UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOYCE MENDES DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2011

JOYCE MENDES DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Adilandri Mércio Lobeiro.

Co-orientador: Priscila Amara Patricio de Melo

CAMPO MOURÃO

2011

TERMO DE APROVAÇÃO

Joyce Mendes da Silva

Um Estudo sobre Matrizes, Determinantes e Sistemas de Equações Lineares

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Adilandri Mércio Lobeiro

Co-Orientadora: Prof. Msc. Priscila Amara Patricio de Melo

Prof. Msc. Wellington José Corrêa

Campo Mourão, 2011

Dedico esse trabalho aos meus pais Valdir Mendes da Silva e Maria de Lourdes Mendes da Silva, e ao meu esposo Evanildo Batista.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelas oportunidades que sempre me proporcionou.

À minha família e ao meu esposo por toda paciência, tempo, compreenção e dedicação que tiveram comigo durante todo o processo de minha formação.

Agradeço em especial a minha amiga Clicia por ter viabilizado as viagens à Campo Mourão. Visto que se não fosse tamanha dedicação, este sonho talvez não pudesse ter sido alcançado. E aos meus amigos Jéssica e Ueslei que sempre me ajudaram a superar os obstáculos, me incentivando a continuar. A eles, dedico minha amizade sincera.

Ao meu orientador e amigo Adilandri pelo esforço, empenho e dedicação.Também a minha co-orientadora Priscila pela atenção.

A todos, o meu muito obrigada.

A matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.

Descarte

RESUMO

SILVA, Joyce Mendes. Um Estudo sobre Matrizes, Determinantes e Sistemas de Equações Lineares. 50 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

Neste trabalho apresentamos a teoria de matrizes, determinantes e sistemas lineares. Sendo que, na primeira parte, trabalhamos com matrizes e suas propriedades. Na segunda, abordamos a noção de determinantes, trabalhando principalmente a respeito de sua definição. Já em sistemas introduzimos a ideia, via um artigo publicado na revista RECEN. Por último, aplicamos a teoria desenvolvida em um exemplo referente a circuito elétrico.

Palavras-chave: Matriz, Determinante, Equação Linear.

ABSTRACT

SILVA, Joyce Mendes. A Study of Matrices, Determinants and Linear Systems of Equations. 50 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

It is presented in this work the Theory of Matrices, Determinants and the Linear Systems. First of all we work with Matrices and their Properties. Then we approach the Notion of Determinants working mainly on its definition. When talking about Systems we introduce the idea through an article already published at the ”RECEN”magazine. Finally, we apply the Theory already developed in a specific example concerning the Electrical Circuit.

Keywords: Matrix, Determinants, Linear Equation.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – GERADOR E RESISTOR 45
FIGURA 2 – VOLTÍMETRO 46
FIGURA 3 – CIRCUITO 46

LISTA DE SIGLAS

RECEN	Revista Ciências Exatas e Naturais
SMED	Simplificação do Método do Escalonamento usando determinante de ordem dois

SUMÁRIO

1 MATRIZES **9**
1.1 HISTÓRICO 9
1.2 INTRODUÇÃO 10
1.3 TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES 13
1.4 OPERAÇÕES COM MATRIZES 16
1.4.1 Adição 16
1.4.2 Multiplicação por Escalar 17
1.4.3 Propriedades da Adição e Multiplicação por Escalar 17
1.4.4 Produto de Matrizes 18
1.4.5 Propriedades da Multiplicação de Matrizes 19
2 DETERMINANTE **20**
2.1 INTRODUÇÃO 20
2.2 DESENVOLVIMENTO DE LAPLACE 24
3 SISTEMAS LINEARES **26**
3.1 HISTÓRICO 26
3.2 ARTIGO REVISTA RECEN 27
3.3 INTRODUÇÃO 28
3.4 SIMPLIFICAÇÃO DO MÉTODO DO ESCALONAMENTO USANDO DETERMINANTE DE ORDEM DOIS (SMED) 31
3.4.1 Sistema de uma equação e uma incógnita 31
3.4.2 Sistema de duas equações e uma incógnitas 31
3.4.3 Sistema de duas equações e duas incógnitas 31
3.4.4 Sistema de três equações e duas incógnitas 34
3.4.5 Sistema de três equações e três incógnitas 36
3.4.6 Sistema de m equações a n incógnitas 39
3.5 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS 41
3.6 EXEMPLOS 41
3.6.1 Sistema de Ordem 2×2. 42
3.6.2 Sistema de Ordem 3×2. 42
3.6.3 Sistema de Ordem 3×3. 43
4 APLICAÇÕES **45**
4.1 REDES ELÉTRICAS. 45
5 CONCLUSÃO **49**
REFERÊNCIAS **50**

1 MATRIZES

1.1 HISTÓRICO

Cayley e a Teoria das Matrizes

A disputa entre newton e Lebniz (ou, mais exatamente, entre seus adeptos), em torno da primazia da criação do Cálculo, foi negativa para a matemática inglesa, embora Newton tivesse levado vantagem na polêmica. Considerando uma questão de honra nacional ser fiel ao seu mais eminente cientista, nos cem anos seguintes ao ínicio desse episódio os matemáticos britânicos fixaram-se nos métodos geométricos puros, preferidos de Newton, em detrimento dos métodos analíticos, muito mais produtivos. Como os matemáticos da Europa Continental exploraram grandemente estes últimos métodos nesse período, a matemática britânica acabou ficando bem para trás.

Mas acabou havendo uma reação e a matemática britânica consegui voltar ao primeiro plano no século XIX, especialmente em álgebra, um campo que de um modo geral ficara algo marginalizado nesse meio tempo. E um dos maiores responsáveis por essa reacensão foi Arthur Cayley (1821-1895).

Natural de Richmond, Inglaterra, Cayley descendia de uma família que conciliava talento e tradição. Desde muito cedo demonstrou grande aptidão para os estudos. Diante disso, e atendendo a sugestão de alguns de seus professores, os pais resolveram enviá-lo a estudar em Cambridge, em vez de iniciá-lo nos negócios da família. Assim, em 1838 ingressa no Trinity College, onde iria se graduar com distinção máxima. Logo em seguida inicia-se no ensino, no próprio Trinity, mas desiste três anos depois, pois sua permanência exigiria abraçar a carreira religiosa, o que não estava em seus planos. Nos quinze anos seguintes dedicou-se a advocacia, mas com certeza não integralmente, como o mostram os mais de duzentos artigos que publicou no período, na área de matemática. Foi também nessa época que conheceu James Joseph Sylvester (1814-1897), outro dos grandes expoentes da “ álgebra britânica”do século XIX, com quem estabeleceu sólida amizade, consolidada até por áreas de pesquisa comuns, como a teoria dos invariantes. Em 1863 aceita convite para ocupar uma nova cadeira de matemática pura criada em Cambridge, à testa da qual ficou até a morte (salvo um semestre de 1882, em que deu cursos nos Estados Unidos).

Em volume de produção matemática, em todos os tempos, Cayley talvez só seja superado por Euler e Cauchy. E, embora sua obra seja bastante diversificada, foi no campo da álgebra, com a grande facilidade que tinha para formulações abstratas, que mais se sobressaiu. Assim, por exemplo, deve-se a ele, num artigo de 1854, a noção de *grupo abstrato*. (Galois, que introduzira o termo *grupo* em 1830, com o sentido atual, só considerara grupos de permutações.) Outra contribuição importante de Cayley, iniciada em 1843, é a geometria analítica n-dimencional em cuja elaboração utiliza determinantes e coordenadas homogêneas como instrumentos essenciais.

O ínicio da teoria das matrizes remonta a um artigo de Cayley em 1855. Diga-se de passagem, porém, que o termo *matriz* já fora usado, com o mesmo sentido, cinco anos antes por Sylvester. Nesse artigo Cayley fez quetão de salientar que, embora logicamente a ideia de matriz preceda a de determinante, historicamente ocorreu o contrário: de fato, os determinantes já eram usados há muito na resolução de sistemas lineares. Quanto às matrizes, Cayley introduziu-as para simplificar a notação de uma transformação linear. Assim, em lugar de

$$\begin{cases} x' &= ax+by \\ y' &= cx+dy \end{cases} \text{ escrevia } (x',y') = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

A observação do efeito de duas transformações sucessivas surgiu-lhe a definição de produto de matrizes. Daí chegou à ideia de inversa de uma matriz, o que obviamente pressupõe a de elemento neutro (no caso, a matriz idêntica). Curiosamente, foi só num outro artigo, três anos depois, que Cayley introduziu o conceito de adição de matrizes e o de multiplicação de matrizes por escalares, chamando inclusive a atenção para as propriedades algébricas dessas operações.

Ao desenvolver a teoria das matrizes, como outros assuntos, a grande preocupação de Cayley era com a forma e a estrutura em álgebra. O século XX se encarregaria de encontrar inúmeras aplicações para suas matrizes. (IEZZI; HAZZAN, 1993)

1.2 INTRODUÇÃO

Nesta seção apresentaremos os conceitos básicos sobre matrizes. Estes conceitos aparecem naturalmente na resolução de muitos tipos de problemas e são essenciais, não apenas porque eles “ordenam e simplificam”o problema, mas também porque fornecem novos métodos de resolução. Chamaremos de “*matriz*” uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.

Por exemplo, em uma editora as vendas de livros de Matemática, Física e Química, no primeiro trimestre de um ano, podem ser expressas pela tabela a seguir.

	Janeiro	Fevereiro	Março
Matemática	20000	32000	45000
Física	15000	18000	25000
Química	16000	17000	23000

Ao abstraírmos os signinicados das linhas e colunas, temos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 20000 & 32000 & 45000 \\ 15000 & 18000 & 25000 \\ 16000 & 17000 & 23000 \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Se quisermos, por exemplo, saber quantos livros de Matemática foram vendidos em fevereiro, basta olharmos o número que está na *primeira linha* e na *segunda coluna* da matriz (1.1). Observe que em um problema em que o número de variáveis e de observações é muito grande, essa disposição ordenada dos dados em forma de matriz torna-se absolutamente indispensável.

Outros exemplos de matrizes são:

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}.$$

Os elementos de uma matriz podem ser números (reais ou complexos), funções, ou ainda outras matrizes.

Representaremos uma matriz genérica de m linhas e n colunas por:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}.$$

A ***i*-ésima linha** de A é

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \text{ onde } 1 \leq i \leq m,$$

e a j**-ésima coluna** de A é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \text{ com } 1 \leq j \leq n.$$

Usaremos sempre letras maiúsculas para denotar matrizes e quando quisermos especificar a ordem de uma matriz A (isto é, o número de linhas e colunas), escreveremos $A_{m\times n}$ (pronuncia-se "m por n"), onde m representa o número de linhas e n o número de colunas. Também são utilizadas outras notações para matriz além de colchetes, como parênteses ou entre dublas barras verticais, como por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{Vmatrix} 12 & 5 \\ -2 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Para localizar um elemento de uma matriz, dizemos a linha e a coluna (nesta ordem) em que ele está. Por exemplo, na matriz:

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix},$$

o elemento que está na primeira linha e terceira coluna é 0, isto é, a_{13}=0. Ainda nesse exemplo temos a_{11}=2, a_{21}=1, a_{22}=-4.

Definição 1.1 *Uma matriz é uma tabela de elementos dispostos em m linhas e n colunas. Os elementos nesta tabela são chamados "entradas" da matriz.*

Observação 1.1 *A palavra matriz deriva da palavra latina mater, que significa "mãe". Quando o sufixo -iz é acrescentado, o significado torna-se "útero". Assim como um útero envolve um feto, os colchetes de uma matriz envolvem seus elementos, e assim como o útero dá origem a um bebê, uma matriz gera certos tipos de funções, chamadas transformações lineares (POOLE, 2006).*

Definição 1.2 *Duas matrizes $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B_{r\times s} = [b_{ij}]_{r\times s}$ são iguais se elas têm o mesmo número de linhas e colunas e todos os elementos que ocupam posições correspondentes são iguais, isto é, se $m = r$, $n = s$ e $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i e todo j.*

Exemplo 1.1 *Se* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -4 & \log 1 & \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ 5 & (-2)^2 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 5^0 & 3 & \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \\ -2^2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{0,2} & 4 & 2^{-3} \end{bmatrix}$ *temos que* $A = B$, *pois* $a_{ij} = b_{ij}$, *para todo* $i, j = 1, 2, 3$.

Definição 1.3 *Dada uma matriz* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, *definimos a matriz transposta de A, denotada por* A^t *como a matriz* $A^t = [b_{ij}]_{n\times m}$, *cujas linhas são as respectivas colunas de A, isto é,* $b_{ij} = a_{ji}$, *para todo i e j.*

Exemplo 1.2 *Dada a matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ *então,* $A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $(A^t)^t = A$.

1.3 TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES

No que se segue considere sempre uma matriz genérica $A_{m\times n}$.

Matriz Quadrada é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas, isto é, $m = n$.

Por exemplo,

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 9 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No caso de matrizes quadradas $A_{m\times m}$, costumamos dizer que A é uma matriz de ordem m. No exemplo anterior temos duas matrizes quadradas, uma de ordem 2 e outra de ordem 3.

Matriz Nula é aquela em que $a_{ij} = 0$, para todos i e j .

Observe as seguintes matrizes nulas

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A_{4\times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriz Coluna é aquela que possui uma única coluna, isto é, $n = 1$.

Segue abaixo, dois exemplos de matriz coluna.

$$A_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix} \text{ e } A_{2\times 1} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Matriz Linha é aquela que possui uma única linha, isto é, $m = 1$.

Considere dois exemplos de matriz linha.

$$A_{1\times 4} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } A_{1\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação 1.2 *Uma matriz $1 \times n$ (respectivamente, $m \times 1$) também é chamada "vetor" de dimensão n(respectivamente, m). Observe os exemplos a seguir:*

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 & 8 \end{bmatrix} \; e \; v = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde u é um vetor de dimensão 5 e v é um vetor de dimensão 3.

Matriz Diagonal é uma matriz quadrada $(m = n)$ onde $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na "diagonal"são nulos. Diagonal de uma matriz quadrada são os elementos a_{ij} tais que $i = j$.

Considere os exemplos:

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \text{ e } A_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

onde temos duas matrizes diagonais.

Um exemplo importante de uma matriz diagonal vem a seguir.

Matriz Identidade é toda matriz quadrada em que $a_{ij} = 1$ se $i = j$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$. Uma matriz identidade será sempre representada por I_m, sendo m o número de linhas ou colunas.

Temos dois exemplos de matriz identidade a seguir,

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz Triangular Superior é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

Observe os exemplos,

$$A_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}.$$

Matriz Triangular Inferior é uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Temos a seguir dois exemplos,

$$A_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & -8 & 15 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -70 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matriz Oposta é a matriz obtida após trocar o sinal de todos os elementos. Indicamos a matriz oposta da matriz A por $-A$.

Por exemplo, se A=$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ então $-A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Matriz Transposta é a matriz obtida a partir da troca ordenada de linhas por colunas ou as colunas por linhas. Indicamos a transposta da matriz A por A^t.

Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ temos $A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Matriz Simétrica é uma matriz quadrada onde $a_{ij} = a_{ji}$ para todos i e j. Uma matriz simétrica é simétrica em relação à diagonal.

Segue exemplos de matrizes simétricas.

$$\begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & c \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 8 & 9 & -4 \\ 9 & 1 & a \\ -4 & a & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriz Anti-Simétrica é uma matriz quadrada onde $a_{ij} = -a_{ji}$ para todos i e j.

Observe os seguintes exemplos,

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 9 & -4 \\ -9 & 0 & a \\ 4 & -a & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teorema 1.1 *Uma matriz é simétrica se, e somente se ela é igual à sua transposta, isto é,* $A = A^t$.

Observação 1.3 *Note que é sempre nula a diagonal de matrizes anti-simétricas.*

Submatriz Se partirmos de uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, e eliminarmos algumas, mas não todas, linhas ou colunas, obtemos uma submatriz de A.

Dada a matriz A temos

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ --- & --- & --- & --- & --- \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right],$$

que a mesma foi subdividida. Obtemos assim, as submatrizes de A, ou seja,

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ --- & --- \\ A_{21} & A_{22} \end{array}\right].$$

Podemos também escrevê-la,

$$A = \left[\begin{array}{c|cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ --- & --- & --- & --- & --- \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12} & \widehat{A}_{13} \\ --- & --- & --- \\ \widehat{A}_{21} & \widehat{A}_{22} & \widehat{A}_{23} \end{array}\right],$$

o que fornece outra subdivisão de A.

Chamamos de matrizes em blocos.

1.4 OPERAÇÕES COM MATRIZES

Ao utilizar matrizes, surge naturalmente a necessidade de efetuarmos certas operações.

1.4.1 Adição

A soma de duas matrizes de mesma ordem, $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ e $B_{m\times n} = [b_{ij}]$ é uma matriz $m \times n$, que denotaremos por $A + B$, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de A e

B, isto é, $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$.

Por exemplo, dada $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, temos:

$$\text{A+B=}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 2 \\ -2 & 12 \end{bmatrix}.$$

Observação 1.4 *A adição de matrizes tem as mesmas propriedades que a adição de números reais.*

1.4.2 Multiplicação por Escalar

Se $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ e κ é um número real, então definimos a multiplicação da matriz A pelo escalar κ, como sendo uma nova matriz κA, definida por $\kappa A=[\kappa a_{ij}]_{m\times n}$.

Dada a matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ temos

$$-2A=-2\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

1.4.3 Propriedades da Adição e Multiplicação por Escalar

Se A, B e C são matrizes de mesma ordem $m\times n$ e κ , κ_1 e κ_2 são números reais, então:

A1) $A+B=B+A$; (propriedade comutativa)

A2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (propriedade associativa)

A3) $\exists\, 0_{m\times n}$ tal que $0_{m\times n}+A=A, \forall\, A$ (elemento neutro aditivo)

A4) para cada $A, \exists -A$ tal que $-A+A=0$ (oposta)

M1) $(\kappa_1\kappa_2)A=\kappa_1(\kappa_2 A)$ (propriedade associativa)

M2) $\kappa(A+B)=\kappa A+\kappa B$ (propriedade distributiva)

M3) $(\kappa_1+\kappa_2)A=\kappa_1 A+\kappa_2 A$ (propriedade distributiva)

M4) $1 \cdot A = A, \forall A$ (elemento neutro multiplicativo)

Observação 1.5 *As propriedades acima, conferem ao conjunto das matrizes $m \times n$ a estrutura de "espaço vetorial".*

1.4.4 Produto de Matrizes

Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n\times p}$, chamamos de produto AB, a matriz $C = [c_{ik}]_{m\times p}$ tal que:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

para todo $i = 1, 2, \cdots, n$ e todo $k = 1, 2, \cdots, p$.

Por exemplo, temos

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

e

$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + \cdots + a_{3n}b_{n2} = \sum_{j=1}^{n} a_{3j}b_{j2}.$$

Observação 1.6

1. *Só podemos efetuar o produto de duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$ se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz. A matriz C resultante terá o número de linhas da primeira matriz (no caso A) e o número de colunas da segunda (no caso B), isto é, $C = AB$ é uma matriz $m \times p$;*

2. *O elemento c_{ik} da matriz produto é obtido multiplicando os elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da k-ésima coluna da segunda matriz e somando estes produtos.*

Considere as matrizes A, B, C e D indicadas abaixo. Efetue, se possível, os produtos AB, BA, CD e DC, justificando quando não for possível.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}.$$

O produto BA não exixte,porque o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A. Analogamente, o produto DC não existe, porque o número de colunas de D é diferente do número de linhas de C. Nos demais casos temos,

$$AB = \begin{bmatrix} 2.1+1.0 & 2.(-1)+1.1 \\ 4.1+2.0 & 4.(-1)+2.1 \\ 5.1+3.0 & 5.(-1)+3.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } CD = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 9 & 18 & -7 \\ 12 & 62 & -3 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}.$$

1.4.5 Propriedades da Multiplicação de Matrizes

Se A, B e C são matrizes tais que as operações citadas, estão definidas, temos:

1. Se A é uma matriz $m \times n$ então $AI_n = A$ e $I_m A = A$ (I = matriz identidade);
2. $(A+B)C = AC+BC$;
3. $C(A+B) = CA+CB$;
4. $(AB)C = A(BC)$;
5. $(AB)^t = B^t A^t$;
6. Se A é uma matriz $m \times n$ então $0_{p\times m}A = 0_{p\times n}$ e $A0_{n\times k} = 0_{m\times k}$ (0 = matriz nula).

Observação 1.7 *Em geral, temos que $AB \neq BA$, pois dada*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

temos

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

donde concluímos que $AB \neq BA$. Note também que, $AB = 0$ com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

2 DETERMINANTE

2.1 INTRODUÇÃO

É possível associar a cada matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $n \times n$ um escalar, chamado de determinante de A, o qual denotaremos por $detA$, ou $|A|$, ou ainda $det[a_{ij}]$.

Para conseguirmos associar esse número a matriz, vamos introduzir algumas definições. A primeira delas, é o que é uma “permutação”.

Definição 2.1 (Permutação) *Dados n objetos distintos $a_1, \cdots, a_n$, uma permutação destes objetos consiste em dispô-los em uma determinada ordem.*

Por exemplo, (12) é uma permutação dos números 1 e 2, (21) é outra permutação. A quantidade de permutações de n objetos é dada por $n!$, que é lido n fatorial e

$$n! = n(n-1)(n-2).\cdots.2.1$$

onde n é um inteiro positivo. Por exemplo $2! = 2.1 = 2$ e $3! = 3.2.1 = 6$. Defini-se também, $0! = 1$.

Definição 2.2 *Dada uma permutação dos inteiros $1, 2, \cdots, n$, existe uma inversão quando um inteiro precede outro menor que ele.*

Consideremos as permutações de 1 e 2 e vejamos em cada permutação o número de inversões.

Permutação	Números de inversões
(1 2)	0
(2 1)	1

Agora estamos em condição de exemplificar o que definiremos como determinante. Para isso, consideremos os seguintes casos:

Matriz 2×2**:** Dada uma matriz A de ordem dois por dois, ou seja, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ definimos

$$detA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

De fato, definimos desta forma porque aparecem todos os produtos $a_{1j_1}a_{2j_2}$, onde (j_1, j_2) são as permutações de 1 e 2. Além disso, vemos que o sinal do termo é negativo, se a permutação tiver um número ímpar de inversões.

Matriz 1×1**:** Caso tenhamos uma matriz de ordem 1×1, ou seja, $A = [a]$, temos que $detA = a$, ou seja, é igual ao elemento da matriz, isto porque não existe inversão e a permutação de um elemento é igual a um.

Matriz 3×3**:** Dada uma matriz A de ordem três por três, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

definimos o determinante da matriz A por

$$detA = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} .$$

Para um melhor entendimento da definição, usaremos a ideia de permutação e inversão como nos casos anteriores. Consideremos, por exemplo, (123) que é uma permutação dos números 1, 2 e 3, observe que (213) é outra permutação, e assim segue, teremos $3! = 3.2.1 = 6$ permutações. Vamos detalhar as permutação e o número de inversões.

Permutação	Números de inversões
(1 2 3)	0
(1 3 2)	1
(2 1 3)	1
(2 3 1)	2
(3 1 2)	2
(3 2 1)	3

Ao considerarmos uma matriz de ordem 3×3 onde definimos o determinante percebemos que aparecem todos os produtos $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$, onde (j_1, j_2, j_3) são as permutações de 1, 2 e 3. Além disso, observamos que o sinal do termo fica negativo, se a permutação tiver um número ímpar de inversões.

Como generalização, o determinante de uma matriz quadrada $[a_{ij}]_{n\times n}$ é dado pela definição a seguir.

Definição 2.3 *$det[a_{ij}] = \sum\limits_{\rho}(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$, onde $J = J(j_1, \cdots, jn)$ é o número de inversões da permutação $(j_1 j_2 \cdots jn)$ e ρ indica que a soma é estendida a todas as $n!$ permutações de $(12\cdots n)$.*

Em relação a esta definição podemos fazer três observações:

i) Se a permutação $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ tem um número par de inversões, o coeficiente $(-1)^J$ do termo correspondente na somatória terá sinal positivo; caso contrário, terá sinal negativo.

ii) Em cada termo da somatória, existe um e apenas um elemento de cada linha, e um e apenas um elemento de cada coluna da matriz.

iii) Através de uma reordenação conveniente dos termos, mostra-se que também é possível definir um determinante por

$$det[a_{ij}] = \sum_{\rho}(-1)^J a_{j1_1}a_{j2_2}\cdots a_{jn_n}$$

variando os primeiros e deixando fixos os segundos índices.

Consideremos as seguintes propriedades envolvendo determinantes.

a) Se todos os elementos de uma linha (coluna) de uma matriz A são nulos, $detA = 0$.

A razão disto é que, pela observação (ii), em cada termo que aparece no cálculo do determinante há um dos elementos da linha (coluna) nula e, portanto, todos os termos se anulam, e o determinante é zero.

b) $detA = detA^t$.

Daí inferimos que as propriedades que são válidas para as linhas também são para colunas. A prova desta propriedade é feita da seguinte formar. Se $A = [a_{ij}]$, sabemos que $A^t = [b_{ij}]$, onde $b_{ij} = a_{ji}$. Então, pela definição de determinante, temos:

$$\begin{aligned} det[b_{ij}] &= \sum_{\rho}(-1)^J b_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{\rho}(-1)^J a_{j1_1}a_{j2_2}\cdots a_{jn_n} \\ &= det[a_{ij}] \text{ pela observação (iii).} \end{aligned}$$

c) Se multiplicarmos uma linha da matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por esta constante.

Para verificarmos isto, chamemos de A a matriz original e B a matriz obtida de A, multiplicando uma linha de A por uma constante k. Então, ao calcularmos o determinante de B, pela observação (ii), em cada termo aparece um elemento daquela linha que foi multiplicada por k. Podemos colocar k em evidência, e o que permanece é exatamente o cálculo do determinante de A. Portanto, $detB = kdetA$.

d) Uma vez trocada a posição de duas linhas, o determinante troca de sinal.

A razão disto é imediata se observarmos que ao trocar duas linhas de uma matriz, alteramos a paridade do número de inversões dos índices e, portanto trocamos o sinal dos termpos.

e) O determinante de uma matriz que tem duas linhas (colunas) iguais é zero.

Isto é verdade porque se trocarmos as posições das linhas que são iguais, a matriz e, portanto, o determinante permanecerão os mesmos. Por outro lado, pela propriedade anterior, o determinante deve trocar de sinal e, portanto, a única possibilidade é que o determinante seja nulo.

f) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Para motrar esta propriedade, usamos a definição de determinantes e a distributividade. Mas cuidado! Observe que aqui temos a soma numa linha, e não uma soma de matrizes. De um modo geral, o determinante de uma soma de duas matrizes não é igual à soma dos determinantes das matrizes. Ou seja, $det(A+B) \neq detA + detB$. Para detalhes da demonstração ver (BOLDRINI et al., 1986).

g) O determinante não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante. Para detalhes da demonstração ver (BOLDRINI et al., 1986).

Consideremos o determinante abaixo:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Aqui, à terceira linha, somamos a primeira linha multiplicada por 2.

h) $det(A.B) = detA.detB.$

Esta propriedade é muito útil no cálculo de um determinante. Para detalhes da demonstração ver (BOLDRINI et al., 1986).

2.2 DESENVOLVIMENTO DE LAPLACE

Vimos anteriormente que

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

onde podemos escrever

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Observe que o determinante da matriz 3×3 pode ser expresso em função dos determinantes das submatrizes 2×2, isto é,

$$detA = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|$$

onde A_{ij} é submatriz de A, donde a i-ésima linha e a j-ésima coluna foram retiradas. Além disso, se chamarmos

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$$

obtemos a expressão

$$detA = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

Esta propriedade continua sendo válida para matrizes de ordem n[1], e assim podemos ex-

[1]Para uma demonstração, veja por exemplo Lipschutz, S.; Àlgebra Lenear, McGraw-Hill do Brasil Ltda., Rio de janeiro,1971

pressar

$$\begin{aligned} detA_{n\times n} &= a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} detA_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} \end{aligned}$$

Ao número Δ_{ij} (que é o determinante afetado pelo sinal $(-1)^{i+j}$ da submatriz A_{ij}, obtida de A retirando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna), chamamos cofator ou complemento algébrico do elemento a_{ij}.

O desenvolvimento de Laplace é uma fórmula de recorrência que permite calcular o determinante de uma matriz de ordem n, a partir dos determinantes das submatrizes quadradas de ordem $n-1$.

Observe que na fórmula dada, o determinante foi desenvolvido pela i-ésima linha. Uma forma análoga é válida para as colunas.

Como exemplo, vamos calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

usando a fórmula de Laplace.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-2)\Delta_{12} + 1\Delta_{22} + (-1)\Delta_{32} \end{aligned}$$

onde

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7.$$

Portanto

$$|A| = (-2)(-2) + 1.8 + (-1)7 = 5.$$

3 SISTEMAS LINEARES

3.1 HISTÓRICO

Sistemas Lineares e Determinantes: Origens e Desenvolvimento.

Na matemática ocidental antiga são poucas as aparições de sistemas de equações lineares. No oriente, contudo, o assunto mereceu atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação - que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos desse procedimento encontram-se nos *Nove capítulos sobre a arte da matemática*, um texto que data provavelmente do século III a.C.

Mas foi só em 1683, num trabalho do japonês Seki Kowa, que a ideia de determinante (como polinômio que se associa a um quadrado de números) veio à luz. Kowa, considerado o maior matemático japonês do século XVII, chegou a essa noção através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o velho procedimento chinês (para o caso de duas equações apenas).

O uso de determinantes no Ocidente começou dez anos depois num trabalho de Leibniz, ligado também a sistemas lineares. Em resumo, Leibniz estabeleceu a condição de compatibilidade de um sistema de três equações a duas incógnitas em termos do determinante de ordem 3 formado pelos coeficientes e pelos termos independentes (este determinante deve ser nulo). Para tanto criou até uma notação com índices para os coeficientes: o que hoje, por exemplo, escreveríamos como a_{12}, Leibniz indicava por I_2.

A conhecida regra de Cramer para resolver sistemas de n equações a n incógnitas, por meio de determinantes, é na verdade uma descoberta do escocês Colin Maclaurin (1698-1746), datando provavelmente de 1729, embora só publicada postumamente em 1748 no seu *Treatise of algebra*. Mas o nome do suiço Gabriel Cramer (1704-1752) não aparece nesse episódio de maneira totalmente grauita. Cramer também chegou à regra (independentemente), mas depois, na sua *Intrudução à análise das curvas planas*(1750), em conexão com o problema de determinar os coeficientes da cônica geral

$$A+By+Cx+Dy^2+Exy+x^2=0.$$

O francês Étienne Bézout (1730-1783), autor de textos matemáticos de sucesso em seu tempo, sistematizou em 1764 o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. E coube a outro francês, Alexandre Vandermonde (1735-1796), em 1771, empreender a primeira abordagem da teoria dos determinantes independente do estudo dos sistemas lineares - embora também os usasse na resolução destes sistemas. O importante *teorema de Laplace*, que permite a expanção de um determinante através dos menores de r filas escolhidas e seus respectivos complementos algébricos, foi demonstrado no ano seguinte pelo próprio Laplace num artigo que, a julgar pelo título, nada tinha a ver com o assunto: "Pesquisas sobre o cálculo integral e o sistema do mundo".

O termo *determinante*, com sentido atual, surgiu em 1812 num trabalho de Cauchy sobre o assunto. Neste artigo, apresentado à Academia de Ciências, Cauchy suma-riou e simplificou o que era conhecido até então sobre determinantes, melhorou a notação (mas a atual com duas barras verticais ladeando o quadrado de números só surgiria em 1814 com Arthur Cayley) e deu uma demonstração do teorema da multiplicação de determinantes - meses antes J. F. M. Binet (1786-1856) dera a primeira demonstração deste teorema, mas a de Cauchy era superior.

Além de Cauchy, quem mais contribuiu para consolidar a teoria dos determinantes foi o alemão Carl G. J. Jacobi (1804-1851), cognominado às vezes "o grande algorista". Deve-se a ele a forma simples como essa teoria se apresenta hoje elementarmente. Como algorista, Jacobi era um entusiasta da notação de determinante, com suas potencialidades. Assim, o importante conceito de *jacobiano* de uma função, salientando um dos pontos mais característicos de sua obra, é uma homenagem das mais justas (IEZZI; HAZZAN, 1993).

3.2 ARTIGO REVISTA RECEN

Neste capítulo ensinaremos como resolver um sistema de m equações e n incógnitas, através do escalonamento. No entanto, apresentaremos um artigo publicado na revista RECEN, onde o mesmo apresenta um método para escalonar sistemas de equações lineares usando somente determinante de ordem 2 (SMED) conforme (LOBEIRO; GRAMANI, 2010), com intuito de usá-lo para futuras aplicações. Este método foi criado pelos professores Adilandri Mércio Lobeiro e Liliana Madalena Gramani. Mostraremos na íntegra o artigo com o objetivo de melhor esclarecimento do método. É importante ressaltar que tivemos a permissão dos autores para dispor o artigo neste trabalho.

Um método para escalonar sistemas de equações lineares usando somente determinante de ordem 2

Adilandri Mércio Lobeiro
Coordenação de Informática, COINF, UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Caixa Postal 271, CEP 87301-006, BR 369, km 0,5, Campo Mourão, Pr, Brasil.
alobeiro@utfpr.edu.br

Liliana Madalena Gramani
Departamento de Matemática, DMAT, UFPR - Universidade Federal do Paraná, Caixa Postal 019081, CEP 81531-990, Curitiba, Pr, Brasil
gramani@ufpr.br

3.3 INTRODUÇÃO

O presente artigo descreve um método para simplificação do modelo tradicional do escalonamento para sistemas de equações lineares de qualquer ordem.

O referido método denominado SMED, acrônimo para "Simplificação do Método do Escalonamento usando Determinante de ordem dois", fornece a solução de um sistema de *m* equações lineares e *n* incógnitas com duas características relevantes em relação ao método tradicional do escalonamento: (i) aspectos pedagógicos, que representam a facilidade com que os alunos aplicam o SMED; (ii) aspectos temporais, que representam o tempo necessário para operar o SMED em um cenário de sala de aula.

Além dessas características, o SMED possui outra, exclusivamente associada ao seu modo de operação, ele opera utilizando somente determinante de ordem dois, independentemente do número de equações e incógnitas que um sistema venha a possuir. Isso significa que sua utilização se torna acessível a qualquer estudante que tenha tido contato com Álgebra Linear básica.

Para propor o SMED, apresentou-se uma sequência de sistemas de equações lineares. Cada um desses sistemas, incluindo um sistema genérico, foi resolvido tanto pelo método tradicional do escalonamento como pelo SMED. Afinal, obteve-se a mesma solução, justificada pelas operações elementares. Desta forma, buscou-se salientar as vantagem do uso do método proposto.

Um sistema de equações lineares com *m* equações e *n* incógnitas é um conjunto de equações da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_3 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

onde b_i e a_{ij} são números reais, sendo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ números naturais.

Uma solução do sistema (3.1) é uma n-upla de números $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfaça simultaneamente essas m equações.

O método mais simples e eficiente para resolver sistemas lineares é o do escalonamento, conforme os trabalhos (LIMA, 1998; LIMA et al., 2001; BOLDRINI et al., 1986; KOLMAN; HILL, 2006; GONçALVES; SOUZA, 1977). Embora este método esteja consagrado por seu uso secular e, ao mesmo tempo, atual, este trabalho propõe uma nova forma de escalonamento utilizando somente determinantes de ordem dois. Essa proposta visa simplificar o método do escalonamento.

O método tradicional do escalonamento opera sobre as matrizes abaixo, que são, a matriz dos coeficientes do sistema (3.1) e a respectiva matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

e

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{2n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Diz-se que uma matriz é escalonada quando o primeiro elemento não-nulo de cada uma de suas linhas está à esquerda do primeiro elemento não-nulo de cada uma das linhas subsequentes e, além disso, as linhas nulas (se houver), ou seja, as linhas que tem todos elementos iguais a zero, estão abaixo das demais (LIMA, 1998).

Um sistema escalonado (cuja matriz é escalonada) pode ser facilmente resolvido de baixo para cima, obtendo-se primeiro o valor da última incógnita, substituindo-a por esse valor na equação anterior, e assim por diante (LIMA et al., 2001).

O método do escalonamento se baseia no fato de que todo sistema é equivalente a um sistema escalonado. Partindo do sistema (3.1), chega-se a um sistema escalonado equivalente por meio de uma sequência de operações elementares (BOLDRINI et al., 1986), que são as seguintes:

E1) Permuta da i-ésima e k-ésima equações do sistema. Notação: $L_i \leftrightarrow L_k$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq k \leq m$;

E2) Substituição da i-ésima equação pela i-ésima equação multiplicada por um escalar não nulo α. Notação: $L_i \leftarrow \alpha L_i$, $1 \leq i \leq m$;

E3) Substituição da i-ésima equação pela i-ésima equação mais α vezes a k-ésima equação. Notação: $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_k$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq k \leq m$.

Após obter um sistema escalonado equivalente ao sistema (3.1) através de operações elementares é possível classificá-lo quanto ao conjunto soluções. Se o sistema (3.1) admite:

- infinitas soluções, diz-se que o Sistema é Possível Indeterminado (SPI);
- uma única solução, diz-se que o Sistema é Possível Determinado (SPD);
- nenhuma solução, diz-se que o Sistema é Impossível (SI).

Com base no sistema tradicional de escalonamento, resumidamente desenvolvido acima, é proposto nas demais seções um método de escalonamento para até um sistema de m equações lineares e n incógnitas utilizando somente determinante de ordem dois.

É importante salientar que se apresentou o SMED a uma turma de alunos, durante uma aula de Álgebra Linear na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (Campus Campo Mourão), e percebeu-se um grande avanço em relação à aprendizagem quando esse foi comparado com o método tradicional do escalomento. O SMED tanto colaborou para obter a solução do sistema de equações de uma forma mais rápida quanto ajudou o aluno a entender melhor o processo de escalonamento. Foi observado, neste momento, a facilidade de aprendizagem do SMED e o pequeno espaço de tempo para solucionar o sistema.

3.4 SIMPLIFICAÇÃO DO MÉTODO DO ESCALONAMENTO USANDO DETERMINANTE DE ORDEM DOIS (SMED)

3.4.1 Sistema de uma equação e uma incógnita

Considera-se um sistema de uma equação e uma incógnita, dado por

$$ax = b,$$

onde a, x e b são números reais (BOLDRINI et al., 1986). Inicialmente pode-se pensar que a solução desta equação é $x = \frac{b}{a}$, entretanto é necessário avaliar as três possibilidades abaixo:

1. Se $a \neq 0$, então $x = \frac{b}{a}$, que é a única solução da equação, qualquer que seja o valor de b, SPD.
2. Se $a = 0$, há duas possibilidades, dependendo do valor de b:
   (a) Se $b \neq 0$, tem-se $0 \cdot x = b$ e não existe solução para esta equação, SI.
   (b) Se $b = 0$, tem-se $0 \cdot x = 0$ e qualquer número real será solução da equação, SPI.

As mesmas possibilidades ocorrem no caso geral de m equações a n incógnitas, como será desenvolvido adiante.

3.4.2 Sistema de duas equações e uma incógnitas

Um sistema linear de duas equações e uma incógnita é dado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & = & b_2 \end{cases}, \tag{3.4}$$

cuja solução, quando existe, é o conjunto formado por $x_1 \in \mathbb{R}$. Uma das maneiras de resolver o sistema (3.4) é obter os conjuntos soluções das equações $a_{11}x_1 = b_1$ e $a_{21}x_1 = b_2$ separadamente, como foi feito na seção $(3.4.1)$ e depois fazer a intersecção desses conjuntos soluções obtendo-se assim a solução do sistema (3.4).

3.4.3 Sistema de duas equações e duas incógnitas

Considera-se um sistema linear de duas equações e duas incógnitas dado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases}. \tag{3.5}$$

Para obter a solução do sistema (3.5) aplica-se o método do escalonamento tradicional com o objetivo de visualizar o SMED. Para isso avaliam-se dois casos:

2.3.1) $a_{i1} = 0$ para todo $i = 1, 2$.

Se os coeficientes a_{11} e a_{21} forem iguais a zero, pode-se escolher x_1 como igual a uma constante arbitrária, não afetando o valor de x_2. Para encontrar x_2 resolve-se o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}\right. , \tag{3.6}$$

como foi feito em $(3.4.2)$. Para determinar a solução do sistema (3.6), que é equivalente ao sistema (3.5), tem-se:

- se as equações em x_2 não trouxerem nenhuma nova informação para o sistema, isto é, $a_{12} = b_1 = a_{22} = b_2 = 0$, a solução é uma reta, SPI.
- se um só valor de x_2 é determinado por essas duas equações então a solução do sistema é um ponto, SPD.
- se as duas equações são incompatíveis então o sistema não tem solução, SI.

2.3.2) $a_{i1} \neq 0$ para algum $i = 1, 2$.

Consideram-se dois casos:

2.3.2.1) $a_{11} \neq 0$.

Se $a_{11} \neq 0$ no sistema (3.5), aplica-se o escalonamento com uso das operações elementares

$$\left\{\begin{array}{rcll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 & \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 & L_2 \leftarrow a_{11}L_2 \end{array}\right. \tag{3.7}$$

ou ainda,

$$\left\{\begin{array}{rcll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 & \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 & = & a_{11}b_2 & L_2 \leftarrow L_2 - a_{21}L_1 \end{array}\right. \tag{3.8}$$

chega-se a um sistema escalonado

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 & = & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{array}\right. \tag{3.9}$$

equivalente ao sistema (3.5). É importante observar que, se $a_{21} = 0$, o sistema (3.5) já está escalonado. Esse fato não impede que seja aplicada a operação elementar **E3** (somar a uma linha um múltiplo de outra linha (LIMA, 1998; BOLDRINI et al., 1986)), conforme ilustrado no sistema (3.8), pois, sendo $a_{21} = 0$, a nova linha dois será igual a antiga linha dois ($L_2 \leftarrow L_2 - 0L_1$), obtendo-se um sistema equivalente.

A passagem de (3.5) para (3.9) pode ser interpretada simplesmente com o cálculo do determinante de ordem 2, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 & = & \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \end{array} \right. . \tag{3.10}$$

É importante salientar que a representação do sistema (3.10) introduz o SMED para sistemas de duas equações e duas incógnitas.

A seguir descreve-se mais alguns casos de aplicação do SMED para sistemas de outras ordens incluindo o caso de m equações e n incógnitas.

Representando-se

$$a_{22}^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad , \quad b_2^* = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

no sistema (3.10), tem-se

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{22}^*x_2 & = & b_2^* \end{array} \right. . \tag{3.11}$$

A solução do sistema (3.11), que é equivalente ao sistema (3.5), depende da solução da equação $a_{22}^*x_2 = b_2^*$. Logo:

- se $a_{22}^* = b_2^* = 0$, significa que existem infinitos valores para x_2, ou ainda, a equação não traz nenhuma nova informação para o sistema, então resta a primeira equação, que define uma reta, SPI;
- se um só valor de x_2 é determinado por essa equação então a solução do sistema é um ponto, SPD;
- se não existe um valor de x_2, então o sistema não tem solução, SI.

2.3.2.2) $a_{11} = 0$.

Se $a_{11} = 0$ no sistema (3.5) tem-se $a_{21} \neq 0$, pois por hipótese, $a_{i1} \neq 0$ para algum $i = 1, 2$. Troca-se a posição relativa da primeira e da segunda equações e procede-se (a menos de uma troca de coeficientes) como foi feito em $(2.3.2.1)$.

3.4.4 Sistema de três equações e duas incógnitas

Uma sistema de três equações e duas incógnitas é dado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &=& b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &=& b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &=& b_3 \end{cases}. \tag{3.12}$$

Como foi feito anteriormente, a princípio resolve-se o sistema (3.12) pelo método do escalonamento tradicional buscando a equivalência com o SMED. Analisam-se dois casos:

2.4.1) $a_{i1} = 0$ para todo $i = 1,2,3$.

Se $a_{i1} = 0$ para todo $i = 1,2,3$, pode-se escolher x_1 como igual a uma constante arbitrária, isso não afetará o valor de x_2. Para encontrar x_2 obtém-se os conjuntos soluções de cada uma das três equações

$$\begin{cases} a_{12}x_2 &=& b_1 \\ a_{22}x_2 &=& b_2 \\ a_{32}x_2 &=& b_3 \end{cases} \tag{3.13}$$

separadamente, como foi feito na seção $(3.4.1)$. A solução do sistema (3.12) é:

- uma reta, SPI, se as equações em x_2 não trouxerem nenhuma nova informação para o sistema, ou seja, $a_{12} = b_1 = a_{22} = b_2 = a_{32} = b_3 = 0$;
- um ponto, SPD, se um só valor de x_2 é determinado por essas três equações;
- o conjunto vazio, SI, se as três equações são incompatíveis.

2.4.2) $a_{i1} \neq 0$ para algum $i = 1,2,3$.

Consideram-se dois casos:

2.4.2.1) $a_{11} \neq 0$.

Se $a_{11} \neq 0$ em (3.12), efetua-se o escalonamento aplicando as operações elementares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &=& b_1 & \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &=& b_2 & L_2 \leftarrow a_{11}L_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &=& b_3 & L_3 \leftarrow a_{11}L_3 \end{cases} \tag{3.14}$$

e ainda,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 &= a_{11}b_2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - a_{21}L_1 \\ a_{11}a_{31}x_1 + a_{11}a_{32}x_2 &= a_{11}b_3 \quad L_3 \leftarrow L_3 - a_{31}L_1 \end{cases},$$

logo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 &= a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})x_2 &= a_{11}b_3 - a_{31}b_1 \end{cases}. \tag{3.15}$$

Observando os sistemas (3.12) e (3.15) concluí-se que a passagem de um para o outro pode ser interpretada simplesmente com o cálculo do determinante de ordem 2, isto é, usando o SMED,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} \end{cases}.$$

Denotando-se

$$a_{22}^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad b_2^* = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

$$a_{32}^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \qquad b_3^* = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix},$$

tem-se

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{22}^*x_2 &= b_2^* \\ a_{32}^*x_2 &= b_3^* \end{cases}. \tag{3.16}$$

Para determinar a solução do sistema (3.12), equivalente ao sistema (3.16), analisam-se a segunda e a terceira equações separadamente da mesma maneira como foi desenvolvido na seção $(3.4.1)$. Se:

- $a_{22} = b_2 = a_{32} = b_3 = 0$, as equações em x_2 não trazem nenhuma nova informação para o sistema, então resta a primeira equação, que define uma reta, SPI;

- um só valor de x_2 é determinado por essas duas últimas equações então a solução do sistema é um ponto, SPD;
- as duas equações finais são incompatíveis então o sistema não tem solução, SI.

2.4.2.2) $a_{11} = 0$.

Se $a_{11} = 0$ no sistema (3.12), tem-se por hipótese que pelo menos $a_{p1} \neq 0$ para $p = 2,3$. Considera-se sem perda de generalidade, $a_{21} \neq 0$. Trocam-se a posição relativa da primeira e da segunda equações e procede-se (a menos de uma troca de coeficientes) como foi feito em $(2.4.2.1)$.

3.4.5 Sistema de três equações e três incógnitas

Considere o sistema de três equações e três incógnitas

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}\right. . \tag{3.17}$$

Para solucioná-lo, inicialmente aplica-se o método do escalonamento tradicional para depois visualizar o SMED. Tem-se dois casos:

2.5.1) $a_{i1} = 0$ para todo $i = 1,2,3$.

Se $a_{i1} = 0$ para todo $i = 1,2,3$, recai-se em um sistema de três equações e duas incógnitas conforme foi analisado na seção $(3.4.4)$.

2.5.2) $a_{i1} \neq 0$ para algum $i = 1,2,3$.

Tem-se dois casos a considerar:

2.5.2.1) $a_{11} \neq 0$.

Se $a_{11} \neq 0$ em (3.17), aplica-se o escalonamento procedendo com as operações elementares

$$\left\{\begin{array}{rcll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 & \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 & L_2 \leftarrow a_{11}L_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 & L_3 \leftarrow a_{11}L_3 \end{array}\right. , \tag{3.18}$$

segue

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 + a_{11}a_{23}x_3 &= a_{11}b_2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - a_{21}L_1 \\ a_{11}a_{31}x_1 + a_{11}a_{32}x_2 + a_{11}a_{33}x_3 &= a_{11}b_3 \quad L_3 \leftarrow L_3 - a_{31}L_1 \end{cases}$$

logo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 + (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})x_3 &= a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})x_2 + (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})x_3 &= a_{11}b_3 - a_{31}b_1 \end{cases} \tag{3.19}$$

Note que a passagem de (3.17) para (3.19) pode ser interpretada simplesmente calculando determinante de ordem 2. A representação do sistema usando o SMED está ilustrada abaixo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} \end{cases}. \tag{3.20}$$

Denotando-se

$$a_{22}^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{23}^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad b_2^* = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

$$a_{32}^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad a_{33}^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad b_3^* = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix},$$

escreve-se o sistema (3.20) por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{22}^*x_2 + a_{23}^*x_3 &= b_2^* \\ a_{32}^*x_2 + a_{33}^*x_3 &= b_3^* \end{cases}, \tag{3.21}$$

onde avaliam-se dois casos:

2.5.2.1.1) $a_{i2}^* \neq 0$ para algum $i = 2, 3$;

Pode-se admitir (trocando a ordem das duas últimas equações, se necessário) que $a_{22}^* \neq 0$. Da mesma forma da passage de (3.5) para

(3.11), tem-se que (3.21) implica em

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{22}^{*}x_2 + a_{23}^{*}x_3 & = & b_2^{*} \\ a_{33}^{**}x_3 & = & b_3^{**} \end{cases}, \tag{3.22}$$

onde

$$a_{33}^{**} = \begin{vmatrix} a_{22}^{*} & a_{23}^{*} \\ a_{32}^{*} & a_{33}^{*} \end{vmatrix} \quad e \quad b_3^{**} = \begin{vmatrix} a_{22}^{*} & b_2^{*} \\ a_{32}^{*} & b_3^{*} \end{vmatrix}.$$

são coeficientes representados por determinantes de ordem dois conforme proposto pelo SMED.

A solução do sistema (3.22), que é equivalente ao sistema (3.17), depende da solução da equação $a_{33}^{**}x_3 = b_3^{**}$. Consideram-se três casos:

- se $a_{33}^{**} = 0$ e $b_3^{**} \neq 0$, o sistema será impossível, SI;
- se $a_{33}^{**} = 0$ e $b_3^{**} = 0$, restam a primeira e a segunda equações, que definem uma reta, SPI, visto que x_3 é um real qualquer;
- se $a_{33}^{**} \neq 0$, um só valor de x_3 é determinado por esta equação, isto mostra que a solução é um ponto, SPD.

2.5.2.1.2) $a_{i2}^{*} = 0$ para todo $i = 2,3$.

Se $a_{i2}^{*} = 0$ para todo $i = 2,3$ o sistema (3.21), reduz-se

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{23}^{*}x_3 & = & b_2^{*} \\ a_{33}^{*}x_3 & = & b_3^{*} \end{cases}. \tag{3.23}$$

Para determinar a solução do sistema (3.23), que é equivalente ao sistema (3.17), analisam-se a segunda e terceira equações como foi feito na seção $(3.4.1)$. Se:

- $a_{23} = b_2 = a_{33} = b_3 = 0$, as equações em x_3 (duas últimas) podem ser desconsideradas, pois não trazem nenhuma nova informação para o sistema. Então, resta a primeira, que define um plano, SPI;
- se um só valor de x_3 é determinado por essas duas últimas equações, então a solução do sistema é uma reta, SPI;
- se as duas equações finais são incompatíveis então o sistema não tem solução, SI.

2.5.2.2) $a_{11} = 0$.

Se $a_{11} = 0$ tem-se por hipótese que pelo menos $a_{p1} \neq 0$ para $p = 2,3$. Considera-se sem perda de generalidade, $a_{21} \neq 0$. Troca-se a posição relativa da primeira e da segunda equações e procede-se (a menos de uma troca de coeficientes) como foi feito em $(2.5.2.1)$.

3.4.6 Sistema de m equações a n incógnitas

Nas seções anteriores foram abordados sistemas de três equações e três incógnitas e alguns casos de menor ordem nos quais utilizou-se o SMED. A equivalência do escalonamento tradicional e do SMED foi ilustrada em todos os casos abordados. A representação da solução dos sistemas através do determinante de ordem dois ficou evidenciada nas respectivas seções anteriores.

Nesta seção será desensolvido o SMED para um sistema qualquer de m equações e n incógnitas justificando-se a equivalência dos sistemas através das operações elementares $E1$, $E2$ e $E3$ fundamentadas no método do escalonamento tradicional, para isto considere o sistema (3.1), o qual, mediante aplicações sucessivas de determinantes de ordem 2, produz um sistema equivalente escalonado. Tem-se dois casos a considerar referente ao sistema (3.1):

2.6.1) $a_{i1} = 0$, para todo $1 \leq i \leq m$.

Pode acontecer que todos os coeficientes a_{i1} na primeira "coluna"referentes a primeira incógnita sejam nulos. Se isso acontecer, pode-se escolher x_1 como igual a uma constante arbitrária. Isso não afetará os valores de $x_2, \cdots, x_n$ e passa a considerar x_2 ou, mais geralmente, a coluna mais próxima, à direita da primeira, onde haja algum elemento não-nulo e opera-se (como será descrito em 2.6.2) de modo a obter uma matriz cuja primeira coluna não-nula começa com um elemento diferente de zero mas todos os demais iguais a zero. A partir daí, fixa-se a primeira linha.

2.6.2) $a_{i1} \neq 0$, para algum $1 \leq i \leq m$.

Se pelo menos um dos a_{i1} é não-nulo, pode-se escolher qualquer um destes coeficientes não-nulos, por exemplo, a_{p1}, trocar a posição relativa da primeira e da p-ésima equações, e usar esta equação para eliminar x_1 das $m-1$ equações restantes através do uso de determinantes de ordem 2. O resultado final é um conjunto de equações da seguinte forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a^*_{22}x_2 + a^*_{23}x_3 + \cdots + a^*_{2n}x_n & = & b^*_2 \\ a^*_{32}x_2 + a^*_{33}x_3 + \cdots + a^*_{3n}x_n & = & b^*_3 \\ \vdots & = & \vdots \\ a^*_{m2}x_2 + a^*_{m3}x_3 + \cdots + a^*_{mn}x_n & = & b^*_m \end{array}\right. \tag{3.24}$$

onde

$$a^*_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}, \quad b^*_i = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{i1} & b_i \end{vmatrix},$$

com $2 \le i \le m$ e $2 \le j \le n$. Observa-se que a passagem de (3.1) para (3.24) é justificada aplicando as seguintes operações elementares:

1. $L_i \leftarrow a_{11}L_i$ com $2 \le i \le m$ e $a_{11} \neq 0$;
2. $L_i \leftarrow L_i - a_{i1}L_i$ com $2 \le i \le m$,

que são fundamentadas no método do escalonamento tradicional (BOLDRINI et al., 1986; LIMA, 1998). Note que o SMED eliminou a primeira incógnita das $m-1$ equações usando somente determinante de ordem 2. É importante salientar se $a_{i1} = 0$ para algum i, não interfere no SMED, visto que, pode-se somar a uma linha um múltiplo de outra linha (LIMA, 1998), neste caso, estará somando a linha nula à linha i ($L_i \leftarrow L_i - 0L_i$), que resultará na própria linha i.

Para simplificar (3.24), temos duas possibilidades.

2.6.2.1) $a^*_{i2} = 0$ para todo $2 \le i \le m$.

Se todos os elementos a^*_{i2} com $i = 2, \cdots, m$ são nulos, passa-se imediatamente a considerar a terceira coluna a partir da terceira equação, ou seja, os coeficientes a^*_{i3} com $i = 3, \cdots, m$ ou, mais geralmente, a coluna mais próxima, à direita da segunda, onde haja algum elemento abaixo de a^*_{33} não-nulo e opera-se (como será descrito em 2.6.2.2) de modo a obter uma matriz cuja terceira coluna não-nula possui elementos abaixo de a^*_{33} iguais a zero. A partir de então fixa-se a segunda linha.

2.6.2.2) $a^*_{i2} \neq 0$ com $2 \le i \le m$

Se pelo menos um dos elementos a^*_{i2} é não-nulo, pode-se escolher qualquer um deles, por exemplo, a^*_{q2}. Depois trocam-se as posições relativas da segunda e q-ésima equações usando esta equação para eliminar x_2 das

$m-2$ equações restantes, através do uso de determinantes de ordem 2. O resultado final é um conjunto de equações da seguinte forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a^*_{22}x_2+a^*_{23}x_3+\cdots+a^*_{2n}x_n & = & b^*_2 \\ a^{**}_{33}x_3+\cdots+a^{**}_{3n}x_n & = & b^{**}_3 \\ \vdots & = & \vdots \\ a^{**}_{m3}x_3+\cdots+a^{**}_{mn}x_n & = & b^{**}_m \end{array}\right. \tag{3.25}$$

onde

$$a^{**}_{ij} = \left|\begin{array}{cc} a^*_{22} & a^*_{2j} \\ a^*_{i2} & a^*_{ij} \end{array}\right|, \quad b^{**}_i = \left|\begin{array}{cc} a^*_{22} & b^*_2 \\ a^*_{i2} & b^*_i \end{array}\right|,$$

com $3 \leq i \leq m$ e $3 \leq j \leq n$.

Esse processo é então repetido até que tenha-se tratado de todas as colunas do sistema.

3.5 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Neste artigo, foi desenvolvido um método para resolver sistemas de equações lineares de m equações e n incógnitas. Para isso apresentou-se uma sequência de sistemas de equações lineares que foram resolvidos pelo método tradicional do escalonamento e pelo SMED. Aplicou-se o SMED a uma turma de alunos da disciplina de Álgebra Linear da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (Campus Campo Mourão) e observou-se um grande avanço em relação à aprendizagem quando este foi comparado com o método tradicional do escalonamento. Foram então observados os aspectos pedagógicos, que representam a facilidade de aprendizagem do SMED e os aspectos temporais visando o tempo necessário para operar com este método. Conclui-se que a principal contribuição do mesmo é a sua simplicidade de utilização, pois facilita o processo para obter a solução de um sistema de equações lineares de qualquer ordem, utilizando somente o determinante de ordem dois, que representa uma ferramenta básica da Álgebra Linear.

3.6 EXEMPLOS

Para melhor entendimento do método resolveremos alguns exemplos.

3.6.1 Sistema de Ordem 2×2.

Iniciamos com um sistema de duas equações e duas incógnitas.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ -3x_1 - 5x_2 &= 7 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} x_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ -1x_2 &= 26 \end{cases}$$

Substituindo $x_2 = -26$ na primeira equação

$$2x_1 + 3(-26) = 4 \Rightarrow x_1 = 41$$

Concluímos que a solução do sistema é $(41, -26)$.

3.6.2 Sistema de Ordem 3×2.

Agora, resolveremos um sistema de três equações e duas incógnitas.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 6 \\ -3x_1 - 4x_2 &= 20 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} x_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} x_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 20 \end{vmatrix} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = & 5 \\ 1x_2 & = & 7 \\ 1x_2 & = & 55 \end{cases}.$$

logo não existe solução.

3.6.3 Sistema de Ordem 3×3.

Aplicaremos, agora, o método em um sistema de três equações e três incógnitas, conforme mostrar o exemplo abaixo.

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 - 3x_3 & = & 2 \\ -1x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 1x_3 & = & 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 - 3x_3 & = & 2 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} x_3 & = & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} x_3 & = & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 - 3x_3 & = & 2 \\ 5x_2 - 9x_3 & = & 10 \\ 7x_2 + 7x_3 & = & 2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 - 3x_3 & = & 2 \\ 5x_2 - 9x_3 & = & 10 \\ \begin{vmatrix} 5 & -9 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} x_3 & = & \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 - 3x_3 & = & 2 \\ 5x_2 - 9x_3 & = & 10 \\ 98x_3 & = & -60 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 - 3x_3 & = & 2 \\ 5x_2 - 9x_3 & = & 10 \\ x_3 & = & -\dfrac{30}{49} \end{cases}.$$

Substituindo $x_3 = -\dfrac{30}{49}$ na segunda equação

$$5x_2 - 9x_3 = 10 \Rightarrow 5x_2 - 9\left(-\frac{30}{49}\right) = 10 \Rightarrow 5x_2 = 10 - \frac{270}{49} \Rightarrow x_2 = \frac{44}{49}.$$

Substituindo $x_2 = \dfrac{44}{49}$ e $x_3 = -\dfrac{30}{49}$ na primeira equação

$$2x_1 + 1x_2 - 3x_3 = 2 \Rightarrow 2x_1 + \frac{44}{49} - 3\left(-\frac{30}{49}\right) = 2 \Rightarrow 2x_1 = \frac{98 - 44 - 90}{49}$$

$$\Rightarrow 2x_1 = -\frac{36}{49} \Rightarrow x_1 = -\frac{18}{49}$$

Portanto a solução do sistema é

$$\left(-\frac{18}{49}, \frac{44}{49}, -\frac{30}{49}\right).$$

4 APLICAÇÕES

4.1 REDES ELÉTRICAS.

Nesta seção apresentaremos um exemplo onde aplicaremos o SMED. O exemplo discorre sobre as leis básicas dos circuitos elétricos onde é mostrado como essas leis podem ser usadas para obter os sistemas de equações lineares cujas soluções fornecem as correntes que fluem nesse circuito.

Os circuitos elétricos mais simples consistem de dois componentes básicos, conhecido como geradores e resistores, que estão denotados, respectivamente na figura (1).

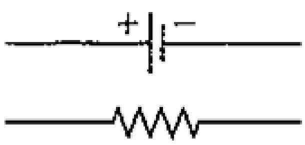

Figura 1: Gerador e Resistor

Os geradores elétricos, tais como as baterias, criam correntes num circuito elétrico e os resistores, como as lâmpadas elétricas, limitam as magnitudes das correntes.

Existem três quantidades básicas associadas a circuitos elétricos:

- o potencial elétrico (E) que é medido em volts (V);
- a resistência (R) que é medida em ohms (Ω);
- a intensidade de corrente (I) em ampères (A).

O potencial elétrico é associado com dois pontos de um circuito elétrico e, na prática, é medido conectando estes dois pontos a um aparelho chamado *voltímetro*. Por exemplo, uma pilha *AA* comum é classificada como tendo $1,5volt$, o que significa que esta é a diferença de potencial elétrico entre seus terminais positivo e negativo. Veja a figura (2).

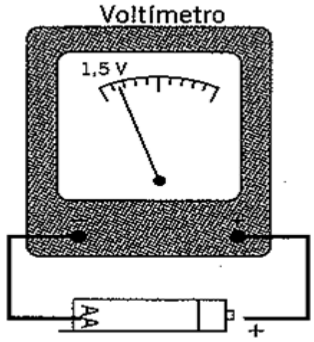

Figura 2: Voltímetro

Num circuito elétrico, o potencial elétrico entre dois pontos é chamado de *diferença de potencial* ou *queda de tensão* entre estes dois pontos. Como nós veremos, as intensidades de correntes e as quedas de tensão podem ser tanto positivas quanto negativas.

O fluxo da corrente num circuito elétrico é governado por três princípios básicos:

1. **A Lei de Ohm** A difernça de potencial através de um resistor é o produto da corrente que passa por ele e a resistência; ou seja, $E = IR$.

2. **A Lei de Corrente de Kirchhoff** A soma algébrica das correntes fluindo para dentro de qualquer ponto de um circuito elétrico é igual à soma algébrica das correntes fluindo para fora do ponto.

3. **A Lei de Voltagem de Kirchhoff** Em torno de qualquer circuito fechado (também chamado de malha), a soma algébrica das diferenças de potencial é zero.

Considerando o Circuito representado na Figura (3),

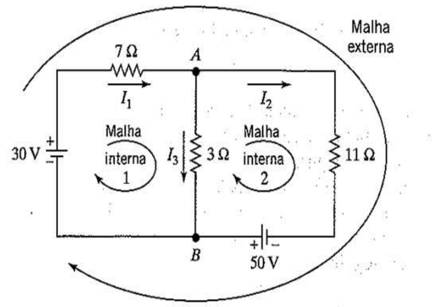

Figura 3: Circuito

vamos determinar as correntes I_1, I_2 e I_3.

As direções dos fluxos para as correntes I_1, I_2 e I_3 (marcadas por flechas) foram tomadas arbitrariamente. Se alguma destas correntes acabar sendo negativa é por que, na realidade, flui no sentido oposto ao selecionado.

Aplicando a Lei de Corrente de Kirchhoff aos pontos A e B, obtemos

$$I_1 = I_2 + I_3 \text{ (Ponto A)}$$

$$I_3 + I_2 = I_1 \text{ (Ponto B)}$$

Como ambas estas equações simplificam à mesma equação linear

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \tag{4.1}$$

nós precisamos de mais duas equações para determinar I_1, I_2 e I_3 de modo único. Estas equações serão obtidas com a Lei de Voltagem de Kirchhoff.

Para aplicar a Lei de Voltagem de Kirchhoff a um circuito fechado, selecione um sentido positivo em torno do circuito (digamos, sentido horário) e faça a seguinte convenção de sinais:

- Uma corrente passando por um resistor produz uma diferença de potencial positiva se flui no sentido positivo do circuito e uma diferença de potencial negativa se flui no sentido negativo do circuito.
- Uma corrente passando por um capacitor produz uma diferença de potencial positiva se o sentido positivo do circuito é de $+$ para $-$ e uma diferença de potencial negativa se o sentido positivo do circuito é de $-$ para $+$.

Aplicando a Lei de Voltagem de Kirchhoff e a Lei de Ohm à malha iterna 1 da Figura (3), obtemos

$$7I_1 + I_3 - 30 = 0 \tag{4.2}$$

e à malha interna 2, obtemos

$$11I_2 - 3I_3 - 50 = 0 \tag{4.3}$$

Combinando (4.1), (4.2) e (4.3) resulta o sistema linear

$$\begin{cases} 1I_1 & - & 1I_2 & - & 1I_3 & = & 0 \\ 7I_1 & + & 0I_2 & - & 3I_3 & = & 30 \\ 0I_1 & + & 11I_2 & - & 3I_3 & = & 50 \end{cases}$$

aplicando o SMED, temos

$$\begin{cases} 1I_1 & - & 1I_2 & - & 1I_3 & = & 0 \\ 0I_1 & + & 7I_2 & + & 10I_3 & = & 30 \\ 0I_1 & + & 11I_2 & - & 3I_3 & = & 50 \end{cases}$$

aplicando novamente

$$\begin{cases} 1I_1 & - & 1I_2 & - & 1I_3 & = & 0 \\ & + & 7I_2 & + & 10I_3 & = & 30 \\ & + & 0I_2 & - & 131I_3 & = & 350-330 & \Rightarrow I_3 = -\dfrac{20}{131} \end{cases}$$

Substituindo $I_3 = -\dfrac{20}{131}$ na segunda equação, temos

$$7I_2 + 10\left(-\frac{20}{131}\right) = 30 \Rightarrow I_2 = \frac{590}{131}$$

Substituindo, agora, $I_3 = -\dfrac{20}{131}$ $I_2 = \dfrac{590}{131}$ na primeira equação

$$1I_1 - 1\left(\frac{590}{131}\right)I_2 - 1\left(-\frac{20}{131}\right) = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{570}{131}$$

obtemos os seguintes valores para as correntes

$$I_1 = \frac{570}{131}(A), I_2 = \frac{590}{131}(A), I_3 = \frac{-20}{131}(A)$$

Observe que I_3 é negativo, o que significa que esta corrente flui no sentido oposto ao indicado na Figura (3).

5 CONCLUSÃO

Ao estudarmos, a teoria de matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares concluímos que apesar de ser um conteúdo já bem trabalhado ainda existem maneiras de expressá-lo de forma diferenciada. Ao trabalharmos com o artigo detalhado no texto percebemos a simplicidade que o mesmo apresenta para resolver sistemas de equações lineares. Concluímos ao resolvermos alguns exemplos e uma simples aplicação envolvendo circuito elétrico que a utilização do método é “bem vinda” para este fim.

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, J. L. et al. **Àlgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Editora HARBRA Ltda, 1986.

GONçALVES, A.; SOUZA, R. **Introdução à Álgebra Linear**. 1. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1977.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática Elementar - Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas - Vol4.** 1. ed. São Paulo: Editora Atual, 1993.

KOLMAN, B.; HILL, D. R. **Introdução à Àlgebra Linear com Aplicações**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2006.

LIMA, E. **Álgebra Linear**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1998.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio - Volume 3**. 1. ed. Rio de Janeiro: SMB - Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

LOBEIRO, A. M.; GRAMANI, L. Um método para escalonar sistemas de equações lineares usando somente determinante de ordem 2. **Revista Ciências Exatas e Naturais**, n. 12, 2010.

POOLE, D. **Álgebra Linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Thomson Learning, 2006.