UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JÉSSICA LÊNI VEDOVELLI

INTRODUÇÃO A ÁLGEBRA LINEAR

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2011

JÉSSICA LÊNI VEDOVELLI

INTRODUÇÃO A ÁLGEBRA LINEAR

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Adilandri Mércio Lobeiro

Co-orientadora: Priscila Amara Patrício de Melo

CAMPO MOURÃO

2011

TERMO DE APROVAÇÃO

Jéssica Lêni Vedovelli

Introdução a Álgebra Linear

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Prof. Msc. Adilandri Mércio Lobeiro

Prof. Msc. Priscila Amara Patrício de Melo

Prof. Msc. Nayene Michele Pitta Paião

Campo Mourão, 2011

”Dedico aos meus pais, Almiro Vedovelli e Luzia Pires dos Santos Vedovelli e ao meu irmão Paulo Victor Vedovelli, que me ajudaram e rezaram por mim, possibilitando a honra de concluir esta Especialização, por me darem todo apoio mesmo com minha ausência que durante esse período fizeram parte na realização deste sonho.
Quantas vezes nos despedimos porque a vontade de aprender foi soberana, porque iniciei a luta por meu ideal e não podía parar, porque eu precisava construir meu castelo, porque sabíamos que aquelas despedidas seriam para nos unir mais ainda algum dia...
Quantas vezes tu fosse força, tu fosse paciência, tu foste acalento?
Hoje, eu gostaria que tu vibraste comigo. Não porque venci, mas porque juntos vencemos mais um desafio em nossas vidas. E que diante dos próximos dias. Deus permita estarmos juntos, para mais fortes podermos enfrentá-los.”

Aos Amigos
”Cada um que passa em nossa vida, passa sozinho, pois cada pessoa é única, e nenhuma substitui outra. Cada um que passa em nossa vida, passa sozinho, mas não vai só, nem nos deixa só,leva um pouco de nós mesmo, deixam um pouco de si mesmos. Há os que levam muito, mas há os que não levam nada. Há os que deixam muito, mas há os que não deixam nada. Essa é a maior responsabilidade de nossa vida. É a prova evidente que duas almas não se encontram ao acaso.”

Aos Colegas de Sala
”Agora cada um de nós seguirá um caminho, seu caminho, e a esperança é inevitável. Ficará na memória de cada um , os momentos que passamos juntos...
Os bons momentos principalmente. Estes não se apagarão, e ouviremos por muito tempo ainda, o eco de nossos risos...
É impossível crer que não viveremos para sempre em nossa mútua lembrança. Lembremo-nos dos momentos de alegria com gratidão e então não teremos sido apenas úteis uns para os outros, mas continuaremos a sê-lo pela vida afora.”

Ao Secretário ”Edilson Fernandes da Costa. Sei da amizade, paciência e importância em nossa formação e dedico também a você este momento.”

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me dar vida e saúde e por permitir que concluísse o curso em meio a tantas dificuldades.A tua luz iluminou o caminho que eu escolhi para seguir.
E apesar de muitas barreiras me fez crer que a força que vem de você é mais forte que qualquer porquê que eu possa me perguntar.
Foi difícil, você sabe muito bem. Pensei em desistir. Em muitos momentos, sem você seria impossível continuar.
Hoje estou concluindo, com a certeza da tarefa cumprida e com a alegria de saber e sentir que você continuará comigo.
OBRIGADA por tua presença!

Ao orientador Adilandri Mércio Lobeiro e co-orientadora Priscila amara Patrício de Melo pelos conhecimentos transmitidos com tanta dedicação e atenção repartindo experiências que me auxiliarão a trilhar este caminho.

”A álgebra é generosa:frequentemente ela dá mais do que se lhe pediu”

Jean-Le-Rond D’ Alembert

RESUMO

VEDOVELLI, Jéssica. Introdução a Álgebra Linear. 65 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

Os conceitos envolvidos em Álgebra Linear constituem atualmente ferramentas muito úteis nas várias áreas da Matemática, e também fora dela. O principal objetivo deste trabalho é o de estudar alguns dos conceitos fundamentais da Álgebra Linear, visando sua posterior aplicação em outras áreas. Finalizamos o trabalho aplicando os conceitos de autovalores e autovetores e potência de matrizes para investigarmos a propagação de uma característica herdada em sucessivas gerações calculando potências de matrizes.

Palavras-chave: Espaços Vetoriais, Autovalores e Autovetores, Diagonaliação de Operadores.

ABSTRACT

VEDOVELLI, Jéssica. Introduction to Linear Algebra. 65 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

The concepts involved are currently in Linear Algebra very useful tools in several areas of mathematics, and also outside. The main objective of this work is to study some of the fundamental concepts of linear algebra in order to further their application in other areas. We finished the work by applying the concepts of eigenvalues and eigenvectors of matrices and power to investigate the spread of an inherited trait in successive generations computing powers of matrices.

Keywords: Vector Spaces, Eigenvalues and Eigenvectors, Diagonaliação Operators.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

SUMÁRIO

1 ESPAÇOS VETORIAIS

Os espaços vetoriais são a estrutura básica da álgebra linear. Nesta seção definiremos espaços vetoriais e estudaremos algumas de suas propriedades básicas.

Definição 1.1 *Um espaço vetorial é um conjunto V, não vazio, cujo os elementos são chamados de vetores; munida de duas operações: adição e multiplicação por escalar.*

Adição

$$\begin{array}{rcccc} + & : & V \times V & \to & V \\ & & (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array}$$

Multiplicação

$$\begin{array}{rcccc} \cdot & : & \mathbb{R} \times V & \to & V \\ & & (a,v) & \longmapsto & a \cdot v \end{array}$$

Se u e v estão em V, a soma de u e v será denotada por $u+v$, e se a é um escalar, o múltiplo escalar de v por a será denotado por $a \cdot v$, que denotaremos por av para simplificar notação.

Um conjunto com essas duas operações é chamado de *espaço vetorial real*, se $\forall\, u,v,w \in$ V e $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$ as seguintes propriedades forem satisfeitas:

a) Comutatividade: $u+v = v+u, \forall\, u,v \in V$.

b) Associatividade: $(u+v)+w = u+(v+w), \forall\, u,v,w \in V$.

c) Elemento Neutro: $0+v = v+0 = v, \forall\, v \in V$.

d) Elemento Simétrico: $v+(-v) = 0, \forall\, v \in V$.

e) Elemento Neutro: $1v = v, \forall\, v \in V$.

f) Associatividade: $(ab)u = a(bu), \forall\, a,b \in \mathbb{R}$ e $\forall\, u \in V$.

g) Distributiva à Direita: $a(u+w) = au+aw, \forall\, a \in \mathbb{R}$ e $\forall\, u,v \in V$.

h) Distributiva à Esquerda: $(a+b)u = au+bu, \forall\, a,b \in \mathbb{R}$ e $\forall\, u \in V$.

Exemplo 1.1 *O conjunto dos vetores de $V = \mathbb{R}^3 = \{(x_1,x_2,x_3); x_i \in \mathbb{R}, \forall\, i = 1,2,3\}$ é um espaço vetorial real. Pois, dados $u = (x_1,x_2,x_3)$, $v = (y_1,y_2,y_3)$ e $w = (z_1,z_2,z_3)$ temos:*

a) *Comutatividade:* $u+v=v+u$.

$$\begin{aligned}
u+v &= (x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)\\
&= (x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)\\
&= (y_1+x_1,y_2+x_2,y_3+x_3)\\
&= (y_1,y_2,y_3)+(x_1,x_2,x_3)\\
&= v+u.
\end{aligned}$$

Assim, $u+v=v+u$.

b) *Associatividade:* $u+(v+w)=(u+v)+w$.

$$\begin{aligned}
u+(v+w) &= u+((y_1,y_2,y_3)+(z_1,z_2,z_3))\\
&= u+(y_1+z_1,y_2+z_2,y_3+z_3)\\
&= (x_1,x_2,x_3)+(y_1+z_1,y_2+z_2,y_3+z_3)\\
&= (x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2),x_3+(y_3+z_3))\\
&= ((x_1+y_1+z_1,(x_2+y_2)+z_2,(x_3+y_3)+z_3)\\
&= (x_1+y_1,x_2+y_2,(x_3+y_3)+(z_1,z_2,z_3)\\
&= (x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)+w\\
&= ((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3))+w\\
&= (u+v)+w.
\end{aligned}$$

Logo, $u+(v+w)=(u+v)+w$.

c) *Elemento Neutro da Adição:* $0+v=v+0=v$.

Existe $0\in\mathbb{R}^3$, $0=(0,0,0)$, *tal que* $0+v=v$, $\forall v\in\mathbb{R}^3$. *De fato,*

$$\begin{aligned}
0+v &= (0,0,0)+(y_1,y_2,y_3)\\
&= (0+y_1,0+y_2,0+y_3)\\
&= (y_1,y_2,y_3)\\
&= v.
\end{aligned}$$

Assim, existe o elemento neutro da adição.

d) *Elemento Simétrico:* $v+(-v)=0$

Para todo $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ *existe* $-v = (-y_1, -y_2, -y_3) \in \mathbb{R}^3$*, tal que*

$$\begin{aligned} v + (-v) &= (y_1, y_2, y_3) + (-y_1, -y_2, -y_3) \\ &= (y_1 + (-y_1), y_2 + (-y_2), y_3 + (-y_3)) \\ &= (y_1 - y_1, y_2 - y_2, y_3 - y_3) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Logo, existe o elemento simétrico.

e) *Elemento Neutro da Multiplicação:* $1v = v$*, para todo* $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$$1v = 1(y_1, y_2, y_3) = (1y_1, 1y_2, 1y_3) = (y_1, y_2, y_3) = v.$$

Assim, existe o elemento neutro da multiplicação.

f) *Associatividade da multiplicação:* $(ab)u = a(bu)$.

$$\begin{aligned} a(bu) &= a(bx_1, bx_2, bx_3) \\ &= (a(bx_1), a(bx_2), a(bx_3)) \\ &= ((ab)x_1, (ab)x_2, (ab)x_3) \\ &= (ab)(x_1, x_2, x_3) \\ &= (ab)v. \end{aligned}$$

Logo, $a(bu) = (ab)u$.

g) *Distributiva a Direita:* $a(u + v) = au + av$.

$$\begin{aligned} a(u + v) &= a(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= (a(x_1 + y_1), a(x_2 + y_2), a(x_3 + y_3)) \\ &= (ax_1 + ay_1, ax_2 + ay_2, ax_3 + ay_3) \\ &= (ax_1, ax_2, ax_3) + (ay_1, ay_2, ay_3) \\ &= a(x_1, x_2, x_3) + a(y_1, y_2, y_3) \\ &= au + av. \end{aligned}$$

Assim, $a(u + v) = au + av$.

h) *Distributiva a Esquerda:* $(a+b)u = au+bu$.

$$\begin{aligned}(a+b)u &= (a+b)(x_1,x_2,x_3)\\ &= ((a+b)x_1,(a+b)x_2,(a+b)x_3)\\ &= (ax_1+bx_1,ax_2+bx_2,ax_3+bx_3)\\ &= (ax_1,ax_2,ax_3)+(bx_1,bx_2,bx_3)\\ &= a(x_1,x_2,x_3)+b(x_1,x_2,x_3)\\ &= au+bu.\end{aligned}$$

Portanto, $(a+b)u = au+bu$.

Concluímos, $\mathbb{R}^3$ *é espaço vetorial com as operações usuais.*

Exemplo 1.2 *Para todo número natural n, o símbolo* $\mathbb{R}^n$ *representa o espaço vetorial euclidiano n-dimensional. Os elementos de* $\mathbb{R}^n$ *são n-uplas* $u = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, $v = (\beta_1,...,\beta_n)$ *de números reais, onde a igualdade vetorial,* $u = v$, *significa as n igualdades numéricas* $\alpha_1 = \beta_1,...,\alpha_n = \beta_n$. *Os números* $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ *são chamados coordenadas do vetor u. As operações do espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$ *são definidas por:* $u+v = (\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$ *e* $au = (a\alpha_1,\cdots,a\alpha_n)$, *para todo* $u,v \in \mathbb{R}^n$. *O vetor zero é aquele cujas coordenadas são todas iguais a zero, isto é,* $0 = (0,0,...,0)$. *Para* $n > 3$ *perdemos a visão geométrica, mas podemos trabalhar com estes espaços da mesma maneira que em* $\mathbb{R}^3$.

1.1 PROPRIEDADES DOS ESPAÇOS VETORIAIS

Da definição de um espaço vetorial V decorrem as seguintes propriedades:

a) Existe um único vetor nulo em V.

b) Cada vetor $u \in V$ admite apenas um simétrico $(-u) \in V$.

c) Para quaisquer $u,v,w \in V$, se $u+w = v+w$, então $u = v$.

d) Qualquer que seja $v \in V$, tem-se:$-(-v) = v$, isto é o oposto de $-v$ é v.

e) Quaiquer que sejam $u,v \in V$, existe um e somente um $x \in V$ talque: $u+x = v$, esse vetor x sera representado por $x = v-u$.

f) Qualquer que seja $v \in V$, temos $0v = 0$. Naturalmente o primeiro zero é o número real zero, e o segundo é o vetor $0 \in V$.

g) Qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$, temos $\lambda 0 = 0$.

h) $\lambda 0 = 0$ implica $\lambda = 0$ ou $v = 0$.

i) Qualquer que seja $v \in V$ temos $(-1)v = -v$

j) Quaisquer que sejam $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos $(-\lambda)v = \lambda(-v) = -(\lambda v)$.

1.2 SUBESPAÇO

Definição 1.2 *Seja V um espaço vetorial. Um subconjunto W, não vazio, de V é um subespaço vetorial de V se:*

i) *Para quaisquer $u,v \in W$ tivermos $u + v \in W$.*

ii) *Para quaisquer $a \in \mathbb{R}$, $u \in W$ tivermos $au \in W$.*

Observação 1.1 *Note que se tomarmos $a = 0$ em* (**ii**) *temos que se W é subespaço vetorial de V então o vetor nulo obrigatoriamente pertence a W.*

Exemplo 1.3 *Seja $V = \mathbb{R}^5$. Então $W = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, 5\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^5$, pois dados $u = (0, x_2, x_3, x_4, x_5)$ e $v = (0, y_2, y_3, y_4, y_5)$ em W temos que*

$$u + v = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5)$$

e

$$ku = (0, kx_2, kx_3, kx_4, kx_5)$$

também pertence a W para todo $k \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.4 *Seja $V = \mathbb{R}^2$ e W uma reta deste plano que não passa pela origem. Temos que W não é subespaço de V, pois existem u e v em W, tal que $u + v \notin W$. Observe a Figura 1,*

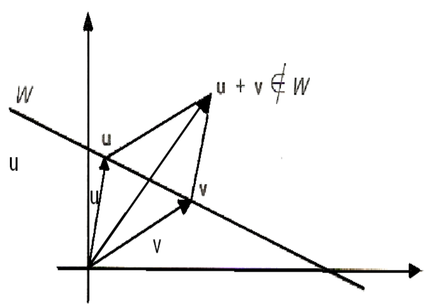


Figura 1: a reta não passa pela origem.

Outra maneira de ver que W não é subespaço de V é notar que o vetor nulo não pertence a W.

Teorema 1.1 *(Intersecção de subespaços): Dados W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V, a intersecção $W_1 \cap W2$ ainda é um subespaços de V.*

Demonstração: *Observamos inicialmente que $W_1 \cap W_2$ nunca é vazio pois ambos os subespaços contêm o vetor nulo de V. É necessário verificar então as condições i) e ii) para mostrar que $W_1 \cap W_2$ também é subespaço vetorial de V.*

i) Dados $x,y \in W_1 \cap W2$, x e y pertencem a W_1, e também a W_2. Então, $x+y \in W_1$ e $x+y \in W_2$, pois W_1 e W_2 subespaços de V. Portanto, $x+y \in W_1 \cap W_2$.

ii) Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $x \in W_1 \cap W_2$. Então $x \in W_1$ e $x \in W_2$. Logo $ax \in w_1$ e $ax \in w_2$, pois W_1 e W_2 são subespaços. Assim, $ax \in W_1 \cap W_2$.

Portanto, $W_1 \cap W_2$ é subespaço vetorial de V.

Exemplo 1.5 $Seja\ V = \mathbb{R}^3$

$r = W_1 \cap W_2$ é a reta de intersecção dos planos W_1 e W_2, note que r é um subespaço de V.

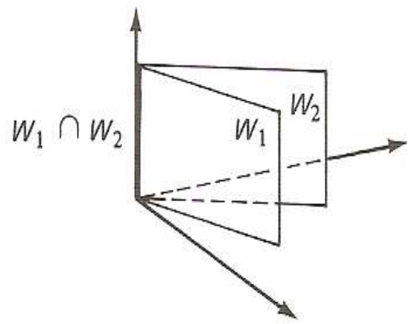


Figura 2: intersecção dos planos W_1 e W_2 é subespaço do $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 1.6 $Seja\ V = M(n,n)$ *o conjunto das matrizes quadradas de ordem n.*

$W_1 = \{matrizes\ triangulares\ superiores\}$

$W_2 = \{matrizes\ triangulares\ inferiores\}$

Então $W_1 \cap W_2 = \{matrizes\ diagonais\}$, é um subespaço vetorial de V.

Uma vez que a intersecção de dois subespaços ainda é um subespaço vetorial, poderíamos esperar o mesmo da união. Mas isto não acontece, como podemos ver no próximo exemplo.

Exemplo 1.7 *Seja* $V = \mathbb{R}^3$ *e* W_1 *e* W_2 *são retas que passam pela origem. Então,* $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ *e* $W_1 \cup W_2$ *é o "feixe"formado pelas duas retas, que não é subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$*. De fato, se somarmos os dois vetores u e v, pertencentes a* $W_1 \cup W_2$*, vemos que* $u + v \notin W_1 \cup W_2$*. Assim,* $W_1 \cup W_2$ *não é subespaço de* V*. Entretanto, podemos construir um conjunto* W*, que contém* W_1 *e* W_2 *e seja subespaço de* V*. Vejamos o teorema abaixo.*

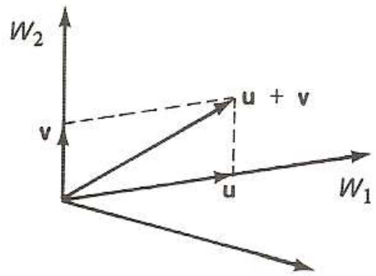


Figura 3: retas que passam pela origem.

Teorema 1.2 *(Soma de subespaços): Sejam* W_1*e* W_2 *subespaços de um espaço vetorial* V*. Então, o conjunto*

$$W_1 + W_2 = \{v \in V; v = w_1 + w_2, onde w_1 \in W_1 e\ w_2 \in W_2\} \text{ é subespaço de } V.$$

Demonstração:

i) Sejam $u, v \in w_1 + w_2$*. Então*

$$u = w_1 + w_2, onde\ w_1 \in W_1\ e\ w_2 \in W_2$$

$$v = w_{1'} + w_{2'}, onde\ w_{1'} \in W_1\ e\ w_{2'} \in w_2$$

$$u + v = (w_1 + w_2) + (w_{1'} + w_{2'}) = (w_1 + w_{1'}) + (w_2 + w_{2'}) \in W_1 + W_2$$

ii) Sejam $u \in w_1 + w_2$ *e* $a \in \mathbb{R}$.

Então

$$u = w_1 + w_2, onde\ w_1 \in W_1\ e\ w_2 \in W_2$$

e

$$au = a(w_1 + w_2) = aw_1 + aw_2 \in W_1 + W_2.$$

1.3 COMBINAÇÃO LINEAR

Definição 1.3 *Sejam V um espaço vetorial real, $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ e $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Então, o vetor $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$ é um elemento de V que chamamos combinação linear de $\{v_1, ..., v_n\}$.*

Uma vez fixados vetores $\{v_1, ..., v_n\}$ em V, o conjunto W de todos os vetores de V que são combinação linear destes, é um subespaço vetorial, W chamado subespaço gerado por $\{v_1, ..., v_n\}$ denotamos $W = [v_1, ..., v_n]$

Note que podemos escrever

$W = [v_1, ..., v_n] = \{v \in V; v = a_1v_1 + ... + a_nv_n; a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$.

Exemplo 1.8 *Consideremos $V = \mathbb{R}^3$.*

Seja $v \in V tal que v \neq 0$.

Então $[v] = \{av : a \in \mathbb{R}\}$, isto é, $[v]$ é a reta que contém o vetor v.

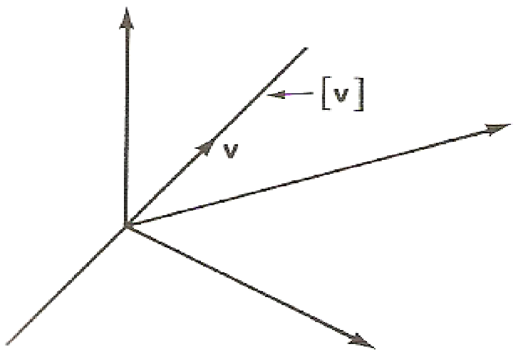


Figura 4: reta que contém o vetor v.

Exemplo 1.9 *Se v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^3$ são tais que $\alpha v_1 \neq v_2$ para todo $a \in \mathbb{R}$, então $[v_1, v_2]$ será o plano que passa pela origem e contém v_1 e v_2.*

Observe que se $v_3 \in [v_1, v_2]$, então $[v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2]$, pois todo vetor que

pode ser escrito como combinação linear de $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma combinação linear apenas de v_1 e v_2 (pois v_3 é combinação linear de v_1 e v_2).

Exemplo 1.10 *$Seja\ V = \mathbb{R}^2. Consideremos v_1 = (1,0), v_2 = (0,1) \in V$.*

Logo $V = [v_1, v_2]$ pois, dado $v = (x, y) \in V$, temos $(x, y) = x(1,0) + y(0,1)$, ou seja, $v = xv_1 + yv_2$.

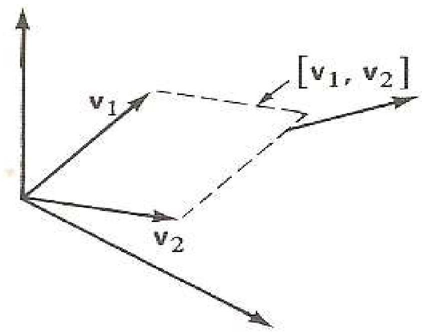


Figura 5: plano que passa pela origem.

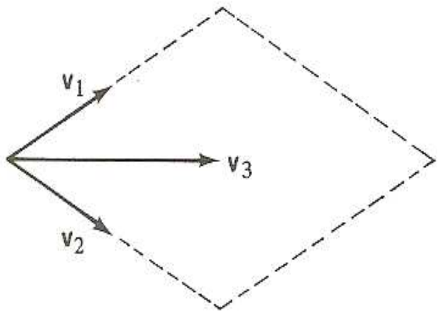


Figura 6: combinação linear de vetores.

Exemplo 1.11 *Seja* $V = M_{(2,2)}$. *Consideremos* $V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in V$

Então $[v_1, v_2] = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

1.4 DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Definição 1.4 *O conjunto de vetores* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *de um espaço vetorial* V *é dito linearmente independentes se* $a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_nr = 0$, *onde* $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$.

implica que todos os escalares $a_1, ..., a_n$

são iguais a 0.

Teorema 1.3 $\{v_1, ..., v_n\}$ *é LD se, e somente se, um desses vetores for uma combinação linear dos outros.*

Demonstração:

Suponhamos que $\{v_1, ..., v_n\}$*é LD.*

$\left\{a_1v_1 + ... + a_jv_j + ... + a_nv_n\right\} = 0$. *Segundo a definição dada, um dos coeficientes deve ser diferentes de zero.Consideremos que* $a_j \neq 0$. *Então*

$$v_j = -\frac{1}{a_j}(a_1v_1 + ... + a_{j-1}v_{j-1} + a_{j+1}v_{j+1} + ... + a_nv_n)$$

ou seja

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j}v_1 - ... - \frac{a_n}{a_j}v_n$$

Logo, v_j *é uma combinação linear dos outros vetores.*

Por outro lado, se tivermos $\left\{v_1, ..., v_j, ..., v_n\right\}$ *tal que para algum* j,

$$v_j = b_1v_1 + ... + b_{j-1}v_{j-1} + b_{j+1}v_{j+1} + ... + b_nv_n$$

temos

$b_1v_1 + ... - 1v_j + ... + b_nv_n = 0$ *com* $b_j = -1$ *e, portanto,* $\{v_1, ..., v_n\}$*é LD.*

Esta proposição também é equivalente a: Um conjunto de vetores é LI se, e somente se, nenhum deles for uma combinação linear dos outros.

Exemplo 1.12 *Consideremos* $V = \mathbb{R}^3$. *Sejam* $\{v_1, v_2\} \in V$.

$\{v_1, v_2\}$ *é LD se, e somente se,* v_1 *e* v_2 *estiverem na mesma reta, que passa pela origem.* $(v_1 = \lambda v_2)$. *Veja a Figura* 7

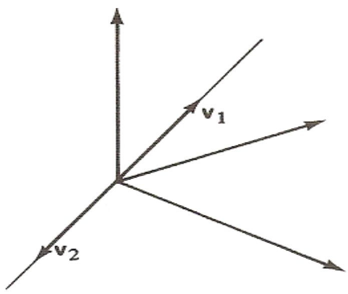


Figura 7: vetores que passam pela origem.

.

Exemplo 1.13 *Sejam* $\{v_1, v_2, v_3\} \in V$.

Então $\{v_1, v_2, v_3\}$ *é LD se estes três vetores estiverem no mesmo plano, que passa pela origem. Veja a Figura 8.*

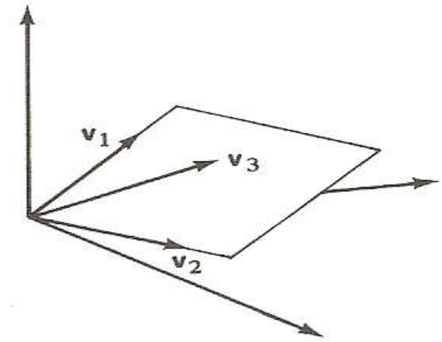


Figura 8: plano que passa pela origem.

Exemplo 1.14 *Sejam* $V = \mathbb{R}^2, e_1 = (1,0)$ *e* $e_2 = (0,1)$

note que $\{e_1 e_2\}$ *é LI, pois*

$a_1 e_1 + a_2 e_2 = 0$

$a_1(1,0) + a_2(0,1) = (0,0)$

$(a_1, a_2) = (0,0)$

$a_1 = 0$ *e* $a_2 = 0$

Exemplo 1.15 *De modo análogo vemos que para* $V = \mathbb{R}^3; e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ *e* $e_3 = (0,0,1)$*são LI.*

No caso em que exista algum $a_1 \neq 0$ *dizemos que* $\{v_1, ..., v_n\}$ *é linearmente dependente* $(L.D)$*, ou que os vetores* $\{v_1, ..., v_n\}$ *são L.D.*

Exemplo 1.16 *As matrizes* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ *são linearmente dependentes em* $M_{2\times 2}$*. Admite a solução* $(2,-1)$*, isto é,* $2A - B = 0$*.*

1.5 BASE E DIMENSÃO

Iremos discutir agora um dos conceitos mais importantes envolvendo a estrutura de espaço vetorial, o de *base*. Comecemos com a seguinte definição

Definição 1.5 *Seja* B *um conjunto de um espaço vetorial* V*. Dizemos que* B *é um conjunto gerador de* V *(ou que* B *gera* V*) se todo elemento de* V *for uma combinação linear de elementos de* B*.*

Definição 1.6 *Seja V um espaço vetorial. Dizemos que um conjunto B de V é uma base de V se*

a) *B linearmente independentes;*

b) *B for um conjunto gerador de V*

Teorema 1.4 *Sejam $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial V. Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de V.*

Demonstração: *Se $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ são linearmente independentes, então eles cumprem as condições para uma base, e não temos mais nada a fazer. Se $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ são linearmente dependentes, então existe uma combinação linear deles, com algum coeficiente diferente de zero, dando o vetor nulo, isto é,*

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = 0$$

Seja, por exemplo, $x_n \neq 0$. Então podemos escrever $v_n = \dfrac{-x_1}{x_n}v_1 + \dfrac{-x_2}{x_n}v_2 + ... + \dfrac{-x_{n-1}}{x_n}v_{n-1}$ ou seja, v_n é uma combinação linear de $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ e, portanto, $\{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$ ainda geram V. Se $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ for LD, então existe uma combinação linear deles dando o vetor nulo e com algum coeficiente diferente de zero; portanto, poderemos extrair aquele vetor que corresponde a este coeficiente. Seguindo desta forma, após uma quantidade finita de estágios, chegaremos a um subconjunto de $\{v_1, ..., v_n\}$, formado por $r(r \leq n)$ vetores LI, $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$, que ainda geram V, ou seja, formaremos uma base.

Teorema 1.5 *Seja um espaço vetorial V gerado por um conjunto finito de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Então, qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente LD (e, portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores).*

Demonstração: *Como $[v_1, ..., v_n] = V$, pelo Teorema anterior, podemos extrair uma base para V de $\{v_1, ..., v_n\}$. Seja $\{v_1, ..., v_r\}, r \leq n$, esta base. Consideremos agora $\{w_1, w_2, ..., w_m\}, m$ vetores de V, com $m > n$.*

Existem, então, constantes a_{ij}, tais que

$$\left\{\begin{array}{rcl} w_1 & = & a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + ... + a_{1r}v_r \\ w_2 & = & a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{2r}v_r \\ \vdots & & \vdots \\ w_m & = & a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + ... + a_{mr}v_r \end{array}\right. \tag{1}$$

Consideremos agora uma combinação linear de $w_1,...,w_m$, dando zero.

$$0 = x_1w_1 + x_2w_2 + ... + x_mv_m \tag{2}$$

Substituindo (1) *em* (2), *obtemos*

$$\begin{aligned} 0 = \; & (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m)v_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... \\ & + a_{m2}x_m)v_2 + ... + (a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + ... + a_{mr}x_m)v_r \end{aligned}$$

Como $\{v_1,v_2,...,v_r\}$ *são LI, então*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + ... + a_{mr}x_m = 0 \end{cases}$$

Temos então um sistema linear homogêneo com r equações e m incógnitas $\{x_1,...,x_m\}$ e, como $r \leq n < m$, ele admite uma solução não trivial, ou seja, existe uma solução com algum x_i não nulo. Portanto $\{w_1,...,w_m\}$ são LD.

Exemplo 1.17 *Sejam $V = \mathbb{R}^2, e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$. $\beta = \{e_1,e_2\}$ é base de V, conhecida como base canônica de $\mathbb{R}^2$.*

note que $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ é LI, e dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos

$(x,y) = x(1,0) + y(0,1) = (x,0) + (0,y)$

Exemplo 1.18 *Seja $V = \mathbb{R}^3$. Então $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de V. Esta é a base canônica de* $\mathbb{R}3$.

Note que

$\{e_1,e_2,e_3\}$ *é L.I.*

e

$(x,y,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

De uma maneira geral temos que os vetores canônicos $e_1 = (1,0,...,0),...,e_n = (0,...,0,1)$ em $\mathbb{R}^n$ são L.I. Com efeito, $\alpha_1e_1 + ... + \alpha_ne_n = 0$ significa $\alpha_1,...,\alpha_n = 0$; logo $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

Uma vez fixada uma base num espaço vetorial V de dimensão n, seus elementos são meramente combinações lineares dos n vetores básicos, com coeficientes univocamente determi-

nados. Significa que todo vetor $v \in V$ se exprime, de modo único como combinação linear $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$ de elementos $\{v_1,...,v_n\}$ da base B. Os números $\alpha_1,...,\alpha_n$ chama-se as coordenadas do vetor v na base B.

Teorema 1.6 *Sejam $\{v_1,...,v_m\}$ vetores não-nulos do espaço vetorial V. Se nenhum deles é combinação linear dos demais então o conjunto $X = \{v_1,...,v_m\}$ é L.I.*

Demonstração: *Suponhamos por absurdo, que exista uma combinação linear dos vetores dados, com coeficientes não todos nulos, fosse igual a zero. Se $\alpha_r v_r$ fosse a parcela não nula dessa combinação, teríamos então $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r vr = 0$, com $\alpha_r \neq 0$.*

Dai viria $v_r = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_r}v_1 - ... - \dfrac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r}v_{r-1}$

logo v, seria combinação linear dos elementos $\{v_1;...;v_{r-1}\}$, pois $r > 1$pois $v_r \neq 0$. O que contraria a hipótese.

Portanto, X é L.I.

Corolário 1.1 . *Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos. O número de vetores da base é chamada dimensão de V e denotada $dim\,V$.*

Demonstração: *Sejam $\{v_1,...,v_n\}$ e $\{w_1,...,w_m\}$ duas base de V. Como $\{v_1,...,v_n\}$ geram V e $\{w_1,...,w_m\}$ são LI, pelo Teorema 1.5 anterior, $m \leq n$. Mais portanto, $n = m$.*

Por outro lado $\{w_1,...,w_m\}$ gera V e $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ é LI, assim, pelo Teorema 1.5, temos que $n \leq m$. Portanto $n = m$.

Corolário 1.2 . *Se a dimensão de V é n, um conjunto com n vetores gera V se, e somente se, é L.I.*

Suponhamos que se $X = \{v_1,...,v_n\}$ gera V e não é L.I. Então um dos seus elementos é combinação dos $n-1$ restantes. Estes $n-1$ vetores formariam ainda um conjunto de geradores de V, em contradição com o Teorema 1.5, pois V contém n vetores linearmente independentes. Logo X é L.D. Suponhamos agora que X seja L.I. Se X não gerasse V, existiria um vetor $v \in V$ que não seria combinação linear dos elementos de X. Então pelo Teorema 1.6 $\{v_1,...,v_n,v\}$ seria L.I., em contradição com o Teorema 1.5 pois uma base de V, com n elementos, gera o espaço. Portanto, X gera V.

Exemplo 1.19 *Seja $V = \mathbb{R}^2$. Vimos que $\{(1,0),(0,1)\}$ e $\{(1,1),(0,1)\}$ são bases de V. Então $dim\,V = 2$.*

Exemplo 1.20 *Seja* $V = M(2\times 2)$*, o espaço vetorial das matrizes* 2×2

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \textit{ é uma base de } V.$$

Então dim $V = 4$.

Exemplo 1.21 *O espaço vetorial* $M(m\times n)$*, das matrizes* $m\times n$*, tem dimesão finita igual a m.n. uma base para* $M(m\times n)$ *é formada pelas matrizes* $[e_{ij}]$*, cujo ij-ésimo elemento é igual a* 1 *e os demais elementos são iguais a zero.*

1.6 MUDANÇA DE BASE EM ESPAÇOS $\mathbb{R}^2$

Sejam $B_1 = \{e_1, e_2\}$ *e* $B_2 = \{f_1, f_2\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial $V.B_1$ é a base antiga e B_2 é a base nova.

Um vetor v, na base antiga, possui coordenadas x e y, isto é: $[v]_{B1} = (x,y) = xe_1 + ye_2$

Queremos escrever o vetor v na nova base B_2. Para isto, devem existir escalares w e z, tal que $[v]_{B_2} = (w,z) = wf_1 + zf_2$

Como f_1 *e* f_2 são combinações lineares de e_1 e de e_2, existem escalares a_{11}, a_{12}, a_{21} *e* a_{22} tais que:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 \\ f_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 \end{aligned}$$

Reescrevemos o vetor na nova base em função das combinações lineares apresentadas acima.

$$\begin{aligned} [v]_{B_2} &= wf_1 + zf_2 \\ &= w(a_{11}e_1 + a_{12}e_2) + z(a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \\ &= (wa_{11} + za_{21})e_1 + (wa_{12} + za_{22})e_2 \\ &= xe_1 + ye_2 \end{aligned}$$

donde segue um sistema de equações.

$$\begin{aligned} wa_{11} + za_{21} &= x \\ wa_{12} + za_{22} &= y \end{aligned}$$

Se tomarmos T como a transposta da matriz dos escalares a_{11}, a_{12}, a_{21} *e* a_{22}, denotada por T^t, e escrevermos

$$T^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

o sistema acima pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou simplismente

$$T. \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou ainda,

$$[T]_{B_1}^{B_2}.[v]_{B_2} = [v]_{B_1}$$

O cálculo feito através da matriz de mudança de base é vantajoso quando se trabalha com muitos vetores, pois neste caso evitaríamos a resolução de um sistema de equações para cada vetor.

Exemplo 1.22 *Consideremos as bases* $B_1 = (2,7),(3,-1)$ *e* $B_2 = (1,0),(0,1)$ *do espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$. *Para obter a matriz de mudaça de base denotada por* $[T]_{B_1}^{B_2}$, *tomaremos*

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Inicialmente podemos escrever

$$(1,0) = a_{11}(2,7) + a_{21}(3,-1)$$

O que significa que

$$(1,0) = (2a_{11} + 3a_{21}, 7a_{11} - 1a_{21})$$

e obteremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2a_{11} + 3a_{21} & = & 1 \\ 7a_{11} - 1a_{21} & = & 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a_{11} = 1/23$, $a_{21} = 7/23$, $a_{12} = 3/23$ *e* $a_{22} = -2/23$.

Assim,

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} 1/23 & 3/23 \\ 7/23 & -2/23 \end{bmatrix}$$

Podemos usar esta matriz para obter um vetor u na base B_1, *por exemplo* $u = (1,2)$.

Realmente,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1} = [T]_{B_1}^{B_2}. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{bmatrix} 1/23 & 3/23 \\ 7/23 & -2/23 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 7/23 \\ 3/23 \end{bmatrix}$$

Ou seja,

$(1,2) = (7/23)(2,7) + (3/23)(3,-1)$

Exemplo 1.23 *Sejam* $B_1 = \{(2,-1),(3,4)\}$ *e* $B_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ *bases de* R^2 *calcule* $[I]_{B_1}^{B_2}$.

$$\begin{array}{rcccl} (1,0) & = & a_{11}(2,-1)+a_{21}(3,4) & = & (2a_{11}+3a_{21},-a_{11}+4a_{21}) \\ (0,1) & = & a_{12}(2,-1)+a_{22}(3,4) & = & (2a_{12}+3a_{22},-a_{12}+4a_{22}) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2a_{11}+3a_{21} & = & 1 \\ -a_{11}+4a_{21} & = & 0\ (.2) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2a_{11}+3a_{21} & = & 1 \\ -2a_{11}+8a_{21} & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow 11a_{21} & = & 1 \\ \Rightarrow a_{21} & = & 1/11 \end{array}$$

Substituindo temos:

$$\begin{array}{rcl} 2a_{11}+3(1/11) & = & 1 \\ 2a_{11}+3/11 & = & 1 \\ 2a_{11}+3/11-1 & = & 0 \\ (22a_{11}+3-11)/11 & = & 0 \\ 22a_{11}-8 & = & 0 \\ 22a_{11} & = & 8 \\ a_{11} & = & 8/22 \\ a_{11} & = & 4/11 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2a_{12}+3a_{22} & = & 0 \\ -a_{12}+4a_{22} & = & 1\ (.2) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2a_{12}+3a_{22} & = & 0 \\ -2a_{12}+8a_{22} & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow 11a_{22} & = & 2 \\ \Rightarrow a_{22} & = & 2/11 \end{array}$$

Substituindo temos:

$$\begin{array}{rcl} 2a_{12}+3(2/11) & = & 0 \\ 2a_{12}+6/11 & = & 0 \\ (22a_{12}+6)/11 & = & 0 \\ 22a_{12}+6 & = & 0 \\ 22a_{12} & = & -6 \\ a_{12} & = & -6/22 \\ a_{12} & = & -3/11 \end{array}$$

$$[I]_{B_1}^{B_2} = \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{array} \right].$$

2 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Nesta seção vamos estudar funções entre espaços vetoriais que levam em consideração as operações destes espaços, chamadas transformações lineares.

Definição 2.1 *Uma transformação linear de um espaço vetorial V para um espaço vetorial W é uma aplicação $T : V \to W$ tal que, para todo u e v em V e para todos os escalares c,*

a) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

b) $T(cv) = cT(v)$

Essa definição exige que T preserve todos as combinações lineares, isto é,

$T : V \to W$ é uma transformação linear se, e somente se,

$T(c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_kv_k) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + ... + c_kT(v_k)$

para todo $\{v_1,...,v_k\}$ em V e escalares $\{c_1,...,c_k\}$.

Observação: Note que é equivalente usar $T(cu+v) = cT(u) + T(v)$ como definição de transformação linear.

Teorema 2.1 *Sejam V e W espaços vetoriais e β uma base de V. A cada vetor $u \in \beta$, façamos corresponder um vetor $u' \in W$. Então existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que $T(u) = u'$ para cada $u \in \beta$.*

Exemplo 2.1 *Seja A uma matriz m x n sobre $\mathbb{R}$. A matriz A determina a "transformação matricial" $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $T_A(X) = AX$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$. Tal transformação é linear, pois para quaisquer $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{R}$, temos*

$T_A(kX_1 + X_2) = A(kX_1 + X_2) = kAX_1 + AX_2 = kT(X_1) + T(X_2)$

Exemplo 2.2 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transfomação "projeção"no plano xy definida por*

$T(x,y,z) = (x,y,0)$.

Mostraremos que T é linear. Sejam $u = (x_1,y_1,z_1)$, $v = (x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} T(ku+v) &= T(kx_1+x_2, ky_1+y_2, kz_1+z_2) \\ &= (kx_1+x_2, ky_1+y_2, 0) \\ &= (kx_1, ky_1, 0) + (x_2, y_2, 0) \\ &= k(x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) \\ &= kT(u) + T(v). \end{aligned}$$

Portanto, $T(ku+v) = kT(u) + T(v)$

Obs: Transformação linear leva vetor nulo em vetor nulo.

Exemplo 2.3 *Não são lineares as transformações:*

a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por $T(x) = senx$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, pois $sen(x+y) \neq senx + seny$, em geral.*

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por $T(x,y) = (x+1, y+2)$, pois $T(0,0) = (1,2) \neq (0,0)$, isto é, T não leva vetor nulo em vetor nulo.*

c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por $T(x) = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pois $|x+y| \neq |x| + |y|$, em geral.*

Proposição 2.1 *Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita. Se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ordenada de V e $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ é um conjunto arbitrário de vetores de W (não necessariamente distintos); existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i, \forall\, i = \{1, \ldots, n\}$.*

Demonstração: Para provar que existe pelo menos uma transformação linear T, tal que $T(v_i) = w_i$ procedamos como segue.

Dado um vetor v em V, existe uma única n-upla $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, tal que

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n = \sum_{i=1}^{n} c_iv_i$$

Para esse vetor v, definimos

$$T(v) = c_1w_1 + c_2w_2 + \ldots + c_nw_n = \sum_{i=1}^{n} c_iw_i$$

Da definição, é claro que $T(v_i) = w_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Sejam agora c um escalar e

$u = d_1v_1 + d_2v_2 + ... + d_nv_n = \sum_{i=1}^{n} d_iv_i.$

Então temos

$$\begin{aligned}
T(cv+u) &= T(cc_1v_1 + cc_2v_2 + ... + cc_nv_n) + (d_1v_1 + d_2v_2 + ... + d_nv_n) \\
&= T(cc_1 + d_1)v_1 + ... + (cc_n + d_nv_n) \\
&= cc_1 + d_1T(v_1) + ... + (cc_n + d_nT(v_n) \\
&= (cc_1 + d_1)w_1 + ... + (cc_n + d_n)w_n \\
&= T(vc+u) = c(c_1w_1 + ... + c_nw_n) + (d_1w_1) + ... + d_nw_n \\
&= T(vc+u) \\
&= cT(v) + T(u),
\end{aligned}$$

o que mostra que T é linear.

Para provar a unicidade de T, suponhamos $U : V \rightarrow W$ uma transfomação linear tal que $U(v_i) = w_i$, $\forall\ i = \{1, 2, ..., n\}$.

Então para todo vetor

$v = \sum_{i=1}^{n} c_iv_i$

$U(v) = \sum_{i=1}^{n} c_iU(v_i) = \sum_{i=1}^{n} c_iw_i = T(v).$

Assim, $U(v) = T(v), \forall\ v \in V$. Portanto, $U = T$.

2.1 REPRESENTAÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES POR MATRIZES

Teorema 2.2 *(Teorema de Representação Matricial)*

Se $E = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ e $F = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ são bases ordenadas para os espaços vetoriais V e W, respectivamente, então, a cada transformação linear $L : V \rightarrow W$, corresponde uma matriz m x n tal que

$[L(v)]_F = A[v]_E$ para todo $v \in V$

A matriz de L em relação às bases ordenadas E e F.

De fato, $a_j = \left[L(v_j)\right]_F \quad j = \{1, 2, ..., n\}$

Seja A é a matriz que representa L em relação às bases E e F, e se

$x = [v]_E \qquad$ (o vetor de coordenadas de v em relação a E)

$y = [w]_F$ *(o vetor de coordenadas de w em relação a F)*

portanto L leva v em w se e somente se $Ax = y$.

Exemplo 2.4 *Seja L a transformação linear de* $\mathbb{R}^3$ *em* $\mathbb{R}^2$ *definida por*

$$L(x) = x_1 b_1 + (x_2 + x_3) b_2$$

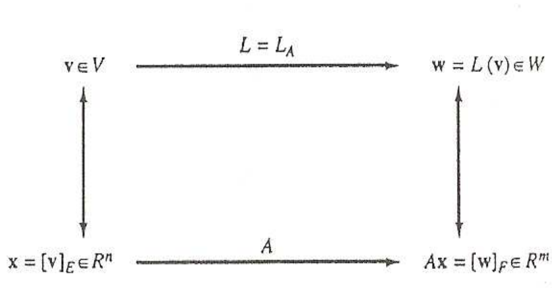


Figura 9: 2.4.1

para $x \in \mathbb{R}^3$, *onde*

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Encontre a matriz A que representa L em relação às bases ordenadas $[e_1, e_2, e_3]$ *e* $[b_1, b_2]$.

$$\begin{aligned} L(e_1) &= 1b_1 + 0b_2 \\ L(e_2) &= 0b_1 + 1b_2 \\ L(e_3) &= 0b_1 + 1b_2 \end{aligned}$$

A i-ésima coluna de A é determinada pela coordenada de $L(e_i)$ *em relação à base* $[b_1, b_2]$ *para* $i = \{1, 2, 3\}$. *Logo,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Seja V um espaço vetorial com uma base fixada $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Cada elemento v de V pode ser escrito, de maneira única, como combinação linear dos vetores da base $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Se $v = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$, os elementos $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$ são chamados coordenadas de v em relação à base β.A matriz coluna dos coeficientes

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

é chamada matriz coordenada de v em relação à base β.

Obviamente, se uma base diferente é escolhida, as coordenadas e a matriz coordenada de v mudarão.

Seja W um espaço vetorial com uma base fixada $\beta' = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$.

Se $T : V \to W$ é uma transformação linear, as imagens dos vetores da base $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ pertencem a W e daí podem ser escritos como combinação linear dos vetores da base $\beta' = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$;

$$\begin{cases} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + ... + a_{1m}w_m \\ T(v_2) &= a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{2m}w_m \\ \vdots &= \vdots \\ T(v_n) &= a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + ... + a_{nm}w_m. \end{cases} \tag{1}$$

Então em relação à base β'as matrizes coordenadas dos vetores $T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)$ são

$$[T(v_1)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1m} \end{bmatrix} \quad [T(v_2)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{2m} \end{bmatrix} \quad , \cdots , \quad [T(v_1)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Definição 2.2 *Sejam V e W espaços vetoriais com bases $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ e $\beta' = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$, respectivamente, e seja $T : V \to W$ uma transformação linear. A matriz de T em relação às bases β e β' em W, que a cada transformação linear $T : V \to W$ corresponde uma única matriz $[T]^\beta_{\beta'}$, é a matriz cuja j-ésima coluna é a matriz coordenada do vetor $T(v_j)$ na base β'. Então*

$$[T]^\beta_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

a qual notamos ser a matriz transposta da matriz dos coeficientes de (1) cuja unicidade é *garantida. Determinamos assim, fixadas as bases β em V e β' em W, que acada transformação linear $T : V \to W$ corresponde uma única matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$.*

Exemplo 2.5 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2 + x_3).$$

Seja $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e $\beta' = w_1, w_2$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Podemos escrever as imagens dos vetores da base β como combinação linear dos vetores da base β';

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} T(v_1) & = & (1,1) & = & 1(1,0)+1(0,1) & = & 1w_1 + 1w_2 \\ T(v_2) & = & (-1,2) & = & -1(1,0)+2(0,1) & = & -1w_1 + 2w_2 \\ T(v_3) & = & (0,1) & = & 0(1,0)+1(0,1) & = & 0w_1 + 1w_2. \end{array} \right. \tag{2}$$

Então em relação à base β' as matrizes coordenadas das imagens dos vetores v_1, v_2 e v_3 são

$$[T(v_1)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, [T(v_2)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, [T(v_3)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que $[T]_{\beta'}^{\beta}$ é a transposta da matriz dos coeficientes de $(6.4.2)$.

No que se segue, estaremos primordialmente interessados na representação matricial de tranformações lineares de um espaço vetorial em si mesmo.

Definição 2.3 *Se V é um espaço vetorial, um operador linear sobre V é uma transformação linear de V em V.*

Tratando-se da representação matricial de um operador linear T será mais conveniente usar uma mesma base ordenada em cada caso, isto é, tomar $\beta = \beta'$. A matriz representante de T será então denominada simplesmente a matriz de T em relação a base β e indicada por $[T]_{\beta}$.

Deve-se ter sempre em mente que a matriz que representa o operador linear T sobre V depende da base ordenada β e que existe uma matriz que representa T em relação a cada base de V.

Exemplo 2.6 *Considere o operador linear sobre $\mathbb{R}^2$ definido por*

$T(x_1,x_2) = (x_1 + kx_2, x_2)$, $k \in \mathbb{R}$.

Seja $\beta = \{v_1, v_2\}$ *a base canônica de* $\mathbb{R}^2$. *Podemos escrever as imagens dos vetores da base* β *como combinação linear dos vetores da mesma base;*

$$(6.4.3)\begin{cases} T(v_1) &= T(1,0) &= (1,0) &= 1(1,0)+0(0,1) &= 1v_1+0v_2 \\ T(v_2) &= T(0,1) &= (k,1) &= k(1,0)+1(0,1) &= kv_1+1v_2 \end{cases}$$

Com relação à base β *as matrizes coordenadas das imagens de* v_1 *e* v_2 *são*

$[T(v_1)]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *e* $[T(v_2)]_\beta = \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}$.

Daí,

$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Note que $[T]_\beta$ *é a transposta da matriz dos coeficientes de* (6.4.3).

Exemplo 2.7 *Seja L a transformação linear de* $\mathbb{R}^2$ *em si mesmo definida por*

$$L(\alpha b_1 + \beta b_2) = (\alpha + \beta)b_1 + 2\beta b_2$$

onde b_1, b_2 *é a base ordenada de Exemplo 2.4. Econtre a matriz A que representa L em relação a* b_1, b_2.

$$L(b_1) = 1b_1 + 0b_2$$

e

$$L(b_2) = 1b_1 + 2b_2$$

Logo,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2.2 SEMELHANÇAS DE MATRIZES

Teorema 2.3 *Duas matrizes m x n sobre F representam a mesma transformação T de V em W relativa a dois pares de suas bases se, e somente se, forem equivalentes.*

Demonstração da recíproca: Supondo A e B matrizes equivalentes, P e Q matrizes regulares tais que $B = Q^{-1}AP$, *sejam* $Q = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *e* $B = (\beta_1, ..., \beta_m)$ *bases ordenadas arbitrárias para*

V e W. Em relação a tais bases, A define uma transformação linear S tal que

$[S(\xi)]_B^T = [A(\xi)]_Q^T$.

Sejam Q' e B' bases para V e W cujos elementos são definidos por:

$\alpha'_j = \sum_i \ p_{ij}\alpha_i, \qquad \beta'_j = \sum_i \ q_{ij}\beta_i.$

Logo:

$[\xi]_Q^T = P[\xi]_{Q'}^T, \qquad [n]_B^T = Q[n]_{B'}^T,$

$B[\xi]_{B'}^T = Q^{-1}AP[\xi]_{Q'}^T = Q^{-1}A[\xi]_Q^T = Q^{-1}[S(\xi)]_B^T = [S(\xi)]_{B'}^T$

como se queria provar.

Teorema 2.4 *Seja T trasformação linear do espaço vetorial V em W, de posto r. Então existem bases para V e W em relação as quais a representação matricial de T tem a forma normal ou canônica $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, com I matriz identidade de ordem r.*

Demonstração: Supondo $dimV = n$, $dimW = m$, $p(T) = r$, $v(T) = dimN_T = n - r$, seja $(u_1, ..., u_{n-r})$ base para o núcleo de T, e estenda-se esta base para $V : (v_1, ..., v_r, u_1, ..., u_{n-r})$. Pondo $w_1 = T_{(v_1)}), ..., w_r = T_{(v_r)}, (w_1, ..., w_r)$ é base para a imagem de T, a qual pode ser estendida a uma base para $W : (w_1, ..., w_r, ..., w_m)$. Bastará calcular $T(v_i)$ e $T(u_j)$ para concluir que a matriz de T tem a forma enunciada.

outra Demonstração: Quando se estudou a equivalência de matrizes, viu-se que qualquer matriz A era equivalente a matriz da forma acima. Isto é, existem matrizes regulares P e Q^{-1} tais que $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Em particular, isto se dá para $A = [T]_B^Q$. Bastará tomar bases Q' e B' tais que

$\alpha'_j = \sum_i p_{ij}\alpha_i, \qquad \beta'_j = \sum_i \ q_{ij}\beta_i.$, para que A tome a forma mencionada.

No caso particular de um operador linear T sobre V, em que se referem tanto o vetor quanto seu transfomado a uma mesma base, sejam Q e Q' bases ordenadas para V e M matriz regular tal que $[\xi]_Q^T = M[\xi]_{Q'}^T$. Seja

$[T(\xi)]_Q^T = [T]_Q[\xi]_Q^T$

a equação matricial da transfomação T na base Q. Na base Q' ter-se-á:

$M[T(\xi)]_{Q'}^T = [T]_Q M[\xi]_{Q'}^T,$

ou

$[T(\xi)]^T_{Q'} = M^{-1}[T]_Q M[\xi]^T_{Q'}$,

logo é

$[T]_{Q'} = M_{-1}[T]_Q M$.

Observe-se que M é a matriz do opoerador U tal que $U(\alpha_j) = \alpha'_j$, o qual existe e é único, como ja se viu. Com isto ficou provado o

Teorema 2.5 *Seja V espaço vetorial de dimensão finita sobre o campo F, $Q = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ e $Q' = (\alpha'_1, ..., \alpha'_n)$ bases ordenadas para V, M matriz tal que $[\xi]^T_Q$, para todo $\xi \in V$. Se T for operador linear sobre V, então*

$[T]_{Q'} = M^{-1}[T]_Q M$,

a matriz M sendo a correspondente ao oporador U tal que $U(\alpha_j) = \alpha'_j$.

A relação entre matrizes quadradas que figura no enuncia do anterior é um caso particular de equivalência, caracterizado pela seguinte

Definição 2.4 *Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n sobre o campo F. Dir-se-á que B é semelhante a A sobre F se existir uma n x n matriz M sobre F, inversível e tal que $B = M^{-1}AM$.*

Teorema 2.6 *Duas matrizes quadradas A e B de ordem n sobre F são semelhantes se, e somente se, e só se existirem bases ordenadas Q e B para o espaço vetorial f^n, em relação as quais A e B representam um mesmo operador linear T sobre F^n.*

Demonstração 2.1 *Embora caso particular de Teorema 1, com $V = W$, etc., far-se-á uma demonstração direta. Se A e B representam o mesmo operador T, elas são semelhantes (Teorema 3). Reciprocamente, supondo A e B semelhantes e $M = (m_{ij})$ inversível e tal que $B = M^{-1}AM$, seja Q base de F^n, T o operador cuja matriz em tal base é A, e B a base cujos vetores β_j são dados por*

$\beta_j = \sum_i m_{ij}\alpha_i$.

Logo $[T]_B = M^{-1}AM = B$, isto é, B é matriz que representa T na base B.

Teorema 2.7 *Dois operadores lineares S e T sobre F^n são representáveis pela mesma matriz em relação a duas bases para F^n, se e somente se, existir operador linear inversível U sobre F^n tal que $S = U^{-1}TU$.*

Demonstração 2.2 *Supondo $S = U^{-1}TU$, seja $Q = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ base ordenada para F^n, e $A = [T]_Q$. Pondo $\beta_j = U^{-1}(\alpha_j)$, se ja $B = (\beta_1, ..., \beta_n)$ base para F^n. Então*

$S(\beta_j) = U^{-1}TU(\beta_j) = U^{-1}T(\alpha_j) = U^{-1}(\sum_i\ a_{ij}\alpha_i) = \sum_i\ a_{ij}\beta_i$, mostrando que $[S]_B = A$. Reciprocamente, se $[S]_B = A = [T]_Q$, seja U o operador linear definido por $U(\beta_j) = \alpha_j$, que existe e é único e inversível. Então é $S = U^{-1}TU$.

2.3 NÚCLEO E IMAGEM DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Definição 2.5 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. O núcleo de T, denotado por $Ker(T)$, é o conjunto de todos os vetores de V que são levados por T em 0(zero) de W, isto é,*

$$Ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$$

A imagem de T, denotada por $Im(T)$, é o conjunto de todos os vetores de W que são imagens de vetores de V através de T, isto é,

$$Im(T) = \{T(v); v\} \in V$$

$\{w \in W : w = T(v)\}$ para algum $v \in V$.

Exemplo 2.8 *A imagem $Im(I)$ da transformação "identidade"$I : V \to V$ definida por $I(v) = v$, $\forall v \in V$ é o espaço todo V, enquanto o seu núcleo $Ker(I)$ é o subespaço nulo.*

A imagem $Im(0)$ da transformação "zero"$0 : V \to V$ definida por $0(v) = 0$, $\forall v \in V$ é o subespaço nulo enquanto o seu núcleo é todo o espaço V.

Exemplo 2.9 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x+y, 2x+y)$.*

Temos que $T(x,y) = (0,0)$, se, e somente se, $(x+y, 2x+y) = (0,0)$. Nosso problema recai em achar as soluções do sistema homogêneo

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ 2x+y &= 0, \end{cases}$$

o qual tem solução única$(0,0)$. Daí, $Ker(T) = (0,0)$.

Verifiquemos agora se o vetor $(2,3) \in Im(T)$.

Isto é, se existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $T(x,y) = (x+y; 2x+y) = (2,3)$. Dessa maneira nosso problema é resolver o sistema

$$\begin{cases} x+y &= 2 \\ 2x+y &= 3, \end{cases}$$

o qual admite solução única $(1,1)$.

Assim $(2,3) \in Im(T)$.

Note que se $T : V \to W$ *é uma transformação linear e* $v_1, v_2, ..., v_n$ *são vetores que geram* V *então é evidente que os vetores* $T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)$ *geram* $Im(T)$.

A seguir relacionaremos os conceitos de função injetora e sobrejetora e os de núcleo e imagem quando a função é uma transformação linear.

Definição 2.6 *Dada uma aplicação* $T : V \to W$, *diremos que* T *é injetora se dados* $u, v \in V$ *com* $T(u) = T(v)$ *tivermos* $u = v$.

Ou equivalentemente T *é injetora se dados u,v* $\in V$ *com* $u \neq v$, *então* $T(u) \neq T(v)$, *ou seja,* T *é injetora se as imagens de vetores distintos são distintas.Veja a Figura 10.*

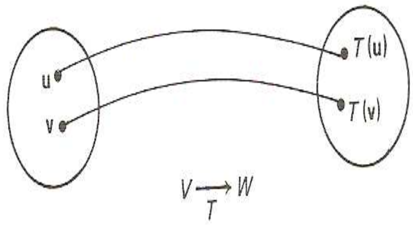


Figura 10: aplicação injetora

Definição 2.7 *A aplicação* $T : V \to W$ *será sobrejetora se a imagem de* T *coincidir com* W, *ou seja* $T(V) = W$.

T *será sobrejetora se dado* $w \in W$, *existir* $v \in V$ *tal que* $T(v) = w$. *Veja a Figura 11.*

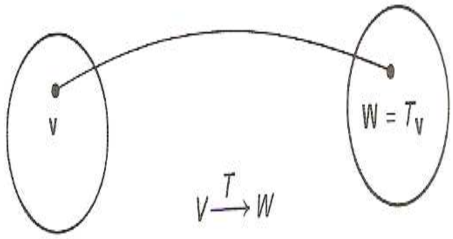


Figura 11: aplicação sobrejetora

Exemplo 2.10 *Seja* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $T(x) = (x, 0)$

Mostraremos que T *é injetora mas não é sobrejetora.*

Sejam $x,y \in \mathbb{R}$ *tais que* $(x,0) = (y,0)$.

Então $x = y$, e portanto, T é injetora. Mas T não é sobrejetora uma vez que $Im(T) \neq \mathbb{R}^2$.

Teorema 2.8 *Seja $T : V \to W$, uma aplicação linear. Então $Ker(T) = 0$, se e somente se T é injetora.*

Demonstração: *Mostremos primeiro que se $Ker(T) = 0$, então T é injetora. Suponhamos que $u,v \in V$ são tais que $T(u) = T(v)$. Então $T(u) - T(v) = T(u - v) = 0$, isto é, $u - v \in Ker(T)$. Mas por hipótese o único elemento do núcleo é 0, então $u - v = 0$, ou seja, $u = v$. Portanto, T é injetora.*

Agora se T é injetora, então $Ker(T) = 0$. Seja $v \in Ker(T)$, isto é, $T(v) = 0$. Como $T(0) = 0$, $T(v) = T(0)$. Logo $v = 0$, pois T é injetora. Portanto, $Ker(T) = 0$.

Teorema 2.9 *(Teorema do Núcleo e da Imagem) Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então $dimKer(T) + dimIm(T) = dimV$.*

Corolário 2.1 *Se $dimV = dimW$, então T linear é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.*

Corolário 2.2 *Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear injetora. Se $dimV = dimW$, então T leva base em base.*

Quando uma transformação linear $T : V \to W$ for injetora e sobrejetora, ao mesmo tempo, dá-se o nome de isomorfismo. Quando há uma tal transformação entre dois espaços vetoriais dizemos que esses são isomorfos. Sob o ponto de vista de Álgebra Linear, espaços vetoriais isomorfos são, por assim dizer idênticos,espaços isomorfos têm a mesma dimensão. Portanto pelo Corolário 2.2, um isomorfismo leva base em base. Além disso, um isomorfo $T : V \to W$ tem uma aplicação inversa $T^{-1} : W \to V$, que é linear e também é um isomorfismo.

2.4 APLICAÇÃO LINEARES DE MATRIZES

Toda matriz $m \times n$ está associada à uma transformação linear, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. A seguir, vamos formalizar este resultado para espaços vetoriais V e W e também estabelecer o seu recíproco, isto é,veremos que uma vez fixadas as bases, à toda transformação linear $T : V \to W$ estará associada uma única matriz.

Dados dois espaços vetoriais V e W com bases β e β', respectivamente, e uma matriz A, podemos obter uma transformação linear.

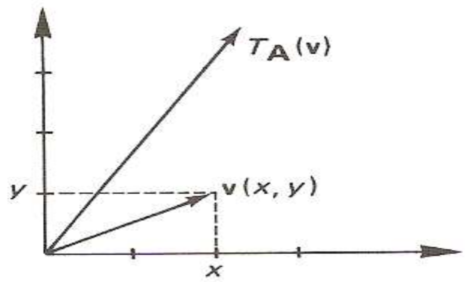
Exemplo 2.11 *Consideremos* $\mathbb{R}^2$*, as bases* $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ *e* $\beta' = \{(1,1),(-1,1)\}$ *e a matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Queremos associar a essa matriz A uma aplicação linear que depende de A e das bases dadas β *e* β'*, isto é,*

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto T_A(v) \end{aligned}$$

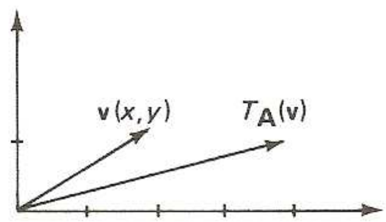
Considere $v = (x,y)$*. Seja* $X = [v]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$,

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix} = [T_A(v)]_{\beta'}$$



Então, $T_A(v) = 2x(1,1) + y(-1,1) = (2x-y, 2x+y)$

Em particular,se $v = (2,1)$*, então* $T_A(2,1) = (3,5)$*. Note que se tivéssemos partido de* $\beta = \beta' = \{(1,0),(0,1)\}$*, teríamos obtido* $T_A(v) = (2x,y) = Av$.



De um modo geral, fixadas as bases $\beta = \{v_1,...,v_n\}$ *e* $\beta' = \{w_1,...,w_m\}$*, à matriz*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} = A$$

podemos associar

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ v &\to T_A(v) \end{aligned}$$

Seja $X = [v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. *Logo* $AX = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

Então, $T_A(v) = y_1w_1 + ... + y_mw_m$, *onde* $y_i = A_i$ *é a i-ésima linha de A.*

Exemplo 2.12 *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ *e* $\beta' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

Encontremos a transformação linear $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *associada à A.*

Seja $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ *então* $A.X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -3y & 5z \\ 2x & 4y & -z \end{bmatrix}.$

Definimos, portanto,

$$\begin{aligned} T_A(x,y,z) &= (x-3y+5z)(1,0)+(2x+4y-z)(0,1) \\ &= (x-3y+5z+4y-z) \end{aligned}$$

Reciprocamente, encontraremos a matriz associada à uma transformação linear. Seja $T : V \to W$ *linear,* $\beta = \{v_1,...,v_n\}$ *base de* V *e* $\beta' = \{w_1,...,w_m\}$ *base de* W*. Então* $T(v_1),...,T(v_n)$ *são vetores de* W *e portanto*

$$\begin{cases} T(v_1) &= a_{11}w_1 + ... + a_{m1}w_m \\ \vdots & \vdots \\ T(v_1) &= a_{1n}w_1 + ... + a_{mn}w_m \end{cases}$$

Assim, a matriz A procurada é a matriz transposta dos coeficientes deste sistema, denotada por $[T]^{\beta}_{\beta'}$*, note que* $T = T_A$*.*

Exemplo 2.13 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(x,y,z) = (2x+y-z, 3x-2y+4z)$*.*

Sejam $\beta = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ *e* $\beta' = \{(1,3),(1,4)\}$*.*

Procuremos$[T]^{\beta}_{\beta'}$*.*

Calculando T *nos elementos de base* β*, temos:*

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (2,5) &= 3(1,3) \quad -1(1,4) \\ T(1,1,0) &= (3,1) &= 11(1,3) \quad -8(1,4) \\ T(1,0,0) &= (2,3) &= 5(1,3) \quad -3(1,4) \end{aligned}$$

Então

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.14 *Seja*

$$T : V \to V$$
$$v \mapsto v$$

Isto é, T é a transformação identidade.

Sejam $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ e $\beta' = \{v'_1, ..., v'_n\}$ bases de V. Calculemos $[T]^{\beta}_{\beta'}$.

Como

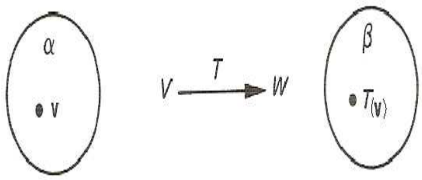
$$\begin{array}{ccccc} T_{v1} & = & v_1 & = & a_{11}v'_1 + \cdots + a_{n1}v'_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ T_{vn} & = & v_n & = & a_{1n}v'_1 + \cdots + a_{nn}v'_n \end{array}$$

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [I]^{\beta}_{\beta'}$$

A matriz mudança de base.

Teorema 2.10 *Sejam V e W espaços vetoriais, α base de V, β base de W e $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então, para todo $v \in V$ vale:*

$$[T(v)]_{\beta} = [T]^{\alpha}_{\beta}.[v]_{\alpha},$$



Para facilitar a compreensão faremos a demonstração no caso particular em que $dimV = 2$ e $dimW = 3$.

Sejam $\alpha = \{v_1, v_2\}$ base de V e $\beta = \{w_1, w2, w3\}$ base de W e

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}. \text{ Sejam ainda } v \in V \text{ e } [v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} e[Tv]_{\beta} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Da matriz $[T]^{\alpha}_{\beta}$ sabemos que

$$\begin{array}{rcl} T(v_1) & = & a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3 \\ T(v_2) & = & a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3 \end{array}$$

Além disso, $v = x_1v_1 + x_2v_2$ e como T é linear,

$$
\begin{aligned}
T(v) &= x_1T(v_1)+x_2T(v_2)\\
&= x_1(a_{11}w_1+a_{21}w_2+a_{31}w_3)+x_2(a_{12}w_1+a_{22}w_2+a_{32}w_3)\\
&= (a_{11}x_1+a_{12}x_2)w_1+(a_{21}x_1+a_{22}x_2)w_2+(a_{31}x_1+a_{32}x_2)w_3
\end{aligned}
$$

Mas, $T(v)=y_1w_1+y_2w_2+y_3w_3$, *e como as coordenadas em relação à base* β *são únicas, temos:*

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1+a_{12}x_2\\
y_2 &= a_{21}x_1+a_{22}x_2\\
y_3 &= a_{31}x_1+a_{32}x_2,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x_1\\ x_2 \end{bmatrix}.
$$

Isto é, $[Tv]_\beta=[T]^\alpha_\beta.[v]_\alpha$.

Exemplo 2.15 *Seja a transformação linear* $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ *dada por* $[T]^\alpha_\beta=\begin{bmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1\\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

onde $\alpha=\{(1,0),(0,1)\}$ *é a base de* $\mathbb{R}^2$ *e* $\beta=\{(1,0,0),(-2,0,1),(0,1,0)\}$ *é a base de* $\mathbb{R}^3$.

Queremos saber qual é a imagem do vetor $v=(2,-3)$ *pela aplicação* T. *Achamos as coordenadas do vetor* v *em relação à base* α, *obtendo* $[v]_\alpha=\begin{bmatrix} 2\\ -3 \end{bmatrix}$.

Usando o teorema temos

$$
[T(v)]_\beta=[T]^\alpha_\beta[v]_\alpha=\begin{bmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1\\ -2 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2\\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5\\ -3\\ -13 \end{bmatrix}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
T(v) &= 5(1,0,1)-3(-2,0,1)-13(0,1,0)\\
T(v) &= (11,-13,2).
\end{aligned}
$$

3 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Exemplo 3.1 $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *(Aplicação nula)*

$(x,y) \mapsto (0,0)$

Neste caso, o único vetor que é fixo pela aplicação dada é o vetor nulo, $N(0,0) = (0,0)$.

Dada uma transformação linear de um espaço vetorial $T : V \to V$*, estamos interessados em saber quais vetores são levados em múltiplo de si mesmo, isto é, procuramos um vetor* $v \in V$ *e um escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$T(v) = \lambda v$$

Neste caso $T(v)$ *será um vetor de mesma "direção"que* v*. Por vetores de mesma "direção"estaremos entendendo vetores sobre a mesma reta suporte.*

Como $v = 0$ *satisfaz a equação* $\forall\lambda$*, estaremos interessados em determinar vetores* $v \neq 0$ *satisfazendo a condição acima. O escalar* λ *será chamado autovalor ou valor característico de* T *e o vetor* v *um autovetor ou vetor característico de* T.

Passaremos doravante a dar a designação usual do operador linear para uma transformação linear $T : V \to V$ *(de um espaço vetorial nele mesmo).*

Definição 3.1 *Seja* $T : V \to V$ *um operador linear. Se existirem* $v \in V$, $v \neq 0$*, e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tais que* $Tv = \lambda v$, λ *é um autovalor de* T *e* v *um autovetor de* T *associado a* λ.

Observe que λ *pode ser o número* 0*, embora* v *não possa ser o vetor nulo.*

Definição 3.2 *Seja* $T : V \to V$ *um operador linear. Se existirem* $v \in V$, $v \neq 0$*, e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tais que* $T(v) = \lambda v$, λ *é um autovalor de* T *e* v *um autovetor nulo.*

Exemplo 3.2 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (x,y)$

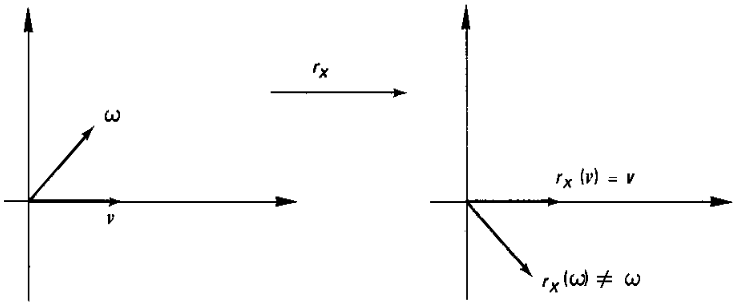
Neste caso, todo $\mathbb{R}^2$ *é fixo uma vez que* $T(x,y) = (x,y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 3.3 $Ir_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *(Reflexão no eixo-x)*

$(x,y) \mapsto (x,-y)$ *ou*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente



Intuitivamente podemos notar que todo vetor pertencente ao eixo-x é mantido fixo pela transformação Ir_x*. De fato:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, $Ir_x(x,0) = (x,0)$.

Ainda mais, estes vetores são os únicos com esta propriedade, visto que, procurando vetores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *tais que*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

caímos no seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 0y = x \\ 0x - y = y \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = x \\ -y = y \end{cases}$$

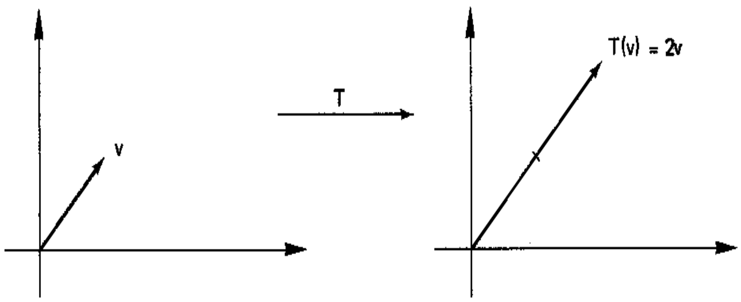
As únicas soluções desse sistema são vetores do tipo $(x,0)$*, ou seja, são os vetores pertencentes ao eixo-x.*

Exemplo 3.4 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *um operador linear definido por T(v)=2v.*

Na notação matricial temos,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Neste caso, 2 *é um autovalor de* T *e qualquer* $(x,y) \neq (0,0)$ *é um autovetor de* T *associado ao autovalor* 2*. Observe geometricamente:*



De modo geral toda transformação

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $T(v) = \alpha v$*, com* $\alpha \neq 0$*.*
tem α *como autovalor e qualquer* $(x,y) \neq (0,0)$ *como autovetor correspondente. Observe que* $T(v)$ *é sempre um vetor de mesma direção que* v*. Ainda mais, se:*

a) $\alpha < 0$, T *inverte o sentido do vetor.*

b) $|\alpha| > 1$, T *dilata o vetor.*

c) $|\alpha| < 1$, T *contrai o vetor.*

d) $\alpha = 1$, T *é a identidade.*

Exemplo 3.5 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *(Rotação de 90º em torno da origem)*
$(x,y) \mapsto (-y,x)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

Note que nenhum vetor de zero é elevado por T *num múltiplo de si mesmo. Logo,* T *não tem nem autovalores nem autovetores.*

Este é um exemplo de que nem todo operador linear possui autovalores e autovetores.

Definição 3.3 *O subespaço* $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$ *é chamado o subespaço associado ao autovalor* λ.

3.1 AUTOVETORES E AUTOVALORES DE UMA MATRIZ

Dada um amatriz quadrada A, de ordem n, estaremos entendendo por autovalor e autovetor de A autovalor e autovetor da transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, associada a matriz A em relação à base canônica, isto é, $T_A(v) = Av$. Assim ,um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de A, e um autovetor $v \in \mathbb{R}^n$, são soluções da equação $Av = \lambda v$, onde $v \neq 0$.

Exemplo 3.6 *Dada a matriz diagonal:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e dados os vetores $e_1 = (1,0,...,0)$, $e_2 = (0,1,0,...,0), ..., e_n = (0,0,...,0,1)$, *temos*

$$Ae_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{11}e_1$$

e em geral, $Ae_i = aiiej$. *Então, estes vetores da base canônica de* $\mathbb{R}^n$ *são autovetores para A, e o autovetor ei é associado ao autovalor* a_{ii}.

3.2 POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

Exemplo 3.7 *Seja uma matriz real A de ordem n. encontre o autovetor e autovalor para* $n = 3$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Procuramos vetores $v \in \mathbb{R}^3$ *e escalares* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tais que* $Av - \lambda v = 0$. *Se I for a matriz identidade de ordem* 3, *então a equação acima pode ser escrita na forma* $Av = (\lambda I)v$, *ou ainda,* $(A - \lambda I)v = 0$.

Escrevendo explicitamente

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Temos então a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se escrevermos explicitamente o sistema de equação lineares equivalente a esta equação matricial, iremos obter um sistema de três equações e três incógnitas. Se o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, saberemos que este sistema tem uma única solução, que é a solução nula, ou seja $x = y = z = 0$. *Mas estamos interessados em calcular os autovetores de A, isto é, vetores* $v \neq 0$, *tais que* $(A - \lambda I)v = 0$. *Neste caso* $det(A - \lambda I)$ *deve ser zero, ou seja*

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Portanto, $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0$.

Note que $det(A - \lambda I)$ *é um polinômio em lambda. Este polinômio é chamado o polinômio característico de A. Assim,* $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 3) = 0$

Logo $\lambda = 2$ *e* $\lambda = 3$ *são as raízes do polinômio característico de A, e portanto os autovalores da matriz A são* 2 *e* 3. *Conhecendo os autovalores podemos encontrar os autovetores correspondentes. Resolvendo a equação* $Av = \lambda v$, *para os casos:*

a) $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} 4x & + & 2y & = & 2x \\ -x & + & y & = & 2y \\ & + & 2z & = & 2z \end{array}\right.$$

A terceira equação implica que $y = 0$ *e por isso vemos na segunda que* $x = 0$. *Como nenhuma equação impõe uma restrição em z, os autovetores associados a* $\lambda = 2$ *são do tipo* $(0,0,z)$, *ou seja, pertencem ao subespaço* $[(0,0,1)]$.

b) $\lambda = 3$

Resolvendo a equação $Av = 3v$, *temos*

$$\begin{cases} 4x & + & 2y & = & 3x \\ -x & + & y & = & 3y \\ & + & 2z & = & 3z \end{cases}$$

Tanto da primeira equação quanto da segunda vemos que $x = -2y$ *e da terceira vem* $z = y$*. Os autovetores associados ao autovalor* $\lambda = 3$ *são do tipo* $(-2y, y, y)$*, ou seja, pertencem ao subespaço* $[(-2, 1, 1)]$*.*

3.3 DIAGONALIZAÇÃO

Teorema 3.1 *Se* $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ *são autovalores distintos de uma matriz* A $n \times n$ *com autovalores associados* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$*, então* $\{x_1, ..., x_n\}$ *são linearmente independentes.*

Demonstração: *Seja* r *a dimensão do subespaço de* $\mathbb{R}^n$ *gerado por* $\{x_1, ..., x_n\}$ *e suponha que* $r < n$*. Podemos supor que* $\{x_1, ..., x_r\}$ *são linearmentes independentes. Como* $\{x_1, x_2, ..., x_r, x_{r+1}\}$ *são linearmente dependentes, existem escalares* $\{c_1, ..., c_r, c_{r+1}\}$*, nem todos nulos, tais que*

$$c_1 x_1 + ... + c_r x_r + c_{r+1} x_{r+1} = 0 \tag{1}$$

Observe que c_{r+1} *tem que ser diferente de zero, pois, caso contrário,* $x_1, ..., x_r$ *seriam linearmente dependentes. Logo,* $c_{r+1} x_{r+1} \neq 0$ *e, portanto,* $c_1, ..., c_r$ *não podem ser todos nulos. Multiplicando* (1) *por A, obtemos*

ou

$$\{c_1 \lambda_1 x_1 + ... + c_r \lambda_r x_r + c_{r+1} \lambda_{r+1} x_{r+1}\} = 0 \tag{2}$$

Subtraindo λ_{r+1} *vezes* (1) *de* (2)*, obtemos*

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) x_1 + ... + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) x_r = 0$$

Isso contradiz a independência linear de $x_1, ..., x_r$*. Logo,* r *tem que ser igual a* n*.*

Corolário 3.1 *Se* V *é um espaço vetorial de dimensão* n *e* $T : V \to V$ *é um operador linear que possui* n *autovalores distintos, então* V *possui uma base cujo vetores são todos autovetores de* T*. Em outras palavras, se conseguirmos encontrar tantos autovalores distintos quando for a dimensão do espaço, podemos garantir a existência de uma base de autovetores.*

Definição 3.4 *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é um operador diagonalizável se existe uma base de V cujos elementos são autovetores de T.*

Exemplo 3.8 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação à base canônica α é*

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Como $P(\lambda) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$, os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$. Associado a $\lambda_1 = 3$ conseguimos apenas um autovetor LI, por exemplo, $v = (1,0,0)$. Associado a $\lambda_2 = -1$ temos o autovetor LI, $u = (-1,-20,16)$. Neste caso, temos apenas dois autovetores LI para T, e portanto não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída só de autovetores. Isto significa que em nenhuma base a matriz de T é uma matriz diagonal, ou seja, T não é diagolizável.

Exemplo 3.9 *Seja $T : V \to V$ um operador linear. se α e β são bases de V e A e B são matrizes que representam o operador T nas bases α e β, respectivamente, então*

$$A = P^{-1}BP,$$

sendo P a matriz de mudança da base β para α, isto é, $P = [I]_\alpha^\beta$. Dizemos, nesse caso, que as matrizes A e B são semelhantes.

no caso em que A é a matriz canônica do operador T e D a matriz de T na base β de autovetores, temos

$$D = P^{-1}AP$$

onde $P = [I]_\alpha^\beta$ é a matriz cujas colunas são os autovetores de T. Observemos que a matriz D é obtida pela "atuação"da matriz P, quando ela existe, sobre a matriz A. Dizemos então que a matriz P diagonaliza a ou que P é a matriz diagonalizadora.

Exemplo 3.10 *A matriz que diagonaliza*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

é a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tal matriz tem suas colunas formadas pelos autovetores $v_1 = (1,0,-1)$,$v_2 = (1,1,1)$ *e* $v_3 = (1,-2,1)$, *correspondentes aos autovetores de* A, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ *e* $\lambda_3 = 6$.

O produto $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *é a matriz* $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, *que r´presenta o operador na base de autovetores.*

4 APLICAÇÃO - GENÉTICA

4.1 CARACTERÍSTICAS HEREDITÁRIAS

Nesta seção nós examinaremos a hereditariedade de características de animais ou plantas. Vamos supor que a característica hereditária sob consideração é governada por um conjunto de dois genes, que nós denotaremos por A e a. Por *hereditariedade autossômica* cada indivíduo de cada sexo possui dois destes genes, e os possíveis pares são AA, Aa e aa. Este par de genes é chamado o *genótipo* do indivíduo e determina como o caráter controlado por estes genes se manifesta no indivíduo. Por exemplo, nas bocas-de-leão, um conjunto de dois genes controla a cor da flor. O genótipo AA produz flores vermelhas, o genótipo Aa produz flores roxas e o genótipo aa produz flores brancas. Nos humanos, a cor dos olhos é controlada por hereditariedade autossômica. Os genótipos AA e Aa têm olhos castanhos e o genótipo aa tem olhos azuis. Neste caso dizemos que o gene A *domina* o gene a, ou então que o gene a é *recessivo* em relação ao gene A, pois o genótipo Aa apresenta a mesma característica externa que o genótipo AA.

Além da hereditariedade autossômica nós também discutiremos a *hereditariedade ligada ao sexo*. Neste tipo de hereditariedade, o macho da espécie possui somente um dos dois possíveis genes (A ou a) e a fêmea possui um par de dois genes (AA, Aa ou aa). Nos humanos, o daltonismo, a calvíce hereditária, a hemofilia e a distrofia muscular, são exemplos de características controladas por hereditariedade ligada ao sexo.

A seguir vamos explicar a maneira pela qual os genes dos pais são passados para seus descendentes nos dois tipos de hereditariedade. Nós construiremos modelos matriciais que dão os prováveis genótipos dos descendentes em termos dos genótipos dos pais e usaremos estes modelos matriciais para acompanhar a distribuição genotípica de uma população através de sucessivas gerações.

4.2 HEREDITARIEDADE AUTOSSÔMICA

Na hereditariedade autossômica, um indivíduo herda um dos genes de cada par de genes dos seus pais para formar seu próprio e particular par. Pelo que sabemos, é uma questão de sorte qual dos dois genes os pais passam aos filhos. Assim, se um dos pais é do genótipo *Aa*, é igualmente provavél que o descendente herde o gene *A* ou o gene *a* daquele genitor. Se um dos pais é do genotipo *aa* e o outro é do tipo *Aa*, o descendente sempre receberá um gene *a* do genitor *aa* e receberá, com igual probabilidade, ou um gene *A* ou um gene a do genitor *Aa*. Consequentemente, cada descendente terá chances iguais de ser do genótipo *Aa* ou *aa*. Na tabela 1 tem as seguintes probabilidades dos possíveis genótipos dos descendentes para todas as possíveis combinações de genótipos dos pais.

Genótipo do Descendentes	Genótipos dos Pais					
	AA-AA	AA-Aa	AA-aa	Aa-Aa	Aa-aa	aa-aa
AA	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
aa	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

Tabela 1

Exemplo 4.1 ***Distribuição dos Genótipos numa População*** *Suponha que um agricultor tem uma grande população de plantas consistindo de alguma distribuição de todos os três possíveis genótipos AA, Aa e aa. O agricultor deseja implementar um programa de criação do qual cada planta da população é sempre fertilizada por uma planta do genótipo AA. Deduziremos então uma expressão para a distribuição dos três genótipos na população depois de um número qualquer de gerações.*

Para $n = 0, 1, 2, ...$ *vamos escrever*

a_n= *fração de plantas do genótipo AA na n-ésima geração*

b_n= *fração de plantas do genótipo Aa na n-ésima geração*

c_n= *fração de plantas do genótipo aa na n-ésima geração*

Assim, a_0, b_0 *e* c_0 *especificam a distribuição inicial dos genótipos. Nós também temos que*

$$a_n + b_n + c_n = 1, paratodon = 0, 1, 2, ...$$

Pela Tabela 1 podemos determinar a distribuição de genótipos em cada geração a partir da distribuição na geração precedente, pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1} \\ b_n &= c_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1} \qquad n = 1, 2, \ldots \\ c_n &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Por exemplo, a primeira destas três equações afirma que todos os descendentes de uma planta do genótipo AA serão do genótipo AA neste programa de criação e metade dos descendentes de uma planta do genótipo Aa será do genótipo AA.

As equações (1) podem ser escritas em notação matricial como

$$X^{(n)} = MX^{(n-1)}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

onde

$$X^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}, X^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \text{ e } M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que as três colunas da matriz M são iguais às três primeiras colunas da Tabela 1.

Da equação (2) segue que

$$X^{(n)} = MX^{(n-1)} = M^2 X^{(n-2)} = \ldots = M^n X^{(0)} \tag{3}$$

Consequentemente, se encontrarmos uma expressão explícita para M^n, poderemos usar (3) para encontrar uma expressão explícita para $X^{(n)}$. Para encontrar uma expressão explícita para M^n, primeiro diagonalizamos M, ou seja, procuramos uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que

$$M = P\, D\, P^{-1} \tag{4}$$

Com esta diagonalização, teremos

$$M^n = P\, D^n\, P^{-1} \qquad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

onde

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{bmatrix}$$

A diagonalização de M é obtida encontrando o autovalores correspondentes autovetores e seus. Estes são

Autovalores: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = 0$

Autovetores associados: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Assim, na Equação (4) temos

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$P = [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue-se que

$$X^{(n)} = P\,D^n\,P^{-1}X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

ou então

$$\begin{aligned} X^{(n)} &= \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_0 + b_0 + c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lembrando que $a_0 + b_0 + c_0 = 1$*, obtemos*

$$\begin{aligned} a_n &= 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ b_n &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \qquad\qquad n = 1, 2, \ldots \\ c_n &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Estas são fórmulas explícitas para a fração dos três genótipos na n-ésima geração de plantas em termos das frações de genótipos iniciais.

Como $\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$ *tende a zero quando n tende ao infinito, segue destas equações que*

$$\begin{aligned} a_n &\to 1 \\ b_n &\to 0 \\ c_n &= 0 \end{aligned}$$

quando n tende ao infinito. Isto mostra que no limite todas plantas da população serão do genótipo AA.

Exemplo 4.2 *Podemos modificar o Exemplo 1 supondo que cada planta da população é sempre fertilizada por uma planta do seu próprio genótipo em vez de sempre ser fertilizada por uma planta do genótipo AA. Usando a mesma notação no Exemplo 1, teremos*

$$X^{(n)} = M^n X^{(0)}$$

onde

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

As colunas destas nova matriz M são iguais às colunas correspondentes a pais dos genótipos AA-AA,Aa-Aa e aa-aa na Tabela 1.

Os autovalores de M são

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = \frac{1}{2}$$

O autovalor $\lambda = 1$ *tem multiplicidade dois e seu auto-espaço correspondente é bidimensional. Escolhendo dois autovetores linearmente independente* v_1 *e* v_2 *neste auto-espaço e um único vetor* v_3 *para o autovalor simples* $\lambda_3 = \dfrac{1}{2}$*, temos*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

As contas para $x^{(n)}$ então são

$$X^n = M^n X^{(0)} = P\,D^n\,P^{-1} X^{(0)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] b_0 \\ b_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 \qquad\qquad n = 1, 2, \ldots \\ c_n &= c_0 + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] b_0 \end{aligned} \tag{6}$$

No limite, quando n tende ao infinito, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ *e* $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \to 0$,

de modo que

$$\begin{aligned} a_n &\to a_0 + \tfrac{1}{2} b_0 \\ b_n &\to 0 \\ c_n &= c_0 + \tfrac{1}{2} b_0 \end{aligned}$$

Assim, fertilizando cada planta com uma de seu próprio genótipo produz uma população que no limite contém somente os genótipos AA e aa.

Doenças Recessivas Autossômicas

Existem muitas doenças genéticas governadas por hereditariedade autossômica nas quais um gene normal A domina um gene anormal a. O genótipo AA é um indivíduo normal, o genótipo Aa é um portador da doença mas não é por ela afetado e o genótipo aa é afetado pela doença. Nos humanos, muitas vezes estas doenças genéticas são associadas a um grupo racial es-

pecífico; por exemplo, fibrose cística (predominante entre brancos), anemia falciforme (predominante entre negros), beta-talassemia (predominante entre pessoas de origem da região do Mar Mediterrâneo) e doença de Tay-Sachs (predominante entre judeus europeus ocidentais).

Suponha que um criador de animais tenha uma população animal portadora de uma doença recessiva autossômica.
Suponha também que os animais afligidos pela doença não sobrevivem até a maturidade. Uma maneira possível para o criador controlar uma tal doença é sempre cruzar qualquer fêmea, independente do seu genótipo, com um macho normal. Desta maneira, todos os futuros descendentes terão os dois pais normais (um cruzamento AA-AA)ou um pai normal e uma mãe portadora (um cruzamamento AA-Aa). Note que não pode haver cruzamento com AA-aa pois animais do genótipo aa não chegam à maturidade. Neste tipo de programa de cruzamentos, não haverá descendentes futuros doentes, embora ainda haja portadores em geração futuras. Determinamos agora a fração de portadores nas gerações futuras. Escrevemos

$$X^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

onde
a_n=fração da população de genótipo AA na n-ésima geração
b_n=fração da população de genótipo Aa (portadores) na n-ésima geração

Como cada descendentes tem pelo menos um dos pais normais, podemos considerar este programa de cruzamentos controlados como um de cruzamento constante com o genótipo AA, como no Exemplo 1. Assim, a transição de distribuição de genótipo de uma geração para a seguinte é governada pela equação

$$X^{(n)} = MX^{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Conhecendo a distribuição inicial $x^{(0)}$, a distribuição de genótipo na n-ésima geração é, portanto, dada por

$$X^{(n)} = M^n X^{(0)}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

A diagonalização de M é feita com facilidade e leva a

$$\begin{aligned}
X^n &= P\,D^n\,P^{-1}\,X^{(0)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 + b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Como $a_0 + b_0 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n b_0 \qquad n = 1, 2, \ldots \\
b_n &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^n b_0
\end{aligned} \tag{7}$$

Assim, quando n tende ao infinito, resulta

$$\begin{aligned}
a_n &\to 1 \\
b_n &\to 0
\end{aligned}$$

de modo que, no limite, não haverá mais portadores na população.

Por (7) vemos que

$$b_n = \frac{1}{2} b_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

ou seja, a fração de portadores em cada geração é a metade da fração de portadores na geração precedente. Seria interessante também investigar a propagação de portadores com cruzamentos aleatórios, quando dois animais cruzam independentemente de genótipo. Ifelizmente , estes cruzamentos aleatórios levam a equações não-lineares e as técnicas desta seção não são aplicáveis. Com tudo, com outras técnicas podem ser mostrado que sob cruzamento aleatório a Equação (8) é susbstituída por

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{1 + \frac{1}{2} b_{n-1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Como um exemplo numérico, suponha que um criador começa com uma população na qual 10% dos animais são portadores. Com o programa de cruzamento controlado governado pela Equação (8), a percentagem de portadores pode ser reduzida a 5% em uma geração, mais com cruzamento aleatório, a Equação (9) prevê que 9,5% da população é portadora depois de uma geração (ou seja, $b_n = 0,095$ se $b_{n-1} = 0,10$). Além disto, sob cruzamento controlado, jamais haverá descendente doente, mas com cruzamento aleatório pode ser mostrado que 1 em cada 400 descententes vai nascer doente quando 10% da população é portadora.

Hereditariedade Ligada ao Sexo

Como mencionamos na introdução, na hereditariedade ligada ao sexo, o macho possui um gene

(A ou a) e a fêmea possui dois genes (AA, Aa ou aa). O termo ”ligada ao sexo”é usado por que estes genes são encontrados no cromossomo X, dos quais o macho tem um e a fêmea tem dois. A hereditariedade destes genes é como segue: Um descendente macho recebe um dos dois genes da sua mãe com igual probabilidade e um descendente fêmea recebe o único gene de seu pai além de um dos dois genes de sua mãe com igual probabilidade. Os leitores familiares com probabilidade básica podem verificar que este tipode hereditariedade leva aos genótipos da Tabela 2.

Tabela 2

	Genótipos dos Pais(Pai, Mãe)					
	(A, AA)	(A, Aa)	(A, aa)	(a, AA)	(a, Aa)	(a, aa)
A	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
a	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1
AA	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0
aa	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1

Vamos discutir um programa de procriação consanguínea relacionada com hereditariedade ligada ao sexo. Iniciando com um macho e uma fêmea, selecionamos dois de seus descendentes aleatóriamente, um de cada sexo, e os cruzamos; em seguida selecionamos dois dos descendentes resultantes e os cruzamos, e assim por diante. Tal procriação consanguínea é normalmente utilizada com animais. (Entre humanos, estes casamentos entre irmãos foram usados pelos mandatários do Egito antigo para manter pura a linhagem real.)

O par original de macho-fêmea pode ser de seis tipos, correspondentes às seis colunas da Tabela 2:

(A, AA), (A, Aa), (A,aa), (a, AA), (a, Aa), (a, aa)

Os pares de irmãos cruzados em gerações sucessivas têm certas probabilidades de ser um desses seis tipos. Para calcular estas probabilidades escrevemos, para $n = 1, 2, \ldots$

a_n*= probabilidade que o par de irmãos na n-ésima geração é tipo (A,AA)*

b_n*= probabilidade que o par de irmãos na n-ésima geração é tipo (A,Aa)*

c_n*= probabilidade que o par de irmãos na n-ésima geração é tipo (A,aa)*

d_n*= probabilidade que o par de irmãos na n-ésima geração é tipo (a,AA)*

e_n*= probabilidade que o par de irmãos na n-ésima geração é tipo (a,Aa)*

f_n*= probabilidade que o par de irmãos na n-ésima geração é tipo (a,aa)*

Com estas probabilidades formamos o vetor-coluna

$$X(n) = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \end{bmatrix}, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Pela Tabela 2 segue que

$$X^{(n)} = MX^{n-1}, \qquad n = 1, 2, ... \tag{10}$$

onde

$$M = \begin{array}{c} \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccccc} (A,AA) & (A,Aa) & (A,aa) & (a,AA) & (a,Aa) & (a,aa) \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (A,AA) \\ (A,Aa) \\ (A,aa) \\ (a,AA) \\ (a,Aa) \\ (a,aa) \end{array}$$

Por exemplo, suponha que o par de irmão na (n-1)-ésima geração é do tipo (A, Aa). Então o descendente macho será genótipo A ou a com igual probabilidade e a descendente fêmea será ou do genótipo AA ou Aa com igual probabilidade. como um dos descendentes machos e uma das descendentes fêmeas será escolhido ao acaso para cruzar, o próximo par de irmãos será de um dos tipos (A, AA), (A, Aa), (a, AA) ou (a, Aa) com probabilidade iguais. Assim a segunda coluna de M contém "$\frac{1}{4}$" em cada uma das quatro linhas correspondentes a estes quatro pares de irmãos.

Como o nosso exemplo anterior, segue de (10) que

$$X^{(n)} = M^n X^{(0)}, \qquad n = \{1, 2, ...\} \tag{11}$$

Podemos obter os autovalores e autovetores de M, que são

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_5 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}), \quad \lambda_6 = \frac{1}{4}(1-\sqrt{5})$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -3 \\ 3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$v_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) \\ \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) \end{bmatrix}, v_6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) \\ \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

A diagonalização de M então leva a

$$X^{(n)} = P\, D^n\, P^{-1} X^{(0)}, \qquad n = \{1, 2, \ldots\} \tag{12}$$

onde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

$$D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left[\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)\right]^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left[\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}\right)\right]^n \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & \frac{1}{20}\left(5+\sqrt{5}\right) & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{20}\left(5+\sqrt{5}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{20}\left(5-\sqrt{5}\right) & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{20}\left(5-\sqrt{5}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Iremos escrever o produto matricial de (12), por ser um pouco desajeitado. contudo, se for dado um vetor específico $X^{(0)}$, os cálculos para $X^{(n)}$ não são muito incômodos.

Como os valores absolutos das últimas quatro entradas na diagonal de D são menores do que 1, vemos que quando n tende ao infinito,

$$D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Segue da Equação (12) que

$$X^{(n)} \rightarrow P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} X^{(0)}$$

Efetuando a multilicação matricial do lado direito, obtemos

$$X^{(n)} \rightarrow \begin{bmatrix} a_0 + \frac{2}{3}b_0 + \frac{1}{3}c_0 + \frac{2}{3}d_0 + \frac{1}{3}e_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_0 + \frac{1}{3}b_0 + \frac{2}{3}c_0 + \frac{1}{3}d_0 + \frac{2}{3}e_0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Isto mostra que , no limite, todos os pares de irmãos serão ou do tipo (A, AA) ou do tipo (a, aa). Por exemplo, se os pais iniciais forem tipo (A, Aa)(ou seja, $b_0 = 1$ *e* $a_0 = c_0 = d_0 = e_0 = f_0 = 0$*) então, quando n tende ao infinito,*

$$X^{(n)} \rightarrow = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Assim, no limite há uma probabilidade de $\dfrac{2}{3}$ *que os pares de irmãos serão (A, AA) e uma probabilidade* $\dfrac{1}{3}$ *que serão (a, aa).*

REFERÊNCIAS

Álgebra Linear, José Luiz Boldrini, São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

Introdução À Álgebra Linear, Steinbruch, Alfredo; Winterle, Paulo São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1997.

Álgebra Linear/Barsotti, Leo.

Vetores e matrizes: uma introdução à álgebra linear/Nathan Moreira dos Santos;[colboradores]Doherty Andrade, Nelson Martins Garcia, São Paulo: Thomson Learming,2007.

Poole,David,1955 - Álgebra Linear/David Poole;tradutoras técnicas Matha Salerno Monteiro, São Paulo: Thomson Learming,2006.

Álgebra Linear com aplicações/Anton Howard e Chris Rorres, Porto Alegre: Bookman,2001.