UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

TATIANE TAMBARUSSI

# UM ESTUDO DE ANÁLISE REAL ATRAVÉS DE RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS.

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

**CAMPO MOURÃO**

**2011**

TATIANE TAMBARUSSI

# UM ESTUDO DE ANÁLISE REAL ATRAVÉS DE RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS.

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Adilandri Mércio Lobeiro

Co-orientador: Juan Amadeo Soriano Palomino

**CAMPO MOURÃO**

**2011**

**TERMO DE APROVAÇÃO**

Tatiane Tambarussi

Um estudo de Análise Real através de resolução de exercícios.

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

---

Orientador: Prof. Msc. Adilandri Mércio Lobeiro

---

Prof. PhD. Juan Amadeo Soriano Palomino

---

Prof. Msc. Nayene Michele Pitta Paião

Campo Mourão, 2011

*Dedico este trabalho a Deus e a minha família,*
*porque Quem a Deus tem, nada lhe falta.*
*Só Deus basta.*
*(Santa Teresa de Ávila)*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por tudo que me proporcionastes, pelas pessoas maravilhosas que colocastes em meu caminho, fazendo com que o caminho fosse muito mais florido. Obrigada pela graça de viver em sua graça.

Agradeço a minha família, que prontamente respeitou minhas decisões de mudanças, que me apoiou nos momentos mais difíceis e que me oportunizou com sua compreensão, a experiência de estudar e estudar.

Agradeço aos amigos, Vanessa, Marco, Roney, Alex, Maichel, Patrícia, Hissay, Brill, Willian, Renata, Keyla, Valéria, Luciana, Jéssica, Elieger, Simone, Fernando, Clícia, Joyce, Izonei, que nos cativaram, nos alegraram que fizeram com que vir para faculdade aos sábados e aos domingos fosse de verdade uma alegria, a matemática fica mais doce e agradável desta maneira.

É preciso agradecer a uma amiga em especial, ela que passou a fazer parte da minha família, por ter estado sempre do meu lado, parando seus estudos, tirando minhas dúvidas, fazendo eu rir até engasgar (rsrs), agradeço a Cristiane Bender por ter assumido junto comigo o compromisso de estudar para realizar o sonho de entrar no mestrado, sem a sua presença tenho certeza que teria ficado no meio do caminho.

Especialmente agradeço ao Professor Adilandri, que poderia ter sido simplesmente nosso professor e coordenador do curso, mas abraçou a causa junto conosco colocando metas quase que inatíngeis fazendo com que o sonho dele se tornasse o nosso sonho, muitas vezes nosso pesadelo, mas o grande marco de nossos estudos. Obrigada professor por ter nos impulsionado, sempre, o senhor marcou várias páginas do livro de nossas vidas.

Volto a agradecer a Deus, por todas essas pessoas que estiveram diretamente ligadas e colaborando com minha produção. Senhor abençoe e guarde-as. Obrigada, obrigada, muitíssimo obrigada Senhor!!! Não tenho palavras para descrever a alegria desta realização. Mas sei que conheces meu coração e lá traduzirás minha gratidão.

# RESUMO

TAMBARUSSI, Tatiane. Um estudo de Análise Real através de resolução de exercícios.. 107 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

Este trabalho consiste em estudar Análise real através da resolução de exercícios, com o objetivo de aprender Análise real. Esta monografia não é apenas uma pesquisa bibliográfica, trata-se de um estudo, uma produção voltada à esta disciplina que pela dificuldade e pelos tantos pré-requisitos é considerada uma das mais difíceis. Diante disto procuramos resolver os exercícios de maneira clara e diversificada, buscando maneiras de colaborar com o crescimento do leitor e com o nosso crescimento como estudante. O presente trabalho inclui breves definições e resoluções de exercícios dos seguintes temas: Conjuntos Finitos e Infinitos, Números Reais, Sequências de Números Reais, Séries Numéricas, Algumas Noções Topológicas, Limites de Funções e Funções Contínuas.

**Palavras-chave:** Análise real, resolução, exercícios, produção.

# ABSTRACT

TAMBARUSSI, Tatiane. A study of Real Analysis by solving exercises. 107 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

This paper aims to study real Analysis by solving exercises, in order to learn real Analysis. This monography does not fit into bibliographical research, because it was a study, a great production directed to the real Analysis, this subject due to the difficulty and so many prerequisites is considered one of the most difficult subjects. Facing this we solved the exercises in a clear and diversified way, looking for ways to help development of the reader and our own development as student. This present paper includes brief definitions and resolutions of exercises the following themes: Finite and Infinite Sets, Real Numbers, Sequences of Real Numbers, Numerical Series, Some Topological Notions, Functions and Limits of Continuous Functions.

**Keywords:** Real analysis, resolution, exercises, production.

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem o intuito de instigar o aluno a estudar análise, como feito pelos autores, o título do trabalho é exatamente o que ele significa, um estudo de Análise através de resolução de exercícios, isto mostra a importância de antes de lermos este trabalho, estudarmos o conteúdo, saber definições, e onde podemos aplicar os Teoremas, como parte integrante do estudo é preciso ser feito os exercícios, para que através da resolução destes, possamos tratar as definições em suas tantas maneiras, é importante que o aluno pense e repense nos exercícios, para contruir ideias, para exercitar o raciocínio, não entrando na zona de conforto. Recomendamos o estudo do livro Análise Real (LIMA, 2008) e Um curso de análise (LIMA, 2009), livros base deste trabalho, também foram utilizados (ÁVILA, 2004), (FIGUEIREDO, 1975).

Buscamos resolver os exercícios de maneira detalhada, para que o leitor possa compreender as entrelinhas da resolução de cada exercício.

O objetivo deste trabalho quando proposto era estudar análise, diante da grande dificuldade que tínhamos, desta maneira assumimos o compromisso de fazer um estudo dirigido, todas as semanas apresentando exercícios ao nosso orientador. Com o objetivo único de aprender análise, para chegar nos cursos de verão preparadas para ingressar no mestrado.

O trabalho foi árduo mas a alegria da resolução de exercícios não dados dicas era cativante, por isso gostaríamos de dizer ao estudante de análise, não leia a resolução sem antes pensar em como fazer, pois ao fazer isso estará pulando etapas do processo de aprendizagem, buscando maneiras de resolver, estará voltando a ver a teoria, não se preocupe se não conseguir fazer, o importante é tentar, persistir. Para que você tenha a sensação boa de perceber seu crescimento como estudante.

Este trabalho contém exercícios alternados, cabe aqui esclarecer, o que talvez vocês já tenham percebido que tudo que falei tenha sido na 1ª pessoa do plural, (sempre nós) digo isto para esclarecer que o trabalho foi feito junto com a aluna do mesmo curso Cristiane Bender, onde seu trabalho de conclusão de curso tem o mesmo conteúdo, porém trás os exercícios não trazidos neste. Ambos abordaram os seguintes temas com breves definições e teoremas: Conjuntos

Finitos e Infinitos, Números Reais, Sequências de Números Reais, Séries Numéricas, Algumas Noções Topológicas, Limites de Funções e Funções Contínuas.

# 2 CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Neste capítulo, será estabelecida a diferença entre conjuntos finitos e conjuntos infinitos. Será feita também a distinção entre conjuntos enumeráveis e conjunto não-enumeráveis. O ponto de partida é o conjunto dos números naturais.

## 2.1 NÚMEROS NATURAIS

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado pelos seguintes fatos:

1. Existe uma função injetiva $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada número natural $n \in \mathbb{N}$ chama-se o sucessor de $n$.
2. Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. **Princípio da Indução (PI)** Se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$ tem-se também $s(n) \in X$ $(s(X) \subset X)$, então $X = \mathbb{N}$.

As propriedades (1), (2), (3) acima chamam-se os axiomas de Peano. O Princípio de Indução significa que todo número natural $n$ pode ser obtido a partir de 1, tomando-se seu sucessor $s(1)$, o sucessor deste, $s(s(1))$, e assim por diante.

No conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais são definidas duas operações fundamentais:

- Adição:
$$\begin{array}{rccc} + & : & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & & (m,n) & & m+n \end{array}$$
- Multiplicação:
$$\begin{array}{rccc} \cdot & : & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & & (m,n) & & m\cdot n \end{array}$$

que são caracterizadas pelas seguintes igualdades, que lhes servem de definição:

1. $m+1=s(m)$;
2. $m+s(n)=s(m+n)$;
3. $m\cdot 1=m$;
4. $m\cdot(n+1)=m\cdot n+m$;

Temos as seguintes propriedades da adição e da multiplicação:

1. Associatividade:
   - $(m+n)+p=m+(n+p)$;
   - $m\cdot(n\cdot p)=(m\cdot n)\cdot p$
2. Distributividade:
   - $m\cdot(n+p)=m\cdot n+m\cdot p$;
3. Comutatividade:
   - $m+n=n+m$;
   - $m\cdot n=n\cdot m$
4. Lei do corte:
   - $m+n=m+p\Rightarrow n=p$;
   - $m\cdot n=m\cdot p\Rightarrow n=p$

Abordaremos agora a relação de ordem entre números naturais. Dados os números naturais $m,n$, dizemos que:

- $m$ é menor do que $n$ ($m<n$) quando existe $p\in\mathbb{N}$ tal que $n=m+p$;
- $m\leq n$ significa que $m<n$ ou $m=n$.

**Proposição 2.1.** *(Transitividade) Se $m<n$ e $n<p$ então $m<p$.*

Dados $m,n\in\mathbb{N}$ quaisquer, vale uma, e somente uma, das três alternativas:

$$m<n\ ,\ m>n \text{ ou } m=n$$

Uma das mais importantes propriedades da relação de ordem $m<n$ entre os números naturais é o chamado princípio da boa-ordenação.

**Teorema 2.1** (Princípio da Boa Ordenação)**.** . *Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento, isto é, um elemento $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leq n$ para todo $n \in A$.*

## 2.2 CONJUNTOS FINITOS

Indicaremos pelo símbolo $I_n$ o conjunto $\{1, \cdots, n\}$ dos números naturais desde 1 até $n$. Notação: $I_n = \{p \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq n\}$

**Definição 2.1.** *Um conjunto $X$ diz-se finito quando é vazio ($X = \emptyset$) ou quando existe, para algum $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção $\varphi : I_n \rightarrow X$. Escrevendo $x_1 = \varphi(1)$, $x_2 = \varphi(2)$, $\cdots$, $x_n = \varphi(n)$ temos então $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.*

**Observação 2.1.**

- *A bijeção $\varphi$ chama-se uma contagem dos elementos de $X$ e o número $n$ chama-se o número de elementos, ou número cardinal do conjunto finito $X$. Notação: $Card\, X = n$.*
- *Se $X = \emptyset$, diz que o número de elementos de $X$ é zero, ou seja, $Card\, X = 0$;*
- *Cada conjunto $I_n$ é finito e possui $n$ elementos, ou seja, $Card\, I_n = n$;*
- *Se $f : X \rightarrow Y$ é uma bijeção, um desses conjuntos é finito se, e somente se, o outro é.*

**Lema 2.1.** *Se $f : X \rightarrow Y$ é uma bijeção e $a \in X$, $b \in Y$. Então existe uma bijeção $g : X \rightarrow Y$ tal que $g(a) = b$.*

**Teorema 2.2.** *Se $A$ é um subconjunto próprio de $I_n$ ($A \subset I_n$ e $A \neq I_n$). Então não existe uma bijeção $f : A \rightarrow I_n$.*

**Corolário 2.1.** *Se existem bijeções $f : I_n \rightarrow X$ e $g : I_m \rightarrow X$ então $m = n$.*

**Corolário 2.2.** *Seja $X$ um conjunto finito. Uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva.*

**Corolário 2.3.** *Se $Y$ é subconjunto próprio de $X$ ($Y \subset X$ e $Y \neq X$) e $X$ é finito então não pode existir uma bijeção $f : X \rightarrow Y$.*

**Teorema 2.3.** *Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.*

**Corolário 2.4.** *Dada $f : X \rightarrow Y$*

1. *Se $f$ é injetiva e $Y$ é finito então $X$ é finito.*

2. *Se $f$ é sobrejetiva e $X$ é finito então $Y$ é finito.*

**Definição 2.2.** *Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ diz-se limitado quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq p$ para todo $x \in X$.*

**Corolário 2.5.** *Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é finito se, e somente se, é limitado.*

## 2.3 CONJUNTOS INFINITOS

**Definição 2.3.** *$X$ é um conjunto infinito quando $X$ não é finito ($X \neq \emptyset$ e não existe, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, bijeção $f : I_n \to X$ )*

**Teorema 2.4.** *Se $X$ é infinito, então existe uma aplicação injetiva $f : \mathbb{N} \to X$*

**Corolário 2.6.** *Um conjunto $X$ é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $\varphi : X \to Y$ sobre um subconjunto próprio $Y \subset X$.*

## 2.4 CONJUNTOS ENUMERÁVEIS

**Definição 2.4.** *Um conjunto $X$ é enumerável quando é finito ou existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$.*

**Observação 2.2.**

- *$f : \mathbb{N} \to X$ chama-se uma enumeração dos elementos de $X$. Escrevendo $f(1) = x_1, f(2) = x_2, \cdots, f(x_n) = x_n, \cdots$ tem-se então $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$.*
- *Se $X$ é um conjunto infinito então existe uma $f : \mathbb{N} \to X$ injetiva onde $f(\mathbb{N}) \subset X$. Logo $f : \mathbb{N} \to f(\mathbb{N}) \subset X$ é uma bijeção, e portanto todo conjunto infinito possui um subconjunto infinito enumerável.*

**Teorema 2.5.** *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é eunumerável.*

**Corolário 2.7.** *Seja $f : X \to Y$ injetiva. Se $Y$ é enumerável então $X$ também é. Em particular, todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.*

**Corolário 2.8.** *Seja $f : X \to Y$ sobrejetiva. Se $X$ é enumerável então $Y$ também é.*

**Corolário 2.9.** *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.*

**Corolário 2.10.** *A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

## 2.5 EXERCÍCIOS

### 2.5.1 Seção 1: Números Naturais

1. Usando indução, prove:

(a) $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;
**Resolução:** Para demonstrar a identidade

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Usaremos o Princípio de Indução, consideremos a proposição

$$P(n): 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \ \forall n \geq 1.$$

Para $n=1$, temos

$$1 = \frac{1(1+1)}{2},$$

o que prova que, $P(1)$ é verdadeira.
Suponhamos por hipótese que $P(n)$ seja válida, para $n=k$, ou seja,

$$P(k): 1+2+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{1}$$

é verdadeira.
Vamos mostrar que $P(n)$ é verdadeira para $n=k+1$, assim tem-se:

$$P(k+1): 1+2+\ldots+k+k+1 = \frac{k+1\,[(k+1)+1]}{2}$$

Adicionando $(k+1)$ em ambos os membros da identidade (1) temos

$$\begin{aligned}1+2+\ldots+k+k+1 &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\end{aligned}$$

o que mostra, que $P(k+1)$ é verdadeira. Segue pelo Princípio de Indução que $P(n)$ é válida $\forall n \geq 1$.

■

(b) $1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$.

**Resolução:** Consideremos a proposição

$$P(n): 1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$$

Usaremos o Princípio de Indução para demonstrar que $P(n)$ é verdadeira $\forall n \geq 1$.
Para $n=1$, temos

$$\begin{cases} 2\cdot(1) & -1 & = & 1 \\ & 1^2 & = & 1 \end{cases}$$

o que prova que $P(1)$ é verdadeira.
Suponhamos por hipótese $P(n)$ seja verdadeira para $n=k$, ou seja,

$$P(k): 1+3+5+\ldots+2k-1=k^2 \tag{2}$$

Vamos mostrar que $P(n)$ é verdadeira para $n=k+1$

$$P(k+1): 1+3+5+\ldots+2k-1+2(k+1)-1=(k+1)^2$$

Adicionando $2(k+1)-1$ em (2) temos

$$\begin{aligned} 1+3+\ldots+2k-1+2(k+1)-1 &= k^2+2(k+1)-1 \\ &= k^2+2k+2-1 \\ &= k^2+2k+1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

o que mostra que $P(k+1)$ é verdadeira. Segue pelo Princípio de Indução que $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \geq 1$.

$\blacksquare$

2. Dados $m$, $n \in \mathbb{N}$ com $n > m$, prove que ou $n$ é múltiplo de $m$ ou existem $q$, $r \in \mathbb{N}$ tais que $n = mq+r$ e $r < m$. Prove que $q$ e $r$ são únicos com esta propriedade.

3. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um subconjunto não vazio tal que $m,n \in X \Leftrightarrow m, m+n \in X$. Prove que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $X$ é o conjunto dos múltiplos de $k$.

   **Resolução:** Como $X \in \mathbb{N}$ e $X \neq \emptyset$, pelo príncipio da boa ordenação temos que $X$ possui um menor elemento. Seja $x \in X$ tal que $k \leq x$, $\forall x \in X$.
   Sabemos que dados $x, k \in X \subset \mathbb{N}$ com $x > k$, temos duas situações:

   - $x$ é múltiplo de $k$.
   - $x$ não é múltiplo de $k$.

Se $x$ não é múltiplo de $k$ temos que existem $q, r \in \mathbb{N}$ tal que:

$$x = qk + r, \text{ com } 0 < r < k$$

Como $x \in X$ e $x = qk + r$,temos que

$$qk + r \in X$$

o que implica por hipótese que $qk, r \in X$. Como $r < k$ absurdo, pois $k$ é o menor elemento de $X$.

Portanto, todo $x \in X$ é múltiplo de $k$.

$\blacksquare$

4. Dado $n \in \mathbb{N}$, prove que não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $n < x < n+1$.

5. Prove o princípio de indução como uma consequência do princípio da boa ordenação.

   **Resolução:** Seja $X \subset \mathbb{N}$ com a seguinte propriedade $X = \{1 \in X \text{ e se } n \in X \text{ então } n+1 \in X\}$.
   Queremos provar que $X = \mathbb{N}$.
   Suponhamos que $\mathbb{N} \neq X$, logo $\mathbb{N} - X \neq \emptyset$. Seja $Y = \mathbb{N} - X \neq \emptyset$, daí $Y \subset \mathbb{N}$ e $Y \neq \emptyset$. Pelo Princípio da boa ordenação $\exists k \in Y$ tal que $k \leq y$, $\forall y \in Y$.
   Como $1 \in X$, temos que

$$k = p + 1$$

   Com $p < k$. Logo $p \in X$, pois $k$ é o menor elemento de $Y$. Como $p+1 = k$ e $k \notin X$ então $p+1 \notin X$. Absurdo! Pois se $p \in X$ temos que $p+1 \in X$.
   Portanto $X = \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

### 2.5.2 Seção 2: Conjuntos Finitos

1. Indicando com *card* $X$ o número de elementos do conjunto finito $X$, prove.

   (a) Se $X$ é finito e $Y \subset X$ então $card\ Y \leq card\ X$.

   (b) Se $X$ e $Y$ são finitos então $X \cup Y$ é finito e

$$card\ (X \cup Y) = card\ X + card\ Y - card\ (X \cap Y).$$

(c) Se $X$ e $Y$ são finitos então $X \cup Y$ é finito e

$$card\ (X \cup Y) = card\ X + card\ Y - card\ (X \cap Y).$$

2. Seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de $X$. Prove por indução que se $X$ é finito então $card\ \mathcal{P}(X) = 2^{card\ X}$.

   **Resolução:** Temos que provar que dado um conjunto $X$ finito a $card\ \mathcal{P}(X) = 2^{card\ X}$
   Há duas possibilidades a serem analisadas:

(a) $X = \emptyset$
   Se $X = \emptyset$, então $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$, $card\ X = 0$ e $card\ \mathcal{P}(X) = 1$. Logo,

$$card\ \mathcal{P}(X) = 1 = 2^0 = 2^{card\ X}.$$

   Portanto $card\ \mathcal{P}(X) = 2^{card\ X}$.

(b) $X \neq \emptyset$
   Seja $X \neq \emptyset$ e finito. Vamos provar por indução que $card\ \mathcal{P}(X) = 2^{card\ X}$.

   Consideremos $X = \{x\}$, então $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{x\}\}$, $card\ X = 1$ e $card\ \mathcal{P}(X) = 2$. Segue,

$$card\ \mathcal{P}(X) = 2 = 2^1 = 2^{card\ X}.$$

   Portanto é válido para $card\ X = 1$, ou seja, para n=1.

   Suponhamos por hipótese de indução que se dado $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, onde $card\ X = n$ então $card\ \mathcal{P}(X) = 2^n = 2^{card\ X}$. Vamos mostrar que dado $Y = X \cup \{a\}$, $a \notin X$ onde

$$\begin{aligned} card\ Y &= card\ (X \cup \{a\}) \\ &= card\ X + card\ \{a\} \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

   então

$$card\ \mathcal{P}(Y) = 2^{n+1} = 2^{card\ Y}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
card\ \mathcal{P}(Y) &= card\ \mathcal{P}(X \cup \{a\}) \\
&= card\ [\mathcal{P}(X) \cup \{Z \cup \{a\}, Z \in \mathcal{P}(X)\}] \\
&= card\ \mathcal{P}(X) + card\ \{Z \cup \{a\}, Z \in \mathcal{P}(X)\} - \\
&\quad card\ \mathcal{P}(X) \cap \{Z \cup \{a\}, Z \in \mathcal{P}(X)\} \\
&= card\ \mathcal{P}(X) + card\ \mathcal{P}(X) \\
&= 2^n + 2^n \\
&= 2 \cdot 2^n \\
&= 2^{n+1}
\end{aligned}$$

Portanto card $\mathcal{P}(Y) = 2^{card\ Y}$. Concluímos então que card $\mathcal{P}(X) = 2^{card\ X}$, $\forall X$ finito.

$\blacksquare$

3. Seja $\mathcal{F}(X;Y)$ o conjunto das funções $f : X \to Y$. Se $card\ X = m$ e $card\ Y = n$, prove que $card\ \mathcal{F}(X;Y) = n^m$.

4. Prove que todo conjunto finito não-vazio $X$ de números naturais contém um elemento máximo (isto é, existe $x_0 \in S$ tal que $x \leq x_0$, $\forall x \in X$).

   **Resolução:** Dado $X \subset \mathbb{N}$ onde $X \neq \emptyset$ e $X$ é finito com $card\, X = p$. Segue que $X$ é limitado ou seja, qualquer $x_i \in X$, com $i = 1, \cdots, p$, temos que existe $x_p \in \mathbb{N}$ tal que $x_p \geq x_i \forall x_i \in X$. Sabendo que $X$ é finito e $X \neq \emptyset$, podemos considerar a bijeção:

$$f : I_p \longrightarrow X$$

   onde $f(1) = x_1, f(2) = x_2, \cdots f(p) = x_p$, com $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$.
   Isto mostra que $x_p \in X$ sendo $x_p$ o elemento máximo de $X$.

$\blacksquare$

### 2.5.3 Seção 3: Conjuntos Infinitos

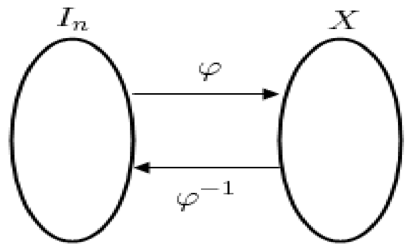
1. Dada $f \colon X \to Y$, prove:

   (a) Se $X$ é infinito e $f$ é injetiva então $Y$ é infinito.

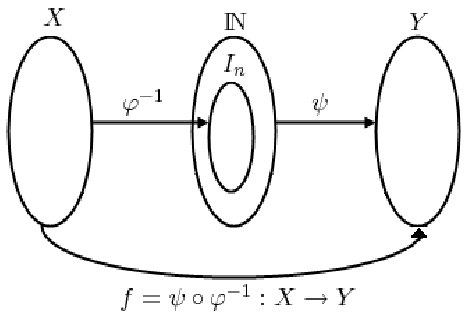
   (b) Se $Y$ é infinito e $f$ é sobrejetiva, então $X$ é infinito.

2. Sejam $X$ um conjunto finito e $Y$ um conjunto infinito. Prove que existe uma função injetiva $f \colon X \to Y$.

**Resolução:** Vamos provar que existe uma $f : X \to Y$ injetiva. Como $X$ é finito e $X \neq \emptyset$ (se $X = \emptyset$ nada temos que provar) consideremos $\varphi : I_n \to X$. Sua inversa, $\varphi^{-1} : X \to I_n$ é também uma bijeção.




Como por hipótese $Y$ é um conjunto infinito existe $\psi : \mathbb{N} \to Y$ injetiva. Isto nos dá condições de definir uma função injetiva $f = \psi \circ \varphi^{-1} : X \to Y$, conforme diagrama,




visto que, a composta de funções injetivas é injetiva. Portanto, $f : X \to Y$ é injetiva.

■

3. Prove que o conjunto $\mathcal{P}$ dos números primos é infinito.

4. Dê exemplo de uma sequencia decrescente $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ de conjuntos infinitos cuja intersecção $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ seja vazia.

   **Resolução:** Seja $I_n = \{p \in \mathbb{N}, p \leq n\}$. Considere o conjunto

$$X_n = \mathbb{N} - I_n = \{p \in \mathbb{N}; p > n\},$$

desta maneira, temos:

- $X_1 = \mathbb{N} - I_1 = \mathbb{N} - \{1\} = \{2,3,4,5,...\}$

- $X_2 = \mathbb{N} - I_2 = \mathbb{N} - \{1,2\} = \{3,4,5,6,...\}$
  $\vdots$

- $X_n = \mathbb{N} - I_n = \mathbb{N} - \{1,2,...,n\} = \{n+1, n+2, ...\}$

Segue que $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ e $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$, pois dizer $n_0 \in \mathbb{N}$ e ainda dizer que $n_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ significa dizer que $n_0$ é maior que todos os números naturais, o que é um absurdo pois o conjunto dos números naturais é infinito.

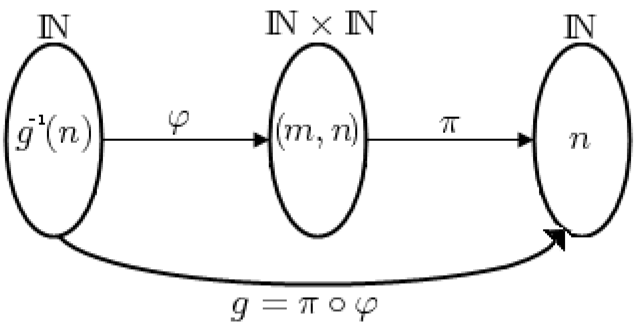
■

### 2.5.4 Seção 4: Conjuntos Enumeráveis

1. Defina $f$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pondo $f(1,n) = 2n-1$ e $f(m+1,n) = 2^m(2n-1)$. Prove que $f$ é uma bijeção.

2. Prove que existe $g$: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sobrejetiva tal que $g^{-1}(n)$ é infinito, para cada $n \in \mathbb{N}$.

   **Resolução:** Sabemos que $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito e enumerável. Como o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável, temos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Logo existe uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $\varphi(n) = (m,n)$. Considere $\pi$ : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $\pi(m,n) = n$, uma bijeção. Logo, $g = \pi \circ \varphi$ é uma bijeção. Como $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sendo $g(n) = n$ é uma bijeção, temos que a imagem inversa de $g$, ou

   seja, $g^{-1}(n)$ é infinito.

3. Exprima $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup ... \cup \mathbb{N}_n \cup ...$ como união infinita de subconjuntos infinitos, dois a dois disjuntos.

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{P}_n = \{X \subset \mathbb{N};\ \text{card}\, X = n\ \}$. Prove que $\mathcal{P}_n$ é enumerável. Conclua que o conjunto $\mathcal{P}_f$ dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ é enumerável.
   **Resolução:** Dado $\mathcal{P}_n = \{X \subset \mathbb{N},\ \text{card}\, X = n\}$, definimos:

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathcal{P}_n & \rightarrow & \mathbb{N}^n \\ & & X & \mapsto & f(X) = (m_1, m_2, \cdots, m_n) \end{array},$$

   onde $X = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_n\}$. Como $\mathbb{N}^n$ é enumerável pois é um produto cartesiano finito de conjuntos enumeráveis. Temos que $\mathcal{P}_n$ é enumerável, visto que $f$ é injetiva. Como $\mathcal{P}_f$ é o conjunto de todos os subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ temos que $\mathcal{P}_f = \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ é enumerável, pois é reunião de uma família enumerável de subconjuntos enumeráveis ($X \subset \mathbb{N}$ é enumerável).

$\blacksquare$

5. Prove que o conjunto $\wp(\mathbb{N})$ de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ não é enumerável.

# 3 NÚMEROS REAIS

## 3.1 $\mathbb{R}$ É UM CORPO

Isto significa que estão definidas em $\mathbb{R}$ duas operações $(\mathbb{R},+,\cdot)$ chamadas adição e multiplicação, que cumprem certas condições

$$\begin{array}{rrcl} +: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rrcl} \cdot: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x\cdot y \end{array}$$

que satisfazem os axiomas:

1. Associatividade: para quaisquer $x,y,z \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\begin{array}{rcl} x+(y+z) & = & (x+y)+z \\ x.(y.z) & = & (x.y).z \end{array}$$

2. Comutatividade: para quaisquer $x,y \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\begin{array}{rcl} x+y & = & y+x \\ x.y & = & y.x \end{array}$$

3. Existência do elemento neutro: para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} \exists 0 \in \mathbb{R} & ; & x+0=x \\ \exists 1 \in \mathbb{R} & ; & x.1=x \end{array}$$

4. Existência do elemento inverso:
   Dado $x \in \mathbb{R}$; $\exists\ (-x) \in \mathbb{R}$ tal que $x+(-x)=0$
   Dado $x \in \mathbb{R}$; $x \neq 0$, $\exists\ x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x.x^{-1}=1$

5. Distributividade: para $x, y, z \in \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

Dos axiomas acima resultam todas as regras de manipulação com os números reais. A título de exemplo, estabeleceremos algumas delas.

**a)** da Comutatividade

**(i)** $0 + x = x$.

**(ii)** $(-x) + (x) = 0$.

**(iii)** $1.x = x$.

**(iv)** $x^{-1}.x = 1$.

**b)** da Distributividade

**(i)** $x.0 = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

**(ii)** $x.y = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

**(iii)** Regra de sinais

**(a)** $x.(-y) = (-x).y = -(xy)$;

**(b)** $(-x)(-y) = xy$.

**(iv)** $x^2 = y^2 \Longrightarrow x = \pm y$.

## 3.2 $\mathbb{R}$ É UM CORPO ORDENADO

Isto significa que existe um subconjunto $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$, chamado o conjunto dos números reais positivos, que cumpre as seguintes condições:

**($P_1$)** Seja $x, y \in \mathbb{R}_+$ então $x + y \in \mathbb{R}_+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}_+$

**($P_2$)** Dado $x \in \mathbb{R}$ tem-se uma das três alternativas:

$$x \in \mathbb{R}_+ \quad \text{ou} \quad (-x) \in \mathbb{R}_+ \quad \text{ou} \quad x = 0.$$

Se indicarmos com $\mathbb{R}^-$ o conjunto dos números $(-x)$ onde $x \in \mathbb{R}_+$, a condição $P_2$ diz que $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ e os conjuntos, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}^-$ e $\{0\}$ são dois a dois disjuntos. Os números $y \in \mathbb{R}^-$ chama-se negativos.

**Proposição 3.1.** $\forall\, x \neq 0$ *tem-se* $x^2 \in \mathbb{R}_+$.

**Definição 3.1.** *Diz-se que $x$ é menor do que $y$ e escreve-se $x < y$ quando $y - x \in \mathbb{R}_+$, isto é, $y = x + z$ onde $z \in \mathbb{R}_+$. Neste caso, escreve-se também $y > x$ e diz-se que $y$ é maior do que $x$. Em particular,*

- $x > 0$ *significa* $x \in \mathbb{R}_+$, *isto é, $x$ é positivo;*
- $x < 0$ *significa que* $-x \in \mathbb{R}_+$, *ou seja, $x$ é negativo.*

A relação de ordem $x < y$ em $\mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. Transitividade: se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.
2. Tricotomia: Dados $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se uma das três alternativas.
$$x = y, \quad x < y \quad \text{ou} \quad y < x.$$
3. Monotonicidade da adição: se $x < y$ então $x + z < y + z$, $\forall z \in \mathbb{R}$.
4. Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$ então $\begin{cases} z > 0 & \Rightarrow & x \cdot z < y \cdot z \\ z < 0 & \Rightarrow & x \cdot z > y \cdot z \end{cases}$

Mais geralmente, $\forall\, x, y, x', y' \in \mathbb{R}$

**(i)** $x < y$ e $x' < y' \Longrightarrow x + x' < y + y'$

**(ii)** $0 < x < y$ e $0 < x' < y' \Longrightarrow x.x' < y.y'$

**(iii)** $0 < x < y \Longrightarrow y^{-1} < x^{-1}$

Como $1 \in \mathbb{R}$ é positivo, segue que

$$1 < 1 + 1 + 1 + 1 < \cdots$$

podemos então considerar $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Segue que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ pois $0 \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{R} \Rightarrow -n \in \mathbb{R}$. Além disso, se $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$ então

$$\frac{m}{n} = m.n^{-1} \in \mathbb{R}$$

o que nos permite concluir que$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Assim

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

**Proposição 3.2.** *(Desigualdade de Bernoulli) Para todo número real $x \geq -1$ e todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$(1+x)^n \geq 1+nx \tag{1}$$

**Definição 3.2.** *(Módulo) Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos o módulo de $x$ por*

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

*ou ainda*

$$|x| = \max\{-x, x\}$$

*é o maior dos números reais $x$ e $-x$.*

**Observação 3.1.** *1. $-|x| \leq x \leq |x|, \forall\, x \in \mathbb{R}$.*

*2. $|x|$ é o único número não negativo cujo quadrado é $x^2$, ou seja, $|x|^2 = x^2$.*

**Proposição 3.3.** *Se $x, y \in \mathbb{R}$ então*

**(i)** $|x+y| \leq |x|+|y|$

**(ii)** $|x.y| = |x|.|y|$

**Teorema 3.1.** *Sejam $x, a \in \mathbb{R}$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

**(i)** $-a \leq x \leq a$

**(ii)** $x \leq a$ *e* $-x \leq a$

**(iii)** $|x| \leq a$

**Corolário 3.1.** *Dados $a, x, b \in \mathbb{R}$, tem-se $|x-a| \leq b$ se, e somente se, $a-b \leq x \leq a+b$.*

Usaremos as seguintes notações para representar tipos especiais de conjuntos de números reais, chamados intervalos:

- Intervalos limitados com extremos $a, b$.

  **fechado:** $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$

  **aberto:** $(a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

  **fechado à esquerda:** $[a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$

**fechado à direita:** $(a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$

- Intervalos ilimitados

  **Semi-reta esquerda fechada de origem** $b$**:** $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$

  **Semi-reta esquerda aberta de origem** $b$**:** $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$

  **Semi-reta direita fechada de origem** $a$**:** $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$

  **Semi-reta direita aberta de origem** $a$**:** $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$

  **Reta:** $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

**Teorema 3.2.** *Num corpo ordenado $K$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

**(i)** $\mathbb{N} \subset K$ *é ilimitado superiormente.*

**(ii)** *dados $a, b \in K$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$.*

**(iii)** *dado qualquer $a > 0$ em $K$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.*

**Definição 3.3.** *Um corpo ordenado $K$ chama-se arquimediano quando nele é válida qualquer das três condições equivalentes citadas no teoerema 3.2.*

**Observação 3.2.** *O corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais é arquimediano.*

## 3.3 $\mathbb{R}$ É UM CORPO ORDENADO COMPLETO

Nada do que foi dito até agora permite distinguir $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ pois os números racionais também constituem um corpo ordenado. Acabaremos agora nossa caracterização de $\mathbb{R}$, descrevendo-o como um corpo ordenado completo, propriedade que $\mathbb{Q}$ não tem.

**Definição 3.4.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $X$ é limitado superiormente quando existe $k \in \mathbb{R}$ tal que*

$$x \leq k, \ \forall\, x \in X$$

*e todo $k$ com esta proriedade é denominado uma* **cota superior de** $X$.

**Definição 3.5.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não vazio. Dizemos que $b$ é* **supremo de** $X$*. Se $b$ é a menor das cotas superiores*

$$b = \sup X$$

Equivalentemente, $b$ é supremo de $X$ se, e somente se:

**(i)** $x \leq b, \forall\, x \in X$

**(ii)** Se $c$ é uma cota superior de $X$, então $b \leq c$.

**(iii)** $\forall\, \varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $b - \varepsilon < x$.

**Definição 3.6.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$ dizemos que $X$ é limitado inferiormente quando existe $m \in \mathbb{R}$ tal que*

$$m \leq x, \forall\, x \in X$$

*e todo $m$ com esta propriedade é denominado uma* **cota inferior de** $X$

**Definição 3.7.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente e não vazio. Dizemos que $a$ é o* **ínfimo de** $X$ *se $a$ é a maior das cotas inferiores*

$$a = \inf X$$

Equivalentemente, $a$ é o ínfimo de $X$ se, e somente se:

**(i)** $a \leq x, \forall\, x \in X$

**(ii)** Se $c$ é uma cota inferior de $X$ então $c \leq a$.

**(iii)** $\forall\, \varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x < a + \varepsilon$.

**Definição 3.8.** *Um número $b \in X$ é o maior elemento (***elemento máximo***) do conjunto $X$ quando*

$$b \geq x\ \forall\, x \in X$$

*Isto quer dizer que $b = \sup X$ que pertence a $X$.*

*Exemplo:*

- $b$ é o elemento máximo do $[a, b]$
- o $[a, b)$ não possui elemento máximo mas $b = \sup [a, b)$

**Definição 3.9.** *Um número $a \in X$ é o menor elemento (***elemento mínimo***) do conjunto $X$ quando*

$$a \leq x \; \forall \; x \in X$$

*Isto quer dizer que* $a = \inf X$ *que pertence a* $X$.

*Exemplo:*

- $a$ é o elemento mínimo do $[a,b]$
- o $(a,b]$ não possui elemento mínimo mas $a = \inf(a,b]$

**Definição 3.10.** *Se* $X$ *é limitado superiormente e inferiormente, diz-se que* $X$ *é um conjunto limitado. Isto significa que* $X$ *esta contido em algum intervalo limitado* $[a,b]$ *ou que existe* $k > 0$ *tal que se* $x \in X$ *então* $|x| \leq k$.

**Exemplo 3.1.** *Seja*

$$Y = \left\{ \frac{1}{2^n}; n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}$$

*então* $\inf Y = 0$ *e* $\sup Y = \frac{1}{2}$.

A **<u>insuficiência</u>** mais grave dos números racionais, para efeitos da análise matemática, é o fato de alguns conjuntos limitados de números racionais não possuem supremo (ou ínfimo). Este fato está ligado à inexistência de raízes quadradas racionais de certos números inteiros, mas é uma dificuldade que vai muito além dessa falta.

Pitágoras e seus discípulos descobriram o seguinte,

**Lema 3.1.** *Não existe um número racional cujo quadrado seja igual a 2.*

**Proposição 3.4.** *Sejam*

$$X = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$$

*e*

$$Y = \{y \in \mathbb{Q}; y > 0 \text{ e } y^2 > 2\} \subset \mathbb{Q}$$

*então não existem* $\sup X$ *nem* $\inf Y$ *em* $\mathbb{Q}$.

**Observação 3.3.** *Com base na proposição (3.4), observamos que se existir um corpo ordenado no qual todo conjunto não-vazio, limitado superiormente, possua supremo, existirá, nesse dito corpo, um elemento* $a > 0$ *cujo quadrado é* $2$. *Com efeito, tal corpo, sendo ordenado contém* $\mathbb{Q}$, *logo contém o conjunto* $X$ *e nele existirá* $a = \sup X$, *cujo quadrado, não podendo ser menor nem maior do que* $2$, *deverá ser igual a* $2$. *Escreve-se* $a = \sqrt{2}$.

**Definição 3.11** (Corpo Ordenado Completo). *Um corpo ordenado $K$ chama-se completo quando todo subconjunto não vazio, limitado superiormente, $X \subset K$, possui supremo em $K$.*

Resulta da definição que, num corpo ordenado completo, todo conjunto não-vazio, limitado inferiormente, $Y \subset K$, possui um ínfimo.

Adotaremos, a partir de agora, o axioma fundamental da Análise Matemática.

**Axioma 3.1** (Axioma Fundamental da Análise Matemática). *Existe um corpo ordenado completo, $\mathbb{R}$, chamado o corpo dos números reais.*

Como foi observado, existe em $\mathbb{R}$ um número positivo $a$ tal que $a^2 = 2$. Este número é representado pelo símbolo $\sqrt{2}$ o qual não é número racional.

Aos elementos do conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, isto é, aos números que não são racionais, chamaremos de números irracionais. Assim $\sqrt{2}$ é um número irracional.

**Proposição 3.5.** *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, se $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{N}$ então $\sqrt[n]{m} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.*

Mostraremos agora que os números irracionais se acham espalhados por toda parte entre os números reais e que há mais números irracionais do que racionais. Para explicar precisamente o que significa "espalhados por toda parte", começaremos com uma definição.

**Definição 3.12** (Denso). *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se denso em $\mathbb{R}$ quando todo intervalo aberto $(a, b)$ contém algum ponto de $X$. Em outras palavras, diremos que o conjunto $X$ de números reais é denso em $\mathbb{R}$ quando, dados arbitrariamente $a < b$ em $\mathbb{R}$, for possível encontrar $x \in X$ tal que $a < x < b$.*

**Teorema 3.3.** *O conjunto$\mathbb{Q}$ dos números racionais e o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais são ambos densos em $\mathbb{R}$.*

**Teorema 3.4** (Intervalos Encaixados). *Seja $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ uma sequência decrescente de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$ então $\cap_{n=1}^{+\infty} I_n$ não é vazia.*

**Teorema 3.5.** *O conjunto dos números reais não é enumerável.*

**Corolário 3.2.** *Todo intervalo não-degenerado de números reais é não-enumerável.*

**Corolário 3.3.** *O conjunto dos números irracionais não é enumerável.*

## 3.4 EXERCÍCIOS

### 3.4.1 Seção 1: $\mathbb{R}$ é um corpo

1. Prove as seguintes unicidades:

   (a) Se $x+\theta = x$ para algum $x \in \mathbb{R}$ então $\theta = 0$;

   (b) Se $x \cdot u = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $u = 1$;

   (c) Se $x+y = 0$ então $y = -x$;

   (d) Se $x.y = 1$ então $y = x^{-1}$.

2. Dados $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, se $b \neq 0$ e $d \neq 0$ prove que $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d} = \dfrac{(ad+bc)}{bd}$ e $\left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{c}{d}\right) = \dfrac{ac}{bd}$

   **Resolução:**

(i) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d} = \dfrac{(ad+bc)}{bd}$.
Como $a = a$ temos

$$\begin{aligned} a\cdot d &= a\cdot d \\ \Rightarrow \quad a\cdot d+b\cdot c &= a\cdot d+b\cdot c, \end{aligned}$$

Sendo $b \neq 0$ e $d \neq 0$ números reais segue que existem inversos multiplicativos $b^{-1}, d^{-1} \in \mathbb{R}$ tais que $b \cdot b^{-1} = 1$ e $d \cdot d^{-1} = 1$, pois $\mathbb{R}$ é um corpo. Vamos provar que:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad a(b\cdot b^{-1})d+b(d\cdot d^{-1})c &= a\cdot d+b\cdot c \\ \Rightarrow \quad a\cdot d+b\cdot c &= a\cdot d+b\cdot c \\ \Rightarrow \quad (a\cdot b^{-1}+c\cdot d^{-1})(bd) &= (a\cdot d+b\cdot c)(bd^{-1})(bd) \\ \Rightarrow \quad a\cdot b^{-1}+c\cdot d^{-1} &= (a\cdot d+b\cdot c)(bd)^{-1} \\ \Rightarrow \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d} &= \frac{(ad+bc)}{bd}. \end{aligned}$$

(ii) $\left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{c}{d}\right) = \dfrac{ac}{bd}$
Visto que $a = a$, segue que:

$$\begin{aligned} a\cdot c &= a\cdot d \\ \Rightarrow \quad a(b^{-1}b)c &= a\cdot c \\ \Rightarrow \quad ab^{-1}\cdot bc &= a\cdot c \\ \Rightarrow \quad ab^{-1}\cdot cb &= a\cdot c \\ \Rightarrow \quad ab^{-1}\cdot c(d^{-1}d)b &= a\cdot c \\ \Rightarrow \quad (ab^{-1})\cdot(cd^{-1})(db)(bd)^{-1} &= a\cdot c(bd)^{-1} \\ \Rightarrow \quad ab^{-1}\cdot cd^{-1} &= a\cdot c(bd)^{-1} \\ \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) &= \frac{ac}{bd}. \end{aligned}$$

3. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ em $\mathbb{R}$, prove que $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ e conclua que $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$.

4. Prove que $\dfrac{(1-x^{n+1})}{(1-x)} = 1 + x + \ldots + x^n$ para todo $x \neq 1$.

   **Resolução:** Seja
$$P(n) : \frac{(1-x^{n+1})}{(1-x)} = 1 + x + \ldots + x^n$$
   Vamos mostrar pelo Princípio de Indução que $P(n)$ é verdadeira, $\forall n \geq 1$.

   Se $n = 1$, temos do primeiro membro de $P(n)$ que
$$\frac{1-x^{1+1}}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)} = 1 + x,$$
   e do segundo membro que
$$1 + x^1 = 1 + x$$
   Portanto $P(1)$ é verdadeira. Suponhamos por hipótese que $P(n)$ seja válida para $n = k$, ou seja
$$P(k) : \frac{(1-x^{k+1})}{(1-x)} = 1 + x + \ldots + x^n$$
   é verdadeira. Vamos provar que
$$P(k+1) : \frac{(1-x^{(k+1)+1})}{(1-x)} = 1 + x + \ldots + x^k + x^{k+1}$$
   é válida. Adicionando $x^{k+1}$ a ambos os membros de $P(k)$, obtemos:
$$\begin{array}{rcl} \dfrac{(1-x^{(k+1)})}{(1-x)} + x^{k+1} & = & 1 + x + \ldots + x^k + x^{k+1} \\ \dfrac{(1-x^{k+1}) + (1-x)x^{k+1}}{1-x} & = & 1 + x + \ldots + x^k + x^{k+1} \\ \dfrac{(1-x^{(k+1)+1})}{1-x} & = & 1 + x + \ldots + x^k + x^{k+1} \end{array}$$
   logo $P(k+1)$ é verdadeira. Portanto pelo PI $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$.

   ∎

### 3.4.2 Seção 2: $\mathbb{R}$ é um Corpo Ordenado

1. Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, prove que $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

2. Prove que $||x| - |y|| \leq |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

   **Resolução:** Vamos mostrar que $||x| - |y|| \leq |x - y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$, que é equivalente a
$$-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|.$$

Temos

$$\begin{aligned} |x| &= |x-y+y| \\ |x| &\leq |x-y|+|y| \\ |x|-|y| &\leq |x-y| \end{aligned} \tag{2}$$

e

$$\begin{aligned} |y| &= |y-x+x| \\ |y| &\leq |-(y+x)|+|x| \\ |y|-|x| &\leq |-y+x| \\ |x|-|y| &\geq -|x-y| \\ -|x-y| &\leq |x|-|y| \end{aligned} \tag{3}$$

De (2) e (3), obtemos:

$$-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|.$$

Portanto,

$$||x|-|y|| \leq |x-y|.$$

■

3. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x^2+y^2=0$ prove que $x=y=0$.
4. Prove por indução que $(1+x)^n \geq 1+nx+\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]x^2$ se $x \geq 0$

   **Resolução:** Considere a proposição

   $$P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx+\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]x^2.$$

   Vamos provar pelo Princípio de Indução que $P(n)$ é verdadeira $\forall n \geq 1$, onde $x \geq 0$.

   Para $n=1$, temos que

   $$P(1) : (1+x)^1 \geq 1+x+\left[\frac{1(1-1)}{2}\right]x^2 = 1+x+0.$$

   é verdadeira.

   Suponhamos que $P(n)$ é verdadeira para $n=k$,

   $$P(k) : (1+x)^k \geq 1+kx+\left[\frac{k(k-1)}{2}\right]x^2.$$

Vamos mostrar que

$$P(k+1): (1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x + \left[\frac{(k+1)\left[(k+1)-1)\right]}{2}\right]x^2.$$

Multiplicando $(1+x)$ a ambos os membros de $P(k)$ temos:

$$\begin{aligned}
(1+x)^k(1+x) &\geq \left[1+kx+\left[\frac{k(k-1)}{2}\right]x^2\right](1+x) \\
&= \left[1+kx+\left[\frac{k(k-1)}{2}\right]x^2\right](1+x) \\
&= (1+x)+kx(1+x)+\left[\frac{k(k-1)}{2}\right]x^2\left[\frac{k(k-1)}{2}\right]x^3 \\
&\geq (1+x)+kx+kx^2+\frac{k(k-1)}{2}x^2 \\
&= 1+(1+k)x+kx^2+\frac{k(k-1)}{2}x^2 \\
&= 1+(1+k)x+\frac{2kx^2+k(k-1)x^2}{2} \\
&= 1+(1+k)x+\frac{k(2+k-1)x^2}{2} \\
&= 1+(1+k)x+\frac{k(k+1)x^2}{2} \\
&\geq 1+(1+k)x+\frac{(k+1)\left[(k+1)-1\right]x^2}{2}
\end{aligned}$$

Segue que

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x+\left[\frac{(k+1)\left[(k+1)-1)\right]}{2}\right]x^2$$

Portanto $P(k+1)$ é verdadeira $\forall x > 0$. Concluímos pelo Princípio de Indução que $P(n)$ é verdadeira para $\forall n$.

■

5. Para todo $x \neq 0$ em $\mathbb{R}$, prove que $(1+x)^{2n} > 1+2nx$, $\forall\ n \geq 1$.

6. Prove que $|a-b| < \varepsilon \Rightarrow |a| < |b| + \varepsilon$.

   **Resolução:** Como estamos tratando de elementos arbitrários de um corpo ordenado $\mathbb{R}$ vale seguinte relação:

$$||a|-|b|| < |a-b| \quad \text{e} \quad |a|-|b| < ||a|-|b||$$

   Segue das desigualdades acima

$$|a|-|b| < ||a|-|b|| < |a-b|$$

ou ainda,

$$|a| - |b| < |a - b| < \varepsilon,$$

logo

$$|a| - |b| < \varepsilon.$$

Portanto, $|a| < |b| + \varepsilon$.

7. Use o fato de que trinômio do segundo grau $f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + \lambda y_i)^2$ é $\geq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ para provar a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Prove ainda que vale a igualdade se, e somente se, existe $\lambda$ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$, ou $y_1 = \cdots = y_n = 0$.

8. Se $\dfrac{a_1}{b_1}, \ldots, \dfrac{a_n}{b_n}$ pertencem a um intervalo $(\alpha, \beta)$ e $b_1, \ldots, b_n$ são positivos, prove que $\dfrac{(a_1 + \ldots + a_n)}{(b_1 + \ldots + b_n)}$ pertence a $(\alpha, \beta)$. Nas mesmas condições, se $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$ prove que $\dfrac{(t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n)}{(t_1 b_1 + \ldots + t_n b_n)}$ também pertence ao intervalo $(\alpha, \beta)$.

**Resolução:** Sejam $\dfrac{a_i}{b_i} \in (\alpha, \beta), \forall b_i$ tal que $i = 1, 2, \cdots, n$, ou seja,

$$\alpha < \frac{a_i}{b_i} < \beta$$

Multiplicando a desigualdade por $b_i$, temos

$$b_i \alpha < a_i < \beta b_i$$

$\forall i, i = 1, \cdots, n$ ou seja,

$$\begin{array}{lll} b_1\alpha & < a_1 & < \beta b_1 \\ b_2\alpha & < a_2 & < \beta b_2 \\ \vdots & & \\ b_n\alpha & < a_n & < \beta b_n \end{array} \tag{4}$$

Somando as desigualdades acima, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \alpha < \sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{i=1}^{n} b_i \beta$$

ou ainda

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} b_i < \sum_{i=1}^{n} a_i < \beta \sum_{i=1}^{n} b_i$$

dividindo por $\sum_{i=1}^{n} b_i$

$$\alpha < \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} < \beta,$$

Concluímos que

$$\alpha < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} < \beta$$

Nas mesmas condições queremos provar que $\alpha < \dfrac{t_1a_1 + t_2a_2 + \ldots + t_na_n}{t_1b_1 + t_2b_2 + \ldots + t_nb_n} < \beta \in (\alpha, \beta)$ com $t_i \in \mathbb{R}^+$

Multiplicando (4) por $t_i \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, \cdots, n$, respectivamente obtemos:

$$\begin{array}{lll} (\alpha b_1)t_1 & < a_1t_1 & < (\beta b_1)t_1 \\ (\alpha b_2)t_2 & < a_2t_2 & < (\beta b_2)t_2 \\ \quad\vdots & & \\ (\alpha b_n)t_n & < a_nt_n & < (\beta b_n)t_n \end{array}$$

Somando as desigualdades acima, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(b_it_i) < \sum_{i=1}^{n} a_it_i < \sum_{i=1}^{n} \beta(b_it_i)$$

ou melhor

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} (b_it_i) < \sum_{i=1}^{n} a_it_i < \beta \sum_{i=1}^{n} (b_it_i)$$

dividindo por $\sum_{i=1}^{n} (b_it_i)$ obtemos

$$\alpha < \frac{\sum_{i=1}^{n} a_it_i}{\sum_{i=1}^{n} b_it_i} < \beta$$

equivalente a

$$\alpha < \frac{a_1t_1 + a_2t_2 + \ldots + a_nt_n}{b_1t_1 + b_2t_2 + \ldots + b_nt_n} < \beta$$

Concluimos que

$$\frac{t_1a_1+t_2a_2+\ldots+t_na_n}{t_1b_1+t_2b_2+\ldots+t_nb_n} \in (\alpha,\beta),$$

$\forall t_i \in \mathbb{R}^+$.

$\blacksquare$

### 3.4.3 Seção 3: $\mathbb{R}$ é um Corpo Ordenado Completo

1. Diz-se que uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é *limitada superiormente* quando sua imagem $f(X) = \{f(x); x \in X\}$ é um conjunto limitado superiormente. Então põe-se $\sup f = \sup\{f(x), x \in X\}$. Prove que se $f,\ g: X \to \mathbb{R}$ são limitadas superiormente o mesmo ocorre com a soma $f+g: X \to \mathbb{R}$ e tem-se $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$. Dê um exemplo de $\sup(f+g) < \sup f + \sup g$. Enuncie e prove um resultado análogo para inf.

2. Dadas as funções $f,\ g: X \to \mathbb{R}^+$ limitadas superiormente, prove que o produto $f \cdot g: X \to \mathbb{R}^+$ é uma função limitada (superior e inferiormente) com $\sup(f\cdot g) \leq \sup f \cdot \sup g$ e $\inf(f \cdot g) \geq \inf f \cdot \inf g$. Dê exemplos onde se tenha $<$ e não $=$.

   **Resolução:** Sejam $f,\ g: X \to \mathbb{R}^+$ limitadas superiormente. Logo,

   $$f(X) = \{f(x), x \in X\} \leq M \text{ e } g(X) = \{g(x), x \in X\} \leq N$$

   onde $M, N \in \mathbb{R}^+$. Queremos provar que $f.g$ é limitada.

   $$\begin{aligned}(f\cdot g)(X) &= \{(f\cdot g)(x); x\in X\}\\ &= \{(f)(x)\cdot(g)(x); x \in X\}\end{aligned}$$

   Por hipótese

   $$\begin{aligned}0 &\leq f(x) &\leq M\\ 0 &\leq g(x) &\leq M\end{aligned}$$

   $\forall x \in X$, logo

   $$0 \quad \leq f(x)\cdot g(x) \quad \leq M$$

   $\forall x \in X$, ou seja, $f\cdot g$ é limitada, $\forall x \in X$.

   Resta provar que:

(a) $\sup\,(f\cdot g) \leq (\sup\, f)\cdot(\sup g)$ Temos

$$\sup\,(f\cdot g) = \sup\, f(x)\cdot g(x), \forall x \in X$$

e também

$$\sup\,(f) = \sup\, f(x), \forall x \in X \geq f(x), \forall x \in X.$$
$$\sup\,(g) = \sup g(x), \forall x \in X \geq g(x), \forall x \in X.$$

logo

$$0 \leq f(x) \leq \sup\, f, \forall x \in X$$
$$0 \leq g(x) \leq \sup g, \forall x \in X$$

então

$$f(x)\cdot g(x) \leq (\sup\, f)(\sup g), \forall x \in X$$

ou seja, $\sup\, f\cdot \sup g$ é cota superior do conjunto

$$\{f(x)\cdot g(x), \forall x \in X\}$$

donde

$$\sup\,(f\cdot g) \leq \sup\, f\cdot \sup g$$

(b) $\inf\,(f\cdot g) \geq (\inf\, f)\cdot(\inf g)$ Temos

$$\inf\,(f\cdot g) = \inf\, f(x)\cdot g(x), \forall x \in X$$

e também

$$\inf\,(f) = \inf\, f(x), \forall x \in X \leq f(x), \forall x \in X.$$
$$\inf\,(g) = \inf g(x), \forall x \in X \leq g(x), \forall x \in X.$$

logo

$$0 \leq \inf\, f \leq f(x), \forall x \in X$$
$$0 \leq \inf g \leq g(x), \forall x \in X$$

então

$$(\inf f)(\inf g) \leq f(x) \cdot g(x), \forall x \in X$$

ou seja, $\inf f \cdot \inf g$ é cota inferior do conjunto

$$\{f(x) \cdot g(x), \forall x \in X\}$$

donde

$$\inf (f \cdot g) \leq \inf f \cdot \inf g$$

**Exemplo:** Sejam

$$\begin{array}{cccc} f : & [1,2] & \rightarrow & [1,4] \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{cccc} g : & [1,2] & \rightarrow & [4,16] \\ & x & \mapsto & g(x) = \frac{16}{x^2} \end{array}$$

funções limitadas.

Temos que

$$f \cdot g : [1,2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f \cdot g(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ &= x^2 \cdot \frac{16}{x^2} \\ &= 16 \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ , ou seja, $f \cdot g$ é uma função constante.

Observe que:

1. $\sup f = 4$, $\sup g = 16$ e $\sup (f \cdot g) = 16 < 16 \cdot 4 = \sup f \cdot \sup g$.

   Portanto,

$$\sup (f \cdot g) < \sup f \cdot \sup g$$

2. $\inf f = 1$, $\inf g = 4$ e $\inf (f \cdot g) = 16 < 1 \cdot 4 = \inf f \cdot \inf g$.

De onde concluímos que

$$\inf\,(f\cdot g) > \inf\, f\cdot \inf g$$

3. Nas condições do exercício anterior mostre que $\sup(f^2) = (\sup f)^2$ e $\inf(f^2) = (\inf f)^2$.

4. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ com $a^2 < 2 < b^2$, tome $x, y \in \mathbb{R}^+$ tai que $x < 1, x < \frac{(2-a^2)}{2a-1}$ e $y < \frac{(b^2-2)}{2b}$. Prove que $(a+x)^2 < 2 < (b-y)^2$ e $b-y > 0$. Em seguida, considere o conjunto limitado $X = a \in \mathbb{R}^+; a^2 < 2$ e conclua que o número real $c = \sup X$ cumpre $c^2 = 2$.

   **Resolução:** Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ tal que $a^2 < 2 < b^2$, tomemos ainda $x, y \in \mathbb{R}^+$ com

$$\begin{aligned} x &< 1 \\ x &< \frac{2-a^2}{2a+1} \end{aligned} \qquad (5) \qquad\qquad \begin{aligned} -y &> 0 \Rightarrow y < b \\ y &< \frac{b^2-2}{2b} \end{aligned} \qquad (6)$$

De (5) temos

$$\begin{aligned} x &< \frac{2-a^2}{2a-1} \\ (2a+1)x &< 2-a^2 \\ 2ax+x &< 2-a^2 \\ a^2+2ax+x &< 2. \end{aligned}$$

Como $x < 1$ então $x^2 < x$ logo

$$a^2+2ax+x < a^2+2ax+x^2 = (a+x)^2,$$

segue,

$$(a+x)^2 < 2 \qquad (7)$$

De (6) temos

$$\begin{aligned} y &< \frac{b^2-2}{2b} \\ 2by &< b^2-2 \\ -b^2+2by &< -2\cdot(-1) \\ b^2-2by &> 2 \end{aligned}$$

Adicionando $y^2$ a ambos os membros da desigualdade temos

$$\begin{aligned} b^2 - 2by + y^2 = (b-y)^2 &> 2 + y^2 > 2 \\ \Rightarrow \qquad (b-y)^2 &> 2 \end{aligned}$$

De (5) e (6) temos

$$(a+x)^2 < 2 < (b-y)^2 \tag{8}$$

Considerando $X = \left\{a \in \mathbb{R}^+, a^2 < 2\right\}$ e $Y = \left\{b \in \mathbb{R}^+, b^2 > 2\right\}$ para concluirmos que $c = \sup X$ temos 2 casos a examinar:

(a) O conjunto $X$ não possui elementos máximo, de fato para todo $a \in X$ existe por hipótese $x < 1$, por (8) $a + x \in X$.

(b) O conjunto $Y$ não possui elemento minímo, também de (8) temos que dado $y < b$ obtemos $b - y \in Y$.

E ainda se $a \in X$ e $b \in Y$, então $a < b$ e por hipótese $a^2 < 2 < b^2$ logo $x^2 < y^2$.

Das afirmações acima as seguintes considerações podem ser feitas:

Seja $c = \sup X$, logo $c > 0$. Não poderia ser $c^2 < 2$ porque isso obrigaria $c \in X$ e ainda seria o elemento máximo de $X$ que de (5) sabemos que não existe. Tampouco poderia ser $c^2 > 2$, porque isto faria $c \in Y$ e por conseguinte existiria um $k \in Y$, e teríamos $k < c$ e concluiríamos $a < k < c, \forall a \in X$. Portanto $c = \sup X$ implica $c^2 = 2$

■

5. Prove que o conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros é enumerável. Um número real chama-se *algébrico* quando é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. Prove que o conjunto dos números algébricos é enumerável. Um número real chama-se *transcendente* quando não é algébrico. Prove que existem números transcendentes.

6. Prove que um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo se, somente se, $a < x < b, a, b \in I \Rightarrow x \in I$.

   **Resolução:** Vamos provar que se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo então $a < x < b$ e se $a, b \in I$ então $x \in I$.

   $(\Rightarrow)$ Sejam $\alpha = \inf I$ e $\beta = \sup I$, convencionando que $\alpha = -\infty$ (respectivamente, $\beta = +\infty$), se $I$ for ilimitado inferiormente (respectivamente, superiormente) basta provar que $(\alpha, \beta) \subset I$

De fato, se $x \in (\alpha, \beta)$ então

$$\alpha < x < \beta$$

pois $\alpha$ e $\beta$ são ínfimo e supremo. Pela definição de sup e inf existem $a, b \in I$ tal que

$$\alpha < a < x < b < \beta$$

e portanto, $x \in I$.

$(\Rightarrow)$ Se $a < x < b$, onde $a, b \in I$ implica $x \in I$ temos por definição que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo.

$\blacksquare$

# 4 SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

Neste capítulo estudaremos o conceito de sequências e apresentaremos um dos conceitos mais importantes da análise matemática, em sua forma mais simples, o limite de uma sequência. A partir daqui, todos os conceitos importantes da Análise, de uma forma ou de outra, reduzir-se-ão a algum tipo de limite.

## 4.1 LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA

**Definição 4.1.** *Denominamos sequência de números reais a toda função*

$$\begin{array}{rccc} x & : & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & n & \mapsto & x(n) = x_n \end{array}$$

*que associa a cada número natural n um real $x_n$, chamado o n-ésimo termo da sequência.*

Escreve-se $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente $(x_n)$, para indicar a sequência $x$.

**Definição 4.2.** *Dizemos que uma sequência de números reais $(x_n)$ é limitada superiormente quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$x_n \leq c, \; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

**Definição 4.3.** *Dizemos que uma sequência de números reais $(x_n)$ é limitada inferiormente quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$x_n \geq c, \; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

**Definição 4.4.** *Dizemos que uma sequência de números reais $(x_n)$ é limitada se $(x_n)$ é limitada inferiormente e superiormente. Ou seja, existem números reais a, b tais que*

$$a \leq x_n \leq b, \; \forall\, n \in \mathbb{N},$$

*ou ainda, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|x_n| \leq k, \; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

**Exemplo 4.1.** *Se $a > 1$ então a sequência*

$$(a, a^2, a^3, \cdots, a^n)$$

*é limitada inferiormente mas não é limitada superiormente.*

**Definição 4.5.** *Seja $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Dado $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ com $\mathbb{N}'$ infinito, isto é, ilimitado, ou ainda, $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}'$ tal que $n_0 < n_k$ então a restrição da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ao conjunto $\mathbb{N}'$ é denominada uma subsequência da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Denota-se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.*

**Definição 4.6.** *Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite $a \in \mathbb{R}$ quando para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter um número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos $x_n$, com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - a| < \varepsilon$ e escreve*

$$\begin{array}{c} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ ou \\ x_n \to a \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que} \\ \text{se } n > n_0 \text{ então } |x_n - a| < \varepsilon \end{array}$$

Uma sequência que possui limite é convergente caso contrário diz-se divergente.

**Teorema 4.1** (Unicidade do Limite)**.** *O limite de uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é único.*

**Teorema 4.2.** *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $a$ então toda subsequência de $(x_n)$ também converge para $a$.*

**Observação 4.1.** *Temos pela contrapositiva do teorema (4.2) que se existe uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que não converge para $a$ então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para $a$, basta observar o exemplo (4.2).*

**Exemplo 4.2.** *A sequência $(2,0,2,0,2,0,\cdots)$ cujo n-ésimo termo é $x_n = 1 + (-1)^{n+1}$ é limitada mas não é convergente.*

A sequência $(2,0,2,0,2,0,\cdots)$ possui duas subsequências constantes $(2,2,2,\cdots)$ e $(0,0,0,\cdots)$ covergindo para 2 e 0 respectivamente pelo teorema (4.1) o limite é único, logo esta sequencia é divergente.

**Teorema 4.3.** *Toda sequência convergente é limitada.*

**Observação 4.2.** *Temos pela contrapositiva do teorema (4.3) que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente, basta observar o exemplo a seguir.*

**Exemplo 4.3.** *A sequência* $(1,2,3,\cdots)$ *com* $x_n = n$ *não é convergente.*

**Definição 4.7** (Sequência Monótona)**.** *Para todo* $n \in \mathbb{N}$,

**i)** *se* $x_n \leq x_{n+1}$ *dizemos que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é não-decrescente.*

**ii)** *se* $x_n \geq x_{n+1}$ *dizemos que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é não-crescente.*

**iii)** *se* $x_n < x_{n+1}$ *dizemos que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é crescente.*

**iv)** *se* $x_n > x_{n+1}$ *dizemos que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é decrescente.*

**Teorema 4.4.** *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

**Teorema 4.5** (Teorema de Bolzano Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

## 4.2 LIMITES E DESIGUALDADES

Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz uma propriedade $P$ para $n$ suficientemente grande quando existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $P$ se verifica $\forall\, n > n_0$.

**Teorema 4.6.** *Seja* $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. *Se* $b < a$ *então para* $n$ *suficientemente grande tem-se* $b < x_n$. *Analogamente, se* $a < b$ *então para todo* $n$ *suficientemente grande tem-se* $x_n < b$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

**Corolário 4.1.** *Seja* $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. *Se* $0 < a$ *então para* $n$ *suficientemente grande tem-se* $0 < x_n$. *Analogamente, se* $a < 0$ *então para todo* $n$ *suficientemente grande tem-se* $x_n < 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

**Corolário 4.2.** *Seja* $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *e* $b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. *Se* $x_n \leq y_n$ *para todo* $n$ *suficientemente grande então* $a \leq b$. *Em particular, se* $x_n \leq b$ *para* $n$ *suficientemente grande então* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq b$.

**Teorema 4.7** (Teorema do Sanduíche)**.** *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ *e* $x_n \leq z_n \leq y_n$ *para* $n$ *suficientemente grande, então* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

## 4.3 OPERAÇÕES COM LIMITES

**Teorema 4.8.** *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência limitada (convergente ou não) então*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$$

**Exemplo 4.4.** *A sequência* $\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para zero quando n tende a infinito.*

Considerando $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{n}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sin(n)$ segue que limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero quando $n$ tende ao infinito e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge mas como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, ou seja, $-1 \leq y_n \leq 1$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(n)}{n}\right) = 0$

**Teorema 4.9.** *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$*, então:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ *se* $b \neq 0$.

Define-se o número $e$ como sendo o limite da sequência $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e.$$

## 4.4 LIMITES INFINITOS

Entre as sequências divergentes, destacaremos um tipo que se comporta com certa regularidade, a saber, aquelas cujos valores se tornam e mantêm arbitrariamente grandes positivamente ou arbitrariamente grandes negativamente.

**Definição 4.8.** *Dizemos que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *se* $\forall\, A > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $x_n > A$.

**Exemplo 4.5.** $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$.

**Definição 4.9.** *Dizemos que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *se* $\forall\, A > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $x_n < -A$.

**Exemplo 4.6.** $\lim\limits_{n\to\infty} -3^n = -\infty$.

**Observação 4.3.**

1. $+\infty$ *e* $-\infty$ *não são números;*
2. *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ *as sequências* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não convergem;*
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -\infty$;
4. *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *então a sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não é limitada superiormente. A recíproca é falsa, ou seja, se a sequência não é limitada (é ilimitada) superiormente então não necessariamente* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = +\infty$*. Basta observar a sequência*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n + (-1)^n \cdot n)\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

5. *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é não-decrescente e* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é ilimitada superiormente temos que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$*. Como exemplo basta observar o exemplo (4.1).*

**Teorema 4.10.** 1. *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada inferiormente então*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty.$$

2. *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e existe* $c > 0$ *tal que* $y_n > c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = +\infty.$$

3. *Se* $x_n > c > 0,\ y_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ *então*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

4. *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada e* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *então*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = 0.$$

**Observação 4.4.** *As hipóteses feitas nas diversas partes do teorema anterior tem por objetivo evitar algumas das chamadas "expressões indeterminadas". Segue abaixo algumas indeterminações.*

1. $+\infty - \infty$;
2. $0 \cdot (+\infty)$;
3. $\dfrac{0}{0}$ *e* $\dfrac{\infty}{\infty}$;
4. $\infty^0$;
5. $1^\infty$;
6. $0^0$.

## 4.5 EXERCÍCIOS

### 4.5.1 Seção 1: Limite de uma Sequência

1. Uma sequência $(x_n)$ diz-se *periódica* quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_n + p = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que toda sequência periódica convergente é constante.

2. Dadas as sequências $(x_n)$ e $(y_n)$, defina $(z_n)$ pondo $z_{2n-1} = x_n$ e $z_{2n} = y_n$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$, prove que $\lim z_n = a$.

   **Resolução:** Considerando as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definimos $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como $(z_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(z_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (z_1, z_3, z_5, z_7, z_9, \cdots)$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (z_2, z_4, z_6, z_8, \cdots)$.

   Temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são subsequências de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vamos provar que se $\lim x_n$ = $\lim y_n = a$ então $\lim z_n = a$.

   Segue da definição de limite que dado $\varepsilon > 0$ existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow$ $|x_n - a| < \varepsilon$ e $n > n_2 \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon$.

   Considerando $n_0 = \text{máx } \{2n-1, 2n_2\}$, temos:

   - Se $n > n_0$, onde $n = 2k-1$ obtemos:

     $$\begin{array}{rrcl} & 2k-1 & > & n_0 \\ \Rightarrow & 2k-1 & > & 2n_1 - 1 \\ \Rightarrow & k & > & n_1. \end{array}$$

     Como $k > n_1$ temos que $|x_k - a| < \varepsilon$, ou seja,

     $$|z_n - a| = |z_{2k-1} - a| = |x_k - a| < \varepsilon$$

     Isto implica que $|z_n - a| < \varepsilon, \forall\, n = 2k-1$ tal que $k \in \mathbb{N}$.

   - Se $n > n_0$, onde $n = 2k$ obtemos:

     $$\begin{array}{rrcl} & 2k & > & n_0 \\ \Rightarrow & 2k & > & 2n_2 \\ \Rightarrow & k & > & n_2. \end{array}$$

     Como $k > n_2$ temos que $|y_k - a| < \varepsilon$, ou seja,

     $$|z_n - a| = |z_{2k} - a| = |y_k - a| < \varepsilon$$

     Isto implica que $|z_n - a| < \varepsilon, \forall\, n = 2k$ tal que $k \in \mathbb{N}$.

Portanto, se $n > n_0$ então $|z_n - a| < \varepsilon, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Concluímos que $\lim z_n = a$.

■

3. Se $\lim x_n = a$, prove que $\lim |x_n| = |a|$.

4. Se uma sequência monótona tem uma subsequência convergente, prove que a sequência é, ela própria, convergente.

   **Resolução:** Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona que possui uma subsequência $(x_{n_i})_{n_i\in\mathbb{N}}$ convergente. Vamos mostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

   Como $(x_{n_i})_{n_i\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência limitada da sequência monótona $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. De fato, considere sem perda de generalidade, $x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq x_{n_i} \leq \cdots \leq b$ uma subsequência da sequência não decrescente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Então para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe um $n_i > n$ e, portanto, $x_n \leq x_{n_i} \leq b$, isto é, $x_n \leq b$ para todo $n$.

   Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona e limitada, concluímos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

■

5. Um número $a$ chama-se valor de aderência da sequência $(x_n)$ quando é limite de uma subsequência de $(x_n)$. Para cada um dos conjuntos $A$, $B$ e $C$ abaixo, ache uma sequência que o tenha como conjunto dos seus valores de aderência. $A = \{1,2,3\}, B = \mathbb{N}, C = [0,1]$.

6. A fim de que o número real $a$ seja valor de aderência de $(x_n)$ é necessário e suficiente que, para todo o $\varepsilon > 0$ e todo $k \in \mathbb{N}$ dados, exista $n > k$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$.

   **Resolução:** Para que $a$ seja valor de aderência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a condição necessária é que $a = \lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k})$ sendo $(x_{n_k})$ uma susequência de $(x_n)$. Então para cada $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ implica $x_{n_k} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ como existe uma infinidade de índices $k > k_0$, segue que existem infinitos $n_k \in \mathbb{N}$ tais que $x_{n_k} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, ou ainda, $|x_n - a| < \varepsilon, \forall\, n_k > nk_0$.

   Reciprocamente suponhamos que para cada $\varepsilon > 0$ o conjunto $\{n \in \mathbb{N}, x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ seja infinito. Tomando sucessivamente $\varepsilon = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{k}, \cdots$ vamos obter um conjunto. $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ tal que $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Com efeito, seja $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} \in \mathbb{N}(a-1, a+1)$. Supondo por indução, que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. Podemos definir $x_{n_2} \in \mathbb{N}(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$, $x_{n_3} \in \mathbb{N}(a - \frac{1}{3}, a + \frac{1}{3})$, $\cdots$, $x_{n_k} \in \mathbb{N}(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k})$, observarmos que o conjunto $\left\{n \in \mathbb{N}, x_n \in \left(a - \dfrac{1}{k+1}, a + \dfrac{1}{k+1}\right)\right\}$ é infinito logo contém algum inteiro $n_{k+1}$, maior do que $n_1, n_2, \cdots, n_k$.

Isto completa a definição indutiva de $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$. Como $|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $\lim x_{n_k} = a$.

Concluímos assim que $a$ é valor de aderência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

■

7. A fim de que o número real $b$ não seja valor de aderência da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é necessário e suficiente que existam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ tais que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - b| \geq \varepsilon$.

### 4.5.2 Seção 2: Limites e desigualdades

1. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$ e $|x_n - y_n| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, prove que $|a - b| \geq \varepsilon$.

   **Resolução:** Seja $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ e $|x_n - y_n| \geq \varepsilon$. Temos que $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{4}$ e $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{4}$, daí:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \leq \quad |x_n - y_n| \quad &= \quad |x_n - a + a - b + b - y_n| \\
&\leq \quad |x_n - a| + |a - b| + |b - y_n| \\
&\leq \quad |x_n - a| + |a - b| + |y_n - b| \\
&< \quad \frac{\varepsilon}{4} + |a - b| + \frac{\varepsilon}{4} \\
&= \quad \frac{\varepsilon}{2} + |a - b|
\end{aligned}
$$

   então,

$$\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + |a + b|.$$

   Portanto,

$$\frac{\varepsilon}{2} < |a - b|$$

■

2. Sejam $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$. Se $a < b$, prove que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Longrightarrow x_n < y_n$.

3. Se o número real $a$ não é o limite da sequência limitada $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$, prove que alguma subsequência de $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ converge para um limite $b \neq a$.

   **Resolução:** Seja $(x_n)$ uma sequência limitada e $\lim x_n \neq a$. Logo existe $\varepsilon > 0, \forall\, n_0 \in \mathbb{N}'$ onde $\mathbb{N}'$ é um conjunto infinito de valores de $\mathbb{N}$, sendo $n > n_0$ temos:

$$|x_n - a| \geq \varepsilon \tag{1}$$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada sabemos pelo Teorema de Bolzano Weierstrass que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, ou seja, existe $b = \lim(x_n)_{n\in\mathbb{N}''}$ onde $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$ é infinito tal que, $\forall\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}'$ e $n > n_0$ de maneira que:

$$|x_n - b| < \varepsilon \tag{2}$$

De (1) e (2)

$$\varepsilon \leq |x_n - a| = |x_n - b + b - a| \leq |x_n - b| + |b - a| < \varepsilon + |b - a|$$

e ainda

$$\varepsilon < \varepsilon + |b - a| \Rightarrow |b - a| > 0 \Rightarrow b \neq a$$

■

4. Prove que uma sequência limitada converge se, e somente se, possui um único valor de aderência.

5. Quais são os valores de aderência da subsequência $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ tal que $x_{2n-1} = n$ e $x_{2n} = \dfrac{1}{n}$? Esta sequência converge?

**Resolução:** Dada a sequencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{2n-1} = n$ e $x_{2n} = \frac{1}{n}$, tem-se

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \cdots)$$

.

Esta sequência possui valor de aderência. Com efeito, dado as subsequências $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ temos:

- $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, 4, \cdots)$, que é uma sequência ilimitada.
- $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots\right)$, que converge para 0, ou seja, $\lim(x_{2n}) = 0$.

Portanto, a sequência $(x_n)$ possui 0 como o único valor de aderência. Porém $(x_n)$ não é convergente pois é ilimitada.

■

6. Dados, $a, b \in \mathbb{R}^+$, defina indutivamente as sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pondo $x_1 = \sqrt{ab}$, $y_1 = \dfrac{(a+b)}{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{(x_n y_n)}{2}$. Prove que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem para o mesmo limite.

7. Diz-se que $(x_n)$ é uma *sequência de Cauchy* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$.

(a) Prove que toda sequência de Cauchy é limitada.

**Resolução:** Seja $(x_n)$ uma sequência de Cauchy. Tomando $\varepsilon = 1$ obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < 1$. Em particular $n > n_0 \Rightarrow |x_{n_0} - x_n| < 1$, ou seja, se $n > n_0$ então $x_n \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$.

Considerando $\alpha$ o menor e $\beta$ maior elemento do conjunto $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0-1}\}$. Então $x_n \in [\alpha, \beta]$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

∎

(b) Prove que a sequência de Cauchy não pode ter dois valores de aderência distintos.

**Resolução:** Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy. Vamos mostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não possui dois valores de aderência a saber $a$ e $b$, distintos $(a \neq b)$.

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy temos de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, logo possui uma subsequência convergente. Suponhamos por absurdo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui dois valores de aderência distintos ou seja existem duas subsequência $(x_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ e $(x_{n_j})_{n_j\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \to a$ e $x_{n_j} \to b$, onde $a \neq b$.

Sabendo que $x_{n_k} \to a$ e sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy, temos que $x_n \to a$. Da mesma forma, como $x_{n_j} \to b$, temos que $x_n \to b$, com $a \neq b$. O que é um absurdo pela unicidade do limite.

Concluímos que $a = b$.

∎

(c) Prove que uma sequência $(x_n)$ é convergente se, e somente se é de Cauchy.

**Resolução:** Para mostrarmos que toda sequência convergente de números reais é de Cauchy, consideremos $\lim x_n = a$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, se $m > n_0$ então $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e se $n > n_0$ então $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como $m,n > n_0$ então $|x_m - x_n| = |x_m - a + a - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, o que mostra que $x_n$ é uma sequência de Cauchy.

Para mostrarmos que toda sequência de Cauchy é convergente, sabemos do item (a) que toda sequência de Cauchy é limitada e ainda que toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência $(x_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ convergente, ou seja, $x_{n_k} \to a$. Concluímos assim que $x_n \to a$.

$\blacksquare$

### 4.5.3 Seção 3: Operações com Limites

1. Prove que, para todo $p \in \mathbb{N}$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+p]{n} = 1$.

2. Se existem $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $\varepsilon \leq x_n \leq n^k$ para todo $n$ suficientemente grande, prove que $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$. Use este fato para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+k}$, $\lim \sqrt[n]{n+\sqrt{n}}$, $\lim \sqrt[n]{\log n}$ e $\lim \sqrt[n]{n\log n}$.

   **Resolução:** Dado $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $\varepsilon \leq x_n \leq n^k$ temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada ou seja $0 \leq x_n \leq n^k$ queremos provar que $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$. É certo que $x_n$ é convergente, visto que $x_n$ é uma sequência monótona e limitada, logo podemos escrever $\lim\limits_{k\to\infty} x_n^{1/n} = a$. Podemos garantir que $a > 0$. De fato.

   - se $x_n \geq 1$ então $a = sup\left\{x_n^{1/n}; n \in \mathbb{N}\right\} \geq x_n$
   - se $0 \leq x_n \leq 1$ então $a = inf\left\{x_n^{1/n}, n \in \mathbb{N}\right\} \geq 1$.

   Consideremos a subsequência $x_n^{1/n(n+1)} = \left(x_1^{1/2}, x_2^{1/6}, x_3^{1/12}, x_4^{1/20}, \cdots\right)$, basta mostrar que $\lim\limits_{k\to\infty} x_n^{1/n(n+1)} = 1$, pois pelo Teorema (4.2) se uma sequência converge para $a$ então toda subsequência também converge para $a$, ou seja:

$$a = \lim_{k\to\infty} x_n^{1/n(n+1)} = \lim_{k\to\infty} x_n^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_n^{1/n}}{x_n^{1/n+1}} = \frac{a}{a} = 1$$

   Para calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+k}$. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = n+k$ temos para $n$ suficientemente grande

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = n+k < n\cdot k < \underbrace{n\cdot n\cdot\ \cdots\ \cdot n}_{k} \leq n^k,$$

   logo

$$0 \leq x_n \leq n^k$$

   Portanto

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+k} = 1.$$

   Calculando do mesmo modo $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+\sqrt{n}}$. Seja $x_n = n+\sqrt{n}$ temos $\forall\, n \in \mathbb{N}$ que

$$x_n = n+\sqrt{n} < n+n \leq n^2.$$

   Logo

$$\varepsilon \leq x_n \leq n^2,$$

onde $k = 2$.

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+\sqrt{n}} = 1.$$

Do mesmo modo calculando $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log n}$, seja

$$\varepsilon \leq x_n = \log n < n^1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ e $k = 1$. Temos $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log n} = 1$.

Seja

$$\varepsilon \leq x_n = n \cdot \log n < n \cdot n = n^2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ e $k = 2$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot \sqrt{\log n}} = 1.$$

■

3. Dado $a > 0$, defina indutivamente a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pondo $x_1 = \sqrt{a}$ e $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$. Prove que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e calcule seu limite

$$L = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots}}}$$

4. Seja $e_n = (x_n - \sqrt{a}/\sqrt{a})$ o *erro relativo* na $n$-ésima etapa do cálculo de $\sqrt{a}$. Prove que $e_{n+1} = {e_n}^2/2(1+e_n)$. Conclua que $e_n \leq 0,01 \Rightarrow e_{n+1} \leq 0,00005 \Rightarrow e_{n+2} \leq 0,00000000125$ e observe a rapidez de convergência do método.

   **Resolução:** Seja

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{\frac{x_n^2 + a}{2x_n} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{\frac{x_n^2 + 2x_n\sqrt{a}}{2x_n} + a}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{array}{rrcl} & e_n & = & \frac{x_n-\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \\ \Rightarrow & \sqrt{a}e_n & = & x_n-\sqrt{a} \\ \Rightarrow & x_n & = & \sqrt{a}+\sqrt{a}e_n \\ \Rightarrow & x_n\sqrt{a} & = & a+ae_n \\ \Rightarrow & x_n\sqrt{a} & = & a(1+e_n) \end{array}$$

Do resultado obtido em $e_n$ e $e_{n+1}$ temos

$$\begin{array}{rcl} e_{n+1} & = & \dfrac{(x_n-\sqrt{a})^2}{2a(1+e_n)} \\ & = & \dfrac{(x_n-\sqrt{a})^2}{(\sqrt{a})^2}\cdot\dfrac{1}{2(1+e_n)} \\ & = & \left(\dfrac{x_n-\sqrt{a}}{\sqrt{a}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2(1+e_n)} \\ & = & (e_n)^2\cdot\dfrac{1}{2(1+e_n)} \\ & = & \dfrac{e_n^2}{2(1+e_n)} \end{array}$$

Portanto $e_{n+1}=\dfrac{e_n^2}{2(1+e_n)}$.

Para concluirmos que $e_n\leq 0,01\Rightarrow e_{n+1}\leq 0,00005$ temos:

$$\begin{array}{rccc} & e_n & \leq & 0,01 \\ \Rightarrow & e_n^2 & \leq & (0,01)^2 \\ \Rightarrow & \dfrac{e_n^2}{2} & \leq & \dfrac{0,0001}{2} \\ \Rightarrow & \dfrac{e_n^2}{2(1+e_n)} & \leq & \dfrac{0,00005}{(1+e_n)} \\ \Rightarrow & e_{n+1} & \leq & 0,00005. \end{array}$$

Do mesmo modo $e_{n+1}\leq 0,00005\Rightarrow e_{n+2}\leq 0,0000000125$

$$
\begin{aligned}
& e_{n+1} && \leq 0,00005 \\
\Rightarrow\quad & e^2_{n+1} && \leq (\frac{5}{10^5})^2 \\
\Rightarrow\quad & e^2_{n+1} && \leq \frac{25}{10^{10}} \\
\Rightarrow\quad & \frac{e^2_{n+1}}{2} && \leq \frac{0,0000000025}{2} \\
\Rightarrow\quad & \frac{e^2_{n+1}}{2} && \leq 0,00000000125 \\
\Rightarrow\quad & \frac{e^2_{n+1}}{2(1+e_n)} && \leq \frac{0,00000000125}{(1+e_n)} \leq 0,00000000125 \\
& e_{n+2} && \leq 0,00000000125
\end{aligned}
$$

5. Dado $a > 0$, defina indutivamente a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pondo $x_1/a$ e $x_{n+1} = 1/(a+x_n)$. Considere o número $c$, raiz positiva da equação $x^2+ax-1=0$, o único número positivo tal que $c = 1/(a+c)$. Prove que

$$x_2 < x_4 < \ldots < x_{2n} < \ldots < c < \ldots < x_{2n-1} < \ldots < x_3 < x_1,$$

e que $\lim x_n = c$. O número $c$ pode ser considerado como a soma da *fração contínua*

$$\frac{1}{a+\frac{1}{a+\frac{1}{a+\frac{1}{a+\ldots}}}}$$

6. Dado $a > 0$, defina indutivamente a sequência $(y_n)$, pondo $y_1 = a$ e $y_{n+1} = a+1/y_n$. Mostre que $\lim y_n = a+c$, onde $c$ é como no exercício anterior.

**Resolução:** Seja $(y_n)$ uma sequência crescente tal que

$$(y_n) = (a, a+\frac{1}{y_1}, a+\frac{1}{y_2}, a+\frac{1}{y_3}, \cdots, a+\frac{1}{y_{n-1}}, a+\frac{1}{y_n}, \cdots).$$

Temos que $y_1 = a, y_2 = a+\frac{1}{y_1}, y_3 = a+\frac{1}{y_2}, \cdots, y_{n+1} = a+\frac{1}{y_n}$.

Podemos escrever

$$y_n = a+\frac{1}{y_{n-1}} = a+\frac{1}{a+\frac{1}{y_{n-2}}} = a+\frac{1}{a+\frac{1}{a+\frac{1}{y_{n-3}\cdots}}}$$

Sabemos do exercício anterior que o número $c$ é a soma da fração contínua $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{a+\ldots}}}$

e também que a sequência $(x_n)$ definida por $x_n = \frac{1}{a+x_{n-1}}$ converge para $c$.

Portanto,

$$y_n = a + x_n,$$

daí tomando o limite de ambos os membros

$$\begin{aligned}\lim y_n &= \lim(a + x_n)\\ &= \lim a + \lim x_n\\ &= a + c,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

7. Defina a sequência $(a_n)$ indutivamente, pondo $a_1 = a_2 = 1$ e $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escreva $x_n = a_n/a_{n+1}$ e prove que $\lim x_n = c$, onde $c$ é único número positivo tal que $1/(c+1) = c$. O termo $a_n$ chama-se o $n$-ésimo número de Fibonacci e $c = (-1+\sqrt{5})/2$ é o *número de ouro* da Geometria Clássica.

### 4.5.4 Seção 4: Limites Infinitos

1. Prove que $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

   **Resolução:** Sabemos da definição de limites infinitos que dado $A > 0$ arbitrário existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n > A$.

   Suponhamos por absurdo que a sequência $(\sqrt[n]{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ seja limitada superiormente, ou seja, que $(n!)^{\frac{1}{n}} < A$ para $A$ suficientemente grande. Portanto, $n! < A^n$. Absurdo! Visto que o crescimento fatorial supera o crescimento exponencial com base constante.

   Portanto,

$$n > n_0 \Rightarrow n! > A^n \Rightarrow \sqrt[n]{n!} > A,$$

   concluímos que $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

■

2. Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ e $a \in \mathbb{R}$, prove: $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{\log(x_n + a)} - \sqrt{\log x n}\right] = 0$

3. Dado $k \in \mathbb{N}$ e $a > 0$, determine o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^k \cdot a^n}.$$

Supondo $a > 0$ e $a \neq e$ calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n} \;\; e \;\; \lim_{n\to\infty} \frac{n^k \cdot a^n \cdot n!}{n^n}.$$

(Para o caso $a = e$, ver exercício 9, seção 1, capítulo 11.)

**Resolução:** Consideremos $t_n = \dfrac{n!}{n^k \cdot a^n}$ e $t_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^k \cdot a^{n+1}}$, com $k \in \mathbb{N}$ e $a > 0$, fazendo $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$, obtemos:

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^k \cdot a^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^k \cdot a^n}} = \frac{(n+1)\cdot n! \cdot n^k \cdot a^n}{(n+1)^k a^n \cdot a \cdot n} \div n^n n^k = \frac{n+1}{(1+\frac{1}{n})^k \cdot a}.$$

Então $\lim \dfrac{t_{n+1}}{t_n} = +\infty$.

Supondo $a > 0$ e $a \neq e$ vamos calcular $\lim \dfrac{a^n \cdot n!}{n^n}$ e $\lim \dfrac{n^k \cdot a^n \cdot n!}{n^n}$ do mesmo modo tomando $x_n = \dfrac{a^n \cdot n!}{n^n}$, $x_{n+1} = \dfrac{a^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ e $y_n = \dfrac{n^k \cdot a^n \cdot n!}{n^n}$, $y_{n+1} = \dfrac{(n+1)^k \cdot a^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ segue que:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{a^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{a^n \cdot n!}{n^n}} = \frac{a^n \cdot a(n+1) \cdot n! \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot a^n \cdot n!} = \frac{a \cdot n^n}{(n+1)^n} = \frac{a}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n},$$

então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\lim(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{e}$.

Se $a < e$ então $\dfrac{a}{e} < 1$, o que implica pelo exemplo 8 que

$$\lim \frac{a^n \cdot n!}{n^n} = \lim x_n = 0 \;\; (a < e).$$

Se $a > e$ então $\dfrac{a}{e} > 1$. Daí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{e} > 1$$

o que implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \;\; (a > e).$$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^k \cdot a^n \cdot a^1 \cdot (n+1)n!}{(n+1)^n (n+1)}}{\dfrac{n^k \cdot a^n \cdot n!}{n^n}} = \frac{(n+1)^k a^n a^1 (n+1) n! n^n}{(n+1)^n (n+1) n^k a^n n!} = \frac{(n+1)^k a n^n}{(n+1)^n n^k} \div n^n n^k =$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}},$$

então $\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{a}{e}$.

De maneira análoga, se $a<e$ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k a^n n!}{n^n}=a$ e se $a>e$ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k a^n!}{n^n}=+\infty$.

4. Mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\log(n+1)/\log n=1$.

5. Sejam $(x_n)$ uma sequência arbitrária e $(y_n)$ uma sequência crescente, com $\lim y_n=+\infty$. Supondo que $\lim(x_{n+1}-x_n)/(y_{n+1}-y_n)=a$, prove que $\lim x_n/y_n=a$. Conclua que se $\lim(x_{n+1}-x_n)=a$ então $\lim x_n/n=a$. Em particular, de $\lim\log(1+1/n)=0$, conclua que $\lim(\log n)/n=0$.

   **Resolução:** Vamos mostrar que $\lim\frac{x_n}{y_n}=a$, onde $x_n$ é uma sequência arbitrária e $y_n$ uma sequência crescente com $\lim y_n=+\infty$. Considerando $x_{n+1}-x_n=X_n$ e $y_{n+1}-y_n=Y_n$ temos por hipótese que $\lim\frac{X_n}{Y_n}=a$. Dado $\varepsilon>0$, existe $p\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{X_p}{Y_p},\frac{X_{p+1}}{Y_{p+1},\cdots,Y_{p+k}}\in$ $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ e ainda pelo exercício 2.8 $\frac{X_p+X_{p+1}+\cdots+X_{p+k}}{Y_p+Y_{p+1}+\cdots+Y_{p+k}}\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, ou ainda, $\frac{X_p+X_{p+1}+\cdots+X_{p+k}}{Y_p+Y_{p+1}+\cdots+Y_{p+k}}=\frac{x_{p+1}-x_p+x_{p+2}-x_{p+1}+x_{p+3}-x_{p+2}+\cdots+x_{p+k+1}-x_{p+k}}{y_{p+k+1}-y_p}\in$ $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, logo, $\frac{x_{p+k+1}-x_p}{y_{p+k+1}-y_p}\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, para $p$ fixo e todo $k\in\mathbb{N}$. Portanto, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{X_k}{Y_k}=a$.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{p+k+1}-x_k}{y_{p+k+1}-y_p}=a\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{x_{p+k+1}-x_p}{y_{p+k+1}}}{\dfrac{y_{p+k+1}-y_p}{y_{p+k+1}}}=a\Rightarrow\frac{\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_{k+p+1}}{y_{k+p+1}}-\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_p}{y_{k+p+1}}}{\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{y_{k+p+1}}{y_{k+p+1}}-\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{y_p}{y_{k+p+1}}}=a$$

   pois $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_p}{y_{k+p+1}}=0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{y_p}{y_{k+p+1}}=0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{y_{k+p+1}}{y_{k+p+1}}=\lim\limits_{k\to\infty}1=1$ e $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_{k+p+1}}{y_{k+p+1}}=a\Rightarrow$ $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$.

6. Se $\lim x_n=a$ e $(t_n)$ é uma sequência de números positivos com

$$\lim(t_1+\ldots+t_n)=+\infty,$$

   prove que

$$\lim\frac{t_1x_1+\ldots+t_nx_n}{t_1+\ldots+t_n}=a.$$

   Em particular, se $y_n=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$, tem-se ainda $\lim y_n=a$.

# 5 SÉRIES NUMÉRICAS

## 5.1 SÉRIES CONVERGENTES

Neste capítulo estudaremos séries, uma extensão do conceito de sequências, de forma suscinta uma série é a soma dos termos de uma sequência. E ainda examinaremos a diferença entre séries convergentes, séries divergentes e métodos para tais distinções.

Voltando às séries infinitas, o que significa "soma infinita"? Como somar um número após outro, após outro, e assim por diante, indefinidamente? Num primeiro contato com séries infinitas, particularmente séries de termos positivos, a idéia ingênua e não crítica de soma infinita não costuma perturbar o estudante. Porém, encarar somas infinitas nos mesmos termos das somas finitas acaba levando a dificuldades sérias, ou mesmo, a conclusões irreconciliáveis, como bem ilustra um exemplo simples, dado pela chamada "série de Grandi".

$$S = 1-1+1-1+1-1+\cdots$$

Esta série tanto parece ser igual a zero como igual a 1, dependendo de como a encaramos. Veja:

$$S = 1-1+1-1+1-1+\cdots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0.$$

Mas podemos também escrever:

$$S = 1-1+1-1+1-1+\cdots = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots = 1.$$

E veja o que ainda podemos fazer:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad S &= 1-1+1-1+1-1+\cdots \\
\Rightarrow \quad S &= 1-(1-1+1-1+1+\cdots) \\
\Rightarrow \quad S &= 1-S \\
\Rightarrow \quad 2S &= 1 \\
\Rightarrow \quad S &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Como decidir então? Afinal, $S$ é zero, 1 ou $1/2$?

Para encontrar uma saída para dificuldades como essa que vimos com a série de Grandi, temos que examinar detidamente o conceito de adição. Somar números, sucessivamente, uns após outros, é uma ideia concebida para uma quantidade finita de números a somar. Ao aplicá-la a somas infinitas, por mais que somemos, sempre haverá parcelas a somar; portanto, o processo de somas sucessivas não termina, em consequência, não serve para definir a soma de uma infinidade de números.

**Definição 5.1.** *Dada uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais, denomina-se série a soma infinita*

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

*Indicaremos a série por $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, ou seja,*

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Como algebricamente só tem sentido somas finitas, é necessário definir "soma infinita".

**Definição 5.2.** *Dada uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, denomina-se sequência de somas parciais da série dada à sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por*

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

**Definição 5.3.** *Dizemos que uma série converge se a sequência de somas parciais converge, isto é, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=s$, $s\in\mathbb{R}$. Neste caso*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n=s=\lim_{n\to+\infty} s_n$$

**Teorema 5.1.** *Se $|a|<1$. A série geométrica*

$$1+a^1+a^2+\cdots+a^n+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$$

*converge.*

**Observação 5.1.** *1. Suponha que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de termos não negativos*

$(a_n \geq 0, \forall\, n \in \mathbb{N})$. *Assim, a sequência das somas parciais da série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{n=1}^{n} a_k$$

*é não decrescente, pois*

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n \leq a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_{n+1}$$

*então*

$$s_n \leq s_{n+1}$$

*Para que* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convirja basta que* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seja limitada superiormente (Toda sequência monótona e limitada é convergente).*

2. *Se* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *está nas mesmas condições do ítem anterior e se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge e* $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma subsequência de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n$ *converge.*

**Exemplo 5.1** (A Série Harmônica)**.** *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *diverge.*

De fato se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = s$ fosse convergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} = t$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} = u$ também seriam convergentes. Além disso, como $S_{2n} = t_n + u_n$, fazendo $n \to \infty$ teríamos $s = t + u$. Mas $t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \frac{s}{2}$, portanto $u = t = \frac{s}{2}$. Por outro lado $u - t = \lim_{n\to\infty}(u_n - t_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\cdots+\left(\frac{1}{(2n-1)2n}\right)\right) > 0$,

logo $u > t$ contradição. Portanto $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

**Teorema 5.2.** *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge então* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Consideremos $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ pela definição de séries disto segue que $s = \lim s_n$, logo $s = \lim s_{n-1}$ pois todas as somas parciais convergem para o mesmo limite, logo $0 = s - s = \lim s_n - \lim s_{n-1} = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim a_n$

∎

**Observação 5.2.** *1. A contrapositiva do teorema (5.2) diz que: Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ *então a* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

*2. Não vale a recíproca do teorema (5.2): Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *então nada podemos dizer a respeito da convergência da série.*

**Teorema 5.3** (Critério de Comparação)**.** *Sejam* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *séries de termos não negativos. Suponha que existam* $c > 0$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tais que* $a_n \leq c \cdot b_n$, $\forall\, n \geq n_0$*. Logo*

1. *Se* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge então* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*

2. *Se* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge então* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverge.*

**Teorema 5.4.** *A série hiper-harmônica* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ *diverge se* $p \leq 1$ *e converge se* $p > 1$.

i) Se $p = 1$. Temos a série harmônica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ que diverge.

ii) Se $p < 1$. Temos

$$n^p \leq n \Rightarrow \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n},\ \ \forall\ p < 1 \text{e}\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Como $a \cdot \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge temos pelo teste de comparação que $a \cdot \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge para $p < 1$

iii) Se $p > 1$.

Seja

$$\begin{aligned}
a \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p} + \cdots \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{10^p} + \cdots + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{15^p}\right) + \left(\frac{1}{16^p} + \cdots\right.
\end{aligned}$$

Observe que

$$3^p > 2^p \Rightarrow \frac{1}{3^p} < \frac{1}{2^p}$$

$$\begin{aligned}
&= 1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{9^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)+\frac{1}{16^p}+\cdots\\
&< 1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)+\frac{1}{16^p}+\cdots\\
&= 1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\frac{8}{8^p}+\frac{16}{16^p}+\cdots\\
&= 1+\frac{1}{2^p2^{-1}}+\frac{1}{4^p4^{-1}}+\frac{1}{8^p8^{-1}}+\frac{1}{16^p16^{-1}}+\cdots\\
&= 1+\frac{1}{2^p2^{-1}}+\frac{1}{2^{2p}2^{-2}}+\frac{1}{2^{3p}2^{-3}}+\frac{1}{2^{4p}2^{-4}}+\cdots\\
&= 1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^4+\cdots\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n-1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p} < \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Como $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n-1}$converge pois é a série geométrica com $|a| = \left|\frac{1}{2^{p-1}}\right| < 1$ temos pelo teste de comparação que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ converge.

## 5.2 SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES

**Definição 5.4.** *Uma série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diz-se absolutamente convergente quando* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ *converge.*

**Observação 5.3.** 1. *Quando* $-1 < a < 1$ *a série geométrica* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a^n$ *é absolutamente convergente.*

2. *Uma série convergente cujos termos não mudam de sinal é absolutamente convergente.*

**Teorema 5.5** (Leibniz)**.** *Se* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência monótona decrescente que tende para zero então* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *é uma série convergente.*

**Exemplo 5.2.** *A série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *converge.*

Converge pois a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ com $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{n}, \cdots\right)$ então podemos escrever $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}(a_n)$ onde $(a_n)$ é uma sequência monótona decrescente que tende a zero, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, portanto pelo Teorema de Leibniz $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

Note que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge mas $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|$ diverge, pois $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é a série harmônica. Então esta série é condicionalmente convergente dizemos isto quando $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)$ converge mas $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ é divergente.

**Definição 5.5.** *Uma série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverge chama-se condicionalmente convergente.*

**Observação 5.4.** *A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ é condicionalmente convergente.*

**Teorema 5.6.** *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

## 5.3 TESTES DE CONVERGÊNCIA

**Teorema 5.7.** *Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ uma série absolutamente convergente, com $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se a sequência $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ for limitada (em particular, se for convergente) então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ será absolutamente convergente.*

**Corolário 5.1** (Teste de d'Alembert)**.** *Seja $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se existir uma constante c tal que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq c < 1$ para todo n suficientemente grande então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ será absolutamente convergente.*

**Corolário 5.2.** *[Teste de d'Alembert ou Teste da Razão] Se $a_n \neq 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ e suponha que exista o limite*

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

1. *Se $L < 1$ a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge absolutamente;*

2. *Se $L > 1$ a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge;*

3. *Se $L = 1$ nada podemos afirmar.*

**Exemplo 5.3.** *Verifique se as séries*

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ 2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^k}{a^n},\ a > 1$

*são convergentes usando o teste da razão.*

**Resolução:**

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ $\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{a^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{n!a^na^1}{(n+1)n!a^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a}{n+1}\right| =$
   $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{|a|}{|n+1|} = 0 < 1.$

   Portanto $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ converge.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ $\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{(n+1)n!}{(n+1)^n(n+1)}\cdot\dfrac{n^n}{n!}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{n^n}{(n+1)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} =$
   $\dfrac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{e} < 1.$

   Portanto $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ converge.

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^k}{a^n},\ a > 1$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}\cdot\dfrac{a^n}{n^k}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^k}{a^n\cdot a^1}\cdot\frac{a^n}{n^k}\right| = \frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^k}{n^k}\right| = \\ &= \frac{1}{a}\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{a}\cdot 1 = \frac{1}{a},\end{aligned}$$

como $a > 1 = \dfrac{1}{a} < 1$

Portanto $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^k}{a^n}$, $a > 1$ é convergente.

**Teorema 5.8** (Teste de Cauchy)**.** *Se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$ para todo $n$ suficientemente grande então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ será absolutamente convergente.*

**Corolário 5.3** (Teste de Cauchy ou Teste da Raiz)**.** *Suponha que*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L$$

1. *Se $L < 1$ a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente;*

2. *Se $L > 1$ então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente;*

*3. Se $L = 1$ nada podemos afirmar.*

**Exemplo 5.4.** *A série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\log n}{n}\right)^n$ *é convergente.*

Seja $a_n = \left(\dfrac{\log n}{n}\right)^n$ aplicando o teste da raiz temos

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{logn}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0 < 1.$$

Portanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\log n}{n}\right)^n$ converge.

**Teorema 5.9.** *Seja $a_n \neq 0$. Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ então $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L$*

## 5.4 EXERCÍCIOS

### 5.4.1 Seção 1: Séries Convergentes

1. Dadas as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, com $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ e $b_n = \log(1 + \frac{1}{n})$ mostre que $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Calcule explicitamente as n-ésimas reduzidas $s_n$ e $t_n$ destas séries e mostre que $\lim s_n = \lim t_n = +\infty$ logo as séries dadas são divergentes.

   **Resolução:** Seja $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ e $b_n = \log(1 + \frac{1}{n})$.

   Fazendo

$$\begin{aligned}
\lim a_n &= \lim_{n\to+\infty}\left[(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \\
&= \lim \tfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim a_n &= \lim_{n\to+\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left[\lim_{n\to+\infty}1+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right] = \log\left[\lim_{n\to+\infty}1+0\right] = \\
&= \lim_{n\to+\infty}\log 1 = \lim_{n\to+\infty}0 = 0
\end{aligned}$$

   Calculando as n-ésimas reduzidas $s_n$ e $t_n$ das séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ respectivamente temos:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 = \sqrt{1+1}-\sqrt{1} = \sqrt{2}-\sqrt{1} \\
s_2 &= a_1+a_2 = s_1+a_2 = \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{2+1}-\sqrt{2} = \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2} = \\
&= \sqrt{3}-\sqrt{1} \\
s_3 &= a_1+a_2+a_3 = s_2+a_3 = \sqrt{3}-\sqrt{1}+\sqrt{3+1}-\sqrt{3} = \sqrt{3}-\sqrt{1}+\sqrt{4}-\sqrt{3} = \\
&= \sqrt{4}-\sqrt{1} \\
s_4 &= a_1+a_2+a_3+a_4 = s_3+a_4 = \sqrt{4}-\sqrt{1}+\sqrt{4+1}-\sqrt{4} = \sqrt{3}-\sqrt{1}+\sqrt{5}-\sqrt{3} = \\
&= \sqrt{5}-\sqrt{1} \\
&\vdots \\
s_n &= a_1+a_2+\cdots a_n = s_{n-1}+a_n = \sqrt{n-1+1}-\sqrt{1}+\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n}-\sqrt{1} \\
&+ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
t_1 &= a_1 = \log\left(1+\frac{1}{1}\right) = \log 2\\
t_2 &= a_1+a_2 = t_1+a_2 = \log\left(1+\frac{1}{2}\right) = \log 2+\log\frac{3}{2} = \log 2\cdot\frac{3}{2} = \log 3\\
t_3 &= a_1+a_2+a_3 = t_2+a_3 = \log\left(1+\frac{1}{3}\right) = \log 3+\log\frac{4}{3} = \log 3\cdot\frac{4}{3} = \log 4\\
t_4 &= a_1+a_2+a_3+a_4 = t_3+a_4 = \log\left(1+\frac{1}{4}\right) = \log 4+\log\frac{5}{4} = \log 4\cdot\frac{5}{4} = \log 5\\
&\vdots\\
t_n &= a_1+a_2+\cdots a_n = t_{n-1}+a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log n+\log\frac{n+1}{n} =\\
&= \log n\cdot\left(\tfrac{n+1}{n}\right) = \log n+1
\end{aligned}
$$

Aplicando limite em $s_n$ e $t_n$ obtemos:

$$
\begin{aligned}
\lim s_n &= \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{1} = +\infty\\
\lim t_n &= \lim_{n\to+\infty}\log n+1 = \log(\lim_{n\to+\infty} n+1) = \log(\lim_{n\to+\infty} n+\lim_{n\to+\infty} 1) =\\
&= \log(+\infty+0) = \log+\infty = +\infty.
\end{aligned}
$$

Portanto $s_n$ e $t_n$ são divergentes.

■

2. Use o critério de comparação para provar que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ é convergente, a partir da convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+1)}$.

3. Seja $s_n$ a $n$-ésima reduzida da série harmônica. Prove que para $n=2^m$ tem-se $s_n > 1+\frac{m}{2}$ e conclua daí que a série harmônica é divergente.

**Resolução:** Seja a série harmônica $\sum a_n$ onde seu termo geral $a_n=\frac{1}{n}$, tomando $n=2^m$ temos,

$$
\begin{aligned}
S_{2^m} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\\
&> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{2^{n-1}}{2^n}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{2^n}\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2} = 1+\frac{m}{2}.
\end{aligned}
$$

Segue que $\lim S_{2^m} = +\infty$ e como $S_{2^m}$ é uma reduzida da série harmônica $\lim s_n = +\infty$ logo a série harmônica é divergente.

∎

4. Mostre que a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverge.

5. Mostre que se $r > 1$ a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^r}$ converge.

   **Resolução:** Seja $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^r}$ com $r > 1$ tomando a soma parcial $s_m$ com $m = 2^n - 1$ temos

$$\begin{aligned} s_m &= \left(\frac{1}{2(\log 2)^r} + \frac{1}{3(\log 3)^r}\right) + \left(\frac{1}{4(\log 4)^r} + \frac{1}{5(\log 5)^r} + \frac{1}{6(\log 6)^r} + \frac{1}{7(\log 7)^r}\right) + \cdots \\ &+ \frac{1}{2^n - 1(\log 2^n - 1)^r} \leq \frac{2}{2(\log 2)^r} + \frac{4}{4(\log 4)^r} + \frac{8}{8(\log 8)^r} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}(\log 2^{n-1})^r} \\ &= \frac{1}{(\log 2)^r} + \frac{1}{2^r(\log 2)^r} + \frac{1}{3^r(\log 2)^r} + \cdots + \frac{1}{k^r(\log 2)^r} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r(log 2)^r} = z_n. \end{aligned}$$

   Como $\frac{1}{k^r(log 2)^r} \leq \frac{1}{k^r}$ como $\frac{1}{k^r}$ converge pelo critério da comparação temos que $z_n$ converge, ou seja, $s_m \leq z_n$, significa que $s_m$ converge.

6. Prove que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2}$ converge.

### 5.4.2 Seção 2: Séries absolutamente convergentes

1. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente e $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente para todo $x \in [-1, 1]$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx) \ , \ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$$

   são absolutamente convergentes para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. A série $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} + \cdots$ tem termos alternadamente positivos e negativos e seu termo geral tende para zero. Entretanto é divergente. Por que isto não contradiz o Teorema de Leibniz?

   **Resolução:** Note que

$$a_n = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{6}, -\frac{1}{6}, \cdots\right)$$

daí temos

$$1 > -\frac{1}{2} \Rightarrow a_1 > a_2$$

e ainda

$$-\frac{1}{2} < \frac{2}{3} \Rightarrow a_2 < a_3.$$

Em outras palavras, temos

$$a_{2n-1} > a_{2n} \quad \text{e} \quad a_{2n} < a_{2n-1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja não temos uma sequência monótona, logo o Teorema de Leibniz não é válido.

3. Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, ponha $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$ e prove que $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$.

4. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente, prove que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge.

   **Resolução:** Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente então $\sum |a_n|$ é convergente tomemos $\varepsilon = 1$ para qualquer que seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ daí temos

$$\begin{aligned} |a_n - 0| &< \varepsilon \\ |a_n| &< 1 \end{aligned}$$

   disto segue que

$$(a_n)^2 = |a_n|^2 < |a_n| < 1.$$

   Pelo critério da comparação temos que $\sum a_n^2$ converge pois é menor que $\sum |a_n|$ que é convergente.

   ■

5. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ convergem, prove que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nb_n$ converge absolutamente.

6. Prove: uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente se, e somente se, é limitado o conjunto de todas as somas finitas formadas com os termos $a_n$.

   **Resolução:** Se $\sum a_n$ é absoulutamente convergente temos que qualquer soma finita $S$ de termos $a_n$ esta compreendida entre $p$ e $-q$ sendo:

$$p = \sum p_n = \begin{cases} a_n & se \quad a_n \geq 0 \\ 0 & se \quad a_n < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad q = \sum q_n = \begin{cases} -a_n & se \quad a_n \leq 0 \\ 0 & se \quad a_n > 0 \end{cases}$$

Chamaremos $\sum p_n$ de parte positiva da série e $\sum q_n$ de parte negativa da série.

De fato temos que $|a_n| = p_n + q_n$, logo se as somas finitas estão entre $p_n$ e $q_n$ então formam um conjunto limitado e ainda as reduzidas de $\sum p_n$ e $\sum q_n$ são limitadas logo estas duas séries são convergentes e $\sum a_n$ converge absolutamente.

### 5.4.3 Seção 3: Testes de convergência

1. Determine se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^n$ é convergente usando ambos os testes, de d'Alembert e Cauchy.

2. Dada uma sequência de números positivos $x_n$, com $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, prove que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a$.

   **Resolução:** Seja $z_n = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_n$ queremos mostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{z_n} = a$ temos por hipótese que $\lim x_n = a$ pelo critério de D'Alembert temos

   $$\lim \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_{n+1}}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_n} = \lim x_{n+1} = a$$

   Pelo teorema 5.9 temos que se $\lim \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = a$ então $\lim \sqrt[n]{|z_n|} = a$. Logo $\lim \sqrt[n]{|x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_n|} = a$

3. Determine para quais valores de $x$ cada uma das séries abaixo é convergente

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^k x^n$

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n$

   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$

   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} n! x^n$

   (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$

# 6 ALGUMAS NOÇÕES TOPOLÓGICAS

## 6.1 CONJUNTOS ABERTOS

**Definição 6.1** (Ponto Interior)**.** *Dado $X \subset \mathbb{R}$ dizemos que a é ponto interior de $X$ quando existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset X$.*

**Definição 6.2** (Interior de $X$)**.** *O conjunto de todos os pontos interiores de $X$ é denomindado interior de $X$, denotado por $\operatorname{int} X$.*

**Definição 6.3** (Conjunto Aberto)**.** *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se $\operatorname{int} A = A$, isto é, todo ponto de A é ponto interior a A.*

**Definição 6.4** (Vizinhança de $a$)**.** *Quando $a \in \operatorname{int} X$ diz-se que o conjunto $X$ é uma vizinhança do ponto a.*

**Observação 6.1.** 1. *Se o conjunto $X$ possui algum ponto interior, ele deve conter pelo menos um intervalo aberto, logo é infinito. Assim, se $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ é um conjunto finito, nenhum dos seus pontos é interior, ou seja, temos $\operatorname{int} X = \emptyset$. Melhor ainda, como todo intervalo aberto é um conjunto não-enumerável, se $\operatorname{int} X \neq \emptyset$ então $X$ é não-enumerável. Em particular, temos:*

   *(a) O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é enumerável logo não possui pontos interiores, isto é, $\operatorname{int} \mathbb{N} = \emptyset$, isto mostra que $\mathbb{N}$ não é aberto.*

   *(b) O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável logo não possui pontos interiores, isto é, $\operatorname{int} \mathbb{Z} = \emptyset$, isto mostra que $\mathbb{Z}$ não é aberto.*

   *(c) O conjunto$\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável logo não possui pontos interiores, isto é, int$\mathbb{Q} = \emptyset$, isto mostra que$\mathbb{Q}$ não é aberto.*

   *(d) O conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais, apesar de ser não-enumerável, não possui pontos interiores. De fato, todo intervalo aberto deve conter números racionais, logo $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não pode conter um intervalo aberto. Assim $\operatorname{int}(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \emptyset$, isto mostra que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não é aberto.*

2. *Se $X = (a,b)$, ou $X = (-\infty,b)$, ou $X = (a,+\infty)$, então* $\operatorname{int} X = X$*, ou seja, $X$ é aberto.*

3. *Se $Y = [c,+\infty)$ e $Z = (-\infty,d]$ então* $\operatorname{int} Y = (c,+\infty)$ *e* $\operatorname{int} Z = (-\infty,d)$*. Portanto não são abertos.*

4. *O conjunto vazio é aberto. Com efeito, um conjunto $X$ só pode deixar de ser aberto se existir em $X$ algum ponto que não seja interior. Como não existe ponto algum em $\emptyset$, somos forçados a admitir que $\emptyset$ é aberto.*

5. *A reta $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto.*

6. *Um intervalo (limitado ou não) é um conjunto aberto se, e somente se, é um intervalo aberto.*

O limite de uma sequência pode ser reformulado em termos de conjuntos abertos.

**Teorema 6.1.** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$ *se, e somente se, para todo aberto $A$ contendo $L$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$, $\forall\, n \geq n_0$.*

**Teorema 6.2.** 1. *Se $A_1$ e $A_2$ são conjuntos abertos, então $A_1 \cap A_2$ é um conjunto aberto.*

2. *Se $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família de conjuntos abertos, então a reunião $A = \bigcup\limits_{\lambda\in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.*

**Observação 6.2.** *A interseção de um número finito de conjuntos abertos é ainda um conjunto aberto. O caso de uma família infinita de conjuntos abertos pode ter uma interseção que não é um conjunto aberto. Observe o próximo exemplo.*

**Teorema 6.3.** *Se $F = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ é um conjunto finito de números reais então o complementar $\mathbb{R} - F$ é aberto.*

## 6.2 CONJUNTOS FECHADOS

**Definição 6.5** (Ponto aderente)**.** *Dado $X \subset \mathbb{R}$, dizemos que $a$ é ponto aderente de $X$ quando $a$ é limite de uma sequência de pontos $x_n \in X$.*

**Observação 6.3.** 1. *Todo ponto $a \in X$ é aderente a $X$, basta tomar os $x_n = a$, daí $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.*

2. *Pode-se ter $a$ aderente a $X$ sem que $a \in X$. Por exemplo, $X = (0,+\infty)$, então $a = 0 \notin X$, mas $a = 0$ é aderente a $X$, pois $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$, onde $\dfrac{1}{n} \in X$.*

3. *Um número a chama-se valor de aderência da sequência $(x_n)$ quando é limite de uma subsequência de $(x_n)$.*

4. *Todo valor de aderência de uma sequência $(x_n)$ é um ponto aderente de um conjunto $X$. Mas, a recíproca é falsa. Nem todo ponto aderente a de $X$ é valor de aderência de $(x_n)$. Por exemplo, como $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, o único valor de aderência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é 0, mas todos os pontos $x_n$ por pertencerem a $X=(0,+\infty)$, são pontos aderentes a $X$.*

**Definição 6.6** (Fecho)**.** *O conjunto dos pontos aderentes a $X$ é denominado fecho de $X$, denotado por $\overline{X}$.*

**Definição 6.7** (Conjunto Fechado)**.** *Um conjunto $X\subset\mathbb{R}$ é fechado quando $X=\overline{X}$.*

**Observação 6.4.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Um conjunto $X\subset\mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, todo ponto aderente a $X$ pertence a $X$.*

2. *Para que $X\subset\mathbb{R}$ seja fechado é necessário e suficiente que cumpra a seguinte condição: se $x_n\in X$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, então $a\in X$.*

**Teorema 6.4.** *Um ponto a é aderente ao conjunto $X$ se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de $X$ ($V\cap X\neq\emptyset$ para toda vizinhança de a)*

Pelo teorema acima, a fim de que um ponto $a$ não pertença a $\overline{X}$ é necessário e suficiente que exista uma vizinhança $V$, onde $a\in V$ tal que $V\cap X=\emptyset$.

**Teorema 6.5.** *Um conjunto $F$ é fechado se, e somente se, o complementar $A=\mathbb{R}-F$ é aberto.*

**Teorema 6.6.** *O fecho de qualquer conjunto é um conjunto fechado. (Ou seja, $\overline{\overline{X}}=\overline{X}$ para todo $X\subset\mathbb{R}$.)*

**Teorema 6.7.**

1. *Se $F_1$ e $F_2$ são conjuntos fechados então $F_1\cup F_2$ é fechado.*

2. *Se $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família qualquer de conjuntos fechados então $F=\bigcap\limits_{\lambda\in L}F_\lambda$ é fechado.*

Uma reunião infinita de conjuntos fechados pode não ser um conjunto fechado.

**Observação 6.5.**

1. *Todo conjunto finito $F=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ é fechado pois, seu complementar $\mathbb{R}-F$ é aberto Teorema (6.3).*

2. *$\mathbb{Z}$ é fechado pois, seu complementar $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ é aberto.*

3. *$\mathbb{N}$ é fechado pois, seu complementar $\mathbb{R}-\mathbb{N}$ é aberto.*

4. *$\mathbb{R}$ e o conjunto vazio são fechados pois, seus respectivos complementares, o conjunto vazio e $\mathbb{R}$ são abertos.*

5. *Existem conjuntos que não são fechados nem abertos, como $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, ou um intervalo do tipo $[a,b)$ ou $(a,b]$.*

**Definição 6.8** (Denso)**.** *Sejam $X,Y$ conjuntos de números reais, com $X \subset Y$. Dizemos que $X$ é denso em $Y$ quando $Y \subset \overline{X}$, isto é, quando todo $b \in Y$ é aderente a $X$.*

**Observação 6.6.** *As seguintes afirmações são equivalentes a dizer que $X$ é denso em $Y$. (Em todas elas, supõe-se $X \subset Y$.)*

1. *Todo ponto de $Y$ é limite de uma sequência de pontos de $X$.*

2. *$Y \subset \overline{X}$.*

3. *Para todo $y \in Y$ e todo $\varepsilon > 0$ tem-se $(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.*

4. *Todo intervalo aberto que contenha um ponto de $Y$ deve conter também algum ponto de $X$. (Note que um intervalo aberto contendo $y \in Y$ deve conter um intervalo da forma $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$.)*

**Observação 6.7.** *Temos:*

1. *$\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, ou seja, $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{Q}}$.*

2. *$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, ou seja, $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}$.*

**Definição 6.9** (Cisão do Conjunto)**.** *Uma cisão do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma decomposição $X = A \cup B$ tal que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ (isto é, nenhum ponto de A é aderente a B e nenhum ponto de B é aderente a A). (Em particular, A e B são disjuntos.)*

A decomposição $X = X \cup \emptyset$ chama-se a cisão trivial.

**Teorema 6.8.** *Um intervalo da reta só admite a cisão trivial.*

**Corolário 6.1.** *Os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são simultaneamente abertos e fechados são $\mathbb{R}$ e $\emptyset$.*

## 6.3 PONTOS DE ACUMULAÇÃO

**Definição 6.10** (Ponto de Acumulação). *Um número $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando toda vizinhança $V$ de $a$ contém algum ponto de $X$ diferente do próprio $a$, isto é, $V \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$. Equivalentemente: $\forall\, \varepsilon > 0$, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$. Indica-se com $X'$ o conjunto dos pontos de acumulação de $X$.*

**Observação 6.8.**

1. *A condição $a \in X'$ ($a$ é ponto de acumulação de $X$) exprime-se simbolicamente do seguinte modo:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x \in X;\ 0 < |x-a| < \varepsilon.$$

2. *$a \in X' \Leftrightarrow a \in \overline{X - \{a\}}$.*

**Definição 6.11** (Ponto Isolado). *Se $a \in X$ não é ponto de acumulação de $X$, então $a$ é ponto isolado de $X$. Isto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que $a$ é o único ponto de $X$ no intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.*

**Definição 6.12** (Conjunto Discreto). *Quando todos os pontos do conjunto $X$ são isolados, $X$ chama-se conjunto discreto.*

**Teorema 6.9.** *Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$a$ é um ponto de acumulação de $X$;*
2. *$a$ é limite de uma sequência de pontos $x_n \in X - a$;*
3. *Todo intervalo aberto de centro $a$ contém uma infinidade de pontos de $X$.*

**Observação 6.9.**

1. *Se $X$ é finito então $X' = \emptyset$. (Conjunto finito não tem ponto de acumulação). A contra positiva diz: Se $X' \neq \emptyset$ então $X$ é infinito. Observe o ítem 2 e verifique que não vale a volta da contra positiva;*
2. *$\mathbb{Z}$ é infinito mas todos os pontos de $\mathbb{Z}$ são isolados, ou seja, $\mathbb{Z}' = \emptyset$;*
3. *$\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$;*
4. *$(\mathbb{R} - \mathbb{Q})' = \mathbb{R}$;*
5. *$(a,b)' = (a,b]' = [a,b)' = [a,b]$;*
6. *Dado $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ onde $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, temos:*

(a) *Se $a \notin X$ temos $a \neq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $X' = \{a\}$. Por exemplo, se $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$ onde $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ então $X' = \{0\}$, isto é, $0$ é o único ponto de acumulação de $X$.*

(b) *Se $a \in X$, pode-se ter $X' = \{a\}$ ou $X' = \emptyset$. Por exemplo:*

   i. *A sequência $(a, a, a, \cdots)$ tem $X' = \emptyset$.*

   ii. *A sequência $\left(a, a+1, a+\frac{1}{2}, a+\frac{1}{3}, \cdots, a+\frac{1}{n}, \cdots\right)$ tem-se $X' = \{a\}$.*

Segue-se uma versão do Teorema de Bolzano-Weierstrass em termos de ponto de acumulação.

**Teorema 6.10.** *Todo conjunto infinito limitado de números reais admite pelo menos um ponto de acumulação.*

**Teorema 6.11.** *Para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $\overline{X} = X \cup X'$. Ou seja, o fecho de um conjunto $X$ é obtido acrescentando-se a $X$ os seus pontos de acumulação.*

**Corolário 6.2.** *$X$ é fechado se, e somente se, $X' \subset X$.*

**Corolário 6.3.** *Se todos os pontos do conjunto $X$ são isolados então $X$ é enumerável.*

## 6.4 CONJUNTOS COMPACTOS

**Definição 6.13** (Conjunto Compacto)**.** *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto se $X$ é fechado e limitado.*

**Teorema 6.12.** *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em $X$ possui uma subsequência que converge para um ponto de $X$.*

**Observação 6.10.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto (não vazio). Por ser limitado, existem*

$$\beta = \inf x_n \ \text{ e } \ \alpha = \sup x_n$$

*Por ser compacto, pelo teorema anterior $\beta$ e $\alpha$ pertencem a $X$. Portanto todo conjunto $X \subset \mathbb{R}$ possui um elemento máximo e um elemento mínimo, ou seja, se $X$ é compacto então existem $x_1, x_2 \in X$ tais que*

$$x_1 \leq x \leq x_2$$

*$\forall x \in X$.*

O teorema a seguir generaliza o principío dos intervalos encaixados.

**Teorema 6.13.** *Dada uma sequência decrescente* $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \cdots X_n \supset \cdots$ *de conjuntos compactos não vazios, existe (pelo menos) um número real que pertence a todos os* $X_n$*, ou seja,* $\bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n \neq \emptyset$.

**Definição 6.14** (Cobertura de $X$)**.** *Dado um conjunto* $X$ *chama-se cobertura de* $X$ *uma família*

$$C = \{C_\lambda; \lambda \in L\}$$

*de conjunto* $C_\lambda$ *tais que* $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$.

**Observação 6.11.**

1. *Se* $C_\lambda$ *é um conjunto aberto,* $\forall \lambda$*, a cobertura chama-se cobertura aberta.*

2. *Se* $L = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ *é um conjunto finito e ainda se tem* $X \subset C_{\lambda_1} \cup C_{\lambda_2} \cup \cdots \cup C_{\lambda_n}$ *diz-se que* $C = \{C_{\lambda_i}; \lambda_i \in L\}$ *é uma cobertura finita.*

3. *Se* $L' \subset L$ *é tal que ainda se tem* $X \subset \bigcup_{\lambda' \in L'} C_{\lambda'}$ *então* $C' = \{C_{\lambda'}; \lambda' \in L'\}$ *é denominada uma subcobertura de* $C$*.*

**Teorema 6.14** (Borel-Lebesgue)**.** *Toda cobertura aberta de um conjunto compacto possui uma subcobertura finita.*

## 6.5 EXERCÍCIOS

### 6.5.1 Seção 1: Conjuntos Abertos

1. Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$ tem-se int(int$X$)= int($X$) e conclua que int($X$) é um conjunto aberto.

2. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto com a seguinte propriedade: "toda sequência $(x_n)$ que converge para um ponto $a \in A$ tem seus termos pertencentes a $A$ para todo $n$ suficientemente grande". Prove que $A$ é aberto.

   **Resolução:** Suponhamos por absurdo que $A$ não seja aberto, ou seja, existe $a \in A$ tal que $a$ não é ponto interior de $A$.

   Consideremos a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots) \in A$, para todo n suficientemente grande. Como $a$ não é ponto interior de $A$ podemos dizer que se $x_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$ então $x_n \notin A$. Mas por hipótese $\lim x_n = a$. Absurdo, pois $x_n \notin A$.

   O que contradiz a hipótese do raciocínio por absurdo. Portanto $A$ é aberto.

   ■

3. Prove que $\text{int}(A \cup B) \supset \text{int}A \cup \text{int}B$ e $\text{int}(A \cap B) = \text{int}A \cap \text{int}B$ quaisquer que sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Se $A = (0,1]$ e $B = [1,2)$, mostre que $\text{int}(A \cup B) \neq \text{int}A \cup \text{int}B$.

4. Para todo $X \subset \mathbb{R}$, prove que vale a reunião disjunta $\mathbb{R} = \text{int}X \cup \text{int}(\mathbb{R} - X) \cup F$, onde $F$ é formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que toda vizinhança de $x$ contém pontos de $X$ e pontos de $\mathbb{R} - X$. O conjunto $F = frX$ chama-se a *fronteira* de $X$. Prove que $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se, e somente se, $A \cap frA = \emptyset$

   **Resolução:** Vamos provar que dado $X \subset \mathbb{R}$, vale a reunião disjunta $\mathbb{R} = \text{int}X \cup \text{int}(\mathbb{R} - X) \cup F$.

   A inclusão $\text{int}X \cup \text{int}(\mathbb{R} - X) \cup F \subset \mathbb{R}$ é imediata visto que $X \subset \mathbb{R}$.

   Provemos que $\mathbb{R} \subset \text{int}X \cup \text{int}(\mathbb{R} - X) \cup F$

   Se $x \in \mathbb{R}$, como $X \subset \mathbb{R}$, há dois casos a considerar:

   (i) $x \in \text{int}X$

   Se $x \in$ int$X$ então $x \in$ int$X \cup$ int$(X - \mathbb{R}) \cup F$. Logo $\mathbb{R} \subset$ int$X \cup$ int$(X - \mathbb{R}) \cup F$.

   (ii) $x \notin$ int$X$

(a) Se $x \in X$, então $\forall \varepsilon > 0$, tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \supset X$ e portanto $\exists x \in (x+\varepsilon, x-\varepsilon)$ tal que $x \notin \text{int}X$. Assim $x \in F$ o que implica que $x \in \text{int}X \cup \text{int}(\mathbb{R}-X) \cup F$.

Logo $\mathbb{R} \cup \text{int}X \cup \text{int}(X-\mathbb{R}) \cup F$.

(b) Se $x \notin X$, então $x \in (\mathbb{R}-X)$, logo $x \in \text{int}X \cup \text{int}(\mathbb{R}-X) \cup F$. Em quaisquer das situações tem $\mathbb{R} \subset \text{int}X \cup \text{int}(\mathbb{R}-X) \cup F$.

Concluímos que $\mathbb{R} = \text{int}X \cup \text{int}(\mathbb{R}-X) \cup F$.

Provemos agora que $\mathbb{R} = \emptyset$ ou seja $\text{int}X \cup \text{int}\,(\mathbb{R}-X) \cup F = \emptyset$.

Suponhamos por absurdo que $x \in \text{int}X \cap \text{int}\,(\mathbb{R}-X) \cap F$ então $x \in \text{int}X$ e $x \in \text{int}\,(\mathbb{R}-X)$ e $x \in F$.

- Se $x \in \text{int}\,X$ então $x \notin \text{int}\,(\mathbb{R}-X)$ o que implica $x \notin \text{int}\,X \cap \text{int}\,(\mathbb{R}-X)$, ou seja, $\text{int}\,X \cap \text{int}\,(\mathbb{R}-X) = \emptyset$.
- Se $x \in \text{int}\,(\mathbb{R}-X)$ então $x \notin F = \text{fr}\,X$ o que acarreta $x \notin [\text{int}\,(\mathbb{R}-X) \cup F]$ logo $\text{int}\,(\mathbb{R}-X) \cap F = \emptyset$.
- Se $x \in F$ então $x \notin \text{int}\,X$ logo $x \notin F \cap \text{int}\,X$, segue que $F \cap \text{int}\,X = \emptyset$.

Logo $\text{int}\,X \cup \text{int}\,(\mathbb{R}-X) \cup F = \emptyset$.

Vamos provar ainda que $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se, e somente se $A \cap \text{fr}\,A = \emptyset$.

De fato $\emptyset \subset A \cap \text{fr}\,A$ é imediato. Mostremos que $A \cap \text{fr}\,A \subset \emptyset$.

Suponhamos por absurdo que existe $x \in A \cap \text{fr}\,A$, segue que $x \in A$ e $x \in \text{fr}\,A$. Absurdo!

Pois se $x \in A$ e sendo $A$ aberto temos que todo $x \in A$ é ponto interior de $A$. Sabendo que $\text{fr}\,A$ é formada pelos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que toda vizinhança de $x$ contém pontos de $X$ e $\mathbb{R}-X$. Daí temos que $\nexists x \in A \cap \text{fr}\,A$, logo $A \cap \text{fr}\,A \subset \emptyset$.

Portanto $A \cap \text{fr}\,A = \emptyset$.

Reciprocamente provemos que $A \cap \text{fr}\,A = \emptyset$ se, e somente se, $A \subset \mathbb{R}$ é aberto. Com efeito, seja $x \in A$, como $A \cap \text{fr}\,A = \emptyset$ temos que $x \notin \text{fr}\,A$, e portanto existe uma vizinhança $V$ de $x$ tal que $V$ não contém pontos de $(\mathbb{R}-A)$, ou seja $V$ contém somente pontos de $A$. Logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$, segue que $x$ é ponto interior de $A$ e portanto $A$ é aberto.

∎

5. Para cada um dos conjuntos seguintes, determine sua fronteira: $X = [0,1]$, $Y = (0,1) \cup (1,2)$, $Z = \mathbb{Q}$, $W = \mathbb{Z}$.

6. Sejam $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ intervalos limitados dois a dois distintos, cuja interseção $I = \cap_{n=1}^{\infty} I_n$ não é vazia. Prove que $I$ é um intervalo, o qual nunca é aberto.

**Resolução:** Sejam as sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $a_n$, $b_n$ sejam as extremidades de $I_n$, onde $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$.

Consideremos sup $a_n = \alpha$ e inf $b_n = \beta$

- Se $\alpha < \beta$ então $\alpha < x < \beta \Rightarrow a_n < x < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, logo $(\alpha, \beta) \subset I$. Por outro lado tomemos $c < \alpha \Rightarrow c < a_n$, para algum $n \Rightarrow c \notin I_n \Rightarrow c \notin I$.
- Se $\beta < c \Rightarrow c > b_n$, para algum $n \Rightarrow c \notin I_n \Rightarrow c \in I$.

  Portanto $(\alpha, \beta) \subset I \subset [\alpha, \beta]$, desta forma temos que $(\alpha, \beta)$ são os extremos do intervalo $I$.

  Segue do fato dos intervalos $I_n$ serem dois a dois distintos e que uma das sequências $(a_n)$ ou $(b_n)$ possuem uma infinidade de termos distintos:

  Então, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < \alpha < a_{n+p} < \beta < b_n$, logo $\alpha \in (a_n, b_n) \subset I_n$. Portanto $\alpha \in I$ e $I$ não é um intervalo aberto.

■

### 6.5.2 Seção 2: Conjuntos Fechados

1. Sejam $I$ um intervalo não-degenerado e $k > 1$ um número natural. Prove que o conjunto dos números racionais $\frac{m}{k^n}$, cujos denominadores são potenciais de $k$ com expoente $n \in \mathbb{N}$, é denso em $I$.

2. Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, vale $\overline{X} = X \cup \text{fr}\, X$. Conclua que $X$ é fechado se, e somente se, $X \supset \text{fr}\, X$.

   **Resolução:** Dado $X \subset \mathbb{R}$ queremos provar inicialmente que $\overline{X} = X \cup \text{fr}\, X$.

   - $\overline{X} \subset X \cup \text{fr}\, X$

     Seja $x \in \overline{X}$ então $x$ é ponto aderente a $X$ então toda vizinhança de $x$ contém pontos de $x$, ou seja, $x \in X$ ou $x \in \text{fr}\, X$, de qualquer maneira $x \in (X \cup \text{fr}\, X)$.

   - $X \cup \text{fr}\, X \subset \overline{X}$.

     Tomemos $x \in X \cup \text{fr}\, X$, segue que $x \in X$ ou $x \in \text{fr}\, X$. Se $x \in X$ e como $X \subset \overline{X}$ temos que $x \in \overline{X}$ logo $X \cup \text{fr}\, X \subset \overline{X}$. E se $x \in \text{fr}\, X$ então todos os pontos da vizinhança de $x$ contém pontos de $X$ e $\mathbb{R} - X$ logo $x$ é ponto aderente a $X$ pois toda vizinhança de $x$ contém algum ponto de $X$ logo $x \in \overline{X}$ que implica $X \cup \text{fr}\, X \subset \overline{X}$. Concluímos disto que $\overline{X} = X \cup \text{fr}\, X$. Vamos provar ainda que $X$ é fechado se, e somente se, $X \supset \text{fr}\, X$. Sabemos que $X = \overline{X}$ e ainda que $\overline{X} = X \cup \text{fr}\, X$ então $X = X \cup \text{fr}\, X$, assim $\text{fr}\, X \subset X$.

Reciprocamente, se $X \supset \text{fr}\, X$, então $X \cup \text{fr}\, X = X$. Mas como $\overline{X} = X \cup \text{fr}\, X$. Segue que $X = \overline{X}$. Concluímos que $X$ é fechado.

■

3. Para todo $X \subset \mathbb{R}$, prove que $\mathbb{R} - int\, X = \overline{\mathbb{R} - X}$ e $\mathbb{R} - \overline{X} = int(\mathbb{R} - X)$.

4. Se $X \subset \mathbb{R}$ é aberto (respectivamente, fechado) e $X = A \cup B$ é uma cisão, prove que $A$ e $B$ são abertos (respectivamente, fechados).

**Resolução:**

Seja $X \subset \mathbb{R}$, aberto onde $X = A \cup B$ é uma cisão (decomposição de $X = A \cup B$; $A \cap \overline{B} = \emptyset$ e $\overline{A} \cap B = \emptyset$). Tomando $a \in A$, temos que para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X$.

Se $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \notin A$ implica que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \in B$, teríamos $a \in (A \cap \overline{B})$, contradição. Logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$ e $A$ é aberto.

Do mesmo modo para $B$.

Considerando o caso de $X$ ser fechado e $a \in \overline{A}$ então $a \in X$. Mas não podemos ter $a \in B$, pois isto implicaria em $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Logo $a \in A$ e $A$ é fechado.

Raciocínio análogo para $B$.

■

5. Prove que se $X \subset \mathbb{R}$ tem fronteira vazia então $X = \emptyset$ ou $X = \mathbb{R}$.

6. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$. Prove que $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e que $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dê exemplo em que $\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$.

**Resolução:**

Vamos provar a seguinte igualdade $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

- $\overline{X} \cup \overline{Y} \subset \overline{X \cup Y}$

  Dado $X, Y \subset \mathbb{R}$, temos que $X \subset X \cup Y$ e $Y \subset X \cup Y$ o que implica em $\overline{X} \subset \overline{X \cup Y}$ e $\overline{Y} \subset \overline{X \cup Y}$ logo $\overline{X} \cup \overline{Y} \subset \overline{X \cup Y}$.

- $\overline{X \cup Y} \subset \overline{X} \cup \overline{Y}$

  Seja $a = \lim z_n$ com $z_n \in X \cup Y$, se $a \in \overline{X \cup Y}$.

  Temos que $z_n \in X$ ou $a \in \overline{X}$, para infinitos valores de $n$ ou $z_n \in Y$ ou $a \in \overline{Y}$, para infinitos valores de $n$, logo $a \in \overline{X} \cup \overline{Y}$. Portanto $\overline{X \cup Y} \subset \overline{X} \cup \overline{Y}$.

Concluímos então que $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

Para provar a inclusão $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$, podemos usar o fato de $X \cap Y \subset X$ e $X \cap Y \subset Y$, segue que $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X}$ e $\overline{X \cap Y} \subset \overline{Y}$, logo $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$.

Um exemplo em que $\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$ podemos tomar $X = [3,5)$ e $Y = (5,6]$ então $X \cap Y = \emptyset$ o que implica que $\emptyset = \overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y} = [3,5] \cap [5,6] = 5$.

7. Dada uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, prove que o fecho do conjunto $X = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é $\overline{X} = X \cup A$, onde $A$ é o conjunto dos valores de aderência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

### 6.5.3 Seção 3: Pontos de Acumulação

1. Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $\overline{X} = X \cup X'$. Conclua que $X$ é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos de acumulação.

   **Resolução:**

   Para demonstrar $\overline{X} = X \cup X'$ temos as seguintes inclusões:

   (i) $\overline{X} \subset X \cup X'$

   Se $a \in \overline{X}$, temos que $a \in X$ logo $a \in X \cup X'$ ou toda vizinhança de $a$ contém pontos de $x \neq a$. Assim $a$ é ponto de acumulação de $X$ e portanto $\overline{X} \subset X \cup X'$.

   (ii) $X \cup X' \subset \overline{X}$

   Como $X \subset \overline{X}$ temos que se $x \in X \cup X'$ implica $x \in X$ e portanto $x \in \overline{X}$. E se $x \in X'$ toda vizinhança de $x$ contém algum ponto de $X$ diferente do próprio $x$. Em particular $x$ é ponto aderente logo $x \in \overline{X}$.

   Daí $X \cup X' \subset \overline{X}$.

   De (i) e (ii) temos que $\overline{X} = X \cup X'$.

   Seja $X$ um conjunto fechado onde $X = \overline{X}$ e como $\overline{X} = X \cup X'$ segue que $\overline{X} \supset X'$, e portanto um conjunto fechado se, e somente se contém todos os seus pontos de acumulação.

2. Prove que toda coleção de intervalos não degenerados dois a dois disjuntos é enumerável.

3. Prove que se todos os pontos do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ são isolados então pode-se escolher, para cada $x \in X$, um intervalo aberto $I_x$, de centro $x$, tal que $x \neq y \Rightarrow I_x \cap I_y = \emptyset$.

   **Resolução:**

   Se todos os pontos do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ são isolados para cada $x \in X$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \cap X = \{x\}$.

Seja $I_x = (x - \frac{\varepsilon_x}{2}, x + \frac{\varepsilon_x}{2})$ e $I_y = (y - \frac{\varepsilon_y}{2}, y + \frac{\varepsilon_y}{2})$.

Sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$ e consideremos $\varepsilon_x \leq \varepsilon_y$.

Suponhamos que exista $z \in I_x \cap I_y$. Logo

$$|x - z| \leq \frac{\varepsilon_x}{2} \quad \text{e} \quad |z - y| \leq \frac{\varepsilon_y}{2}$$

e portanto

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| \leq \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{\varepsilon_y}{2} \leq \varepsilon_y$$

Daí se $x \in I_y$. Absurdo!

Portanto $I_x \cap I_y = \emptyset$

■

4. Prove que se todo conjunto não enumerável $X \subset \mathbb{R}$ possui algum ponto de acumulação $a \in X$.

■

### 6.5.4 Seção 4: Conjuntos Compactos

1. Prove que o conjunto $A$ dos valores de aderência de uma sequência $(x_n)$ é fechado. Se a sequência for limitada, $A$ é compacto, logo existem $l$ e $L$, respectivamente o menor e o maior valor de aderência da sequência limitada $(x_n)$. Costuma-se escrever $l = \liminf\,(x_n)$ e $L = \limsup\,(x_n)$.

2. Prove que uma reunião finita e uma interseção arbitrária de conjuntos compactos é um conjunto compacto.

3. Dê exemplo de uma sequência decrescente de conjuntos fechados não-vazios $F_1 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ e uma sequência decrescente de conjuntos limitados não-vazios $L_1 \supset \cdots \supset L_n \supset \cdots$ tais que $\bigcap F_n = \emptyset$ e $\bigcap L_n = \emptyset$.

   **Resolução:** Consideremos $F_n = [n, +\infty)$ uma sequência decrescente de conjuntos fechados não vazios, onde

   $$F_1 = [1, +\infty), F_2 = [2, +\infty), F_3 = [3, +\infty), \cdots, F_n = [n, +\infty), \cdots$$

   e $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ temos que $\bigcap F_n = \emptyset$, como é infinito a cada $F_n$ conseguimos infinitos $n$ os quais pertencem a $F_1$ e não pertencem a $F_n$.

Considerando agora uma sequência decrescente de conjuntos limitados não vazios onde $L_n = \left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ temos que

$$L_1 = (0,1), L_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right), L_3 = \left(0, \frac{1}{3}\right), \cdots, L_n = \left(0, \frac{1}{n}\right), \cdots$$

onde $L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \cdots \supset L_n \supset \cdots$, temos $\bigcap L_n = \emptyset$.

De fato para cada $n \in \mathbb{N}$ há infinitos $L_n \subset L_1$ não vazios onde $L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap \cdots \cap L_n \cap \cdots = \emptyset$.

4. Sejam $X$, $Y$ conjuntos disjuntos e não-vazios, com $X$ compacto e $Y$ fechado. Prove que existem $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ tais que $|x_0 - y_0| \leq |x - y|$ para quaisquer $x \in X$, $y \in Y$.

5. Um conjunto compacto cujos pontos são todos isolados é finito. Dê exemplo de um conjunto fechado ilimitado $X$ e um conjunto limitado não-fechado $Y$, cujos pontos são todos isolados.

   **Resolução:** Seja $X = \mathbb{N}$ sabemos que o conjunto dos numeros naturais é ilimitado, e que cada um dos seus pontos separadamente são fechados, mas, nada podemos afirmar a respeito da reunião infinita de fechados.

   Seja $Y$ um conjunto limitado e não fechado e que seus pontos são todos isolados temos

$$Y = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

   onde $Y$ é limitado por 1 e 0 e ainda não possui pontos de acumulação ou seja a vizinhança $V \cap Y - \frac{1}{n} = \emptyset$.

6. Prove que se $X$ é compacto então os seguintes conjuntos também são compactos:

   (a) $S = \{x + y; x, y \in X\}$;

   (b) $D = \{x - y; x, y \in X\}$;

   (c) $P = \{x \cdot y; x, y \in X\}$;

   (d) $Q = \{x/y; x, y \in X\}$.

# 7 LIMITES DE FUNÇÕES

## 7.1 DEFINIÇÃO E PRIMEIRAS PROPRIEDADES

**Definição 7.1.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto de números reais, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real cujo domínio é $X$ e $a \in X'$ um ponto acumulação do conjunto $X$. Diz-se que o número real $L$ é limite de $f(x)$ quando $x$ tende para $a$, e escreve-se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, quando para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que se tem $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x-a| < \delta$.*

**Teorema 7.1.** *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Se $L < M$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$ como $0 < |x-a| < \delta$.*

**Teorema 7.2** (Teorema do Sanduíche)**.** *Sejam $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$. Se $f(x) \le h(x) \le g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$ então $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.*

**Teorema 7.3.** *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. A fim de que seja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X - a$ com $\lim x_n = a$, tenha-se $\lim f(x_n) = L$.*

**Corolário 7.1** (Unicidade do limite)**.** *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$ então $L = M$.*

**Corolário 7.2.** *(Operações com limites). Sejam $f, g :\to \mathbb{R}$, $a \in X'$, com $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Então*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x) = L \pm M$;
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$;
3. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$;
4. *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *e $g$ é limitada numa vizinhança de $a$, tem-se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0$

**Teorema 7.4.** *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$, se existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ então $f$ é limitada numa vizinhança de $a$, isto é, existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que $x \in X$, $0 < |x-a| < \delta$ implica $|f(x)| \le c$.*

## 7.2 LIMITES LATERAIS

**Definição 7.2.** *(Ponto de acumulação à direita) Um número real a é dito ponto de acunulação á direita de $X \subset \mathbb{R}$, quando toda vizinhança de a contém algum ponto $x \in X$ com $x > a$. Escreve-se: $a \in X'_+$.*

Equivalentemente para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $X \cap (a, a+\varepsilon) \neq \emptyset$. A fim de que $a \in X'_+$ é necessário e suficiente que $a$ seja limite de uma sequência de pontos $x_n > a$, pertencentes a $X$. Finalmente $a$ é um ponto de acumulação à direita para o conjunto $X$ se, e somente se, é um ponto de acumulação ordinário do conjunto $Y = X \cap (a, +\infty)$.

**Definição 7.3.** *(Ponto de acumulação à esquerda) Diz-se que a é um ponto de acunulação á esquerda de $X \subset \mathbb{R}$, quando para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $X \cap (a-\varepsilon, a) \neq \emptyset$, ou seja, $a \in Z'$ onde $Z = (-\infty, a) \cap X$. Representa-se: $a \in X'_-$.*

Para que isto aconteça, é necessário e suficiente que $a = \lim x_n$, onde $(x_n)$ é uma sequência cujos termos $x_n < a$ pertencem a $X$.

Quando $a \in X'_+ \cap X'_-$ diz-se que $a$ é um ponto de acumulação bilateral de $X$.

**Exemplo 7.1.** *Se $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}\right\}$ então $0 \in X'_+$ porém $0 \notin X'_-$.*

**Exemplo 7.2.** *Seja I um intervalo. Se $c \in \text{int}I$ então $c \in I'_+ \cap I'_-$ mas se c é um dos extremos de I então tem-se apenas $c \in I'_+$ se é o extremo inferior e $c \in I'_-$ se é o extremo superior de I.*

**Definição 7.4.** *(Limite à direita) Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'_+$. Diz-se que o número real L é limite á direita de $f(x)$ quando x tende para a, e dado $\varepsilon > 0$, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < x - a < \delta$. Escreve-se $L = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$. Simbolicamente: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L. \equiv .\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0; x \in X \cap (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$*

**Definição 7.5.** *(Limite à esquerda) Considerando $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_-$, dizemos que L é limite à esquerda de $f(x)$ quando para todo $\varepsilon > 0$, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x \in X \cap (a-\delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Escreve-se: $L = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.*

Os resultados enunciados para limites também são válidos para limites laterais.

Dado $a \in X'_+ \cap X'_-$, existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

**Teorema 7.5.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função monótona limitada. Para todo $a \in X'_+$ e todo $b \in X'_-$ existem $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = M$. Ou seja, existem sempre limites laterais de uma função monótona limitada.*

## 7.3 LIMITES NO INFINITO, LIMITES INFINITOS

**Definição 7.6.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$ ilimitado superiormente. Dada $f : X \to \mathbb{R}$, escreve-se: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, quando o número real $L$ satisfaz à seguinte condição:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists A > 0; x \in X, x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

**Definição 7.7.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$ ilimitado inferiormente. Dada $f : X \to \mathbb{R}$, escreve-se: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, quando o número real $\varepsilon > 0$ dado, existir $A > 0$ tal que $x < -A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.*

Os limites para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ são de certo modo, limites laterais, o primeiro é um limite à esquerda e o segundo à direita. O limite de uma sequência é um caso particular de limite no infinito.

**Definição 7.8.** *(Limites Infinitos) Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$, $f : X \to \mathbb{R}$. Diremos que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ quando, para todo $A > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X \Rightarrow f(x) > A$*

**Definição 7.9.** *(Limites Infinitos) Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$, $f : X \to \mathbb{R}$. Temos que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ quando, para todo $A > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X \Rightarrow f(x) < -A$*

## 7.4 EXERCÍCIOS

### 7.4.1 Seção 1: Definição e Primeiras propriedades

1. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $Y = f(X - \{a\})$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ então $L \in \overline{Y}$.

   **Resolução:** Seja $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $Y = f(X - \{a\})$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ mostraremos que $L \in \overline{Y}$.

   De fato, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e se

   $$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \tag{1}$$

   Temos ainda que $a \in X'$ isto significa que existe uma sequência $x_n \in X - a$, tal que $a = \lim x_n$. Desta forma para cada $x_i \in (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X - \{a\}$ temos

   $$0 < |x_i - a| < \delta \ \text{ e } \ x_i \neq a \tag{2}$$

   Logo de 1 e 2 temos:

   $$0 < |x_i - a| < \delta \Rightarrow |f(x_i) - L| < \varepsilon, \forall i \in \mathbb{N}$$

   ou seja existe uma $(f(x_i)) \subset f(X - \{a\}) = Y$ tal que $\lim\limits_{x\to a}(f(x_i)) = L$. Assim $L \in \overline{Y}$.

   ■

2. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. A fim de que exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ é suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, a sequência $(f(x_n))$ seja convergente.

3. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ com $f(X) \subset Y$, $a \in X'$ e $b \in Y' \cap Y$.

   Se

   $$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ e } \lim_{x\to a} g(y) = c,$$

   prove que $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$, contanto que $c = g(b)$ ou então que $x \neq a$ implique $f(x) \neq b$.

   **Resolução:** Dado $\varepsilon > 0$ devemos exibir $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ então $|g(f(x)) - c| < \varepsilon$.

   Por hipótese temos que

   $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, ou seja, dado $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ implica em:

   $$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \eta \tag{3}$$

e ainda $\lim\limits_{x\to a} g(y) = c$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta^* > 0$ tal que $y \in Y$ implica em:

$$0 < |y - b| < \delta^* \Rightarrow |g(y) - c| < \varepsilon \tag{4}$$

Como $f(X) \subset Y$ então existe $y \in Y$ tal que $f(x) = y$, para algum $x \in X$. Temos também que $g(b) = c$, substituindo em (4) esses fatos: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, ou seja, dado $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ implica em:

$$0 < |f(x) - a| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \varepsilon \tag{5}$$

Consideremos agora $\delta^* = \eta$ e de (3) e (5) vem que, para $\varepsilon > 0$ dado existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ tem-se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, ou seja, dado $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ implica em:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - b| < \eta = \delta^* \Rightarrow |g(f(x)) - c| < \varepsilon$$

$\blacksquare$

4. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$ se $x$ é irracional e $f(x) = x$ se $x \in \mathbb{Q}$; $g(0) = 1$ e $g(x) = 0$ se $x \neq 0$. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 0$, porém não existe $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ se $x \neq 0$. Mostre que para todo $c \in [-1, 1]$ existe uma sequência de pontos $x_n \neq 0$ tais que $\lim x_n = 0$ e $\lim f(x_n) = c$.

   **Resolução:** Temos por hipótese que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R} \quad &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longrightarrow f(x) \quad = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ \sin\frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   sabemos que a função sen é limitada, ou seja, sua imagem varia no intervalo $[-1, 1]$, dado qualquer $a \in \mathbb{R}$ podemos ter $\operatorname{sen} a = c$, onde $c \in [-1, 1]$.

   Queremos provar que existe uma sequência de pontos $x_n \neq 0$ onde $\lim x_n = 0$ e $\lim f(x_n) = c$.

   Com efeito tomando $x_n = \dfrac{1}{a + 2\pi n}$ temos

$$\lim x_n = \lim \frac{1}{a + 2\pi n} = 0$$

   e ainda como $x_n \neq 0$ temos $f(x_n) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{a+2\pi n}}\right) = \operatorname{sen} a + 2\pi n$ logo,

$$\lim f(x_n) = \lim[\operatorname{sen}(a + 2\pi n)] = c.$$

### 7.4.2 Seção 2: Limites Laterais

1. Prove que $a \in X'_{+}$ (respectivamente, $a \in X'_{-}$) se, e somente se, $a = \lim x_n$ é limite de uma sequência decrescente (respectivamente, crescente) de pontos pertencentes ao conjunto $X$.

2. Prove que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ (respectivamente, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$) se, e somente se, para toda sequência decrescente (respectivamente, crescente) de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$ tem-se $\lim f(x_n) = L$.

   **Resolução:** Suponhamos que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$. Temos por hipótese que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

   $$x \in (a, a+\delta) \cap X \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

   Seja $x_n$ decrescente tal que $\lim x_n = a$ e $x_n > a$, $\forall a \in \mathbb{N}$ portanto para $n$ suficientemente grande temos:

   $$x_n \in (a, a+\delta) \cap X \text{ então } |f(x_n) - L| < \varepsilon$$

   e portanto $\lim f(x_n) = L$.

   Reciprocamente se $(x_n)$ é decrescente, $\lim x_n = a$ e $\lim f(x_n) = L$, mostremos que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.

   Com efeito consideremos $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq L$, então teríamos $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall \in \mathbb{N}$ existe $(x_n)$ decrescente onde $(x_n) \in (a, a+\delta) \cap X$ mas $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$.

   Logo $\lim x_n = a$, mas $\lim f(x_n) \neq L$. Absurdo!

   Portanto $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.

   $\blacksquare$

3. Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/\left(1 + a^{1/x}\right)$, onde $a > 1$. Prove que $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = 1$.

4. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ monótona e $a \in X'_{+}$. Se existir uma sequência de pontos $x_n \in X$ com $x_n > a$, $\lim x_n = a$ e $\lim f(x_n) = L$ então $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.

   **Resolução:** Seja $(x_n) \in X$ onde $x_n > a$ e $\lim x_n = a$ tal que $f$ é uma função monótona não decrescente.

   Assim dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ e $x_n \in (a, a+\delta)$.

Por outro lado, como $\lim f(x_n) = L$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta^*$ tal que

$$0 < |x_n - a| < \delta^* \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon$$

$$\begin{array}{rcccl} -\varepsilon < f(a+\delta^*) - L < \varepsilon \Rightarrow \quad L - \varepsilon & < & f(a+\delta^*) & < & \varepsilon + L \\ L - \varepsilon & < & f(x_n) \leq f(a+\delta^*) & < & \varepsilon + L \end{array}$$

Disto segue que $\lim f(x_n) = L$

### 7.4.3 Seção 3: Limites no infinito, limites infinitos

1. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio não constante, isto é, para todo $x \in \mathbb{R}$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, com $a_n \neq 0$ e $n \geq 1$. Prove que se $n$ é par então $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = +\infty$ se $a_n > 0$ e $= -\infty$ se $a_n < 0$. Se $n$ é ímpar então $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$ quando $a_n > 0$ e os sinais dos limites são trocados quando $a_n < 0$.

   **Resolução:** Seja $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, consideremos o caso em que $n$ é par.

   Mostremos que $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$ se $a_n > 0$.

   De fato notemos que
$$p(x) = x^n \left[\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + a_n\right]$$
   Logo $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^n \left[\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + a_n\right]$

   Como $x^n \to +\infty$, basta provarmos que $\forall n$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a}{x^n} = 0$. De fato dado $\varepsilon > 0$, devemos exibir $\delta > 0$ tal que se $x > \delta$

$$|\frac{a}{x^n} - 0| < \varepsilon \Rightarrow |\frac{a}{x^n}| < \varepsilon \Rightarrow \frac{|a|}{|x^n|} < \varepsilon \Rightarrow \frac{|x^n|}{|a|} > \frac{1}{|\varepsilon|} \Rightarrow |x^n| > \frac{|a|}{\varepsilon} \Rightarrow x > \sqrt[n]{\frac{a}{\varepsilon}}$$

   Como $x \to +\infty$, $x > 0 \Rightarrow |x| = x$, logo basta considerarmos $\delta \leq \sqrt[n]{\frac{a}{\varepsilon}}$ e obtemos o desejado.

   Assim,
$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n = +\infty.$$

   Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, devemos exibir $\delta > 0$ tal que, se $x > \delta$ implique $a_n x^n > \varepsilon$. Como $a_n > 0 \Rightarrow x^n > \left(\dfrac{\varepsilon}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

   Considerando $\delta \leq \left(\dfrac{\varepsilon}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ obtemos o desejado.

   Logo $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x)$, se $a_n > 0$.

   Analogamente os outros casos são demonstrados.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Prove que, para todo $c \in \mathbb{R}$, existe uma sequência $x_n \in \mathbb{R}$ com $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

3. Seja $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ limitada. Para cada $t \leq a$ indiquemos com $M_t$ o sup e $m_t$ o inf de $f$ no intervalo $I = [t,+\infty)$. Com $w_t = M_t - m_t$ indicaremos a oscilação de $f$ em $I$. Prove que existem $\lim_{x\to+\infty} M_t$ e $\lim_{t\to+\infty} m_t$. Prove que existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ se e somente se, $\lim_{t\to+\infty} w_t = 0$.

   **Resolução:** Vamos provar inicialmente que existe $\lim_{t\to+\infty} M_t$ e $\lim_{t\to+\infty} m_t$.

   Temos que $M_t$ e $m_t$ são funções monótonas ($m_t \leq M_t$, não-decrescente) e ainda limitada por hipótese, logo existem $\lim_{t\to+\infty} m_t = l$, $\lim_{t\to+\infty} M_t = L$ e $\lim_{t\to+\infty} w_t = L - l$.

   Sabemos que

$$m_t \leq f(t) \leq M_t, \quad \forall \geq a$$

   Queremos provar agora que se $\lim_{t\to+\infty} w_t = 0$ existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Seja $\lim_{t\to+\infty} w_t = 0$ isto implica que $L = l$, ou seja, $\lim f(x) = L = l$.

   Reciprocamente, se $\lim_{x\to} f(x) = A$ então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $t \geq a$ tal que $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ para todo $x > t$, logo $M_t - m_t \leq 2\varepsilon$

$$|M_t - L| \;<\; \varepsilon \quad \text{e} \qquad |m_t - l| \;<\; \varepsilon$$

$$L - \varepsilon \;<\; M_t \;<\; L + \varepsilon \quad \text{e} \quad l - \varepsilon \;<\; m_t \;<\; l + \varepsilon$$

   Subtraindo as inequações temos

$$|M_t - m_t| < l - L + \varepsilon + \varepsilon \Rightarrow |M_t - m_t| < 2\varepsilon$$

   Segue-se que $\lim M_t = \lim m_t$ e $\lim w_t = 0$.

# 8 FUNÇÕES CONTÍNUAS

## 8.1 DEFINIÇÃO E PRIMEIRAS PROPRIEDADES

**Definição 8.1.** *(Continuidade) Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diz-se contínua no ponto $a \in \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x-a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, de outra maneira podemos escrever que $f$ é contínua no ponto a significa:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0; x \in X, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

**Definição 8.2.** *(Função Contínua) Diz-se que $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua quando $f$ é contínua em todos os pontos $a \in X$.*

**Definição 8.3.** *(Continuidade Local) A continuidade é um fenômeno local, isto é, a função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, existe uma vizinhança $V$ de $a$ tal que a restrição de $f$ a $V \cap X$ é contínua no ponto $a$.*

**Observação 8.1.**

- *Se $a$ é um ponto isolado do conjunto $X$ isto é, dado $\delta > 0$ tem-se $X \cap (\delta - a, \delta + a) = \{a\}$, em toda a função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a$.*
- *Se $X$ é um conjunto discreto, como $\mathbb{Z}$ por exemplo, então toda a função inteira é contínua o mesmo acontece com o conjunto dos números naturais.*
- *Se $a \in X \cap X'$, ou seja, se $a \in X$ e $a \in X'$ então $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a$ se, e somente se, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*
- *Não há restrições para a definição de continuidade quando $x = a$ pois nesta situação teríamos obviamente $\varepsilon > 0$.*

**Teorema 8.1.** *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$, com $f(a) < g(a)$. Existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$.*

**Corolário 8.1.** *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$. Se $f(a) \neq 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$, $f(x)$ tem o mesmo sinal de $f(a)$.*

**Teorema 8.2.** *A fim de que a função $f : X \to \mathbb{R}$ seja contínua no ponto a é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$, se tenha $\lim f(x_n) = f(a)$.*

**Corolário 8.2.** *Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$ então são contínuas nesse mesmo ponto as funções $f + g$, $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$, bem como a função $f/g$, caso seja $g(a) \neq 0$.*

**Teorema 8.3.** *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$, $g : Y \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $b = f(a) \in Y$ e $f(X) \subset Y$, de modo que a composta $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ esta bem definida. Então $g \circ f$ é contínua no ponto a.*

## 8.2 FUNÇÕES CONTÍNUAS NUM INTERVALO

**Teorema 8.4.** *(Teorema do Valor Intermediário) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

**Corolário 8.3.** *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua então $f(I)$ é um intervalo.*

**Teorema 8.5.** *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Toda função contínua injetiva $f : I \to \mathbb{R}$ é monótona e sua inversa $g : J \to I$ definida no intervalo $J = f(I)$, é contínua.*

**Corolário 8.4.** *Para todo $n \in \mathbb{N}$, a função $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $g(x) = \sqrt[n]{x}$ é contínua.*

Diz-se um homeomorfismo entre $X$ e $Y$ quando $X \subset \mathbb{R}$ e $Y \subset \mathbb{R}$ é uma bijeção contínua $f : X \to Y$ cuja inversa $f^{-1} : Y \to X$ é também contínua. O Teorema 8.5 diz, portanto que se $I$ é um intervalo então toda função contínua e injetiva $f : I \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo entre $I$ e o intervalo $J = f(I)$.

## 8.3 FUNÇÕES CONTÍNUAS EM CONJUNTOS COMPACTOS

O teorema a seguir assegura a existência de valores máximos e mínimos de uma função contínua quando seu domínio é compacto.

**Teorema 8.6.** *(Weierstrass) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$. Existem $x_0$ e $x_1$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$.*

**Teorema 8.7.** *A imagem $f(X)$ de um conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$ por uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é um conjunto compacto.*

**Corolário 8.5.** *Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto então toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada, isto é, existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in X$.*

**Teorema 8.8.** *Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto então toda bijeção contínua $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$ tem inversa contínua $g : Y \to X$.*

## 8.4 CONTINUIDADE UNIFORME

Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $x \in X$ pode-se achar $\delta > 0$ tal que $y \in X$, $|y - x| < \delta$ implicam $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

O número positivo $\delta$ não depende apenas do $\varepsilon > 0$ dado mas também do ponto $x$ no qual a continuidade de $f$ é examinada. Nem sempre dado $\varepsilon > 0$, pode-se encontrar um $\delta > 0$ que sirva em todos os pontos $x \in X$ (mesmo sendo $f$ contínua em todos esses pontos).

**Definição 8.4.** *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se uniformemente contínua no conjunto $X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|y - x| < \delta$ implicam $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.*

**Observação 8.2.**

- *Uma função uniformemente contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos do conjunto $X$. A recíproca não é verdadeira.*

- *A continuidade de uma função $f : X \to \mathbb{R}$ no ponto $a \in X$ significa que pode se ter $f(x)$ tão próximo de $f(a)$ quanto se deseje, ou seja $a$ esta fixo e $x$ se aproxima dele afim de que $f(x)$ se aproxime da $f(a)$. Já na continuidade uniforme, pode-se fazer com que $f(x)$ e $f(y)$ se tornem tão próximos quanto se queira, bastando que $x, y \in X$ estejam também próximos.*

- *Podemos distinguir a continuidade uniforme, se cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança $V$ tal que a restrição $V \cap X$ é contínua então $f$ é comtínua. Mas não podemos afirmar para $f$ uniformemente contínua. Isso se exprime dizendo que a continuidade é uma noção local enquanto a continuidade uniforme é um conceito global.*

**Definição 8.5.** *(Função Lipschitziana) Um função é dita Função Lipschitziana quando existe uma constante $k > 0$ (chamada constante de Lipschitz da função) tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|,$$

*sejam quais forem $x, y \in X$*

Toda função lipschitziana $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua dado $\varepsilon > 0$, tome-se $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$. Então $x, y \in X$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq k|x - y| < k \cdot \dfrac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$

**Teorema 8.9.** *A fim de que* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ *seja uniformemente contínua é necessário e suficiente que, para todo par de sequências* $(x_n), (y_n)$ *em* $X$ *com* $\lim(y_n - x_n) = 0$ *tenha-se* $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = 0$.

**Teorema 8.10.** *Seja* $X \subset \mathbb{R}$ *compacto. Toda função contínua* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ *é uniformemente contínua.*

**Teorema 8.11.** *Toda função* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$*, uniformemente contínua num conjunto limitado* $X$*, é uma função limitada.*

**Teorema 8.12.** *Se* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ *é uniformemente contínua então para cada* $a \in X'$*(mesmo que a não pertença a* $X$*), existe* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

## 8.5 EXERCÍCIOS

### 8.5.1 Seção 1: Definição e primeiras propriedades

1. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$. Prove que são contínuas no ponto $a$ as funções $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$, definidas por $\varphi(x) = \max\ \{f(x), g(x)\}$ e $\psi(x) = \min\ \{f(x), g(x)\}$ para todo $x \in X$.

2. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas. Prove que se $X$ é aberto então o conjunto $A = \{x \in X;\ f(x) \neq g(x)\}$ é aberto e se $X$ é fechado o conjunto $F = \{x \in X; f(x) = g(x)\}$ é fechado.

   **Resolução:** Queremos mostrar que $F$ é um conjunto fechado tomando $F = F_1 \cap F_2$ onde $F_1 = \{x \in X;\ \ f(x) \leq g(x)\}$ e $F_2 = \{x \in X; f(x) \geq g(x)\}$ são conjuntos fechados e sabendo que a intersecção de conjuntos fechados é um conjunto fechado, para concluirmos que $F$ é fechado, basta mostrar que $F_1$ e $F_2$ são fechados.

   Seja $x_n \in F_1$ onde $\lim x_n = a$ da propriedade do conjunto $F_1$ podemos escrever $f(x_n) \leq g(x_n)$, como $f$ e $g$ são contínuas temos $f(a) \leq g(a)$ disto segue que $a \in F_1$ então $F_1 = \overline{F_1}$. Do mesmo modo fazemos para $F_2$.

   Portanto $F_1$ e $F_2$ são fechados o que acarreta $F$ ser fechado.

   Para mostrarmos que $A$ é um conjunto aberto temos que $f(x) \neq g(x)$ isto implica em $f(x) < g(x)$ ou $f(x) > g(x)$ desta maneira podemos escrever $A$ como a reunião dos conjuntos abertos $A_1 = \{x \in X; f(x) < g(x)\}$ e $A_2 = \{x \in X, f(x) > g(x)\}$, ou seja, $A = A_1 \cup A_2$ como a reunião de conjuntos abertos é um conjunto aberto basta mostrar que $A_1$ e $A_2$ são abertos. Para provar que $A_1$ é aberto tomando $A_1 = \mathbb{R} - F_2$ como $F_2$ é fechado temos que $A_1$ é aberto(Teorema 3 topologia). Da mesma maneira é feito para $A_2$. Logo $A_1$ e $A_2$ é aberto.

   Donde concluímos que $A$ é aberto.

   ∎

3. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se *semi-contínua superiormente* (scs) no ponto $a \in X$ quando, para cada $c > f(a)$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta$ implicam $f(x) < c$. Defina *função semi-contínua inferiormente* (sci) no ponto $a$. Prove que $f$ é contínua no ponto $a$ se, e somente se, é scs e sci nesse ponto. Prove que se $f$ é scs, $g$ é sci no ponto $a$ e $f(a) < g(a)$ então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x)$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que se $f(x) = 0$ para todo $x \in X$ então $f(x) = 0$ para todo $x \in \overline{X}$.

**Resolução:** Suponhamos por absurdo que existe um $y \in \overline{X}$ tal que $f(y) \neq 0$, como $y \in \overline{X}$, existe $(y_n) \subset X$ tal que $\lim y_n = y$. Do fato de $(y_n) \subset X$ temos que $f(y_n) = 0\ \forall \in \mathbb{N}$, mas $f(y) \neq 0$. Logo $f(y) \neq f(y_n)$, e portanto $f$ não é contínua. Absurdo! pois $f$ é contínua.

Portanto $f(x) = 0$ para todo $x \in X$ e $x \in \overline{X}$.

■

5. Prove que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$.

6. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a$. Suponha que em cada vizinhança $V$ de $a$, existam pontos $x, y$ tais que $f(x) < g(x)$ e $f(y) > g(y)$. Prove que $f(a) = g(a)$.

   **Resolução:** Sejam $f, g$ funções contínuas em $a$ tais que cada vizinhança $V$ de $a$ existem pontos $x, y$ tais que $f(x) < g(x)$ e $f(y) > g(y)$.

   Seja $\delta_1 = 1$. Assim, existem $x_1$ e $y_1$ tais que

$$|x_1 - a| < \delta_1 \quad \text{e} \quad |y_1 - a| < \delta_1$$

   onde

$$f(x_1) < g(x_1) \quad \text{e} \quad f(y_1) > g(y_1).$$

   Seja $\delta_2 = \frac{1}{2}$. Assim existem $x_2$ e $y_2$ tais que

$$|x_2 - a| < \delta_2 \quad \text{e} \quad |y_2 - a| < \delta_2$$

   onde

$$f(x_2) < g(x_2) \quad \text{e} \quad f(y_2) > g(y_2).$$

   Procedendo desta maneira obteremos $\delta = \frac{1}{n}$ onde existem $x_n$ e $y_n$ tais que

$$|x_n - a| < \delta_n \quad \text{e} \quad |y_n - a| < \delta_n$$

   onde

$$f(x_n) < g(x_n) \quad \text{e} \quad f(y_n) > g(y_n).$$

   Ou seja, encontramos duas sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ onde $x_n \to a$ e $y_n \to a$. Como $f$ e $g$ são contínuas em $a$ temos

$$f(x_n) < g(x_n) \quad \text{e} \quad f(y_n) > g(y_n).$$

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) \leq \lim_{n \to +\infty} g(x_n) \quad \text{e} \quad \lim_{n \to +\infty} f(y_n) \geq \lim_{n \to +\infty} g(y_n).$$

$$f(a) \leq g(a) \quad \text{e} \quad f(a) \geq g(a).$$

Concluímos que $f(a)$ só pode ser igual a $g(a)$.

■

7. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ descontínua no ponto $a \in X$. Prove que existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: ou se pode achar uma sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$ e $f(x_n) > f(a) + \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ou acha-se $(y_n)$ com $y_n \in X$, $\lim y_n = a$ e $f(y_n) < f(a) - \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

### 8.5.2 Seção 2: Funções contínuas num intervalo

1. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se *localmente constante* quando todo ponto de $X$ possui uma vizinhança $V$ tal que $f$ é constante em $V \cap X$. Prove que toda função $f : I \to \mathbb{R}$, localmente constante num intervalo $I$, é constante.

   **Resolução:** Seja $a \in I$ e consideremos $A = \{x \in I, f(x) = f(a)\}$ e $B = \{x \in I, f(x) \neq f(a)\}$. Tomemos $A \cup B = I$, como $f$ é localmente constante, então todo $x \in A$ possui uma vizinhança disjunta de $B$, ou seja se $x \in A$ implica $f(x) = f(a), \forall x \in A$. Logo $x \notin \overline{B}$ e daí $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

   Da mesma forma, para todo $y \in B$, temos que este possui uma vizinhança disjunta de $A$, pois $y \in B$ significa $f(y) \neq f(a), \forall y \in B$.

   Então $y \notin \overline{A}$ e portanto $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Com isso garantimos que $A \cup B$ é uma cisão.

   Como $a \in A$ temos que $A \neq \emptyset$ e $B = \emptyset$ donde $A = I$ e $f$ é constante.

■

2. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função monótona, definida no intervalo $I$. Se a imagem $f(I)$ é um intervalo, prove que $f$ é contínua.

3. Diz-se que uma função $f : I \to \mathbb{R}$, definida no intervalo I, tem a *propriedade do valor intermediário* quando a imagem $f(J)$ e todo intervalo $J \subset I$ é um intervalo. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, tem a propriedade do valor intermediário, embora seja descontínua.

   **Resolução:** Vamos provar que a função $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ definida da seguinte maneira possui a propriedade do valor intermediário.

$$\begin{aligned} f : \quad I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Como a função $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ é definida para todo $x \in I \subset \mathbb{R}$ tal que $0 \notin I$ e é limitada ou seja

$$\begin{array}{rcccl} & & |f(I)| & \leq & 1 \\ \Rightarrow & -1 & \leq & f(I) & \leq & 1 \\ \Rightarrow & & f(I) & \in & [-1,1]. \end{array}$$

Se $0 \in I$ então da mesma forma temos

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f(0) \in [-1,1]$$

Portanto a função $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ tem a propriedade do valor intermediário.

■

4. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função com a propriedade do valor intermediário. Se, para cada $c \in \mathbb{R}$, existe apenas um número finito de pontos $x \in I$ tais que $f(x) = c$, prove que $f$ é contínua.

5. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(0) = f(1)$. Prove que existe $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tal que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$. Prove o mesmo resultado com $\frac{1}{3}$ em vez de $\frac{1}{2}$. Generalize.

**Resolução:** Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(0) = f(1)$.

Definamos para cada $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\varphi : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ onde $\varphi(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$ pois

$$\begin{array}{rclcl} \varphi(0) & = & f\left(0 + \frac{1}{2}\right) - f(0) & = & f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) \\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right) & = & f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) & = & f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) \end{array}$$

Fazendo $\varphi(0) + \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$ obtemos

$$\varphi(0) + \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) + f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

logo existe $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tal que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Do mesmo modo definindo $\psi : \left[0, \frac{2}{3}\right] \to \mathbb{R}$ como $\psi(x) = f\left(x + \frac{1}{3}\right) - f(x)$ obtemos:

$$\begin{array}{rclcl} \psi(0) & = & f\left(0 + \frac{1}{3}\right) - f(0) & = & f\left(\frac{1}{3}\right) - f(0) \\ \psi\left(\frac{1}{3}\right) & = & f\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right) & = & f\left(\frac{2}{3}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right) = f(0) - f\left(\frac{2}{3}\right) \\ \psi\left(\frac{2}{3}\right) & = & f\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) - f\left(\frac{2}{3}\right) & = & f(0) - f\left(\frac{2}{3}\right). \end{array}$$

Fazendo $\psi(0)+\psi\left(\frac{1}{3}\right)+\psi\left(\frac{2}{3}\right)=0$, então existe $x\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$ tal que $f(x)=f\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

De forma geral, seja $\varphi:\left[0,\frac{n-1}{n}\right]\rightarrow \mathbb{R}$, $n>1$ definida por $\varphi(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= f\left(0+\frac{1}{n}\right)-f(0) \\ \\ \varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) &= f(1)-f\left(\frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

notemos que:

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{n-2}{n}\right) &= f\left(\frac{n-1}{n}\right)-\left(\frac{n-2}{n}\right) \\ \\ &\vdots \\ \varphi\left(\frac{1}{n}\right) &= f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

donde $\varphi(0)+\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right)+\varphi\left(\frac{n-2}{n}\right)+\cdots+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=f(1)-f(0)=0$ e $\varphi$ troca de sinal em $\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$. Logo $\exists x\in\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$ tal que $f(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)$.

■

### 8.5.3 Seção 3: Funções contínuas em conjuntos compactos

1. Seja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ contínua, tal que $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\rightarrow-\infty} f(x)=+\infty$. Prove que existe $x_0\in\mathbb{R}$ tal que $f(x_0)\leq f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

2. Seja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ contínua, com $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty} f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\rightarrow-\infty} f(x)=-\infty$. Prove que, para todo $c\in\mathbb{R}$ dado, existe entre as raízes $x$ da equação $f(x)=c$ uma cujo módulo $|x|$ é mínimo.

   **Resolução:** Sabemos que $\lim f(x)=+\infty$ e $\lim f(x)=-\infty$. Considerando $M=\{x\in\mathbb{R};$ $f(x)=c\}$, temos que $M\neq\emptyset$ pelo Teorema do Valor Intermediário. Observe também que $M$ é um conjunto fechado, pois $M=A_k\cup B$, onde $A_k=[x_i,x_j]$ é fechado com $k=1,\cdots,n$ tal que $f(x)=c,\forall x\in A_k$ e $B=\left\{x_p, f(x_p)=c\right\}$ é um conjunto discreto, logo é fechado. Portanto $M$ é fechado, pois é a união finita de conjuntos fechados.

   Também como $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty} f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\rightarrow-\infty} f(x)=-\infty$ então dado $A>0$, $\exists B_1>0$ tal que se $x>B_1$,

   $$f(x)>A$$

   e também dado $A>0,\exists B_2>0$ tal que $c>-B_2$,

   $$f(x)<-A.$$

Assim para $A > 0$, se $B = \max\{B_1, B_2\}$ consideremos

$$x > B > B_1 \quad \text{e} \quad x < -B < -B_2$$

ou ainda,

$$|x| > B \quad \text{e} \quad |f(x)| > A.$$

Disto segue para $x$ suficientemente grande ou pequeno, $f(x)$ será, respectivamente, grande ou pequeno, isto mostra que $M$ é limitado, visto que $x \in M$ se $f(x) = c$.

Fixando $n_0$ suficientemente grande tal que $M \cap [-n_0, n_0] \neq \emptyset$. Temos que $M \cap [-n_0, n_0] \neq \emptyset$ é compacto, ou seja, fechado e limitado. Como $f$ é contínua, temos que $f(M \cap [-n_0, n_0])$ é compacto. Logo existe $x_1 \in M \cap [-n_0, n_0] \neq \emptyset$, $f(x_1) \leq f(x), \forall x \in M \cap [-n_0, n_0]$.

Se $x \in M$ e $x \notin [-n_0, n_0]$ então $|x| > n_0$. Mas $|x_1| < n_0 < |x|$, logo $|x_1| < |x|, \forall x \in M$.

∎

3. Prove que não existe uma função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que assuma cada um dos seus valores $f(x)$, $x \in [a,b]$, exatamente duas vezes.

4. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se *periódica* quando existe $p \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que toda função contínua periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximos e mínimo, isto é, existem $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   **Resolução:** Como $f$ é contínua em $[0,p]$, existem $x_1, x_2 \in [0,p]$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, $\forall x \in [0,p]$.

   Seja $z \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $z + np \in [0,p]$ então $f(z) = f(z+np)$ por hipótese. Logo

$$f(x_1) \leq f(z) \leq f(x_2), \forall z \in \mathbb{R}.$$

   Isto prova o desejado.

∎

5. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto $X$. Prove que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $k_\varepsilon > 0$ tal que $x, y \in X$, $|y - x| \geq \varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq k_\varepsilon \cdot |y - x|$. (Isto significa que $f$ cumpre a condição de Lipschitz contanto que os pontos $x, y$ não estejam muito próximos.)

### 8.5.4 Seção 4: Continuidade uniforme

1. Se toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, prove que o conjunto $X$ é fechado porém não necessariamente compacto.

   **Resolução:** Suponhamos por absurdo que $X$ não seja fechado, ou seja, $\overline{X} \neq X$, logo tomemos $a \in \overline{X} - X$ com $a \notin X$ temos que $a = \lim x_n$ onde $x_n \in X$.

   Tomemos a função $\begin{array}{rcll} f & : & X \to & \mathbb{R} \\ & & x \to & f(x) \;\; = \frac{1}{x-a} \end{array}$

   Analisando os limites laterais temos:

   - $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty$
   - $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$

   Como os limites laterais são deferentes, logo este limite não existe, o acarreta $f$ não ser uniformemente contínua. Como $a \in \overline{X}$ e $\overline{X} = X \cup X'$ e $a \neq X$ então $a \in X'$ logo pelo Teorema 12, justifica o fato de $f$ não ser uniformemente contínua.

   Queremos provar agora que $X$ é fechado porém não necessariamente compacto.

   Sabemos que toda função natural é contínua porém $\mathbb{N}$ não é compacto.

   ■

2. Mostre que a função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$, não é uniformemente contínua.

3. Dada $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua, defina $\varphi : \overline{X} \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x) = f(x)$ se $x \in X$ é um ponto isolado e $\varphi(x) = \lim\limits_{y \to x} f(y)$ se $x \in X'$. Prove que $\varphi$ é uniformemente contínua e $\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

   **Resolução:** Sabemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Considerando $M = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = c\}$, temos que $M \neq \emptyset$ pelo Teorema do Valor Intermediário , observe que $M$ é um conjunto fechado, pois $M = A_k \cup B$, onde $A_k = [x_i, x_j]$ é fechado com $k = 1, \cdots, n$ tal que $f(x) = c$, $\forall x \in A_k$ e $B = \{x_p, f(x_p) = c\}$ é um conjunto discreto, logo é fechado. Portanto $M$ é fechado, pois é a união finita de conjuntos fechados.

   Também, como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ então $A > 0$, $\exists B_1 > 0$ tal que se $x > B_1$

$$f(x) > A$$

e também dado $A > 0$, se $B = \max\{B_1, B_2\}$ consideremos

$$x > B > B_1 \quad \text{e} \quad x < -B < -B_2$$

ou ainda $|x| > B$ temos $|f(x)| > A$.

Disto segue para $x$ suficientemente grande ou pequeno, $f(x)$ será, respectivamente, grande ou pequeno, isto mostra que $M$ é limitado, visto que $x \in M$ se $f(x) = c$.

Fixando $n_0$ suficientemente grande tal que $M \cap [-n_0, n_0] \neq \emptyset$. Temos que $M \cap [-n_0, n_0] \neq \emptyset$ é compacto, ou seja, fechado e limitado. Como $f$ é contínua, temos que $f(M \cap [-n_0, n_0])$ é compacto. Logo $x_1 \in M \cap [-n_0, n_0] \neq \emptyset$, $f(x_1) \leq f(x)$, $\forall x \in M \cap [-n_0, n_0]$. Se $x \in M$ e $x \notin [-n_0, n_0]$ então $|x| > n_0$. Mas

$$|x_1| < n_0 < |x|$$

isto implica que $|x_1| < |x|, \forall x \in M$.

$\blacksquare$

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se existem $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, prove que $f$ é uniformemente contínua. Mesma conclusão vale se existem os limites de $f(x) - x$ quando $x \to \pm\infty$.

5. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínuas. Prove que $f + g$ é uniformemente contínua. O mesmo ocorre com o produto $f \cdot g$, desde que $f$ e $g$ sejam limitadas. Prove que $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$, dadas por $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ $x \in X$ são uniformemente contínuas.

   **Resolução:** Como $f$ e $g$ são funções uniformemente contínuas, dado $\varepsilon/2 > 0$ existe $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

$$|x - y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2;$$

$$|x - y| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon/2.$$

   Sejam $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, $\forall\ x \in X$. Tomando $\varphi = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para todo $x \in X$, com $|x - y| < \delta$, devemos mostrar que $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$ e $|\psi(x) - \psi(y)| < \varepsilon$.

Sabendo que $\max\{f(x),g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$, temos:

$$\begin{aligned}
|\varphi(x)-\varphi(y)| &= \left|\tfrac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]-\tfrac{1}{2}[f(y)+g(y)+|f(y)-g(y)|]\right| \\
&= \tfrac{1}{2}|[f(x)+g(x)]-[f(y)+g(y)]+|f(x)-g(x)|-|f(y)-g(y)|| \\
&= \tfrac{1}{2}|f(x)-f(y)+g(x)-g(y)+|f(x)-g(x)|-|f(y)-g(y)|| \\
&\leq \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|+||f(x)-g(x)|-|f(y)-g(y)||] \\
&\leq \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|+|f(x)-g(x)-[f(y)-g(y)]|] \\
&= \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|+|[f(x)-f(y)]+[g(y)-g(x)]|] \\
&\leq \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|+|f(x)-f(y)|+|g(y)-g(x)|] \\
&= \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(y)|+|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|+|g(x)-g(y)|] \\
&= \tfrac{1}{2}[2|f(x)-f(y)|+2|g(x)-g(y)|] \\
&= |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \\
&< \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $\varphi$ é uniformemente contínua.

Agora, considerando o fato de que $\min\{f(x),g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$, temos:

$$\begin{aligned}
|\psi(x)-\psi(y)| &= \left|\tfrac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]-\tfrac{1}{2}[f(y)+g(y)-|f(y)-g(y)|]\right| \\
&= \tfrac{1}{2}|f(x)-f(y)+g(x)-g(y)+[|f(y)-g(y)|-|f(x)-g(x)|]| \\
&\leq \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|+||f(y)-g(y)|-|f(x)-g(x)||] \\
&\leq \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|+|f(y)-g(y)-[f(x)-g(x)]|] \\
&= \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|+|[f(y)-f(x)]+[g(x)-g(y)]|] \\
&\leq \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|+|-[f(x)-f(y)]|+|g(x)-g(y)|] \\
&= \tfrac{1}{2}[|f(x)-f(y)|+|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|+|g(x)-g(y)|] \\
&= \tfrac{1}{2}[2|f(x)-f(y)|+2|g(x)-g(y)|] \\
&= |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \\
&< \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $\psi$ também é uniformemente contínua.

$\blacksquare$

# 9 CONCLUSÃO

Durante o tempo em que produzimos este trabalho, posso ser sincera em dizer que o pensamento de desistência rondou por muitas vezes, mas sabia que o livro base é um dos livros mais usados do Brasil quando se fala em Análise Real, e como percebíamos o nosso crescimento como estudante que carinhosamente denominávamos como amadurecimento Matemático, notávamos o quanto não sabíamos e o quanto era difícil ir de um degrau ao outro.

Nos nossos muitos encontros tratávamos o estudante que iria ler nossa monografia como “leitor atento”, porque em muitos livros temos falas do tipo: é fácil ver, como demonstra-se fácil, é óbvio. E no decorrer de nossos estudos fomos percebendo, que o “leitor atento”, deveria ser muito atento, este leitor era muito lembrado por nós porque por diversas vezes em livros de diversos autores eu estagnei porque não conseguia ver o que era fácil ver. Diante disto nos preocupamos em facilitar o estudo de análise que não precisa ser árduo, mas deve sim ser gradativo e suave. Para que todas as noções se instalem em nós.

E podemos dizer que, conseguimos atingir o propósito inicial, que era entrar no mestrado, mas seria injusto dizer apenas isso, porque, conseguimos muito mais com ele, e talvez o mais importante para nossa eterna caminhada como estudante, que foi, aprender a estudar.

As contribuições para o mesmo serão bem aceitas, pelo e-mail tatitambarussi@gmail.com. Visto que continuaremos trabalhando no mesmo, até atingirmos o objetivo final da publicação da resolução de todos os exercícios.

# REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Cáculo das Funções de uma variável**. 7. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2004.

FIGUEIREDO, D. G. de. **Análise I**. 7. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1975.

LIMA, E. L. **Análise real volume 1 Funções de uma variável**. 10. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2008.

LIMA, E. L. **Curso de Análise vol 1**. 12. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009.