UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ADRIEL ALVES DE FREITAS

INTEGRAL DEFINIDA: APLICAÇÕES EM ADMINISTRAÇÃO

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2012

ADRIEL ALVES DE FREITAS

INTEGRAL DEFINIDA: APLICAÇÕES EM ADMINISTRAÇÃO

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Adilandri Mércio Lobeiro

CAMPO MOURÃO

2012

TERMO DE APROVAÇÃO

Adriel Alves de Freitas

Integral Definida: Aplicações em Administração

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Adilandri M. Lobeiro

Prof(a). Msc. Viviane Colucci

Prof(a). Msc. Magda Cardoso Montovani

Campo Mourão, 2012

Todo erro se deve a fatores extrínsecos, como a emoção e a educação. A verdadeira razão nunca erra. (Kurt Gödel)

RESUMO

FREITAS, Adriel. Integral Definida: Aplicações em Administração. 100 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2012.

As funções matemáticas utilizadas para a descrição do comportamento de processos críticos nas organizações e auxílio às decisões gerenciais são frequentemente simplificadas, em razão do alto número de variáveis envolvidas, mas a simplificação exagerada (para facilitar sua formação e tratamento) pode levar a distorções relevantes. Afim de expandir o ferramental disponível no tratamento dos dados relacionados, o presente trabalho apresenta aplicações de integrais definidas na administração, em temas como análise de investimentos, fluxos de receitas e custos, capitalização composta, entre outros, além da utilização de outros conceitos de Cálculo como auxiliares, e uma breve revisão de cálculo diferencial e integral. Abrangendo temas em finanças, produção entre outros itens, este não se restringe a uma área específica, mostrando utilidades diversas da diferenciação e integração como métodos de resolução. São apresentados exemplos relacionados a formação de funções em problemas gerenciais; análise de viabilidade na implantação de novos equipamentos; a como funções não lineares representando fluxos de receitas e custos (como na armazenagem de bebidas buscando valorização) se desenvolvem e se relacionam, e também como o tempo (e os juros incorridos) afetam as decisões relacionadas a otimização destes valores.

Palavras-chave: Integral definida, Administração, Diferenciação

ABSTRACT

FREITAS, Adriel. Definite Integral: Applications in Management. 100 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2012.

The mathematical functions used to describe the behavior of critical processes on organizations are frequently simplified, because there are too much variables envolved, but the oversimplification (to get easier processes to create and use them) can result in great distortions. Intending enlarge the available tools to the related data treatment, is presented some applications to the definite integrals on management analysis, like investments analysis, income and cost flows, interest, and others. Some other concepts of Calculus are used as auxiliary tools, and a brief review of Calculus is available. There are not limitations in especified areas of management, with applications in finance, production systems and others. There are some examples related as the formation processes of the mathematical funcions; the feasibility analysis for new equipments; the behavior of non-linear functions of income and cost flows (like in storage, for beverage industry), and also, how the time (and interests) affect the decision related with the optimization of this processes.

Keywords: Definite Integral, Management, Differentiation

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Precisamos ser mais eficientes.

Essa máxima se encaixa em diversas áreas do conhecimento, do caráter ambiental, social, ao empresarial, entre outros. Para o setor comercial e industrial, mostra que, mais do que nunca, é necessário produzir mais, com menos recursos. Tecer comentários acerca da crescente competitividade no cenário econômico é no mínimo, redundante. Os elementos que estão delineando o atual desafio são vários, mas entre os principais temos, o crescente número de concorrentes (não apenas em maior número, como também melhor preparados), a paulatina e constante alta nos preços de suprimentos primários, tanto especializados como *commodities,* assim como consumidores mais informados, exigentes e dispersos em localização, anseios e necessidades (sobre localização, não se afirma que o mercado em si está se espalhando - há cada vez maiores concentrações populacionais em grandes centros - mas que na ânsia de ampliar mercados, as organizações precisam ir mais longe, alcançar clientes em localidades menores e mais distantes). O gestor tem então basicamente na balança alguns fatores conflitantes, atendendo cada um na medida da sua necessidade e possibilidade: Deverá ter menores custos de produção, produtos mais personalizados para clientes mais heterogêneos, em diversos lugares, atendendo legislações ambientais crescentemente restritivas, assim como interesses de vários outros *stakeholders* (comunidades, funcionários, etc.), e após tudo isso, claro, gerar consideráveis riquezas para seus acionistas. Não é um desafio pequeno.

Esta pequena parte da história contemporânea não é chamada Era da Informação à toa. Ela nunca foi tão necessária. Simplesmente pelo fato de que informação e conhecimento são chaves para o salto de eficiência que é necessário. Trabalha-se para criar melhores formas de gerá-la, processá-la e disseminá-la, porque ela - em tese - gera maior produtividade. A informação é o que se faz dela, de como é utilizada para gerar melhores resultados. Montanhas de dados, planilhas e tabelas com dados pouco consistentes, confusos, ou imprecisos são muitas vezes, piores do que informação nenhuma, desviando a atenção, consumindo esforços e tempo, além de levar à tomada de decisões equivocadas. É fato que decisões nas organizações são tomadas em um ambiente de incerteza, muitas vezes com dados incompletos, superficiais; informações completas, amplas e profundas ao mesmo tempo são dificilmente viáveis, tanto sua prática, quanto o retorno econômico gerado, principalmente quando um recurso fundamental, o tempo, se inclui no processo. Melhorar esta pouca informação, disponível no tempo correto e torná-la mais precisa é objetivo a ser traçado.

A matemática sempre foi vista nas ciências sociais aplicadas como ferramenta fundamental, imprescindível. O movimento de escalada das escolas de gestão humanistas é notório, mas ninguém ousa afirmar que as ciências exatas tenham sua importância reduzida por isso. Maior eficiência depende de cálculos mais refinados, modelos matemáticos mais apurados, informações mais precisas. Aquelas lacunas que permitiam usar grandes margens de erro nos dados utilizados, na modelagem de um fenômeno ou na projeção de um cenário se reduziu substancialmente. Grandes saltos de produtividades estão cada vez mais raros, esta será então buscada nestas pequenas imprecisões, nestes custos que antes eram considerados irrisórios. A matemática é aliada fundamental neste processo.

O presente trabalho busca compilar algumas aplicações elementares de integrais definidas em administração, e terá utilidade tanto para o estudante de administração e áreas afins que deseja iniciar estudos em ferramentas matemáticas para aplicações em seu campo de estudo, como para um professor de cálculo, originado da matemática pura, que leciona nos cursos acima mencionados e busca maior familiaridade com os termos e aplicações econômicas e de gestão, da sua ciência. Para ambos, fica a observação de que este não tem a intenção de que se aprenda aqui, conceitos relacionados à Cálculo Diferencial e Integral, mas tão somente seu uso como ferramenta, auxiliado por uma breve revisão. Assim, esta monografia busca estudar problemas de gestão por meio da ótica matemática, com o uso do Cálculo, e foco em integrais definidas. Para isso, é necessário revisar conceitos elementares deste, apresentar modelos e situações em que as integrais definidas podem gerar resultados com grande precisão, assim como discutir acerca de outras técnicas que auxiliarão na obtenção dos resultados desejados.

O desenvolvimento do trabalho está dividido em dois grandes blocos. O primeiro (Capítulo 2) busca revisar conceitos de cálculo que serão utilizados ao longo do trabalho, sem a extensão e profundidade de um livro generalista, mas contendo o necessário para a resolução dos itens estudados. No segundo bloco (Capítulo 3) há uma seção inicial reservada para a apresentação de funções simples originadas a partir de fenômenos econômicos elementares (voltada principalmente ao estudante que sempre se deparou em problemas com a expressão: Este comportamento é definido pela função $f \dots$, mas nunca foi apresentado ao processo de formação da mesma). A partir daí, tem-se então vários exemplos de aplicações da integral definida, com a devida resolução dos problemas e comentários.

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

2.1 NÚMEROS REAIS

O sistema numérico real consiste em um conjunto de elementos chamados de números reais, no qual, duas operações são definidas, denominadas adição e multiplicação, denotadas pelos símbolos $+$ e $\cdot$, respectivamente. Se a e b forem elementos do conjunto $\mathbb{R}$, $a+b$ denotará a soma de a e b e $a \cdot b$ (ou ab) denotará o seu produto. A operação de subtração é definida pela igualdade

$$a - b = a + (-b)$$

onde $-b$ denota o negativo de b, tal que $b + (-b) = 0$. A operação de divisão é definida pela igualdade

$$a \div b = a \cdot b^{-1} \; , \; b \neq 0$$

onde b^{-1} denota o inverso de b, tal que $b \cdot b^{-1} = 1$ (LEITHOLD, 1988).

Um número real pode ser classificado como racional ou irracional. Um número racional é qualquer número que pode ser expresso como a razão de dois inteiros de tal forma que o denominador não seja nulo. O conjunto dos números racionais é denotado pela letra Q, ou ainda, $\mathrm{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \; ; \; a \in \mathbb{Z} \; e \; b \in \mathbb{Z}^* \right\}$.

Os números reais que não são racionais são chamados de números irracionais. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é um número que não pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros e $q \neq 0$, ou seja, $\sqrt{2}$ é um número irracional. Outros exemplos de números irracionais são $\pi \approx 3.1415$, $e \approx 2.71$, $\sqrt{3}$, etc .

O conjunto formado por todos os números racionais e irracionais é o conjunto dos números reais que será denotado por $\mathbb{R}$.

2.1.1 Desigualdades

No conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ existe um subconjunto denominado conjunto dos números reais positivos, denotado por $\mathbb{R}_+^*$. Lima (LIMA, 2010) afirma que este conjunto verifica o Axioma da Ordem:

- Se $a \in \mathbb{R}$, ou $a = 0$ ou $a \in \mathbb{R}_+^*$ ou $-a \in \mathbb{R}_+^*$
- Se $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ então $a + b \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \cdot b \in \mathbb{R}_+^*$

O número real a é negativo se, e somente se, $-a$ é positivo $\left(a \in \mathbb{R}_-^*\right)$

Pode-se agora definir os símbolos $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ chamados respectivamente, menor que, maior que, menor ou igual a, maior ou igual a. Daí, dizer que

- $a < b$ significa que $b - a$ é positivo.
- $a > b$ significa que $b < a$, ou seja, que $a - b$ é positivo.
- $a \leq b$ significa que $a < b$ ou $a = b$.
- $a \geq b$ significa que $b \leq a$.

Estas expressões são chamadas de desigualdades (estritas e não estritas).

Assim, diz-se que $x > 0$ se, e somente se, x é positivo. E quando $x \geq 0$, diz-se que x é não negativo.

2.1.2 Intervalos

O conjunto de todos os números x que satisfazem a desigualdade $a < x < b$ é chamado intervalo aberto de a e b, denotado por (a, b) (DEMANA et al., 2009), isto é,

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}.$$

Os números a, b são chamados, extremos do intervalo. Analogamente, tem-se:

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\} \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\} \ . \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}
\end{aligned}$$

Na notação de intervalos serão usados também o símbolo $+\infty$ e $-\infty$ para os conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} \{x \in \mathbb{R} \;/\; x > a\} & = & (a, +\infty) \\ \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq a\} & = & [a, +\infty) \\ \{x \in \mathbb{R} \;/\; x < b\} & = & (-\infty, b) \\ \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \leq b\} & = & (-\infty, b] \end{array}.$$

2.1.3 Valor Absoluto - Módulo

Seja x um número real, o valor absoluto de x (módulo de x) é definido por Barboni (BARBONI; PAULETTE, 2007) como:

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Geometricamente $|x|$ pode ser interpretado como sendo a distância do ponto P, correspondente a x, à origem O, isto é, o comprimento do segmento OP. Segue as seguintes propriedades:

1. $|x| = \sqrt{x^2}$
2. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$, onde $a > 0 \; e \; x \in \mathbb{R}$
3. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \; ou \; x > a$, onde $a > 0 \; e \; x \in \mathbb{R}$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, temos $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
5. $\forall a \in \mathbb{R} \; e \; b \in \mathbb{R}^*$, temos $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, temos $|a + b| \leq |a| + |b|$
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, temos $|a - b| \leq |a| + |b|$
8. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, temos $|a| - |b| \leq |a - b|$

2.2 FUNÇÕES REAIS

2.2.1 Definições

De acordo com Barboni (BARBONI; PAULETTE, 2007), uma função

$$\begin{array}{rcccl} f & : & X & \longrightarrow & Y \\ & & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

consta de três partes:

- um conjunto X, chamado domínio da função (conjunto onde a função é definida).
- um conjunto Y, chamado contradomínio da função (conjunto onde a função toma valores).
- uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento de $x \in X$, um único elemento $y \in Y$.

O número $y = f(x)$ é dito o valor que a função f assume em x, onde x é chamado variável independente e y de variável dependente.

Quando $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ diz-se que a função $f : X \to Y$ é de uma variável real a valores reais. De agora em diante, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

Alternativamente, Avila (AVILA, 2008) afirma que uma função pode ser também definida como um conjunto de pares ordenados (x,y), sendo que dados dois pares ordenados distintos nenhum deles terá a primeira coordenada igual.

O conjunto de todos os valores admissíveis de x é chamado Domínio de f e o conjunto de todos os valores resultantes de y de Imagem de f, isto é,

$$\begin{aligned} Dom\, f &= \{x \in \mathbb{R}; f(x) \in \mathbb{R}\} \\ e& \\ Im\, f &= \{y \in \mathbb{R}; y = f(x)\ ,\ x \in Dom\, f\} \end{aligned}$$

Define-se ainda o gráfico da função f, denotado por $Graf\ f$, como

$$Graf\ f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2; x \in\ Dom\, f\}$$

O gráfico de uma função não pode ser interceptado por uma reta vertical em mais de um ponto.

Definição 2.1 *Dadas duas funções f e g (LEITHOLD, 1988):*

- *a sua soma, denotada por $f + g$, é a função definida por:*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad e \qquad Dom\,(f+g) = Dom\, f \cap Dom\, g$$

- *a sua diferença, denotada por $f - g$, é a função definida por:*

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad e \qquad Dom\,(f-g) = Dom\, f \cap Dom\, g$$

- *o seu produto, denotada por* $f \cdot g$*, é a função definida por:*

$$(f \cdot g)(x) \quad = \quad f(x) \cdot g(x) \qquad e \qquad Dom\,(f \cdot g) = Dom\, f \cap Dom\, g$$

- *o seu quociente, denotada por* $\dfrac{f}{g}$*, é a função definida por:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \quad = \quad \frac{f(x)}{g(x)} \qquad e \qquad Dom\left(\frac{f}{g}\right) = (Dom\, f \cap Dom\, g) - \{x \in \mathbb{R}\,;\, g(x) = 0\}$$

Definição 2.2 *Dadas duas funções* f *e* g*, a função composta de* f *e* g *(*f *com* g*), denotada por* $f \circ g$*, é a função definida por Leithold (LEITHOLD, 1988):*

$$(f \circ g)\,(x) \quad = \quad f(g(x)) \qquad e \qquad Dom\,(f \circ g) = \{x \in Dom\, f\,;\, g(x) \in Dom\, f\}$$

Observação 2.1

- *Importante salientar que a ordem em que a composição é efetuada é muito importante. A propriedade comutativa, na maioria das vezes não é válida para composição de funções, ou seja,* $f \circ g \neq g \circ f$.
- *A operação composição de funções é associativa, ou seja,*$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Definição 2.3 *Diz-se que uma função* f *é:*

- *par se,* $\forall x \in Dom\, f,\ f(-x) = f(x)$.
- *ímpar se,* $\forall x \in Dom\, f,\ f(-x) = -f(x)$.

em ambos os casos, deve ser entendido que se $x \in Dom\, f$ *então* $-x \in Dom\, f$.

2.2.2 Tipos de Funções

Barboni (BARBONI; PAULETTE, 2007) classifica as funções como:

- Função Constante: $f(x) = c\,;\ c \in \mathbb{R}$
- Função Afim: $f(x) = ax + b\,;\ a, b \in \mathbb{R}\ e\ a \neq 0$
  Quando $b = 0,\ f(x) = ax$ é dita linear.
  Quando $b = 0$ e $a = 1,\ f(x) = x$ é dita identidade.
- Função Polinomial de grau n: A função definida por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

onde $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ são números reais $(a_n \neq 0)$ e n é um inteiro não negativo.
Se $n = 2$, temos função quadrática.
Se $n = 3$, temos função cúbica.

- Função Racional: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinomiais.

- Função Algébrica: Formada por um número finito de operações algébricas sobre as funções identidade e constante. Estas operações algébricas incluem adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

- Funções Transcedentais: São por exemplo, as funções trigonométricas, as funções exponencial e as logarítmica.

- Funções definidas por várias sentenças. Dentre elas, tem-se:

  – Função Valor Absoluto:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & , \quad se \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad se \quad x \leq 0 \end{cases}$$

  – Função:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad se \quad x \leq -1 \\ 2 & , \quad se \quad -1 < x < 1 \\ 0 & , \quad se \quad x \geq 1 \end{cases}$$

2.2.3 Translações de Gráficos

Dada uma função $y = f(x)$, considere o $Graf\ f$ e $a > 0$, Avila (AVILA, 2008) afirma que translações em $Graf\ f$ podem ser realizadas da seguinte forma:

- Translações horizontais: O gráfico da função g dada por $g(x) = f(x-a)$ é o mesmo de $y = f(x)$, transladado a unidades para a direita e o gráfico de h, com $h(x) = f(x+a)$ é o $Graf\ f$ transladado a unidades para a esquerda.

- Translações verticais: O gráfico da função G dada por $G(x) = f(x) + a$ é o mesmo de $y = f(x)$, transladado a unidades para cima e o gráfico de H, com $H(x) = f(x) - a$ é o $Graf\ f$ transladado a unidades para baixo.

2.2.4 Monotonicidade

Definição 2.4 *Uma função f definida num intervalo I será (LIMA, 2010):*

- *crescente em I se, e somente se, $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ com $x_1, x_2 \in I$;*
- *decrescente em I se, e somente se, $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ com $x_1, x_2 \in I$.*

Se uma função for crescente ou decrescente num intervalo I diremos que ela é monótona em I.

2.2.5 Função Inversa

De acordo com Barboni (BARBONI; PAULETTE, 2007)

Definição 2.5 *Uma função f chama-se injetiva se cada número em sua imagem corresponder exatamente a um número em seu domínio; ou seja, para todo $x_1, x_2 \in Dom\, f$ se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$ em outras palavras, quando $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$.*

Definição 2.6 *Uma função $f : A \to B$ chama-se sobrejetiva quando $\forall\, y \in B$, $\exists\, x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

Definição 2.7 *Uma função f é dita bijetiva quando é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.*

Definição 2.8 *Uma função $y = f(x)$ é dita limitada se $\exists\, K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K, \forall\, x \in Dom f$.*

Definição 2.9 *Se f for uma função bijetiva, então existirá uma função f^{-1}, chamada de inversa de f, tal que*

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

O $Dom\, f^{-1} = Im\, f$ e $Im\, f^{-1} = Dom\, f$.

Se uma função f admitir inversa diz-se que f é inversível.

Teorema 2.1 *Se f for uma função bijetiva tendo f^{-1} como sua inversa, então f^{-1} será uma função bijetiva tendo f como sua inversa. Além disso,*

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para } x \text{ no domínio de } f$$

e

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ para } x \text{ no domínio de } f^{-1}.$$

Observação 2.2 *Para encontrar a função inversa de um função f bijetiva, procede-se da seguinte forma.*

1. *Escreve-se* $y = f(x)$
2. *Resolve-se essa equação para x em termos de y.*
3. *Para expressar f^{-1} como uma função de x, troca-se x por y. A equação resultante é* $y = f^{-1}(x)$.

Observação 2.3 *Supondo que $(x,y) \in Graf\ f$ onde $y = f(x)$, tem-se que $(y,x) \in Graf\ f^{-1}$ tal que $x = f^{-1}(y)$. Assim, segue que o $Graf\ f^{-1}$ é simétrico ao $Graf\ f$ em relação à reta $y = x$.*

2.2.6 Função Exponencial

Definição 2.10 *Seja $a > 0$, $a \neq 1$. A função f definida por*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) = a^x \end{array}$$

denomina-se função exponencial de base a e $Dom\, f = \mathbb{R}$.

Demana (DEMANA et al., 2009) enumera algumas propriedades da função exponencial. Se $a > 0$, $b > 0$, x e y números reais quaisquer:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$;
3. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$;
4. se $a > 1$ e $x < y$ então $a^x < a^y$;
5. se $0 < a < 1$ e $x < y$ então $a^x > a^y$.

Então, pela propriedade 4, a função exponencial

$$f(x) = a^x\,,\, a > 1$$

é crescente em $\mathbb{R}$, e pela propriedade 5

$$f(x) = a^x\,,\, 0 < a < 1$$

é decrescente em $\mathbb{R}$.

2.2.7 Função Logarítmica

A função $f(x) = a^x$ $(a > 1)$ é crescente em $\mathbb{R}$ e sua imagem é $(0, +\infty)$. Então, de acordo com Anton (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007), esta admite uma inversa, definida no intervalo de $(0, +\infty)$. Também para $0 < a < 1$, a função $f(x) = a^x$ tem inversa pois é decrescente em $\mathbb{R}$ e sua imagem é $(0, +\infty)$.

Pode-se definir a função logarítmica de base a sendo a um número positivo qualquer diferente de 1.

Definição 2.11 *Se a for um número positivo qualquer diferente de 1, a função logarítmica de base a será a inversa da função exponencial de base a e escreve-se*

$$y = \log_a x \text{ se e somente se } a^y = x,$$

sendo Dom $log_a = \mathbb{R}_+^*$. *Para a expressão* $\log_a x$, *lê-se "o logaritmo de x na base a".*

Observação 2.4 *Quando a base é e, denota-se* $\log_e x$ *por* $\ln x$.

Como $f(x) = \log_a x$ *e* $g(x) = a^x$ *são funções inversas, então*

$$f(g(x)) = \log_a a^x = x$$

e

$$g(f(x)) = a^{\log_a x} = x$$

em particular $\ln e^x = x$ *e* $e^{\ln x} = x$.

As propriedade da função logarítmica são enumeradas por Demana (DEMANA et al., 2009). Sendo a um número positivo qualquer diferente de 1, e x e y quaisquer números positivos, tem-se

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^y) = y \log_a x$
4. $\log_a 1 = 0$

2.3 LIMITES E CONTINUIDADE

As duas operações matemáticas fundamentais em Cálculo são a diferenciação e a integração. Essas operações envolvem o cálculo da derivada e da integral definida, ambas baseadas na noção de limite. Em decorrência disso, o estudo destes é fundamental para o entendimento e uso das duas operações citadas.

2.3.1 O Limite de Uma Função

O limite de uma função pode ser definido, de acordo com Stewart (STEWART, 2011), como

Definição 2.12 *Seja f uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio número a. O limite de $f(x)$ quando x tende a a será L, escrito como*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se a seguinte afirmativa for verdadeira: Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x-a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$

Para a aplicação adequada de limites, o uso dos teoremas relacionados a estes é fundamental, então, pode-se relacionar alguns, baseados em Anton (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007)

2.3.2 Teoremas

Teorema 2.2 *Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.*

Teorema 2.3 *Se m e b forem constantes quaisquer,*

$$\lim_{x \to a}(m \cdot x + b) = ma + b$$

Teorema 2.4 *Se c for uma constante, então para qualquer número a,*

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Teorema 2.5 *Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então*

$$\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

Teorema 2.6 *Se* $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2, \cdots$, $\lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$ *então*

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n$$

Teorema 2.7 *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$, *então*

$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

Teorema 2.8 *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e n for um inteiro positivo qualquer, então*

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = L^n$$

Teorema 2.9 *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$, *então*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ se } M \neq 0$$

Teorema 2.10 *Seja n um inteiro tal que* $n \geq 2$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = L$, *então*

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

com a restrição de que se n for par, $L > 0$.

Teorema 2.11 $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *se e somente se* $\lim_{x\to a}[f(x) - L] = 0$

2.3.3 Limites Laterais

Além da definição genérica de limites, é necessário discorrer sobre os limites laterais, fundamentais em por exemplo, a verificação da derivada em um determinado ponto, a ser estudado posteriormente. Assim, pode-se definí-los, de acordo com Stewart (STEWART, 2011), como

Definição 2.13 *Seja f uma função que está definida em todos os números de algum intervalo aberto* (a,c). *Então, o limite de* $f(x)$ *quando x tende a a pela direita é L, e escrevemos*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, *existir um* $\delta > 0$ *tal que se* $0 < x - a < \delta$ *então* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Se, ao considerar o limite de uma função, a variável independente *x* estiver restrita a valores menores do que um número *a*, diz que *x* tende a *a* pela esquerda; o limite é chamado, então, de limite lateral esquerdo ou limite esquerdo.

Definição 2.14 *Seja f uma função definida em todos os números de algum intervalo aberto (d,a). Então, o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é L, e escrevemos*

$$\lim_{t\to a^-} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que se $0 < a - x < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Há a possibilidade de se referir ao $\lim_{x\to a} f(x)$ como o limite bilateral, para distingui-lo dos limites laterais. Os Teoremas de Limite, dados na seção 2.3.2, permanecem válidos quando é trocado "$x \to a$" por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

Teorema 2.12 *$\lim_{x\to a} f(x)$ existe e será igual a L se e somente se $\lim_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existirem e forem iguais a L*

2.3.4 Limites Infinitos

Considerando-se limites quando $L = +\infty$ ou $L = -\infty$, Barboni (BARBONI; PAULETTE, 2007) os define como

Definição 2.15 *Seja f uma função definida em todo número de um intervalo aberto I contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Quando x tende a a, $f(x)$ cresce indefinidamente, e escreve-se*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

se para qualquer $N > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) > N$.

Definição 2.16 *Seja f uma função definida em todo número de algum intervalo aberto I contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Quando x tende a a, $f(x)$ decresce indefinidamente, e escreve-se*

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

se para todo número $N < 0$, existir um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) < N$.

Para estes, Anton (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007) enumera os teoremas a seguir

Teorema 2.13 *Se r for um inteiro positivo qualquer, então*

1. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^r} = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & se \quad r \quad for\ ímpar \\ +\infty & se \quad r \quad for\ par \end{cases}$

Teorema 2.14 *Se a for um número real qualquer e se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, *onde c é uma constante não nula, então*

1. *se* $c > 0$ *e se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *por valores positivos de* $f(x)$

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

2. *se* $c > 0$ *e se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *por valores negativos de* $f(x)$

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

3. *se* $c < 0$ *e se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *por valores positivos de* $f(x)$

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

4. *se* $c < 0$ *e se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *por valores negativos de* $f(x)$

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

O teorema também será válido se "$x \to a$*" for substituído por "*$x \to a^+$*" ou "*$x \to a^-$*".*

Teorema 2.15 *1. Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, *onde c é uma constante qualquer, então*

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = -\infty$$

2. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, *onde c é uma constante qualquer, então*

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = +\infty$$

O teorema também será válido se "$x \to a$*" for substituído por "*$x \to a^+$*" ou "*$x \to a^-$*".*

Teorema 2.16 *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, *onde c é uma constante não nula, então*

1. *se* $c > 0$ *então* $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$*;*

2. *se* $c < 0$ *então* $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = -\infty$.

O teorema também será válido se "$x \to a$*" for substituído por "*$x \to a^+$*" ou "*$x \to a^-$*".*

Teorema 2.17 *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = c$*, onde c é uma constante qualquer, então*

1. *se* $c > 0$ *então* $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = -\infty$*;*
2. *se* $c < 0$ *então* $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = +\infty$.

O teorema também será válido se "$x \to a$*" for substituído por "*$x \to a^+$*" ou "*$x \to a^-$*".*

2.3.5 Limites No Infinito

Em algumas funções estudadas, deverão ser considerados limites quando a variável independente cresce ou decresce ilimitadamente. Quando uma variável está crescendo ilimitadamente através de valores positivos, escreve-se $x \to +\infty$, e este é definido por Leithold (LEITHOLD, 1988) como

Definição 2.17 *Seja* f *uma função definida em um intervalo* $(a, +\infty)$ *o limite de* $f(x)$ *quando* x *cresce indefinidamente, é* L*, escrito*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$*, não importa quão pequeno, existir um número* $N > 0$ *tal que se* $x > N$ *então* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Informalmente, pode-se dizer que $f(x)$ fica cada vez mais próximo de L, na medida em que x assume valores arbitrariamente grandes.

Pensamento análogo se aplica quando a variável x está decrescendo ilimitadamente, escrito como $x \to -\infty$

Definição 2.18 *Seja* f *uma função definida em um intervalo* $(-\infty, a)$*. O limite de* $f(x)$ *quando* x *decresce indefinidamente, é* L*, notado por*

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$*, não importa quão pequeno, existir um número* $N < 0$ *tal que se* $x < N$ *então* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Os Teoremas de Limite, permanecem válidos quando é trocado “$x \to a$” por “$x \to +\infty$” ou “$x \to -\infty$”.

Teorema 2.18 *Se r for um inteiro positivo qualquer, então*

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^r} = 0$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

O limite “infinito”para valores da função quando a variável independente se aproxima do infinito também pode ser considerado por meio das seguintes definições formais:

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty & \text{e} & \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty & \text{e} & \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \end{array}.$$

Por exemplo, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se a função f estiver definida em algum intervalo $(a, +\infty)$ e se para todo $N > 0$ existir um $M > 0$ tal que se $x > M$ então $f(x) > N$.

Definição 2.19 *A reta $y = b$ é denominada uma assíntota horizontal do gráfico da função f se pelo menos uma das seguintes afirmações for válida:*

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ *e para um número N, se $x > N$, então $f(x) \neq b$;*
2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ *e para um número N, se $x < N$, então $f(x) \neq b$.*

2.3.6 Continuidade

A condição de continuidade da função é fundamental no uso de algumas ferramentas em Cálculo, e esta é tratada por Leithold (LEITHOLD, 1988) como

Definição 2.20 *Diz-se que a função f é contínua no número a se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. $f(a)$ *existe;*
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe;*
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Se uma ou mais de uma dessas condições não forem verificadas em a, a função f será descontínua em a.

Suponha que f seja uma função descontínua em um número a, mas para a qual $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. Assim, $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$ ou então $f(a)$ não existe. Tal descontinuidade é chamada de descontinuidade removível, pois se f for redefinida em a de tal forma que $f(a)$ seja igual ao $\lim_{x\to a} f(x)$, a nova função tornar-se-á contínua em a. Se a descontinuidade não for removível, ela será chamada de descontinuidade essencial.

Teorema 2.19 *Se f e g forem funções contínuas em um número a, então*

1. *$f+g$ será contínua em a;*
2. *$f-g$ será contínua em a;*
3. *$f\cdot g$ será contínua em a;*
4. *f/g será contínua em a, desde que $g(a)\neq 0$.*

Teorema 2.20 *Uma função polinomial é contínua em qualquer número.*

Teorema 2.21 *Uma função racional é contínua em todos os números do seu domínio.*

Teorema 2.22 *A função f será contínua no número a se f estiver definida em algum intervalo aberto contendo a e se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que se $|x-a| < \delta$ então $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.*

Teorema 2.23 *Se $\lim_{x\to a} g(x) = b$ e se a função f for contínua em b,*

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x) = f(b)$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

Teorema 2.24 *Se a função g for contínua em a e a função f for contínua em $g(a)$, então a função composta $f\circ g$ será contínua em a.*

Definição 2.21 *Diz-se que uma função é contínua em um intervalo aberto se, e somente se, ela for contínua em todos os números do intervalo aberto.*

Para que se considere a continuidade em um intervalo fechado $[a,b]$, é necessário definir a continuidade à direita e continuidade à esquerda, que pode ser feita, de acordo com Leithold (LEITHOLD, 1988) como

Definição 2.22 *A função f será contínua à direita em um número a se e somente se forem satisfeitas as três condições a seguir:*

1. *$f(a)$ existe;*
2. *$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existe;*
3. *$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$*

Definição 2.23 *A função f será contínua à esquerda em um número a se e somente se forem satisfeitas as três condições a seguir:*

1. *$f(a)$ existe;*
2. *$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existe;*
3. *$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$*

Definição 2.24 *Uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado $[a,b]$ será contínua em $[a,b]$ se, e somente se, ela for contínua no intervalo aberto (a,b), contínua à direita em a e contínua à esquerda em b.*

Definição 2.25 *Tem-se*

- *Uma função cujo domínio inclui o intervalo semi-aberto $[a,b)$ será contínua em $[a,b)$ se e somente se ela for contínua no intervalo aberto (a,b) e contínua à direita em a.*
- *Uma função cujo domínio inclui o intervalo semi-aberto $(a,b]$ será contínua em $(a,b]$ se e somente se ela for contínua no intervalo aberto (a,b) e contínua à esquerda em b.*

Um tópico importante a ser discutido sobre funções que são contínuas num intervalo fechado, é o chamado teorema do valor intermediário, enunciado por Stewart (STEWART, 2011) da forma

Teorema 2.25 *Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a,b]$, e se $f(a) \neq f(b)$, então, para todo número k entre $f(a)$ e $f(b)$ existirá um número c entre a e b tal que $f(c) = k$.*

Teorema 2.26 (Teorema do "Sanduíche") *Suponha que as funções f, g e h estejam definidas em algum intervalo aberto I contendo a, exceto possivelmente no próprio a e que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x em I, tal que $x \neq a$. Suponha também que $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} h(x)$ ambos existam e tenham o mesmo valor L. Então $\lim_{x \to a} g(x)$ existe e é igual a L.*

2.4 DERIVADA

2.4.1 A Reta Tangente e a Derivada

Segundo Tan (TAN, 2001), a relação entre a reta secante, a reta tangente e a derivada de uma função pode ser tratada da seguinte forma

Dada uma f contínua em um intervalo I. Considere dois pontos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$ em um gráfico de f e uma reta secante por P e Q. Sejam $\Delta x = x_2 - x_1$ (incremento de x) e $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ (incremento de y), a inclinação ou coeficiente angular da reta secante m_{PQ} é dado por

$$m_{PQ} = \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

a razão $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ é chamada de razão incremental.

Também

$$m_{PQ} = \tan\theta = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Agora, fazendo-se o ponto $Q \to P$, $x_2 \to x_1$, $\Delta x \to 0$ e $m_{PQ} \to m$ (coeficiente angular da reta tangente).

Definição 2.26 *Supondo-se que a função f seja contínua em x_1. A reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$ é*

1. *a reta que passa por P tendo inclinação $m(x_1)$, dada por*

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

   se o limite existir;

2. *a reta $x = x_1$ se*

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \textit{ for } +\infty \textit{ ou } -\infty$$

   e

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \textit{ for } +\infty \textit{ ou } -\infty$$

Definição 2.27 *A reta normal a um gráfico em um dado ponto é a reta perpendicular a reta tangente naquele ponto.*

Definição 2.28 *A derivada de uma f é a função denotada por f', tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f seja dado por*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se o limite existir.

Se x_1 for um determinado número no $Dom f$, então

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

se o limite existir.

Observação 2.5 *Nota-se que a inclinação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(x_1, f(x_1))$ é exatamente a derivada de f em x_1, isto é, $m(x_1) = f'(x_1)$ se a reta tangente não for a reta $x = x_1$.*

Notação: Se $y = f(x)$, então $f'(x)$ é sua derivada. Pode-se usar outras notações para a derivada: $\dfrac{dy}{dx}$; $\dfrac{d[f(x)]}{dx}$ e $D_x[f(x)]$.

2.4.2 Derivabilidade e Continuidade

O processo de cálculo da derivada é chamada de derivação. Leithold (LEITHOLD, 1988) afirma que, se uma função possui uma derivada em x_1, a função será derivável em x_1. Uma função será derivável em um intervalo aberto se ela for derivável em todo número no intervalo aberto.

Teorema 2.27 *Se uma função f for derivável em x_1, então f será contínua em x_1.*

Observação 2.6 *Uma função f não é derivável em c, se:*

- f é descontínua em c;
- f é contínua em c, mas não tem reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$, isto é, f faz um bico em $(c, f(c))$;

- f é contínua em c e a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ for vertical.

Definição 2.29 *Se a função f for definida em x_1, então a derivada à direita de f em x_1, denotada por $f'_+(x_1)$, será definida por*

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \iff f'_+(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

se o limite existir.

Definição 2.30 *Se a função f for definida em x_1, então a derivada à esquerda de f em x_1, denotada por $f'_-(x_1)$, será definida por*

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \iff f'_-(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

se o limite existir.

Segue que uma função f definida num intervalo aberto contendo x_1 será derivável em x_1 se e somente se $f'_+(x_1)$ e $f'_-(x_1)$ ambas existirem e forem iguais.

2.4.3 Teoremas sobre Derivação

Como o processo de cálculo da derivada de uma função a partir da sua definição, em geral é lento e trabalhoso, então, podem ser enunciados, segundo Barboni (BARBONI; PAULETTE, 2007), alguns teoremas que possibilitam encontrar derivadas com mais facilidades.

Teorema 2.28 *Se c for uma constante e se $f(x) = c$ para todo x, então $f'(x) = 0$.*

Teorema 2.29 *Se n for um inteiro positivo e se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.*

Teorema 2.30 *Se f for uma função, c uma constante e g a função definida por $g(x) = c \cdot f(x)$ então, se $f'(x)$ existir, $g'(x) = c \cdot f'(x)$.*

Teorema 2.31 *Se f e g forem funções e se h for a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$ então, se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.*

Teorema 2.32 *A derivada da soma de um número finito de funções é igual à soma de suas derivadas, se elas existirem.*

Teorema 2.33 *Se f e g forem funções e se h for a função definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ então, se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, $h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$.*

Teorema 2.34 *Se f e g forem funções e se h for a função definida por $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, onde $g(x) \neq 0$ então, se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, $h'(x) = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.*

Para determinar a derivada de uma função composta usa-se um dos importantes teoremas do Cálculo: A regra da cadeia. Stewart (STEWART, 2011) afirma

Teorema 2.35 *Se a função g for derivável em x e a função f for derivável em $g(x)$, então a função composta $f \circ g$ será derivável em x, e*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Alternativamente, pode-se enuncia a regra da cadeia através da notação de Leibniz, que será então

Observação 2.7 *Se y for uma função de u, definida por $y = f(u)$ e $\dfrac{dy}{du}$ existir, e se u for uma função de x, definida por $u = g(x)$ e $\dfrac{du}{dx}$ existir, então y será uma função de x, $\dfrac{dy}{dx}$ existirá, sendo dada por*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Outra forma de considerar a regra da cadeia é substituir $g(x)$ por u na definição

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

então

$$D_x[f(u)] = f'(u)D_x(u)$$

Teorema 2.36 *Se u for uma função de x, derivável, e $u(x) > 0$ então*

$$D_x(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot D_x u$$

Seja f uma função inversível com inversa g, então:

$$f(g(x)) = x \ , \ \forall \, x \in Dom \, g$$

derivando em relação a x, ambos os lados da igualdade

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$$

se f e g forem deriváveis. Portanto

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Se $y = g(x)$ é a inversa da função $x = f(y)$ então $g'(x) = \dfrac{dy}{dx}; \dfrac{dx}{dy} = f'(g(x))$, ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Teorema 2.37 *Se u for uma função de x, derivável, $D_x(e^u) = e^u \cdot D_x u$*

Teorema 2.38 *Seja $f(x) = a^x$, onde a é um número positivo qualquer e $x \in \mathbb{R}$, então*

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

Teorema 2.39 *Se $f(x) = \log_a x$ então $f'(x) = \dfrac{\log_a e}{x}$.*

Observação 2.8 *Se u for uma função diferenciável de x,*

$$D_x(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u} \cdot D_x u$$

Teorema 2.40 *Se $f(x) = x^n$, onde $x > 0$ e $n \in \mathbb{R}$ então $f'(x) = nx^{n-1}$.*

2.4.4 Valor Funcional Máximo e Mínimo

Sabendo-se que a derivada num ponto representa a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função neste ponto, esta permite sua aplicação como auxílio no esboço dos gráficos, além de item fundamental em estudos de otimização, definidos como Barboni (BARBONI; PAULETTE, 2007) como

Definição 2.31 *Uma função f tem valor máximo relativo (ou local) em c se existir um intervalo aberto $I \subset Dom\ f$, contendo o ponto c, tal que $f(c) \geq f(x), \forall\, x \in I$.*

Definição 2.32 *Uma função f tem valor mínimo relativo (ou local) em c se existir um intervalo aberto $I \subset Dom\ f$, contendo o ponto c, tal que $f(c) \leq f(x), \forall\, x \in I$.*

Observação 2.9 *Se f tem um valor máximo relativo ou um valor mínimo relativo em c, diz-se que f tem extremo relativo em c.*

Conceito essencial em estudos de otimização, a determinação dos possíveis valores de c para os quais existe um extremo relativo é possível com o teorema a seguir, de acordo com Tan (TAN, 2001). Assim, em uma função Receita por exemplo, a determinação deste pode indicar o ponto em que esta seja máxima, assim como demonstrar o volume máximo de uma embalagem para certo volume de matéria-prima, por exemplo.

Teorema 2.41 *Seja f definida no intervalo aberto (a,b). Se f tem um extremo relativo em c, onde $a < c < b$, e $f'(c)$ existe então $f'(c) = 0$.*

Se f for uma função derivável em um intervalo aberto (a,b), então os únicos valores possíveis de x para os quais f pode ter um extremo relativo são aqueles em que $f'(x) = 0$; no entanto, $f'(x)$ pode ser igual a zero para um valor específico de x, sem que f possua um extremo relativo neste ponto. Em outras palavras, para funções deriváveis em um intervalo (a,b), a anulação da derivada em um ponto c é condição necessária mas não suficiente para que c seja um extremo relativo.

Em suma, se uma função f está definida em um número c, uma condição necessária à existência de um extremo relativo para f é que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não exista. Porém, essa condição não é suficiente.

Definição 2.33 *Se c for um número no interior do domínio da função f e se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existir, então c será chamado de* **número crítico** *de f.*

Observação 2.10 *Uma condição necessária (mas não suficiente) à existência de um extremo relativo em c é que c seja um número crítico.*

Se dá aqui condições então, para que o problema de encontrar o maior ou menor valor de uma função num dado intervalo seja resolvido.

Definição 2.34 *Uma função f terá um valor máximo absoluto num invervalo I, se existir algum número c no intervalo, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$. Em tal caso, $f(c)$ será o valor máximo absoluto de f no intervalo.*

Definição 2.35 *Uma função f terá um valor mínimo absoluto num invervalo I, se existir algum número c no intervalo, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$. Em tal caso, $f(c)$ será o valor mínimo absoluto de f no intervalo.*

Observação 2.11 *Se a função tem um valor máximo absoluto ou um valor mínimo absoluto em um número c então diz-se que f tem extremo absoluto em c.*

É possível tratar de um extremo absoluto de uma função, mesmo que não seja especificado o intervalo. Em tal caso, é uma referência ao extremo absoluto da função em todo o seu domínio.

Definição 2.36 *$f(c)$ será o valor máximo absoluto da função f se c estiver no domínio de f e se $f(c) \geq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.*

Definição 2.37 *$f(c)$ será o valor mínimo absoluto da função f se c estiver no domínio de f e se $f(c) \leq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.*

Teorema 2.42 (Teorema do Valor Extremo) *Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então f terá um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em $[a,b]$.*

Leithold (LEITHOLD, 1988) afirma que um extremo absoluto de uma função contínua num intervalo fechado deve ser um extremo relativo, ou um valor da função num extremo do intervalo. Como uma condição necessária para que uma função tenha um extremo relativo num número c é que c seja um número crítico. O valor máximo absoluto e o valor mínimo absoluto de uma função contínua f num intervalo fechado $[a,b]$ podem ser determinados pelo seguinte procedimento:

1. Determina-se os valores da função nos números críticos de f em (a,b).

2. Encontra-se os valores de $f(a)$ e $f(b)$.

3. O maior dentre os valores das etapas 1 e 2 será o valor máximo absoluto e o menor será o valor mínimo absoluto.

Barboni (BARBONI; PAULETTE, 2007) enumera então os seguintes teoremas

Teorema 2.43 (Teorema de Rolle) *Seja f uma função, tal que*

1. *Ela seja contínua no intervalo fechado $[a,b]$;*

2. *Ela seja derivável no intervalo aberto (a,b);*

3. *$f(a) = f(b)$ e $f(b) = 0$.*

Então existe um número c no intervalo aberto (a,b), tal que $f'(c) = 0$.

Teorema 2.44 (Teorema do Valor Médio) *Seja f uma função, tal que*

1. *Seja contínua no intervalo fechado $[a,b]$;*
2. *Seja derivável no intervalo aberto (a,b).*

Então, existirá um número c no intervalo aberto (a,b), tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema 2.45 *Se f for uma função tal que $f'(x) = 0$ para todos os valores de x num intervalo I, então f será constante em I.*

2.4.5 Teste da Derivada Primeira

Definição 2.38 *Uma função f definida num intervalo será* **crescente** *naquele intervalo, se e somente se*

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2$$

onde x_1 e x_2 são quaisquer números no intervalo.

Definição 2.39 *Uma função f definida num intervalo será* **decrescente** *naquele intervalo, se e somente se*

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2$$

onde x_1 e x_2 são quaisquer números no intervalo.

Se uma função for crescente ou decrescente num dado intervalo, então diz-se que ela é monótona no intervalo.

Observa-se que quando a declividade da reta tangente é positiva, a função é crescente, e quando a declividade da reta tangente é negativa a função é decrescente. Assim f é crescente quando $f'(x) > 0$ e f é decrescente quando $f'(x) < 0$.

Teorema 2.46 *Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b);*

- *se $f'(x) > 0$ para todo x em (a,b), então f será crescente em $[a,b]$;*

- *se $f'(x) < 0$ para todo x em (a,b), então f será decrescente em $[a,b]$.*

Então, pode-se enunciar o teste que será necessário para o tratamento adequado dos pontos críticos, de acordo com Anton (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007)

Teorema 2.47 (Teste da Derivada Primeira para Extremos Relativos - T.D.P.) *Seja c um ponto do intervalo (a,b). Seja f contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b), podendo eventualmente $f'(c)$ não existir;*

- *se $f'(x) > 0$ no intervalo (a,c) e $f'(x) < 0$ no intervalo (c,b) então f tem valor máximo relativo em c.*
- *se $f'(x) < 0$ no intervalo (a,c) e $f'(x) > 0$ no intervalo (c,b) então f tem valor mínimo relativo em c.*

Leithold então resume o processo necessário para a determinação dos extermos relativos

Observação 2.12 *Em suma, para que sejam determinados os extremos relativos de f:*

1. *Encontra-se $f'(x)$.*
2. *São determinados os números críticos de f, isto é, os valores de x para os quais $f'(x) = 0$ ou para os quais $f'(x)$ não existe.*
3. *Aplica-se o teste da derivada primeira (Teorema 2.47).*

2.4.6 Concavidade e Pontos de Inflexão

O estudo das concavidades e pontos de inflexão, é um importante elemento quando estão sendo tratados temas relacionados a otimização. Leithold (LEITHOLD, 1988) então define

Definição 2.40 *O gráfico de uma função f será côncavo para cima no ponto $(c, f(c))$ se $f'(c)$ existir e se houver um intervalo aberto I contendo c, tal que para todos os valores de $x \neq c$ em I, o ponto $(x, f(x))$ do gráfico estará acima da reta tangente ao gráfico em $(c, f(c))$.*

Definição 2.41 *O gráfico de uma função f será côncavo para baixo no ponto $(c, f(c))$ se $f'(c)$ existir e se houver um intervalo aberto I contendo c, tal que para todos os valores de $x \neq c$ em I, o ponto $(x, f(x))$ do gráfico estará abaixo da reta tangente ao gráfico em $(c, f(c))$.*

Definição 2.42 *Seja f uma função e $c \in D_f$, com f contínua em c. Diz-se que $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão de f se existirem números reais a e b, com $c \in (a,b) \subset D_f$, tal que f tenha concavidades diferentes em (a,c) e em (c,b).*

Teorema 2.48 *Seja f uma função que admite derivada até a 2^a ordem no intervalo aberto I.*

- *Se $f''(x) > 0$ em I, então f terá a concavidade para cima em I.*
- *Se $f''(x) < 0$ em I, então f terá a concavidade para baixo em I.*

O Teorema (2.48) não indica nada sobre o valor da derivada segunda de f num ponto de inflexão. O teorema a seguir, de acordo com Barboni (BARBONI; PAULETTE, 2007) estabelece que se a derivada segunda existir num ponto de inflexão, ela deverá ser zero nele.

Teorema 2.49 *Se a função f for derivável em algum intervalo aberto contendo c e se $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de f, então, se $f''(c)$ existe, $f''(x) = 0$.*

Observação 2.13 - *A recíproca do Teorema (2.49) não é verdadeira. Isto é, se a derivada segunda de uma função for nula num ponto c, o gráfico da função não terá, necessariamente, um ponto de inflexão em $x = c$.*

2.4.7 O Teste da Derivada Segunda

Outro teste para extremos relativos envolve somente o número crítico c. Segundo Anton (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007), tem-se

Teorema 2.50 (Teste da Derivada Segunda para Extremos Relativos) *Seja c um número crítico de uma função f, no qual $f'(c) = 0$ e supondo-se que f' exista para todos os valores de x em algum intervalo aberto contendo c. Se $f''(x)$ existe e*

- *se $f''(c) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em c.*
- *se $f''(c) > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em c.*

Teorema 2.51 *Seja f derivável até a 3^a ordem no intervalo aberto I e seja $c \in I$. Supondo-se que $f''(c) = 0$, $f'''(c) \neq 0$ e que f''' seja contínua em c então $(c, f(c))$ é ponto de inflexão.*

Observação 2.14 - *Se $f''(c) = 0$, bem como quando $f'(c) = 0$, nenhuma conclusão pode ser tirada relativa à existência de extremo relativo de f em c. Para verificar isto, basta analisar as funções $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$ e $h(x) = x^3$.*

2.4.8 Regras de L'Hôspital

Não raro, alguns limites podem apresentar a forma

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

nos quais as funções $f(x)$ e $g(x)$ tendem a zero quando $x\to a$. O caso gera uma forma indeterminado do tipo $\dfrac{0}{0}$, que não pode ser tratada com algumas das propriedades genéricas de limites. Outras situações de formas indeterminadas são $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, ou $\dfrac{-\infty}{-\infty}$. As regras de L'Hôspital aplicam-se a cálculo de limites que apresentam indeterminações como as citadas, e podem ser enunciadas, segundo Leithold (LEITHOLD, 1988) como

Teorema 2.52 (1ªRegra de L'Hôspital) *Sejam f e g funções deriváveis num intervalo aberto I, exceto possivelmente em $a\in I$. Supondo-se que, para todo $x\neq a$ em I, $g'(x)\neq 0$. Então, se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ e se*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

segue que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

O teorema é válido se ambos os limites forem laterais a direita ou a esquerda.

Observação 2.15 *Esta regra também será válida se substituído "$x\to a$" por "$x\to a^+$" ou por "$x\to a^-$" ou por "$x\to\pm\infty$".*

Teorema 2.53 (2ªRegra de L'Hôspital) *Sejam f e g funções deriváveis num intervalo aberto I, exceto possivelmente em $a\in I$. Suponha que, para todo $x\neq a$ em I, $g'(x)\neq 0$. Nestas condições, se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ e se*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

então

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

O teorema é válido se ambos os limites forem laterais à direita ou à esquerda.

Observação 2.16 *A segunda regra continuará válida se substituído "$x\to a$" por "$x\to a^+$" ou por "$x\to a^-$" ou por "$x\to\pm\infty$", assim como se forem substituídos um dos símbolos por $-\infty$, ou ambos, por $-\infty$.*

Observação 2.17 *As outras formas de indeterminação* **(**$0 \cdot \infty, \infty - \infty$**,** 0^0**,** ∞^0**,**1^∞**)** *podem ser reduzidas as formas* $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$*, permitindo então a aplicação das regras de L'Hôspital.*

2.5 DIFERENCIAL

Supondo-se que f seja definida pela equação

$$y = f(x)$$

.

Pode-se mostrar como os incrementos Δy podem ser aproximados, por essa função, a pontos onde f seja derivável (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007). Em tais pontos

$$f'(x) \quad = \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2.5.1}$$

onde $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

Segue de (2.5.1) que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |\Delta x| < \delta$ então

$$\left| \frac{\Delta y - f'(x)\Delta x}{\Delta x} \right| < \varepsilon$$

Isto significa que $|\Delta y - f'(x)\Delta x|$ é pequeno, comparando com $|\Delta x|$. Ou seja, para $|\Delta x|$ suficientemente pequeno, $f'(x)\Delta x$ é uma boa aproximação do valor de Δy e pode-se escrever

$$\Delta y \quad \approx \quad f'(x)\Delta x \tag{2.5.2}$$

se $|\Delta x|$ for suficientemente pequeno.

Definição 2.43 *Se a função f for definida por $y = f(x)$, então a diferencial de y, denotada por dy, será dada por*

$$dy \quad = \quad f'(x)\Delta x \tag{2.5.3}$$

onde x está no domínio de f' e Δx é um incremento arbitrário de x.

A equação (2.5.3) mostra que a diferencial dy é uma função linear do incremento Δx. Por esta razão, dy é chamado aproximação linear do incremento Δx. Tem-se que

$$f(x + \Delta x) \quad \approx \quad f(x) + f'(x)\Delta x$$

Essa aproximação é satisfatória ao menos quando Δx é relativamente pequeno. Se substituído x por a e $\Delta x = x - a$, o resultado será

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

É possivel agora definir a diferencial da variável independente.

Definição 2.44 *Se a função f for definida por $y = f(x)$, então a diferencial de x, denotada por dx, será dada por*

$$dx = \Delta x$$

onde Δx é um incremento arbitrário de x e x é qualquer número no domínio de f'.

Das definições (2.43) e (2.44)

$$dy = f'(x)dx \qquad (2.5.4)$$

Dividindo ambos os membros de (2.5.4) por dx, tem-se

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad (2.5.5)$$

Essa relação expressa a derivada como o quociente de duas diferenciais.

2.6 ANTIDIFERENCIAL

Pode-se dizer que, enquanto o cálculo diferencial se preocupa com a taxa de variação de uma quantidade com relação a outra, a antiderivada busca o inverso: Se conhecemos a taxa de variação entre duas variáveis, como podemos determinar a relação entre as duas? Decorre daí a antidiferencial, ou antiderivada, definida em Tan (TAN, 2001) como

Definição 2.45 *Uma função F será chamada de antiderivada de uma função f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.*

Teorema 2.54 *Se f e g forem duas funções, tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo x no intervalo I, então haverá uma constante K, tal que $f(x) = g(x) + K$ para todo x em I.*

Teorema 2.55 *Se F for uma antiderivada particular de f em um intervalo I, então toda antiderivada de f em I será dada por*

$$F(x) + C \qquad (2.6.6)$$

onde C é uma constante arbitrária e todas as antiderivadas de f em I poderão ser obtidas de (2.6.6), atribuindo-se certos valores a C.

Definição 2.46 *Antidiferenciação é o processo de encontrar o conjunto de todas as antiderivadas de uma dada função. O símbolo $\int$ denota a operação de antidiferenciação e escreve-se*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

onde $F'(x) = f(x)$ e $d(F(x)) = f(x)dx$.

Então

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

Essa fórmula é usada para se obter fórmulas de antidiferenciação, e estabelecendo que quando se determina a antidiferencial da diferencial de uma função, se obtém a própria função, mais uma constante arbitrária. Assim, pode-se considerar que o símbolo de antidiferenciação $\int$ significa a operação inversa da operação denotada por d para o cálculo da diferencial.

Como a antidiferenciação é a operação inversa da diferenciação, os teoremas sobre antidiferenciação podem ser obtidos dos teoremas sobre diferenciação.

Teorema 2.56 $\int dx = x + C$

Teorema 2.57 $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

Teorema 2.58 *Se f_1 e f_2 estão definidas no mesmo intervalo, então*

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

Teorema 2.59 *Se $f_1, f_2, \cdots, f_n$ estão definidas no mesmo intervalo, então*

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)]dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx + \cdots + c_n \int f_n(x)dx$$

onde $c_1, c_2, \cdots, c_n$ são constantes.

Teorema 2.60 *Se n for um número racional*

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ ;\ n \neq -1$$

Teorema 2.61 $\int e^x dx = e^x + C$

Teorema 2.62 $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \; ; \; x > 0$

2.6.1 Algumas Técnicas De Antidiferenciação

Muitas antiderivadas não podem ser encontradas diretamente com a aplicação dos teoremas anteriormente citados. Leithold (LEITHOLD, 1988) então introduz certas técnicas que podem ser usadas no cálculo de tais antiderivadas.

Teorema 2.63 (A Regra da Cadeia para a Antidiferenciação) *Seja g uma função diferenciável e seja o intervalo I a imagem de g. Suponha que f seja um função definida em I e que F seja uma antiderivada de f em I. Então,*

$$\int f(g(x))[g'(x)dx] = F(g(x)) + C$$

Teorema 2.64 *Se g for uma função diferenciável e se n for um número racional*

$$\int [g(x)]^n [g'(x)dx] = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

Uma fórmula de integração rápida é

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C$$

Teorema 2.65 $\int u^n dx = \begin{cases} \frac{u^{n+1}}{n+1} + C & se \quad n \neq -1 \\ \ln |u| + C & se \quad n = -1 \end{cases}$

Da fórmula da derivada do produto de duas funções se obtém um método de antidiferenciação especialmente útil, chamada antidiferenciação por partes. Se f e g forem funções diferenciáveis, então

$$f(x)g'(x) = D_x[f(x)g(x)] - g(x)f'(x)$$

antidiferenciando ambos os membros, se obtém

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Para propósitos de cálculo existe uma maneira mais conveniente de escrever essa fórmula, tomando

$$u = f(x) \quad e \quad v = g(x)$$

então

$$du = f'(x)dx \quad e \quad dv = g'(x)dx$$

assim

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Duas regras gerais podem ser enunciadas:

- A parte escolhida com dv tem de ser facilmente antidiferenciável.
- $\int vdu$ não pode ser mais complicada que $\int udv$.

2.7 INTEGRAL DEFINIDA

2.7.1 Soma De Riemann

As definições de integral aqui apresentadas serão sempre dependentes de somas de um grande número de parcelas, portanto, convém introduzir a notação sigma, utilizando o símbolo $\sum$, a letra sigma maiúscula do alfabeto grego, para somatório. Alguns exemplos do uso de somatória são dados a seguir.

Exemplo 2.1 *1.* $\sum\limits_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

2. $\sum\limits_{j=1}^{n} j^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3$

Demana (DEMANA et al., 2009) define formalmente então o somatório como

Definição 2.47 $\sum\limits_{i=m}^{n} F(i) = F(m) + F(m+1) + F(m+2) + \cdots + F(n-1) + F(n)$ *onde m e n são inteiros, e* $m \leq n$.

Notação:

- i: índice da somatória;
- m: limite inferior;

- n: limite superior.

Teorema 2.66 *Dados a, b e c constantes quaisquer, então:*

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} c = cn;$

2. $\sum\limits_{i=1}^{n} c \cdot F(i) = c \sum\limits_{i=1}^{n} F(i);$

3. $\sum\limits_{i=1}^{n} [F(i) + G(i)] = \sum\limits_{i=1}^{n} F(i) + \sum\limits_{i=1}^{n} G(i);$

4. $\sum\limits_{i=a}^{b} F(i) = \sum\limits_{i=a+c}^{b+c} F(i-c).$

Teorema 2.67 *Se n for um inteiro positivo, então:*

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

2.7.2 Definição da integral definida (Área)

O principal problema discutido nessa seção se relacionado à determinação de uma área plana, se esta é delimitada por uma curva.

Considera-se uma região **R** no plano, limitada pelo eixo x, pelas retas $x = a$, $x = b$ e pelo gráfico de $y = f(x)$, onde f é contínua em $[a,b]$. Para simplificar, se toma $f(x) \geq 0, \forall\, x \in [a,b]$.

2.7.3 Partição de um Intervalo

Segundo Leithold (LEITHOLD, 1988) uma partição do intervalo $[a,b]$ é um subconjunto finito $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset [a,b]$ onde $x_0 = a$ e $x_n = b$; $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

Uma partição Δ de $[a,b]$ divide $[a,b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$; $i = 1, 2, \cdots, n$ chamados de intervalos da partição Δ.

A amplitude do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é indicada por $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. Assim:

$$\Delta_1 x = x_1 - x_0 \ ; \ \Delta_2 x = x_2 - x_1 \ ; \ \Delta_3 x = x_3 - x_2 \ ; \ \cdots$$

Os números $\Delta_1 x\,, \Delta_2 x\,, \Delta_3 x\,, \cdots \Delta_n x\,,$ não são necessariamente iguais. O maior deles denomina-se amplitude ou norma da partição Δ, e indica-se por $\|\Delta\|$.

Sejam f uma função definida em $[a,b]$ e $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Para qualquer índice i; $i = 1, \cdots, n$, considere $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ arbitrário.

Haverá então n retângulos de comprimentos $\Delta_i x$ e altura $f(\xi_i)$

Sejam S_n unidades quadradas a soma das áreas desses n retângulos, ou seja,

$$S_n = f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + f(\xi_3)\Delta_3 x + \cdots + f(\xi_n)\Delta_n x$$

ou melhor,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

é chamada Soma de Riemann.

Se os valores de $f(x)$ não estão restritos aos valores não-negativos, alguns valores $f(\xi_i)$ podem ser negativos. Em tal caso, a interpretação geométrica da soma de Riemann é a soma das medidas das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x com os negativos das medidas das áreas dos retângulos abaixo do eixo x.

Definição 2.48 *Seja f uma função cujo domínio $D \supset [a,b]$. Então f será integrável em $[a,b]$ se existir um número L satisfazendo a seguinte condição:*

$\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, \delta > 0$ *tal que toda partição Δ para a qual $\|\Delta\| < \delta$ com $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$; $i = 1, 2, \cdots, n$, temos*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x - L \right| < \varepsilon$$

Nessas condições se escreverá

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x = L$$

Definição 2.49 *Se f for uma função definida no intervalo fechado $[a,b]$, então a integral definida de f de a até b, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, será dada por*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

se o limite existir.

Note que afirmação "a função f é integrável no intervalo fechado $[a,b]$"é sinômino da afirmação "a integral definida de f de a até b existe". Na notação de integral $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ é chamada de **integrando**, a de limite inferior e b de limite superior. O símbolo $\int$ é chamado de sinal de integração. O sinal de integração lembra um S maiúsculo, que é apropriado, pois a integral definida é o limite de uma soma. O símbolo é o mesmo que foi usado para indicar a operação de antidiferenciação. A razão para o emprego do mesmo símbolo encontra-se no segundo teorema do fundamental do Cálculo, que possibilita calcular a integral definida através da determinação de uma antiderivada (também chamada de integral indefinida).

Teorema 2.68 *Se uma função for contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então ela será integrável em $[a,b]$.*

Definição 2.50 *Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b]$. Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo$x$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Então a medida A da área da região R é dada por*

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

se e somente se

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Definição 2.51 *Se $a > b$ então $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ se $\int_a^b f(x)dx$ existir.*

Observação 2.18 *Propriedades da Integral Definida*

1. *Se Δ for uma partição qualquer em $[a,b]$ então*

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = b - a\,,\ \textit{ou seja}\,,\ \int_a^b dx = b - a$$

2. *Se k for uma constante, então $\int_a^b k dx = k(b-a)\ ;\ \forall\, k \in \mathbb{R}$;*

3. *Se a função f for integrável no intervalo fechado $[a,b]$ e $k \in \mathbb{R}$ então*

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

4. *Se as funções f e g forem integráveis no intervalo fechado $[a,b]$ então $f+g$ será integrável em $[a,b]$ e*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

5. *Se a função f for integrável nos intervalos fechados $[a,b]$, $[a,c]$ e $[b,c]$ então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

   não importando a ordem de a, b e c.

6. *Se as funções f e g forem integráveis no intervalo fechado $[a,b]$ e se $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Teorema 2.69 *Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e se m e M forem constantes tais que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, então*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

O valor médio para integrais valida várias aplicações exemplificadas neste estudo, razão pela qual seu conceito é importante aqui. Stewart (STEWART, 2011) afirma então

Teorema 2.70 (Valor Médio para Integrais) *Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a,b]$, existe um número χ em $[a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\chi)(b-a)$$

Definição 2.52 *Se a função f for integrável no intervalo fechado $[a,b]$, o Valor Médio de f em $[a,b]$ será*

$$V.M = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Por muito tempo tratadas como áreas distintas, a diferenciação e a integração foram unidas pelos teoremas abaixo, que pela sua importância são conhecidos como os teoremas fundamentais do Cálculo. Segundo Stewart (STEWART, 2011), são eles:

2.7.4 Teoremas Fundamentais do Cálculo

Teorema 2.71 (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo) *Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e seja $x \in [a,b]$. Se F for uma função definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

então

$$F'(x) = f(x)$$

ou ainda

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

Observação 2.19 *E ainda, se $u = u(x)$ vem* $\frac{d}{dx}\left[\int_a^u f(t)dt\right] = f(u)\cdot u'$

Teorema 2.72 (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo) *Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e seja g uma função tal que $g'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in [a,b]$. Então*

$$\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$$

a função g é chamada de antiderivada (ou primitiva) de f.

Devido à conexão entre integrais definidas e antiderivadas, usa-se o sinal de integral $\int$ para a notação $\int f(x)dx$ de antiderivada. Dispensa-se então a partir daqui a terminologia de antiderivadas e antidiferenciação e chamando-as $\int f(x)dx$ de integral indefinida. O processo de cálculo de uma integral indefinida ou definida é chamado de integração.

2.7.5 Área De Uma Região Plana

Define-se a área de uma região plana como o limite de uma soma de Riemann, sendo este limite uma integral definida (LEITHOLD, 1988). Com as técnicas necessárias para o cálculo de integrais definidas, serão considerados outros problemas envolvendo áreas de regiões planas.

Até então foi considerada a área de uma região para a qual os valores funcionais são não-negativos em $[a,b]$. Supõe-se agora que $f(x) < 0$ para todo $x \in [a,b]$. Então, cada $f(\xi_i)$ é um número negativo, assim, define-se o número de unidades quadradas da região limitada por $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, como

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [-f(\xi_i)]\Delta_i x = L$$

o que é igual a

$$-\int_a^b f(x)dx$$

Considerando duas funções f e g contínuas no intervalo fechado $[a,b]$ e tais que $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a,b]$. O objetivo é encontrar a área da região limitada por duas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

Toma-se do intervalo $[a,b]$, com o i-ésimo subintervalo tendo comprimento $\Delta_i x$. Em cada subintervalo, se escolhe um ponto ξ_i. Considerando o retângulo tendo altura $[f(\xi_i) - g(\xi_i)]$ unidades e comprimento $\Delta_i x$ unidades. Há n de tais retângulos, cada um associado a um subintervalo. A soma das medidas das áreas desses n retângulos é dada pela seguinte soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\Delta_i x$$

Esta soma é uma aproximação do que intuitivamente se pensa ser o número representando a "medida da área"da região. Quanto menor o valor de $\|\Delta\|$, melhor será a aproximação. Se A unidades quadradas for a área da região, define-se

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\Delta_i x \quad (*)$$

Como f e g são contínua em $[a,b]$, assim também será $f - g$; logo, o limite em $(*)$ existe e é igual à integral definida

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

.

3 APLICAÇÕES EM ADMINISTRAÇÃO

O cálculo diferencial e integral encontra larga aplicação nas ciências sociais aplicadas. Conceitos como receita e custo marginal, elasticidade, otimização, entre outros, dependem da derivada como ferramenta para seus cálculos, por exemplo. Supondo que seja conhecida uma função custo total F, a função custo marginal pode ser obtida, diferenciando-se F, afim de determinar F'. Entretanto, se apenas a função custo marginal for conhecida, a função custo total F pode ser obtida através da integração.

Em tese, aplicações de integrais são úteis para a resolução de problemas relacionados a fluxos ao longo do tempo (de caixa, de custo de armazenagem, etc.), afim de usá-las para que valores desse fluxo em um certo intervalo desejado sejam determinados. Para exemplificar, pode-se pensar no custo de armazenagem de certa mercadoria; convém relembrar, que quase sempre, seu custo é calculado em um período fixo (mensalmente, por exemplo), afinal, o cálculo com base diária ou em horas seria inviável na maioria absoluta das operações. Embora seja calculado em períodos fixos, este custo é gerado durante todo o tempo de armazenagem, sem interrupção, ou seja, um fluxo de custo. Com uma função modelada adequadamente, o uso de uma integral definida permite o cálculo em intervalos diversos, em menor tempo, com precisão considerável.

Embora haja exceções, na grande maioria dos casos, os valores negativos das funções apresentadas são desprovidas de significado econômico, podendo ser desprezadas na análise, além de que, variáveis econômicas são quase sempre discretas, mas para fins de estudo, são tratadas como contínuas.

3.1 MODELOS ECONÔMICOS REPRESENTADOS POR FUNÇÕES

Vários modelos econômicos podem ser estudados e terem seu comportamento estimado por meio de funções como a função poupança, oferta, demanda, marginal, etc. A análise introdutória de alguns modelos aqui, pretende mostrar inicialmente que os fatos econômicos podem fornecer dados e diretrizes para que se obtenham funções que representem suas características. A correta modelagem matemática destes é especialmente útil na projeção de cenários, na redução de custos com contingências futuras e na elaboração de planos estratégicos, além da farta aplicação em ferramentas operacionais. Não há neste momento preocupação acerca da ligação entre os exemplos citados e o tópico principal do trabalho.

3.1.1 Funções custo, receita e lucro

O custo é o valor do dispêndio alocado na produção de determinado bem, e varia de acordo com o volume de produção do produtor. O custo total da produção (C_t) de um item pode ser, basicamente, dividido em dois componentes: o custo fixo (C_f) e o variável (C_v). Martins (MARTINS, 2008) define custos variáveis como aqueles que seu valor global, em uma unidade de tempo (um mês por exemplo), varia de acordo com o volume de produção. Quanto maior a quantidade produzida, maior seu consumo (podemos citar a matéria-prima dentro desta categoria), sendo então a função que os descreve, crescente; inicialmente, pode-se atribuir um custo variável constante por unidade produzida . Já o custo fixo independe (no decorrer de um mês, por exemplo) de variações do fluxo produtivo. O aluguel de um galpão fabril pode ser classificado como fixo (seu valor é igual se a planta está operando com capacidade máxima, ou altamente ociosa); como seu valor é constante, o custo fixo é representado então por uma função constante, paralela ao eixo das abscissas. Cabe salientar que tanto o conceito de custo fixo quanto variável apresentados são simplificados; não é a intenção discutir aqui, a complexidade da atual doutrina contábil. Quando tratado como constante por unidade produzida, desconsideramos influências importantes sobre os custos diretos de produção (que geram a parcela variável), como a economia de escala. O custo fixo, embora tratado como constante, não têm caráter imutável. A expansão da produção por exemplo demandará maior espaço útil, assim como maiores custos (como mão-de-obra) com o gerenciamento do espaço e equipamento extra. Rigorosamente, estes descreveriam uma função descontínua, com elevação de seu valor em eventuais expansões da produção. Como não são eventos frequentes, presume-se constante. O custo total então, de acordo com Veras (VERAS, 1985), pode ser obtido através da soma das duas funções

$$C_t = C_f + C_v.$$

Sendo o custo variável constante para cada unidade produzida, deve-se pensar em como os custos fixos poderão ser distribuídos ao total de produtos produzidos (q). Considerada a produção de apenas um único produto, os custos fixos serão igualitariamente divididos entre as unidades, afim de apropriar a proporção correspondente e obter ao final, o custo unitário (C_{un})

ou médio (C_{me}).

$$C_{un} = C_v + \frac{C_f}{q}.$$

Veras (VERAS, 1985) afirma então, que quanto maior a quantidade produzida de um bem, menor será seu custo unitário, caracterizando uma função decrescente, limitada inferiormente, como mostrado na Figura (1).

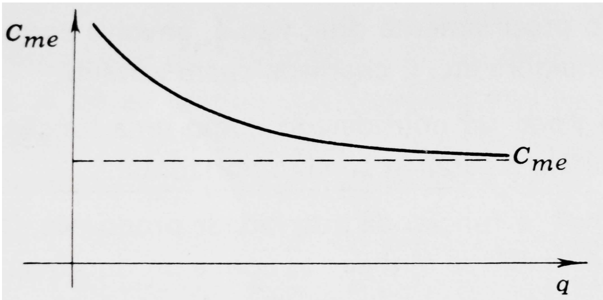

Figura 1: Custo unitário (ou custo médio)

Fonte: (VERAS, 1985)

A limitação inferior nada mais é do que o próprio custo variável, já que o custo total, aproximando-se deste a medida que q assume valores cada vez maiores, nunca será de valor inferior.

Exemplo 3.1 *Considerando uma situação simples de uma empresa produzindo um único produto, cujo custo variável seja de* $R\$20,00$ *por unidade, com custo fixo total de* $R\$600.000,00$*. Determine o custo unitário de acordo com a quantidade produzida.*

$$C_{un} = C_v + \frac{C_f}{q} .$$

Substituindo os valores,

$$C_{un} = 20 + \frac{600.000}{q} .$$

Logo, defini-se,

$$f(x) = 20 + \frac{600.000}{x} .$$

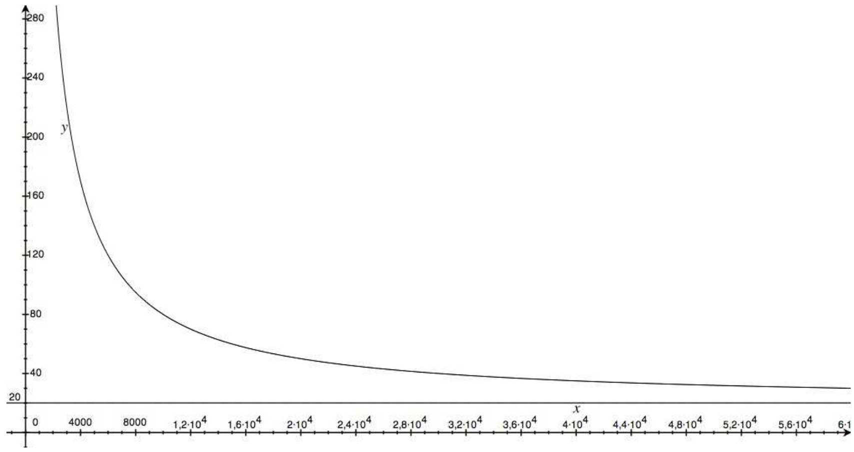

Figura 2: Custo unitário

Fonte: Autoria própria

É possível então, na Figura (2), visualizar o comportamento descrito na Figura (1).

Na função receita, considera-se o preço da mercadoria variável; a quantidade demandada (ou vendida), varia de acordo com o preço. Seja p o preço unitário e q a quantidade demandada, tem-se que a receita R é dada por

$$R = pq. \tag{3.1.1}$$

Como exemplo, considera-se a questão aplicada no certame Petrobrás/2010(Administrador Júnior), formulada pela Fundação Cesgranrio.

Exemplo 3.2 *Uma loja de eletrodomésticos possui 1600 unidades de liquidificadores em estoque. Uma recente pesquisa de mercado apontou que seriam vendidas 800 unidades a um preço de R$ 300,00, e que cada diminuição de R$ 5,00, no valor do produto, resultaria em 20 novas vendas. Qual o valor de venda, em reais, permite que a receita seja máxima?*

A receita será o montante obtido com a venda dos itens citados, calculada através do produto entre preço unitário e quantidade vendida. Assim, de acordo com (3.1.1), para obter o valor de venda desejado, deve-se iniciar buscando o desconto máximo a ser concedido. Indica-se por $5x$ *o valor em reais do desconto a ser concedido, e* $20x$ *as unidades adicionais vendidas, para x unidades de desconto sobre o preço dado, ou seja*

$$p = 300 - 5x \qquad e \qquad q = 800 + 20x.$$

Substituindo em (3.1.1), tem-se

$$\begin{array}{rcl} R & = & (300-5x)(800+20x) \\ R & = & -100x^2+2000x+240000 \end{array}.$$

Obtém-se então a função que representa o problema dado, que pode ser formalizada como

$$\begin{array}{rcl} R: \ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & R(x) = -100^2+2000x+240000 \end{array}. \tag{3.1.2}$$

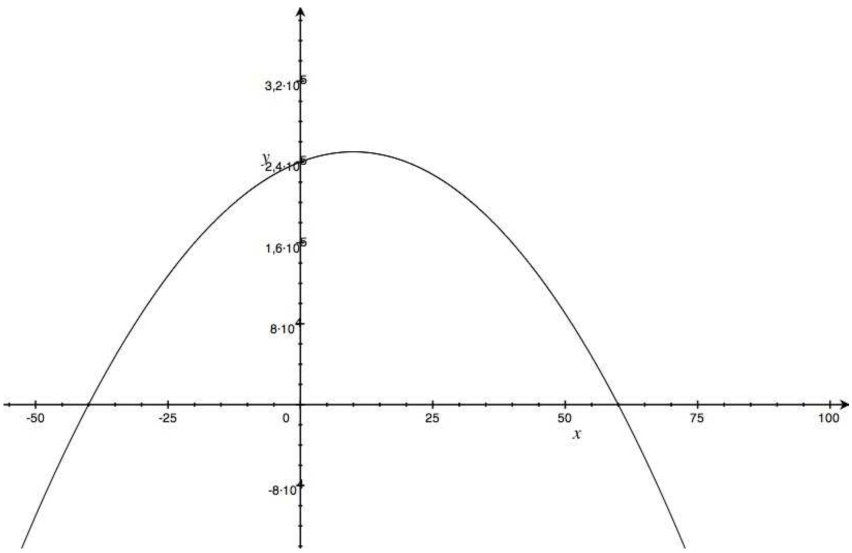

Figura 3: Função receita

Fonte: Autoria própria

A função (3.1.2) descreve a parábola mostrada na figura 3, em que o eixo x representa os descontos concedidos, e o eixo y a receita resultante das vendas.

■

A parábola representa a receita gerada de acordo com os descontos aplicados. Na prática, altos preços geram baixa demanda pelo produto, podendo inclusive levá-la a zero. A partir do momento em que cobra-se menos pelo produto, mais consumidores estarão dispostos a comprá-lo, gerando receitas maiores (o volume de vendas compensa o menor valor de venda unitário). Por outro lado, preços excessivamente baixos, não conseguem retornar altas receitas, mesmo com volume de vendas considerável. Assim, espera-se que $R(x)$ cresça até certo ponto e depois decresça. É natural pensar também, que valores negativos carecem de significado econômico, portanto, toda a análise é realizada no primeiro quadrante. Como $R(x)$ representa a receita gerada, a qual queremos maximizar, precisamos encontrar o valor de x, para a qual $R(x)$ seja máxima. Segundo o Teorema (2.41), obtém-se a derivada de $R(x)$ para que se possa resolver a igualdade $R'(x) = 0$.

Voltando ao exemplo anterior, tem-se que

Exemplo 3.3

$$\begin{aligned} R(x) &= -100x^2 + 2000x + 240000 \\ R'(x) &= -200x + 2000 \\ 0 &= -200x + 2000 \\ x &= 10 \end{aligned} .$$

O desconto máximo (otimizado) então é de $x = 10$*, que podemos então, usar para calcular* p *e* q*. Logo*

$$\begin{aligned} p &= 300 - 5x \qquad & e \qquad q &= 800 + 20x \\ p &= 300 - 5(10) & q &= 800 + 20(10) \\ p &= 250 & q &= 1000 \end{aligned} .$$

Assim, conclui-se que o valor de venda em reais do produto que maximiza a receita de vendas, é 250. Substituindo-se p *e* q *em (3.1.1), obtém-se então a receita máxima*

$$\begin{aligned} R &= 250(1000) \\ R &= 250000 \end{aligned} . \tag{3.1.3}$$

■

Deve-se ter em mente que as funções em situações análogas, quase sempre mais complexas que a apresentada, tem seu próprio processo de formação. A modelagem correta desta é elemento fundamental no estudo de qualquer fenômeno, já que uma função com pouca aderência ao fenômeno que descreve, fatalmente levará a resultados inconclusivos e/ou equivocados.

A função lucro pode ser obtida pela diferença entre as funções Receita e Custo total

$$L = R - C_t \tag{3.1.4}$$

O comportamento da função Receita acima reflete o já afirmado, corroborado por Veras (VERAS, 1985), de que preços de venda muito altos determinam quantidades demandadas muito baixas, o que acarreta decrescimento da receita, e consequentemente, do lucro. Nesse caso, tanto a função Receita quanto a função Lucro, crescerão até um máximo local e depois decrescerão.

A intersecção entre os gráficos das funções Receita e Custo, tem o nome de *break-even point* (ou ponto de equilíbrio), e designa um ponto em que o lucro é nulo, ou seja, $R = C$, como pode ser visto na Figura (4)

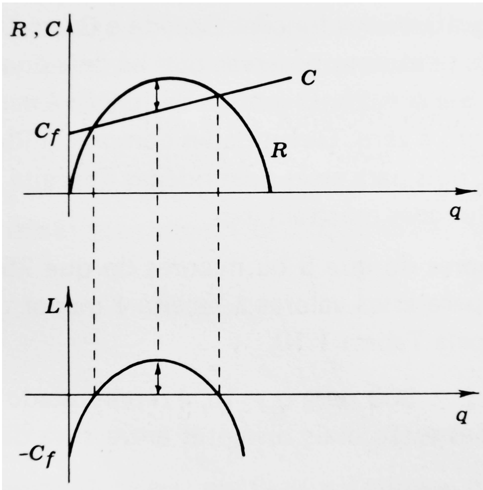

Figura 4: Pontos de equilíbrio e função lucro

Fonte: (VERAS, 1985)

Como exemplo, considera-se o enunciado em Veras (VERAS, 1985).

Exemplo 3.4 *Suponha que as funções Receita e Custo podem ser expressas como*

$$R(q) = -2q^2 + 100q \quad e \quad C(q) = q^2 + 10q + 375.$$

A Tabela 1 mostra os valores de R e C, para certas quantidades; como o Lucro é resultante da diferença entre R e C, determina-se a função Lucro por

$$\begin{aligned} L(q) &= R(q) - C(q) \\ &= -2q^2 + 100q - (q^2 + 10q + 375) \; . \\ &= -3q^2 + 90q - 375 \end{aligned}$$

Tabela 1: Quantidades e lucros estimados

q	R	C	L
0	0	375	-375
5	450	450	0
10	800	575	225
15	1050	750	300
20	1200	975	225
25	1250	1250	0
30	1200	1575	-375
35	1050	1900	-850
40	800	2375	-1575

Traçados os gráficos das funções na Figura (5), duas intersecções são observáveis, onde $R = C$, portanto, pontos de equilíbrio. Para melhor entendimento, a função lucro tem o seu gráfico traçado na Figura (6), que mostra os mesmos pontos de equilíbrio anteriores (lucro nulo), como suas duas raízes, determinadas da seguinte forma

$$\begin{aligned} -3q^2 + 90q - 375 &= 0 \\ q^2 - 30q + 125 &= 0 \end{aligned} ,$$

aplicando-se então a fórmula geral para resolução de equações quadráticas

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} ,$$

tem-se

$$\begin{aligned} q &= \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(1)(125)}}{2(1)} \\ &= \frac{30 \pm \sqrt{900 - 500}}{2} \\ &= \frac{30 \pm \sqrt{400}}{2} \\ &= \frac{30 \pm 20}{2} \end{aligned}$$

então $q_1 = 25$ *e* $q_2 = 5$.

As raízes q_1 *e* q_2 *indicam então que o lucro será nulo nestes pontos, lucro positivo será obtido quando q assumir valores entre os pontos, e negativo para* $q < 5$ *e* $q > 25$. *Observa-se estes na Figura (6), assim como na Tabela (1).*

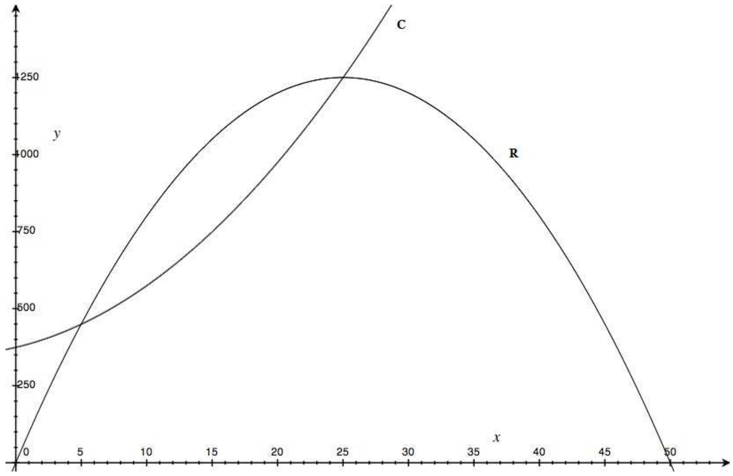

Figura 5: Funções Custo e Receita

Fonte: Autoria própria

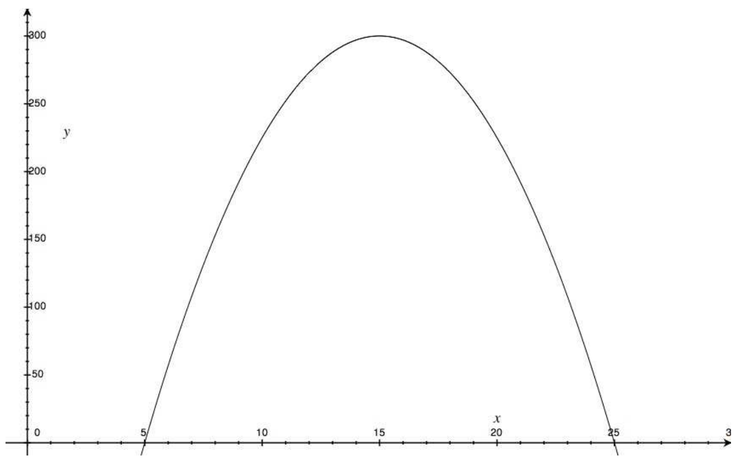

Figura 6: Função Lucro

Fonte: Autoria própria

Para se obter o ponto em que o lucro é otimizado, aplica-se novamente o Teorema (2.41), *ou seja, busca-se a resolução da igualdade* $L'(q) = 0$.

$$\begin{aligned} L(q) &= -3q^2 + 90q - 375 \\ L'(q) &= -6q + 90 \\ \Rightarrow 0 &= -6q + 90 \\ \Rightarrow q &= 15 \end{aligned} .$$

O lucro máximo então será obtido quando $q = 15$, *cujo lucro resultante será*

$$\begin{aligned} L(q) &= -3q^2 + 90q - 375 \\ \Rightarrow L(15) &= -3(15)^2 + 90(15) - 375 \\ \Rightarrow L(15) &= 300 \end{aligned} .$$

3.2 VALOR MÉDIO DE UMA FUNÇÃO

Além da utilização para se determinar áreas, as integrais definidas podem ser úteis para que os valores médios de uma função em um determinado intervalo sejam conhecidos.

Exemplo 3.5 *Qual é o valor médio da função*

$$f(x) = 3x^2 - 2x, \tag{3.2.5}$$

no intervalo [1,4]?

Tem-se pela Definição (2.52) que o valor médio de uma função no intervalo $[a,b]$ *é dado por*

$$VM. = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{3.2.6}$$

Portanto, de (3.2.6), conclui-se que o valor médio de (3.2.5) no intervalo $[1,4]$ *é dado por*

$$\begin{aligned} VM. = \frac{1}{4-1}\int_{1}^{4}\left(3x^2-2x\right)dx &= \frac{1}{3}\left[\frac{3x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right]\Bigg|_{1}^{4} \\ &= \frac{1}{3}[(64-16)-(1-1)] \\ &= \frac{48}{3} \\ &= 16 \end{aligned}.$$

Se calculada a área total no intervalo, o resultado será

$$\begin{aligned} \int_{1}^{4}\left(3x^2-2x\right)dx &= \left[\frac{3x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right]\Bigg|_{1}^{4} \\ &= [(64-16)-(1-1)] \\ &= 48 \end{aligned}.$$

Tem-se então que o ponto médio do intervalo $[1,4]$ *é igual* 16*, e a área total é* 48*, representada na Figura (7)*

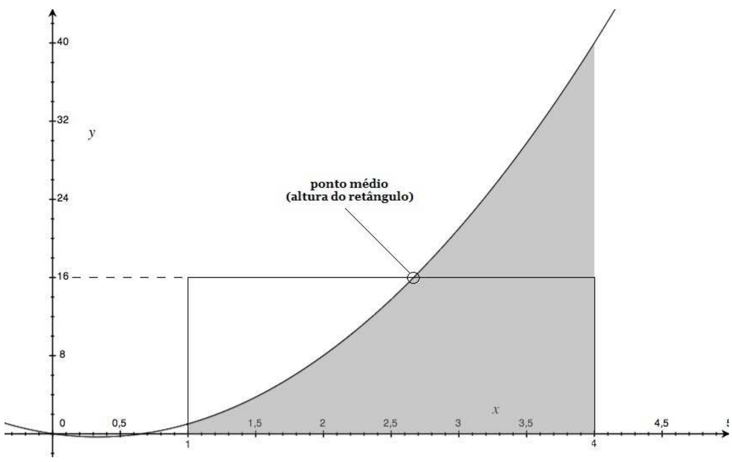

Figura 7: Valor médio de uma função

Fonte: Autoria própria

Tem-se então que na Figura (7), a área sob a curva da função dada em $[1,4]$ é igual a área do retângulo cuja altura seja o ponto médio, ou seja, área é igual a $16(3) = 48$.

Como na média aritmética, o produto da média pela população n tratada resultará no somatório dos respectivos valores de n. Assim, tem-se que o produto do valor médio de uma função pelo comprimento do intervalo dado [a,b] terá como resultado a sua área, ou seja

$$(b-a)VM = (b-a)\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad = \quad \int_a^b f(x)dx \ .$$

Esse resultado será utilizado em boa parte das aplicações seguintes.

3.2.1 Custos de Manutenção

Budnick (BUDNICK, 1979) traz um exemplo introdutório acerca de uma aplicação das integrais definidas para o cálculo de áreas, buscando estimar o valor dispendido em custos de manutenção (de veículos, maquinários, etc), de comportamento não-linear.

Exemplo 3.6 *Uma montadora de veículos estima que seu gasto anual $r(t)$ para manutenção de um de seus modelos é representado pela função*

$$r(t) = 100 + 10t^2,$$

onde t é a idade do veículo em anos, e $r(t)$ é mostrado em dólares por ano. Essa função sugere que quando o carro tiver 1 ano de uso, gastos com manutenção incorrerão a uma taxa de:

$$\begin{aligned} r(1) &= 100 + 10(1)^2 \\ &= 100 \textit{ por ano} \end{aligned} \ .$$

Quando o carro tiver 3 anos de uso, os custos de manutenção serão então de:

$$\begin{aligned} r(3) &= 100 + 10(3)^2 \\ &= 190 \textit{ por ano} \end{aligned} \ .$$

Assim, quanto mais usado for o veículo, mais manutenção será necessária.

A área sob a curva entre dois valores é igual à soma dos custos neste intervalo de tempo. Os custos esperados durante os primeiros 5 anos (destacados na Figura 8) de uso do veículo *serão então de:*

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{5} \left(100+10t^2\right)dt &= \left[100t+\frac{10t^3}{3}\right]\Bigg|_0^5 \\
&= 100(5)+\frac{10(5)^3}{3} \quad . \\
&= 500+416,67 \\
&= 916,67
\end{aligned}$$

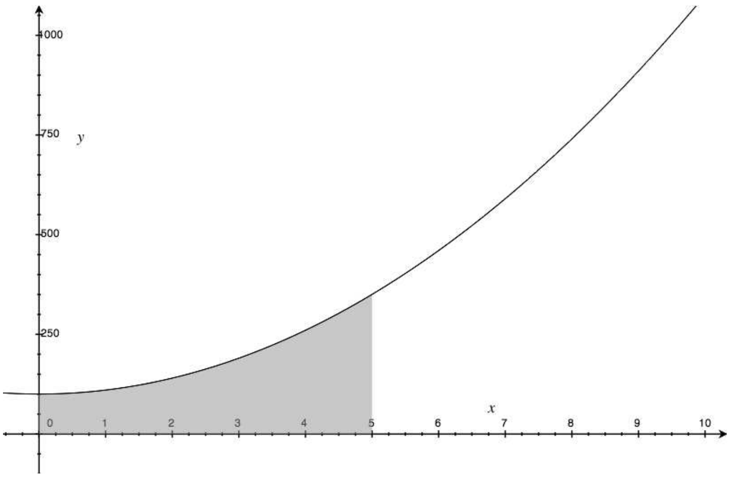

Figura 8: Custos de manutenção até o 5ºano

Fonte: Autoria própria

Além da soma dos 5 primeiros anos, pode-se obter também os custos incorridos no quinto ano (destacados na Figura 9), estimados em:

$$\begin{aligned}
\int_{4}^{5} (100+10t^2)dt &= 100t+\frac{10t^3}{3}\Bigg|_4^5 \\
&= 916,67-\left[100(4)+\frac{10(4)^3}{3}\right] \quad . \\
&= 916,67-(400+213,33) \\
&= 303,34
\end{aligned}$$

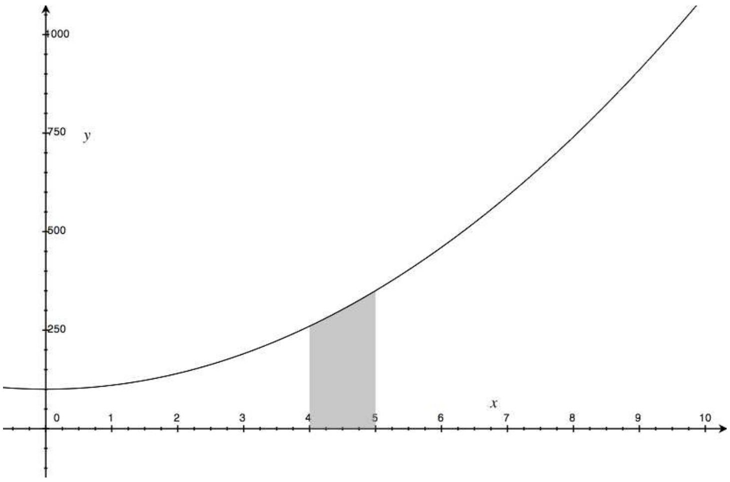

Figura 9: Custos de manutenção no 5ºano

Fonte: Autoria própria

Pensamento análogo pode ser extendido para a resolução do exemplo a seguir, adaptado de (LARSON; HOSTETLER, 1987).

Exemplo 3.7 *Suponha que o preço da gasolina está aumentando de acordo com a função* $p(t) = 1 + 0,1t + 0,02t^2$ *onde p é o preço em reais por litro e* $t = 0$ *representa o ano de 2010. Se um veículo roda 15.000 por ano, com eficiência (quilômetros por litro) M, então, o custo anual com combustível será*

$$C = \frac{25.000}{M} \int_t^{t+1} p\, dt.$$

(a) Qual será o custo anual no ano de 2016 para um veículo com eficiência = $10km/l$*?*

$$\begin{aligned} C &= \frac{25000}{M} \int_t^{t+1} p\, dt \\ &= \frac{25000}{10} \int_5^6 0,02t^2 + 0,1t + 1\, dt \\ &= 2500 \int_5^6 0,02t^2 + 0,1t + 1\, dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2500[0,006667t^3+0,05t^2+t]\Big|_5^6 \\
&= 2500[(0,006667(6)^3+0,05(6)^2+6)-(0,006667(5)^3+0,05(5)^2+5)] \\
&= 2500[9,24007-7,08337] \\
&= 2500(2,1567) \\
&= 5391,75
\end{aligned}
$$

(b) Qual será o total de custo com combustível com 5 veículos iguais, nos primeiros 3 anos, para veículos com eficiência = $10km/l$?

$$
\begin{aligned}
C &= 5\,\frac{25000}{M}\int_t^{t+1} p\;dt \qquad (anual) \\
&= 5\,\frac{25000}{10}\int_0^3 0,02t^2+0,1t+1\;dt \\
&= 5\,(2500)\int_0^3 0,02t^2+0,1t+1\;dt \\
&= 12500[0,00667t^3+0,05t^2+t]\Big|_0^3 \\
&= 12500[(0,00667(3)^3+0,05(3)^2+3)-0] \\
&= 12500[3,63-0] \\
&= 45375,00
\end{aligned}
$$

(c) Novos pneus, fabricados com compostos adicionados de sílica, prometem ganhos de 12% na eficiência dos veículos que os usarem. A troca dos convencionais pelos novos pneus gerariam estimados R\$$630,00$ de custos extras nos próximos 3 anos, por veículo. Supondo

outras variáveis constantes, a troca é viável?

$$\begin{aligned}
C &= \frac{25000}{M}\int_{t}^{t+1} p\ dt \qquad (anual) \\
&= \frac{25000}{11,2}\int_{0}^{3} 0,02t^2+0,1t+1\ dt \\
&= 2232,14\int_{0}^{3} 0,02t^2+0,1t+1\ dt \\
&= 2232,14[0,006667t^3+0,05t^2+t]\Big|_0^3 \\
&= 2232,14[(0,006667(3)^3+0,05(3)^2+3)-0] \\
&= 2232,14[3,63-0] \\
&= 8102,66
\end{aligned}.$$

Embora novos pneus proporcionem maior eficiência energética (e consequentemente, menores custos com combústivel), seus benefícios devem ser comparados aos custos extras que a nova tecnologia impõe. Se os benefícios forem superiores aos custos gerados, a troca é recomendada, sendo válido também o pensamento inverso.

$$\begin{aligned}
(2500(3,63))-(2232,14(3,63))-(630) &= 9075,00-8102,66-630,00 \\
&= 342,34
\end{aligned}.$$

Dos custos estimados atuais são subtraídos os custos estimados após a troca pelos novos pneus e os custos adicionais gerados por estes. Os $R\$342,34$ *residuais indicam que, com a troca, em 3 anos, um veículo teria uma economia igual a este valor, mesmo considerando os gastos extras, portanto, a troca é recomendada.*

3.2.2 Função Receita e Função Custo

O lucro total ou os lucros líquidos, em várias situações, podem ser determinados por uma integração. Segundo Weber (WEBER, 1977), em geral, o lucro é maximizado (admitindo-se pura competição) quando a receita marginal se iguala ao custo marginal. O lucro total é igual à integral da receita marginal menos o custo marginal, desde a quantidade zero até a quantidade para a qual o lucro é maximizado.

Exemplo 3.8 *Uma empresa espera aumentar o número de seus vendedores. O custo para empregar vendedores adicionais é de*

$$5y^2 = 48x,$$

onde y é o custo em unidades de 1000,00, x é o número de vendedores adicionais empregados, e a receita marginal é

$$(R-2)^2 = 4(x+10),$$

onde R é a receita em unidades de 1000,00 e x é o número de vendedores adicionais empregados,(Admita que as funções de custo e de receita são contínuas, mesmo que estas sejam efetivamente significativas apenas para valores inteiros de x). A empresa deverá empregar vendedores adicionais até que o custo para fazê-lo se iguale à receita marginal adicionada obtida, como pode ser observado na Figura 3.8, já que a partir deste ponto, vendedores adicionais gerariam custos maiores em relação às receitas extras dos mesmos.

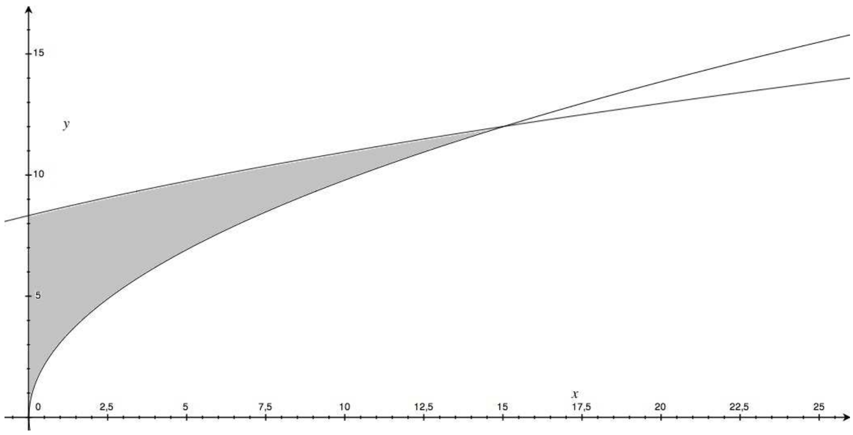

Figura 10: Funções receita e custo

Fonte: Autoria própria

O custo para empregar vendedores adicionais se iguala à receita adicional obtida quando *as funções têm a mesma imagem, ou ainda, quando $R = y$. Daí, basta resolver o sistema*

$$\begin{cases} 5y^2 & = & 48x & \Rightarrow & x = \dfrac{5y^2}{48} \\ (y-2)^2 & = & 4(x+10) \end{cases}.$$

Para que se determine o ponto de intersecção (para y), faz-se

$$\begin{aligned} y^2 - 4y + 4 &= 4\left(\frac{5y^2}{48} + 10\right) \\ y^2 - 4y + 4 &= \frac{5y^2}{12} + 40 \\ y^2 - \frac{5y^2}{12} - 4y + 4 - 40 &= 0 \\ \frac{7y^2}{12} - 4y - 36 &= 0 \\ 7y^2 - 48y - 432 &= 0 \end{aligned}.$$

aplicando-se então a fórmula geral para resolução de equações quadráticas

$$\begin{aligned} y &= \frac{48 \pm \sqrt{(-48)^2 - 4(7)(-432)}}{2(7)} \\ y &= \frac{48 \pm \sqrt{14400}}{14} \\ y &= \frac{48 \pm 120}{14} \\ y_1 &= 12 \quad e \quad y_2 = -\frac{36}{7} \end{aligned}.$$

Com o valor negativo descartado, conclui-se que $y = 12$ *na intersecção, sendo* x

$$\begin{aligned} x &= \frac{5y^2}{48} \\ &= \frac{5(12)^2}{48} \\ &= \frac{720}{48} \\ &= 15 \end{aligned}.$$

Portanto, 15 vendedores adicionais devem ser empregados. Para obter a receita líquida total (em unidades de $R\$1000,00$*) é necessário calcular*

$$\int_0^{15} (R-C)dx,$$

onde R é dada por

$$\begin{aligned} (y-2)^2 &= 4(x+10) \\ \Rightarrow \sqrt{(y-2)^2} &= \sqrt{4(x+10)} \\ \Rightarrow |y-2| &= \sqrt{4(x+10)} \\ \Rightarrow y-2 &= \sqrt{4(x+10)} \quad e \quad y-2 = -\sqrt{4(x+10)} \\ \Rightarrow y &= 2+\sqrt{4(x+10)} \quad e \quad y = 2-\sqrt{4(x+10)} \end{aligned},$$

então, tem-se

$$y = 2+2\sqrt{x+10} \tag{3.2.7}$$

e

$$y = 2-2\sqrt{x+10}. \tag{3.2.8}$$

Como a equação (3.2.8) gerará imagens negativas para dado x no primeiro quadrante, será descartada. Utilizar-se-á a equação (3.2.7).

Da segunda equação referente ao custo,

$$\begin{aligned} 5y^2 &= 48x \\ \Rightarrow y^2 &= \frac{48x}{5} \\ \Rightarrow y &= \pm\sqrt{\frac{48x}{5}}\ , \\ \Rightarrow y &= \sqrt{\frac{48x}{5}} \\ \Rightarrow y &= \sqrt{\frac{48}{5}}x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e o custo, dado por $5C^2 = 48x$*, será então* $C = \sqrt{\frac{48}{5}}x^{\frac{1}{2}}$.

Logo

$$\begin{aligned} \int_0^{15} (R-C)dx &= \int_0^{15} \left[\left(2+2\sqrt{x+10}\right) - \sqrt{\frac{48}{5}}x^{\frac{1}{2}} \right] dx \\ &= \int_0^{15} \left[\left(2+2x+10^{\frac{1}{2}}\right) \right] dx - \int_0^{15} \sqrt{\frac{48}{5}}x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_0^{15} 2dx + 2\int_0^{15} (x+10)^{\frac{1}{2}} dx - \sqrt{\frac{48}{5}} \int_0^{15} x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= 2x + 2\frac{(x+10)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \sqrt{\frac{48}{5}}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^{15} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2x + 2\frac{(x+10)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{48}{5}}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{15} \\
&= 2x + 2\frac{2}{3}(x+10)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{48}{5}}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{15} \\
&= 2x + \frac{4}{3}(x+10)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{48}{5}}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{15} \\
&= 2(15) + \frac{4}{3}(15+10)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{48}{5}}\frac{2}{3}(15)^{\frac{3}{2}} - 2(0) \\
&\quad + \frac{4}{3}((0)+10)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{48}{5}}\frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}} \\
&= 30 + 166,6667 - 3,0984(38,7298) - 42,1637 \\
&\approx 34,5
\end{aligned}
$$

■

3.2.3 Valor presente de um fluxo de caixa

Sempre quando um valor em momento futuro é tratado, o valor do dinheiro no tempo deverá ser considerado, e essa ideia é fundamental em finanças: Dinheiro hoje vale mais do que no futuro. Mesmo sem inflação alguma ou qualquer reajuste de preço. É a chamada Teoria da Preferência da Liquidez (JUNIOR; CHEROBIM; RIGO, 2002). O quanto valerá a mais é determinado pela taxa de juros aplicada. Com isto, pode-se pensar em duas operações afim de considerar o efeito do tempo sobre valores: O crescimento positivo (valor corrigido) e crescimento negativo (valor descontado). Para tratar dos métodos para calcular estes itens, é necessário antes discutir uma ferramenta fundamental e sua interpretação econômica: o número *e*.

O número *e*

O número *e* (ou número de Euler), embora possa ser comprovado de diversas formas, tem seu significado econômico ligado ao resultado de um processo de acumulação de juros compostos específico.

Supondo um valor presente (VP) de $1,00\,u.m.$ (unidade monetária), aplicada durante 1 ano (t), com uma taxa de juros (i) de $100\%a.a.$ (ao ano). Se os juros fossem pagos apenas no final do período, seria gerado, como valor futuro (VF), o capital inicial acrescido dos juros correspondentes

$$\begin{array}{rcl} VF(1) & = & VP.(1+i) \\ VF(1) & = & 1.(1+1) \\ VF(1) & = & 2 \end{array} .$$

Alternativamente, os juros poderiam ser pagos semestralmente, 2 vezes durante o ano $(2n)$, 50% por vez,

$$\begin{array}{rcl} VF(2) & = & VP.\left(1+\frac{i}{2}\right).\left(1+\frac{i}{2}\right) \\ VF(2) & = & VP.\left(1+\frac{i}{2}\right)^2 \\ VF(2) & = & 1.\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \\ VF(2) & = & 1.(1+0,5)^2 \\ VF(2) & = & 2,25 \end{array} .$$

Com pagamentos quadrimestrais, 3 vezes ao ano, $33,33\%$ por vez

$$\begin{array}{rcl} VF(3) & = & VP.\left(1+\frac{i}{3}\right).\left(1+\frac{i}{3}\right).\left(1+\frac{i}{3}\right) \\ VF(3) & = & VP.\left(1+\frac{i}{3}\right)^3 \\ VF(3) & = & 1.\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \\ VF(3) & = & 1.(1+0,33)^3 \\ VF(3) & = & 2,37 \end{array} .$$

Com pagamentos trimestrais, 4 vezes ao ano, 25% por vez

$$\begin{array}{rcl} VF(4) & = & PV.\left(1+\frac{i}{4}\right).\left(1+\frac{i}{4}\right).\left(1+\frac{i}{4}\right).\left(1+\frac{i}{4}\right) \\ VF(4) & = & VP.\left(1+\frac{i}{4}\right)^4 \\ VF(4) & = & 1.\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \\ VF(4) & = & 1.(1+0,25)^4 \\ VF(4) & = & 2,44 \end{array} .$$

Ou ainda com pagamentos bimestrais, 6 vezes ao ano, $16,67\%$ por vez

$$\begin{aligned}
VF(6) &= PV.\left(1+\frac{i}{6}\right).\left(1+\frac{i}{6}\right).\left(1+\frac{i}{6}\right).\left(1+\frac{i}{6}\right).\left(1+\frac{i}{6}\right).\left(1+\frac{i}{6}\right)\\
VF(6) &= VP.\left(1+\frac{i}{6}\right)^6\\
VF(6) &= 1.\left(1+\frac{1}{6}\right)^6\\
VF(6) &= 1.(1+0,1667)^6\\
VF(6) &= 2,52
\end{aligned}.$$

É possível então formular um modelo geral

$$VF(n) = VP.\left(1+\frac{i}{n}\right)^n .$$

Como n representa a frequência em que os juros foram pagos, é possível efetuar a acumulação em períodos cada vez menores, passando de bimestral, para mensal, diário, por hora ou intervalos ainda menores. Com um n arbitrariamente grande (um período tão pequeno quanto desejado), os juros serão acumulados continuamente, e pode ser calculado então

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} VF(n) &= \lim_{n\to\infty} VP\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\
&= 1.\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty} e^{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n\ ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}\\
&= e^{\frac{\lim\limits_{n\to\infty} ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}}
\end{aligned},$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)'}{\left(\frac{1}{n}\right)'}\right]} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} \qquad , \\
&= e^1 \\
&= e
\end{aligned}
$$

assim

$$
\lim_{n\to\infty} VF(n) = 1.\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281\ldots \ . \tag{3.2.9}
$$

■

É notório que a taxa de 100% é nominal, já que capitalizada continuamente, geraria um $VF \approx 2,72$, representando uma taxa efetiva de 172%. Posteriormente, pode ser generalizado o demonstrado em (3.2.9) para períodos, taxas nominais e valores presentes diversos. O número e então, se torna de grande importância para cálculos de valores no tempo, quando a capitalização contínua é tomada como forma de acumulação.

3.2.4 Juros compostos continuamente

Chiang (CHIANG, 1982) mostra que o discutido acima pode ser generalizado para outras situações relacionadas a correção de valores. Se $1,00\,u.m.$ após 1 ano, capitalizado continuamente a uma taxa de 100% é igual a e $u.m.$, após mais um ano, o VP será então de $e^2 u.m.$, ou seja, após t anos teremos $e^t u.m.$

Se a aplicação inicial não for $1,00\,u.m.$, mas de um valor presente (VP) qualquer, então, a expressão será alterada para VPe^t. É necessária também a determinação de uma taxa genérica i. A inclusão desta alterará a expressão de VPe^t para VPe^{it} de acordo com o explicitado a seguir. Para t anos, com n capitalizações por ano (ou nt capitalizações em t anos), e $\left(\frac{i}{n}\right)$ da taxa nominal aplicáveis por período, vale para o juro composto a equação

$$
VF(n) = VP\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} \ .
$$

Alternativamente

$$\begin{aligned} VF(n) &= VP\left(1+\frac{i}{n}\right)^{\frac{nit}{i}} \\ VF(n) &= VP\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^{\frac{n}{i}}\right]^{it} \\ VF(w) &= VP\left[\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w}\right]^{it} \qquad \text{onde } w=\frac{n}{i} \quad \text{e} \quad \frac{1}{w}=\frac{i}{n} \end{aligned}.$$

Com o aumento de n, w se eleva ao mesmo passo; portanto, quando $n \to \infty$, temos que $w \to \infty$.

$$\begin{aligned} VF \equiv \lim_{w\to\infty} VF(w) &= \lim_{w\to\infty}\left[VP\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w}\right]^{it} \\ &= \left[\lim_{w\to\infty} VP\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w}\right]^{it} \\ &= VP\left[\lim_{w\to\infty}\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w}\right]^{it} \end{aligned}.$$

Como demonstrado em (3.2.9), a expressão entre colchetes em (3.2.10) tende a e. Portanto, o modelo geral de capitalização contínua pode ser definido por

$$VF \equiv \lim_{n\to\infty} VF(n) = VPe^{it}.$$

Se inicialmente, t era tido como um valor discreto, agora, como $n \to \infty$, então t é contínuo, tornando factível o uso de frações de um ano t. Pode-se finalmente, resumir na Tabela (2), diversas funções discutidas aqui, observando-se então, a interpretação econômica destas, relacionada à acumulação de capital através de juros compostos.

Tabela 2: Juros compostos continuamente

VP	i nominal	Períodos	VF
1	100%	1	e
1	100%	t	e^t
VP	100%	t	VPe^t
VP	i	t	VPe^{it}

Fonte: Adaptada de (CHIANG, 1982)

3.2.5 Valor presente de um fluxo

É possível agora estender o entendimento acerca do crescimento negativo, o desconto de fluxos de valores, que pode ser definido como o problema relacionado à determinação de qual o valor atual de um valor ou fluxo de valores futuros, com a incidência de certa taxa de juros. Primeiramente tratando sobre o caso de variáveis discretas, Chiang (CHIANG, 1982) mostra que um valor presente (VP), após t anos, com capitalização anual de uma taxa i, aumentará para $VP(1+i)^t$ (seu valor futuro - VF), isto é

$$VF = VP(1+i)^t.$$

Dividindo-se ambos os lados da equação pela expressão não-nula $(1+i)^t$, é obtida a fórmula do desconto

$$VP = \frac{VF}{(1+i)^t} = VF(1+i)^{-t}.$$

Para o caso contínuo, se o VP aumentar para $VP\,e^{rt}$ após t períodos de capitalização contínua a uma taxa r, temos

$$VF = VP\,e^{rt}.$$

Dividindo-se ambos os lados por e^{rt}

$$VP = \frac{VF}{e^{rt}} = VFe^{-rt}.$$

Assim, é possível afirmar, que o valor presente, limitado ao caso de um único valor futuro VF, é definido pelas fórmulas de desconto

$$VP \;=\; VF(1+i)^{-t} \quad \text{[caso discreto]} \tag{3.2.10}$$

e

$$VP \;=\; VFe^{-rt} \quad \text{[caso contínuo]}\ . \tag{3.2.11}$$

Se os valores futuros se caracterizarem como um fluxo, recebíveis em vários instantes, pode-se calcular o valor presente de todo o fluxo de caixa, no caso discreto (supondo, por exemplo, 3 períodos), disponíveis ao final do t-ésimo período, descontados a uma taxa i, os valores presente de R_t serão de,

$$R_1(1+i)^{-1} \qquad R_2(1+i)^{-2} \qquad R_3(1+i)^{-3}$$

assim, o valor presente total será de

$$VP = \sum_{t=1}^{3} R_t(1+i)^{-t}. \tag{3.2.12}$$

Usando uma integral definida, a idéia de somatório de períodos pode ser transferida para o caso de um fluxo de caixa contínuo. Chamando este de $F(t)$, determina-se em $t = 1$ o taxa de fluxo no período 1, em $t = 2$ o fluxo no período 2, e em $t = n$ o fluxo no período n, considerando t uma variável contínua. Como o fluxo é de valores futuros e contínuo, deve-se efetuar o cálculo do seu valor presente, a uma taxa i, aplicando (3.2.11), descontando todo o fluxo de valores que ocorrer no período entre t a n, para um único valor em t

$$\int_{t}^{n} F(t)e^{-rt}dt. \tag{3.2.13}$$

Então, se o objetivo é encontrar o valor presente total do um fluxo de caixa contínuo $F(t)$ nos primeiros 5 anos, este será encontrado calculando a seguinte integral definida

$$\int_{0}^{5} F(t)e^{-rt}dt.$$

Na prática, são poucos os casos em que a acumulação de juros, ou desconto de juros são contínuos; e com rigor, não poderiam ser utilizadas ferramentas como as integrais definidas, que são dependentes da condição de continuidade da função para sua aplicabilidade. Apesar disto, Chiang (CHIANG, 1982) afirma que mesmo para o caso de crescimento discreto, a função de crescimento exponencial pode ser justificadamente usada. Primeiramente, quando a frequência de acumulação é finita, mas relativamente alta, a acumulação contínua pode ser tomada como uma aproximação desta. Soma-se a esta primeira, o fato de que um problema de crescimento discreto (descontínuo) pode ser transformado em uma versão contínua equivalente. Supondo um padrão geométrico de crescimento (como a acumulação discreta de juros)

$$A, A(1+i), A(1+i)^2, A(1+i)^3, \ldots$$

onde a taxa efetiva por período seja i e o expoente de $(1+i)$ denote o número de períodos de acumulação. Considerando $(1+i)$ como base b de uma expressão exponencial, então a sequência pode ser escrita como Ab^t, mas com a restrição de que $t \in \mathbb{N}$. Como $b = (1+i)$ é sempre positivo (mesmo se i for negativo), pode ser expresso como uma potência de qualquer número real maior que 1, incluindo e. Isto significa que deve existir um r tal que

$$1 + i = b = e^r.$$

É possível então transformar Ab^t em uma função exponencial natural

$$A(1+i)^t = Ab^t = Ae^{rt}.$$

Para qualquer t, a função Ae^{rt} gera o mesmo valor que $A(1+i)^t$. Destarte, podemos trabalhar com a função exponencial natural contínua Ae^{rt} mesmo em casos discretos. O desafio para esta conversão é definir o r para a qual a igualdade seja verdadeira.

Para que seja efetuada a conversão, toma-se o seguinte procedimento. Acima, afirmou-se que uma função exponencial $y = Ab^t$ pode ser convertida em uma função exponencial natural $y = Ae^{rt}$, e que $Ab^t = Ae^{rt}$ será válida para um certo r. Para demonstrar a conversão, ao invés de Ab^t, será tomada a expressão mais geral Ab^{ct} e a mudança para Ae^{rt}. Deve-se encontrar um r para dados b e c tal que

$$\begin{array}{rrcl} & e^r & = & b^c \\ \Rightarrow & \ln e^r & = & \ln b^c \\ \Rightarrow & r \ln e & = & c \ln b \\ \Rightarrow & r & = & c \ln b \end{array}.$$

É possível então reescrever a função $y = Ab^{ct}$ como $y = Ae^{(c\ ln\ b)t}$.

Exemplo 3.9 *Se* $R\$100,00$ *forem aplicados a uma taxa* i *de* 10% *ao ano, por* t *anos, sendo* VF

o valor futuro, a função que expressará o crescimento do investimento será

$$\begin{aligned} VF &= VP(1+i)^t \\ &= 100(1+0,1)^t \\ &= 100(1,1)^t \end{aligned}.$$

A partir desta, determine uma função exponencial natural equivalente.

Da função dada, tem-se que $A = 100$, $b = 1,1$ *e* $c = 1$. *Como* $y = Ab^{ct} = Ae^{(c\ ln\ b)t}$, *então*

$$\begin{aligned} VF &= Ae^{(c\ ln\ b)t} \\ &= 100e^{(1\ ln\ 1,1)t} \\ &= 100e^{(ln\ 1,1)t} \\ &= 100e^{0,09531t} \end{aligned}.$$

Um fluxo contínuo como o descrito anteriormente podem ser observado no exemplo a seguir, adaptados de (CHIANG, 1982).

Exemplo 3.10 *Embora hoje, cada vez mais, a maioria dos vinhos sejam produzidos para serem vendidos e consumidos jovens, uma minoria de alta qualidade tem no tempo um aliado, os chamados vinhos de guarda. Estes são aptos a enfrentarem muitos anos de envelhecimento, melhorando suas características, e consequentemente, seu preço de mercado. Embora a máxima de que "quanto mais velho, melhor" não seja exatamente verdade (vinhos de guarda são dotados de um ciclo de vida próprio, embora sua determinação não seja fácil), se adotará uma função crescente para descrever o comportamento do seu preço. Junto com o crescimento da possível receita auferida com sua venda, o custo de armazenagem da garrafa também se eleva, junto com o custo de oportunidade do montante investido. Determinar o melhor momento para lançar a unidade no mercado, de modo a maximizar o lucro obtido, é a problemática que se busca aqui definir.*

Supõe-se a estocagem de uma garrafa de vinho, que pode ser vendida no presente $(t = 0)$, *por um valor R\$*$K,00$ *ou estocada e vendida por um preço maior. O valor futuro de venda (VF) é uma função conhecida, dada por*

$$VF(t) = Ke^{\sqrt{t}}. \tag{3.2.14}$$

Se vendido imediatamente $(t = 0)$, *então* $VF = K$. *As possíveis receitas em qualquer ano* t, *não podem ser diretamente comparadas, pois se encontram em momentos diferentes, devendo portanto serem descontadas, reduzindo-as ao seu valor presente (VP). À uma taxa de desconto* *r continuamente capitalizada, o valor presente* VP*, de acordo com (3.2.11) pode ser expresso como*

$$VP(t) = VF\,e^{-rt},$$

e substituindo-se (3.2.14), tem-se

$$VP(t) = K\,e^{\sqrt{t}}\,e^{-rt} = Ke^{\sqrt{t}-rt}.$$

Tomando-se um modelo básico em que o custo de armazenagem é desprezado, o objetivo se restringe a determinar um valor t *para a qual a função* $VP(t)$ *seja maximizada, ou seja, o tempo de armazenagem ótimo em que a receita resultante da venda seja máxima. Segundo o Teorema (2.41), é possível encontrar o ponto ótimo resolvendo* $VP'(t) = 0$*, ou seja,* $\frac{d}{dt}(VP) = 0$*. Antes da diferenciação requerida, partindo-se de (3.2.14), aplica-se logaritmo natural em ambos os termos da equação*

$$\begin{aligned} ln\,VP(t) &= ln\left(K\,e^{\sqrt{t}-rt}\right) \\ \Rightarrow ln\,VP(t) &= lnK + ln\,e^{\sqrt{t}-rt} \\ \Rightarrow ln\,VP(t) &= lnK + (t^{\frac{1}{2}} - rt) \end{aligned}.$$

Derivando ambos os lados em relação a t

$$\begin{aligned} \frac{1}{VP}\frac{d}{dt}(VP) &= \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} - r.1 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(VP) &= VP\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - r\right) \end{aligned}. \tag{3.2.15}$$

Resolvendo-se $\frac{d}{dt}(VP) = 0$*,tem-se*

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(VP) = 0 \Rightarrow VP\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - r\right) &= 0 \\
\Rightarrow \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - r &= 0 \\
\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} &= r \\
\Rightarrow \frac{1}{2r} &= t^{\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow \left(\frac{1}{2r}\right)^2 &= \left(t^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\
\Rightarrow \frac{1}{4r^2} &= t
\end{aligned}
.
$$

Logo, o ponto ótimo é definido no ponto para o qual a igualdade seja verdadeira, concluindo-se que o período de estocagem ótimo é descrito por

$$
t = \frac{1}{4r^2}. \tag{3.2.16}
$$

Assim, considerada uma taxa de desconto de $12,5\%$ *ao ano, o período ótimo de estocagem, aplicando-se os dados em (3.2.16) seria*

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{1}{4r^2} \\
&= \frac{1}{4(0,125)^2} \\
&= \frac{1}{0,0625} \\
&= 16
\end{aligned}
.
$$

Então, à taxa dada, o período ótimo de estocagem é de 16 anos.

O definido em (3.2.16) pode ser interpretado, isolando r*, como*

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{4r^2} \Rightarrow 4r^2 = \frac{1}{t} \\ &\Rightarrow r^2 = \frac{1}{4t} \quad . \\ &\Rightarrow r = \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

É possível observar a taxa de crescimento do valor do vinho VF, tomando-se a diferencial de (3.2.14)

$$\begin{aligned} VF &= Ke^{t^{\frac{1}{2}}} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(VF) &= Ke^{t^{\frac{1}{2}}}\left(t^{\frac{1}{2}}\right)' \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(VF) &= Ke^{t^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}\right) \quad . \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(VF) &= VF\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(VF) &= VF\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Zill (ZILL; CULLEN, 2001) afirma que em várias teorias físicas envolvendo crescimento e decrescimento, como em culturas de bactérias, a taxa de crescimento de certas bactérias é proporcional ao número destas presentes no dado instante, ou seja, se $x(t)$ for um número de bactérias no instante t, $\frac{dx}{dt}$ a taxa de crescimento tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k_p x \\ \frac{\frac{dx}{dt}}{x} &= k_p \end{aligned} \quad ,$$

onde k_p é umas constante de proporcionalidade.

Assim, tomando-se o resultado de (3.2.18) e comparando com (3.2.17)

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(VF) &= VF\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) \\
\Rightarrow \frac{\frac{d}{dt}(VF)}{VF} &= \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) = r
\end{aligned}
$$

Então, a constante de proporcionalidade, ou seja, a taxa de crescimento de VF é o termo a direita de (3.2.17). Do lado esquerdo, tem-se r, ou a taxa de crescimento do montante que seria recebido se a garrafa fosse vendida imediatamente, representando então, o custo de oportunidade da não-venda do vinho. Sendo a taxa de crescimento (decrescente) de VF igual a $\frac{1}{2\sqrt{t}}$, e uma taxa de desconto (constante) r, pode-se representá-las como na Figura (11)

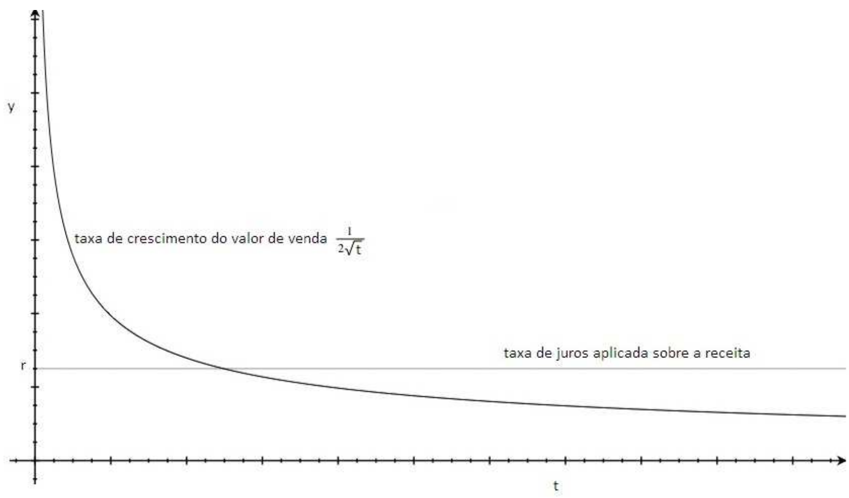

Figura 11: Condições de otimização

Fonte: Autoria própria

Na Figura (11) observam-se três momentos distintos. Quando $\frac{1}{2\sqrt{t}} < r$, há motivos para que o vinho continue estocado, já que a taxa de crescimento de seu valor de mercado é maior do que o custo de oportunidade da sua não-venda. Se $\frac{1}{2\sqrt{t}} > r$, esse custo de oportunidade se torna maior do que a taxa de crescimento de VF, portanto, é inviável mantê-lo armazenado, já que as receitas líquidas da venda da garrafa se tornarão menores. De acordo com (3.2.17), se $\frac{1}{2\sqrt{t}} = r$, então este será o tempo t ótimo para que se realize a venda, já que a vantagem de continuar estocado será anulada. De (3.2.16) e da análise da Figura (11), conclui-se que quanto maior a taxa de desconto r, menor será o tempo t ótimo, já que os custos de oportunidade da não-venda se elevarão, inviabilizando a armazenagem por períodos mais longos.

É necessário ainda testar se o valor maximizado de t satisfaz as condições para o teste da segunda derivada. De (3.2.15) tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(VP) &= VP\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - r\right) \\
\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(VP) &= \frac{d}{dt}\left(VP\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - r\right)\right) \\
&= \frac{d}{dt}(VP)\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - r\right) + (VP)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - r\right)
\end{aligned}.$$

Como se deseja a situação em que $\frac{d}{dt}(VP) = 0$*, daí*

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}(VP) &= VP\left(-\frac{1}{4}\right)t^{-\frac{3}{2}} \\
\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(VP) &= \frac{-VP}{4t^{\frac{3}{2}}} = \frac{-VP}{4\sqrt{t^3}}
\end{aligned}.$$

Como $t > 0$ e $VP > 0$, então o resultado será sempre negativo, assegurando, em decorrência da concavidade da função indicada pelo sinal, de que em t, ocorre um ponto de máximo, e portanto, maximiza a receita obtida. Vale salientar que até aqui foi discutido como maximizar o valor de venda, em contraste com o custo de oportunidade da venda antecipada, e não necessariamente o lucro, já que os custos de armazenagem em si não foram contabilizados.

Embora o discutido seja diretamente aplicável, como salientado, é desconsiderado um item fundamental relacionado ao próprio custo de estocagem (até então havia se considerado apenas o custo de oportunidade de não-vender o vinho, enquanto este estivesse em guarda), assim como o custo de produção. Se dará início então, a um modelo que inclua estes fatores.

Seja o custo de produção de uma garrafa denotado por C, incorrida em $t = 0$. Enquanto o valor de venda representa uma única transação (um único valor futuro), o custo de armazenagem é um fluxo. Admitindo-se que esse custo seja um fluxo constante à taxa de s reais por ano, o valor presente do custo de armazenagem incorrido em um total de t anos equivalerá, de acordo com (3.2.11) a

$$
\begin{aligned}
\int_0^t s e^{-rt} dt &= s \int_0^t e^{-rt} dt \\
&= s \int_0^{-rt} e^u \left(-\frac{1}{r}\right) du \quad . \\
&= s \left(-\frac{1}{r}\right) \int_0^{-rt} e^u \, du \\
&= -\frac{s}{r} \, e^u \Big|_0^{-rt} \\
&= -\frac{s}{r} \left(e^{-rt} - e^0\right) \quad . \\
&= -\frac{s}{r} \left(e^{-rt} - 1\right) \\
&= \frac{s}{r} \left(1 - e^{-rt}\right)
\end{aligned}
$$

Assim, o valor presente líquido $N(t)$ pode ser expresso como

$$
\begin{aligned}
N(t) &= VF(t) e^{-rt} - \frac{s}{r}\left(1 - e^{-rt}\right) - C \\
&= \left(VF(t) + \frac{s}{r}\right) e^{-rt} - \frac{s}{r} - C
\end{aligned} \quad ,
$$

que é uma função objetivo de uma única variável de escolha t. Para maximizar $N(t)$, aplica-se o teorema(2.41), afim de resolver $N'(t) = 0$. A primeira derivada de $N(t)$ será então

$$\begin{aligned} N'(t) \;=\; 0 \;\Rightarrow \quad \left(VF(t)+\frac{s}{r}\right)\frac{d}{dt}\left(e^{-rt}\right)+e^{-rt}\frac{d}{dt}\left(VF(t)+\frac{s}{r}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \quad \left(VF(t)+\frac{s}{r}\right)e^{-rt}(-rt)'+e^{-rt}\left[\frac{d}{dt}(VF(t))+\frac{d}{dt}\left(\frac{s}{r}\right)\right] &= 0 \\ \Rightarrow \quad -r\left(VF(t)+\frac{s}{r}\right)e^{-rt}+VF'(t)e^{-rt} &= 0 \\ \Rightarrow \quad -rVF(t)e^{-rt}-se^{-rt}+VF'(t)e^{-rt} &= 0 \\ \Rightarrow \quad \left(VF'(t)-rVF(t)-s\right)e^{-rt} &= 0 \end{aligned}$$

Como e^{-rt} será sempre positivo, para que a igualdade seja válida, é necessário que

$$VF'(t)-rVF(t)-s \;=\; 0,$$

sendo esta zero se, e somente se,

$$VF'(t) = rVF(t)+s. \tag{3.2.19}$$

Assim, esta última equação pode ser considerada a condição necessária de otimização para a escolha do instante de venda t. $VF'(t)$ representa a taxa de variação do valor de venda (o quanto VF será incrementado se a venda for adiada em mais um período t), enquanto os termos à direita representam os incrementos no custo de oportunidade e armazenagem gerados (somados ao custo de produção). Basicamente, busca-se o mesmo ponto descrito na Figura (11), mas agora considerando o fator extra relacionado ao custo de armazenagem, da qual resultará um ponto ótimo t que gerará, ao final, lucro líquido máximo na operação.

Se mantida $VF(t)$, com um preço de venda em $t=0$ de $K=R\$28,00$ por garrafa, na qual incorrem custos anuais de armazenagem de $R\$23,00$, com um custo de produção unitário de $R\$20,00$ e uma taxa de desconto $i=15,5\%$ ao ano, é possível determinar agora o tempo t ótimo de venda e a receita líquida resultante.

De (3.2.19), tem-se que o valor de venda será máximo quando

$$VF'(t) = rVF(t) + s.$$

Determinando VF'(t)

$$\begin{aligned}
VF(t) &= Ke^{\sqrt{t}} \\
\Rightarrow VF(t) &= 28e^{\sqrt{t}} \\
\Rightarrow VF'(t) &= \frac{d}{dx}\left(28e^{\sqrt{t}}\right) \\
\Rightarrow VF'(t) &= 28\left(\frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{t}}\right)\right) \\
\Rightarrow VF'(t) &= 28\left(e^{\sqrt{t}}\left(\frac{d}{dx}\left(\sqrt{t}\right)\right)\right) \quad , \\
\Rightarrow VF'(t) &= 28e^{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) \\
\Rightarrow VF'(t) &= \frac{28e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} \\
\Rightarrow VF'(t) &= \frac{14e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}
\end{aligned}$$

Assim, de (3.2.19),

$$\begin{aligned}
VF'(t) = rVF(t) + s \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(Ke^{\sqrt{t}}\right) &= r\left(Ke^{\sqrt{t}}\right) + s \\
\Rightarrow \frac{14e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} &= 0,155\left(28e^{\sqrt{t}}\right) + 23
\end{aligned} \quad . \tag{3.2.20}$$

Resolvendo-se a igualdade em (3.2.20) com o auxílio do software Maple, obtém-se então $t_1 = 1,938$, $t_2 = 0,8638 - 5,3584i$, *e* $t_3 = 0,8638 + 5,3584i$. *Desconsideradas as raízes com-*

plexas, conclui-se que o valor ótimo é obtido quando $t = 1,938$.

O ponto t ótimo é o instante em que a comercialização da garrafa gera um lucro máximo, e este pode ser visualizado na Figura (12), na qual $VF'(t) = a$, *e* $r(VF(t)) + s = b$ *na intersecção das duas funções com interpretação análoga realizada em relação à Figura(3.2.14)*

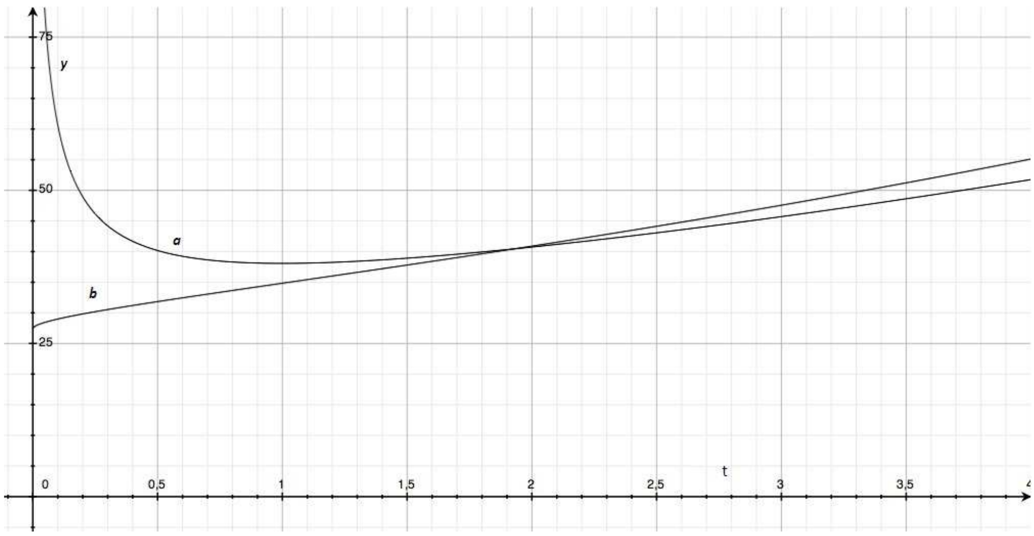

Figura 12: Instante ótimo de venda

Fonte: Autoria própria

Vendida a garrafa de vinho então no ponto $t = 1,938$, *seu preço de mercado será de*

$$\begin{aligned} V(t) &= Ke^{\sqrt{t}} \\ \Rightarrow V(1,938) &= 28e^{\sqrt{1,938}}\ , \\ \Rightarrow V(1,938) &= 112,65 \end{aligned}$$

e a receita líquida gerada pela operação será de

$$
\begin{aligned}
N(t) &= VF(t)e^{-rt} - \frac{s}{r}\left(1-e^{-rt}\right) - C \\
&= \left(Ke^{\sqrt{t}}\right)e^{-rt} - \frac{s}{r}\left(1-e^{-rt}\right) - C \\
&= \left(28e^{\sqrt{1,938}}\right)e^{-0,155(1,938)} - \frac{21}{0,155}\left(1-e^{-0,155(1,938)}\right) - 23\ \cdot \\
&= (112,65)\,0,7405 - 135,4838(0,2595) - 23 \\
&= 25,2592
\end{aligned}
$$

Portanto, o lucro da operação será maximizado se a garrafa for vendida no instante $t = 1,938$ *anos, ou seja, se for armazenada por um período de 1 ano, 11 meses e 7 dias. Neste período, a unidade se valorizará e poderá ser vendida por* $R\$112,65$*, gerando um lucro líquido de* $R\$25,26$*.*

■

Exemplo 3.11 *Estuda-se a compra de um novo equipamento que será instalado no setor de produção. Basicamente, este será usado para a produção de itens que serão vendidos, gerando receitas, (considera-se que toda ela será efetivamente comercializada). Por suas características técnicas - como uso direto de mão de obra, tecnologia especializada, necessidade de ajustes finos, etc. - o equipamento apresentará seu pico de produção em momento distinto da sua instalação (relacionando-se com o conceito de curva de aprendizado); e em decorrência de seu curto ciclo de vida, apresentará posteriormente queda crescente em sua produção (e consequentemente, sua receita), em decorrência de ineficiências inerentes ao tempo de uso, maiores tempos de parada para manutenção, etc. A receita gerada pelo equipamento será de* $R(x)$ *reais por mês, após decorridos x meses da sua instalação, dada pela função*

$$R(t) = -0,05t^3 + 1,12t^2 + 2500. \tag{3.2.21}$$

Os custos de operação e manutenção $C(t)$ *serão crescentes, aumentando em razão do tempo t de operação do equipamento, e descrito pela função*

$$C(t) = (0.9t-6)^2 + 100. \tag{3.2.22}$$

É necessário então, que se determine alguns itens fundamentais:

- *Considerando apenas a receita descrita por $R(t)$ e os custos em $C(t)$, até quando a operação deste equipamento é viável?*
- *Qual será a receita líquida total gerada durante o tempo de operação viável?*
- *Uma unidade do novo equipamento (incluindo todos os custos agregados, como treinamento, instalação, etc.) custaria, à vista, $R\$20550,00$. Usando capitalização contínua e o conceito de valor presente das receitas líquidas, com uma taxa de desconto igual a $0,85\%$ ao mês, e desconsiderando outras variáveis, a compra seria recomendada?*
- *Estima-se que, desconsiderada a curva de experiência relacionada ao equipamento, a receita resultante seria expressa pela função $P(t) = -0,05t^3 + 0,6t^2 + 2500$. Assim, quanto da receita líquida pode ser creditada a este fator, considerando a operação apenas no tempo que se julgar viável?*

Primeiramente, é útil a análise do gráfico de $R(t)$ e $C(t)$. Válido relembrar que a análise destas é realizada no primeiro quadrante, já que valores negativos para tais não tem sentido econômico.

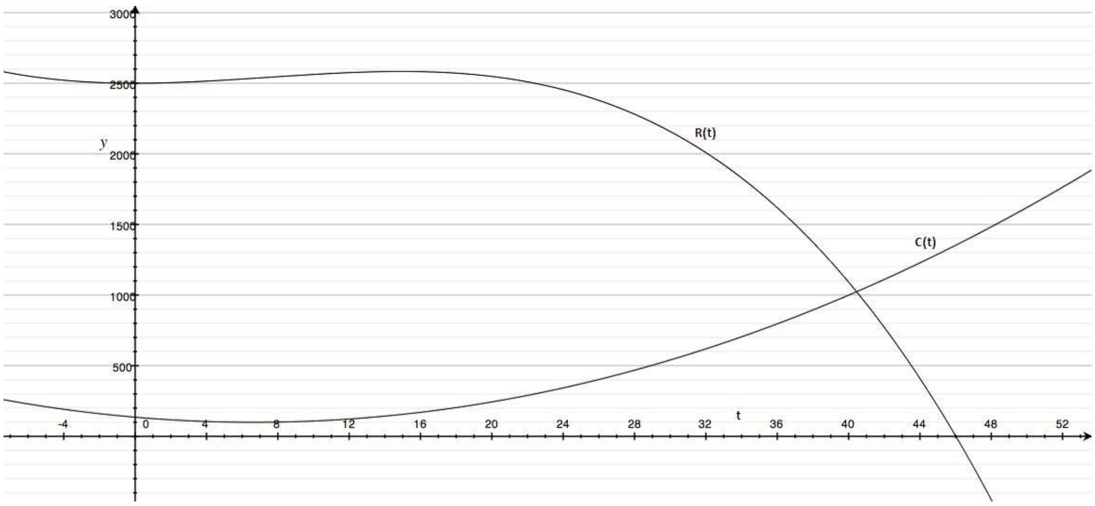

Figura 13: Receitas - R(t) e Custos - C(t)

Fonte: Autoria própria

Observa-se no comportamento de $C(t)$, o reflexo dos maiores custos de manutenção e operação com o passar do tempo, seguindo também, os efeitos previstos na chamada "curva da banheira", que afirma, de acordo com Slack (SLACK; CHAMBERS; JOHNSTON, 2009), *que a taxa de falhas no equipamento (da qual se originam os custos para correção) é em geral em função do tempo, mas a probabilidade de falhas no início da "vida" deste é maior, ocorrendo em razão de defeitos na fabricação ou uso inadequado. Se não ocorrer problemas nesta etapa inicial, as falhas diminuem, e só voltarão a crescer em razão do desgaste em função do tempo. Esta degradação do equipamento também é visível em* $R(t)$*, observando-se a receita resultante. Com menor produção em razão do tempo de uso e o desgaste provocado, a receita gerada decorrente da produção de itens pelo equipamento parte de um alto nível no seu início, decrescendo (a taxas crescentes) posteriormente, embora este comportamento seja quebrado pela curva de experiência em relação a nova máquina, que faz com que as economias advindos deste fenômeno elevem as receitas resultantes num primeiro momento (posteriormente, a consideração sobre este item será novamente discutida).*

Basicamente, busca-se resultado líquido positivo com o uso do equipamento, ou seja, que as receitas por este geradas superem os custos associados à sua operação. Pode-se pensar então que, se esta relação for positiva, é viável a operação; se nula, então será indiferente; e se negativa (custos superando as receitas), será então inviável a produção, portanto

$$\begin{array}{llll} se & R(t)-C(t)>0 & então & operação\ viável \\ se & R(t)-C(t)=0 & então & operação\ indiferente \\ se & R(t)-C(t)<0 & então & operação\ inviável \end{array}. \quad (3.2.23)$$

A intersecção das funções observada na Figura (13) representa o ponto em que os valores de $R(t)$ *e* $C(t)$ *são iguais, ou seja, é indiferente o uso do equipamento, de acordo com (3.2.23), pois* $R(t)-C(t)=0$*, determinando-se o valor de t neste ponto então como*

$$\begin{aligned} R(t)-C(t) &= 0 \\ R(t) &= C(t) \\ -0,05t^3+1,12t^2+2500 &= (0.9t-6)^2+100 \\ -0,05t^3+0,31t^2+10,8t+2364 &= 0 \end{aligned}.$$

Esse polinômio tem como soluções (para t), uma raiz real e duas complexas. Com o auxílio do software Maple, obtém-se $t_1=40,44$*,* $t_2=-17,12+29,59i$ *e* $t_3=-17,12-29,59i$*. Desconsiderando as raízes complexas, determina-se o ponto de equilíbrio (a intersecção na Figura (13)) em* $40,44$ *meses, ou* 40 *meses e* 13 *dias. A partir desta data, o uso do equipamento será inviável.*

Sabendo que pretende-se utilizar a máquina durante $40,44$ *meses apenas, é possível agora calcular as receitas, os custos e o resultado líquido gerado neste período. Como os valores destes são relacionados a área delimitada pela função correspondente no primeiro quadrante, a receita líquida* (RL) *será então de*

$$
\begin{aligned}
RL &= \int_0^{40,44} R(t) - C(t)dt \\
&= \int_0^{40,44} (-0,05t^3 + 1,12t^2 + 2500) - ((0.9t - 6)^2 + 100)dt \\
&= \int_0^{40,44} (-0,05t^3 + 1,12t^2 + 2500) - (0.81t^2 - 10,8t + 136)dt \\
&= \int_0^{40,44} -0,05t^3 + 1,12t^2 + 2500 - \int_0^{40,44} 0.81t^2 - 10,8t + 136dt \\
&= \left(\frac{-0,05t^4}{4} + \frac{1,12t^3}{3} + 2500t\right) - \left(\frac{0,81t^3}{3} - \frac{10,8t^2}{2} + 136t\right)\Bigg|_0^{40,44} \\
&= (-0,0125t^4 + 0,3733t^3 + 2500t) - (0,27t^3 - 5,4t^2 + 136t)\Big|_0^{40,44} \\
&= (-0,0125(40,44)^4 + 0,3733(40,44)^3 + 2500(40,44) - 0) - (0,27(40,44)^3 \\
&\quad -5,4(40,44)^2 + 136(40,44) - 0) \\
&= ((92359,1156) - (14525,2502) \\
&= 77833,86
\end{aligned}
$$

Portanto, durante o tempo estimado de uso em que a operação será viável, estima-se uma receita líquida total de $R\$77.833,86$*. O valor encontrado porém, não representa todas as riquezas geradas pelo equipamento no período com clareza, já que esse fluxo de receitas está distribuído ao longo do tempo. Para que se possa avaliar a recomendação de compra pedida* *no início, deve-se ter os valores a serem comparados (o valor de compra e o que será gerado com sua operação) em um mesmo ponto no tempo. A recomendação será baseada em raciocínio análogo a (3.2.23), mas considerando agora o lucro líquido -* L_l *(o que restará depois de descontados todos os custos, inclusive o de aquisição, no instante* $t = 0$*) de toda a operação, o valor presente dos fluxos de receitas líquidas* $(VP/RL(t))$ *e os custos de aquisição* (C_a)*.*

$$\begin{array}{llll} se & VP/RL(t) - C_a > 0 & então & compra\ recomendada \\ se & VP/RL(t) - C_a = 0 & então & compra\ indiferente \\ se & VP/RL(t) - C_a < 0 & então & compra\ não\ recomendada \end{array} . \tag{3.2.24}$$

Considerando que a máquina será paga a vista $(t = 0)$*, o fluxo de receitas líquidas deve ser descontado, para que seu valor em* $t = 0$ *seja determinado. Como o desconto é contínuo, será calculado de acordo com (3.2.13), ou seja*

$$VP(t) = \int_t^n F(t)e^{-rt}dt.$$

Pode-se interpretar a receita líquida (RL) *no problema, do mesmo modo que o lucro em (3.1.4), assim como o custo de manutenção* $(C(t))$*, tratado de modo semelhante ao custo total* (C_t)*, resultando em uma função* $RL(t)$ *a ser utilizada*

$$\begin{aligned} RL(t) &= R(t) - C(t) \\ &= (-0,05t^3 + 1,12t^2 + 2500) - ((0,9t - 6)^2 + 100) \\ &= (-0,05t^3 + 1,12t^2 + 2500) - (0,81t^2 - 10,8t + 136) \\ &= -0,05t^3 + 0,31t^2 + 10,8t + 2364 \end{aligned} .$$

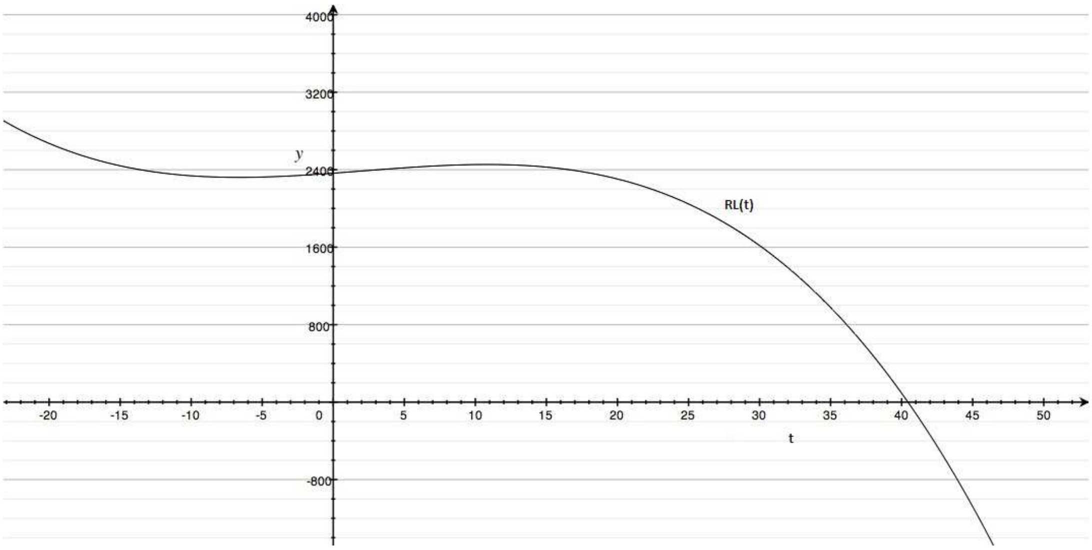

Figura 14: Receitas Líquidas - RL(t)

Fonte: Autoria própria

O fluxo de receitas somente ocorrerá entre o instante $t = 0$ e o prazo determinado em que será viável a operação($t = 40,44$); então pode-se determinar o valor presente de RL(t), (VP/RL(t)), considerando i $= 0,85\%$*, como*

$$
\begin{aligned}
VP/RL(t) &= \int_{0}^{40,44} (-0,05t^3 + 0,31t^2 + 10,8t + 2364)e^{-(0,0085)40,44}\, dt \\
&= \int_{0}^{40,44} \frac{-0,05t^3 + 0,31t^2 + 10,8t + 2364}{e^{(0,0085)40,44}}\, dt \\
&= \int_{0}^{40,44} \frac{-0,05t^3 + 0,31t^2 + 10,8t + 2364}{e^{0,34374}}\, dt \\
&= \int_{0}^{40,44} \frac{-0,05t^3 + 0,31t^2 + 10,8t + 2364}{1,4102}\, dt \\
&= \int_{0}^{40,44} -0,05t^3 + 0,31t^2 + 10,8t + 2364 \left(\frac{1}{1,4102}\right) dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 0,709113 \int_{0}^{40,44} -0,05t^3 + 0,31t^2 + 10,8t + 2364\, dt \\
&= 0,709113 \left(\frac{-0,05t^4}{4} + \frac{0,31t^3}{3} + \frac{10,8t^2}{2} + 2364t \right) \Big|_0^{40,44} \\
&= 0,709113 \left(\frac{-0,05(40,44)^4}{4} + \frac{0,31(40,44)^3}{3} + \frac{10,8(40,44)^2}{2} + 2364(40,44) \right) - 0 \ . \\
&= 0,709113((-33431,4028) + 6833,9827 + 8831,1254 + 95600,16) \\
&= 0,709113(77833,8644) \\
&= 55193,00
\end{aligned}
$$

Basicamente, a fórmula em (3.2.13) calcula separadamente a receita líquida ($R\$77833,86$, que já havia sido determinada) e um fator de desconto ($0,709113$ ou $70,91\%$ do valor original) a ser aplicado posteriormente. Os $R\$55193,00$ resultantes, mostram qual este é o valor de todo o fluxo de receita líquida, no instante $t = 0$ (ou seu valor presente $VP/RL(t)$).

O objetivo inicial neste momento é gerar um parecer acerca da recomendação ou não de compra do equipamento. Seu custo de aquisição (C_a) está avaliado em $R\$20550,00$ pagos em $t = 0$, que confrontados com a receita líquida em $t = 0$ resultam em

$$
\begin{aligned}
L_l &= VP/RL(t) - C_a \\
&= 55193 - 20550 \ , \\
&= 34643,00
\end{aligned}
$$

ou seja, pagos os custos de aquisição, o investimento na nova máquina geraria um lucro líquido, em valores atuais, de $R\$34643,00$; portanto, baseado em (3.2.24), a compra é recomendada.

Raramente uma nova máquina começa a operar já em sua máxima capacidade: Os operadores tem pouca experiência relacionada a esta; ajustes nos estágios iniciais de produção devem ser realizados, gerando paradas frequentes para manutenção, entre outros fatores que fazem com que sua capacidade plena só se revele em um período posterior. Com o tempo de uso, e a experiência gerada no período; os ajustes-padrão se tornam conhecidos, assim como a melhor prática de operação, operadores mais confiantes e experientes, assim como pequenas *melhorias nos processos posteriores fazem com que a produção se eleve, fenômeno relacionado a curva de experiência. Como resultado, custos e tempos de processamento menores podem ser obtidos. Na figura (14), observa-se que a equação $R(t)$, que denota a receita gerada, após o início da produção em $t = 0$, tem comportamento crescente em um pequeno intervalo, antes de decrescer, relacionado à curva de experiência. Esta não desaparece no intervalo em que a receita decresce, e sim atua atenuando o efeito da queda. Na Figura (15), além de $R(t)$ e $C(t)$ que já constavam na Figura (13), inclui-se a função $P(t) = -0,05t^3 + 0,6t^2 + 2500$, que busca estimar a receita gerada pela produção isenta dos efeitos da curva de experiência. Com estes, como mensurar os efeitos dessa?*

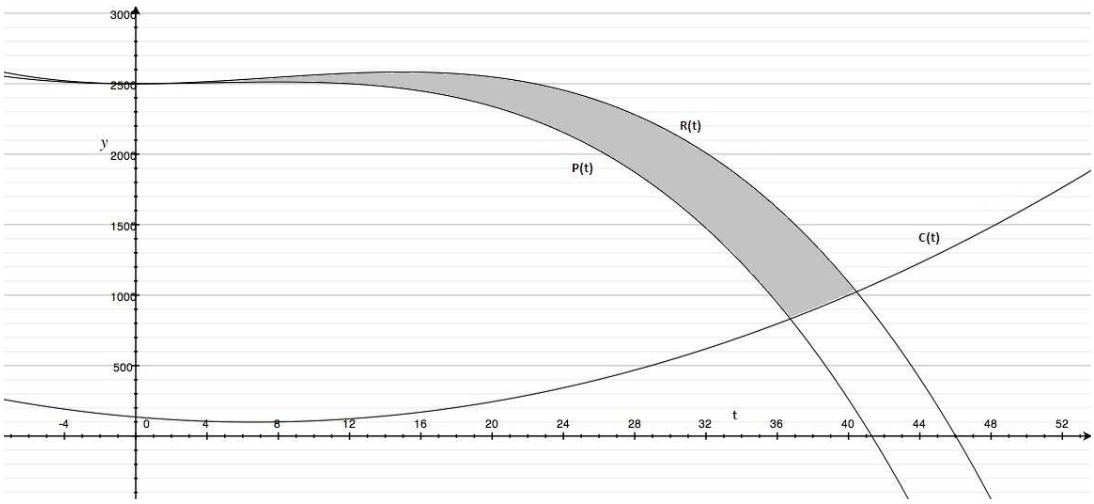

Figura 15: Incremento líquido - A curva de experiência

Fonte: Autoria própria

Como $P(t)$ não considera a curva de experiência, e $R(t)$ sim, afirma-se que essa diferença (S) refere-se a influência desta; retirando os custos de manutenção, se obtém o incremento líquido (S_l) da receita (área hachurada na Figura (15)).

É sabido que o ponto de equilíbrio entre $R(t)$ e $C(t)$ localiza-se em $x = 40,44$. É necessário que seja determinado agora, o ponto de equilíbrio para $P(t)$ e $C(t)$.

$$\begin{aligned} P(t) - C(t) &= 0 \\ P(t) &= C(t) \\ -0,05t^3 + 0,6t^2 + 2500 &= (0.9t - 6)^2 + 100 \\ -0,05t^3 - 0,21t^2 + 10,8t + 2364 &= 0 \end{aligned}.$$

O polinômio tem como resultados uma raiz real e duas complexas. Com o auxílio do software Maple, obtém-se $t_1 = 36,73$, $t_2 = -20,46 + 29,46i$ e $t_3 = -20,46 - 29,46$. Excluídas as *raízes complexas, conclui-se que o ponto de equilíbrio entre* $P(t)$ *e* $C(t)$ *é* $36,73$*, visualizável na Figura (15). Em decorrência disso, tem-se que os intervalos viáveis de operação das funções são* $R(t) = \{t \in \mathbb{R}|0 \leq t \leq 40,44\}$*, e* $P(t) = \{t \in \mathbb{R}|0 \leq t \leq 36,73\}$*. Calcula-se então a diferença entre as áreas das duas funções*

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{0}^{40,44} -0,05t^3 + 1,12t^2 + 2500dt - \int_{0}^{36,73} -0,05t^3 + 0,6t^2 + 2500\ dt \\
&= \left(\frac{-0,05t^4}{4} + \frac{1,12t^3}{3} + 2500t\right)\Bigg|_{0}^{40,44} - \left(\frac{-0,05t^4}{4} + \frac{0,6t^3}{3} + 2500t\right)\Bigg|_{0}^{36,73} \\
&= \left(\frac{-0,05(40,44)^4}{4} + \frac{1,12(40,44)^3}{3} + 2500(40,44) - 0\right) \\
&\quad - \left(\frac{-0,05(36,73)^4}{4} + \frac{0,6(36,73)^3}{3} + 2500(36,73) - 0\right) \\
&= ((-33431,4028) + 24690,5184 + 101100) - ((-22750,6456) + 9910,4364 + 91825) \\
&= 92359,1156 - 78984,7908 \\
&= 13374,32
\end{aligned} \tag{3.2.25}
$$

Este resultado não é o que se deseja, afinal, quando se subtrai a área referente a $P(t)$ *de* $R(t)$*, os custos incorridos no intervalo* $[36,73;40,44]$ *ainda não estão inclusos neste valor. Para que se obtenha o incremento líquido* S_l*, este deve ser retirado. Os custos incorridos no intervalo descrito são*

$$
\begin{aligned}
C(t) &= \int_{36,73}^{40,44} (0.9t - 6)^2 + 100\ dt \\
&= \int_{36,73}^{40,44} 0,81t^2 - 10,8t + 136\ dt \\
&= \frac{0,81t^3}{3} - \frac{10,8t^2}{2} + 136t\Bigg|_{36,73}^{40,44}
\end{aligned} \tag{3.2.26}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{0,81(40,44)^3}{3} - \frac{10,8(40,44)^2}{2} + 136(40,44)\right) \\
&\quad - \left(\frac{0,81(36,73)^3}{3} - \frac{10,8(36,73)^2}{2} + 136(36,73)\right) . \qquad (3.2.27) \\
&= (14525,2502) - (11089,2676) \\
&= 3435,98
\end{aligned}
$$

Subtraindo (3.2.27) de (3.2.25)

$$
\begin{aligned}
S_l &= 13374,32 - 3435,98 \\
&= 9938,34
\end{aligned} .
$$

Então, pode-se interpretar que, a curva de experiência - as melhorias incrementais durante o período de uso do equipamento - geram um acréscimo de $R\$9938,34$ *nas receitas decorrentes da produção deste, e uma sobrevida rentável (a diferença de tempo entre os pontos de equilíbrio) de* $3,71$ *meses, ou* 3 *meses e* 21 *dias.*

■

4 CONCLUSÃO

O demonstrado aqui não têm a intenção de limitar o campo de utilização do estudo de Cálculo em gestão aos casos descritos, mas apenas exemplificá-lo, afinal, seu potencial é enorme, e pode-se elencar aqui diversos outros casos em que há possibilidade do uso deste.

Simplificando o comportamento de variáveis, é comum encontrar na literatura técnica de administração fenômenos descritos como lineares ou constantes, mas que na realidade estão longe de sê-lo (como por exemplo a produtividade de um funcionário durante o dia, ou o rendimento de uma máquina ao longo de sua vida útil). Em razão disto, o estudo e a aplicação de funções não lineares, assim como o uso de ferramentas de maior complexidade (EDOs, por exemplo), podem auxiliar as organizações a utilizarem melhor seus recursos e projetar seu futuro com mais segurança.

Embora haja diversas formas diferentes de tratar os problemas apresentados, alguns sem o uso de Cálculo e com resultados equivalente (como as relacionadas aos juros compostos), a utilização das ferramentas aqui citadas suprem algumas limitações importantes das fórmulas tradicionais. A soma de fluxos de receitas e custos não lineares são tão extensos quanto maiores os períodos considerados, somando-se a isto, a consideração de intervalos fracionários torna a determinação dos valores demasiadamente trabalhosa e por vezes inviável. O uso de integrais definidas simplifica o processo, assim como oferece liberdade para tratar de qualquer intervalo desejado, por menos usual que seja, além de oferecer resultados mais precisos. Sua importância é ainda maior quando busca-se a consideração temporal destes fluxos, aumentando a complexidade que se deve considerar no problema. Na questão relacionado a armazenagem do vinho, não seria possível considerar o modelo das funções apresentadas (assim como a inclusão dos custos financeiros), sem o uso de integrais, ou pelo menos, não com a precisão aqui alcançada, assim como na interferência no setor produtivo de fatores como a curva de experiência, o cansaço de um funcionário ao longo do dia ou a “curva da banheira”. Em relação a descontos de fluxos de valores, é pouco prático o cálculo de descontos em intervalos não inteiros, quando a situação exigir, enquanto utilizando-se integrais definidas, há liberdade de escolha em relação a qualquer intervalo fracionário.

A operacionalização e interpretação dos resultados obtidos através diferenciação e da integração não são elementares, demandando uma formação matemática sólida por parte não só de quem trata os dados e modela as funções, como também do usuário que interpretará os resultados e os utilizarão como subsídio para decisões nas organizações. Para que estes possam usufruir destas possibilidades, os currículos acadêmicos que estes gestores cumprem durante sua graduação ou pós-graduação devem contemplar largamente os conceitos envolvidos. Em razão disto, reitera-se a importância da presença da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Administração, assim como seu desenvolvimento e aplicações em outras disciplinas.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo - Volume I**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

AVILA, G. **Cálculo das funções de uma variável - Volume I**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

BARBONI, A.; PAULETTE, W. **Cálculo e Análise - Cálculo diferencial e integral a uma variável**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

BUDNICK, F. S. **Applied Mathematics for Business, Economics and the Social Sciences**. 1. ed. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, 1979.

CHIANG, A. **Matemática para Economistas**. 1. ed. São Paulo: Pearson, 1982.

DEMANA, F. et al. **Pré-Cálculo**. 1. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009.

JUNIOR, A. B. L.; CHEROBIM, A. P.; RIGO, C. M. **Administração Financeira**. 1. ed. Rio de Janeiro: Campus, 2002.

LARSON, R. E.; HOSTETLER, R. P. **Brief Calculus with Applications**. 2. ed. Lexington: D.C. Heath & Co., 1987.

LEITHOLD, L. **Matemática Aplicada à Administração e Economia**. 1. ed. São Paulo: Harbra, 1988.

LIMA, E. L. **Curso de Análise - Volume 1**. 12. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2010.

MARTINS, E. **Contabilidade de Custos**. 9. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

SLACK, N.; CHAMBERS, S.; JOHNSTON, R. **Administração da Produção**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

STEWART, J. **Cálculo - Volume 1**. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

TAN, S. **Matemática Aplicada à Administração e Economia**. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.

VERAS, L. L. **Matemática aplicada à economia**. 1. ed. São Paulo: Atlas, 1985.

WEBER, J. E. **Matemática para Economia e Administração**. 1. ed. São Paulo: Harbra, 1977.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais - Volume 1**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.