocados quando $a_n < 0$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Prove que, para todo $c \in \mathbb{R}$, existe uma sequência $x_n \in \mathbb{R}$ com $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

   Resolução:

   Ao considerarmos $2\pi n - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi n + \frac{\pi}{2}$, a função $\operatorname{sen} x$ assume todos os valores $y \in [-1,1]$. Então a função $x \operatorname{sen} x$ assume todos os valores de $\frac{\pi}{2} - 2\pi n$ a $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Dado $c \in \mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos $\frac{\pi}{2} - 2\pi n \leq c \leq 2\pi n + \frac{\pi}{2}$.

Logo, para todo $n \leq n_0$, existe $x_n \in [2\pi n - \frac{\pi}{2}, 2\pi n + \frac{\pi}{2}]$ tal que $x_n \operatorname{sen} x_n = c$.

Então $\lim x_n = +\infty$ e $\lim f(x_n) = c$.

■

3. Seja $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ limitada. Para cada $t \geq a$ indiquemos com M_t o sup e m_t o inf de f no intervalo $I = [t, +\infty)$. Com $w_t = M_t - m_t$ indicaremos a oscilação de f em I. Prove que existem $\lim\limits_{x \to +\infty} M_t$ e $\lim\limits_{t \to +\infty} m_t$. Prove que existe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ se e somente se, $\lim\limits_{t \to +\infty} w_t = 0$.

8 FUNÇÕES CONTÍNUAS

8.1 DEFINIÇÃO E PRIMEIRAS PROPRIEDADES

Definição 8.1 *(Continuidade) Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diz-se contínua no ponto $a \in \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x-a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, de outra maneira podemos escrever que f é contínua no ponto a significa:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0; \quad x \in X, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Definição 8.2 *(Função Contínua) Diz-se que $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua quando f é contínua em todos os pontos $a \in X$.*

Definição 8.3 *(Continuidade Local) A continuidade é um fenômeno local, isto é, a função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, existe uma vizinhança V de a tal que a restrição de f a $V \cap X$ é contínua no ponto a.*

Observação 8.1

- *Se a é um ponto isolado do conjunto X isto é, dado $\delta > 0$ tem-se $X \cap (\delta - a, \delta + a) = \{a\}$, em toda a função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a.*
- *Se X é um conjunto discreto, como $\mathbb{Z}$ por exemplo, então toda a função inteira é contínua o mesmo acontece com o conjunto dos números naturais.*
- *Se $a \in X \cap X'$, ou seja, se $a \in X$ e $a \in X'$ então $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a se, e somente se, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*
- *Não há restrições para a definição de continuidade quando $x = a$ pois nesta situação teríamos obviamente $\varepsilon > 0$.*

Teorema 8.1 *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$, com $f(a) < g(a)$. Existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$.*

Corolário 8.1 *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$. Se $f(a) \neq 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$, $f(x)$ tem o mesmo sinal de $f(a)$.*

Teorema 8.2 *A fim de que a função $f : X \to \mathbb{R}$ seja contínua no ponto a é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$, se tenha $\lim f(x_n) = f(a)$.*

Corolário 8.2 *Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$ então são contínuas nesse mesmo ponto as funções $f + g$, $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$, bem como a função f/g, caso seja $g(a) \neq 0$.*

Teorema 8.3 *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$, $g : Y \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $b = f(a) \in Y$ e $f(X) \subset Y$, de modo que a composta $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ esta bem definida. Então $g \circ f$ é contínua no ponto a.*

8.2 FUNÇÕES CONTÍNUAS NUM INTERVALO

Teorema 8.4 *(Teorema do Valor Intermediário) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Corolário 8.3 *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua então $f(I)$ é um intervalo.*

Teorema 8.5 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Toda função contínua injetiva $f : I \to \mathbb{R}$ é monótona e sua inversa $g : J \to I$ definida no intervalo $J = f(I)$, é contínua.*

Corolário 8.4 *Para todo $n \in \mathbb{N}$, a função $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $g(x) = \sqrt[n]{x}$ é contínua.*

Diz-se um homeomorfismo entre X e Y quando $X \subset \mathbb{R}$ e $Y \subset \mathbb{R}$ é uma bijeção contínua $f : X \to Y$ cuja inversa $f^{-1} : Y \to X$ é também contínua. O Teorema 8.5 diz, portanto que se I é um intervalo então toda função contínua e injetiva $f : I \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo entre I e o intervalo $J = f(I)$.

8.3 FUNÇÕES CONTÍNUAS EM CONJUNTOS COMPACTOS

O teorema a seguir assegura a existência de valores máximos e mínimos de uma função contínua quando seu domínio é compacto.

Teorema 8.6 *(Weierstrass) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$. Existem x_0 e x_1 tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$.*

Teorema 8.7 *A imagem $f(X)$ de um conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$ por uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é um conjunto compacto.*

Corolário 8.5 *Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto então toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada, isto é, existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in X$.*

Teorema 8.8 *Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto então toda bijeção contínua $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$ tem inversa contínua $g : Y \to X$.*

8.4 CONTINUIDADE UNIFORME

Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $x \in X$ pode-se achar $\delta > 0$ tal que $y \in X$, $|y - x| < \delta$ implicam $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

O número positivo δ não depende apenas do $\varepsilon > 0$ dado mas também do ponto x no qual a continuidade de f é examinada. Nem sempre dado $\varepsilon > 0$, pode-se encontrar um $\delta > 0$ que sirva em todos os pontos $x \in X$ (mesmo sendo f contínua em todos esses pontos).

Definição 8.4 *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se uniformemente contínua no conjunto X quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|y - x| < \delta$ implicam $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.*

Observação 8.2

- *Uma função uniformemente contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos do conjunto X. A recíproca não é verdadeira.*
- *A continuidade de uma função $f : X \to \mathbb{R}$ no ponto $a \in X$ significa que pode se ter $f(x)$ tão próximo de $f(a)$ quanto se deseje, ou seja a esta fixo e x se aproxima dele afim de que $f(x)$ se aproxime da $f(a)$. Já na continuidade uniforme, pode-se fazer com que $f(x)$ e $f(y)$ se tornem tão próximos quanto se queira, bastando que $x, y \in X$ estejam também próximos.*
- *Podemos distinguir a continuidade uniforme, se cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança V tal que a restrição $V \cap X$ é contínua então f é comtínua. Mas não podemos afirmar para f uniformemente contínua. Isso se exprime dizendo que a continuidade é uma noção local enquanto a continuidade uniforme é um conceito global.*

Definição 8.5 *(Função Lipschitziana) Um função é dita Função Lipschitziana quando existe uma constante $k > 0$ (chamada constante de Lipschitz da função) tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|,$$

sejam quais forem $x, y \in X$

Toda função lipschitziana $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua dado $\varepsilon > 0$, tome-se $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$. Então $x, y \in X$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq k|x - y| < k \cdot \dfrac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$

Teorema 8.9 *A fim de que $f : X \to \mathbb{R}$ seja uniformemente contínua é necessário e suficiente que, para todo par de sequências $(x_n), (y_n)$ em X com $\lim(y_n - x_n) = 0$ tenha-se $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = 0$.*

Teorema 8.10 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ compacto. Toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.*

Teorema 8.11 *Toda função $f : X \to \mathbb{R}$, uniformemente contínua num conjunto limitado X, é uma função limitada.*

Teorema 8.12 *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua então para cada $a \in X'$(mesmo que a não pertença a X), existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.*

8.5 EXERCÍCIOS

8.5.1 Seção 1: Definição e primeiras propriedades

1. Sejam $f,g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$. Prove que são contínuas no ponto a as funções $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$, definidas por $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ para todo $x \in X$.

   Resolução:

   Como f e g são funções contínuas, dado $\varepsilon/2 > 0$ existe $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

   $$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon/2;$$

   $$|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon/2.$$

   Sejam $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, $\forall\ x \in X$. Tomando $\varphi = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para todo $x \in X$, com $|x-a| < \delta$, devemos mostrar que $|\varphi(x) - \varphi(a)| < \varepsilon$ e $|\psi(x) - \psi(a)| < \varepsilon$.

   Sabendo que $\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$, temos:

   $$\begin{aligned}
   |\varphi(x) - \varphi(a)| &= \left|\tfrac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|] - \tfrac{1}{2}[f(a)+g(a)+|f(a)-g(a)|]\right| \\
   &= \tfrac{1}{2}|[f(x)+g(x)] - [f(a)+g(a)] + |f(x)-g(x)| - |f(a)-g(a)|| \\
   &= \tfrac{1}{2}|f(x)-f(a)+g(x)-g(a)+|f(x)-g(x)|-|f(a)-g(a)|| \\
   &\leq \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)|+||f(x)-g(x)|-|f(a)-g(a)||] \\
   &\leq \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)|+|f(x)-g(x)-[f(a)-g(a)]|] \\
   &= \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)|+|[f(x)-f(a)]+[g(a)-g(x)]|] \\
   &\leq \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)|+|f(x)-f(a)|+|g(a)-g(x)|] \\
   &= \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(a)|+|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)|+|g(x)-g(a)|] \\
   &= \tfrac{1}{2}[2|f(x)-f(a)|+2|g(x)-g(a)|] \\
   &= |f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)| \\
   &< \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2} \\
   &= \varepsilon.
   \end{aligned}$$

   Logo, φ é contínua.

Agora, considerando o fato de que $\min\{f(x),g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$, temos:

$$\begin{aligned}
|\psi(x)-\psi(a)| &= \left|\tfrac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]-\tfrac{1}{2}[f(a)+g(a)-|f(a)-g(a)|]\right| \\
&= \tfrac{1}{2}|f(x)-f(a)+g(x)-g(a)+[|f(a)-g(a)|-|f(x)-g(x)|]| \\
&\leq \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)|+||f(a)-g(a)|-|f(x)-g(x)||] \\
&\leq \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)|+|f(a)-g(a)-[f(x)-g(x)]|] \\
&= \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)|+|[f(a)-f(x)]+[g(x)-g(a)]|] \\
&\leq \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)|+|-[f(x)-f(a)]|+|g(x)-g(a)|] \\
&= \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(a)|+|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)|+|g(x)-g(a)|] \\
&= \tfrac{1}{2}[2|f(x)-f(a)|+2|g(x)-g(a)|] \\
&= |f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)| \\
&< \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, ψ também é contínua.

$\blacksquare$

2. Sejam $f,g : X \to \mathbb{R}$ contínuas. Prove que se X é aberto então o conjunto $A = \{x \in X;\ f(x) \neq g(x)\}$ é aberto e se X é fechado o conjunto $F = \{x \in X; f(x) = g(x)\}$ é fechado.

3. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se *semi-contínua superiormente* (scs) no ponto $a \in X$ quando, para cada $c > f(a)$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x-a| < \delta$ implicam $f(x) < c$. Defina *função semi-contínua inferiormente* (sci) no ponto a. Prove que f é contínua no ponto a se, e somente se, é scs e sci nesse ponto.

   Resolução:

   Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita semi-contínua inferiormente(sci) no ponto $a \in X$ quando, para cada $c < f(a)$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x-a| < \delta$ implicam $f(x) > c$.

   Provaremos agora que f é contínua no ponto a se, e somente se, é scs e sci nesse ponto.

   $(\Rightarrow)$ Como f e contínua no ponto a, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x-a| < \delta$ impliquem $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

   Para provarmos que f é scs no ponto a suponhamos $c > c-\varepsilon > f(a)$, devemos mostrar que $c > f(x)$.

   De fato, $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ implica

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & f(a)-\varepsilon & < & f(x) & < & f(a)+\varepsilon & & & \\
\Rightarrow & f(x) & < & f(a)+\varepsilon & < & c-\varepsilon+\varepsilon & = & c \\
\Rightarrow & f(x) & < & c, & & & &
\end{array}$$

Logo, f é scs.

Para mostrarmos que f é sci no ponto a suponhamos $c < c+\varepsilon < f(a)$, precisamos provar que $c < f(x)$.

Com efeito, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ implica

$$\begin{array}{ccccccccc} & f(a)-\varepsilon & < & f(x) & < & f(a)+\varepsilon & & \\ \Rightarrow & c & = & c+\varepsilon-\varepsilon & < & f(a) & < & f(x) \\ \Rightarrow & c & < & f(x) & & & & \end{array}$$

Logo, f é sci.

$(\Leftarrow)$ Temos que f é sci e scs no ponto a. Suponhamos por absurdo que f não é contínua neste ponto.

Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall\ \delta > 0$, se $x \in X$ e $|x-a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Daí, $f(x) - f(a) \geq \varepsilon$ ou $f(x) - f(a) \leq -\varepsilon$. E, portanto,

$$\begin{array}{cccccccc} & f(x) & \geq & f(a)+\varepsilon & > & f(a) & > & c \\ \Rightarrow & f(x) & > & c. & & & & \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{cccccccc} & f(x) & \leq & f(a)-\varepsilon & < & f(a) & < & c \\ \Rightarrow & f(x) & < & c. & & & & \end{array}$$

Disto segue que f é scs ou f é sci, o que é um absurdo, pois contradiz nossa hipótese. Logo f é contínua.

■

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que se $f(x) = 0$ para todo $x \in X$ então $f(x) = 0$ para todo $x \in \overline{X}$.

5. Prove que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$.

Resolução:

$(\Rightarrow)$ Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Tomando $y \in f(\overline{X})$, precisamos mostrar que $y \in \overline{f(X)}$, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ temos $(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \cap f(X) \neq \emptyset$.

De fato, como $y \in f(\overline{X})$ temos $y = f(x_0)$, para algum $x_0 \in \overline{X}$. Daí, para todo $\delta > 0$ temos $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X \neq \emptyset$. Logo, pelo fato de f ser contínua temos

$$f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \quad \subset \quad (y - \varepsilon, y + \varepsilon).$$

Segue que

$$f(x_0) \in f((x_0-\delta, x_0+\delta)) \quad \subset \quad (y-\varepsilon, y+\varepsilon).$$

Além disso, como $x_0 \in \overline{X}$, temos que $x_0 \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ e $x_0 \in X$, logo

$$f(x_0) \in f((x_0-\delta, x_0+\delta)) \quad \text{e} \quad f(x) \in f(X).$$

Portanto, $f(x_0) \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \cap f(X)$, isto é, $y = f(x_0) \in \overline{f(X)}$. Daí, $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, seja $X \subset \mathbb{R}$ tal que $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$. Vamos mostrar que f é contínua em $a \in \mathbb{R}$.

Suponhamos que f não seja contínua em a. Logo, existem $\varepsilon > 0$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$, ou seja, $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$.
Ao considerarmos $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ temos $a \in \overline{X}$ e $f(a) \notin \overline{f(X)}$. Assim, $f(\overline{X})$ não está contido em $\overline{f(X)}$, o que é um absurdo.

Portanto, f é contínua em a.

■

6. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto a. Suponha que, em cada vizinhança V de a, existam pontos x, y tais que $f(x) < g(x)$ e $f(y) > g(y)$. Prove que $f(a) = g(a)$.

7. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ descontínua no ponto $a \in X$. Prove que existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: ou se pode achar uma sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$ e $f(x_n) > f(a) + \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ou acha-se (y_n) com $y_n \in X$, $\lim y_n = a$ e $f(y_n) < f(a) - \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resolução:

Se $f : X \to \mathbb{R}$ é descontínua no ponto $a \in X$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall\ \delta > 0$ pode-se achar $x \in X$ para os quais

$$|x-a| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Desta forma, temos que existe uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ e $|f(z_n) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Logo, existe um subconjunto $A_1 \subset \mathbb{N}$, $A_1 = \left\{n_{k_1}, n_{k_2}, \cdots, n_{k_i}, \cdots\right\}$ tal que

$$f(z_{n_k}) - f(a) > \varepsilon, \quad \forall \quad n_{k_i} \in A_1.$$

Denotando $(z_{n_k}) = (x_n)$, temos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $f(x_n) > \varepsilon + f(a)$.

De forma análoga, existe um subconjunto $A_2 \subset \mathbb{N}$, $A_2 = \{m_{k_1}, m_{k_2}, \cdots, m_{k_j}, \cdots\} \subset \mathbb{N}$ tal que

$$f(z_{m_k}) - f(a) < -\varepsilon, \quad \forall \quad m_{k_i} \in A_2.$$

Denotando, $(z_{m_k}) = (y_n)$, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ e $f(y_n) - f(a) < -\varepsilon$. Logo,

$$\begin{array}{rrcl} & -f(a)+\varepsilon & < & -f(y_n) \\ \Rightarrow & f(a)-\varepsilon & > & f(y_n) \\ \Rightarrow & f(y_n) & < & f(a)-\varepsilon. \end{array}$$

■

8.5.2 Seção 2: Funções contínuas num intervalo

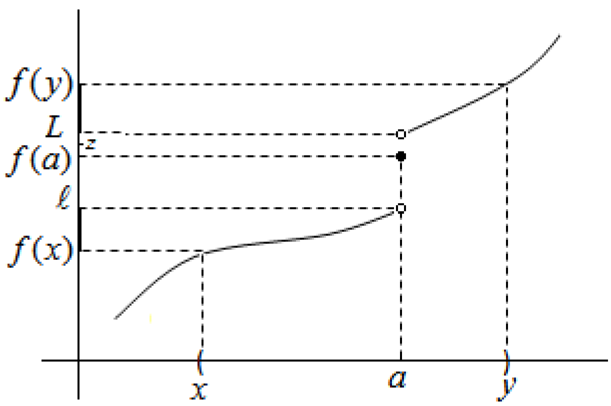
1. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se *localmente constante* quando todo ponto de X possui uma vizinhança V tal que f é constante em $V \cap X$. Prove que toda função $f : I \to \mathbb{R}$, localmente constante num intervalo I, é constante.

2. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função monótona, definida no intervalo I. Se a imagem $f(I)$ é um intervalo, prove que f é contínua.

   Resolução:

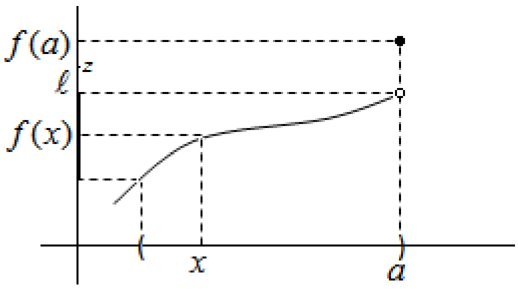
   Suponhamos, sem perda de generalidade, que f seja monótona não-decrescente. Sejam $a \in intI$, $l = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $L = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
   Se f não é contínua no ponto $a \in I$, tomando $x, y \in I$, $x < a < y$ e $z \neq f(a)$ tal que $l < z < L$, $f(x) < z < f(y)$. Mas $z \neq f(I)$, logo, $f(I)$ não é um intervalo. Absurdo!

   Portanto, f é contínua no ponto a.



Se a é um extremo do intervalo, digamos extremo direito, consideremos $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$. Se f é descontínua em $x = a$, então $l < f(a)$. Seja $x \in I$ tal que $x < a$ e $z \neq f(a)$ tal que $l < z < f(a)$. Logo, $f(x) < z < f(a)$, mas $z \neq f(I)$. Desta forma, também $f(I)$ não é um intervalo. Absurdo!

Logo, f é contínua.



■

3. Diz-se que uma função $f : I \to \mathbb{R}$, definida no intervalo I, tem a *propriedade do valor intermediário* quando a imagem $f(J)$ de todo intervalo $J \subset I$ é um intervalo. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, tem a propriedade do valor intermediário, embora seja descontínua.

4. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função com a propriedade do valor intermediário. Se, para cada $c \in \mathbb{R}$, existe apenas um número finito de pontos $x \in I$ tais que $f(x) = c$, prove que f é contínua.

   Resolução:

   Seja $a \in I$. Suponhamos por absurdo que f seja descontínua em $a \in I$. Assim, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I$ e $\varepsilon > 0$ tal que $(x_n) \to a$ e $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ então

$$f(x_n) \geq \varepsilon + f(a) \quad ou \quad f(x_n) \leq f(a) - \varepsilon.$$

   Consideremos $f(x_n) \geq \varepsilon + f(a)$. Seja $c \in (f(a), f(a + \varepsilon))$. Pela propriedade do valor intermediário, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe (z_n) entre x_n e a tal que $f(z_n) = c$, onde (z_n) é um conjunto infinito, contradição.

   Portanto, f é contínua em a.

■

5. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(0) = f(1)$. Prove que existe $x \in [0, 1/2]$ tal que $f(x) = f(x + 1/2)$. Prove o mesmo resultado com $1/3$ em vez de $1/2$. Generalize.

8.5.3 Seção 3: Funções contínuas em conjuntos compactos

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Prove que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \le f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   Resolução:

   Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} = \infty$, segue que existe $A > 0$ tal que, se $x \in X$ temos $|x| < A$. Fixemos $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \in [-A, A]$, então

   $$f(x) \quad > \quad f(a). \tag{1}$$

   Restringindo a função f ao conjunto compacto $[-A, A]$, temos que $f(X)$ também é um conjunto compacto, já que f é contínua. Daí $f(X)$ possui um menor elemento $f(x_0)$, tal que $f(x_0) \le f(y)$, $\forall\, y \in [-A, A]$, em particular temos

   $$f(x_0) \quad \le \quad f(a). \tag{2}$$

   De (1) e (2) segue que $f(x_0) \le f(a) < f(x)$, logo

   $$f(x_0) \quad \le \quad f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   ■

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, com $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Prove que, para todo $c \in \mathbb{R}$ dado, existe entre as raízes x da equação $f(x) = c$ uma cujo módulo $|x|$ é mínimo.

3. Prove que não existe uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que assuma cada um dos seus valores $f(x)$, $x \in [a, b]$, exatamente duas vezes.

   Resolução:

   Vamos supor por absurdo que a função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ assuma cada um dos seus valores $f(x)$, $x \in [a, b]$, exatamente duas vezes, ou seja, suponhamos que temos $f(x) = d_1$ e $f(x) = d_2$, com $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ e $d_1 \ne d_2$, $x \in [a, b]$.

   Considere $x_n \in [a, b]$ tal que $\lim x_n = c$, como $x_n \in [a, b]$ fechado temos que $c \in [a, b]$. E como f é contínua temos $\lim f(x_n) = f(c)$, como $c \in [a, b]$, $f(c) = d_1$ e $f(c) = d_2$, então $\lim f(x_n) = d_1$ e $\lim f(x_n) = d_2$, o que é um absurdo pela unicidade do limite. Logo, só podemos ter $d_1 = d_2$.

   ■

4. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se *periódica* quando existe $p \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que toda função contínua periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximos e mínimo, isto é, existem $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

5. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto X. Prove que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $k_\varepsilon > 0$ tal que $x, y \in X$, $|y-x| \geq \varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq k_\varepsilon \cdot |y-x|$. (Isto significa que f cumpre a condição de Lipschitz contanto que os pontos x, y não estejam muito próximos.)

   Resolução:

   Suponhamos por contradição que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall\ k_\varepsilon > 0$ e portanto, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, existem $x_n, y_n \in X$ tal que

$$|x_n - y_n| \geq \varepsilon \quad \text{e} \quad |f(y_n) - f(x_n)| \geq n\,|x_n - y_n|\,.$$

   Uma vez que X é compacto sejam (x_n) e (y_n) subsequências de (x_n) e (y_n), já renomeadas, tal que $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$. Assim,

$$|a-b| \geq \varepsilon \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x_n) - f(y_n)|}{|x_n - y_n|} \geq \lim_{x\to+\infty} \frac{n\,|x_n - y_n|}{|x_n - y_n|} = \lim_{x\to+\infty} n = +\infty.$$

   Daí,

$$+\infty \;=\; \lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x_n) - f(y_n)|}{|x_n - y_n|} \;=\; \frac{|f(b) - f(a)|}{|b-a|}.$$

   Portanto, f não é limitada em $X \subset \mathbb{R}$. Absurdo!

■

8.5.4 Seção 4: Continuidade uniforme

1. Se toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, prove que o conjunto X é fechado porém não necessariamente compacto.

2. Mostre que a função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$, não é uniformemente contínua.

   Resolução:

   Tomemos um par de sequências de números reais $(x_n) = \sqrt{n\pi + \pi/2}$ e $(y_n) = \sqrt{n\pi}$.

Temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) &= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{n\pi+\pi/2}-\sqrt{n\pi}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{n\pi+\pi/2}-\sqrt{n\pi}\right)\cdot\left(\sqrt{n\pi+\pi/2}+\sqrt{n\pi}\right)}{\sqrt{n\pi+\pi/2}+\sqrt{n\pi}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\pi+\pi/2-n\pi}{\sqrt{n\pi+\pi/2}+\sqrt{n\pi}}\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)] &= \lim_{n\to\infty}[sen(n\pi+\pi/2)-sen(n\pi)] \\
&= \lim_{n\to\infty}\pm 1 \\
&= \pm 1.
\end{aligned}$$

Portanto temos $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ sem que tenhamos $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)] = 0$. Isto significa que f não é uniformemente contínua.

$\blacksquare$

3. Dada $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua, defina $\varphi : \overline{X} \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x) = f(x)$ se $x \in X$ é um ponto isolado e $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to x} f(y)$ se $x \in X'$. Prove que φ é uniformemente contínua e $\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se existem $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, prove que f é uniformemente contínua. Mesma conclusão vale se existem os limites de $f(x)-x$ quando $x \to \pm\infty$.

   Resolução:

   Consideremos $L_1 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x)$. Disto segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que, se $x \geq \eta$ então $|f(x)-L_1| < \varepsilon/4$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Logo, se $x \geq \eta$ e $y \geq \eta$ então

   $$|f(x)-f(y)| = |f(x)-L_1+L_1-f(y)| \leq |f(x)-L_1|+|f(y)-L_1| < \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}.$$

   Logo

   $$|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Também, se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_2$, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe σ tal que se $x \leq -\sigma$ então $|f(x) - L_2| < \varepsilon/4$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Assim, se $x \leq -\sigma$ e $y \leq -\sigma$ então

$$|f(x) - f(y)| \;=\; |f(x) - L_2 + L_2 - f(y)| \;\leq\; |f(x) - L_2| + |f(x) + L_2| \;<\; \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Logo,

$$|f(x) - f(y)| \;<\; \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Desta forma, construímos um intervalo $[-\sigma, \eta]$. Sendo este um intervalo compacto, como f é contínua segue que existe $\delta > 0$ tal que, se $x, y \in [-\sigma, \eta]$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Agora se $x < -\sigma$ e $y \in [-\sigma, \eta]$, considerando $|x - y| < \delta$ temos de (4) e (5)

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(-\sigma) + f(-\sigma) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f(-\sigma)| + |f(y) - f(-\sigma)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Da mesma forma, se $x > \eta$, $y \in [-\sigma, \eta]$ e $|x - y| < \delta$ por (3) e (5) temos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(\eta) + f(\eta) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f(\eta)| + |f(y) - f(\eta)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto f é uniformemente contínua.

Agora verificaremos a continuidade uniforme de $f(x) - x$.

Seja $\lim_{x\to\infty} [f(x) - x] = l_1$ então dado $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que, se $x \geq \eta$ então $|f(x) - x - l_1| < \varepsilon/4$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Logo, se $x \geq \eta$ e $y \geq \eta$ então

$$\begin{aligned} |f(x) - x - f(y) + y| &= |f(x) - x - l_1 + l_1 - f(y) + y| \\ &\leq |f(x) - x - l_1| + |f(y) - y - l_1| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Se $\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = l_2$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\sigma > 0$ tal que, se $x \leq -\sigma$ então $|f(x) - x - l_2| <$

$\varepsilon/4$. Daí se $x \leq -\sigma$ e $y \leq -\sigma$ então

$$\begin{aligned} |f(x)-x-f(y)+y| &= |f(x)-x-l_2+l_2-f(y)+y| \\ &\leq |f(x)-x-l_2|+|f(y)-y-l_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Considere o intervalo $[-\sigma,\eta]$. Como este intervalo é compacto e $f(x)-x$ é uma função contínua temos que existe $\delta > 0$ tal que, se $x, y \in [-\sigma,\eta]$.

$$|x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-x-f(y)+y| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Diante disso, se $x < -\sigma$ e $y \in [-\sigma,\eta]$, considerando $|x-y| < \delta$ por (7) e (8) temos

$$\begin{aligned} |f(x)-x-f(y)+y| &= |f(x)-x-f(-\sigma)+\sigma+f(-\sigma)-\sigma-f(y)+y| \\ &\leq |f(x)-x-f(-\sigma)+\sigma|+|f(y)-y-f(-\sigma)+\sigma| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

E ainda, se $x > \eta$, $y \in [-\sigma,\eta]$ e $|x-y| < \delta$ por (6) e (8) segue que

$$\begin{aligned} |f(x)-x-f(y)+y| &= |f(x)-x-f(\eta)+\eta+f(\eta)-\eta-f(y)+y| \\ &\leq |f(x)-x-f(\eta)+\eta|+|f(y)-y-f(\eta)+\eta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $f(x)-x$ também é uniformemente contínua.

■

5. Sejam $f,g : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínuas. Prove que $f+g$ é uniformemente contínua. O mesmo ocorre com o produto $f \cdot g$, desde que f e g sejam limitadas. Prove que $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$, dadas por $\varphi(x) = \max\,\{f(x), g(x)\}$ e $\psi(x) = \min\,\{f(x), g(x)\}$ $x \in X$ são uniformemente contínuas.

9 CONCLUSÃO

Ao término deste trabalho, que muito acrescentou a nossa base de conhecimentos, notamos o quanto fomos transformados. Não foram poucas as vezes que estudamos o conteúdo mas quando chegamos nos exercícios não tínhamos ideia de como resolvê-los, e então tinhamos que estudar novamente. Houve vezes que fizemos coisas erradas e nosso orientador pacientemente corrigiu. Outras que recorremos à dica do autor e levamos semanas para entendê-la e para conseguirmos concluir o exercício. E vezes que simplesmente não conseguimos fazer. Não pense que o nosso trabalho foi fácil. Mas agora observando o quanto amadurecemos e o quanto aprendemos, vemos que tudo valeu a pena. Aprendemos a estudar, a persistir, e a perceber a importância de cada detalhe.

Sugerimos esta experiência à todos aqueles que querem aprender análise real, pois a fixação do conteúdo ocorre no momento em que aplicamos os conceitos para resolver um problema. Quando olhamos a resolução de um exercício podemos até compreender suas passagens, mas logo esqueceremos. Mas quando resolvemos um exercício, construímos a ideia em nossas mentes e então isso nos acompanha por muito mais tempo.

No início, nossa intenção era resolver todos os exercícios do livro, mas não houve tempo para fazermos isso com qualidade, já que buscamos fazer tudo de forma detalhada pensando no nosso aprendizado e também no leitor desse trabalho. Porém pretendemos estudar e resolver os demais exercícios do livro para então publicá-los, com o propósito de contribuir para o estudo da análise real. Desta forma, as contribuições para o mesmo serão bem-vindas pelo e-mail cris_bndr@hotmail.com.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Cáculo das Funções de uma variável**. 7. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2004.

FIGUEIREDO, D. G. de. **Análise I**. 7. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1975.

LIMA, E. L. **Análise real volume 1 Funções de uma variável**. 10. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2008.

LIMA, E. L. **Curso de Análise vol 1**. 12. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009.