

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COECI - COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA CIVIL  
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

KAMILA LEITE

**ANÁLISE DE LAJES MACIÇAS DE CONCRETO ARMADO  
UTILIZANDO ANALOGIA DE GRELHAS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO

2017

KAMILA LEITE

**ANÁLISE DE LAJES MACIÇAS DE CONCRETO ARMADO  
UTILIZANDO ANALOGIA DE GRELHAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel, do curso de Engenharia Civil, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Lucas Boabaid Ibrahim

TOLEDO

2017



Ministério da Educação  
**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
Câmpus Toledo  
Coordenação do Curso de Engenharia Civil



---

## TERMO DE APROVAÇÃO

Título do Trabalho de Conclusão de Curso de N° 97

**Análise de lajes maciças de concreto armado utilizando analogia de grelhas.**

por

**Kamila Leite**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 13:00 h do dia **10 de Novembro de 2017** como requisito parcial para a obtenção do título **Bacharel em Engenharia Civil**. Após deliberação da Banca Examinadora, composta pelos professores abaixo assinados, o trabalho foi considerado **APROVADO**.

---

Prof Dr. Rodnny J. M. Fakhye  
(UTFPR – TD)

---

Profª Renathielly Fernanda Da Silva  
(UTFPR – TD)

---

Prof Dr. Lucas Boabaid Ibrahim  
(UTFPR – TD)  
Orientador

---

Visto da Coordenação  
Prof. Fulvio Natercio Feiber  
Coordenador da COECI

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.

## **AGRADECIMENTO**

Ninguém constrói nada sozinho, e este trabalho não seria possível sem o esforço conjunto, sem o apoio físico e emocional que recebi.

Primeiramente, agradeço a Deus, pela vida, saúde e inteligência para superar todas as dificuldades.

Agradeço a minha família, principalmente meus pais e minha irmã, pelo suporte fundamental, pelo apoio, consolo, e amor recebidos.

Também agradeço aos meus amigos, os de infância, e os que conheci durante o período da faculdade, por confiarem em mim e estarem ao meu lado em todos os momentos.

Ao meu professor orientador, pela paciência, dedicação e ensinamentos que possibilitaram a realização deste trabalho.

E também a todos que, direta, ou indiretamente, fizeram parte da minha formação, a minha eterna gratidão.

## RESUMO

LEITE, Kamila. Análise de lajes maciças de concreto armado utilizando analogia de grelhas. 2017. 86 f. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Toledo, 2017.

O presente trabalho apresenta a análise do momento fletor e deslocamento vertical de uma laje retangular, diferindo em três tipos a vinculação de suas bordas e, de uma laje em L, engastada em todos os seus lados. O objetivo desse estudo é verificar, utilizando tabelas e o método da analogia de grelhas, qual a influência das condições de apoio e do refinamento da malha da grelha equivalente utilizada, nos momentos fletores e na flecha, de lajes maciças de concreto armado. A análise por meio de tabelas foi realizada utilizando os autores Marcus e Bares, para a determinação do momento fletor e do deslocamento vertical, respectivamente. Já o dimensionamento via analogia de grelhas foi realizado com o auxílio do *software* livre VGPlan, distribuído gratuitamente pela Universidade de São Paulo, para ser utilizado em âmbito acadêmico. Os resultados de momento fletor e flecha, obtidos para três configurações de laje, foram comparados com procedimentos usuais de diferença percentual, em que para o momento fletor pôde-se perceber que houve maior variação entre os métodos da tabela e analogia de grelhas, na laje pertencente ao caso em que duas das bordas da laje são engastadas e as outras duas simplesmente apoiadas, para o momento negativo na direção x, possuindo 18,6% de diferença, enquanto a menor discrepância se deu para o caso em que todas as bordas da laje são engastadas, com 0,14% de diferença no momento negativo na direção y. Já, quanto a análise do deslocamento vertical ou flecha, a laje do caso em que duas bordas são engastadas e as outras duas apoiadas, também apresentou a maior diferença entre os valores obtidos pelos dois métodos, sendo igual a 17,4%, enquanto, para o caso da laje com quatro bordas engastadas, houve uma diferença de 0,04% entre as duas metodologias empregadas. Para realizar um exemplo de laje não retangular, uma laje em L foi analisada, utilizando a analogia de grelhas - uma vez que, as tabelas são restritas ao uso para lajes retangulares - a partir dos resultados obtidos percebeu-se que os valores de momento fletor e flecha, convergiram após 11 etapas de refinamento da grelha equivalente, com um espaçamento igual a 14 cm. Após a análise dos resultados, pode-se concluir que o processo de analogia de grelhas é dinâmico e permite analisar uma laje em diferentes situações geométricas. Este método foge do cálculo clássico do uso das tabelas, considerando a interação entre os elementos. Dessa maneira, a contribuição de cada elemento que compõe a laje fica corretamente caracterizada e, os esforços determinados tendem a ser mais precisos e mais próximos dos valores reais.

**Palavras-chave:** Teoria de grelhas. Tabelas de dimensionamento de lajes. *Software* VGPlan.

## ABSTRACT

LEITE, Kamila. Analysis of solid reinforced concrete slabs using grillage analogy. 2017. 86 f. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Toledo, 2017.

The present work presents the analysis of the bending moment and vertical displacement of a rectangular slab, differing in three types the bonding of its edges and, of a slab in L, set in all its sides. The purpose of this study is to verify, using tables and the grid analogy method, the influence of the conditions of support and refinement of the mesh of the equivalent grid used in the bending moments and the arrow of solid reinforced concrete slabs. The analysis by means of tables was performed using the authors Marcus and Bars, for the determination of the bending moment and the vertical displacement, respectively. On the other hand, the sizing by analogy of grids was done with the help of free software VGPlan, distributed free of charge by the University of São Paulo, to be used in an academic context. The results of bending and closing moment obtained for three slab configurations were compared with usual procedures of percentage difference, in which for the bending moment it was possible to perceive that there was greater variation between the table methods and grid analogy in the slab belonging to the case where two of the edges of the slab are set and the other two simply supported, for the negative moment in the x direction, having a difference of 18.6%, while the smallest discrepancy occurred in the case where all the edges of the slab are set, with 0.14% difference in the negative moment in the y direction. As for the vertical displacement or arrow analysis, the slab of the case where two edges are set and the other two supported, also presented the greatest difference between the values obtained by the two methods, being equal to 17.4%, while, for the case of the slab with four crimped edges, there was a difference of 0.04% between the two methodologies used. To perform an example of a non-rectangular slab, an L-slab was analyzed using the grid analogy - since the tables are restricted to use for rectangular slabs - from the results obtained it was realized that the values of bending moment and arrow, converged after 11 steps of refinement of the equivalent grid, with a spacing equal to 14 cm. After analyzing the results, it can be concluded that the grid analogy process is dynamic and allows to analyze a slab in different geometric situations. This method escapes the classical calculation of the use of tables, considering the interaction between the elements. In this way, the contribution of each element that composes the slab is correctly characterized, and the determined efforts tend to be more accurate and closer to the real values.

**Keywords:** Grid theory. Slab sizing tables. *Software* VGPlan.

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Curva de convergência dos momentos atuantes no caso 3, para as 13 etapas de refinamento.....	57
Gráfico 2: Curva de convergência dos momentos atuantes no caso 5A, para as 9 etapas de refinamento.....	60
Gráfico 3: Curva de convergência dos momentos atuantes no caso 5A, para as 6 etapas de refinamento.....	62
Gráfico 4: Curva de convergência da flecha para os três casos de vinculação. ....	67
Gráfico 5: Curva de convergência dos momentos fletores para a laje em L. ....	71
Gráfico 6: Curva de convergência da flecha da laje em L. ....	72

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Dados da laje que independem do caso analisado .....	55
Tabela 2: Resultados obtidos pelo software VGPlan, para o caso 3 .....	57
Tabela 3: Valores do momento fletor médio para o caso 3. ....	58
Tabela 4: Resultados obtidos pelo software VGPlan, para o caso 5A .....	59
Tabela 5: Valor do momento fletor médio para o caso 5A. ....	60
Tabela 6: Resultados obtidos pelo software VGPlan, para o caso 6. ....	61
Tabela 7: Valores do momento fletor médio para o caso 6. ....	62
Tabela 8: Resultados encontrados pelo <i>software</i> VGPlan para flecha, caso 3. ....	65
Tabela 9: Resultados encontrados pelo <i>software</i> VGPlan para flecha, caso 5A. ....	66
Tabela 10: Resultados encontrados pelo <i>software</i> VGPlan para flecha, caso 6. ....	66
Tabela 11: Comparação percentual entre os resultados obtidos pelas tabelas de Marcus e analogia de grelhas, para o caso 3. ....	68
Tabela 12: Comparação percentual entre os resultados obtidos pelas tabelas de Marcus e analogia de grelhas, para o caso 5A. ....	68
Tabela 13: Comparação percentual entre os resultados obtidos pelas tabelas de Marcus e analogia de grelhas, para o caso 6. ....	68
Tabela 14: Comparação percentual entre os resultados obtidos pelas tabelas de Bares e analogia de grelhas. ....	69
Tabela 15: Dados iniciais aplicados à laje não retangular. ....	69
Tabela 16: Resultados obtidos pelo software VGPlan, para a laje em L. ....	71



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representação da transmissão de esforços de uma edificação.....	18
Figura 2: Representação de uma laje lisa e laje cogumelo .....	19
Figura 3: Representação de uma laje treliçada .....	21
Figura 4: Representação de uma laje maciça de concreto armado.....	22
Figura 5: Carregamento, curvatura e flexão de uma laje armada em duas direções.....	23
Figura 6: Momento fletor atuante em uma laje armada em uma direção.....	24
Figura 7: Momento fletor em laje armada em duas direções .....	24
Figura 8: Deslocamento vertical hipotético em uma placa .....	25
Figura 9: Flecha em (a) laje armada em duas direções (b) laje armada em uma direção .....	25
Figura 10: Graus de liberdade do elemento de grelha .....	29
Figura 11: Representação de (a) Laje maciça e de (b) uma grelha equivalente .....	30
Figura 12: Modelos de distribuição de cargas em uma grelha .....	31
Figura 13: Esquema de rotação dos sistemas de eixos.....	32
Figura 14: Representação esquemática da laje em estudo .....	36
Figura 15: Tipos de vinculação em uma laje.....	37
Figura 16: Casos de vinculação de lajes .....	38
Figura 17: Tabela que apresenta a classe de agressividade ambiental.....	39
Figura 18: Tabela que apresenta a classe do concreto diante da classe de agressividade ..	39
Figura 19: Parâmetros retirados da tabela de Marcus para caso 3 .....	43
Figura 20: Parâmetros retirados da tabela de Marcus para caso 5A.....	43
Figura 21: Parâmetros retirados da tabela de Marcus para caso 6 .....	44
Figura 22: Interface de abertura do <i>software</i> VGPlan .....	45
Figura 23: Definição dos parâmetros do material utilizado.....	46
Figura 24: Definição dos parâmetros da seção transversal .....	47
Figura 25: Janela de resultados concedida pelo VGPlan .....	48
Figura 26: Valor do módulo de elasticidade conforme a classe de resistência do concreto..	49
Figura 27: Tabela de Bares, indicação dos parâmetros $\alpha$ .....	49
Figura 28: Laje irregular a ser analisada .....	51
Figura 29: Modelo da laje em estudo, caso 3, primeira análise.....	56
Figura 31: Modelo da laje em estudo, caso 5A, primeira análise .....	59
Figura 33: Modelo da laje em estudo, caso 6, primeira análise.....	61
Figura 35: Modelo da laje em L, primeira análise. ....	70

## LISTA DE SÍMBOLOS

Alaj	Carga lajota cerâmica
Av	Ações variáveis
b	Largura unitária da laje
Cn	Carga da camada niveladora
E, Ec	Módulo de elasticidade
fck	Resistência característica do concreto à compressão
G	Módulo de elasticidade transversal
I	Momento de inércia
It	Momento de inércia de torção
J	Momento de inércia à torção na barra da grelha
kx	Coefficiente de cálculo da carga no apoio, na direção x
L	Comprimento da barra de grelha
Lx	Menor vão da laje
Ly	Maior vão da laje
mx	Coefficiente de cálculo do momento fletor positivo atuante na direção paralela a Lx
Mx	Momento fletor positivo na direção x
my	Coefficiente de cálculo do momento fletor positivo atuante na direção paralela a Ly
My	Momento fletor positivo na direção y
nx	Coefficiente de cálculo do momento fletor negativo atuante na direção paralelas a Lx
ny	Coefficiente de cálculo do momento fletor negativo atuante na direção paralelas a Ly
Pp	Peso próprio da laje
Pr	Carga de revestimento
q	Carga uniforme atuante
qcent	Carga nas barras centrais, para analogia de grelhas
qcont	Carga nas barras de contorno, para analogia de grelhas
qx	Carga no apoio, na direção x
qy	Carga no apoio, na direção y
Xx	Momento fletor negativo na direção x
Xy	Momento fletor negativo na direção x
$\lambda$	Razão entre o maior e menor vão da laje
$\alpha$	Coefficiente de cálculo para flecha
$\alpha_i$	Flecha da laje

# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
1.1 JUSTIFICATIVA .....	13
1.2 OBJETIVO GERAL .....	15
1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	16
1.4 DELIMITAÇÃO DA PESQUISA .....	16
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>17</b>
2.1 LAJES DE CONCRETO ARMADO .....	17
2.1.1 Tipos de lajes .....	19
2.1.1.1 Lajes cogumelo ou lisas .....	19
2.1.1.2 Lajes nervuradas .....	20
2.1.1.3 Lajes pré – moldadas (treliçadas) .....	20
2.1.2 Lajes maciças de concreto armado .....	21
2.2 MOMENTO FLETOR.....	23
2.3 DESLOCAMENTO VERTICAL OU FLECHA .....	25
2.4 TABELAS DE DIMENSIONAMENTO.....	26
2.4.1 Tabelas de Marcus.....	26
2.4.2 Tabela de Bares .....	28
2.5 TEORIA DE GRELHAS.....	29
2.6 ANALOGIA DE GRELHAS .....	29
2.7 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE GRELHA.....	31
<b>3 MATERIAIS E MÉTODOS .....</b>	<b>36</b>
3.1 DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS DA LAJE MACIÇA.....	36
3.1.1 Dimensões .....	36
3.1.2 Vinculação.....	37
3.1.3 Parâmetros da laje .....	38

3.1.4 Carregamentos atuantes .....	40
3.1.4.1 Composição dos carregamentos da laje .....	40
3.1.4.1.1 Ações permanentes.....	40
3.1.4.1.2 Ações variáveis .....	41
3.1.4.1.3 Carregamento total.....	42
3.2 DETERMINAÇÃO DO MOMENTO FLETOR .....	42
3.2.1 Tabelas de Marcus .....	42
3.2.1.1 Caso 3 .....	42
3.2.1.2 Caso 5A.....	43
3.2.1.3 Caso 6 .....	44
3.2.2 Analogia de grelhas.....	44
3.3 DETERMINAÇÃO DO DESLOCAMENTO VERTICAL (FLECHA) .....	48
3.3.1 Tabela de Bares .....	48
3.3.2 Analogia de grelhas.....	50
3.4 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA .....	50
3.5 ANÁLISE DE LAJES NÃO RETANGULARES .....	51
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>53</b>
4.1 CÁLCULO DO MOMENTO FLETOR .....	53
4.1.1 Tabelas de Marcus .....	53
4.1.1.1 Caso 3 .....	53
4.1.1.2 Caso 5A.....	54
4.1.1.3 Caso 6 .....	54
4.1.2 <i>Software</i> VGPlan.....	55
4.1.2.1 Caso 3 .....	56
4.1.2.2 Caso 5A.....	58
4.1.2.3 Caso 6 .....	60

4.2 CÁLCULO DO DESLOCAMENTO VERTICAL (FLECHA) .....	63
4.2.1 Tabela de Bares .....	63
4.2.1.1 Caso 3 .....	63
4.2.1.2 Caso 5A .....	64
4.2.1.3 Caso 6 .....	64
4.2.2 <i>Software</i> VGPlan .....	65
4.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS .....	67
4.3.1 Momento fletor .....	67
4.3.2 Deslocamento vertical .....	69
4.4 CÁLCULO DE LAJE NÃO RETANGULAR .....	69
<b>5 CONCLUSÃO .....</b>	<b>73</b>
<b>6 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>75</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>76</b>
<b>ANEXO A - TABELAS DE MARCUS .....</b>	<b>80</b>
<b>ANEXO B - TABELA DE BARES .....</b>	<b>86</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Durante a definição do projeto de uma edificação é necessário atentar-se aos requisitos básicos que a mesma deve atender, quanto aos critérios de segurança, capacidade de suporte das ações impostas sobre ela, desempenho, deformações excessivas e durabilidade, evitando a necessidade de reparos.

Para que esses parâmetros sejam atingidos faz-se uso de diversos conhecimentos adquiridos ao longo da graduação, a partir de pesquisas e normas técnicas, assim como, a utilização de tabelas e *softwares* para auxiliar na obtenção dos valores necessários, agilizando o processo de cálculo.

Uma edificação é composta por diversos elementos estruturais, dentre eles, as lajes – estrutura plana e horizontal, constituída basicamente de concreto armado, podendo ser utilizadas como cobertura ou piso.

Segundo Pinheiro, Muzardo e Santos (2010) em uma edificação construída com sistema de lajes maciças, cerca de 50% de todo o concreto utilizado é consumido pelas lajes, desse modo, a análise do melhor tipo de laje a ser utilizado em cada caso é de suma importância, para se obter o melhor custo – benefício.

Para que seja feita a escolha consciente do tipo de laje a ser utilizado em uma edificação deve-se analisar fatores como: a resistência necessária, a viabilidade econômica e a disponibilidade local para uso de outro tipo de sistema. Essa escolha cabe ao projetista, o que é, em geral, feita em função de sua experiência profissional e dos critérios técnicos a serem atingidos, de forma que satisfaça, também, os critérios arquitetônicos, de economia e de conforto.

Definido o tipo de laje parte-se para o dimensionamento da mesma, seguindo normas, como a NBR 6118 (ABNT, 2014) e tabelas de autores consagrados. Existem diversas maneiras de se obter os esforços que atuam sobre uma edificação, entre eles os métodos dos elementos finitos, análise matricial e uso de tabelas.

Dentre os métodos de análise matricial de estruturas tem-se a analogia de grelhas, que consiste em simular uma placa de laje a partir de elementos de barras, formando uma grelha. Ao refinar a grelha, aumentando o número de barras em que a mesma foi dividida, os valores de esforços obtidos tendem a ser mais precisos quanto ao resultado final, uma vez que, se obtém uma solução mais próxima do comportamento da laje.

O uso da analogia de grelhas garante vantagens como uma formulação mais simples e maior facilidade de utilizar os resultados dos esforços nas barras, que podem ser discretizadas na direção das barras da armadura.

O uso de tabelas também foi bastante difundido em meio acadêmico e prático, quando não haviam programas computacionais de cálculo de estruturas e, ainda hoje são amplamente usadas pela sua praticidade e pela simplificação de cálculos. Para a determinação dos deslocamentos verticais de uma laje pode fazer-se uso de diversas tabelas, como a de Bares, por exemplo, cujos parâmetros são obtidos por diferenças finitas. Outra tabela, bastante utilizada para a determinação dos esforços de uma laje, é a tabela de Marcus, que apresenta os parâmetros que permitem o cálculo dos momentos fletores positivos e negativos atuantes, dependendo da vinculação das bordas da laje.

Ao se obter os valores de esforços solicitantes em uma laje utilizando as tabelas e a analogia de grelhas, pode-se realizar um estudo comparativo entre os resultados obtidos, que para o caso da analogia de grelha, depende do número de barras, em que se pode dividir a laje, e as tabelas apresentam um valor constante para os mesmos.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

As lajes maciças apresentam muitos benefícios, como a facilidade em vencer vãos, simplificação do canteiro de obras, acabamento liso e menor vulnerabilidade a fissuras e trincas (HOMETEKA, 2014).

Um dos tipos de laje mais utilizados no Brasil é a laje maciça, seu uso permite o aproveitamento da mão de obra disponível no canteiro, pois não necessita de profissionais especializados e nem de peças, acessórios ou equipamentos diferenciados, que precisam ser comprados ou alugados.

O dimensionamento de uma laje pode ser realizado de diversas maneiras e práticas difundidas por diversos estudiosos, profissionais e normas técnicas. Ele pode ser feito desde cálculos manuais com uso de tabelas até com o auxílio de sofisticados programas computacionais.

Os programas realizam o dimensionamento estrutural de forma independente, mas para dimensionar lajes, usam principalmente em sua linguagem, métodos dos elementos finitos, análise linear e análises matriciais.

A análise matricial se tornou uma importante ferramenta, utilizada amplamente por diversos *softwares* de dimensionamento de estruturas de concreto armado no Brasil, como o EBERICK®, por exemplo. Esses programas fazem uso das matrizes, para a obtenção dos momentos fletores e dos deslocamentos das lajes, principalmente, por possuir uma formulação mais simples. Desse modo, se faz necessário um maior conhecimento deste método de cálculo, de suas considerações e implicações.

Assim, ao simular uma laje pela analogia de grelhas, testando-se diferentes espaçamentos entre barras, buscando a constância de seus valores de momento fletor e da flecha, esses resultados, podem ser comparados aos obtidos pelas tabelas. Portanto, o presente trabalho pode-se tornar uma ferramenta de auxílio educacional para a disciplina de Concreto Armado, uma vez que, as tabelas só podem ser utilizadas para lajes retangulares. Sendo assim, a metodologia apresentada possibilitará ao discente encontrar os esforços solicitantes de uma laje de formato não retangular, como a laje em L, por exemplo, a partir do uso da analogia de grelhas, e do uso do *software* VGPlan.

## 1.2 OBJETIVO GERAL

Comparar os valores de momentos fletores e flechas de uma laje de concreto armado, obtidos a partir dos métodos de analogia de grelha e, pela utilização de tabelas, analisando três diferentes vinculações nas bordas da laje.



### 1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Obter o valor das solicitações nos elementos de laje, para os casos de vinculação 3, 5A e 6, a partir, do uso da analogia de grelhas e das tabelas de Bares e de Marcus;
- Avaliar a influência do espaçamento das barras de grelha nos resultados;
- Estudar a influência da vinculação dos lados da laje nos resultados obtidos;
- Realizar uma comparação entre os resultados obtidos pelo modelo de Analogia de Grelha e pelo Método das Tabelas;
- Realizar um exercício para determinar os esforços atuantes sobre uma laje não retangular, utilizando o *software* livre VGPlan.

### 1.4 DELIMITAÇÃO DA PESQUISA

O presente trabalho consiste em realizar a análise de convergência dos momentos fletores e flechas para lajes maciças em concreto armado.

É importante salientar que o intuito do trabalho não é o dimensionamento da laje e a verificação de atendimento ou não das especificações normativas, mas sim, determinar os valores de momentos fletores e deslocamento vertical, usando as tabelas de Bares e Marcus e, a analogia de grelhas, para posteriormente compará-los.

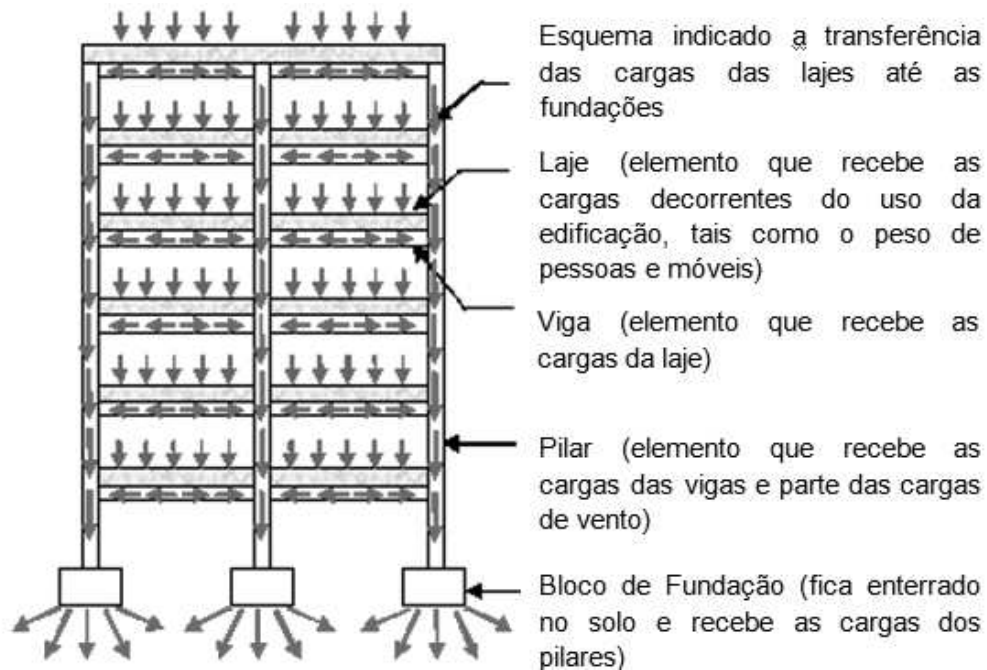
## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 LAJES DE CONCRETO ARMADO

Segundo Santos (2014, p. 29) “lajes são elementos planos, em geral horizontais, possuindo a largura e comprimento muito maiores que a sua espessura, sujeitas na maior parte por ações normais ao plano em que se encontram”. Santos ainda afirma que as lajes são as responsáveis em receber todos os esforços que atuam sobre o pavimento e assim, transmitir estes esforços às vigas, sobre as quais estão apoiadas.

Bastos (2015) ressalta que os carregamentos mais comuns que atuam perpendicularmente às lajes são os provenientes de cargas distribuídas na área, como por exemplo, o peso próprio e o revestimento de pisos, também as distribuídas linearmente, como as paredes ou, a partir de forças concentradas, como um pilar apoiado sobre a laje.

Carvalho (2014, p. 05) complementa que “as ações são aplicadas diretamente às lajes, que transmitem às vigas, que por sua vez as transmitem aos pilares e estes, finalmente, às fundações”, que transferem às cargas para o solo, local em que são dissipadas. A figura 1 apresenta de forma esquemática, como ocorre a transmissão dos esforços em uma edificação.



**Figura 1: Representação da transmissão de esforços de uma edificação**

Fonte: Almeida; Santos (2017).

Para Campos Filho (2014) as lajes se diferenciam pela sua forma, vinculação e relação entre os seus lados, geralmente, nas estruturas correntes, as lajes são retangulares, mas podem também, ter forma trapezoidal ou em L.

A escolha do sistema estrutural e do processo construtivo que comporá a estrutura de determinada edificação, depende de alguns parâmetros básicos, que, de acordo com Carvalho (2014), são: finalidade da edificação, projeto arquitetônico, cargas de utilização, tamanho dos vãos a vencer, disponibilidade de equipamentos, mão de obra e materiais, custos e interação com os demais subsistemas construtivos.

Nappi (1993) ressalta a importância de se conhecer cada tipo de laje, pois cada uma delas possui limitações e potencialidades diferentes, bem como vantagens e desvantagens, para cada tipo de edificação. A escolha correta para cada projeto é de suma importância para melhor atender as exigências do usuário.

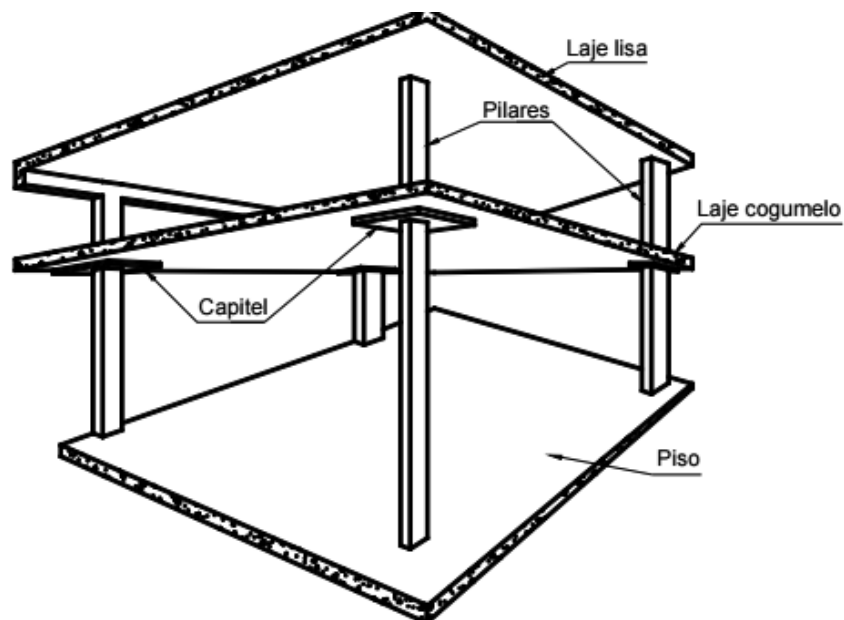
## 2.1.1 Tipos de lajes

### 2.1.1.1 Lajes cogumelo ou lisas

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014, p. 86), “lajes cogumelo são lajes apoiadas diretamente em pilares com capitéis, enquanto lajes lisas são as apoiadas nos pilares sem capitéis”. As lajes lisas apresentam as mesmas características das lajes cogumelo, com a diferença de não apresentarem o capitel, sendo as cargas atuantes sobre elas, transmitidas diretamente aos pilares. Contudo, segundo Carneiro (2006) a possibilidade de ruptura por punção, nesse tipo de laje, deve ser cuidadosamente analisada.

Conforme Bastos (2015) as lajes cogumelo são usuais para edifícios de até 20 pavimentos, possui menor custo e maior rapidez na execução, no entanto, apresenta como desvantagem maiores valores de deslocamento (flecha).

Uma representação destes tipos de laje é apresentada na figura 2.



**Figura 2: Representação de uma laje lisa e laje cogumelo**  
Fonte: Bastos (2015).

### 2.1.1.2 Lajes nervuradas

A NBR 6118 (ABNT, 2014, p. 67), define laje nervurada como “lajes moldadas no local ou com nervuras pré-moldadas, cuja zona de tração para momentos positivos esteja localizada nas nervuras entre as quais pode ser colocado material inerte”.

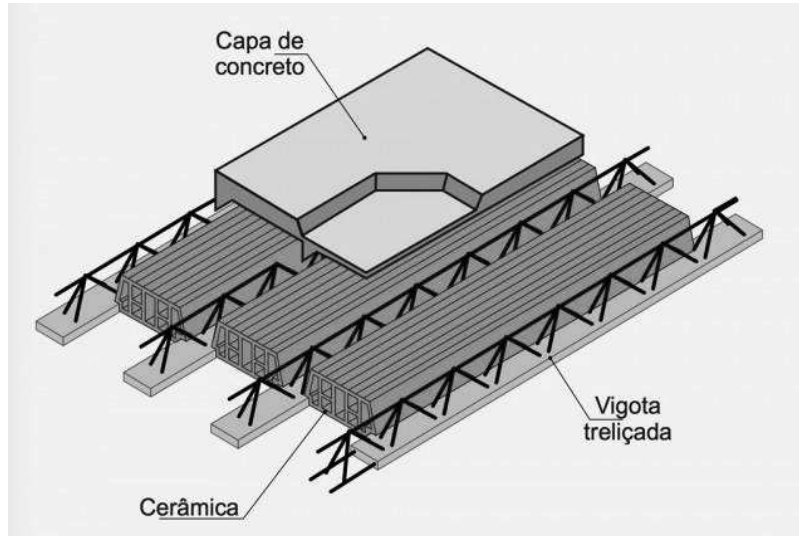
Para Carneiro (2006) entre as nervuras podem ser colocados materiais inertes como o poliestireno expandido (EPS) ou tijolos, resultando em um melhor acabamento à superfície inferior da laje. Ainda segundo este autor, esse tipo de laje é utilizado para locais em que há a necessidade de grandes vãos e elevadas espessuras de laje, para atender as solicitações de deslocamento, o que inviabiliza o uso de uma laje maciça, já que o volume de concreto empregado seria grande e aumentaria o peso próprio do elemento.

### 2.1.1.3 Lajes pré-moldadas (treliçadas)

Na laje treliçada a armadura das nervuras tem a forma de uma treliça espacial. Segundo Bastos (2015, p. 77), “o banzo inferior é constituído por duas barras e o banzo superior por uma barra. Os banzos inferior e superior são unidos por barras diagonais inclinadas (em sinusóide), soldadas por eletrofusão”.

Esse tipo de laje possibilita vencer grandes vãos, com menor peso próprio, e redução de mão de obra durante sua execução. Ainda conforme Bastos (2015), as vigotas ou trilhos são constituídos pela armação treliçada com as barras do banzo inferior envolvidas por concreto, em forma de uma placa fina. As vigotas, em conjunto com a capa de concreto, fornecem a resistência necessária à laje.

A figura 3 ilustra uma laje treliçada, que é composta por vigotas de concreto armado, material de enchimento, como a cerâmica ou poliestireno expandido (EPS), e uma cobertura de concreto moldada no local.

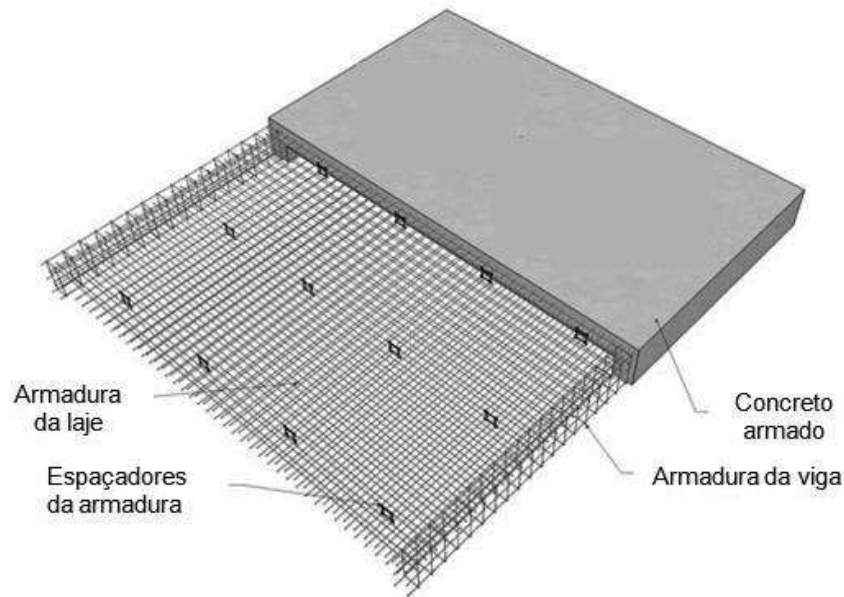


**Figura 3: Representação de uma laje treliçada**  
Fonte: Lajes Jundiaí (2017).

### 2.1.2 Lajes maciças de concreto armado

Dentre os vários modelos de lajes, existem as lajes maciças, que possuem toda a sua espessura preenchida por concreto, e contém em seu interior armaduras longitudinais que resistem aos esforços de flexão, e, eventualmente, armaduras transversais. Segundo Santos (2014) lajes maciças são aquelas em que os esforços são transmitidos da laje para todas as vigas que as circundam, e ainda, quando a relação entre o maior e o menor vão é igual ou menor que dois.

Uma representação da composição de uma laje maciça é apresentada na figura 4.



**Figura 4: Representação de uma laje maciça de concreto armado**

**Fonte: Adaptado de Vasconcellos (2012).**

Conforme Carvalho (2014) as lajes maciças são empregadas para pavimentos em que as cargas a serem suportadas pelas mesmas são relativamente baixas, resultando em uma espessura pequena para a laje.

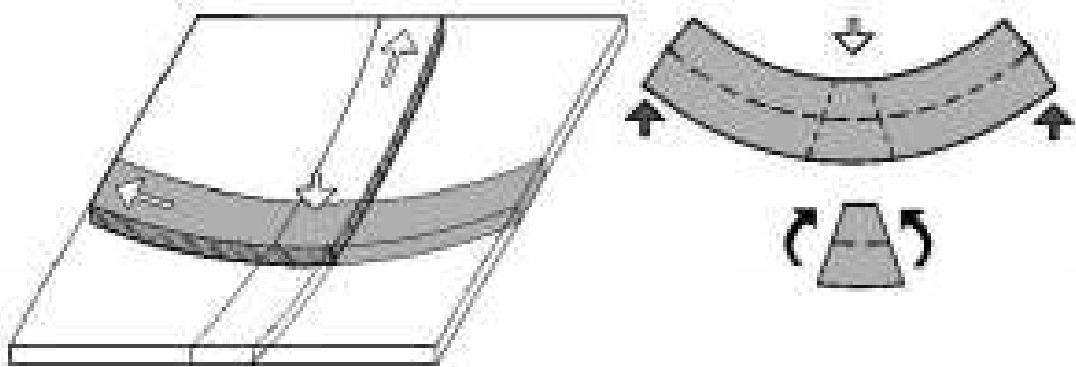
De acordo com Bastos (2015) as lajes maciças de concreto, tem espessuras que variam entre 7 cm e 15 cm, e são, usualmente, usadas em edifícios de pavimentos e em construções de grande porte, como escolas, indústrias, hospitais, e pontes. Este autor complementa ainda, que as lajes maciças, em geral, não são usadas para residências e edificações de pequeno porte, pois outros tipos de laje, como a nervurada pré-fabricada seria mais vantajosa nos aspectos de custo e facilidade de execução.

Nappi (1993) relaciona algumas vantagens apresentadas pelas lajes maciças, dentre elas, a facilidade no lançamento e adensamento do concreto; a possibilidade do emprego de telas soldadas, que reduz o tempo de colocação; a segurança na execução da concretagem; maior rigidez ao conjunto da estrutura; a não necessidade de área para depósito de material inerte e, a possibilidade de descontinuidade em sua superfície. O autor também cita algumas desvantagens desse modelo de laje, como, o alto consumo de madeira para fôrmas e escoramento e, o aumento do tempo de execução das fôrmas, o que pode resultar em um elevado custo.

## 2.2 MOMENTO FLETOR

Segundo Hibbeler (2010, p. 05) o momento fletor é “causado pelas cargas externas que tendem a fletir o corpo em torno de um eixo que se encontra no plano da área”, dessa forma, produzindo esforços que tendem a curvar o eixo longitudinal, provocando tensões normais de tração e de compressão na estrutura.

Conforme Melges (2012), o momento fletor ocorre em uma placa, de modo como apresentado na figura 5.



**Figura 5: Carregamento, curvatura e flexão de uma laje armada em duas direções**  
**Fonte: Melges (2012).**

O momento fletor atua diferentemente em lajes, ou placas, dependendo de sua armação. Nas lajes armadas em uma direção, os momentos fletores solicitam apenas uma direção, podem-se citar, como exemplo, as lajes em balanço (sacadas), lajes com dois lados opostos apoiados, sendo os outros dois livres (rampas e escadas). Nesses casos, a medida do maior lado ( $L$ ) supera o dobro do lado menor ( $l$ ), como indicado na figura 6. O momento na direção do menor vão é muito superior ao da outra direção, dessa forma, a laje é considerada como armada em apenas uma direção. Na direção secundária, apenas uma armação de distribuição é colocada (CARNEIRO, 2006).



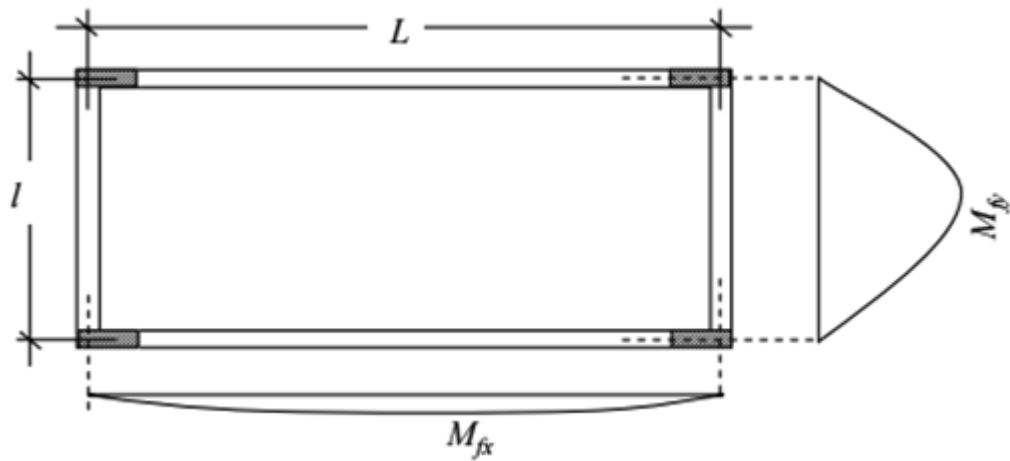


Figura 6: Momento fletor atuante em uma laje armada em uma direção  
Fonte: Carneiro (2006).

Já, nas lajes armadas em suas duas direções, o momento fletor atua em ambos os sentidos, é exemplo deste tipo de laje as retangulares, apoiadas em seus quatro lados. A flexão da laje ocorre, como ilustra a figura 7.

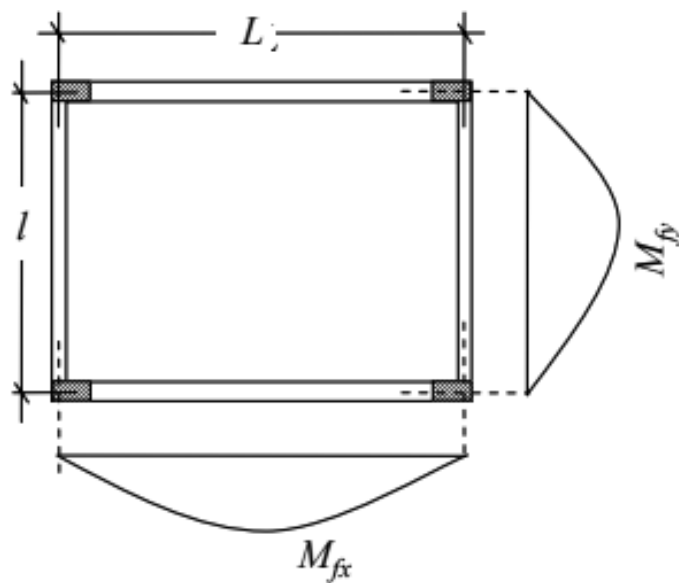
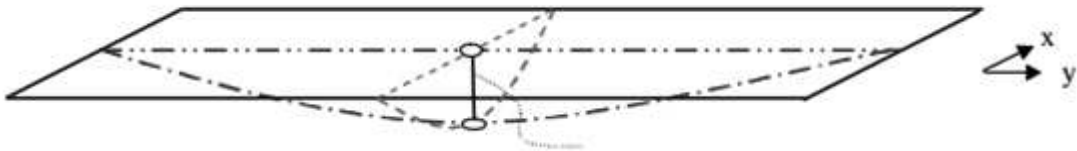


Figura 7: Momento fletor em laje armada em duas direções  
Fonte: Carneiro (2006).

## 2.3 DESLOCAMENTO VERTICAL OU FLECHA

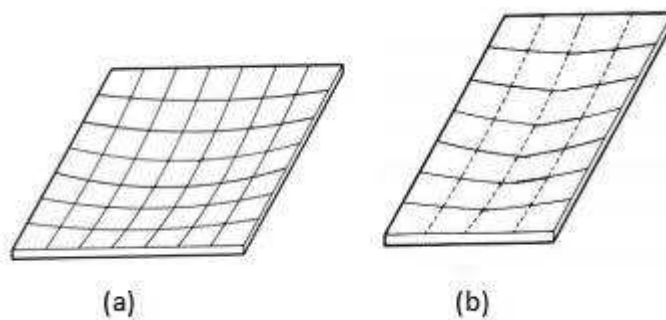
Segundo Morilla (2007, p. 01), “seja uma barra reta, em equilíbrio, apoiada em suas extremidades, submetida a uma flexão normal. Esta barra fletida, deixa de ser reta assumindo uma forma”, rebaixando- a perpendicularmente, em relação ao seu eixo. Para o caso de uma laje ou placa, submetida a carregamentos perpendiculares, à mesma tende a sofrer um deslocamento vertical, como mostra a figura 8.



**Figura 8: Deslocamento vertical hipotético em uma placa**  
 Fonte: Melges (2012).

Morilla (2007) complementa que as flechas também podem ser positivas ou negativas. São positivas, quando os deslocamentos acontecem acima do eixo da barra, do contrário, serão negativas.

Os deslocamentos verticais dependem da condição de armação da laje, se armada em apenas uma direção, ou nas duas (MELGES, 2012), conforme mostra as figuras 9.



**Figura 9: Flecha em (a) laje armada em duas direções (b) laje armada em uma direção**  
 Fonte: Adaptado de Melges (2012).

As flechas, geralmente, são determinadas a partir de tabelas empíricas, de diversos autores de renome, ou utilizando *softwares*, que calculam esse

deslocamento vertical a partir das características da seção transversal da laje e carregamentos atuantes.

## 2.4 TABELAS DE DIMENSIONAMENTO

A determinação dos momentos fletores em uma laje, pela teoria da elasticidade, é bastante trabalhosa.

Entretanto, segundo Camacho (2004), são inúmeras as tabelas com as quais, o cálculo torna-se mais simples, fornecendo em poucos passos os valores de momentos, reações de apoios e flechas, pode-se citar como exemplo, as tabelas de Bares, Czerny, Marcus, Pinheiro, dentre outras.

Essas tabelas simplificam e minimizam os cálculos, facilitando o dimensionamento dos esforços das lajes a serem estudados. As tabelas são um método bastante útil quando não há acesso à utilização de *softwares*, e foram bastante utilizadas, quando estes nem existiam.

### 2.4.1 Tabelas de Marcus

As tabelas de Marcus são aplicáveis somente às lajes armadas em duas direções. Brito ([20--?]) afirma que as lajes armadas em cruz, ou armadas nas suas duas direções, possuem a maior dimensão, inferior ao dobro da outra dimensão, pode-se dizer que a laje em estudo é armada nas duas direções e, por isso, vale o uso dessas.

Brito ([20--?], p. 04) ainda complementa que, o uso destas tabelas é o mesmo que “fazer a divisão de laje por uma grelha de vigas e depois aplicar adequados coeficientes que levam em conta exatamente esse aspecto nas lajes, de solidariedade conjunta integrada total de toda a malha de vigas”, contudo, tendo a consciência do “efeito de resistência do fato da laje ser inteiriça e contínua e, portanto mais resistente do que a grelha de vigas independentes imaginadas”.

As tabelas são bastante úteis, pois apresentam parâmetros de entradas nas equações dos momentos fletores positivos e negativos, conforme o caso analisado, obtendo-se facilmente seus valores.

Para utilizarem-se as tabelas de Marcus devem-se seguir os seguintes passos:

1º - Identificar qual o caso de estudo (vinculação das bordas da laje);

2º - Definir a orientação dos eixos, que devem seguir a regra de que a direção  $L_y$  será a que possui o maior número de engastes, e dependendo do caso, se as duas direções possuírem o mesmo número de engastes,  $L_x$  deverá ser o menor vão.

3º - Calcular a relação  $\lambda$ , que será o único valor de entrada na tabela.

$$\lambda = \frac{L_y}{L_x} \quad (1)$$

4º - No corpo da tabela encontram-se os valores de  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $n_x$ ,  $n_y$  e  $k_x$ .

De posse dos valores, pode-se calcular:

O momento positivo do meio do vão na direção X considerada no caso, segundo a equação 2:

$$M_x = q \cdot \frac{L_x^2}{m_x} \quad (2)$$

O momento positivo do meio do vão na direção Y considerada no caso, pela equação 3:

$$M_y = q \cdot \frac{L_x^2}{m_y} \quad (3)$$

A carga na direção X considerada no caso que permitirá calcular o momento no apoio, conforme a equação 4:

$$q_x = k_x \cdot q \quad (4)$$

A carga na direção Y considerada no caso que permitirá calcular o momento no apoio, pela equação 5:

$$q_y = q - q_x \quad (5)$$

O momento negativo do apoio na direção X considerada no caso, segundo a equação 6:

$$X_x = -\frac{q_x \cdot L_x^2}{n_x} \quad (6)$$

O momento negativo do apoio na direção Y considerada no caso, conforme a equação 7:

$$X_y = -\frac{q_y \cdot L_y^2}{n_y} \quad (7)$$

As tabelas de Marcus estão apresentadas no anexo A.

#### 2.4.2 Tabela de Bares

Para a determinação da flecha ou deslocamento na laje será utilizada a tabela de Bares que, a partir do uso de diferenças finitas, relaciona os valores do parâmetro  $\alpha$  aos casos de vinculação da laje e, ao seu valor de  $\lambda$ . Desse modo, a flecha pode ser calculada conforme a equação 8.

$$\alpha_i = \frac{\alpha}{100} \cdot \frac{b}{12} \cdot \frac{q \cdot l_x^4}{E_c \cdot I} \quad (8)$$

Em que,

$\alpha_i$ : flecha;

$\alpha$ : coeficiente de cálculo da flecha;

b: largura unitária da laje;

q: carga uniforme atuante;

$E_c$ : módulo de elasticidade;

I: momento de inércia;

Da mesma forma que as tabelas de Marcus, a tabela de Bares também depende do caso de vinculação apresentado pela laje.

A tabela de Bares está apresentada no anexo B.

## 2.5 TEORIA DE GRELHAS

Para Silveira (2009) uma grelha pode ser definida como uma malha formada por vigas paralelas e contidas em um plano.

Segundo Neves (2010, p. 23) “cada elemento de grelha possui três graus de liberdade por nó: uma translação (direção do eixo z) e duas rotações (em torno dos eixos x e y),” conforme apresentado na figura 10. As rotações implicam no surgimento de esforços internos, sendo estes: esforço transversal, momento fletor e momento torsor.

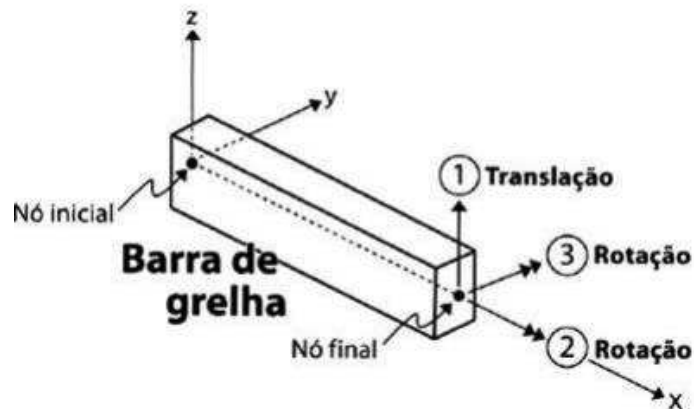


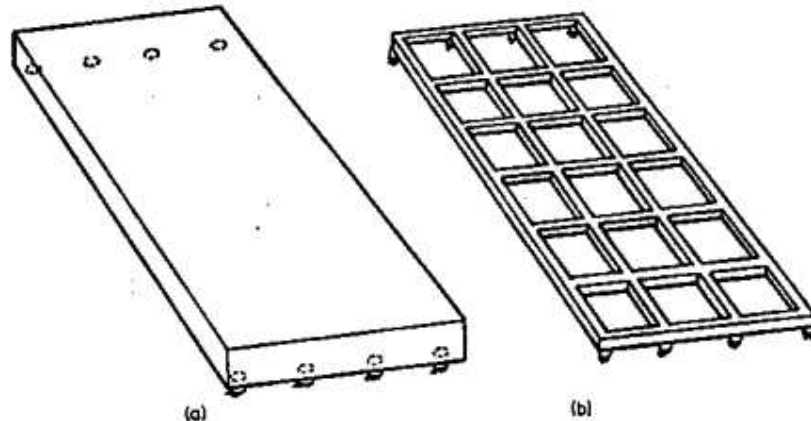
Figura 10: Graus de liberdade do elemento de grelha  
Fonte: Neves (2010).

Para que se possa determinar a relação entre as forças e deslocamentos, segundo Stramandinoli (2003), usam-se os métodos conhecidos na estática das estruturas, entre eles o método dos esforços e o método dos deslocamentos. Porém, essa análise também pode ser obtida a partir de uma análise matricial usando a matriz de rigidez dos elementos.

## 2.6 ANALOGIA DE GRELHAS

Buscando-se realizar a análise de lajes com um método de fácil compreensão e que apresente resultados satisfatórios, usa-se amplamente a analogia de grelhas.

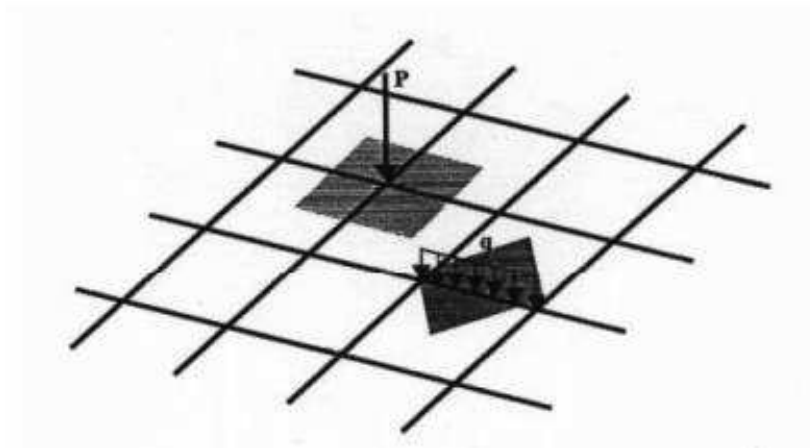
Segundo Kirst (2010) este método consiste na substituição de um elemento de laje maciça por uma grelha equivalente, formada por barras ortogonais paralelas, semelhantes a vigas e espaçadas igualmente em toda a área da laje, em suas duas direções, como ilustra a figura 11, criando, desse modo, um modelo virtual equivalente à estrutura real do pavimento.



**Figura 11: Representação de (a) Laje maciça e de (b) uma grelha equivalente**  
**Fonte: Reis (2007).**

Para Oliveira; Oliveira ([20--?]) o tamanho das divisões entre as faixas das barras ortogonais depende das dimensões e disposição geométrica do pavimento, portanto, uma grande vantagem em se utilizar a analogia de grelhas é a possibilidade de análise em diversas configurações de geometria e modelos de lajes, como as maciças regulares e irregulares, nervuradas, lajes com e sem viga, lajes com vazios internos, entre outras.

Stramandinoli (2003) diz que as cargas atuantes em uma laje maciça de concreto armado são dispostas verticalmente, perpendiculares à laje, e são provenientes do peso próprio dos elementos, das paredes, revestimentos, forros, cargas acidentais e outras dependentes do projeto. Essas cargas podem ser representadas de duas maneiras nas grelhas, cargas distribuídas ao longo do comprimento da barra ou, como cargas concentradas nos nós, como mostra a figura 12, em que,  $P$  é a carga concentrada no nó, e  $q$ , a carga distribuída ao longo do trecho de barra, e suas respectivas áreas de influência.



**Figura 12: Modelos de distribuição de cargas em uma grelha**  
**Fonte: Stramandinoli (2003).**

Neves (2010, p. 23) afirma que, ao se definir os elementos de grelha para que estes simulem o comportamento de uma laje, é de suma importância que seja levado em conta a rigidez a flexão e à torção no elemento. O autor complementa ainda, que “a escolha destas propriedades deve ser cuidada para que se represente, de forma mais aproximada possível, o comportamento dos elementos estruturais que se visa moldar”.

## 2.7 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE GRELHA

Conforme Coelho (2000) deslocamentos unitários podem ocorrer nas barras não simultaneamente, as reações que surgem devido a esses deslocamentos unitários são os coeficientes de rigidez da barra, relativa ao eixo local da barra.

Stramandinoli (2003, p. 19) afirma que “ao serem agrupados, esses coeficientes de rigidez, vão formar uma matriz de ordem 6x6 (6 graus de liberdade) que é a chamada “matriz de rigidez” da barra da grelha (no sistema local)”. Essa matriz é apresentada na forma:



$$S_l = \begin{pmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_y}{L} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & -\frac{12EI_y}{L^3} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_y}{L} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Em que,

$E$ : módulo de elasticidade longitudinal;

$G$ : módulo de elasticidade transversal;

$J$ : momento de inércia à torção da barra da grelha  $J$ ;

$I_y$ : momento de inércia à flexão da seção da barra em relação ao eixo  $y$ ;

$L$ : comprimento da barra.

Em seguida deve-se fazer a transformação da matriz de rigidez em relação aos eixos locais, para os eixos globais, seguindo o mesmo modelo do pórtico plano. Para Coelho (2000) a transformação acontece com a rotação do eixo dos vetores no plano, que pode ser formulada a partir de dois sistemas de eixos coincidentes na origem, rotacionados de um ângulo  $\beta$ , conforme mostra a figura 13.

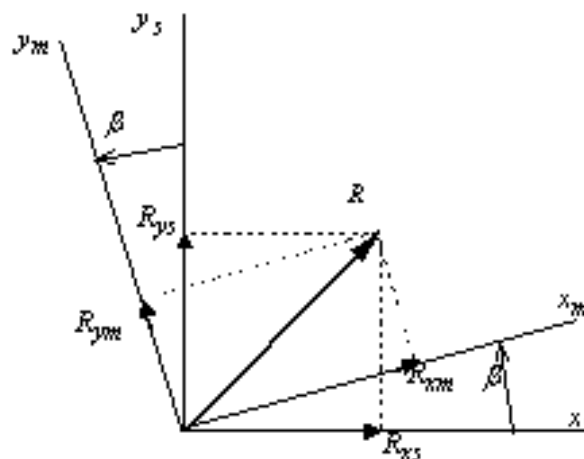


Figura 13: Esquema de rotação dos sistemas de eixos  
Fonte: Coelho (2000).

As resultantes apresentadas na figura acima, podem ser determinadas utilizando-se as expressões abaixo, e assim, formando a matriz R.

$$R_{xm} = \cos \beta \cdot R_{xs} + \sin \beta \cdot R_{ys} \quad (10)$$

$$R_{ym} = -\sin \beta \cdot R_{xs} + \cos \beta \cdot R_{ys} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} R_{xm} \\ R_{ym} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{xs} \\ R_{ys} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (13)$$

R é uma matriz de senos e cossenos, denominada matriz de rotação.

As coordenadas dos nós podem ser definidas pelas equações:

$$C_x = \frac{X_k - X_j}{L} \quad (14)$$

$$C_y = \frac{Y_k - Y_j}{L} \quad (15)$$

Assim, o comprimento da barra L pode ser calculado a partir das coordenadas dos nós extremos:

$$L = \sqrt{(X_k - X_j)^2 + (Y_k - Y_j)^2} \quad (16)$$

Se  $C_x = \cos \beta$  e  $C_y = \sin \beta$ , a matriz de rigidez de barra de grelha, em relação aos eixos globais é apresentada a seguir.

$$\begin{aligned}
 S_G = & \left| \begin{array}{cccccc}
 \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{4EI_y}{L} C_y^2 & \left( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI_y}{L} \right) C_x C_y & \frac{6EI_y}{L^2} C_y & -\frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{2EI_y}{L} C_y^2 & -\left( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI_y}{L} \right) C_x C_y & -\frac{6EI_y}{L^2} C_y \\
 \left( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI_y}{L} \right) C_x C_y & \frac{6EI_y}{L^2} C_x^2 + \frac{4EI_y}{L} C_x^2 & -\frac{6EI_y}{L^2} C_x & -\left( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI_y}{L} \right) C_x C_y & \frac{6EI_y}{L^2} C_x^2 + \frac{4EI_y}{L} C_x^2 & -\left( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI_y}{L} \right) C_x C_y \\
 \frac{6EI_y}{L^2} C_y & -\frac{6EI_y}{L^2} C_x & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} C_y & -\frac{6EI_y}{L^2} C_x & \frac{12EI_y}{L^3} \\
 -\frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{2EI_y}{L} C_y^2 & \left( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI_y}{L} \right) C_x C_y & -\frac{6EI_y}{L^2} C_x & \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{4EI_y}{L} C_y^2 & -\left( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI_y}{L} \right) C_x C_y & -\frac{6EI_y}{L^2} C_y \\
 \left( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI_y}{L} \right) C_x C_y & \frac{6EI_y}{L^2} C_x^2 + \frac{4EI_y}{L} C_x^2 & -\frac{6EI_y}{L^2} C_x & -\left( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI_y}{L} \right) C_x C_y & \frac{6EI_y}{L^2} C_x^2 + \frac{4EI_y}{L} C_x^2 & -\left( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI_y}{L} \right) C_x C_y \\
 -\frac{6EI_y}{L^2} C_y & -\frac{6EI_y}{L^2} C_x & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} C_y & -\frac{6EI_y}{L^2} C_x & \frac{12EI_y}{L^3}
 \end{array} \right|
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Stramandinoli (2003) complementa que a próxima etapa seria então, a análise da estrutura sujeita a cargas, em que formam-se os vetores associados às cargas aplicadas diretamente sobre a grelha.

Depois de gerada a matriz de rigidez  $K_i$ , de cada barra na forma expandida, os elementos desta matriz são transferidos para a matriz de rigidez de nós  $K$ , da estrutura.

$$K_{ij} = \sum_{i=1}^n \text{barras} K_i \quad (18)$$

Este procedimento de somar diretamente as matrizes de rigidez dos elementos para formar a matriz de rigidez da estrutura é, frequentemente, chamado de método direto da rigidez. O fato de se usar a ferramenta matemática de matrizes é o que leva o método de análise ser designado de análise matricial.

Assim, o deslocamento final ( $U$ ) será dado pela multiplicação entre a matriz inversa de  $K$  e, a matriz das cargas externas, como mostra a equação 19.

$$U = K^{-1} \cdot F \quad (19)$$

### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

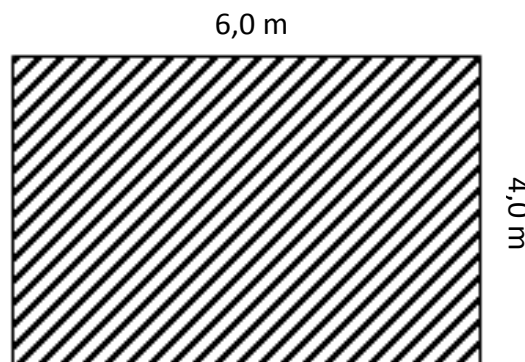
#### 3.1 DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS DA LAJE MACIÇA

Para que fossem determinados os valores de momento fletor e flecha, foi necessário seguir um conjunto de etapas, começando pela determinação do vão da laje, seguindo pelas suas condições de vinculação, cálculo das cargas atuantes e assim o cálculo dos momentos e flechas correspondentes.

##### 3.1.1 Dimensões

A laje teve suas dimensões adotadas iguais 4,0m x 6,0m, como mostra a figura 14. O tamanho dos vãos foi definido para formar uma laje retangular, cujos momentos fossem diferentes nas duas direções, e que os valores obtidos, tanto para momento quanto para flecha não fossem muito pequenos. Essa dimensão também garantiu um valor de  $\lambda$  fosse exato o que gerou facilidade no uso das tabelas.

A espessura utilizada foi igual a 8 cm, conforme o limite mínimo apresentado na NBR 6118 (ABNT, 2014), para lajes de piso não em balanço.



**Figura 14: Representação esquemática da laje em estudo**  
Fonte: Autoria própria.

De posse das dimensões, pôde-se definir se a laje era armada em uma ou nas duas direções. A laje deve ser armada nas duas direções, quando a relação entre os vãos for menor ou igual a 2. Quando o valor dessa relação for superior a 2 terá armação unidirecional, tendo uma armadura principal na direção do menor vão e uma armadura mínima de distribuição na direção do maior vão.

Da relação entre o maior ( $L_y$ ) e o menor vão da laje ( $L_x$ ), encontrou-se o parâmetro  $\lambda$ , como mostra a equação 1.

$$\lambda = \frac{L_y}{L_x}$$

$$\lambda = \frac{6,0}{4,0}$$

$$\lambda = 1,5$$

Como  $\lambda < 2$ , a laje é armada nas duas direções.

### 3.1.2 Vinculação

Existem três tipos de vinculações possíveis em uma laje, são elas: borda livre, borda simplesmente apoiada e engastada, como mostra a figura 15.

Borda livre	Borda simplesmente apoiada	Borda engastada
-----	—————	// // // // //

**Figura 15: Tipos de vinculação em uma laje**

**Fonte: Pinheiro et al. (2010).**

A borda livre não possui suporte, como por exemplo, uma laje em balanço. Uma borda simplesmente apoiada é caracterizada por lajes isoladas, ou seja, quando algum de seus lados não possui nenhuma outra laje adjacente ao mesmo, como uma laje isolada apoiada por vigas. Já, uma borda é dita engastada, quando faz ligação com outra laje, adjacente a este lado.

A borda livre caracteriza-se pela ausência de apoio, apresentando, portanto, deslocamentos verticais. Nos outros dois tipos de vinculação, não há deslocamentos verticais. Nas bordas engastadas, as rotações também são impedidas.

Para o presente estudo, foram consideradas apenas três dos nove tipos de vinculações existentes nas lajes, por serem os casos mais comumente encontrados em projetos, são eles os casos 3, 5A e 6, como ilustra a figura 16.

Caso	Vinculação	Caso	Vinculação	Caso	Vinculação
1		2A		2B	
	Quatro bordas simplesmente apoiadas		Uma borda menor engastada		Uma borda maior engastada
3		4A		4B	
	Duas bordas adjacentes engastadas		Duas bordas menores engastadas		Duas bordas maiores engastadas
5A		5B		6	
	Uma borda maior apoiada		Uma borda menor apoiada		Quatro bordas engastadas

**Figura 16: Casos de vinculação de lajes**  
 Fonte: Adaptado de Pinheiro et al. (2010).

### 3.1.3 Parâmetros da laje

A finalidade da edificação foi determinada e escolhida como sendo um escritório e, seus parâmetros foram definidos pela NBR 6118 (ABNT, 2014), item 6.4.2, tabela 6.1 (figura 17). Como o escritório é localizado em ambiente urbano, a classe ambiental é a II, moderada, com pequeno risco de deterioração da estrutura.

Assim, pôde-se determinar a classe do concreto a ser utilizado, com a tabela 7.1 da mesma norma (figura 18), que para a classe de agressividade II e concreto armado, é de no mínimo C25, logo, foi adotado o concreto C25, portanto o  $f_{ck}$  utilizado é igual a 25 MPa.

Tabela 6.1 – Classes de agressividade ambiental (CAA)

Classe de agressividade ambiental	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto	Risco de deterioração da estrutura
I	Fraca	Rural	Insignificante
		Submersa	
II	Moderada	Urbana <sup>a, b</sup>	Pequeno
III	Forte	Marinha <sup>a</sup>	Grande
		Industrial <sup>a, b</sup>	
IV	Muito forte	Industrial <sup>a, c</sup>	Elevado
		Respingos de maré	

<sup>a</sup> Pode-se admitir um microclima com uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) para ambientes internos secos (salas, dormitórios, banheiros, cozinhas e áreas de serviço de apartamentos residenciais e conjuntos comerciais ou ambientes com concreto revestido com argamassa e pintura).

<sup>b</sup> Pode-se admitir uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) em obras em regiões de clima seco, com umidade média relativa do ar menor ou igual a 65 %, partes da estrutura protegidas de chuva em ambientes predominantemente secos ou regiões onde raramente chove.

<sup>c</sup> Ambientes quimicamente agressivos, tanques industriais, galvanoplastia, branqueamento em indústrias de celulose e papel, armazéns de fertilizantes, indústrias químicas.

Figura 17: Tabela que apresenta a classe de agressividade ambiental  
Fonte: Adaptado de ABNT (2014).

Tabela 7.1 – Correspondência entre a classe de agressividade e a qualidade do concreto

Concreto <sup>a</sup>	Tipo <sup>b, c</sup>	Classe de agressividade (Tabela 6.1)			
		I	II	III	IV
Relação água/cimento em massa	CA	≤ 0,65	≤ 0,60	≤ 0,55	≤ 0,45
	CP	≤ 0,60	≤ 0,55	≤ 0,50	≤ 0,45
Classe de concreto (ABNT NBR 8953)	CA	≥ C20	≥ C25	≥ C30	≥ C40
	CP	≥ C25	≥ C30	≥ C35	≥ C40

<sup>a</sup> O concreto empregado na execução das estruturas deve cumprir com os requisitos estabelecidos na ABNT NBR 12655.

<sup>b</sup> CA corresponde a componentes e elementos estruturais de concreto armado.

<sup>c</sup> CP corresponde a componentes e elementos estruturais de concreto protendido.

Figura 18: Tabela que apresenta a classe do concreto diante da classe de agressividade  
Fonte: Adaptado de ABNT (2014).



### 3.1.4 Carregamentos atuantes

As ações são classificadas segundo o tempo que atuam nas estruturas, dando origem às ações permanentes e ações variáveis. As ações permanentes atuam durante toda a vida útil da edificação, como por exemplo, o peso próprio, revestimentos e paredes. Já as ações variáveis são constituídas pelas cargas de uso da construção, ou seja, atuam durante certos períodos na estrutura, como móveis, pessoas, veículos, reservatórios e equipamentos.

As ações devem estar de acordo com as normas NBR 6120 (ABNT, 1980) e NBR 6118 (ABNT, 2014).

Nas lajes geralmente atuam, além do seu peso próprio, pesos de revestimentos de piso e de forro, peso de paredes divisórias e cargas de uso.

#### 3.1.4.1 Composição dos carregamentos da laje

##### 3.1.4.1.1 Ações permanentes

###### a) Peso próprio

Para determinação do peso próprio ( $P_p$ ) por  $m^2$ , basta multiplicar a espessura da laje pelo peso específico do concreto armado. Na avaliação do peso próprio, conforme item 8.2.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014), admite-se o peso específico de 25  $kN/m^3$  para o concreto armado. Como já pré-determinado, a laje em estudo possui 8 cm de espessura, assim:

$$P_p = 0,08 * 25$$

$$P_p = 2 \text{ kN/m}^2$$

### b) Revestimento do piso

A carga do revestimento de piso ( $P_R$ ) é normalmente constituída de uma camada niveladora e a camada de acabamento final.

A camada niveladora ( $C_n$ ) é composta de uma argamassa de cimento e areia, que segundo a NBR 6120 (ABNT, 1980), possui peso específico igual a 21 kN/m<sup>3</sup>, e segundo Carvalho; Figueiredo Filho (2014), espessura média de 1 cm, logo:

$$C_n = 0,01 * 21$$

$$C_n = 0,21 \text{ kN/m}^2$$

O acabamento é em lajota cerâmica ( $A_{laj}$ ), possui peso específico de 18 kN/m<sup>3</sup> e espessura de 0,5 cm, então seu carregamento será calculado por:

$$A_{laj} = 0,005 * 18$$

$$A_{laj} = 0,09 \text{ kN/m}^2$$

Como resultado final do revestimento de piso, foi considerada a soma entre o peso da camada niveladora e do acabamento. Assim, tem-se:

$$P_R = 0,21 + 0,09$$

$$P_R = \mathbf{0,30 \text{ kN/m}^2}$$

#### 3.1.4.1.2 Ações variáveis

Os valores mínimos das cargas variáveis dependem da finalidade da edificação e, estão especificados na NBR 6120 (ABNT, 1980). Como a edificação em questão trata-se de um escritório, a carga acidental ( $A_v$ ) do mesmo é igual a 2 kN/m<sup>2</sup>.

### 3.1.4.1.3 Carregamento total

O carregamento total ( $q$ ) sobre a laje é a soma das ações permanentes e variáveis, assim, tem-se:

$$q = P_p + P_R + A_v$$

$$q = 2 + 0,30 + 2$$

$$\mathbf{q = 4,30 \text{ kN/m}^2}$$

A carga atuante na laje é igual a 4,30 kN/m<sup>2</sup>.

## 3.2 DETERMINAÇÃO DO MOMENTO FLETOR

### 3.2.1 Tabelas de Marcus

Dentre as diversas tabelas existentes na literatura técnica, optou-se pelas tabelas de Marcus para o cálculo dos momentos por ser amplamente utilizada em meio acadêmico, ser de fácil interpretação e vasta disponibilidade nos materiais pesquisados.

As tabelas de Marcus dependem do tipo de vinculação da laje e da relação  $\lambda$ , assim, para cada tipo de laje foram determinados os coeficientes para o cálculo do momento fletor.

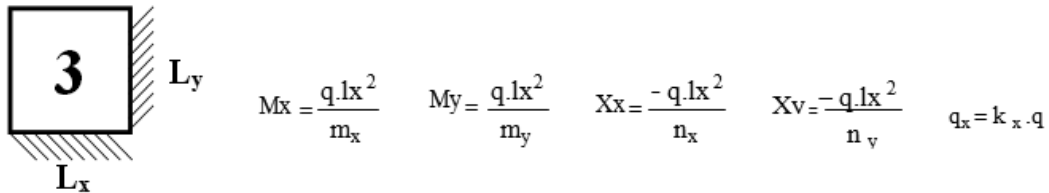
As tabelas foram retiradas de Willian (2017).

#### 3.2.1.1 Caso 3

No caso 3, a laje possui dois dos seus lados apoiados, e os outros dois engastados. Como já calculado, a relação entre  $L_y$  e  $L_x$  resultou em um  $\lambda = 1,5$ .

Assim, os parâmetros, para este caso, estão apresentados na figura 19.

**Cálculo de Lajes em Cruz – Marcus**  
**TABELA 3**



ly/lx	k <sub>x</sub>	m <sub>x</sub>	n <sub>x</sub>	m <sub>y</sub>	n <sub>y</sub>
1,00	0,500	37,14	16,00	37,14	16,00
1,01	0,510	36,42	15,69	37,15	16,00
1,02	0,520	35,72	15,39	37,16	16,01

ly/lx	k <sub>x</sub>	m <sub>x</sub>	n <sub>x</sub>	m <sub>y</sub>	n <sub>y</sub>
1,50	0,835	20,61	9,58	46,38	21,55
1,51	0,839	20,49	9,54	46,71	21,75
1,52	0,842	20,36	9,50	47,05	21,94

**Figura 19: Parâmetros retirados da tabela de Marcus para caso 3**  
**Fonte: Adaptado de Willian (2017).**

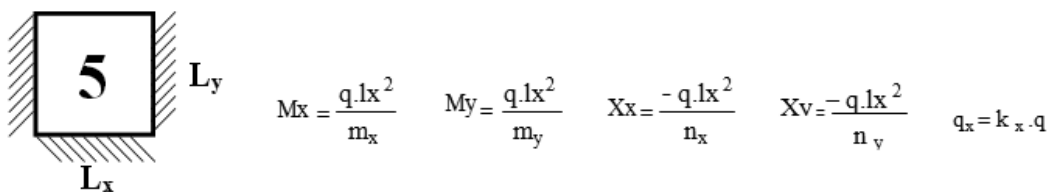
Os momentos positivos foram calculados pelas equações 2 e 3. Neste caso ocorrem também momentos negativos, que foram calculados pelas equações 6 e 7.

### 3.2.1.2 Caso 5A

No caso 5A, a laje é engastada em três dos seus lados, sendo uma das bordas de maior dimensão, apoiada. A relação entre  $L_y$  e  $L_x$  se mantém  $\lambda = 1,5$ .

Os parâmetros para este caso estão apresentados na figura 20.

**Cálculo de Lajes em Cruz – Marcus**  
**TABELA 5**



ly/lx	k <sub>x</sub>	m <sub>x</sub>	n <sub>x</sub>	m <sub>y</sub>	n <sub>y</sub>
0,75	0,387	76,58	30,96	49,23	23,22
0,76	0,400	74,26	29,98	49,00	23,09
0,77	0,413	72,08	29,07	48,81	22,98

ly/lx	k <sub>x</sub>	m <sub>x</sub>	n <sub>x</sub>	m <sub>y</sub>	n <sub>y</sub>
1,50	0,910	29,71	13,18	77,67	39,55
1,52	0,914	29,49	13,12	79,20	40,43
1,54	0,918	29,28	13,07	80,77	41,32

**Figura 20: Parâmetros retirados da tabela de Marcus para caso 5A**  
**Fonte: Adaptado de Willian (2017).**

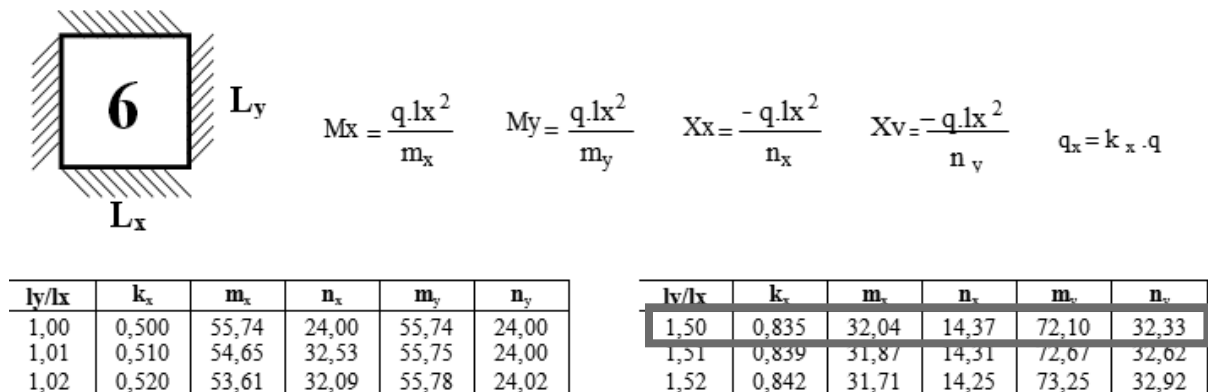
Como no caso anterior, os momentos foram determinados a partir das equações 2, 3, 6 e 7.

### 3.2.1.3 Caso 6

No caso 6, a laje é engastada em todos os seus lados. A relação entre  $L_y$  e  $L_x$  se mantém  $\lambda = 1,5$ .

Os parâmetros para este caso estão apresentados na figura 21.

**Cálculo de Lajes em Cruz – Marcus**  
**TABELA 6**



**Figura 21: Parâmetros retirados da tabela de Marcus para caso 6**  
**Fonte: Adaptado de Willian (2017).**

Do mesmo modo que os casos anteriores, os momentos foram determinados a partir das equações 2, 3, 6 e 7.

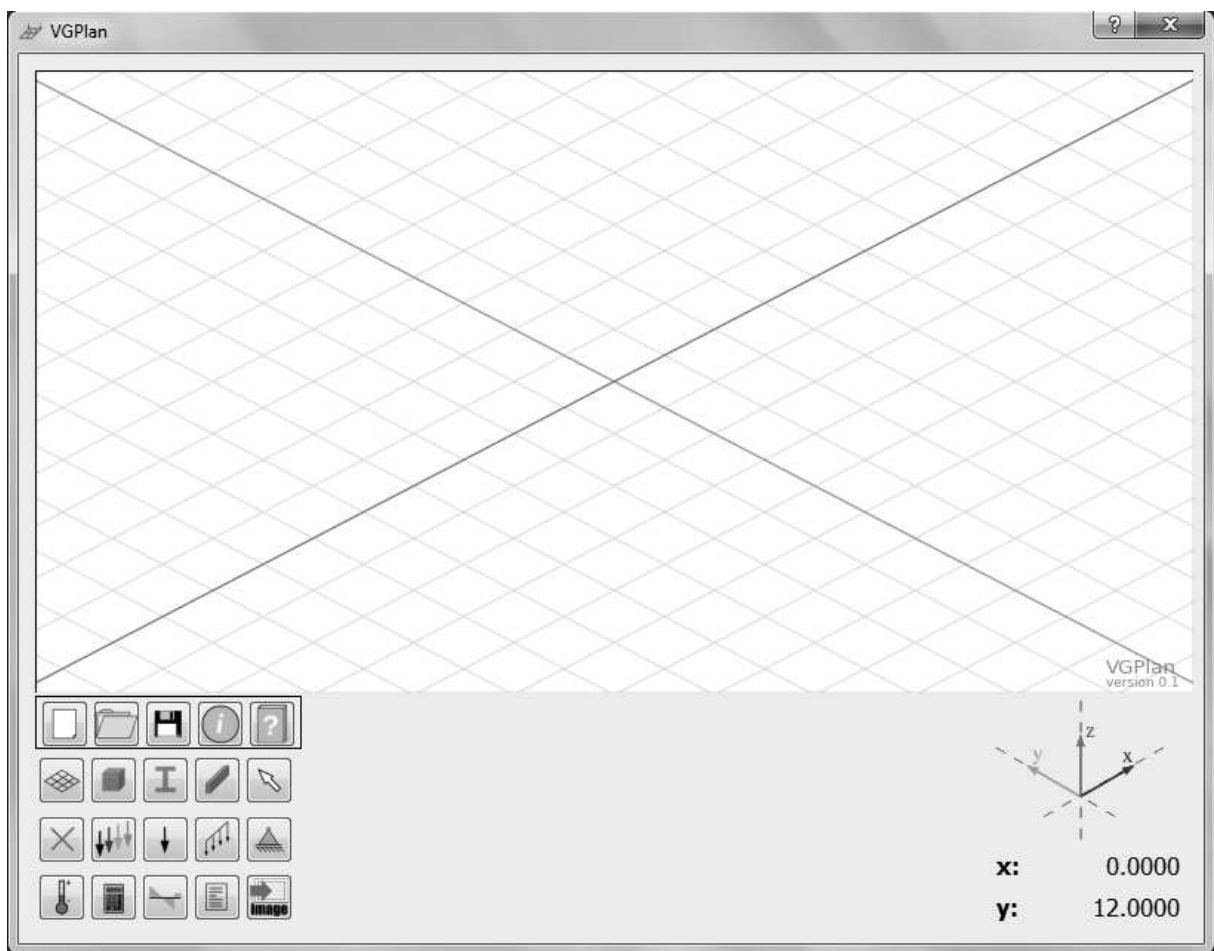
### 3.2.2 Analogia de grelhas

Para determinar os valores de momentos fletores da laje, pela analogia de grelhas, foi utilizado o programa VGPlan, que é uma interface visual para o GPlan, um programa computacional para análise de grelhas, escrito em Fortran. O VGPlan é distribuído livremente, sendo restrito a aplicações no âmbito acadêmico. Este

programa foi desenvolvido, no ano de 2015, por Dorival Piedade Neto, Rodrigo Ribeiro Paccola, Marcio Roberto Silva Correa e Humberto Breves Coda, ex-acadêmicos da USP.

O *software* VGPlan encontra-se disponível no *site* da Universidade de São Paulo, aba departamento de engenharia de estruturas, que disponibiliza vários programas disponíveis para *download*, além do VGPlan.

A interface de abertura do VGPlan é apresentada na figura 22.

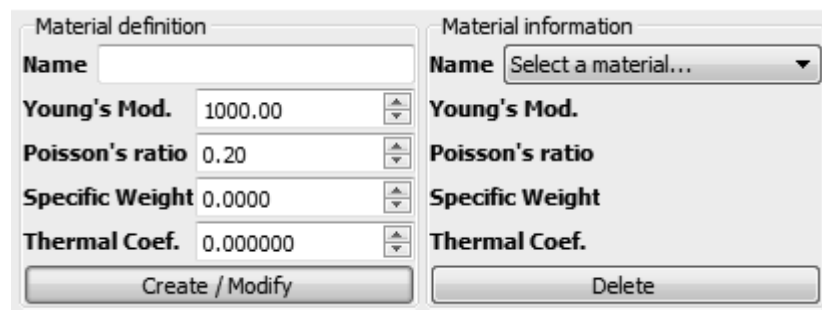


**Figura 22: Interface de abertura do *software* VGPlan**  
Fonte: Piedade Neto, et al. (2015).

Como pode-se observar, a maior parte da janela principal é usada para plotar o modelo, que é exibido dentro de uma projeção isométrica. Na parte inferior esquerda estão disponíveis vários comandos para gerar o modelo; à direita, são exibidas as coordenadas atuais do cursor e o sistema de referência dos eixos cartesianos adotados. A parte central inferior é usada para exibir funcionalidades adicionais, dependendo da ferramenta de projeto selecionada.

Primeiramente, foram definidos os parâmetros do material da laje, como mostra a figura 23. Sua parte esquerda pode ser usada para gerar novas instâncias de material. O coeficiente de Poisson pode variar de 0,0 até 0,49, e é usada para calcular o módulo de cisalhamento (G), o mesmo, foi adotado igual a 0,2, como sugere a NBR 6118 (ABNT, 2014).

O peso específico é um valor não negativo, utilizado para calcular o peso próprio, no programa ele foi computado igual a zero, pois o peso próprio já está embutido no carregamento total. O coeficiente térmico é utilizado, se uma carga de temperatura for aplicada sobre o modelo de laje, que no caso, é igual a zero.



**Figura 23: Definição dos parâmetros do material utilizado**  
 Fonte: Piedade Neto, et al. (2015).

Após essa etapa, foram definidas as propriedades da seção, conforme mostra a figura 24. A parte esquerda de controle é usada para gerar novos dados de seções transversais. O momento de inércia de flexão (I) deve ser maior do que zero e é utilizado para calcular os efeitos de flexão ao longo do feixe. Seu valor foi obtido, segundo Silva et al. ([20--?]), pela expressão 20:

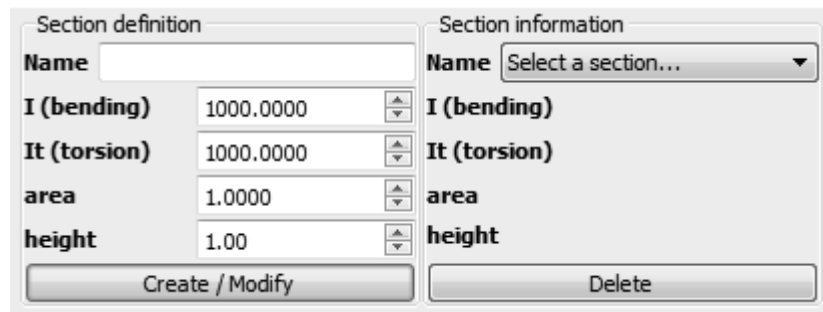
$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (20)$$

Em que, h é a altura da seção e b é o valor do espaçamento utilizado entre as barras da grelha.

O momento de inércia de torção (It) foi utilizado para considerar a rigidez à torção, e seu valor obtido, conforme Silva et al. ([20--?]), para o estágio I, pela expressão 21, pois nesse estágio, normalmente, não há fissuração da peça.

$$I_t = \frac{b \cdot h^3}{6} \quad (21)$$

Os dados de área foram usados no modelo somente para calcular o peso próprio. Os dados de altura consideram os efeitos térmicos no modelo.



**Figura 24: Definição dos parâmetros da seção transversal**  
Fonte: Piedade Neto, et al. (2015).

Assim, podem-se determinar as cargas atuantes sobre a laje, usando cargas isoladas, pontuais ou distribuídas, ou fazer combinações entre elas. Neste caso, considerou-se o carregamento uniformemente distribuído nas barras da grelha, e seus valores foram obtidos a partir da área de influência das barras, como sugere Silva ([20--?]). Desse modo, os carregamentos para as barras de contorno e do centro foram determinados, pelas equações 22 e 23, respectivamente, dependendo do espaçamento “b” utilizado, como apresentado a seguir.

Barras de contorno:

$$q_{cont} = \frac{\frac{b^2}{4} \cdot q}{b} \quad (22)$$

Barras centrais:

$$q_{cent} = \frac{\frac{b^2}{4} \cdot q \cdot 2}{b} \quad (23)$$

Então, definiram-se os apoios nas extremidades da laje, conforme cada caso utilizado, e assim, pôde-se processar os resultados.

O programa apresenta uma janela de resultados individuais (figura 25), em que, podem-se escolher os valores de reações, forças de cisalhamento, momento de flexão, torque e o deslocamento vertical (flecha).



COORDENADAS E RESTRICOES MODAIS					
NO	COORD X	COORD Y	RESTR 2	RESTR X	RESTR Y
1	0.000	-1.000	0	0	0
2	0.000	0.000	1	0	0
3	0.000	4.000	1	0	0
4	1.000	-2.000	0	0	0

**Figura 25: Janela de resultados concedida pelo VGPlan**  
**Fonte: Piedade Neto, et al. (2015).**

Dessa forma, ao inserir todos os parâmetros de materiais e seção no programa, foi possível a rápida obtenção dos valores de momento fletor atuante nas lajes.

A análise gerada é dada por barra, portanto, como as tabelas retornam o valor médio do momento, a média dos valores resultantes em cada barra da grelha, foi calculada, para assim, ser realizada a comparação coerente entre os resultados de momento fletor calculados pelas tabelas e pela analogia de grelhas.

### 3.3 DETERMINAÇÃO DO DESLOCAMENTO VERTICAL (FLECHA)

#### 3.3.1 Tabela de Bares

O deslocamento foi obtido a partir da equação 8, em que fez-se o uso da Tabela de Bares.

O módulo de elasticidade utilizado foi igual a 24 GPa, conforme a tabela 8.1 da NBR 6118 (ABNT, 2014), relacionado com a classe do concreto, que foi pré definida C25. A figura 26 apresenta essa tabela, retirada de Pinheiro (2007).

**Tabela 8.1 – Valores estimados de módulo de elasticidade em função da resistência característica à compressão do concreto (considerando o uso de granito como agregado graúdo)**

Classe de resistência	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	C60	C70	C80	C90
$E_{ci}$ (GPa)	25	28	31	33	35	38	40	42	43	45	47
$E_{cs}$ (GPa)	24	24	27	29	32	34	37	40	42	45	47
$\alpha_i$	0,85	0,86	0,88	0,89	0,90	0,91	0,93	0,95	0,98	1,00	1,00

**Figura 26: Valor do módulo de elasticidade conforme a classe de resistência do concreto**  
**Fonte: Adaptado de ABNT (2014).**

Já o momento de inércia da seção foi calculado pela equação 20.

Para cada caso, e  $\lambda=1,5$ , encontrou-se o parâmetro  $\alpha$  no corpo da tabela, como mostra a figura 27.

Tabela 2.5a									
FLECHAS EM LAJES COM CARGA UNIFORME – VALORES DE $\alpha$									
$\lambda = \frac{L_y}{L_x}$	Tipo de Laje								
	1	2A	2B	3	4A	4B	5A	5B	6
1,00	4,76	3,26	3,26	2,46	2,25	2,25	1,84	1,84	1,49
1,05	5,26	3,68	3,48	2,72	2,60	2,35	2,08	1,96	1,63
1,10	5,74	4,11	3,70	2,96	2,97	2,45	2,31	2,08	1,77
1,15	6,20	4,55	3,89	3,18	3,35	2,53	2,54	2,18	1,90
1,20	6,64	5,00	4,09	3,40	3,74	2,61	2,77	2,28	2,02
1,25	7,08	5,44	4,26	3,61	4,14	2,68	3,00	2,37	2,14
1,30	7,49	5,88	4,43	3,80	4,56	2,74	3,22	2,46	2,24
1,35	7,90	6,32	4,58	3,99	5,01	2,77	3,42	2,53	2,34
1,40	8,29	6,74	4,73	4,15	5,41	2,80	3,62	2,61	2,41
1,45	8,67	7,15	4,87	4,31	5,83	2,85	3,80	2,67	2,49
1,50	9,03	7,55	5,01	4,46	6,25	2,89	3,98	2,73	2,56
1,55	9,39	7,95	5,09	4,61	6,66	2,91	4,14	2,78	2,62
1,60	9,71	8,32	5,18	4,73	7,06	2,92	4,30	2,82	2,68

**Figura 27: Tabela de Bares, indicação dos parâmetros  $\alpha$**   
**Fonte: Adaptado de Pinheiro (2007).**

Definidos todos os parâmetros foi possível encontrar o valor da flecha a partir da equação 8.

### 3.3.2 Analogia de grelhas

A obtenção dos valores do deslocamento vertical, pelo método da analogia de grelhas, foi realizada com o auxílio do *software* VGPlan, conforme explicitado no item 3.2.2.

## 3.4 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

Segundo Soriano (2003) ao refinarmos uma malha, o campo de deslocamentos adotado conduz a malhas de elementos cujos resultados convergem para a solução exata.

Contextualizando ao trabalho, ao analisar a laje pela analogia de grelhas, a grelha equivalente foi refinada em espaços cada vez menores, até que os valores obtidos se tornassem constantes, ou até que houvesse uma variação de até 1% em seus valores de uma etapa de refinamento para a outra, tornando-se desnecessária a continuação do refinamento da malha.

Os resultados de momento fletor e flecha encontrados pelas tabelas são constantes, porém o método da analogia de grelhas, como já mencionado anteriormente, divide as lajes em barras, as quais têm larguras dependentes da geometria e dimensões da laje, e os valores finais são influenciados por este espaçamento.

Segundo Carvalho (1994), o espaçamento entre os elementos da grelha equivalente não devem ser superiores a  $\frac{1}{4}$  do vão, por isso, primeiramente, a laje foi dividida em barras com espaçamento  $Lx/4$ , nas suas duas direções, e para esse caso foram determinados os valores dos esforços, com o auxílio do *software* VGPlan.

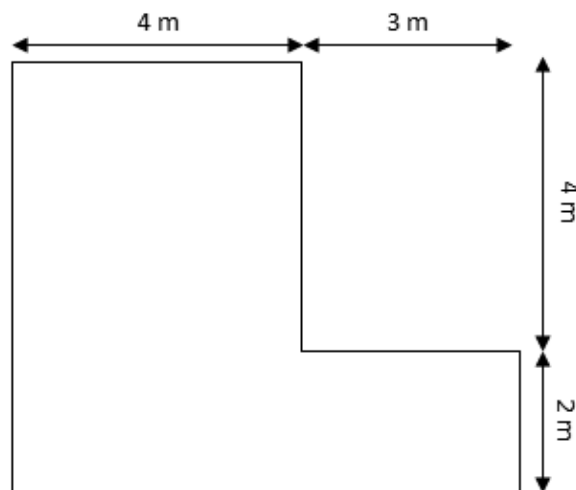
Então, partiu-se para as análises subsequentes dividindo a laje em um espaçamento igual a  $Lx/5$ , e seus resultados foram armazenados. Assim, pôde-se refinar cada vez mais a laje, em ordem crescente de barras, com a próxima análise em um espaçamento igual a  $Lx/6$ , depois  $Lx/7$  e, assim sucessivamente, até que os valores de momento fletor e deslocamentos verticais tivessem variações de até 1% entre as etapas de refinamento.

Encontrado o valor convergente de momento fletor e flecha pela analogia de grelhas, pôde-se realizar a comparação percentual entre os mesmos e os valores encontrados utilizando as tabelas.

### 3.5 ANÁLISE DE LAJES NÃO RETANGULARES

Como as tabelas só podem ser utilizadas para lajes retangulares, foi realizado um exemplo de análise de uma laje não retangular, utilizando a analogia de grelhas, com o auxílio do *software* VGPlan para o cálculo de seus esforços de flexão e flecha máxima.

Desse modo, foi realizada a análise uma laje em formato de L, com os mesmos parâmetros da laje delimitada anteriormente, considerando-a engastada em todas as suas extremidades, diferindo apenas sua configuração geométrica, conforme mostra a figura 28.



**Figura 28:** Laje irregular a ser analisada  
**Fonte:** Autoria própria.

Uma nova convergência de valores foi realizada para a laje em questão, refinando a malha da grelha, do mesmo modo como feito anteriormente, começando com espaçamentos entre barras iguais a  $Lx/4$ , depois  $Lx/5$ , e assim sucessivamente, até que os valores obtidos para o momento fletor e a flecha da laje não retangular se tornassem constantes, ou diferissem em até 1%, de uma análise para outra.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1 CÁLCULO DO MOMENTO FLETOR

#### 4.1.1 Tabelas de Marcus

De posse das informações mencionadas na metodologia do presente trabalho, o valor do momento fletor, obtido a partir das tabelas de Marcus, foi resultante da equação respectiva a cada caso em análise.

##### 4.1.1.1 Caso 3

Para essa situação de vinculação, segundo as tabelas de Marcus, atuam na laje, momentos positivos e negativos nas suas duas direções, e as equações utilizadas foram as 2, 3, 6 e 7.

Momento positivo na direção x:

$$M_x = q \cdot \frac{L_x^2}{m_x}$$

$$M_x = 4,3 \cdot \frac{4^2}{20,61}$$

$$M_x = 3,338 \text{ kN.m}$$

Momento positivo na direção y:

$$M_y = q \cdot \frac{L_x^2}{m_y}$$

$$M_y = 4,3 \cdot \frac{4^2}{46,38}$$

$$M_y = 1,483 \text{ kN.m}$$

Momento negativo na direção x:

$$X_x = \frac{-q \cdot L_x^2}{n_x}$$

$$X_x = \frac{-4,3 \cdot 4^2}{9,58}$$

$$X_x = -7,182 \text{ kN.m}$$

Momento negativo na direção y:

$$X_y = \frac{-q \cdot L_x^2}{n_y}$$

$$X_y = \frac{-4,3 \cdot 4^2}{21,55}$$

$$X_y = -3,193 \text{ kN.m}$$

#### 4.1.1.2 Caso 5A

Para essa situação de vinculação, segundo as tabelas de Marcus, atuam na laje, os mesmos tipos de momentos do caso anterior, ou seja, momentos positivos e negativos nas suas duas direções, e as equações utilizadas foram as 2, 3, 6 e 7.

Momento positivo na direção x:

$$M_x = q \cdot \frac{L_x^2}{m_x}$$

$$M_x = 4,3 \cdot \frac{4^2}{29,71}$$

$$M_x = 2,316 \text{ kN.m}$$

Momento positivo na direção y:

$$M_y = q \cdot \frac{L_x^2}{m_y}$$

$$M_y = 4,3 \cdot \frac{4^2}{77,67}$$

$$M_y = 0,886 \text{ kN.m}$$

Momento negativo na direção x:

$$X_x = \frac{-q \cdot L_x^2}{n_x}$$

$$X_x = \frac{-4,3 \cdot 4^2}{13,18}$$

$$X_x = -5,220 \text{ kN.m}$$

Momento negativo na direção y:

$$X_y = \frac{-q \cdot L_x^2}{n_y}$$

$$X_y = \frac{-4,3 \cdot 4^2}{39,55}$$

$$X_y = -1,739 \text{ kN.m}$$

#### 4.1.1.3 Caso 6

Para essa situação de vinculação, segundo as tabelas de Marcus, atuam na laje, os mesmos tipos de momentos dos dois casos anteriores, ou seja, momentos positivos e negativos nas suas duas direções, e as equações utilizadas foram as 2, 3, 6 e 7.

Momento positivo na direção x:

$$M_x = q \cdot \frac{L_x^2}{m_x}$$

$$M_x = 4,3 \cdot \frac{4^2}{32,04}$$

$$M_x = 2,147 \text{ kN.m}$$

Momento positivo na direção y:

$$M_y = q \cdot \frac{L_x^2}{m_y}$$

$$M_y = 4,3 \cdot \frac{4^2}{72,10}$$

$$M_y = 0,954 \text{ kN.m}$$

Momento negativo na direção x:

$$X_x = \frac{-q \cdot L_x^2}{n_x}$$

$$X_x = \frac{-4,3 \cdot 4^2}{14,37}$$

$$X_x = -4,788 \text{ kN.m}$$

Momento negativo na direção y:

$$X_y = \frac{-q \cdot L_x^2}{n_y}$$

$$X_y = \frac{-4,3 \cdot 4^2}{32,33}$$

$$X_y = -2,128 \text{ kN.m}$$

#### 4.1.2 Software VGPlan

Inserindo todos os dados ao *software* VGPlan, e desenhando o modelo de cada caso, obteve-se os valores mediante o espaçamento utilizado. Os dados da laje, que são análogos a todos os casos, estão apresentados na tabela 1.

O VGPlan, em sua janela de resultados, mostra o valor do momento atuante em cada barra que compõe a grelha, e este é diferente para cada uma delas. Desse modo, foi necessário o cálculo do momento fletor médio para comparação final com as tabelas de Marcus. Os resultados obtidos estão apresentados nos itens a seguir.

**Tabela 1: Dados da laje que independem do caso analisado**

Menor dimensão (m)	Maior dimensão (m)	Altura (m)	Módulo de elasticidade secante (GPa)	Coefficiente de Poisson
4,0	6,0	0,08	24	0,2



#### 4.1.2.1 Caso 3

Os dados referentes ao caso 3 foram inseridos ao programa computacional VGPlan, conforme modelo apresentado na figura 29, para a primeira análise, sendo o espaçamento igual a 1m. Os resultados obtidos para esta e para as análises subsequentes estão apresentados na tabela 2, na qual são apresentados os valores dos momentos máximos apresentados pelo *software*.

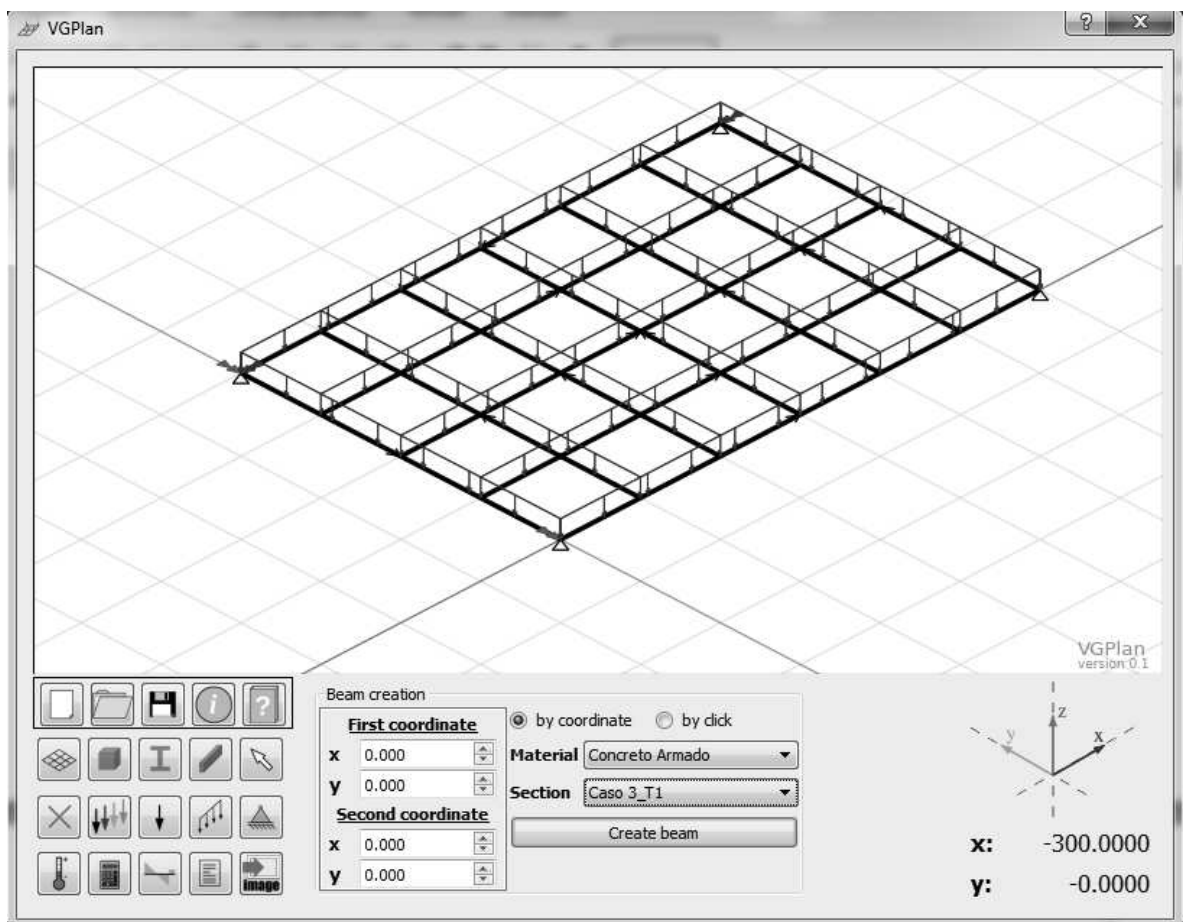


Figura 29: Modelo da laje em estudo, caso 3, primeira análise

Tabela 2: Resultados obtidos pelo software VGPlan, para o caso 3

	Espaçamento "b" (m)	Momento de inércia (m <sup>4</sup> )	Momento torsor (m <sup>4</sup> )	M. fletor máx. em x (kN.m)	M. fletor máx. em y (kN.m)	M.fletor negativo máx. em x (kN.m)	M.fletor negativo máx. em y (kN.m)
Lx/4	1,00	4,267.10 <sup>-5</sup>	8,533.10 <sup>-5</sup>	5,972	1,841	- 4,317	- 0,571
Lx/5	0,80	3,413.10 <sup>-5</sup>	6,827.10 <sup>-5</sup>	5,229	1,792	- 4,874	- 0,912
Lx/6	0,67	2,859.10 <sup>-5</sup>	5,717.10 <sup>-5</sup>	4,941	1,694	- 5,421	- 1,386
Lx/7	0,57	2,432.10 <sup>-5</sup>	4,864.10 <sup>-5</sup>	4,562	1,651	- 5,902	- 1,501
Lx/8	0,50	2,133.10 <sup>-5</sup>	4,267.10 <sup>-5</sup>	4,279	1,619	- 6,416	- 1,742
Lx/9	0,44	1,877.10 <sup>-5</sup>	3,755.10 <sup>-5</sup>	4,015	1,587	- 6,899	- 2,194
Lx/10	0,40	1,707.10 <sup>-5</sup>	3,413.10 <sup>-5</sup>	3,758	1,562	- 7,324	- 2,568
Lx/11	0,36	1,536.10 <sup>-5</sup>	3,072.10 <sup>-5</sup>	3,421	1,533	- 7,872	- 2,727
Lx/12	0,33	1,408.10 <sup>-5</sup>	2,816.10 <sup>-5</sup>	3,285	1,521	- 8,102	- 2,953
Lx/13	0,31	1,327.10 <sup>-5</sup>	2,645.10 <sup>-5</sup>	3,111	1,506	- 8,607	- 3,196
Lx/14	0,29	1,237.10 <sup>-5</sup>	2,475.10 <sup>-5</sup>	3,082	1,493	- 8,942	- 3,288
Lx/15	0,27	1,152.10 <sup>-5</sup>	2,304.10 <sup>-5</sup>	3,082	1,487	- 9,117	- 3,312
Lx/16	0,25	1,067.10 <sup>-5</sup>	2,133.10 <sup>-5</sup>	3,082	1,487	- 9,125	- 3,325

Ao analisar os dados da tabela 2 percebe-se que, pela análise de convergência, foram necessárias 13 etapas de refinamento da grelha e, espaçamento entre as barras da mesma igual a  $Lx/16$  ou 25 cm, para que os resultados de momento fletor convergissem, e tivessem variação de no máximo 1% de uma etapa para outra. A curva de convergência, dos momentos máximos pode ser visualizada no gráfico 1, a seguir.

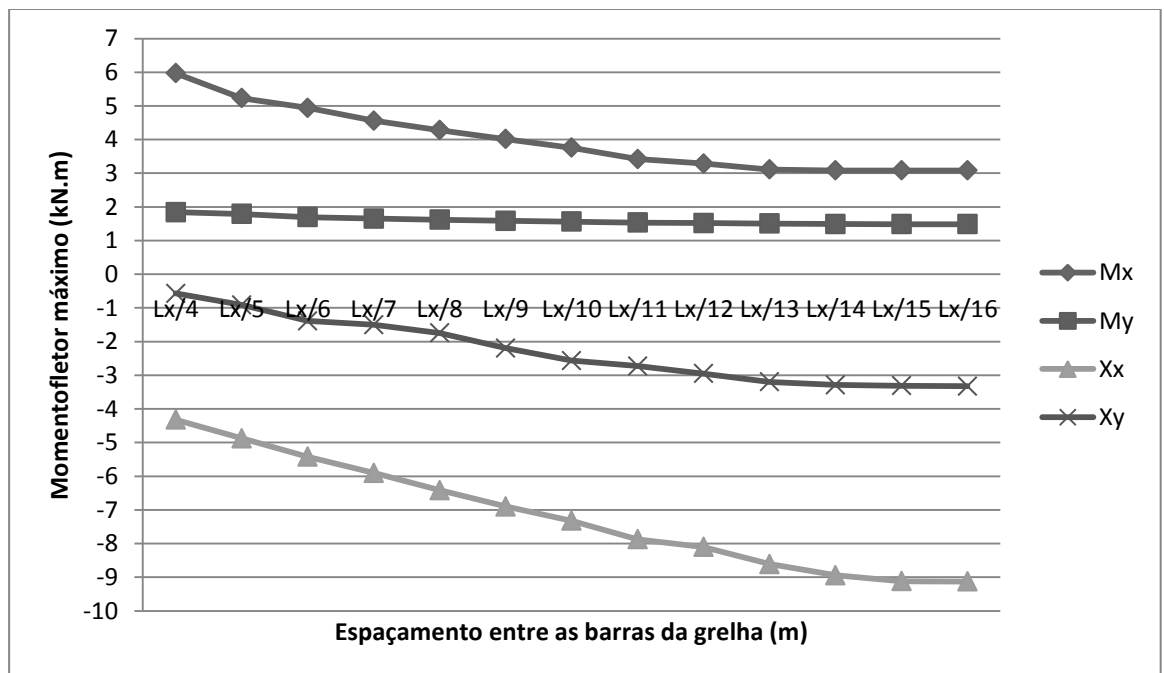


Gráfico 1: Curva de convergência dos momentos atuantes no caso 3, para as 13 etapas de refinamento.

Como o VGPlan apresenta o valor do momento ponto a ponto em cada barra, foi necessário realizar a média aritmética entre os resultados obtidos para cada posição estudada, para realizar a comparação entre os resultados obtidos através da analogia de grelhas e pela tabela de Marcus. Assim, realizando a média dos momentos fletores em cada barra que compunha a grelha no espaçamento  $Lx/16$ , obtiveram-se os valores apresentados na tabela 3.

**Tabela 3: Valores do momento fletor médio para o caso 3.**

Espaçamento “b” (m)		M. fletor médio em x (kN.m)	M. fletor médio em y (kN.m)	M.fletor negativo médio em x (kN.m)	M.fletor negativo médio em y (kN.m)
<b>Lx/16</b>	0,25	3,073	1,459	- 8,814	- 3,059

#### 4.1.2.2 Caso 5A

Todos os dados relacionados ao caso 5A foram inseridos no VGPlan, conforme modelo apresentado na figura 31, para a primeira análise, sendo o espaçamento igual a 1m. Os resultados obtidos para esta e para as análises subsequentes estão apresentados na tabela 4, na qual são apresentados os valores dos momentos máximos obtidos pelo *software*.

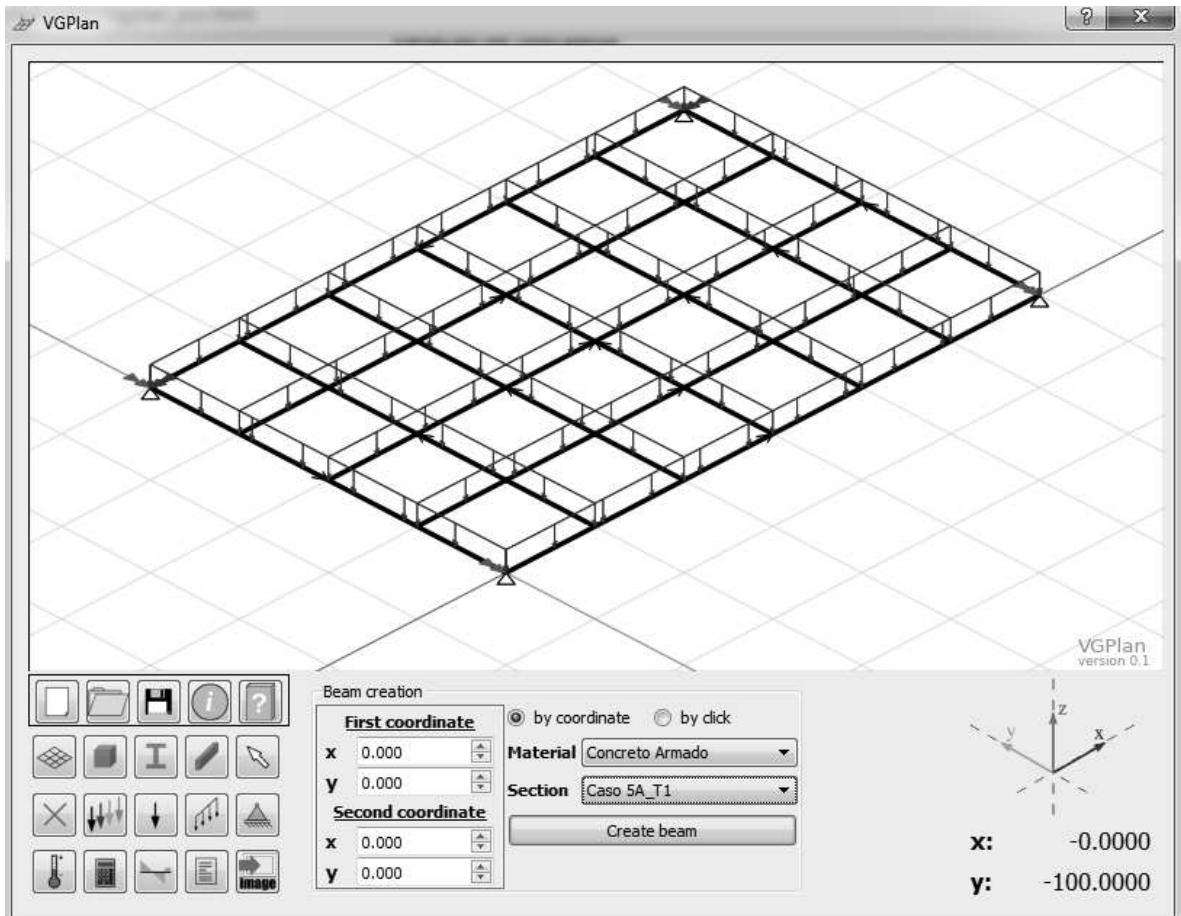


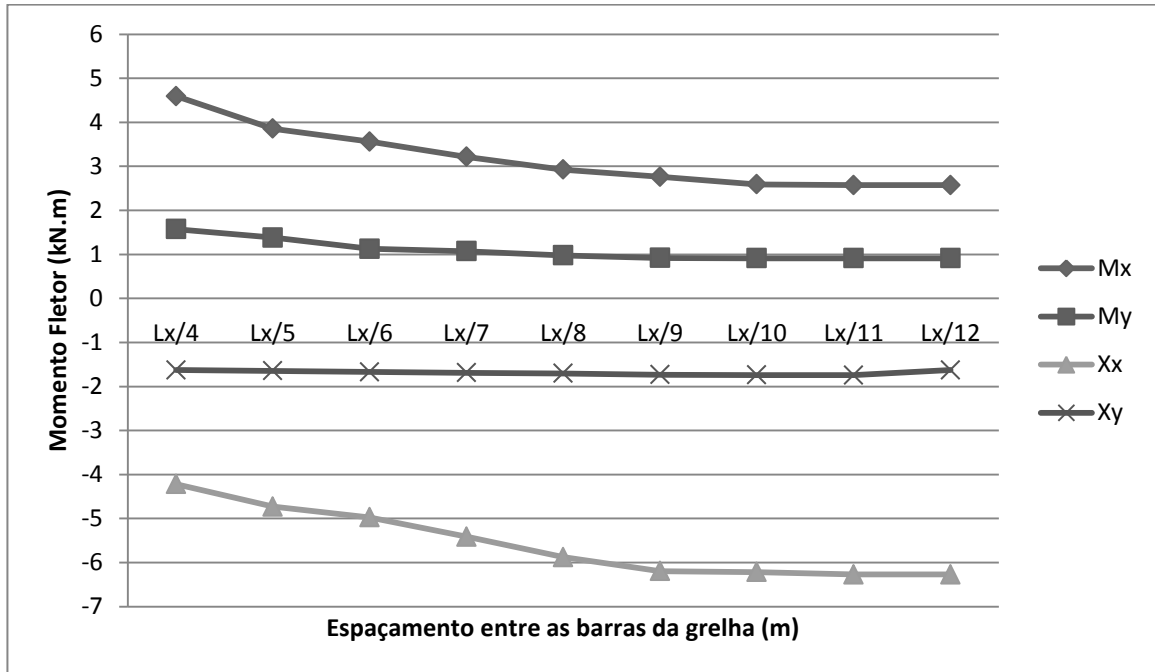
Figura 30: Modelo da laje em estudo, caso 5A, primeira análise

Tabela 4: Resultados obtidos pelo software VGPlan, para o caso 5A

	Espaçamento "b" (m)	Momento de inércia (m <sup>4</sup> )	Momento torsor (m <sup>4</sup> )	M. fletor máx. em x (kN.m)	M. fletor máx. em y (kN.m)	M.fletor negativo máx. em x (kN.m)	M.fletor negativo máx. em y (kN.m)
Lx/4	1,00	4,267.10 <sup>-5</sup>	8,533.10 <sup>-5</sup>	4,592	1,572	- 4,217	- 1,628
Lx/5	0,80	3,413.10 <sup>-5</sup>	6,827.10 <sup>-5</sup>	3,856	1,381	- 4,732	- 1,645
Lx/6	0,67	2,859.10 <sup>-5</sup>	5,717.10 <sup>-5</sup>	3,562	1,127	- 4,972	- 1,672
Lx/7	0,57	2,432.10 <sup>-5</sup>	4,864.10 <sup>-5</sup>	3,217	1,072	- 5,413	- 1,691
Lx/8	0,50	2,133.10 <sup>-5</sup>	4,267.10 <sup>-5</sup>	2,924	0,978	- 5,879	- 1,705
Lx/9	0,44	1,877.10 <sup>-5</sup>	3,755.10 <sup>-5</sup>	2,763	0,920	- 6,196	- 1,734
Lx/10	0,40	1,707.10 <sup>-5</sup>	3,413.10 <sup>-5</sup>	2,592	0,912	- 6,215	- 1,739
Lx/11	0,36	1,536.10 <sup>-5</sup>	3,072.10 <sup>-5</sup>	2,573	0,912	- 6,272	- 1,742
Lx/12	0,33	1,408.10 <sup>-5</sup>	2,816.10 <sup>-5</sup>	2,573	0,912	- 6,272	- 1,628

Para o caso 5A foram necessárias 9 etapas de refinamento para que os valores convergissem, em um espaçamento entre as barras da grelha igual a  $Lx/12$

ou 0,33m. A curva de convergência dos momentos máximos pode ser visualizada no gráfico 2, a seguir.



**Gráfico 2:** Curva de convergência dos momentos atuantes no caso 5A, para as 9 etapas de refinamento.

A tabela 5 apresenta os dados de momentos médios calculados a partir da média aritmética, do valor de momento correspondente à solicitação em cada barra da grelha para o caso 5A, no espaçamento de convergência igual a  $Lx/12$ .

**Tabela 5:** Valor do momento fletor médio para o caso 5A.

Espaçamento "b" (m)	M. fletor médio em x (kN.m)	M. fletor médio em y (kN.m)	M.fletor negativo médio em x (kN.m)	M.fletor negativo médio em y (kN.m)	
Lx/12	0,33	2,174	0,876	-5,812	-1,736

#### 4.1.2.3 Caso 6

Para o caso 6, da mesma forma como anteriormente, todos os dados pertinentes foram inseridos no programa, conforme modelo apresentado na figura 33, para a primeira análise, sendo o espaçamento igual a 1m. Os resultados obtidos

para esta e para as análises subsequentes estão apresentados na tabela 6, na qual são apresentados os valores dos momentos máximos encontrados pelo *software*.

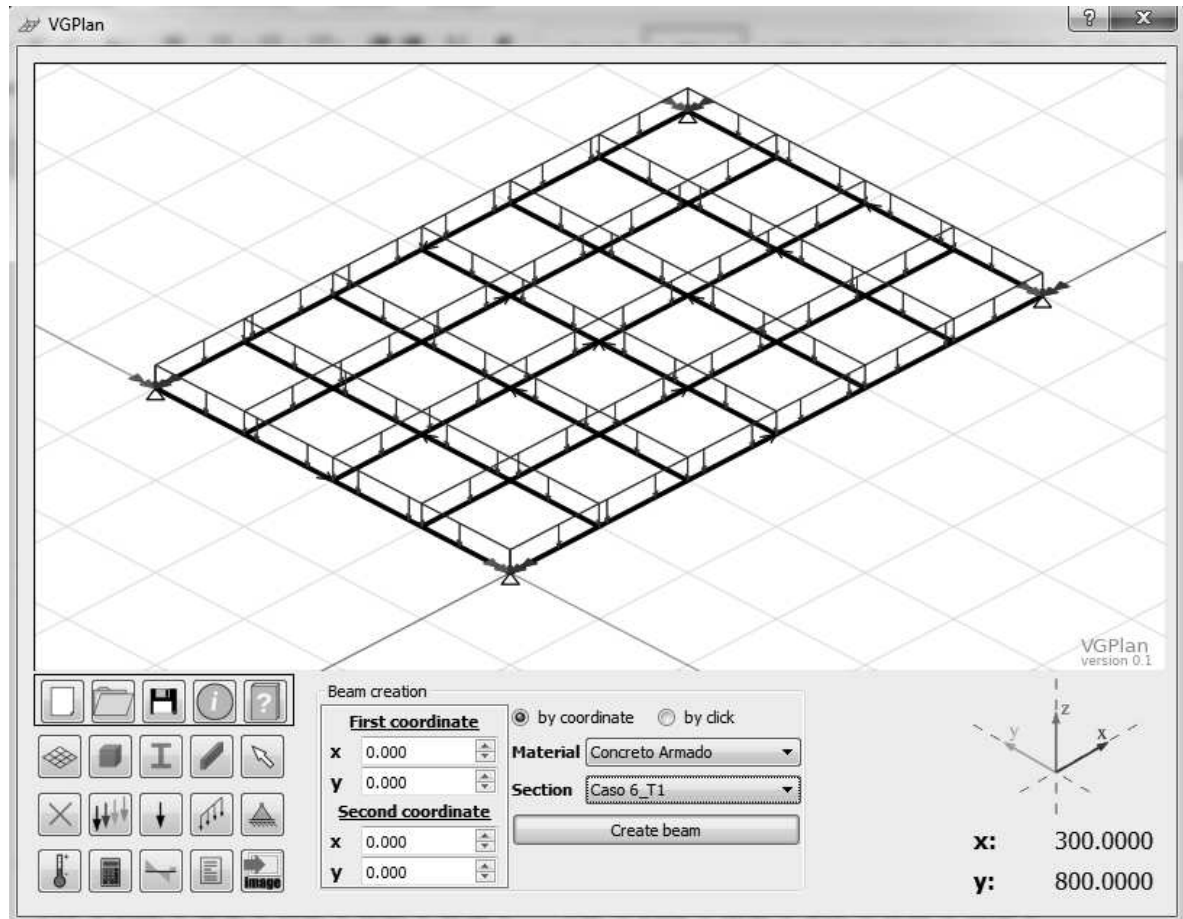


Figura 31: Modelo da laje em estudo, caso 6, primeira análise.

Tabela 6: Resultados obtidos pelo software VGPlan, para o caso 6.

Espaçamento "b" (m)	Momento de inércia (m <sup>4</sup> )	Momento torsor (m <sup>4</sup> )	M. fletor máx. em x (kN.m)	M. fletor máx. em y (kN.m)	M.fletor negativo máx. em x (kN.m)	M.fletor negativo máx. em y (kN.m)	
Lx/4	1,00	4,267.10 <sup>-5</sup>	8,533.10 <sup>-5</sup>	2,572	1,542	- 4,626	- 2,062
Lx/5	0,80	3,413.10 <sup>-5</sup>	6,827.10 <sup>-5</sup>	2,489	1,329	- 4,723	- 2,093
Lx/6	0,67	2,859.10 <sup>-5</sup>	5,717.10 <sup>-5</sup>	2,415	1,154	- 4,779	- 2,115
Lx/7	0,57	2,432.10 <sup>-5</sup>	4,864.10 <sup>-5</sup>	2,347	0,991	- 4,793	- 2,136
Lx/8	0,50	2,133.10 <sup>-5</sup>	4,267.10 <sup>-5</sup>	2,122	0,972	- 4,814	- 2,141
Lx/9	0,44	1,877.10 <sup>-5</sup>	3,755.10 <sup>-5</sup>	2,110	0,964	- 4,823	- 2,141

Já para o caso 6, em um espaçamento entre as barras igual a 44 cm, foram necessárias 6 etapas de refinamento para que os valores de momento máximo, para esse caso, convergissem. A curva de convergência dos momentos máximos pode ser visualizada no gráfico 3, a seguir.

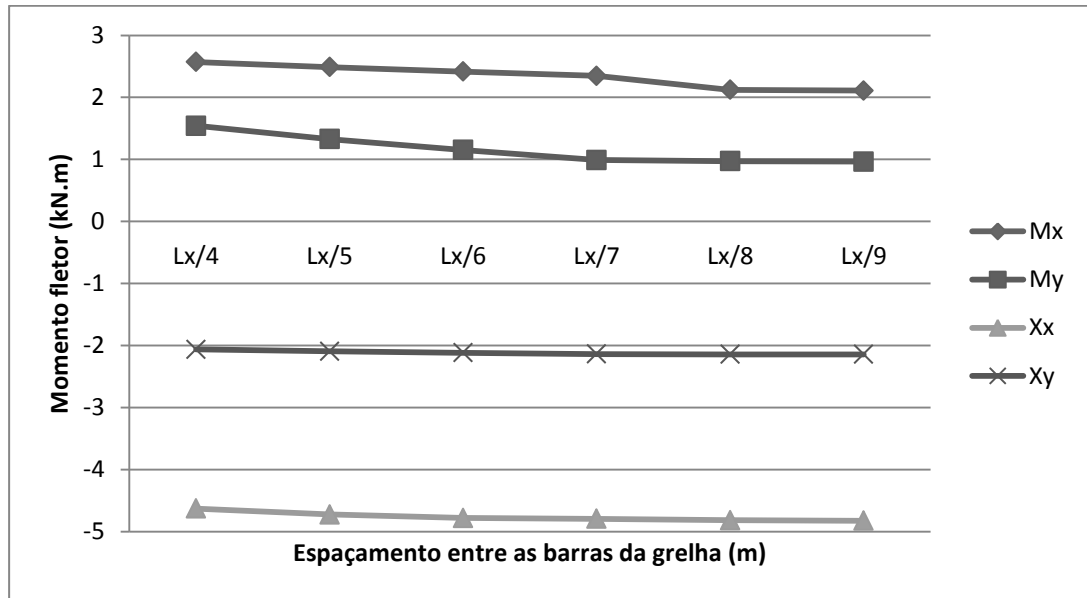


Gráfico 3: Curva de convergência dos momentos atuantes no caso 5A, para as 6 etapas de refinamento.

A tabela 7 apresenta os dados de momentos médios calculados a partir da média aritmética, do valor de momento correspondente à solicitação em cada barra da grelha para o caso 6, no espaçamento de convergência igual a  $Lx/9$ .

Tabela 7: Valores do momento fletor médio para o caso 6.

Espaçamento "b" (m)	Momento de inércia ( $m^4$ )	Momento torsor ( $m^4$ )	M. fletor médio em x (kN.m)	M. fletor médio em y (kN.m)	M.fletor negativo médio em x (kN.m)	M.fletor negativo médio em y (kN.m)	
Lx/9	0,44	$1,877 \cdot 10^{-5}$	$3,755 \cdot 10^{-5}$	2,067	0,949	- 4,801	- 2,125

## 4.2 CÁLCULO DO DESLOCAMENTO VERTICAL (FLECHA)

### 4.2.1 Tabela de Bares

A tabela de Bares foi utilizada para determinação da flecha, conforme a equação 8, que independente do caso de vinculação das bordas. Este fator só tem influência nas incógnitas que estão contidas na equação.

#### 4.2.1.1 Caso 3

Consultando a tabela de Bares, conforme o caso e o valor de  $\lambda$ , o  $\alpha$  é igual a 4,46 assim, podem-se substituir as incógnitas na equação.

$$\alpha_i = \frac{\alpha}{100} \cdot \frac{b}{12} \cdot \frac{q \cdot l_x^4}{E_c \cdot I}$$

Em que,

b: largura unitária da laje, igual a 1m.

q: carga uniforme atuante, igual a 4,3 kN/m;

$E_c$ : módulo de elasticidade secante, igual a 24 GPa, ou 24000000 kN/m<sup>2</sup>;

I: momento de inércia, calculado pela equação 20.

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I = \frac{1 \cdot 0,08^3}{12}$$

$$I = 4,27 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

Logo, a flecha foi obtida por:



$$\alpha_i = \frac{4,46}{100} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{4,3 \cdot 4^4}{24000000 \cdot 4,27 \cdot 10^{-5}}$$

$$\alpha_i = 3,992 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

ou,

$$\alpha_i = 3,992 \text{ mm}$$

Portanto, o deslocamento vertical, obtido pela tabela de Bares, para o caso 3, é igual a 3,992 mm.

#### 4.2.1.2 Caso 5A

Do mesmo modo que o caso anterior, para este caso foi utilizada a equação 8, diferindo apenas o valor de  $\alpha$ , que consultando a tabela de Bares, é igual a 3,98. Assim, a flecha foi encontrada, por:

$$\alpha_i = \frac{\alpha}{100} \cdot \frac{b}{12} \cdot \frac{q \cdot l_x^4}{E_c \cdot I}$$

$$\alpha_i = \frac{3,98}{100} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{4,3 \cdot 4^4}{24000000 \cdot 4,27 \cdot 10^{-5}}$$

$$\alpha_i = 3,563 \cdot 10^{-3} \text{ m ou } 3,563 \text{ mm}$$

Logo, o deslocamento vertical obtido pela tabela de Bares, para o caso 5A, é igual a 3,563 mm.

#### 4.2.1.3 Caso 6

Ao consultar a tabela de Bares, para o caso 6 e  $\lambda$  igual a 1,5, o  $\alpha$  é igual a 2,56. Assim, tem-se o valor da flecha, como mostrado a seguir.

$$\alpha_i = \frac{\alpha}{100} \cdot \frac{b}{12} \cdot \frac{q \cdot l_x^4}{E_c \cdot I}$$

$$\alpha_i = \frac{2,56}{100} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{4,3 \cdot 4^4}{24000000 \cdot 4,27 \cdot 10^{-5}}$$

$$\alpha_i = 2,292 \cdot 10^{-3} \text{ m ou } 2,292 \text{ mm}$$

Logo, o deslocamento vertical obtido pela tabela de Bares, para o caso 6, é igual a 2,292 mm.

#### 4.2.2 Software VGPlan

Todos os dados da laje, para cada caso em particular, foram inseridos no *software* anteriormente, assim, apenas acessando a janela de resultados do VGPlan, para o deslocamento vertical, obteve-se os valores expostos nas tabelas 8, 9 e 10, para os casos 3, 5A e 6, respectivamente.

**Tabela 8: Resultados encontrados pelo software VGPlan para flecha, caso 3.**

	Espaçamento "b" (m)	Flecha (mm)
		Caso 3
Lx/4	1,00	4,924
Lx/5	0,80	4,404
Lx/6	0,67	3,831
Lx/7	0,57	3,572
Lx/8	0,50	3,481
Lx/9	0,44	3,394
Lx/10	0,40	3,353
Lx/11	0,36	3,319
Lx/12	0,33	3,306
Lx/13	0,31	3,299
Lx/14	0,29	3,297
Lx/15	0,27	3,297
Lx/16	0,25	3,297

**Tabela 9: Resultados encontrados pelo software VGPlan para flecha, caso 5A.**

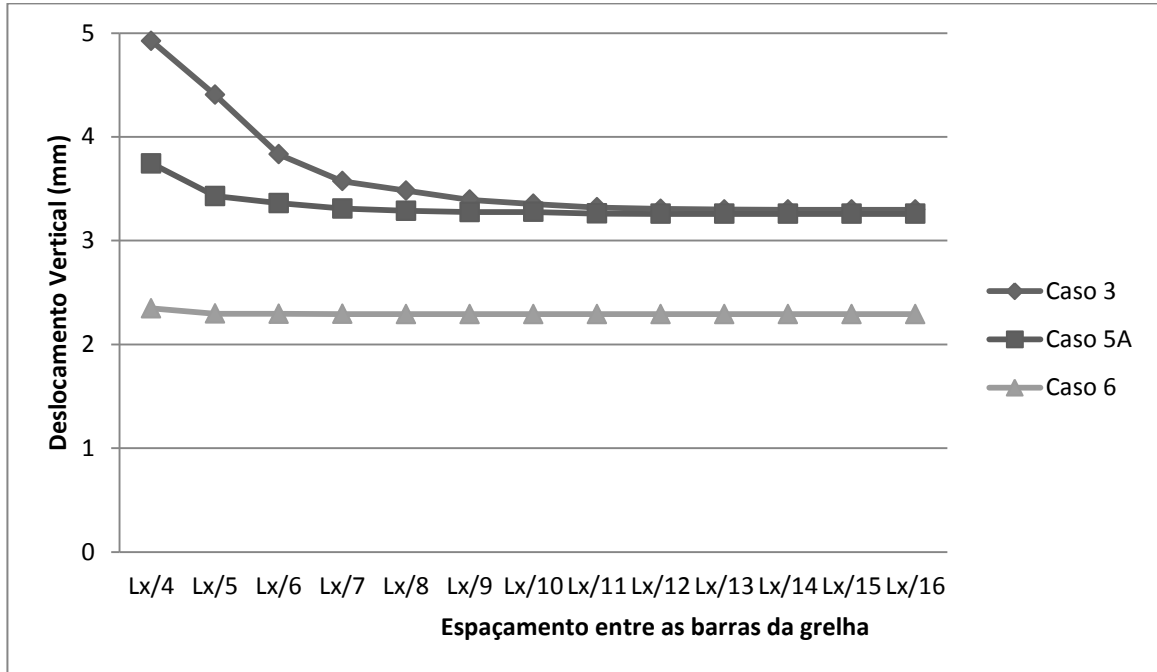
	Espaçamento “b” (m)	Flecha (mm)
		Caso 5 <sup>a</sup>
Lx/4	1,00	3,743
Lx/5	0,80	3,428
Lx/6	0,67	3,361
Lx/7	0,57	3,308
Lx/8	0,50	3,287
Lx/9	0,44	3,275
Lx/10	0,40	3,276
Lx/11	0,36	3,261
Lx/12	0,33	3,258

**Tabela 10: Resultados encontrados pelo software VGPlan para flecha, caso 6.**

	Espaçamento “b” (m)	Flecha (mm)
		Caso 6
Lx/4	1,00	2,347
Lx/5	0,80	2,296
Lx/6	0,67	2,294
Lx/7	0,57	2,293
Lx/8	0,50	2,292
Lx/9	0,44	2,291

Ao analisar os dados das tabelas 8, 9 e 10, percebe-se que, pela análise de convergência, para o caso 3 foram necessárias 13 etapas de refinamento da grelha e, um espaçamento entre as barras da mesma igual a  $Lx/16$  ou 25 cm, para que os resultados da flecha convergissem, e tivessem variação de no máximo 1% de uma etapa para outra. O caso 5A, necessitou 9 etapas de refinamento para a convergência dos resultados, com um espaçamento de 33 cm. Já para o caso 3, em um espaçamento de 44 cm, foram necessárias 6 etapas de refinamento para que houvesse a convergência.

A curva de convergência dos deslocamentos verticais para os três casos, pode ser visualizada no gráfico 4, a seguir.



**Gráfico 4: Curva de convergência da flecha para os três casos de vinculação.**

### 4.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS

#### 4.3.1 Momento fletor

Conforme visto anteriormente, os valores de momento fletor foram calculados de duas formas, uma a partir das tabelas de Marcus, e outra, utilizando analogia de grelhas. Dependendo do caso, existe um valor de momento correspondente, que para as tabelas é único, constante, e, para a analogia de grelhas, é vinculado ao valor do espaçamento utilizado entre as barras da grelha equivalente. Ao encontrar um resultado de momento fletor máximo convergente, pelo segundo método citado, foi necessário calcular o momento médio correspondente a este espaçamento para que a comparação entre seu valor com o da tabela, a partir de diferença percentual, fosse coerente. As tabelas 11, 12 e 13, apresentam a comparação entre as duas metodologias, para os casos 3, 5A e 6, respectivamente.

**Tabela 11: Comparação percentual entre os resultados obtidos pelas tabelas de Marcus e analogia de grelhas, para o caso 3.**

Modelo de cálculo	Momento fletor - Caso 3			
	Mx (kN.m)	My (kN.m)	Xx (kN.m)	Xy (kN.m)
Analogia de grelha	3,073	1,459	- 8,823	- 3,059
Tabela de Marcus	3,338	1,483	-7,182	-3,193
Diferença (%)	9,94	1,64	18,6	4,38

**Tabela 12: Comparação percentual entre os resultados obtidos pelas tabelas de Marcus e analogia de grelhas, para o caso 5A.**

Modelo de cálculo	Momento fletor - Caso 5 <sup>a</sup>			
	Mx (kN.m)	My (kN.m)	Xx (kN.m)	Xy (kN.m)
Analogia de grelha	2,174	0,876	-5,812	-1,736
Tabela de Marcus	2,316	0,886	-5,220	-1,739
Diferença (%)	6,13	1,13	11,34	0,17

**Tabela 13: Comparação percentual entre os resultados obtidos pelas tabelas de Marcus e analogia de grelhas, para o caso 6.**

Modelo de cálculo	Momento fletor - Caso 6			
	Mx (kN.m)	My (kN.m)	Xx (kN.m)	Xy (kN.m)
Analogia de grelha	2,067	0,949	- 4,801	- 2,125
Tabela de Marcus	2,147	0,954	- 4,788	-2,128
Diferença (%)	3,87	0,52	0,27	0,14

Ao observar a comparação entre as duas metodologias adotadas, pôde-se perceber que as maiores diferenças entre os valores encontrados, situam-se na laje caso 3, em que, apenas dois dos seus lados são engastados. A menor discrepância entre os valores ocorreu na laje caso 6, em que todas as suas bordas são engastadas, em que conforme o espaçamento entre as barras da grelha foi sendo minimizado, os valores foram se tornando constantes mais rapidamente.

#### 4.3.2 Deslocamento vertical

Do mesmo modo, pôde-se comparar, por diferença percentual, a flecha a partir das duas metodologias empregadas, como mostra a tabela 14.

**Tabela 14: Comparação percentual entre os resultados obtidos pelas tabelas de Bares e analogia de grelhas.**

Modelo de cálculo	Deslocamento vertical		
	Caso 3 (mm)	Caso 5A (mm)	Caso 6 (mm)
Analogia de grelha	3,297	3,261	2,291
Tabela de Bares	3,992	3,563	2,292
Diferença (%)	17,4	8,5	0,04

Pôde-se perceber a influência da vinculação para a magnitude da flecha, sendo maior, quanto mais bordas da laje simplesmente apoiadas e, consideravelmente menor nos casos que possuem mais bordas engastadas na laje.

#### 4.4 CÁLCULO DA LAJE NÃO RETANGULAR

Inicialmente, plotou-se o modelo do exemplo da laje em L, no programa computacional VGPlan, com os dados apresentados na tabela 15.

**Tabela 15: Dados iniciais aplicados à laje não retangular.**

Menor dimensão (m)	Maior dimensão (m)	Altura (m)	Módulo de elasticidade secante (GPa)	Coefficiente de Poisson	Carregamento (kN/m <sup>2</sup> )
2,0	7,0	0,08	24	0,2	4,3

Do mesmo modo como anteriormente, os momentos de inércia a fleção e a torção foram obtidos pelas equações 20 e 21, respectivamente.

O carregamento nas barras de contorno foram obtidos pela equação 22 e para as barras centrais, pela equação 23.

O modelo plotado no programa, na sua primeira análise, com espaçamento entre as barras de 0,5m, está apresentado na figura 35.

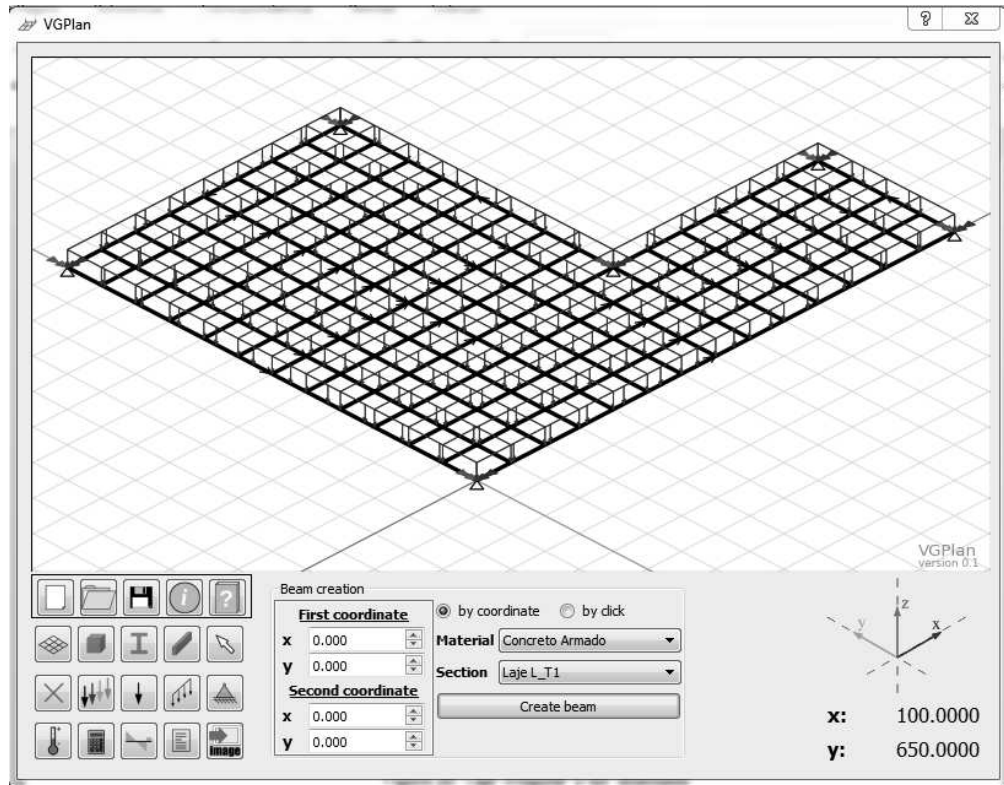


Figura 32: Modelo da laje em L, primeira análise.

A partir da inserção de todos os dados no *software* VGPlan, foi possível realizar o estudo dos momentos fletores e flechas de uma laje em L, mudando o espaçamento entre as barras, de modo que o resultado se tornasse convergente, como mostra a tabela 16.

Tabela 16: Resultados obtidos pelo software VGPlan, para a laje em L

	Espaçamento "b" (m)	Momento de inércia (m <sup>4</sup> )	Momento torsor (m <sup>4</sup> )	M. fletor máx. em x (kN.m)	M. fletor máx. em y (kN.m)	M.fletor negativ o máx. em x (kN.m)	M.fletor negativ o máx. em y (kN.m)	Flecha máxima (mm)
Lx/4	0,50	2,133.10 <sup>-5</sup>	4,267.10 <sup>-5</sup>	16,326	18,427	- 7,871	- 10,072	1,214
Lx/5	0,40	1,707.10 <sup>-5</sup>	3,413.10 <sup>-5</sup>	14,972	17,384	- 8,522	- 11,456	0,963
Lx/6	0,33	1.408.10 <sup>-5</sup>	2,816.10 <sup>-5</sup>	13,647	16,497	- 9,083	- 12,016	0,821
Lx/7	0,29	1.237.10 <sup>-5</sup>	2,475.10 <sup>-5</sup>	12,621	15,632	- 9,572	- 12,531	0,772
Lx/8	0,25	1,067.10 <sup>-5</sup>	2,133.10 <sup>-5</sup>	11,727	14,951	- 9,933	- 12,994	0,680
Lx/9	0,22	9,387.10 <sup>-6</sup>	1,877.10 <sup>-5</sup>	10,972	14,712	- 10,184	- 13,516	0,599
Lx/10	0,20	8,533.10 <sup>-6</sup>	1,707.10 <sup>-5</sup>	10,312	14,688	- 10,400	- 13,605	0,527
Lx/11	0,18	7,680.10 <sup>-6</sup>	1,536.10 <sup>-5</sup>	9,793	14,672	- 10,598	- 13,679	0,489
Lx/12	0,17	7,253.10 <sup>-6</sup>	1,451.10 <sup>-5</sup>	9,293	14,670	- 10,772	- 13,741	0,471
Lx/13	0,15	6,400.10 <sup>-6</sup>	1,280.10 <sup>-5</sup>	9,125	14,669	-10,801	- 13,752	0,463
Lx/14	0,14	5,973.10 <sup>-6</sup>	1,195.10 <sup>-5</sup>	9,038	14,669	-10,816	- 13,759	0,459

A partir dos dados apresentados na tabela 16, notou-se que, para o exemplo proposto, a laje em L foi submetida a 11 etapas de refinamento de sua grelha para que houvesse a convergência dos seus valores de momento fletor e deslocamento vertical, e essa convergência ocorreu quando o espaçamento entre as barras era de 14 cm. As curvas de convergência dos valores de momento fletor e flecha estão apresentadas nos gráficos 5 e 6, respectivamente.

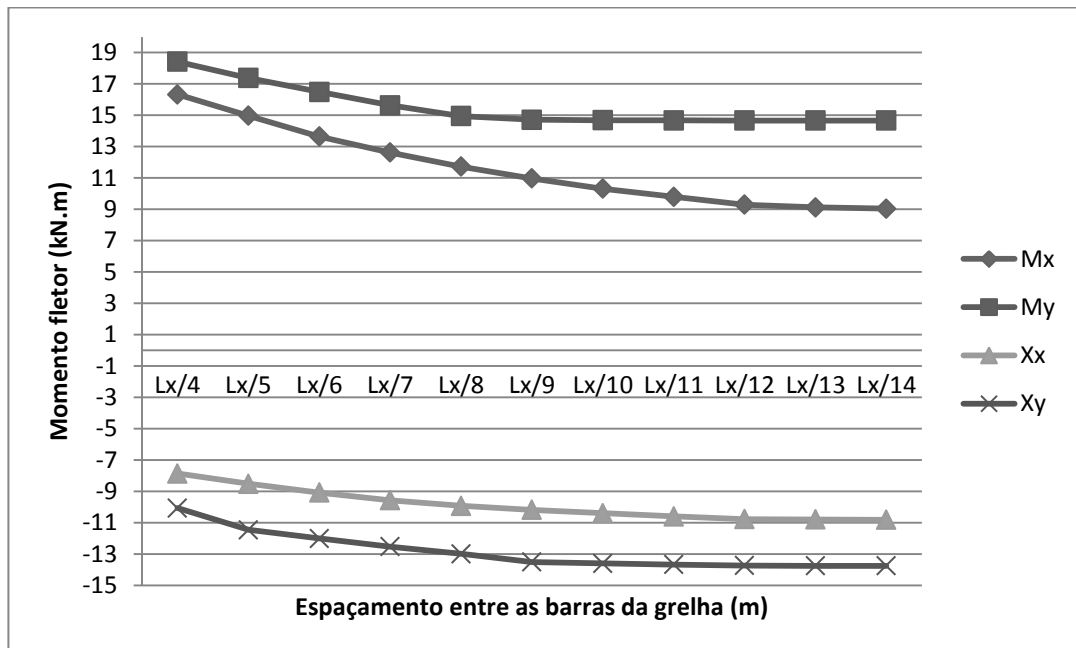


Gráfico 5: Curva de convergência dos momentos fletores para a laje em L.



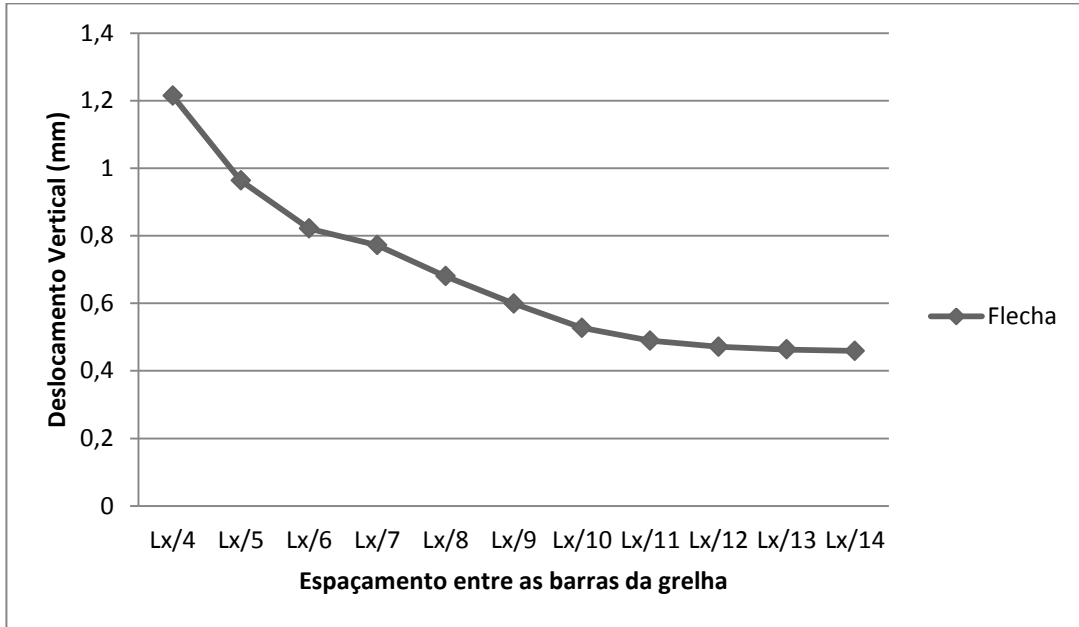


Gráfico 6: Curva de convergência da flecha da laje em L.

## 5 CONCLUSÃO

O presente trabalho tinha como objetivo analisar a diferença entre os valores obtidos a partir de um método simplificado de dimensionamento de estruturas, utilizando as tabelas e, um método mais refinado com a utilização de um programa computacional, a partir de um *software*, como o VGPlan, que resolve a laje utilizando a metodologia de analogia de grelhas.

Assim, tendo por base os resultados obtidos pôde-se perceber claramente a influência do refinamento da malha utilizada na analogia de grelhas. Observou-se que os valores, tanto de momento fletor, quanto de flecha, convergiram na medida em que o espaçamento entre as barras era reduzido.

Do mesmo modo, foi possível perceber que existe influência do tipo de vinculação nas bordas da laje. No caso da laje do caso 3, em que apenas duas de suas bordas eram engastadas houve maior variação entre seus valores, e foram necessárias 13 etapas de refinamento para que os valores convergissem. Já a laje do caso 5A, com 3 das bordas engastadas, teve resultados menores do que o caso anterior, e foram necessárias 9 etapas de refinamento para que os valores convergissem. No caso 6, em que todas as bordas da laje são engastadas, os valores convergiram mais rapidamente, foram necessárias 6 etapas de refinamento, para encontrar a convergência dos resultados.

Foi possível observar, a partir dos resultados de momento fletor que no caso 3 a maior variação, entre os métodos de analogia de grelhas e o uso de tabelas, ocorreu para o momento negativo na direção x, sendo igual a 18,6%, enquanto para o caso 5A, essa diferença foi reduzida, sendo a maior para o mesmo momento  $M_x$ , igual a 11,34%. Já para o caso 6, a diferença entre as duas metodologias foi ainda menor, ocorreu no momento positivo na direção x, sendo igual a 3,87%. Percebe-se, desse modo, que devido ao fato da tabela de Marcus ser derivada da analogia de grelhas seus valores são próximos.

No caso do deslocamento vertical, percebeu-se que os valores de deslocamento vertical convergiram mais rapidamente do que os valores de momento fletor. Verificou-se que para o caso 3, houve uma variação, entre os métodos de analogia de grelhas e uso das tabelas, de 17,4%, enquanto para o caso 6, essa

diferença foi reduzida para 0,04%. Ou seja, houve do mesmo modo a influência da condição de vinculação da borda da laje e do refinamento da malha utilizada.

A partir da diferença encontrada dos valores entre as duas metodologias empregadas neste trabalho percebeu-se que o que mais influencia essa variação é a questão da analogia de grelhas caracterizar cada elemento que compõe sua grelha equivalente, enquanto as tabelas caracterizam a laje como um todo.

Pelo fato da analogia de grelhas gerar um valor de momento fletor máximo para cada barra que a compõe, é possível executar uma armadura variável na laje, o que é inexecutável ao utilizar as tabelas, já que as mesmas trabalham com valores médios.

Como já mencionado anteriormente, a análise da laje em L foi apenas um exercício prático do uso da analogia de grelhas para uma laje não retangular, desse modo, não cabe a comparação dos valores obtidos com as tabelas, visto que estas só podem ser utilizadas para lajes retangulares. Portanto, com a malha sendo refinada por 9 vezes, obteve-se a convergência dos resultados de momento fletor e flecha, com um espaçamento entre as barras da grelha igual a 14 cm.

Assim, pode-se concluir que o processo de analogia de grelhas é dinâmico e permite analisar uma laje, ou placa em diferentes situações de esquema estrutural. Este método foge do cálculo clássico do uso das tabelas, considerando a interação entre os elementos. Dessa maneira, a contribuição de cada elemento que compõe a laje fica corretamente caracterizada e, os esforços determinados tendem a ser mais precisos e mais próximos dos valores reais.

## 6. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para trabalhos futuros sugere-se que sejam analisados outros tipos de lajes, como as nervuradas e treliçadas, por exemplo.

Outro fator interessante de ser estudado é a verificação da influência da espessura das lajes ou uso de lajes com espessura variável, variação do coeficiente de Poisson, e diferentes condições de apoio e carregamentos na mesma laje.

Pode-se também, verificar a diferença existente entre os resultados obtidos pelas tabelas de dimensionamento, pela analogia de grelhas e o uso de um programa computacional comercial.

Uma análise interessante seria a comparação de custos da armação, calculada pelas duas metodologias, uma vez que a tabela apresenta um valor médio de momento fletor, e assim, a taxa de armadura é única, constante. Já a partir da analogia de grelhas, cada barra possui valores diferentes de momentos, desse modo a armadura seria mais bem caracterizada e possivelmente, menor do que as taxas obtidas pelo uso de tabelas.

Sugere-se também, realizar o dimensionamento para o estágio II, mudando-se as equações de inércia a flexão e a torção, visto as diferenças obtidas no caso 3 e 5A, que foram geradas em função de existirem momentos fletores superiores ao momento de fissuração, tendo isto, grande influência nos resultados obtidos pela analogia de grelhas.

Essas mesmas sugestões são válidas para serem aplicadas à laje em L, ou outras geometrias.

Desse modo, ampliar-se-ia as informações acerca da analogia de grelhas, difundindo mais este método que é de fácil aplicação e possui *softwares* livres para sua determinação.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Francisco P. A.; SANTOS, Luciano B. 2017. **Engenharia de Estruturas: conhecendo os sistemas resistentes das edificações**. Disponível em: <<http://www.ctec.ufal.br/ceeng/iframe/conteudo/oficinas/oficina01.html>>. Acesso em: 03 abr. 2017.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118 - Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120 – Cargas para o cálculo de estruturas de edificações**. Rio de Janeiro, 1980.

BASTOS, Paulo S. S. **Lajes de concreto**. 2015. Disponível em: <<http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/concreto1/Lajes.pdf>>. Acesso em: 03 abr. 2017.

BRITO, Dorival R. **Cálculo de laje – momentos**. [20--?]. 7f. Instituto Federal do Espírito Santo. Disponível em: <<http://drb-assessoria.com.br/calculodelajes.pdf>>. Acesso em: 04 mai. 2017.

CAMACHO, Jefferson S. **Estudo das lajes**. 2004. 59 f. Universidade Estadual Paulista. Ilha Solteira, São Paulo. Disponível em: <<http://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/engenhariacivil/nepae/estudo-das-lajes.pdf>>. Acesso em: 11 set. 2017.

CAMPOS FILHO, Américo. **Projeto de lajes maciças de concreto armado**. 2014. 43f. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia. Disponível em: <<https://chasqueweb.ufrgs.br/~americo/eng01112/lajes.pdf>>. Acesso em: 04 abr. 2017.

CARNEIRO, Ronaldson. **Estruturas de Concreto II**. 2006. Disponível em: <<https://arquitetonica.files.wordpress.com/2011/09/lajes-ufpa.pdf>>. Acesso em: 03 abr. 2017.

CARVALHO, Roberto C. **Análise não – linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelhas**. 1994. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos. Disponível em: <[http://www.set.eesc.usp.br/static/media/producao/1994DO\\_RobertoChustCarvalho.pdf](http://www.set.eesc.usp.br/static/media/producao/1994DO_RobertoChustCarvalho.pdf)>. Acesso em: 06 abr. 2017.

CARVALHO, Roberto C; FIGUEIREDO FILHO, Jasson R. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: segundo a NBR 6118-2014 - Vol.1.** 2014. 416 f. Editora Edufscar. São Carlos – São Paulo.

COELHO, Jano A. **Modelagem de lajes de concreto armado por analogia de grelha - conceitos iniciais.** 2000. Dissertação (Pós Graduação). Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis – SC. Disponível em: <[http://faq.altoqi.com.br/content/245/600/pt-br/modelagem-de-lajes-de-concreto-armado-por-analogia-de-grelha-\\_conceitos-iniciais.html?highlight=c](http://faq.altoqi.com.br/content/245/600/pt-br/modelagem-de-lajes-de-concreto-armado-por-analogia-de-grelha-_conceitos-iniciais.html?highlight=c)>. Acesso em 18 abr. 2017. 15:57

HIBBELER, Russell C. **Resistência dos Materiais.** 7ª edição – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

HOMETEKA. **Guia Completo de Lajes: tudo sobre lajes maciças, pré-fabricadas e mistas.** 2014. Disponível em: <<https://www.hometeka.com.br/aprenda/guia-completo-de-lajes-tudo-sobre-lajes-macicas-pre-fabricadas-e-mistas/>>. Acesso em 28 mar. 2017.

KIRST, Renan W. **Elementos superficiais laminares em concreto armado: Estudo comparativo entre métodos de cálculo.** 2010. 79f. TCC (Graduação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Departamento de engenharia Civil. Porto Alegre. Disponível em: < <http://hdl.handle.net/10183/26089>>. Acesso em: 28 mar. 2017. 08:27.

LAJES JUNDIAÍ. **Laje Treliçada Cerâmica.** 2017. Disponível em: <<http://www.lajesjundiai.com.br/produtos/laje-trelicada-ceramica>>. Acesso em: 07 mai. 2017.

MELGES, José L. P. **Módulo 2 – Lajes.** 2012. Estruturas de Concreto II – UNESP Ilha Solteira. Disponível em: < [http://files.joaoluisfeis.webnode.com.br/200000053-31b0732a9d/Lajes\\_Mod2.pdf](http://files.joaoluisfeis.webnode.com.br/200000053-31b0732a9d/Lajes_Mod2.pdf)>. Acesso em: 12 ago. 2017.

MORILLA, José C. **Flechas e deflexões.** 2007. 10 f. Universidade Santa Cecília, Engenharia Mecânica. Disponível em: <<http://cursos.unisanta.br/mecanica/ciclo5/flechas-deflexoes.pdf>>. Acesso em 13 mai. 2017.

NAPPI, Sérgio C. B. **Análise comparativa entre lajes maciças, com vigotas pré-moldados e nervuradas.** 1993. 85 f. Dissertação (Mestrado) – Engenharia de produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis – SC, 2014. Disponível em:

<<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/75976/94191.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 04 abr. 2017.

NEVES, Luís F. C. S. **Comparação de modelos de grelha e de elementos finitos de laje na modelação de estruturas de edifícios de betão armado**. 2010. 85f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Técnica de Lisboa. Lisboa. Disponível em: <<http://comum.rcaap.pt/handle/10400.26/9776>>. Acesso em: 27 mar. 2017.

OLIVEIRA, Maria G. D; OLIVEIRA, Janes C. A. O. **Utilização de Métodos Numéricos no Dimensionamento de Estruturas de Edifícios em Concreto Armado**. [20--?]. Dissertação (Graduação) - Universidade Católica de Goiás, [S.L.]. Disponível em: <[www2.ucg.br/nupenge/pdf/Maria\\_das\\_Gracas\\_Duarte\\_Oliveira.pdf](http://www2.ucg.br/nupenge/pdf/Maria_das_Gracas_Duarte_Oliveira.pdf)> Acesso em: 28 mar. 2017.

PINHEIRO, Libânio M. **Tabelas de Lajes**. 2007. Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas. Disponível em: <<http://www.gdace.uem.br/romel/MDidatico/EstruturasConcretoll/21%20Tabelas%20de%20lajes.pdf>>. Acesso em 07 mai. 2017.

PINHEIRO, Libânio M.; MUZARDO, Cassiane D; SANTOS, Sandro P. **Lajes Maciças**. 2010. 29f. Disponível em: <<http://www.set.eesc.usp.br/mdidatico/concreto/Textos/11%20Lajes%20Macicas.pdf>>. Acesso em: 03 mai. 2017.

REIS, Eduardo M. dos. **Análise de pavimentos de edifícios utilizando a analogia de grelha**. 2007. 127f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/90204/244863.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 27 mar. 2017.

SANTOS, Paulo R. dos. **Análise e cálculo de elementos estruturais em concreto armado de um edifício residencial**. 2014. 184 f. TCC (Graduação) - Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Florianópolis – SC, 2014. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/127433/TCC%20Paulo%20Reiser%20dos%20Santos%20-20Formato%20A5.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 04 abr. 2017.

SILVA, Marcos A. F; FIGUEIREDO FILHO, Jasson R.; CARVALHO, Roberto C. **A utilização da analogia de grelha para análise de pavimentos de edifícios em concreto armado**. [20--?]. V Simpósio EPUSP sobre estruturas. Disponível em: <[http://coral.ufsm.br/decc/ECC840/Downloads/Analogia\\_grelha\\_pavimentos.pdf](http://coral.ufsm.br/decc/ECC840/Downloads/Analogia_grelha_pavimentos.pdf)>. Acesso em: 08 mai. 2017.

SILVEIRA, Guilherme L. **Análise das Solicitações em modelos de grelha: determinação de parâmetros econômicos**. 2009. 70f. TCC (Graduação) – Departamento de Engenharia Civil. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. Disponível em: <<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/24111/000741769.pdf?...1>>. Acesso em: 27 mar. 2017.

SORIANO, Humberto L. **Método de elementos finitos em análise de estruturas**. São Paulo. Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

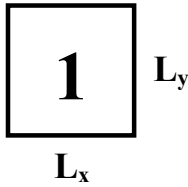
STRAMANDINOLI, Juliana S. B. **Contribuições à análise de lajes nervuradas por analogia de grelha**. 2003. 179f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/84880/192819.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 27 mar. 2017.

VASCONCELLOS, Juliano. **Lajes maciças de concreto armado**. 2012. Disponível em: <<https://cddcarqfeevale.wordpress.com/2012/04/03/lajes-macicas-de-concreto-armado/>>. Acesso em: 04 abr. 2017.

WILLIAN. **Cálculo de Lajes em Cruz – Tabelas de Marcus**. 2017. Disponível em: <<http://www.profwillian.com/concreto/TabelasMarcus.pdf>>. Acesso em 27 mai. 2017.



## ANEXO A – TABELAS DE MARCUS

Cálculo de Lajes em Cruz – Marcus  
TABELA 1

$$M_x = \frac{q \cdot l_x^2}{m_x} \quad M_y = \frac{q \cdot l_x^2}{m_y} \quad q_x = k_x \cdot q$$

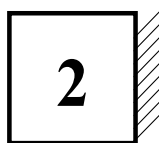
ly/lx	k <sub>x</sub>	m <sub>x</sub>	m <sub>y</sub>
0,50	0,059	169,18	42,29
0,51	0,063	158,42	41,20
0,52	0,068	148,64	40,19
0,53	0,073	139,70	39,24
0,54	0,078	131,55	38,36
0,55	0,084	124,10	37,53
0,56	0,089	117,25	36,77
0,57	0,095	110,96	36,05
0,58	0,102	105,19	35,38
0,59	0,108	99,86	34,76
0,60	0,115	94,94	34,18
0,61	0,122	90,40	33,64
0,62	0,129	86,20	33,13
0,63	0,136	82,30	32,66
0,64	0,144	78,68	32,23
0,65	0,151	75,32	31,82
0,66	0,159	72,19	31,44
0,67	0,168	69,27	31,09
0,68	0,176	66,54	30,99
0,69	0,185	63,99	30,46
0,70	0,194	61,60	30,18
0,71	0,203	59,37	29,93
0,72	0,212	57,27	29,69
0,73	0,221	55,29	29,47
0,74	0,231	53,44	29,26
0,75	0,240	51,69	29,07
0,76	0,250	50,04	28,90
0,77	0,260	48,48	28,74
0,78	0,270	47,01	28,60
0,79	0,280	45,61	28,46
0,80	0,290	44,29	28,34
0,81	0,301	43,03	28,23
0,82	0,311	41,84	28,13
0,83	0,322	40,70	28,04
0,84	0,332	39,62	27,96
0,85	0,343	38,59	27,88
0,86	0,354	37,61	27,81
0,87	0,364	36,67	27,75
0,88	0,375	35,77	27,70
0,89	0,385	34,91	27,65
0,90	0,396	34,09	27,61
0,91	0,407	33,30	27,57
0,92	0,417	32,54	27,54
0,93	0,428	31,81	27,51
0,94	0,438	31,11	27,49
0,95	0,449	30,44	27,47
0,96	0,459	29,79	27,45
0,97	0,469	29,17	27,44
0,98	0,480	28,57	27,43
0,99	0,490	27,99	27,43
1,00	0,500	27,43	27,43

ly/lx	k <sub>x</sub>	m <sub>x</sub>	m <sub>y</sub>
1,00	0,500	27,43	27,43
1,01	0,510	26,89	27,43
1,02	0,520	26,37	27,43
1,03	0,529	25,87	27,44
1,04	0,539	25,38	27,45
1,05	0,549	24,91	27,47
1,06	0,558	24,46	27,48
1,07	0,567	24,02	27,50
1,08	0,576	23,60	27,52
1,09	0,585	23,19	27,55
1,10	0,594	22,79	27,57
1,11	0,603	22,41	27,61
1,12	0,611	22,03	27,64
1,13	0,620	21,67	27,67
1,14	0,628	21,32	27,71
1,15	0,636	20,99	27,76
1,16	0,644	20,66	27,80
1,17	0,652	20,34	27,85
1,18	0,660	20,04	27,90
1,19	0,667	19,74	27,95
1,20	0,675	19,45	28,01
1,21	0,682	19,17	28,07
1,22	0,689	18,90	28,13
1,23	0,696	18,64	28,20
1,24	0,703	18,39	28,27
1,25	0,709	18,14	28,34
1,26	0,716	17,90	28,42
1,27	0,722	17,67	28,50
1,28	0,729	17,44	28,58
1,29	0,735	17,23	28,67
1,30	0,741	17,01	28,76
1,31	0,746	16,81	28,85
1,32	0,752	16,61	28,94
1,33	0,758	16,42	29,04
1,34	0,763	16,23	29,14
1,35	0,769	16,05	29,25
1,36	0,774	15,87	29,36
1,37	0,779	15,70	29,47
1,38	0,784	15,53	29,58
1,39	0,789	15,37	29,70
1,40	0,793	15,21	29,82
1,41	0,798	15,06	29,95
1,42	0,803	14,91	30,07
1,43	0,807	14,77	30,20
1,44	0,811	14,63	30,34
1,45	0,815	14,49	30,47
1,46	0,820	14,36	30,61
1,47	0,824	14,23	30,76
1,48	0,827	14,11	30,90
1,49	0,831	13,99	31,05
1,50	0,835	13,87	31,21

ly/lx	k <sub>x</sub>	m <sub>x</sub>	m <sub>y</sub>
1,50	0,835	13,87	31,21
1,51	0,839	13,75	31,36
1,52	0,842	13,64	31,52
1,53	0,846	13,53	31,68
1,54	0,849	13,43	31,85
1,55	0,852	13,32	32,01
1,56	0,855	13,22	32,18
1,57	0,859	13,13	32,36
1,58	0,862	13,03	32,53
1,59	0,865	12,94	32,71
1,60	0,868	12,85	32,80
1,61	0,870	12,76	33,08
1,62	0,873	12,68	33,27
1,63	0,876	12,59	33,46
1,64	0,878	12,51	33,65
1,65	0,881	12,43	33,85
1,66	0,884	12,35	34,04
1,67	0,886	12,28	34,24
1,68	0,888	12,21	34,45
1,69	0,891	12,13	34,65
1,70	0,893	12,06	34,87
1,71	0,895	12,00	35,08
1,72	0,897	11,93	35,29
1,73	0,899	11,86	35,51
1,74	0,902	11,80	35,73
1,75	0,904	11,74	35,95
1,76	0,906	11,68	36,17
1,77	0,907	11,62	36,40
1,78	0,909	11,56	36,63
1,79	0,911	11,51	36,86
1,80	0,913	11,45	37,10
1,81	0,915	11,40	37,33
1,82	0,916	11,34	37,58
1,83	0,918	11,29	37,82
1,84	0,920	11,24	38,06
1,85	0,921	11,19	38,31
1,86	0,923	11,15	38,56
1,87	0,924	11,10	38,81
1,88	0,926	11,05	39,07
1,89	0,927	11,01	39,32
1,90	0,929	10,96	39,58
1,91	0,930	10,92	39,84
1,92	0,931	10,88	40,10
1,93	0,933	10,84	40,37
1,94	0,934	10,80	40,63
1,95	0,935	10,76	40,91
1,96	0,936	10,72	41,18
1,97	0,938	10,68	41,45
1,98	0,939	10,64	41,73
1,99	0,940	10,60	42,01
2,00	0,941	10,57	42,29

## Cálculo de Lajes em Cruz – Marcus

### TABELA 2


 $L_x$ 
 $L_y$ 

$$M_x = \frac{q \cdot l_x^2}{m_x}$$

$$M_y = \frac{q \cdot l_x^2}{m_y}$$

$$X_x = \frac{-q \cdot l_x^2}{n_x}$$

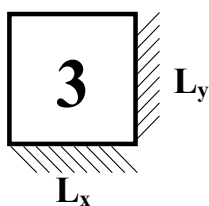
$$q_x = k_x \cdot q$$

ly/lx	k <sub>x</sub>	m <sub>x</sub>	n <sub>x</sub>	m <sub>y</sub>
0,50	0,135	140,93	59,20	45,13
0,51	0,145	132,95	55,31	44,11
0,52	0,154	125,68	51,77	43,22
0,53	0,165	119,03	48,56	42,38
0,54	0,175	112,94	45,64	41,60
0,55	0,186	107,35	42,97	40,88
0,56	0,197	102,20	40,54	40,21
0,57	0,209	97,46	38,32	39,60
0,58	0,220	93,08	36,28	39,03
0,59	0,232	89,03	34,41	38,51
0,60	0,245	85,28	32,69	38,04
0,61	0,257	81,79	31,11	37,60
0,62	0,270	78,55	29,66	37,20
0,63	0,282	75,53	28,31	36,83
0,64	0,295	72,71	27,07	36,49
0,65	0,308	70,07	25,93	36,19
0,66	0,322	67,60	24,86	35,92
0,67	0,335	65,28	23,88	35,67
0,68	0,348	63,10	22,97	35,44
0,69	0,362	61,05	22,12	35,25
0,70	0,375	59,12	21,33	35,07
0,71	0,388	57,30	20,59	34,92
0,72	0,402	55,58	19,91	34,78
0,73	0,415	53,95	19,27	34,67
0,74	0,428	52,41	18,67	34,57
0,75	0,442	50,94	18,11	34,50
0,76	0,455	49,56	17,59	34,44
0,77	0,468	48,24	17,10	34,39
0,78	0,481	46,98	16,64	34,36
0,79	0,493	45,79	16,21	34,35
0,80	0,506	44,65	15,81	34,35
0,81	0,518	43,56	15,43	34,36
0,82	0,531	42,53	15,08	34,39
0,83	0,543	41,54	14,74	34,42
0,84	0,554	40,60	14,43	34,48
0,85	0,566	39,69	14,13	34,54
0,86	0,578	38,83	13,85	34,62
0,87	0,589	38,01	13,59	34,70
0,88	0,600	37,22	13,34	34,80
0,89	0,611	36,46	13,10	34,91
0,90	0,621	35,73	12,88	35,03
0,91	0,632	35,04	12,67	35,16
0,92	0,642	34,37	12,47	35,29
0,93	0,652	33,73	12,28	35,44
0,94	0,661	33,12	12,10	35,60
0,95	0,671	32,53	11,93	35,77
0,96	0,680	31,97	11,77	35,95
0,97	0,689	31,43	11,61	36,13
0,98	0,697	30,91	11,47	36,33
0,99	0,706	30,41	11,33	36,53
1,00	0,714	29,93	11,20	36,74

ly/lx	k <sub>x</sub>	m <sub>x</sub>	n <sub>x</sub>	m <sub>y</sub>
1,00	0,714	29,93	11,20	36,74
1,02	0,730	29,02	10,96	37,19
1,04	0,745	28,18	10,73	37,68
1,06	0,759	27,41	10,53	38,19
1,08	0,773	26,69	10,35	38,74
1,10	0,785	26,02	10,18	39,31
1,12	0,797	25,40	10,03	39,92
1,14	0,808	24,83	9,89	40,55
1,16	0,819	24,29	9,77	41,21
1,18	0,829	23,79	9,65	41,90
1,20	0,838	23,33	9,45	42,62
1,22	0,847	22,89	9,44	43,36
1,24	0,855	22,49	9,35	44,13
1,26	0,863	22,11	9,27	44,93
1,28	0,870	21,75	9,19	45,75
1,30	0,877	21,42	9,12	46,59
1,32	0,884	21,11	9,05	47,46
1,34	0,889	20,82	8,99	48,34
1,36	0,895	20,54	8,93	49,26
1,38	0,901	20,28	8,88	50,20
1,40	0,906	20,04	8,83	51,15
1,42	0,910	19,81	8,79	52,14
1,44	0,915	19,59	8,74	53,14
1,46	0,919	19,39	8,70	54,16
1,48	0,923	19,20	8,67	55,21
1,50	0,927	19,01	8,63	56,28
1,52	0,930	18,84	8,60	57,36
1,54	0,934	18,68	8,57	58,47
1,56	0,937	18,52	8,54	59,60
1,58	0,940	18,37	8,51	60,74
1,60	0,942	18,23	8,49	61,91
1,62	0,945	18,10	8,46	63,11
1,64	0,948	17,97	8,44	64,31
1,66	0,950	17,85	8,42	65,53
1,68	0,952	17,74	8,40	66,78
1,70	0,954	17,63	8,38	68,04
1,72	0,956	17,52	8,36	69,33
1,74	0,958	17,42	8,35	70,63
1,76	0,960	17,33	8,33	71,96
1,78	0,962	17,25	8,32	73,30
1,80	0,963	17,15	8,30	74,65
1,82	0,965	17,07	8,29	76,03
1,84	0,966	16,99	8,28	77,42
1,86	0,968	16,91	8,27	78,85
1,88	0,969	16,84	8,26	80,27
1,90	0,970	16,77	8,24	81,73
1,92	0,971	16,70	8,23	83,18
1,94	0,972	16,64	8,23	84,67
1,96	0,974	16,57	8,22	86,19
1,98	0,975	16,51	8,21	87,70
2,00	0,976	16,46	8,20	89,22

### Cálculo de Lajes em Cruz – Marcus

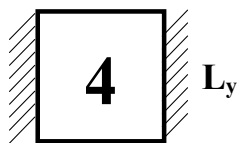
#### TABELA 3



$$M_x = \frac{q \cdot l_x^2}{m_x} \quad M_y = \frac{q \cdot l_x^2}{m_y} \quad X_x = \frac{-q \cdot l_x^2}{n_x} \quad X_y = \frac{-q \cdot l_x^2}{n_y} \quad q_x = k_x \cdot q$$

ly/lx	k <sub>x</sub>	m <sub>x</sub>	n <sub>x</sub>	m <sub>y</sub>	n <sub>y</sub>	ly/lx	k <sub>x</sub>	m <sub>x</sub>	n <sub>x</sub>	m <sub>y</sub>	n <sub>y</sub>
1,00	0,500	37,14	16,00	37,14	16,00	1,50	0,835	20,61	9,58	46,38	21,55
1,01	0,510	36,42	15,69	37,15	16,00	1,51	0,839	20,49	9,54	46,71	21,75
1,02	0,520	35,72	15,39	37,16	16,01	1,52	0,842	20,36	9,50	47,05	21,94
1,03	0,529	35,05	15,11	37,19	16,03	1,53	0,846	20,24	9,46	47,38	22,14
1,04	0,539	34,42	14,84	37,22	16,05	1,54	0,849	20,12	9,42	47,73	22,34
1,05	0,549	33,81	14,58	37,27	16,08	1,55	0,852	20,01	9,39	48,07	22,55
1,06	0,558	33,21	14,34	37,32	16,11	1,56	0,855	19,90	9,35	48,43	22,76
1,07	0,567	32,65	14,10	37,38	16,15	1,57	0,859	19,79	9,32	48,78	22,96
1,08	0,576	32,11	13,88	37,45	16,19	1,58	0,862	19,69	9,28	49,14	23,17
1,09	0,585	31,59	13,67	37,53	16,24	1,59	0,865	19,58	9,25	49,51	23,09
1,10	0,594	31,09	13,46	37,61	16,29	1,60	0,868	19,48	9,22	49,88	23,60
1,11	0,603	30,61	13,27	37,71	16,35	1,61	0,870	19,39	9,19	50,25	23,82
1,12	0,611	30,14	13,08	37,81	16,41	1,62	0,873	19,29	9,16	52,63	24,04
1,13	0,620	29,70	12,91	37,92	16,48	1,63	0,876	19,20	9,13	51,01	24,26
1,14	0,628	29,27	12,74	38,04	16,55	1,64	0,878	19,11	9,11	51,40	24,49
1,15	0,636	28,85	12,57	38,16	16,63	1,65	0,881	19,02	9,08	51,79	24,72
1,16	0,644	28,46	12,42	38,29	16,71	1,66	0,884	18,94	9,05	52,19	24,95
1,17	0,652	28,08	12,27	38,43	16,79	1,67	0,886	18,86	9,03	52,58	25,18
1,18	0,660	27,71	12,13	38,58	16,88	1,68	0,888	18,77	9,00	52,99	25,41
1,19	0,667	27,35	11,99	38,73	16,98	1,69	0,891	18,70	8,98	53,39	25,65
1,20	0,674	27,00	11,85	38,89	17,07	1,70	0,893	18,62	8,96	53,81	25,89
1,21	0,682	26,68	11,73	39,06	17,18	1,71	0,895	18,54	8,93	54,22	26,13
1,22	0,690	26,36	11,61	39,23	17,28	1,72	0,897	18,47	8,91	54,64	26,37
1,23	0,696	26,05	11,49	39,41	17,39	1,73	0,899	18,40	8,89	55,07	26,61
1,24	0,703	25,75	11,38	39,59	17,50	1,74	0,902	18,33	8,87	55,49	26,86
1,25	0,709	25,46	11,28	39,78	17,62	1,75	0,904	18,26	8,85	55,92	27,11
1,26	0,716	25,18	11,17	39,98	17,74	1,76	0,906	18,18	8,83	56,36	27,36
1,27	0,722	24,92	11,07	40,19	17,86	1,77	0,907	18,13	8,81	56,80	27,61
1,28	0,729	24,66	10,98	40,40	17,99	1,78	0,909	18,07	8,80	57,24	27,87
1,29	0,735	24,40	10,89	40,61	18,12	1,79	0,911	18,00	8,78	57,68	28,13
1,30	0,741	24,16	10,80	40,83	18,25	1,80	0,913	17,94	8,76	58,14	28,39
1,31	0,746	23,93	10,72	41,06	18,39	1,81	0,915	17,88	8,74	58,59	28,65
1,32	0,752	23,70	10,63	41,29	18,53	1,82	0,916	17,83	8,73	59,05	28,91
1,33	0,758	23,48	10,56	41,53	18,67	1,83	0,918	17,77	8,71	59,51	29,18
1,34	0,763	23,26	10,48	41,77	18,82	1,84	0,920	17,72	8,70	59,97	29,44
1,35	0,769	23,06	10,41	42,02	18,97	1,85	0,921	17,66	8,68	60,44	29,72
1,36	0,774	22,86	10,34	42,28	19,12	1,86	0,923	17,61	8,67	60,92	29,99
1,37	0,779	22,66	10,27	42,54	19,28	1,87	0,924	17,56	8,65	61,39	30,26
1,38	0,784	22,48	10,21	42,80	19,43	1,88	0,926	17,51	8,64	61,88	30,54
1,39	0,789	22,29	10,14	43,07	19,60	1,89	0,927	17,46	8,63	62,36	30,81
1,40	0,793	22,12	10,08	43,35	19,76	1,90	0,929	17,41	8,61	62,85	31,09
1,41	0,798	21,95	10,02	43,63	19,93	1,91	0,930	17,36	8,60	63,34	31,38
1,42	0,803	21,78	9,97	43,92	20,10	1,92	0,931	17,32	8,59	63,83	31,66
1,43	0,807	21,62	9,91	44,21	20,27	1,93	0,933	17,27	8,58	64,33	31,94
1,44	0,811	21,46	9,86	44,50	20,45	1,94	0,934	17,23	8,56	64,83	32,23
1,45	0,815	21,31	9,81	44,80	20,62	1,95	0,935	17,18	8,55	65,34	32,52
1,46	0,820	21,16	9,76	45,11	20,80	1,96	0,936	17,14	8,54	65,84	32,81
1,47	0,824	21,02	9,71	45,42	20,99	1,97	0,938	17,10	8,53	66,36	33,10
1,48	0,827	20,88	9,67	45,74	21,17	1,98	0,939	17,06	8,52	66,88	33,40
1,49	0,831	20,75	9,62	46,06	21,36	1,99	0,940	17,02	8,51	67,39	33,70
1,50	0,835	20,61	9,58	46,38	21,55	2,00	0,941	16,93	8,50	67,92	34,00

**Cálculo de Lajes em Cruz – Marcus**  
**TABELA 4**



$L_x$

$$M_x = \frac{q \cdot l_x^2}{m_x}$$

$$M_y = \frac{q \cdot l_x^2}{m_y}$$

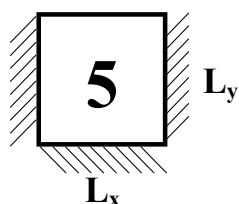
$$X_x = \frac{-q \cdot l_x^2}{n_x}$$

$$q_x = k_x \cdot q$$

ly/lx	k <sub>x</sub>	m <sub>x</sub>	n <sub>x</sub>	m <sub>y</sub>
0,50	0,238	137,06	50,40	49,92
0,51	0,253	130,06	47,48	49,11
0,52	0,268	123,66	44,83	48,38
0,53	0,283	117,79	42,42	47,72
0,54	0,298	112,39	40,23	47,13
0,55	0,314	107,42	38,23	46,60
0,56	0,330	102,83	36,40	46,13
0,57	0,345	98,59	34,74	45,72
0,58	0,361	94,67	33,21	45,35
0,59	0,377	91,02	31,81	45,04
0,60	0,393	87,62	30,52	44,77
0,61	0,409	84,46	29,33	44,54
0,62	0,425	81,51	28,24	44,35
0,63	0,441	78,76	27,24	44,21
0,64	0,456	76,18	26,30	44,10
0,65	0,472	73,76	25,45	44,02
0,66	0,487	71,49	24,65	43,98
0,67	0,502	69,36	23,91	43,97
0,68	0,517	67,36	23,22	43,98
0,69	0,531	65,47	22,59	44,03
0,70	0,545	63,69	22,00	44,11
0,71	0,559	62,01	21,44	44,21
0,72	0,573	60,42	20,93	44,34
0,73	0,587	58,92	20,45	44,49
0,74	0,600	57,51	20,00	44,66
0,75	0,613	56,16	19,58	44,86
0,76	0,625	54,89	19,19	45,08
0,77	0,637	53,69	18,83	45,33
0,78	0,649	52,54	18,48	45,59
0,79	0,661	51,46	18,16	45,87
0,80	0,672	50,42	17,86	46,17
0,81	0,683	49,44	17,57	46,30
0,82	0,693	48,51	17,31	46,84
0,83	0,703	47,62	17,06	47,20
0,84	0,713	46,78	16,82	47,57
0,85	0,723	45,97	16,60	47,97
0,86	0,732	45,21	16,39	48,38
0,87	0,741	44,48	16,19	48,81
0,88	0,750	43,78	16,00	49,25
0,89	0,758	43,12	15,82	49,71
0,90	0,766	42,48	15,66	50,19
0,91	0,774	41,87	15,50	50,68
0,92	0,782	41,30	15,35	51,18
0,93	0,789	40,74	15,21	51,50
0,94	0,796	40,21	15,07	52,24
0,95	0,803	39,70	14,95	52,78
0,96	0,809	39,22	14,82	53,35
0,97	0,816	38,75	14,72	53,92
0,98	0,822	38,31	14,60	54,52
0,99	0,828	37,88	14,50	55,12
1,00	0,833	37,47	14,40	55,74

ly/lx	k <sub>x</sub>	m <sub>x</sub>	n <sub>x</sub>	m <sub>y</sub>
1,00	0,833	37,47	14,40	55,74
1,02	0,844	36,71	14,22	57,01
1,04	0,854	36,00	14,05	58,33
1,06	0,863	35,34	13,90	59,70
1,08	0,872	34,74	13,76	61,12
1,10	0,880	34,18	13,64	62,59
1,12	0,887	33,66	13,52	64,10
1,14	0,894	33,18	13,42	65,66
1,16	0,900	32,74	13,32	67,26
1,18	0,906	32,32	13,24	68,91
1,20	0,912	31,93	13,16	70,60
1,22	0,917	31,57	13,08	72,33
1,24	0,922	31,23	13,01	74,11
1,26	0,926	30,92	12,95	75,92
1,28	0,931	30,62	12,89	77,78
1,30	0,934	30,34	12,84	79,66
1,32	0,938	30,08	12,79	81,60
1,34	0,942	29,83	12,74	83,58
1,36	0,945	29,60	12,70	85,58
1,38	0,948	29,39	12,66	87,63
1,40	0,950	29,18	12,62	89,72
1,42	0,953	28,99	12,59	91,84
1,44	0,955	28,80	12,56	94,01
1,46	0,958	28,63	12,53	96,20
1,48	0,960	28,47	12,50	98,45
1,50	0,962	28,31	12,47	100,72
1,52	0,964	28,16	12,45	103,02
1,54	0,966	28,02	12,43	105,38
1,56	0,967	27,89	12,40	107,76
1,58	0,969	27,76	12,38	110,16
1,60	0,970	27,64	12,37	112,61
1,62	0,972	27,53	12,35	115,12
1,64	0,973	27,42	12,33	117,62
1,66	0,974	27,31	12,32	120,17
1,68	0,975	27,21	12,30	122,76
1,70	0,977	27,12	12,29	125,41
1,72	0,978	27,03	12,27	128,04
1,74	0,979	26,94	12,26	130,75
1,76	0,800	26,86	12,25	133,50
1,78	0,980	26,78	12,24	136,24
1,80	0,981	26,70	12,23	139,05
1,82	0,982	26,63	12,22	141,85
1,84	0,983	26,56	12,21	144,78
1,86	0,983	26,49	12,20	147,65
1,88	0,984	26,43	12,19	150,60
1,90	0,985	26,37	12,18	153,54
1,92	0,985	26,31	12,18	156,53
1,94	0,986	26,25	12,17	159,56
1,96	0,987	26,19	12,16	162,60
1,98	0,987	26,14	12,16	165,75
2,00	0,988	26,09	12,15	168,89

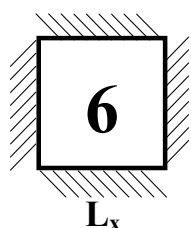
**Cálculo de Lajes em Cruz – Marcus**  
**TABELA 5**



$$M_x = \frac{q \cdot l_x^2}{m_x} \quad M_y = \frac{q \cdot l_x^2}{m_y} \quad X_x = \frac{-q \cdot l_x^2}{n_x} \quad X_y = \frac{-q \cdot l_x^2}{n_y} \quad q_x = k_x \cdot q$$

ly/lx	k <sub>x</sub>	m <sub>x</sub>	n <sub>x</sub>	m <sub>y</sub>	n <sub>y</sub>	ly/lx	k <sub>x</sub>	m <sub>x</sub>	n <sub>x</sub>	m <sub>y</sub>	n <sub>y</sub>
0,50	0,111	246,52	108,00	71,43	36,00	1,00	0,667	44,18	18,00	50,56	24,00
0,51	0,119	230,76	100,70	69,53	34,92	1,02	0,684	42,92	17,54	51,14	24,33
0,52	0,127	216,51	95,07	67,77	33,91	1,04	0,700	41,77	17,13	51,76	24,70
0,53	0,136	203,52	88,05	66,13	32,97	1,06	0,716	40,71	16,75	52,44	25,10
0,54	0,145	191,66	82,56	64,60	32,10	1,08	0,731	39,74	16,41	53,18	25,52
0,55	0,155	180,83	77,57	63,18	31,29	1,10	0,745	38,84	16,10	53,95	25,97
0,56	0,164	170,91	73,01	61,86	30,53	1,12	0,759	38,01	15,81	54,78	26,45
0,57	0,174	161,79	68,84	60,63	29,82	1,14	0,772	37,25	15,55	55,64	26,95
0,58	0,184	153,42	65,02	59,49	29,16	1,16	0,784	36,54	15,31	56,55	27,47
0,59	0,195	145,72	61,52	58,42	28,55	1,18	0,795	35,88	15,09	57,50	28,02
0,60	0,206	138,61	58,30	57,43	27,98	1,20	0,806	35,27	14,89	58,50	28,59
0,61	0,217	132,05	55,34	56,52	27,45	1,22	0,816	34,70	14,71	59,53	29,19
0,62	0,228	125,98	52,61	55,67	26,96	1,24	0,825	34,17	14,54	60,60	29,80
0,63	0,239	120,36	50,09	54,88	26,51	1,26	0,834	33,68	14,38	61,71	30,44
0,64	0,251	115,15	47,76	54,15	26,08	1,28	0,843	33,22	14,23	62,85	31,10
0,65	0,263	110,30	45,61	53,48	25,69	1,30	0,851	32,79	14,10	64,03	31,77
0,66	0,275	105,81	43,62	52,85	25,33	1,32	0,859	32,38	13,98	65,25	32,47
0,67	0,287	101,61	41,77	52,28	25,00	1,34	0,866	32,01	13,86	66,50	33,18
0,68	0,299	97,70	40,06	51,76	24,70	1,36	0,872	31,65	13,75	66,78	33,92
0,69	0,312	94,06	38,47	51,28	24,42	1,38	0,879	31,02	13,65	69,10	34,67
0,70	0,324	90,65	36,99	50,84	24,17	1,40	0,885	31,01	13,56	70,45	35,44
0,71	0,337	87,46	35,61	50,45	23,93	1,42	0,890	30,72	13,47	71,83	36,23
0,72	0,349	84,48	34,33	50,09	23,73	1,44	0,896	30,44	13,39	73,24	37,03
0,73	0,362	81,68	33,13	49,77	23,54	1,46	0,901	30,18	13,32	74,69	37,86
0,74	0,375	82,05	32,48	49,05	23,37	1,48	0,906	29,94	13,25	76,17	38,70
0,75	0,387	76,58	30,96	49,23	23,22	1,50	0,910	29,71	13,18	77,67	39,55
0,76	0,400	74,26	29,98	49,00	23,09	1,52	0,914	29,49	13,12	79,20	40,43
0,77	0,413	72,08	29,07	48,81	22,98	1,54	0,918	29,28	13,07	80,77	41,32
0,78	0,425	70,02	28,21	48,65	22,88	1,56	0,922	29,09	13,01	82,36	42,22
0,79	0,438	68,08	27,40	48,51	22,80	1,58	0,926	28,90	12,96	83,98	43,14
0,80	0,450	66,24	26,65	48,40	22,74	1,60	0,929	28,73	12,91	85,64	44,08
0,81	0,463	64,51	25,94	48,32	22,69	1,62	0,932	28,56	12,87	87,31	45,03
0,82	0,475	62,88	25,27	48,26	22,65	1,64	0,935	28,40	12,83	89,02	46,00
0,83	0,487	61,33	24,64	48,22	22,63	1,66	0,938	28,25	12,79	90,77	46,99
0,84	0,499	59,86	24,05	48,21	22,63	1,68	0,941	28,11	12,75	92,52	47,98
0,85	0,511	58,47	23,49	48,22	22,63	1,70	0,943	27,97	12,72	94,32	49,00
0,86	0,522	57,15	22,97	48,25	22,65	1,72	0,946	27,84	12,68	96,13	50,03
0,87	0,543	55,90	22,47	48,30	22,68	1,74	0,948	27,72	12,65	97,98	51,08
0,88	0,545	54,71	22,00	48,37	22,72	1,76	0,950	27,60	12,62	99,86	52,14
0,89	0,558	53,58	21,56	48,46	22,77	1,78	0,952	27,49	12,60	101,75	53,21
0,90	0,567	52,51	21,14	48,57	22,84	1,80	0,954	27,38	12,57	103,68	54,30
0,91	0,578	51,49	20,75	48,69	22,91	1,82	0,956	27,28	12,55	105,63	55,41
0,92	0,589	50,51	20,37	48,83	22,99	1,84	0,958	27,18	12,52	107,62	56,63
0,93	0,599	49,59	20,02	48,99	23,09	1,86	0,960	27,09	12,50	109,63	57,67
0,94	0,610	48,70	19,68	49,17	23,19	1,88	0,961	27,00	12,48	111,65	58,81
0,95	0,620	47,86	19,37	49,06	23,30	1,90	0,963	26,91	12,46	110,71	59,97
0,96	0,629	47,06	19,06	49,57	23,42	1,92	0,964	26,83	12,44	115,79	61,15
0,97	0,639	46,29	18,78	49,80	23,56	1,94	0,966	26,75	12,42	117,89	62,33
0,98	0,648	45,55	18,50	50,04	23,70	1,96	0,967	26,68	12,41	120,04	63,55
0,99	0,658	44,85	18,25	50,29	23,84	1,98	0,968	26,61	12,39	122,19	64,76
1,00	0,667	44,18	18,00	50,56	24,00	2,00	0,970	26,54	12,37	124,35	65,98

**Cálculo de Lajes em Cruz – Marcus**  
**TABELA 6**



$$M_x = \frac{q \cdot l_x^2}{m_x}$$

$$M_y = \frac{q \cdot l_x^2}{m_y}$$

$$X_x = \frac{-q \cdot l_x^2}{n_x}$$

$$X_y = \frac{-q \cdot l_x^2}{n_y}$$

$$q_x = k_x \cdot q$$

ly/lx	k <sub>x</sub>	m <sub>x</sub>	n <sub>x</sub>	m <sub>y</sub>	n <sub>y</sub>
1,00	0,500	55,74	24,00	55,74	24,00
1,01	0,510	54,65	32,53	55,75	24,00
1,02	0,520	53,61	32,09	55,78	24,02
1,03	0,529	52,62	22,66	55,82	24,04
1,04	0,539	51,76	22,26	55,88	24,07
1,05	0,549	50,76	21,87	55,96	24,11
1,06	0,558	49,89	21,50	56,06	24,16
1,07	0,567	49,06	21,15	56,17	24,22
1,08	0,576	48,27	20,82	56,30	24,28
1,09	0,585	47,50	20,50	56,44	24,36
1,10	0,594	46,77	20,20	56,59	24,44
1,11	0,603	46,07	19,90	56,76	24,52
1,12	0,611	45,40	19,63	56,95	24,62
1,13	0,620	44,75	19,36	57,14	24,72
1,14	0,628	44,13	19,10	57,36	24,83
1,15	0,636	43,54	18,86	57,58	24,94
1,16	0,644	42,97	18,63	57,82	25,06
1,17	0,652	42,42	18,40	58,07	25,19
1,18	0,660	41,89	18,19	58,33	25,33
1,19	0,667	41,38	17,98	58,60	25,47
1,20	0,675	40,90	17,79	58,89	25,61
1,21	0,682	40,42	17,60	59,19	25,76
1,22	0,689	39,97	17,42	59,49	25,92
1,23	0,696	39,54	17,24	59,81	26,09
1,24	0,703	39,12	17,07	60,15	26,25
1,25	0,709	38,71	16,91	60,49	26,43
1,26	0,716	38,32	16,76	60,84	26,61
1,27	0,722	37,95	16,61	61,20	26,79
1,28	0,729	37,58	16,47	61,57	26,98
1,29	0,735	37,23	16,33	61,96	27,18
1,30	0,741	36,89	16,20	62,05	27,38
1,31	0,746	36,57	16,07	62,75	27,58
1,32	0,752	36,25	15,95	63,16	27,79
1,33	0,758	35,95	15,83	63,59	28,01
1,34	0,763	35,65	15,72	64,02	28,23
1,35	0,769	35,37	15,61	64,46	28,45
1,36	0,774	35,09	15,51	64,91	28,68
1,37	0,779	34,83	15,41	65,36	28,91
1,38	0,784	34,57	15,31	65,83	29,15
1,39	0,789	34,32	15,21	66,31	29,39
1,40	0,793	34,08	15,12	66,79	29,64
1,41	0,798	33,85	15,04	67,29	29,89
1,42	0,803	33,62	14,95	67,79	30,15
1,43	0,807	33,40	14,87	68,30	30,40
1,44	0,811	33,19	14,79	68,82	30,67
1,45	0,815	32,98	14,71	69,34	30,94
1,46	0,820	32,78	14,64	69,88	31,21
1,47	0,824	32,59	14,57	70,42	31,48
1,48	0,827	32,40	14,50	70,97	31,76
1,49	0,831	32,22	14,43	71,53	32,04
1,50	0,835	32,04	14,37	72,10	32,33

ly/lx	k <sub>x</sub>	m <sub>x</sub>	n <sub>x</sub>	m <sub>y</sub>	n <sub>y</sub>
1,50	0,835	32,04	14,37	72,10	32,33
1,51	0,839	31,87	14,31	72,67	32,62
1,52	0,842	31,71	14,25	73,25	32,92
1,53	0,846	31,54	14,19	73,84	33,22
1,54	0,849	31,39	14,13	74,44	33,52
1,55	0,852	31,24	14,08	75,04	33,82
1,56	0,855	31,09	14,03	75,65	34,13
1,57	0,859	30,94	13,97	76,27	34,45
1,58	0,862	30,80	13,92	76,90	34,79
1,59	0,865	30,67	13,88	77,52	35,08
1,60	0,868	30,54	13,83	78,17	35,41
1,61	0,870	30,41	13,79	78,81	35,73
1,62	0,873	30,28	13,74	79,47	36,06
1,63	0,876	30,16	13,70	80,13	36,40
1,64	0,878	30,04	13,66	80,80	36,74
1,65	0,881	29,93	13,62	81,48	37,08
1,66	0,884	29,82	13,58	82,16	37,42
1,67	0,886	29,71	13,54	82,84	37,77
1,68	0,888	29,60	13,51	83,54	38,12
1,69	0,891	29,50	13,47	84,24	38,47
1,70	0,893	29,40	13,44	84,95	38,83
1,71	0,895	29,30	13,40	85,67	39,19
1,72	0,897	29,20	13,37	86,38	39,55
1,73	0,899	29,11	13,34	87,12	39,92
1,74	0,902	29,02	13,31	87,85	40,29
1,75	0,904	28,93	13,28	88,60	40,67
1,76	0,906	28,84	13,25	89,34	41,04
1,77	0,907	28,76	13,22	90,09	41,42
1,78	0,909	28,68	13,19	90,86	41,81
1,79	0,911	28,60	13,17	91,61	42,19
1,80	0,913	28,52	13,14	92,39	42,58
1,81	0,915	28,44	13,12	93,17	42,97
1,82	0,916	28,37	13,09	93,96	43,37
1,83	0,918	28,29	13,07	94,75	43,77
1,84	0,920	28,22	13,05	95,54	44,17
1,85	0,921	28,15	13,02	96,35	44,57
1,86	0,923	28,09	13,00	97,16	44,98
1,87	0,924	28,02	12,98	97,98	45,09
1,88	0,926	27,95	12,96	98,80	45,81
1,89	0,927	27,89	12,94	99,62	46,22
1,90	0,929	27,83	12,92	100,46	46,64
1,91	0,930	27,77	12,90	101,30	47,06
1,92	0,931	27,71	12,88	102,14	47,49
1,93	0,933	27,65	12,86	103,00	47,92
1,94	0,934	27,60	12,85	103,85	48,35
1,95	0,935	27,54	12,83	104,72	48,78
1,96	0,936	27,49	12,81	105,58	49,21
1,97	0,938	27,43	12,80	106,45	49,65
1,98	0,939	27,38	12,78	107,35	50,10
1,99	0,940	27,33	12,76	108,23	50,55
2,00	0,941	27,28	12,75	109,12	50,99

## ANEXO B – TABELA DE BARES

Tabela 2.5a									
FLECHAS EM LAJES COM CARGA UNIFORME – VALORES DE $\alpha$									
$\lambda = \frac{L_y}{L_x}$	Tipo de Laje								
	1	2A	2B	3	4A	4B	5A	5B	6
1,00	4,76	3,26	3,26	2,46	2,25	2,25	1,84	1,84	1,49
1,05	5,26	3,68	3,48	2,72	2,60	2,35	2,08	1,96	1,63
1,10	5,74	4,11	3,70	2,96	2,97	2,45	2,31	2,08	1,77
1,15	6,20	4,55	3,89	3,18	3,35	2,53	2,54	2,18	1,90
1,20	6,64	5,00	4,09	3,40	3,74	2,61	2,77	2,28	2,02
1,25	7,08	5,44	4,26	3,61	4,14	2,68	3,00	2,37	2,14
1,30	7,49	5,88	4,43	3,80	4,56	2,74	3,22	2,46	2,24
1,35	7,90	6,32	4,58	3,99	5,01	2,77	3,42	2,53	2,34
1,40	8,29	6,74	4,73	4,15	5,41	2,80	3,62	2,61	2,41
1,45	8,67	7,15	4,87	4,31	5,83	2,85	3,80	2,67	2,49
1,50	9,03	7,55	5,01	4,46	6,25	2,89	3,98	2,73	2,56
1,55	9,39	7,95	5,09	4,61	6,66	2,91	4,14	2,78	2,62
1,60	9,71	8,32	5,18	4,73	7,06	2,92	4,30	2,82	2,68
1,65	10,04	8,68	5,22	4,86	7,46	2,92	4,45	2,83	2,73
1,70	10,34	9,03	5,26	4,97	7,84	2,93	4,59	2,84	2,77
1,75	10,62	9,36	5,36	5,06	8,21	2,93	4,71	2,86	2,81
1,80	10,91	9,69	5,46	5,16	8,58	2,94	4,84	2,88	2,85
1,85	11,16	10,00	5,53	5,25	8,93	2,94	4,96	2,90	2,88
1,90	11,41	10,29	5,60	5,33	9,25	2,95	5,07	2,92	2,90
1,95	11,65	10,58	5,68	5,41	9,58	2,95	5,17	2,94	2,93
2,00	11,89	10,87	5,76	5,49	9,90	2,96	5,28	2,96	2,96
$\infty$	15,63	15,63	6,50	6,50	15,63	3,13	6,50	3,13	3,13

Valores extraídos de BARES (1972) e adaptados por L.M. Pinheiro.

$$\alpha_i = \frac{\alpha}{100} \cdot \frac{b}{12} \cdot \frac{q \cdot l_x^4}{E_c \cdot I}$$

b = largura da seção                       $l_x$  = menor vão                       $E_c$  = módulo de elasticidade  
p = carga uniforme                           $l_y$  = maior vão                          I = momento de inércia

