

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

GEORGE GABRIEL HAUBERT

ESTUDO DE ANÁLISES LINEAR E NÃO LINEAR APLICADO A FLAMBAGEM

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PATO BRANCO

2017

GEORGE GABRIEL HAUBERT

ESTUDO DE ANÁLISES LINEAR E NÃO LINEAR APLICADO A FLAMBAGEM

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do Curso de Engenharia Mecânica da Coordenação de Engenharia Mecânica – COEME – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Câmpus Pato Branco, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Villaca Santos

PATO BRANCO

2017

FOLHA DE APROVAÇÃO

ESTUDO DE ANÁLISES LINEAR E NÃO LINEAR APLICADO A FLAMBAGEM

George Gabriel Haubert

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado no dia 16/11/2017 como requisito parcial para a obtenção do Título de Engenheiro Mecânico, do curso de Engenharia Mecânica do Departamento Acadêmico de Mecânica (DAMEC) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Pato Branco (UTFPR-PB). O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora julgou o trabalho **APROVADO**.

Prof. Dr. Dalmarino Setti
(UTFPR – Departamento de Mecânica)

Prof. Dr. Fábio Rodrigo Mandello Rodrigues
(UTFPR – Departamento de Mecânica)

Prof. Dr. Rodrigo Villaca Santos
(UTFPR – Departamento de Mecânica)
Orientador

Prof. Dr. Bruno Bellini Medeiros
Responsável pelo TCC do Curso de Eng. Mecânica

*A FOLHA DE APROVAÇÃO ASSINADA ENCONTRA-SE NA COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

RESUMO

HAUBERT, George G. Estudo de análises linear e não linear aplicado a flambagem. 2017. 51f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2017.

A flambagem pode ser considerada como uma falha devido à instabilidade estrutural. Aplicações tanto de projeto como de engenharia onde estão envolvidos elementos esbeltos, a falha por flambagem deve ser verificada. Neste contexto esta pesquisa apresenta um estudo teórico utilizando análises estáticas linear e não linear através do método dos elementos finitos, aplicado a flambagem, com objetivo de comparar os dois modos de análise e as cargas críticas. Inicialmente se discute os conceitos de flambagem, método dos elementos finitos, análises linear e não linear e das variáveis necessárias para o estudo. A metodologia utilizada para realização das análises estáticas lineares se fez por meio do método do autovalor e autovetor e, para as análises não lineares utilizou-se o método do controle deslocamento. O estudo foi aplicado a dois exemplos numéricos utilizando perfis metálicos estruturais de geometria comercial, um perfil de seção transversal em “I” e um em “U”. foram obtidas as cargas críticas para as duas geometrias pelos dois modos de análise e avaliados os resultados. E como resultado foi observado que as análises não lineares apresentaram valores mais conservadores de cargas críticas, 2,16% inferior para o perfil “U” e 4,65% menor para o perfil “I”, além disso, com as análises não lineares consegue-se descrever uma maior quantidade de informações sobre a evolução do carregamento.

Palavras-chave: Análise linear. Análise não linear. Método dos elementos finitos. Flambagem.

ABSTRACT

HAUBERT, George G. **Study of linear and non-linear analysis applied to buckling**. 2017. 51f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2017.

Buckling can be considered a failure due to structural instability. Both design and engineering applications where slender elements are involved, buckling failure must be verified. In this context this research presents a theoretical study using linear and nonlinear static analysis through the finite element method, applied to buckling, with the objective of comparing the two modes of analysis and the critical loads. Initially, the concepts of buckling, finite element method, linear and non-linear analysis and the variables required for the study are discussed. The methodology used to perform linear static analyzes was done using the eigenvalue and eigenvector method and, for non-linear analyzes, the displacement control method was used. The study was applied to two numerical examples using structural metal profiles of commercial geometry, an "I" and an "U" cross section profile. The critical loads for the two geometries were obtained by the two modes of analysis and evaluated the results. As a result, it was observed that non-linear analyses presented more conservative values of critical loads, 2.16% lower for the "U" profile and 4.65% smaller for the "I" profile, in addition to the non-linear analysis a greater amount of information about the evolution of the load can be described.

Keywords: Linear analysis. Non-linear analysis. Finite element method. Buckling.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Condições de contorno e comprimentos efetivos de flambagem.....	20
Figura 2 - Geometria de elementos finitos	21
Figura 3 - Tipos de elementos.....	23
Figura 4 - Sistema força deslocamento de uma mola	24
Figura 5 - Curva característica de análise linear	25
Figura 6 - Curva característica de análise não linear	26
Figura 7 - Curvas de flambagem	28
Figura 8 - Perfil “U”	32
Figura 9 - Perfil “I”	32
Figura 10 - Curva tensão deformação do material	33
Figura 11 - Elemento Beam 189.....	34
Figura 12 - Malha, condições de contorno e carregamento, perfil “U”, análise linear	37
Figura 13 – Modo de falha, perfil “U”, análise linear.....	38
Figura 14 - Malha, condições de contorno e carregamento, perfil “U”, análise não linear	38
Figura 15 - Deslocamento, perfil “U”, análise não linear	39
Figura 16 - Força, perfil “U”, análise não linear	39
Figura 17 - Modo de falha, perfil “U”, análise não linear.....	39
Figura 18 - Gráfico Força x Deslocamento, perfil “U”	40
Figura 19 - Malha, condições de contorno e carregamento, perfil “I”, análise linear .	41
Figura 20 - Modo de falha, perfil “I”, análise linear	41
Figura 21 - Malha, condições de contorno e carregamento, perfil “I”, análise não linear	42
Figura 22 - Deslocamento, perfil “I”, análise não linear	42
Figura 23 - Força, perfil “I”, análise não linear.....	43
Figura 24 - Modo de falha, perfil “I”, análise não linear	43
Figura 25 - Gráfico Força x Deslocamento, perfil “I”.....	44
Figura 26 - Resultados	44

LISTA DE SÍMBOLOS

P_{cr}	Carga crítica de flambagem
σ_{cr}	Tensão crítica de flambagem
S_r	Índice de esbeltez
l	Comprimento da coluna
k	Raio de giração
I	Momento de inércia de área
A	Área de seção transversal
E	Módulo de elasticidade do material
l_{ef}	Comprimento efetivo
$\{F\}$	Matriz coluna de cargas nodais
$[K]$	Matriz de rigidez inicial
$\{U\}$	Matriz coluna de deslocamento
$[K_G]$	Matriz de correção da rigidez
$[S]$	Matriz de rigidez de tensão
λ_i	Autovalores
$\{\psi\}_i$	Matriz coluna de autovetores de deslocamento
λ	Autovalor
F_0	Carga inicial

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
1.1 OBJETIVO GERAL.....	16
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	16
1.3 JUSTIFICATIVA	16
2 REFERENCIAL TEÓRICO	19
2.1 FLAMBAGEM.....	19
2.2 ELEMENTOS FINITOS	21
2.3 ANÁLISE LINEAR	24
2.4 ANÁLISE NÃO LINEAR.....	26
2.5 ANÁLISE LINEAR E NÃO LINEAR	27
3 METODOLOGIA	31
3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	31
3.2 DEFINIÇÃO DA ANÁLISE NUMÉRICA.....	31
3.2.1 Perfis das Estruturas	31
3.2.2 Material.....	33
3.2.3 Malha.....	33
3.2.4 Carregamentos e Condições de Contorno	34
3.3 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	35
3.4 ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS	35
3.5 APRESENTAÇÃO DAS CONCLUSÕES.....	36
4 RESULTADOS	37
4.1 PERFIL “U”	37
4.2 PERFIL “I”	40
5 CONCLUSÃO	47
REFERÊNCIAS	49

1 INTRODUÇÃO

Flambagem é o fenômeno de deflexão de um corpo causado por um carregamento compressivo uniaxial, tal que esta deflexão é perpendicular à direção do carregamento, ou seja, é uma deflexão lateral, que caracteriza uma falha súbita do mecanismo ou estrutura.

Em corpos esbeltos, os quais são considerados elementos onde a dimensão do seu comprimento é muito superior a dimensão da sua espessura, a carga necessária para que ocorra a flambagem pode ser menor que a carga de escoamento. A falha por flambagem, podendo ocorrer antes do escoamento, faz com que a determinação da carga crítica seja relevante, principalmente em projetos que apresentam elementos esbeltos, de baixa espessura ou cascas finas, pois estes componentes são suscetíveis a flambagem.

A carga crítica de flambagem pode ser determinada de maneira analítica através de equações que consideram um regime linear elástico de solitação mecânica do componente. Por outro lado, com a utilização de ferramentas de desenho auxiliado por computador (CAD) e de engenharia auxiliada por computador (CAE), permitem análises mais complexas por meio do uso de análises por elementos finitos (FEA).

O uso destas ferramentas computacionais possibilita a obtenção de valores de tensão, deformação e demais características mecânicas de componentes que possuem geometrias complexas, os quais seriam praticamente impossíveis de calcular analiticamente. Todavia, o conhecimento sólido da teoria por trás destas ferramentas é essencial para a correta utilização e avaliação dos resultados encontrados.

O objetivo deste trabalho é comparar os métodos de análises linear e não linear de flambagem em relação ao método de cálculo e aos resultados obtidos para carga crítica através de *software* de elementos finitos ANSYS Mechanical 16.2. Esta comparação é feita através da análise dos gráficos de força *versus* deslocamento aplicado a duas geometrias, obtidos por meio dos dois métodos de análise utilizando o método dos elementos finitos.

1.1 OBJETIVO GERAL

Este trabalho tem como objetivo geral determinar a carga crítica de flambagem para duas estruturas, por meio de análises linear e não linear pelo método dos elementos finitos, utilizando *software* ANSYS Mechanical 16.2, buscando verificar e comparar os valores obtidos de carga crítica.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

. A fim de cumprir o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos são desenvolvidos:

- Revisar os conceitos de flambagem, ao método dos elementos finitos, as análises linear e não linear de flambagem via elementos finitos;
- Modelagem 3D dos componentes por meio de *software* CAD;
- Determinar as condições de contorno e carregamentos do problema;
- Calcular as cargas críticas de flambagem pelas análises linear e não linear utilizando o *software* de elementos finitos;
- Apresentar os resultados através das comparações das análises tanto em valor de carga crítica como em tempo computacional.

1.3 JUSTIFICATIVA

A tradicional e crescente necessidade de economia de materiais e recursos na engenharia, faz com que cada vez mais elementos esbeltos estejam presentes em diversos componentes mecânicos e estruturais. Assim, com o desenvolvimento de novos materiais, os quais possuem maior resistência específica, auxiliam no dimensionamento de elementos cada vez mais finos e leves.

No entanto estes componentes podem apresentar falha por flambagem quando solicitados a cargas muito inferiores a carga de escoamento, logo, o domínio dos conceitos e métodos de análise de flambagem é essencial para a Engenharia.

Além disso o método dos elementos finitos é uma ferramenta importantíssima para a agilidade e eficiência de projetos. É uma ferramenta praticamente indispensável para o engenheiro manter-se competitivo no mercado de

trabalho, pois possibilita analisar o comportamento de praticamente qualquer sistema físico regido por equações diferenciais ou integrais.

Entretanto, devido a este cenário, o desenvolvimento deste trabalho visa aprofundar os conhecimentos referentes ao método dos elementos finitos e as análises linear e não linear para obtenção da carga crítica de flambagem.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos e definições fundamentais sobre flambagem e elementos finitos. Posteriormente, é mostrada uma revisão sobre análises linear e não linear e, por fim, um comparativo é feito entre estas duas análises.

2.1 FLAMBAGEM

Colunas sob compressão axial podem falhar de dois modos: escoamento e flambagem. Quando se trata de colunas curtas, o modo predominante de falha é o escoamento, no entanto, para colunas médias ou longas a falha ocorre por flambagem. A flambagem é um modo crítico de falha, pois ocorre instantaneamente, sem manifestação prévia. E a tensão crítica de flambagem pode ser bem menor que a tensão de escoamento do material, por isso, é imprescindível o conhecimento dos métodos de análise da carga crítica (NORTON, 2013).

A flambagem é um fenômeno de instabilidade estrutural, caracterizado pelo surgimento de uma deflexão lateral em elementos sujeitos a compressão axial. Componentes compridos e esbeltos sob carregamento axial compressivo são denominados colunas e a deflexão lateral que sofrem é denominada flambagem (HIBBELER, 2004).

Colunas são determinadas longas quando o seu índice de esbeltez é maior ou igual a 10, caracterizando um corpo suscetível a falha por flambagem. Assim a carga crítica destes elementos deve ser calculada (NORTON, 2013).

O índice de esbeltez S_r determina se a coluna é longa ou curta e é definido por:

$$S_r = \frac{l}{k} \quad (2.1)$$

onde l é o comprimento da coluna e k é o raio de giração. O raio de giração é calculado pela seguinte equação:

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (2.2)$$

onde I é o menor momento de inércia da seção transversal de área A .

Elementos esbeltos estão presentes em diversos componentes mecânicos e estruturais, como partes de aeronaves, reatores nucleares, silos, tanques de

resfriamento e armazenamento de líquidos e sólidos a granel, tubulações, trilhos de trem, latas de armazenamento de alimentos e bebidas, estruturas de construção civil e muitos outros itens (ROTTER; TENG, 2004).

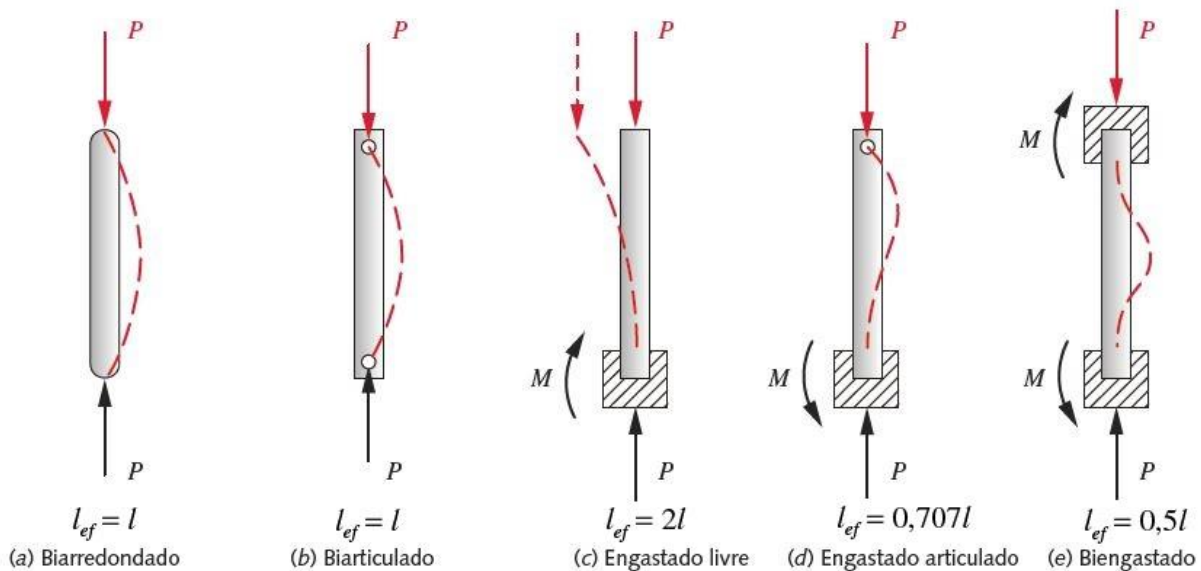
Chama-se de carga crítica, P_{cr} , a carga axial máxima que o componente pode suportar sem que ocorra a flambagem, e de tensão crítica, σ_{cr} , a tensão máxima correspondente à carga crítica. Qualquer incremento de carga além do valor crítico provoca a flambagem (TIMOSHENKO; GERE, 2009).

A carga crítica, obtida pela análise linear, de modo generalizado para flambagem de colunas com extremidades arredondadas ou biarticuladas pode ser calculada analiticamente por meio da fórmula de Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (2.3)$$

sendo E o módulo de elasticidade do material e as demais variáveis já foram descritas anteriormente. Para condições de contorno diferentes da biarticulada, utilizam-se para cálculo da carga crítica os comprimentos efetivos, l_{ef} , contidos na Figura 1 (NORTON, 2013).

Figura 1 - Condições de contorno e comprimentos efetivos de flambagem



Fonte: Adaptado de (NORTON, 2013)

Pode-se observar que a resistência do material não influencia o comportamento do elemento sob flambagem, portanto a utilização de aços com maior resistência ao escoamento, por exemplo, não altera a carga crítica de flambagem, pois

todas as ligas de aço possuem aproximadamente o mesmo módulo de elasticidade (NORTON, 2013).

Por se tratar de um carregamento compressivo, a tensão crítica de flambagem pode ser calculada através da seguinte equação:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} \quad (2.4)$$

obtendo-se assim a força por unidade de área que provoca flambagem na coluna (NORTON, 2013).

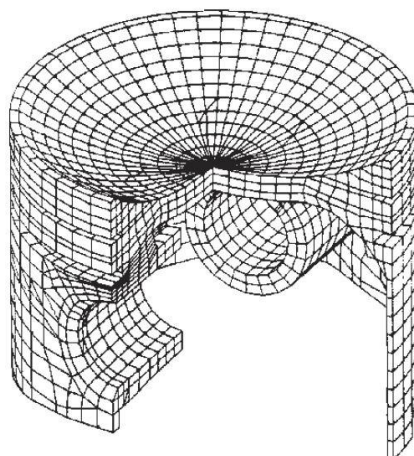
2.2 ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos (MEF) é uma ferramenta muito utilizada na engenharia, principalmente na área de cálculo estrutural, no qual se aliam os conhecimentos de resistências dos materiais e métodos numéricos, analisando a resistência e rigidez de estruturas (ALVES FILHO, 2007).

De maneira geral o método dos elementos finitos consiste em buscar soluções aproximadas numericamente, com erros aceitáveis para problemas de engenharia que apresentam certa complexidade, os quais não são possíveis obter respostas exatas através dos métodos analíticos clássicos (ALVES FILHO, 2007).

Este método segue a ideia de dividir um elemento contínuo em finitos elementos discretos de formas consideradas simples, conforme mostra a Figura 2, os quais são conectados pelas extremidades, os nós, que são pontos discretos. Então a solução aproximada é obtida numericamente simulando uma montagem de elementos de tamanho finito e não diferencial (ALVES FILHO, 2007).

Figura 2 - Geometria de elementos finitos



Fonte: (NORTON, 2013)

O método aproximado substitui os infinitos graus de liberdade de um modelo contínuo por um número finito de parâmetros a determinar, ou graus de liberdade de um modelo aproximado. Modelando o sistema através de equações algébricas (SORIANO, 2009).

A descrição analítica do sistema físico é elaborada normalmente por meio do referencial cartesiano, mais a variável tempo para fenômenos relevantemente mutáveis no tempo. As coordenadas necessárias para definição de uma configuração qualquer do fenômeno em questão, são determinadas variáveis independentes (SORIANO, 2009).

As funções que precisam ser determinadas em um modelo matemático, frequentemente de significados físicos conhecidos, são denominadas variáveis dependentes. Entre essas, as que dão origem a outras através de derivações são chamadas de variáveis (dependentes) primárias, e essas outras são as variáveis (dependentes) secundárias ou variáveis derivadas (SORIANO, 2009, p. 5).

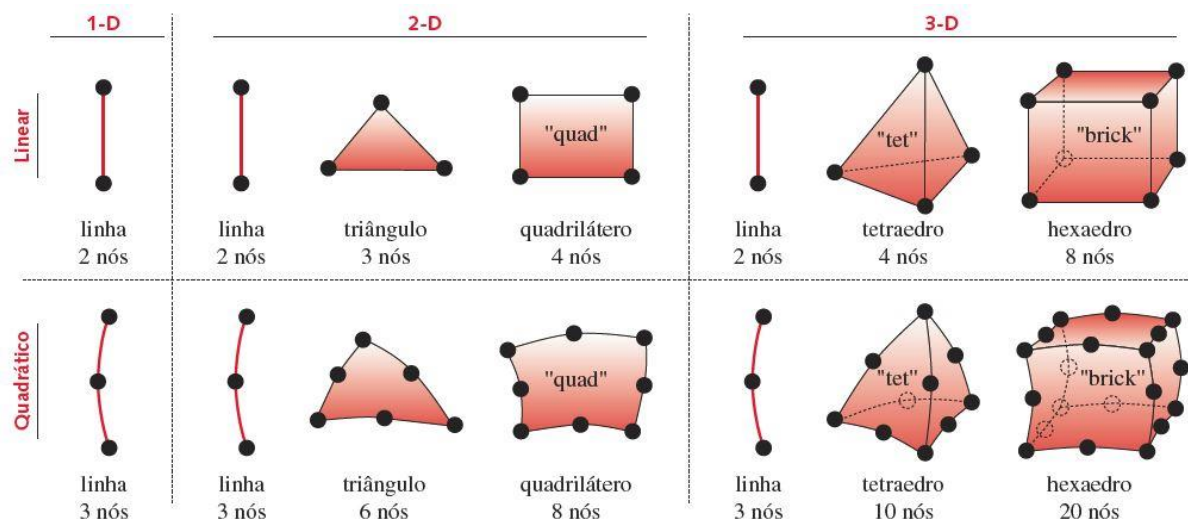
Quando se trata da Mecânica dos Sólidos Deformáveis, as variáveis primárias são os deslocamentos nodais, que, em um modelo matemático são denominados graus de liberdade de cada um dos pontos. Os componentes de deformação e tensão são algumas das variáveis secundárias (SORIANO, 2009).

O MEF parte do arbítrio de leis simples para as variáveis dependentes primárias em subdomínios denominados elementos finitos, tal que estas leis usualmente são polinomiais. Os elementos interconectados por meio de pontos nodais em seus contornos formam o sistema discreto. São necessários métodos e condições matemáticas para que a solução aproximada convirja para a solução do modelo contínuo (SORIANO, 2009).

São vários os tipos de elementos finitos que podem ser utilizados, diversos formatos e características diferentes são encontradas. A escolha dos tipos e tamanhos corretos de elementos para cada situação física é imprescindível para a obtenção de resultados corretos, pois os resultados obtidos são referentes aos nós dos elementos escolhidos, sendo que cada tipo de elemento possibilita análises e respostas específicas, além de apresentar diferentes graus de liberdade. O que gera respostas diferentes conforme os parâmetros escolhidos, sendo responsabilidade do usuário a escolha de elementos e parâmetros que tornem a resposta o mais próximo possível do real (ALVES FILHO, 2007).

Os elementos finitos podem apresentar formas variadas, números distintos de nós em suas faces e lados e diferentes números e tipos de graus de liberdade por nó, podem ser uni, bi e tridimensionais, a Figura 3 ilustra alguns tipos de elementos. Existem elementos especiais para trabalhar com comportamentos físicos particulares, que se adequam melhor a cada fenômeno físico, formato geométrico e material por exemplo. A ordem do elemento é o grau do polinômio estabelecido para as variáveis primárias, que depende do número de parâmetros nodais (SORIANO, 2009).

Figura 3 - Tipos de elementos



Fonte: (NORTON, 2013)

O método é formulado com parâmetros nodais de modo que os elementos adjacentes possam interagir entre si, definindo desta forma o comportamento da malha, que é resultado da combinação dos comportamentos dos elementos. (SORIANO, 2009).

A divisão do corpo em análise em elementos finitos caracteriza uma malha. Refinando-se a malha refinam-se os resultados, pois os resultados obtidos são referentes aos nós do modelo, e quanto mais fina a malha, maior o número de nós. Porém esta escolha aumenta o custo computacional, logo deve-se tomar cuidado ao exagerar neste quesito, pois o resultado pode não convergir ou o tempo de processamento pode ser muito alto (ALVES FILHO, 2007).

Nos problemas de análise estrutural os parâmetros predominantes são os deslocamentos nodais. Os parâmetros adotados, que são finitos, têm o comportamento especificado por modelos matemáticos, os quais são escritos de forma matricial, pois a melhor maneira para a solução das inúmeras equações algébricas geradas é através de computadores (ALVES FILHO, 2007).

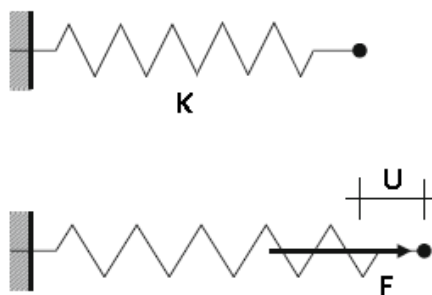
A análise de um sistema discreto requer as seguintes etapas de maneira simplificada para solução:

- Idealização do sistema: O sistema real é idealizado como uma montagem de elementos;
- Equilíbrio dos elementos: Os requisitos de equilíbrio de cada elemento são estabelecidos em termos de variáveis de estado;
- Montagem de elementos: Os requisitos de interligação dos elementos são utilizados para estabelecer um conjunto de equações simultâneas para as variáveis de estado desconhecidas;
- Solução de resposta: As equações simultâneas são resolvidas para as variáveis de estado e por meio dos requisitos de equilíbrio dos elementos a resposta de cada elemento pode ser calculada (BATHE, 1982).

2.3 ANÁLISE LINEAR

A relação entre as forças nodais e os deslocamentos nodais para cada elemento define o conceito de rigidez, que pode ser comparado a uma mola, como ilustra a Figura 4. A rigidez da mola nada mais é do que uma relação entre a força aplicada e o deslocamento medido da extremidade da mola. A constante elástica da mola pode ser considerada como um coeficiente de rigidez no método dos elementos finitos (ALVES FILHO, 2007).

Figura 4 - Sistema força deslocamento de uma mola



Fonte: Adaptado de (RUST, 2015)

O equacionamento do MEF utiliza o princípio semelhante ao da mola, porém utilizam-se diversos componentes de rigidez simultaneamente, como rigidez axial, de torção, flexão e cisalhamento. Relacionando assim todos os deslocamentos e forças aos diversos componentes de rigidez. Quando essas relações são lineares e

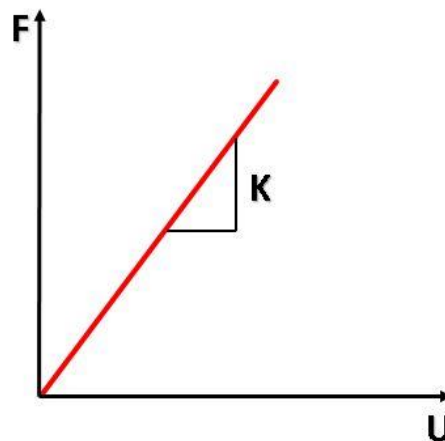
os componentes de rigidez são constantes, temos a análise mais simples, que caracteriza uma análise linear (ALVES FILHO, 2007).

A tarefa principal da análise estrutural é analisar os esforços internos da estrutura e os deslocamentos internos, baseado no carregamento externo, nas propriedades e geometria do material, para isso utilizam-se equações algébricas na forma matricial da seguinte maneira:

$$\{F\} = [K] \cdot \{U\} \quad (2.5)$$

onde $\{F\}$ é uma matriz coluna com todas as cargas nodais, $[K]$ é uma matriz quadrada de rigidez da estrutura, contendo os coeficientes de rigidez de toda a estrutura, que relacionam todos os deslocamentos nodais com as cargas nodais e $\{U\}$ é uma matriz coluna com todos os deslocamentos nodais. Este é o equacionamento linear para cálculos estruturais, caracterizado pela matriz de rigidez constante e a curva ilustrada na Figura 5 (ALVES FILHO, 2007).

Figura 5 - Curva característica de análise linear



Fonte: Adaptado de (ANSYS, 2015)

A determinação da matriz de rigidez de elementos bi e tridimensionais é feita através de técnicas matemáticas de interpolação e análises de força, energia de deformação e transformação de energia, obtendo assim coeficientes de rigidez aproximados. Cada elemento possui uma matriz de rigidez característica, que estão disponíveis na biblioteca de elementos dos programas de análise via MEF (ALVES FILHO, 2007).

2.4 ANÁLISE NÃO LINEAR

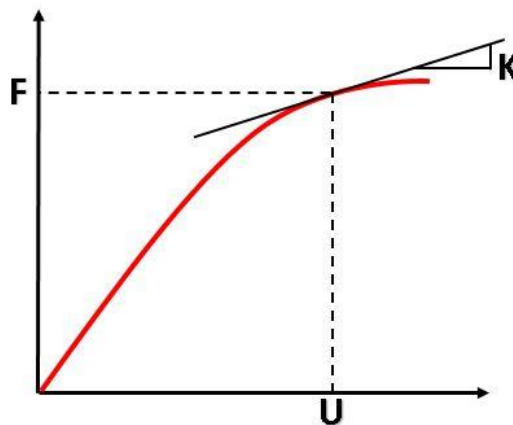
A análise não linear ocorre em múltiplos passos, diferentemente da análise linear que é realizada em apenas um passo. A análise não linear requer que as cargas ou deslocamentos sejam aplicados gradualmente em múltiplas etapas. No caso da não linearidade geométrica, a matriz rigidez $[K]$ é atualizada à medida que a estrutura deforma e conseqüentemente a equação de equilíbrio é atualizada para a estrutura deformada a cada passo da análise, equilibrando a estrutura em relação as forças externas e internas e as deformações, aumentando a precisão do estudo (ALVES FILHO, 2012).

A equação geral para a análise não linear é:

$$\{F\} = ([K] + [K_G]) \cdot \{U\} \quad (2.6)$$

onde $\{F\}$ é uma matriz coluna contendo as cargas nodais, $[K]$ é a matriz quadrada de rigidez antes do incremento, $[K_G]$ é a matriz quadrada de correção da rigidez para o incremento e $\{U\}$ é a matriz coluna referente ao deslocamento. A cada novo incremento a matriz de rigidez é corrigida (ALVES FILHO, 2012). A Figura 6 representa uma curva característica de análise não linear.

Figura 6 - Curva característica de análise não linear



Fonte: Adaptado de (ANSYS, 2015)

Em casos de instabilidade como o de flambagem, o objetivo é encontrar a carga que gera a instabilidade e ainda descrever o comportamento da estrutura logo após a instabilidade, o que não é possível por meio da análise linear. No caso da flambagem a estrutura tende a apresentar aumento dos deslocamentos e redução da carga logo após a flambagem (ALVES FILHO, 2012).

Análises nas quais a carga e o deslocamento são crescentes utilizam o método de *Newton-Raphson* para convergência numérica, já para métodos de instabilidade nos quais a carga pode decrescer enquanto o deslocamento aumenta, este método pode não ser suficiente para convergência, logo, são necessárias algumas estratégias. Então utiliza-se para análises não lineares a junção do método de *Newton-Raphson* com o equilíbrio entre as forças externas e internas conforme o carregamento vai sendo aplicado. A curva força *versus* deslocamento torna-se então uma trajetória de equilíbrio (ALVES FILHO, 2012).

Em algumas análises estáticas não lineares, como a de flambagem, nas quais a estrutura colapsa completamente e apresenta redução de carga com alto incremento de deslocamento, pode-se utilizar uma estratégia de iteração alternativa, o método do comprimento de arco constante ou *arc-length method*. Que ajuda a evitar pontos de bifurcação e acompanhar a redução de carga (ANSYS, 2015).

A condição física de equilíbrio entre as forças internas e externas dos elementos deformados é a base dos métodos iterativos, que buscam traçar a trajetória de equilíbrio do sistema. Em casos que o fenômeno físico é caracterizado pela instabilidade, são necessárias técnicas alternativas que utilizam o conceito do método de *Newton-Raphson*. Algumas destas técnicas são a de controle do deslocamento, técnicas de controle de energia, do comprimento de arco constante e do controle de deslocamento generalizado (ALVES FILHO, 2012).

2.5 ANÁLISE LINEAR E NÃO LINEAR

A análise estática linear de flambagem via elementos finitos é feita através do método do autovalor e autovetor, o qual prediz a carga crítica de flambagem de uma estrutura elástica linear ideal, bem como, o modo de flambagem. Entretanto, imperfeições e não linearidades impedem a maioria das estruturas reais de atingir a sua carga crítica de flambagem, logo, esta análise normalmente produz resultados rápidos, mas não conservadores. Além disso, apenas o comportamento pré-flambagem pode ser analisado por esse método (ANSYS, 2015).

Problemas de autovalor são caracterizados pela possibilidade de que haja mais que uma única solução para o sistema. O objetivo da análise através do método do autovalor é calcular as inúmeras soluções possíveis para o sistema em questão.

Para o caso da flambagem o menor valor dentre estes encontrados é o desejado (BATHE, 1982).

A análise de flambagem linear através do método do autovalor é formulada da seguinte maneira:

$$([K] + \lambda_i[S]) \cdot \{\psi\}_i = \{0\} \quad (2.7)$$

tal que $[K]$ é a matriz rigidez, $[S]$ é a matriz de rigidez de tensão, λ_i os autovalores e $\{\psi\}_i$ os autovetores de deslocamento (ANSYS, 2015).

A equação é resolvida através de algoritmos e então o menor autovalor λ de valor positivo é utilizado para determinar a carga crítica de flambagem:

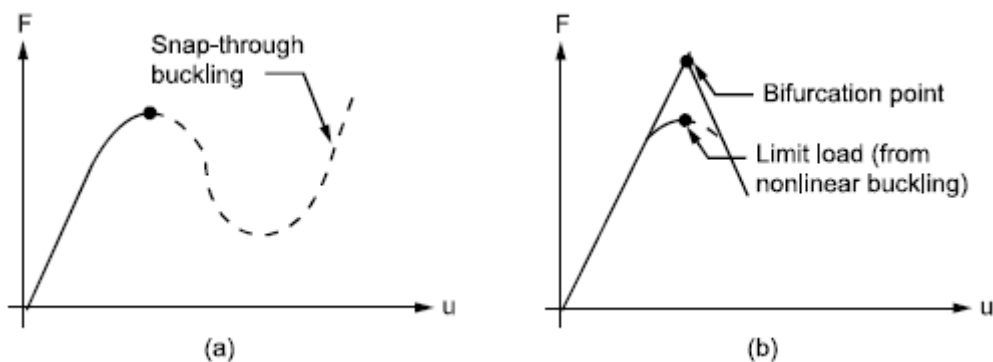
$$P_{cr} = \lambda F_0 \quad (2.8)$$

onde F_0 são as cargas iniciais que foram utilizadas para gerar $[S]$ (ANSYS, 2015).

Uma abordagem mais precisa para prever a instabilidade é realizar uma análise de flambagem não linear. Isso envolve uma análise estática estrutural considerando os efeitos da deformação. Usando a técnica não linear, o modelo pode incluir características como imperfeições iniciais, comportamento plástico e resposta de grande deflexão. Além disso, usando o carregamento controlado por deflexão, pode-se acompanhar o comportamento pós-flambagem da estrutura (ANSYS, 2015).

A Figura 7 apresenta um comparativo dos resultados dos dois modos de análise, o gráfico (a) mostra a curva de uma análise não linear que possibilita o estudo do comportamento pós-flambagem da estrutura. Já o gráfico (b) ilustra as cargas críticas obtidas pelas duas análises (linear e não linear), caracterizando a análise não linear pela obtenção de valores mais conservadores para a carga crítica de flambagem (ANSYS, 2015).

Figura 7 - Curvas de flambagem



Fonte: (ANSYS, 2015)

De forma geral as não linearidades presentes na análise estática podem ser provenientes da não linearidade geométrica do corpo, dos contatos entre componentes e da não linearidade do material (ANSYS, 2015).

3 METODOLOGIA

Este trabalho foi desenvolvido seguindo o roteiro sugerido por (GIL, 2002). O roteiro segue uma série de passos metodológicos e esses passos foram adaptados conforme o contexto desse estudo. Assim, a metodologia é desenvolvida da seguinte maneira:

3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O estudo analisou e comparou os resultados do valor da carga crítica, P_{cr} , para duas estruturas, por meio de diferentes análises, utilizando o método de elementos finitos. Inicialmente a pesquisa foi realizada com uma revisão bibliográfica sobre algumas definições e conceitos sobre Flambagem, Método dos Elementos Finitos e Análises Linear e Não Linear.

Posteriormente foram delimitados para o estudo duas estruturas esbeltas, dois perfis estruturais com dimensões comerciais, que são utilizados nas construções e em componentes que utilizam estruturas metálicas.

3.2 DEFINIÇÃO DA ANÁLISE NUMÉRICA

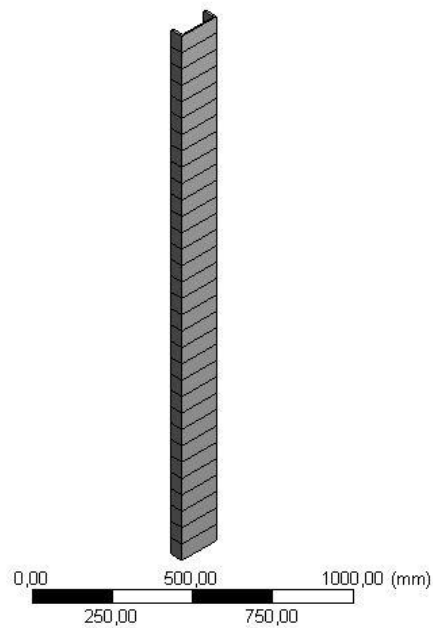
Nesta etapa foram definidos os seguintes itens: perfis das estruturas, material, discretização da malha, carregamentos e condições de contorno.

3.2.1 Perfis das Estruturas

As estruturas selecionadas para o estudo têm seções transversais ou perfis em “U” e em “I”. E para a modelagem foi utilizado o *software* ANSYS DesignModeler 16.2.

A primeira geometria, representada na Figura 8, é um perfil “U” comercial, laminado, denominado 6” x 12,20 kg/m com comprimento de 2000 mm e índice de esbeltez 146,7.

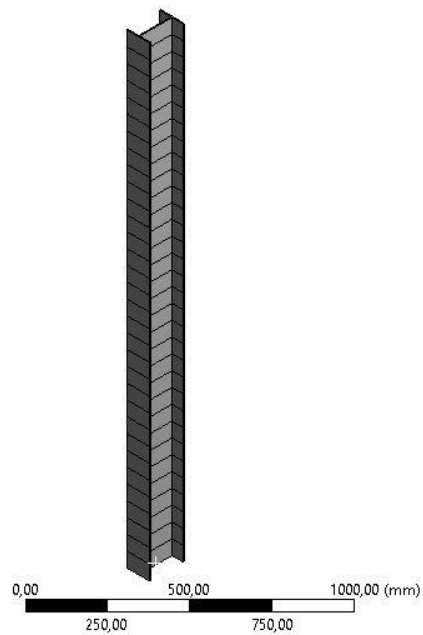
Figura 8 - Perfil "U"



Fonte: elaborado pelo autor.

A segunda geometria, ilustrada na Figura 9, é um perfil "I" comercial, laminado, denominado W 150 mm x 13,0 kg/m com comprimento de 2000 mm e índice de esbeltez 89,9.

Figura 9 - Perfil "I"

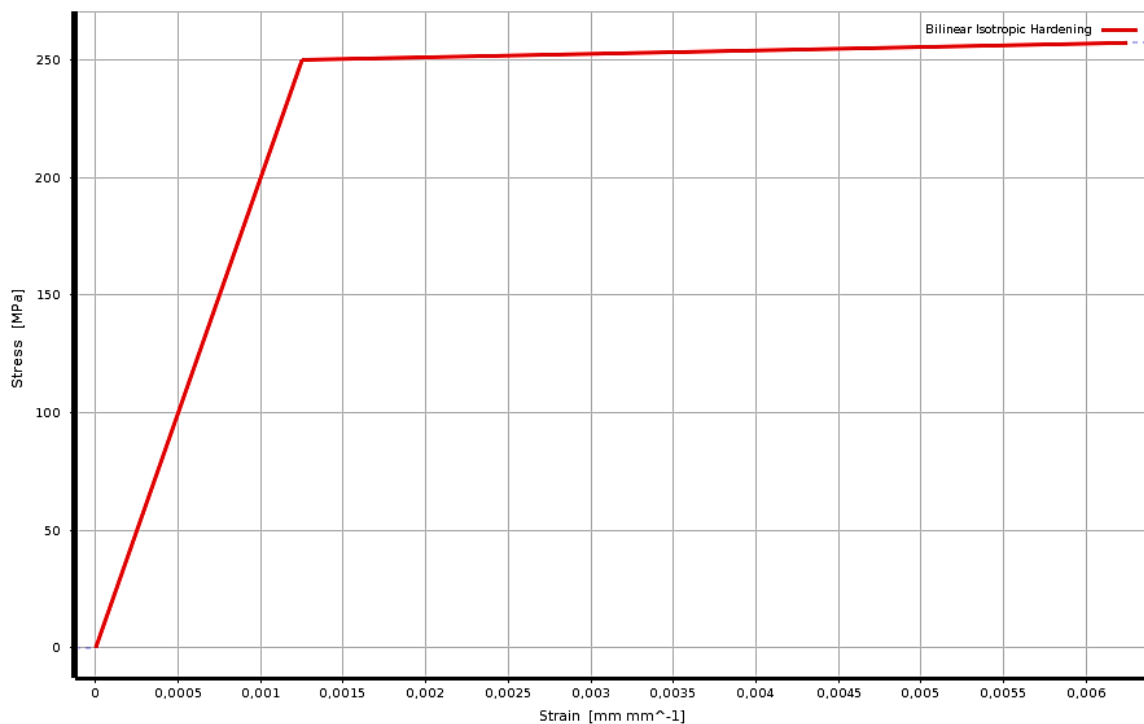


Fonte: elaborado pelo autor.

3.2.2 Material

Para as duas geometrias o material utilizado nas análises foi o aço estrutural não linear da biblioteca do ANSYS 16.2, com módulo de elasticidade de 200 GPa, coeficiente de Poisson de 0,3, tensão de escoamento de 250 MPa e tensão de ruptura de 460 MPa. Este material tem um módulo tangente de 1450 MPa, e é caracterizado por um encruamento isotrópico bilinear conforme mostra a Figura 10.

Figura 10 - Curva tensão deformação do material

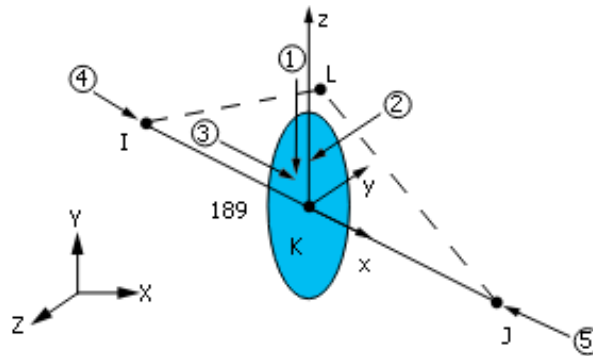


Fonte:(ANSYS, 2015).

3.2.3 Malha

Para a malha, utilizada em ambas as estruturas conforme pode ser verificada nas Figuras 8 e 9, foi utilizado o elemento de viga *Beam 189*, Figura 11, que é baseado na teoria de vigas de Timoshenko, definido pelos nós I, J e K no sistema de coordenadas global. Este elemento considera os efeitos do cisalhamento, é um elemento quadrático, tridimensional, com três nós. Cada nó possui seis graus de liberdade, translação em x, y e z e rotação em x, y e z.

Figura 11 - Elemento Beam 189



Fonte:(ANSYS, 2015).

Este elemento inclui termos de rigidez de tensão para casos de grande deflexão, o que permite análises de estabilidade, com o método do autovalor ou estudos de colapsos com o método do comprimento de arco. Pode ser utilizado em análises linear e não linear.

3.2.4 Carregamentos e Condições de Contorno

Nas análises lineares, que foram realizadas por meio do método do autovalor e autovetor, utilizou-se uma carga compressiva unitária em uma das extremidades de cada modelo, para então obter-se como resultado os autovalores da equação, ou seja, os fatores de multiplicação para o carregamento aplicado, obtendo-se as cargas críticas de flambagem através da multiplicação do autovalor pela carga inicial. Também através dos resultados obtidos pelos autovetores tem-se os modos de deslocamento das estruturas pós flambagem.

Nas análises não lineares, as simulações foram realizadas através do método do controle de deslocamento em análises estruturais estáticas, aplicando deslocamentos controlados por incrementos em uma das extremidades de cada modelo, com intuito de comprimir os elementos. Os incrementos foram controlados por meio de tabelas de valores.

Além do controle do deslocamento, nos primeiros passos das análises não lineares foi aplicado uma pequena carga perpendicular ao deslocamento, com o objetivo de gerar uma instabilidade na estrutura, semelhante ao primeiro autovetor obtido da análise linear. Esta carga se faz necessária para representar as imperfeições geométricas ou de material que a estrutura real possui.

E em relação as condições de contorno, em todas as análises foram utilizadas uma extremidade do corpo engastada e a outra livre, ou seja, em uma das extremidades inserido um suporte fixo e na outra, aplicados os carregamentos ou deslocamentos, isento de qualquer tipo de suporte. Caracterizando uma coluna engastada livre, “item c” da Figura 1 ($l_{ef} = 2l$).

3.3 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Para a simulação computacional, neste trabalho foi utilizado o *software* ANSYS Mechanical 16.2 e computador com processador Intel Core i3 - 2350M 2.30GHz e memória RAM de 8,00 GB.

Para execução das análises lineares, foi aplicado o sistema de análise estática estrutural em conjunto com o método do autovalor e autovetor aplicado a flambagem. O qual apresenta como resultado os autovalores e as formas da estrutura flambada de cada modo de flambagem. Neste estudo utilizou-se somente o primeiro autovetor da análise linear, ou seja, somente o primeiro modo de flambagem.

Já para as análises não lineares, foi empregado apenas o sistema de análise estática estrutural e os resultados foram obtidos por meio do gráfico Força x Deslocamento. É possível identificar a carga crítica de flambagem no ponto do gráfico onde o modelo apresenta grande aumento de deslocamento sem incremento de carga ou ainda com redução de carga. Caracterizando o colapso ou instabilidade da estrutura.

Os tempos de simulação, números de elementos de malha e nós são computados nas informações de saída de cada solução. As formas deformadas dos modelos são ilustradas pelo *software*, para que os resultados das análises não lineares sejam coerentes em relação as análises lineares, as formas deformadas de cada modelo têm que ser semelhantes em ambas as análises.

3.4 ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS

A coerência dos valores de carga crítica obtidos nas análises lineares foi verificada comparando-os com as cargas críticas calculadas analiticamente através da Formula de Euler, equação (2.3). Ainda, foi verificado que as colunas sofrem flambagem em torno do eixo de menor momento de inércia da seção transversal.

Para as análises não lineares, foi verificado a semelhança dos modos de deformação em relação as análises lineares. Os valores de cargas críticas, obtidos pelo estudo dos gráficos força x deslocamento, foram comparados aos das análises lineares, pois tendem a apresentar valores mais conservadores, ou seja, cargas críticas inferiores as análises lineares, segundo o referencial teórico.

Testes de convergência foram efetuados por meio de refinamento de malha nas análises lineares. Já nas análises não lineares, a convergência foi verificada por meio de diversas iterações manuais, com alterações nos incrementos de carregamento, números de *steps* e *substeps* e ainda alterações de malha.

As comparações dos resultados de cargas críticas foram apresentadas pelo erro percentual entre os valores, ou seja, o percentual de redução de carga crítica obtida pela análise não linear.

3.5 APRESENTAÇÃO DAS CONCLUSÕES

Para concluir o estudo, foi comentado alguns conceitos importantes e citado os principais resultados, cargas críticas de flambagem e erros percentuais entre as análises. Também foi feito uma comparação da implementação das análises e feito sugestões para trabalhos futuros.

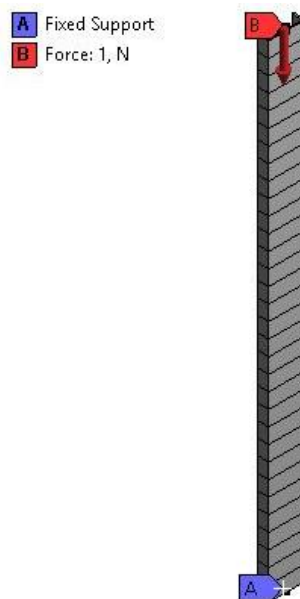
4 RESULTADOS

Aplicando as condições citadas na seção anterior para realizar as análises via MEF, com o *software* ANSYS Mechanical, obteve-se os seguintes resultados:

4.1 PERFIL “U”

A análise linear por meio do método do autovalor e autovetor do perfil “U”, foi modelada com 32 elementos Beam 189 e 97 nós. Foram aplicadas as condições de contorno de uma coluna engastada livre, ou seja, inserido um suporte fixo em uma das extremidades, e a outra extremidade ficou livre. O carregamento aplicado foi uma força de 1N compressiva na extremidade livre. Estas condições são ilustradas na Figura 12.

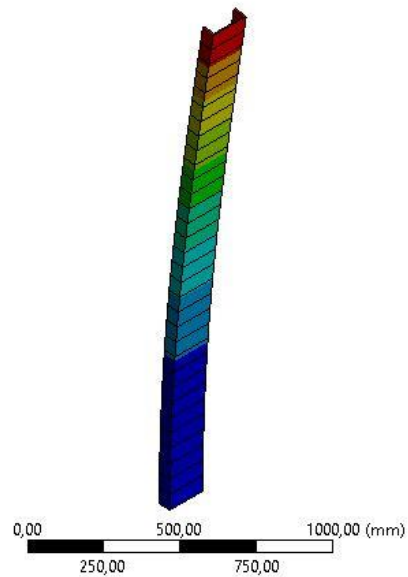
Figura 12 - Malha, condições de contorno e carregamento, perfil “U”, análise linear



Fonte: elaborado pelo autor.

O resultado obtido foi a carga crítica de flambagem de 43231 N, modo de falha ilustrado na Figura 13 e tempo de convergência de 17,47 s.

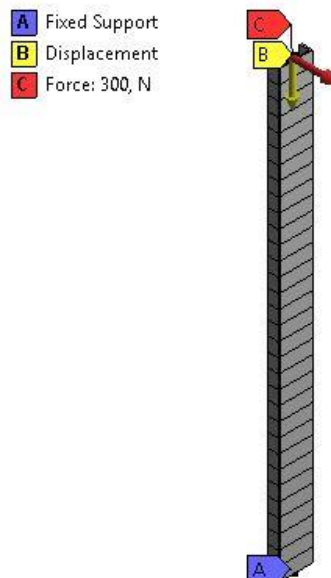
Figura 13 – Modo de falha, perfil “U”, análise linear



Fonte: elaborado pelo autor.

A análise não linear, também foi modelada com 32 elementos Beam 189 e 97 nós, as condições de contorno são idênticas as da análise linear. O deslocamento e a força perpendicular ao perfil, responsável por causar a instabilidade na estrutura, foram aplicados na extremidade livre, como mostra a Figura 14.

Figura 14 - Malha, condições de contorno e carregamento, perfil “U”, análise não linear



Fonte: elaborado pelo autor.

O controle de deslocamento foi realizado por meio dos incrementos ilustrados na Figura 15.

Figura 15 - Deslocamento, perfil "U", análise não linear

	Steps	Time [s]	Y [mm]
1	1	0,	0,
2	1	1,	-1,2
3	2	2,	-2,4
4	3	3,	-3,6
5	4	4,	-4,8
6	5	5,	-6,
7	6	6,	-7,2
8	7	7,	-8,4

Fonte: elaborado pelo autor.

A força perpendicular ao perfil, de 300 N, foi aplicada somente no primeiro *step*, conforme mostra a Figura 16.

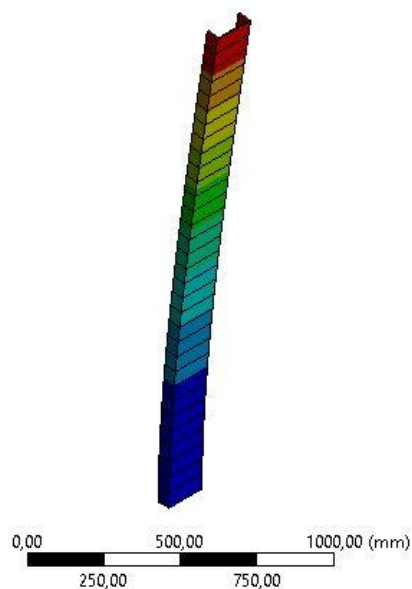
Figura 16 - Força, perfil "U", análise não linear

	Steps	Time [s]	X [N]
1	1	0,	300,
2	1	1,	300,
3	2	2,	0,
4	3	3,	= 0,
5	4	4,	= 0,
6	5	5,	= 0,
7	6	6,	= 0,
8	7	7,	= 0,

Fonte: elaborado pelo autor.

A análise não linear apresentou carga crítica de 42316 N, modo de falha representado na Figura 17, idêntico ao da análise linear e tempo de convergência de 18,67 s.

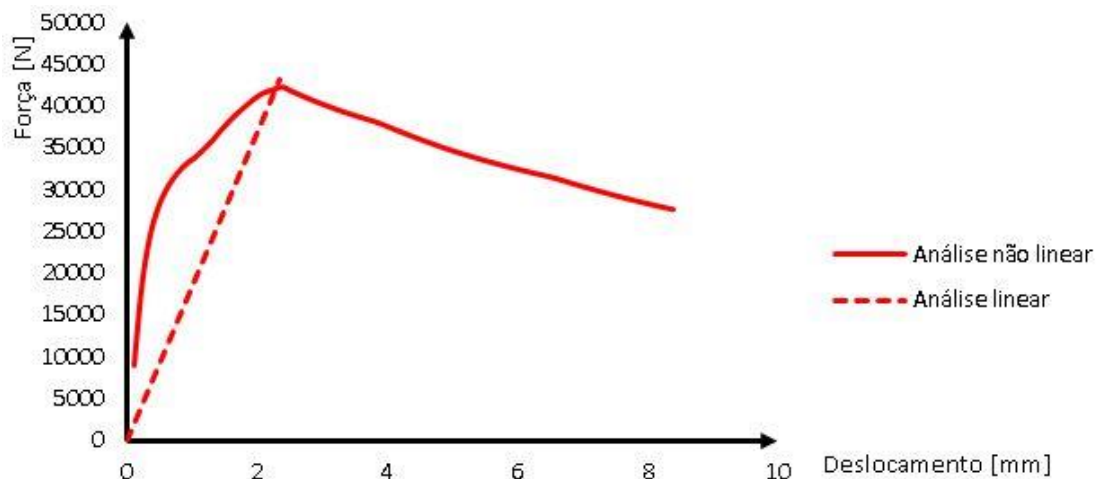
Figura 17 - Modo de falha, perfil "U", análise não linear



Fonte: elaborado pelo autor.

As curvas de força x deslocamento das análises linear e não linear do perfil “U” são mostradas na Figura 18. O valor da carga crítica da análise linear pode ser verificado no ponto final da reta tracejada e da análise não linear no ápice da curva não tracejada. A análise não linear apresentou carga crítica inferior e a sua curva de força x deslocamento apresenta toda a evolução do carregamento aplicado, ou seja, o comportamento pré e pós-flambagem, o que não ocorre na análise linear.

Figura 18 - Gráfico Força x Deslocamento, perfil “U”

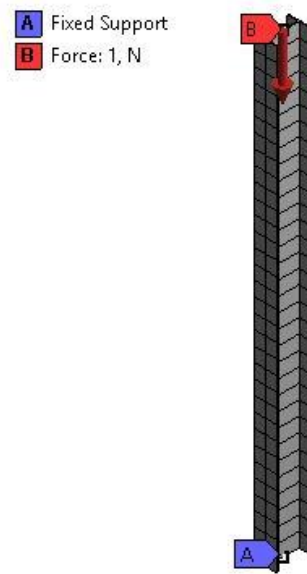


Fonte: elaborado pelo autor.

4.2 PERFIL “I”

A análise linear através do método do autovalor e autovetor do perfil “I”, foi modelada com 32 elementos Beam 189 e 97 nós. Foram aplicadas as condições de contorno de uma coluna engastada livre. O carregamento aplicado foi uma força de 1N compressiva na extremidade livre. Estas condições são ilustradas na Figura 19.

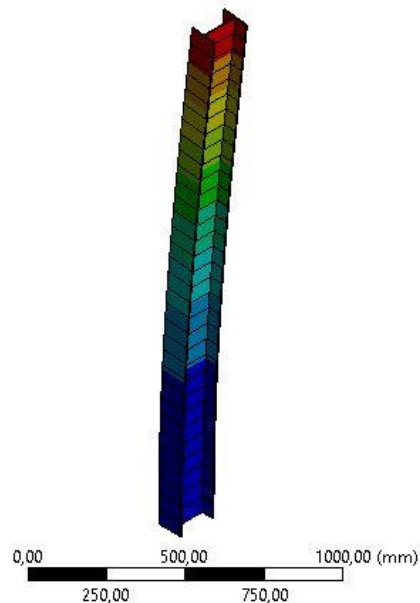
Figura 19 - Malha, condições de contorno e carregamento, perfil "I", análise linear



Fonte: elaborado pelo autor.

O resultado foi carga crítica de 100710 N, modo de falha conforme Figura 20 e tempo de convergência de 21,46 s.

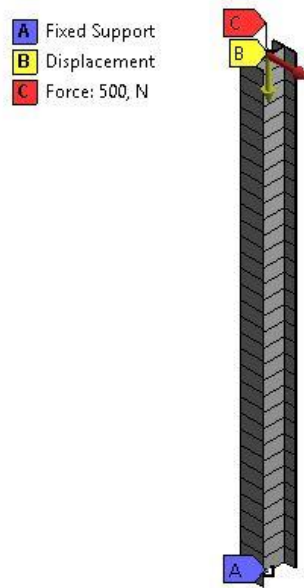
Figura 20 - Modo de falha, perfil "I", análise linear



Fonte: elaborado pelo autor.

A análise não linear, também foi modelada com 32 elementos Beam 189 e 97 nós, as condições de contorno são idênticas as da análise linear. O deslocamento e a força perpendicular ao perfil, responsável por causar a instabilidade na estrutura, foram aplicados na extremidade livre, como mostra a Figura 21.

Figura 21 - Malha, condições de contorno e carregamento, perfil "I", análise não linear



Fonte: elaborado pelo autor.

O controle de deslocamento foi realizado por meio dos incrementos ilustrados na Figura 22.

Figura 22 - Deslocamento, perfil "I", análise não linear

	Steps	Time [s]	Y [mm]
1	1	0,	0,
2	1	1,	-0,625
3	2	2,	-1,25
4	3	3,	-1,875
5	4	4,	-2,5
6	5	5,	-3,125
7	6	6,	-3,75
8	7	7,	-4,375
9	8	8,	-5,
10	9	9,	-5,625
11	10	10,	-6,25

Fonte: elaborado pelo autor.

A força perpendicular ao perfil, de 500 N, foi aplicada somente no primeiro *step*, conforme mostra a Figura 23.

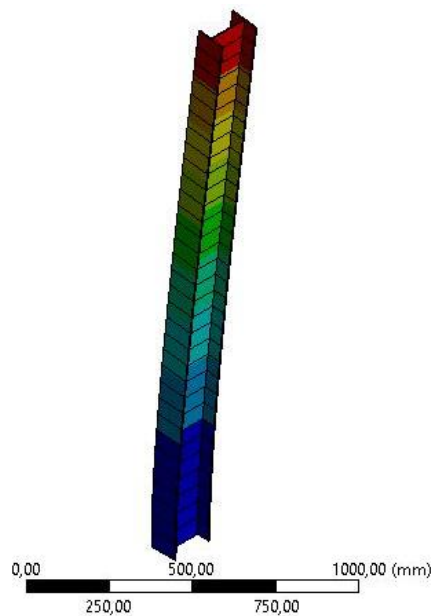
Figura 23 - Força, perfil "I", análise não linear

	Steps	Time [s]	✓ X [N]
1	1	0,	500,
2	1	1,	500,
3	2	2,	0,
4	3	3,	= 0,
5	4	4,	= 0,
6	5	5,	= 0,
7	6	6,	= 0,
8	7	7,	= 0,
9	8	8,	= 0,
10	9	9,	= 0,
11	10	10,	= 0,

Fonte: elaborado pelo autor.

A análise não linear apresentou carga crítica de 96235 N, modo de falha ilustrado na Figura 24, idêntico ao da análise linear e tempo de convergência de 21,44 s.

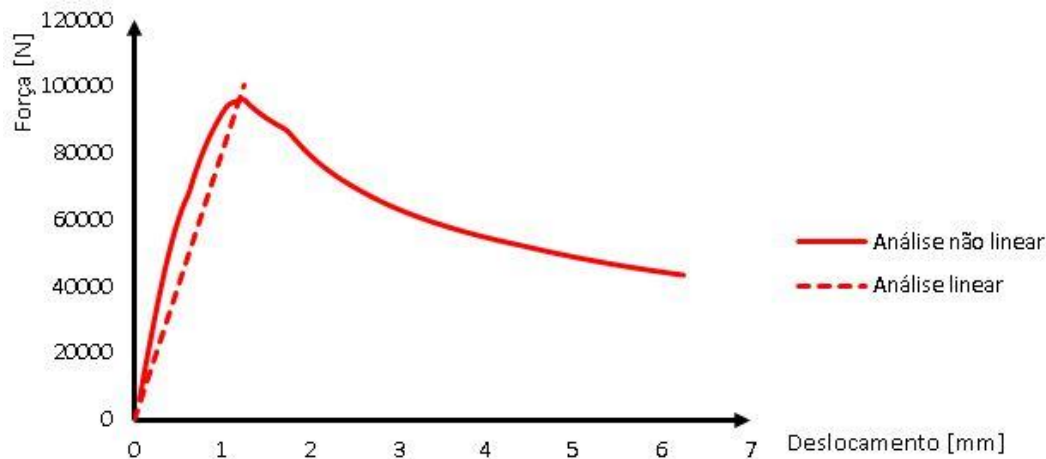
Figura 24 - Modo de falha, perfil "I", análise não linear



Fonte: elaborado pelo autor.

O gráfico força x deslocamento apresentado na Figura 25, ilustra as curvas das análises linear e não linear do perfil "I", onde pode-se identificar as cargas críticas de ambas as análises. A análise não linear apresentou carga crítica inferior e a sua curva de força x deslocamento apresenta toda a evolução do carregamento aplicado, ou seja, o comportamento pré e pós-flambagem, o que não ocorre na análise linear.

Figura 25 - Gráfico Força x Deslocamento, perfil "I"



Fonte: elaborado pelo autor.

Por fim a Figura 26 apresenta os resultados obtidos, para as duas geometrias, por meio das análises linear e não linear e mostra a porcentagem do erro para cada geometria. Este erro corresponde à diferença percentual entre os valores obtidos de carga crítica das análises linear e não linear. Ainda apresenta o tempo de processamento computacional de cada análise.

Para o perfil "U" observa-se que a carga crítica obtida pela análise não linear é 2,16% inferior a carga crítica obtida pela análise linear. E da mesma forma, para o perfil "I" tem-se um valor de carga crítica 4,65% inferior.

Assim para ambas as geometrias conclui-se que através da análise não linear obtém-se valores mais conservadores de carga crítica.

Figura 26 - Resultados

	Análise linear		Análise não linear		Erro [%]
	P_{cr} [N]	Tempo [s]	P_{cr} [N]	Tempo [s]	$\frac{P_{cr}(L) - P_{cr}(NL)}{P_{cr}(NL)}$
Perfil U	43231	17,47	42316	18,67	2,16
Perfil I	100710	21,46	96235	21,44	4,65

Fonte: elaborado pelo autor.

Os tempos de processamento das análises não apresentaram diferenças significativas pois além de utilizar elementos finitos (vigas) e geometrias mais simples, o valor da carga crítica obtida pela análise não linear é alcançada logo após ao regime linear ou quase linear da mesma análise.

Vale ressaltar que apesar do tempo de processamento das análises apresentarem valores próximos, o tempo necessário para implementação das análises não lineares são bem superiores aos das análises lineares. Isto acontece devido a necessidade de realizar-se iterações manuais na implementação dos dados da análise não linear. Diferente da análise linear que ocorre em apenas um *step*, e apresenta convergência rápida, na análise não linear é preciso ajustar os carregamentos, deslocamentos, *steps*, *substeps* e incrementos até que a convergência seja alcançada. Ainda deve-se realizar testes de convergência e validação dos resultados, para que o resultado apresentado seja coerente.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou um estudo de análises linear e não linear aplicado a flambagem, com objetivo de comparar os resultados obtidos de ambas as análises por meio dos valores das cargas críticas de flambagem, utilizando perfis comerciais de estruturas metálicas. Ambas as análises foram avaliadas pelo método dos elementos finitos (MEF), para a análise estática linear foi utilizado o método do autovalor e autovetor e para a análise estática não linear foi utilizado o método do controle do deslocamento. Os resultados foram obtidos por meio do *software* ANSYS Mechanical 16.2.

Para o perfil “U” foi obtido carga crítica de 43231 N com a análise linear e de 42316 N com a análise não linear, o que representa um erro de 2,16%. Já para o perfil “I” foi encontrado carga crítica de 100710 N via análise linear e de 96235 N com a análise não linear, e conseqüentemente erro de 4,65%. As análises não lineares apresentaram valores mais conservadores de cargas críticas, o que representa uma análise mais realista que a linear, pois são considerados os efeitos da deformação e possíveis imperfeições. Além disso, com a análise não linear consegue-se maior quantidade de informações sobre a evolução do carregamento, como o comportamento pós-flambagem, que não é obtido na análise linear.

Com relação ao tempo de implementação, a análise não linear é bem superior ao da análise linear. Isto é consequência da maior quantidade de informações de entrada para a análise não linear, como criação e ajuste de tabelas de valores de deslocamento e força, ajuste de números de *steps* e *substeps* e iterações manuais destes dados para verificação de convergência do resultado. O que difere para análise linear, que necessita implementação mais simples.

Portanto, é responsabilidade do usuário do *software* a escolha do modo de análise a utilizar, deve-se verificar a precisão exigida e tempo disponível para estudo e execução da análise, tendo em vista que a análise não linear exige conhecimento mais avançado do método dos elementos finitos se comparado a análise linear.

Para trabalhos futuros, a sugestão é que se estenda este estudo para geometrias mais complexas, bem como, para outros métodos de análise via o método dos elementos finitos, como, por exemplo, a análise dinâmica transiente implícita e explícita.

REFERÊNCIAS

ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: a base da tecnologia CAE**. São Paulo: Editora Érica Ltda, 2007.

ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos - A Base da Tecnologia CAE - Análise não Linear**. 1. ed. São Paulo: Ltda, Editora Érica, 2012.

ANSYS, R. 16. . **Help System, Couple Field Analysis Guide** CanonsburgSAS IP, Inc., , 2015.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1982.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

HIBBELER, R. C. **Resistência de Materiais - 5ª Ed**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.

NORTON, R. L. **Projeto de Máquinas: Uma Abordagem Integrada**. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

ROTTER, J. M.; TENG, J. . **Buckling of Thin Metal Shells**. London: Spon Press, 2004.

RUST, W. **Non-Linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics**. Hannover: Springer, 2015.

SORIANO, H. L. **Elementos Finitos - Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2009.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **THEORY OF ELASTIC STABILITY**. 2. ed. New York: Dover Publications, Inc., 2009.