

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA E DE MATERIAIS**

RODRIGO VILLACA SANTOS

**DESENVOLVIMENTO DE UMA NOVA METODOLOGIA ESTABELECENDO COTAS PARA A
EVOLUÇÃO DE TRINCAS PARA MODELOS DE CARREGAMENTO COM AMPLITUDE DE
TENSÃO CONSTANTE**

TESE

**CURITIBA
2015**

RODRIGO VILLACA SANTOS

**DESENVOLVIMENTO DE UMA NOVA METODOLOGIA ESTABELECENDO
COTAS PARA A EVOLUÇÃO DE TRINCAS PARA MODELOS DE
CARREGAMENTO COM AMPLITUDE DE TENSÃO CONSTANTE**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia – Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos.
Orientador: Prof. Dr. Claudio R. Ávila da Silva Jr.

**CURITIBA
2015**

TERMO DE APROVAÇÃO

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha família por todo o apoio e incentivo que me deram.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me dar mais uma oportunidade em minha vida. Agradeço aos meus pais, Pedro Afonso dos Santos e Shenia Villaca dos Santos, pela existência e todo o apoio que proporcionaram em minha vida pessoal e profissional. Agradeço a minha irmã e meu cunhado, Patrícia Villaca Miranda e Jair Miranda Neto, por todo o apoio. Agradeço a minha namorada Leticia Barizon Col Debella por todo suporte e apoio. Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Claudio R. Ávila da Silva Jr., grande exemplo, pelo suporte e orientação, essenciais para o desenvolvimento dessa obra. Agradeço aos meus colegas e professores da UTFPR com quem vivenciei esse período prazeroso. Agradeço aos meus amigos que me deram grande suporte.

“In God we trust. All others bring data”
(W. Edwards Deming)

RESUMO

SANTOS, Rodrigo Villaca. **Desenvolvimento de uma nova metodologia estabelecendo cotas para a evolução de trincas para modelos de carregamento com amplitude de tensão constante.**

2015. Tese (Doutorado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba.

A maioria das máquinas e componentes mecânicos estão sujeitos a solicitações dinâmicas as quais podem ocasionar falhas por fadiga. Um dos métodos para a previsão de falhas por fadiga é a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). Na MFLE existem diversos modelos que descrevem a propagação de uma trinca, com suas diferentes abordagens e concepções. De forma geral, distinguem-se os modelos de propagação de trinca para carregamentos com amplitude de tensão constante e variável. Dentre os modelos de amplitude de tensão constante destaca-se a Lei de Paris, que consiste de um Problema de Valor Inicial (PVI), sendo que sua solução, em poucos casos, é determinada de forma exata. Assim, o objetivo deste trabalho é propor uma nova metodologia para solucionar alguns modelos de propagação de trinca de amplitude de tensão constante, como os modelos de Paris-Erdogan, Forman, Walker, McEvily e Priddle sem a necessidade da utilização de métodos numéricos para a solução. Essa metodologia foi desenvolvida estabelecendo cotas, superior e inferior, que delimitam o comportamento das soluções dos modelos de propagação de trinca. Para isso, através da literatura, foram delimitados os modelos a serem avaliados com base em dois aspectos principais: modelos que incorporem em suas equações as regiões I a III da propagação de trinca, e modelos que levem em consideração parâmetros como a razão de tensão, a tenacidade à fratura e o fator intensidade de tensão inicial para propagação de trinca. Para verificação da precisão e eficácia da nova metodologia, foi calculado o desvio relativo entre as cotas e a solução numérica aproximada, utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4), e observou-se que as cotas são válidas como forma de aproximação do comportamento da evolução da trinca para todos os modelos estudados. Também foi avaliado o desempenho da utilização das cotas em relação à solução pelo método RK4 através do tempo de computação, e foi observado que com a utilização das cotas, consegue-se um monitoramento dinâmico dos resultados.

Palavra-chave: Fadiga. Mecânica da Fratura Linear Elástica. Problema de Valor Inicial. Cotas.

ABSTRACT

SANTOS, Rodrigo Villaca. **A new methodology developed establishing bounds for the evolution of cracks for models under constant amplitude load.** 2015. Thesis (Doctor in Engineering) – Graduate Program in Mechanical and Material Engineering, Federal Technological University of Parana, Curitiba.

Most machines and mechanical components are subject to dynamic loads that can lead to fatigue failures. One of the methods for the prediction of fatigue failures is the Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM). In the LEFM there are several models that describe the propagation of a crack, with their different approaches and conceptions. In general, a distinction is made between the crack propagation models under constant and variable amplitude load. One of the constant amplitude load models is the Paris law, consisting of an Initial Value Problem (IVP), whose solution, in a few cases, can be obtained in closed form. Thus, the objective of this work is to propose a new methodology to solve some models of crack propagation under constant amplitude load, as the models of Paris-Erdogan, Forman, Walker, McEvily and Priddle, without requiring the use of numerical methods for the solution. This methodology was developed by establishing upper and lower bounds that delimit the behavior of the solutions of the models of crack propagation. For that, through literature, were delimited the models to be assessed on the basis of two main aspects: models that incorporate in their equations the regions I to III of the crack propagation, and models that take into account parameters such as the stress ratio, fracture toughness and threshold stress intensity factor for crack propagation. For verification of the accuracy and effectiveness of the new methodology, the relative deviation between bounds and approximate numerical solution was calculated, using the Runge-Kutta 4th order (RK4), and it was observed that the bounds are valid as a way of obtaining approximate solutions to all models. The performance of the use of bounds regarding the RK4 method solution was also evaluated through the computation time.

Keywords: Fatigue. Linear Elastic Fracture Mechanics. Initial Value Problem. Bounds.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Estado de tensão em um ponto próximo a frente de trinca em uma placa plana infinita. Em termos práticos, considera a placa infinita quando sua largura é bem maior que o tamanho de trinca correspondente a $2a$	24
Figura 2: Carregamento cíclico com amplitude de tensão constante	26
Figura 3: Resultados de dois testes de propagação de trinca para valores alto e baixo de $\Delta\sigma$.	28
Figura 4: Efeito na vida de fadiga para o tamanho de trinca inicial e final.....	29
Figura 5: Curva $\log (da/dN)$ x $\log (\Delta K)$	30
Figura 6: Classificação dos modelos de crescimento de trinca por fadiga.....	32
Figura 7: Variação do gráfico da/dN por ΔK em relação a variação de R	36
Figura 8: Variação de R em relação ao fator intensidade de tensão ΔK_{th} para diversos aços ..	38
Figura 9: Ocorrências características de um histórico de carregamento $P(t)$	40
Figura 10: Desaceleração da taxa de crescimento da trinca devido a uma sobrecarga (pico) de tensão em um carregamento com amplitude de tensão constante	41
Figura 11: Fator intensidade de tensão equivalente, ΔK_{eq} . Carregamento com amplitude de tensão variável e carregamento com amplitude tensão constante	42
Figura 12: Definição da variação do fator intensidade de tensão efetivo.....	43
Figura 13: Placa infinita com uma trinca central.....	50
Figura 14: Placa finita com uma trinca central.....	51
Figura 15: Placa finita com uma trinca na sua aresta ou “borda”.....	51
Figura 16: Gráfico da função erro relativo entre a solução exata e a solução numérica, RK4, para uma placa infinita	62
Figura 17: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,2a_0$, $1,3a_0$ e $1,5a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 1, para o modelo de Paris-Erdogan.....	64
Figura 18: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,2a_0$, $1,3a_0$ e $1,5a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 2, para o modelo de Paris-Erdogan.....	65
Figura 19: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,2a_0$, $1,3a_0$ e $1,5a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 3, para o modelo de Paris-Erdogan.....	65
Figura 20: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 1 do modelo de Paris-Erdogan	66
Figura 21: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 2 do modelo de Paris-Erdogan	66
Figura 22: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 3 do modelo de Paris-Erdogan	67

Figura 23: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 1 para o modelo de Paris-Erdogan	68
Figura 24: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 2 para o modelo de Paris-Erdogan	68
Figura 25: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 3 para o modelo de Paris-Erdogan	69
Figura 26: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,2a_0$, $1,3a_0$ e $1,5a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 1, para o modelo de Forman	70
Figura 27: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,2a_0$, $1,3a_0$ e $1,5a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 2, para o modelo de Forman	71
Figura 28: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,2a_0$, $1,3a_0$ e $1,5a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 3, para o modelo de Forman	71
Figura 29: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 1 do modelo de Forman.....	72
Figura 30: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 2 do modelo de Forman.....	72
Figura 31: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 3 do modelo de Forman.....	73
Figura 32: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 1 para o modelo de Forman.....	74
Figura 33: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 2 para o modelo de Forman.....	74
Figura 34: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 3 para o modelo de Forman.....	75
Figura 35: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,4a_0$, $1,5a_0$ e $1,7a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 1, para o modelo de Walker.....	76
Figura 36: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,4a_0$, $1,5a_0$ e $1,7a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 2, para o modelo de Walker.....	77
Figura 37: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,4a_0$, $1,5a_0$ e $1,7a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 3, para o modelo de Walker.....	77
Figura 38: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 1 do modelo de Walker	78
Figura 39: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 2 do modelo de Walker	78
Figura 40: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 3 do modelo de Walker	79

Figura 41: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 1 para o modelo de Walker	80
Figura 42: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 2 para o modelo de Walker	80
Figura 43: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 3 para o modelo de Walker	81
Figura 44: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,02a_0$, $1,03a_0$ e $1,05a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 1, para o modelo de McEvily	82
Figura 45: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,02a_0$, $1,03a_0$ e $1,05a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 2, para o modelo de McEvily	83
Figura 46: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,02a_0$, $1,03a_0$ e $1,05a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 3, para o modelo de McEvily	83
Figura 47: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 1 do modelo de McEvily	84
Figura 48: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 2 do modelo de McEvily	84
Figura 49: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 3 do modelo de McEvily	85
Figura 50: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 1 para o modelo de McEvily	86
Figura 51: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 2 para o modelo de McEvily	86
Figura 52: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 3 para o modelo de McEvily	87
Figura 53: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $3,4a_0$, $3,5a_0$ e $4,5a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 1, para o modelo de Priddle	88
Figura 54: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $3,4a_0$, $3,5a_0$ e $4,5a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 2, para o modelo de Priddle	89
Figura 55: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $3,4a_0$, $3,5a_0$ e $4,5a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 3, para o modelo de Priddle	89
Figura 56: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 1 do modelo de Priddle.....	90
Figura 57: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 2 do modelo de Priddle.....	90
Figura 58: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 3 do modelo de Priddle.....	91
Figura 59: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 1 para o modelo de Priddle.....	92

Figura 60: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 2 para o modelo de Priddle.....	92
Figura 61: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 3 para o modelo de Priddle.....	93

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Relações para um carregamento com amplitude de tensão constante.....	27
Quadro 2: Modelos de propagação de trinca para carregamento com amplitude de tensão constante.....	49

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Parâmetros da equação de Paris-Erdogan para algumas classes de aços	34
Tabela 2: Parâmetros da equação de Paris-Erdogan para alguns ferros fundidos	34
Tabela 3: Parâmetros da equação de Paris-Erdogan para alguns materiais cerâmicos	34
Tabela 4: Parâmetros da equação de Forman para algumas ligas de alumínio	36
Tabela 5: Parâmetros que ajustam os modelos de propagação de trinca para aços ferríticos e o Al 2024 T351 – Exemplos 1, 2 e 3	63
Tabela 6 – Coeficientes do polinômio da equação (4.1) para os exemplos 1, 2 e 3, aplicado ao modelo de Paris-Erdogan.....	67
Tabela 7: Tempo aproximado de computação (em segundos) das cotas e do RK4, aplicado ao modelo de Paris-Erdogan, para 900.000 ciclos	70
Tabela 8: Coeficientes do polinômio da equação (4.1) para os exemplos 1, 2 e 3, aplicado ao modelo de Forman.....	73
Tabela 9: Tempo aproximado de computação (em segundos) das cotas e do RK4, aplicado ao modelo de Forman, para 900.000 ciclos.....	76
Tabela 10: Coeficientes do polinômio da equação (4.1) para os exemplos 1, 2 e 3, aplicado ao modelo de Walker.....	79
Tabela 11: Tempo aproximado de computação (em segundos) das cotas e do RK4, aplicado ao modelo de Walker, para 900.000 ciclos	82
Tabela 12: Coeficientes do polinômio da equação (4.1) para os exemplos 1, 2 e 3, aplicado ao modelo de McEvily	85
Tabela 13: Tempo aproximado de computação (em segundos) das cotas e do RK4, aplicado ao modelo de McEvily, para 900.000 ciclos	88
Tabela 14: Coeficientes do polinômio da equação (4.1) para os exemplos 1, 2 e 3, aplicado ao modelo de Priddle.....	91
Tabela 15: Tempo aproximado de computação (em segundos) das cotas e do RK4, aplicado ao modelo de Priddle, para 900.000 ciclos.....	94
Tabela 16: Resumo dos resultados obtidos para todos os modelos.....	95

LISTA DE SIGLAS

EDO – Equação Diferencial Ordinária

CATC – Carregamento com Amplitude de Tensão Constante

CATV – Carregamento com Amplitude de Tensão Variável

MEF – Método dos Elementos Finitos

MF – Mecânica da Fratura

MFLE – Mecânica da Fratura Linear Elástica

PVI – Problema de Valor Inicial

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	18
1.1 OBJETIVOS.....	19
Objetivo Geral	19
Objetivos Específicos	19
1.2 JUSTIFICATIVA.....	20
1.3 ESCOPO DO TRABALHO	20
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	21
2.1 INTRODUÇÃO - FADIGA EM METAIS	21
2.2 MECÂNICA DA FRATURA	23
Mecânica da Fratura Linear Elástica	24
Propagação de Trinca por Fadiga e o Fator Intensidade de Tensão	27
Modelos de Propagação de Trinca.....	31
Modelos de Carregamento com Amplitude de Tensão Constante	33
Modelos de Carregamento com Amplitude de Tensão Variável.....	39
2.3 MÉTODOS NUMÉRICOS	43
Método de Taylor	44
Método de Euler Explícito	45
Método de Taylor com resto de Lagrange.....	46
Método de Runge-Kutta Explícito.....	46
3 METODOLOGIA DA PESQUISA.....	48
3.1 MÉTODO DA PESQUISA	48
4 COTAS PARA EVOLUÇÃO DO TAMANHO DE TRINCA	53
4.1 COTAS SUPERIOR E INFERIOR.....	53
Cotas para o Modelo de Paris-Erdogan	54
Cotas para o Modelo de Forman.....	56
Cotas para o Modelo de Walker	57
Cotas para o Modelo de McEvily	58
Cotas para o Modelo de Priddle	59
4.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA APROXIMADA.....	61
4.3 AVALIAÇÃO DAS COTAS SUPERIOR E INFERIOR.....	62
4.4 AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS	94
5 CONCLUSÕES	96

5.1 TRABALHOS FUTUROS.....	97
BIBLIOGRAFIA	99
APÊNDICE A: COTAS SUPERIOR E INFERIOR PARA O MODELO DE FORMAN....	105
APÊNDICE B: COTAS SUPERIOR E INFERIOR PARA O MODELO DE WALKER	108
APÊNDICE C: COTAS SUPERIOR E INFERIOR PARA O MODELO DE MCEVILY ...	111
APÊNDICE D: COTAS SUPERIOR E INFERIOR PARA O MODELO DE PRIDDLE	114

1 INTRODUÇÃO

A fadiga é um tipo de falha mecânica devido à solicitação de cargas variáveis cuja principal característica é a iniciação e propagação de uma trinca. A falha por fadiga, geralmente, é de forma “brusca” e inesperada, correspondendo a grande maioria das falhas estruturais. Desse modo, o estudo desse tema torna-se importante para a sua prevenção e controle.

Um dos métodos para a previsão da vida sob fadiga é a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), a qual tem como proposta, estudar e descrever a propagação de uma trinca ou falha existente no material. A MFLE pode ser aplicada à maioria dos materiais, pois, a maior parte deles possuem trincas, ocasionadas devido ao processo de fabricação (falhas na fundição, defeitos de soldagem, trincas devido a tratamentos térmicos, entre outros), ou devido a solicitações dinâmicas (nucleação de trincas por fadiga).

A MFLE apresenta vários modelos de propagação de trinca, com diversas abordagens e concepções. Em específico, distinguem-se os modelos de propagação de trinca para carregamentos com amplitudes de tensão constante ou variável. Dentre os modelos de amplitude de tensão constante, destacam-se os modelos de Paris-Erdogan (1961; 1963), Forman (1967; 1972), Walker (1970), McEvily (1977), Priddle (1976), dentre outros. A formulação e a solução desses modelos são baseadas na determinação de um Problema de Valor Inicial (PVI), o qual descreve a evolução de uma trinca inicial, por meio das condições do carregamento atuante, da geometria do componente em análise e das propriedades do material. Desse modo, para poucas aplicações práticas, consegue-se obter uma solução exata do PVI. Em geral, na maioria das aplicações utilizam-se soluções numéricas aproximadas. No entanto, dependendo dos parâmetros que cada modelo utiliza, como também dos parâmetros que estão relacionados ao carregamento atuante e a geometria do componente, a obtenção da solução numérica aproximada reflete em aspectos como o tempo e custo computacional.

Portanto, o objetivo desse trabalho é propor uma nova metodologia, a qual definirá funções que servirão como cotas que delimitam o comportamento das soluções dos modelos de propagação de trinca. Ou seja, serão as cotas da solução exata ou numérica do PVI de cada modelo que serão analisados. As cotas serão obtidas a partir dos modelos de Paris-Erdogan, Forman, Walker, McEvily e Priddle. E como contribuição ao meio científico e à engenharia, a metodologia busca fornecer uma estimativa ou uma avaliação rápida e eficaz da evolução da

trinca. Também busca-se uma melhora significativa na eficiência computacional, em termos de tempo, resultando em uma ferramenta prática e funcional.

1.1 OBJETIVOS

Objetivo Geral

Este projeto de pesquisa tem como objetivo desenvolver uma nova metodologia para descrever o comportamento de uma trinca inicial por meio de cotas, superior e inferior, para os modelos de propagação de trinca para carregamentos com amplitude de tensão constante, buscando melhorar a forma de se obter esse resultado.

Objetivos Específicos

A fim de cumprir o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos são desenvolvidos:

1. Revisar os conceitos relacionados à Fadiga em metais, a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) e os Métodos Numéricos;
2. Revisar os modelos de propagação de trinca para carregamentos com amplitude de tensão constante;
3. Delimitar quais modelos de propagação de trinca são utilizados nesse trabalho;
4. Aplicar a metodologia aos modelos de propagação de trinca delimitados;
5. Implementar os códigos computacionais da metodologia para cada modelo, utilizando exemplos numéricos, para avaliar o desempenho das cotas superior e inferior em relação à solução numérica aproximada do PVI, em termos de desvio relativo e tempo de computação;
6. Analisar os dados e os resultados, para avaliar a eficácia da metodologia proposta.

1.2 JUSTIFICATIVA

Este trabalho contribui, para a comunidade científica e para os engenheiros, que desejam ter um acompanhamento rápido e eficaz da propagação de uma trinca identificada em um determinado material. Por meio dessa nova metodologia são estabelecidas cotas superior e inferior para a evolução de uma trinca, em relação a solução numérica aproximada do PVI, com baixo custo computacional. Também é proporcionado não somente a aplicação da metodologia a um único modelo para descrever a propagação da trinca, mas para alguns modelos que podem incluir até as três regiões da evolução da trinca (regiões I, II e III) possibilitando ao engenheiro a livre escolha do modelo que mais se ajuste ao seu problema de interesse.

1.3 ESCOPO DO TRABALHO

A apresentação desse projeto de pesquisa está estruturada em cinco capítulos. Neste primeiro, tem-se uma introdução ao assunto do trabalho, apresentando o contexto no qual está inserido, os objetivos a serem atingidos e a sua justificativa.

No segundo capítulo é conduzida uma revisão bibliográfica sobre a conceituação de Fadiga em Metais, da Mecânica da Fratura Linear Elástica e dos Métodos Numéricos.

No terceiro capítulo é descrita a metodologia que se pretende utilizar para a realização desse trabalho.

No quarto capítulo é apresentado o desenvolvimento da pesquisa, incluindo os resultados e discussões.

No quinto capítulo são registradas as conclusões do trabalho e sugestões para a sua continuidade.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos e definições fundamentais sobre a Fadiga em Metais e a Mecânica da Fratura. Posteriormente, é mostrada uma revisão sobre a Mecânica da Fratura Linear Elástica e os Modelos de Propagação de Trinca com suas devidas aplicações e limitações e, por fim, são revisados alguns dos Métodos Numéricos.

2.1 INTRODUÇÃO - FADIGA EM METAIS

Na fabricação dos elementos estruturais o seu correto dimensionamento torna-se um fator crítico na fase do projeto detalhado. Nessa etapa estimam-se as cargas e os carregamentos atuantes na estrutura, sendo que esses carregamentos podem proporcionar aos elementos diferentes modalidades de falhas ou danos. Ainda, nessa etapa é necessário avaliar o tipo do carregamento que o componente está sendo solicitado (carregamento estático ou dinâmico) e, através disso, verifica-se a segurança ou estimasse a falha do componente por meio das propriedades dos materiais que serão empregados.

Com relação ao carregamento dinâmico, uma das análises a ser considerada é que os elementos sofrem ação de tensões que variam no tempo. Observa-se que esses elementos falham quando as tensões atuantes estão abaixo da tensão de ruptura ou da tensão de escoamento do material. Assim, entende-se que devido à repetição dessas tensões os materiais fragilizam e falham pelo o que é conhecido como falha por fadiga.

De acordo com a ASTM (2000), define-se fadiga como:

Processo progressivo e localizado de modificações estruturais permanentes ocorridas em um material submetido a condições que produzem tensões e deformações cíclicas em um ponto ou em vários pontos e que pode culminar em trincas ou fratura após um número suficiente de ciclos (ASTM, 2000, p. 1034).

A falha por fadiga tem um aspecto similar à fratura frágil, sendo que a superfície de falha é perpendicular ao eixo da tensão atuante com ausência de estrição do material. No entanto, diferentemente da fratura frágil, a fratura por fadiga é um processo de redução da capacidade de carga do material devido a sua ruptura lenta, através do avanço de uma trinca, a

cada ciclo de carregamento. Ela se desenvolve por meio de três estágios: estágio I correspondente ao início da trinca, estágio II consiste na propagação da trinca e o estágio III é finalizado com a ruptura do componente. A trinca se inicia devido a um deslizamento dos planos cristalinos e, normalmente, é originada por uma descontinuidade do material, o que ocasiona as concentrações de tensões (correspondendo a mudanças geométricas da peça, inclusões de outros materiais, vazios no material, entre outros). Seu processo de propagação é influenciado por diversos fatores, como tensões residuais de tração, temperaturas elevadas, meios corrosivos e ciclagem do carregamento de alta frequência (EWING, HUMPHREY, 1903; CUI, 2002).

Existem duas formas de abordagem principais e, também, alguns métodos em projeto e análise para calcular a vida sob fadiga de um componente estrutural.

As abordagens são: *safe-life* e *fail-safe*. A primeira assume que o material não tem nenhuma trinca ou o nível de tensão aplicado é inferior para propagar qualquer trinca existente, assim, rigorosas análises e testes são feitos para mostrar que a probabilidade de falha é extremamente remota. A segunda assume que o material possui uma trinca e esse material permanece em serviço mesmo com essa trinca presente. Assim, técnicas de propagação de trincas são empregadas para manter o componente em uma condição de utilização segura (HOEPPNER, KRUPP, 1974; BANNANTINE et al., 1989).

Os métodos são: *método da vida sob tensão*, *método da vida sob deformação* e *método da mecânica de fratura linear elástica*. O *método da vida sob tensão*, é baseado apenas em níveis de tensões as quais devem ser controladas para impedir a formação das trincas. É o método mais tradicional e válido onde as tensões e deformações permanecem no regime elástico. A base do método é o diagrama de Wöhler ou diagrama *S-N*, tensão-número de ciclos. Normalmente utilizado para carregamentos com amplitude constante e fadiga de alto ciclo. O *método da vida sob deformação* considera os efeitos das deformações elástica e plástica do material, fornecendo uma melhor descrição das condições de iniciação ou nucleação de uma trinca. Normalmente utilizado em aplicações de fadiga de baixo ciclo ou em problemas de vida finita. Também aplicado em situações envolvendo altas temperaturas (considerando efeitos da fadiga e fluência) e aplicações envolvendo o histórico de carregamentos com amplitude de tensão variável, levando em consideração os efeitos de tensões residuais. Destacam-se para esse método as equações definidas por Basquin e Coffin-Manson (TAVERNELLI, COFFIN, 1962). O *método da mecânica de fratura linear elástica*, tema desse trabalho, assume que uma trinca já esteja presente no elemento em análise e já

tenha sido detectada. Esse método prevê o crescimento dessa trinca devido à intensidade de tensão aplicada (BANNANTINE et al., 1989).

Outra forma de modelar e descrever a vida sob fadiga é a utilização da Mecânica do Dano Contínuo (MDC) a qual, através de equações constitutivas, tem a finalidade de prever a degradação progressiva do material. A MDC é baseada no pressuposto de que o dano interno é iniciado devido à presença de micro defeitos, tais como micro fissuras e micro vazios. Por meio da literatura encontram-se diversos modelos constitutivos, tais como o modelo proposto por Lemaitre (1985) para dano causado por escoamento plástico, Chaboche (1984) para dano por desgaste e Krajcinovic e Fonseka (1981) para dano frágil.

Em síntese aos métodos descritos, Janson e Hult (1977) explicam que na Mecânica do Dano Contínuo a resistência da estrutura é determinada em função da evolução de um campo de defeitos (micro fissuras ou poros) considerado continuamente distribuído ou concentrado. Na Mecânica da Fratura, a resistência da estrutura é determinada em função da evolução de uma única trinca em um meio mecanicamente intacto.

2.2 MECÂNICA DA FRATURA

A Mecânica da Fratura (MF) considera que os componentes mesmo antes de serem colocados em serviço, possuem trincas, as quais podem crescer até tornarem-se críticas. Essas trincas podem ser provenientes do processo de fabricação (falhas na fundição, defeitos de soldagem, trincas devido a tratamentos térmicos, entre outros) ou de uma solitação dinâmica (nucleação de trincas por fadiga). Assim, o estudo da MF viabiliza modelos de análise para prever o tamanho dessas trincas antes que atinjam tamanhos catastróficos.

A aplicação da MF é de extrema importância como, por exemplo, na rejeição ou não de uma peça, com um alto valor agregado, a qual possui uma trinca. Também a MF pode monitorar o crescimento de uma trinca em um determinado componente, estabelecendo um programa de inspeção e manutenção, para que essa trinca não atinja um tamanho crítico.

Mecânica da Fratura Linear Elástica

A Mecânica da Fratura foi sendo consolidada através de vários trabalhos e estudos sobre o comportamento mecânico dos materiais. Trabalhos como o de Leonardo da Vinci, por volta de 1500, relataram algumas conclusões em relação ao comportamento mecânico dos materiais, expondo os resultados de forma qualitativa de experimentos efetuados com fios de aço (ANDERSON, 1994). Outro trabalho, porém mais recente, apresentando resultados quantitativos, foi o estudado por Griffith, em 1920, aplicado aos materiais frágeis, como vidros e cerâmicas, correspondendo a um critério baseado na termodinâmica. A partir de um balanço de energia, foi estimada a força necessária a ser aplicada a um corpo, para que haja a propagação de uma trinca. Esse trabalho prevê que o crescimento da trinca ocorre quando a taxa de liberação de energia do carregamento for maior que a taxa de energia para crescimento de trinca (GRIFFITH, 1920). A partir disso, Griffith estimou a tensão crítica, ou a tensão nominal de falha, para o estado plano de tensões utilizando uma placa plana infinita, com uma trinca de comprimento $2a$ solicitada por um carregamento de tração, figura 1.

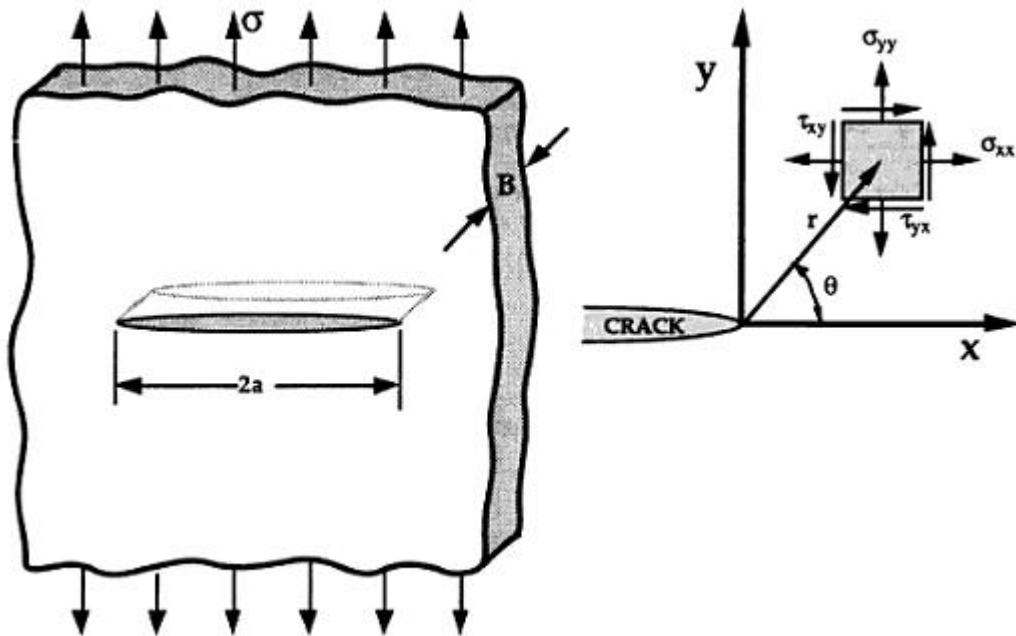


Figura 1: Estado de tensão em um ponto próximo a frente de trinca em uma placa plana infinita. Em termos práticos, considera-se a placa infinita quando sua largura é bem maior que o tamanho de trinca correspondente a $2a$.

Fonte: Adaptado de Anderson (1994).

Dando continuidade aos trabalhos de Griffith, Sneddon (1946) apresentou a forma da distribuição das tensões próxima a frente de trinca. Irwin (1957) desenvolveu teorias para os

materiais dúcteis e por volta de 1950 mostrou que as tensões locais próximas à frente de trinca são, de forma geral, representadas pela seguinte equação:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\Pi r}} f_{ij}(\theta), \quad (2.1)$$

sendo que r e θ são coordenadas polares da localização do ponto de interesse em relação a frente de trinca, e o parâmetro K é denominado como fator intensidade de tensão (BANNANTINE et al., 1989; ANDERSON, 1994; SCHIJVE, 2009). Essa expressão tem uma boa aproximação quando $r \rightarrow 0$, conforme a figura 1, a qual mostra a localização de um ponto próximo a frente de trinca com seu respectivo estado plano de tensões.

Muitos outros trabalhos foram desenvolvidos na mesma época: destaca-se o trabalho de Orowan (1948) que propôs uma modificação da teoria de Griffith. Mott (1948) aprimorou a teoria de Griffith para descrever a propagação de uma trinca. Westergaard (1939) apresentou o fator intensidade de tensão, o qual se relaciona com a taxa de liberação de energia de Griffith, para descrever as tensões e deslocamentos próximos à frente de trinca.

Com relação à equação (2.1), para uma trinca submetida à tração (modo I - abertura), utilizando a mesma placa plana, figura 1, o campo de tensão na vizinhança próxima a frente de trinca é definido pelas seguintes equações (WESTERGAARD, 1939):

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\Pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right); \quad (2.2)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\Pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right); \quad (2.3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\Pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}; \quad (2.4)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0; \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = 0 & \text{(para tensão plana);} \\ \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & \text{(para deformação plana).} \end{cases} \quad (2.6)$$

Conforme apresentado nas equações (2.1) a (2.4), o fator intensidade de tensão, K , define a intensidade local das tensões a frente da trinca. Também pode ser considerado como um fator que estabelece os níveis de tensões próximos à frente da trinca. Destaca-se, ainda, que nele se estabelecem, em um único parâmetro, o efeito do carregamento aplicado, do tamanho da trinca e da geometria da peça, conforme apresenta a seguinte equação:

$$K = f(a) \sigma \sqrt{\Pi a}, \quad (2.7)$$

sendo σ corresponde a tensão nominal aplicada, a é o tamanho da trinca e $f(a)$ é a função de correção do fator intensidade de tensão. A função $f(a)$ esta relacionada com o carregamento aplicado e a forma geométrica do componente com a trinca.

A função que define o fator intensidade de tensão pode ser obtida pela literatura. Para situações onde o fator intensidade de tensão não pode ser definido diretamente por meio de tabelas, pode-se utilizar o método da superposição. A sua determinação também pode ser feita por métodos analíticos, numéricos e experimentais (BROEK, 1982; BANNANTINE et al., 1989).

Conforme mencionado, o campo de tensões à frente da trinca fica caracterizado pelo fator intensidade de tensão. Assim, quando a magnitude de K atinge um valor crítico, a propagação da trinca se inicia. Esse valor crítico é chamado de tenacidade à fratura do material e é representado por K_c . A tenacidade à fratura depende do modo de abertura de trinca (modo I, II ou III), do processamento do material, da temperatura, do carregamento e do estado de tensão a frente da trinca (ANDERSON, 1994).

Com relação às tensões atuantes, conforme relatado anteriormente, essas são ocasionadas por um carregamento variável no tempo. Diversas formas de onda podem compor esse carregamento, por exemplo, onda senoidal, quadrada ou triangular. A figura 2 mostra um carregamento de forma senoidal com amplitude de tensão constante, ou seja, $\Delta\sigma = \sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}$ é constante.

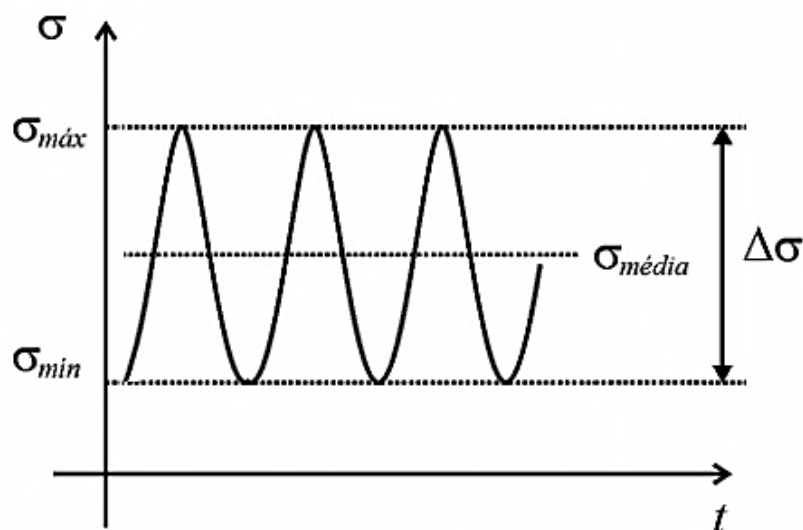


Figura 2: Carregamento cíclico com amplitude de tensão constante.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na figura 2, observam-se algumas importantes relações conforme destacado no quadro

1.

RELAÇÕES	DENOMINAÇÕES
$\Delta\sigma = \sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}$	Variação de tensões
$\sigma_a = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}}{2}$	Amplitude de tensão
$\sigma_m = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} + \sigma_{m\acute{i}n}}{2}$	Tensão média
$R = \frac{\sigma_{m\acute{i}n}}{\sigma_{m\acute{a}x}}$	Razão de tensão

Quadro 1: Relações para um carregamento com amplitude de tensão constante.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Propagação de Trinca por Fadiga e o Fator Intensidade de Tensão

A taxa de crescimento de uma trinca em um componente é dependente do nível de tensão que está sendo aplicado. Para ilustrar essa dependência, a figura 3 mostra dois testes efetuados, com diferentes níveis de tensões, em uma placa finita que possui uma trinca em uma “borda” ou aresta. Primeiramente, será apresentado, na figura 3, a variação da taxa de crescimento de trinca (da/dN) devido a variação da tensão atuante ($\Delta\sigma$). Logo após é mostrado a variação da taxa de crescimento de trinca (da/dN) em relação a variação do fator intensidade de tensão (ΔK).

Com relação à variação da tensão atuante ($\Delta\sigma$) observa-se na figura 3a que com o aumento do $\Delta\sigma$ (com o mesmo R), aumenta-se a taxa de propagação de trinca (da/dN) e, conseqüentemente, diminui-se a vida sob fadiga. Também pode-se observar que uma grande parte da vida de fadiga é despendida quando o tamanho da trinca é relativamente pequeno (SCHIJVE, 2009). Essa relação pode ser observada na figura 4, a qual mostra que a taxa de crescimento de trinca é pequena quando a mesma tem um comprimento muito próximo do seu valor inicial, a_0 . Ainda, a figura 4 mostra que mudanças no valor final ou no valor crítico do tamanho da trinca, a_2 ou a_3 , pouco influenciam no resultado do número de ciclo final, N_2 ou N_3 (BANNANTINE et al., 1989; SCHIJVE, 2009).

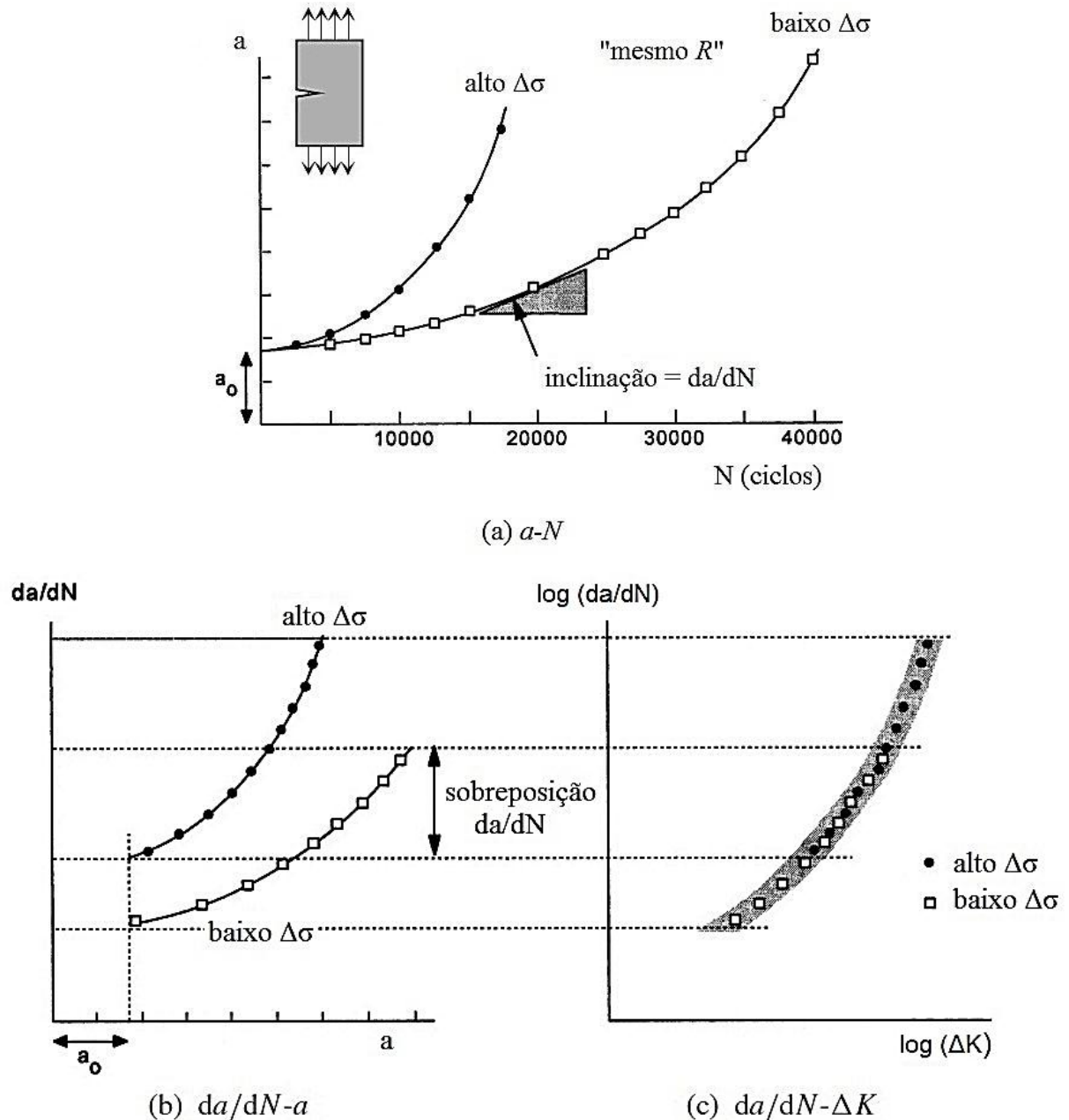


Figura 3: Resultados de dois testes de propagação de trinca para valores alto e baixo de $\Delta\sigma$.
Fonte: Adaptado de Shijve (2009).

Nas figuras 3b e 3c, observa-se que a sobreposição dos dois diferentes níveis de tensões, em um determinado intervalo, a taxa de crescimento de trinca, $[\log(da/dN)]$, representada em função da variação do fator intensidade de tensão, $[\log(\Delta K)]$, é semelhante, figura 3c, mesmo que os valores do tamanho de trinca sejam diferentes nesse intervalo, figura 3b. Assim, observa-se que a taxa de crescimento de trinca, $\log(da/dN)$, representada em função do $\log(\Delta K)$ é a mesma para os dois diferentes níveis de tensões (SCHIJVE, 2009). Por fim, destaca-se, ainda, que a variação do fator intensidade de tensão é considerado somente para a parcela sob tração do ciclo, a qual solicita a frente de trinca. No caso de existir tensões

de compressão, ΔK é calculado usando somente a parcela sob tração do ciclo. Desse modo, seu valor pode ser calculado pela seguinte equação:

$$\Delta K = K_{m\acute{a}x} - K_{m\acute{i}n} = f(a) \Delta \sigma \sqrt{\Pi a}, \quad (2.8)$$

sendo $\Delta \sigma$ o intervalo de tensões definido como $\Delta \sigma = \sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}$ (BANNANTINE et al., 1989). Também a taxa de propagação da trinca pode ser escrita como função de $K_{m\acute{a}x}$ e $K_{m\acute{i}n}$ conforme a seguinte equação (PARIS et al., 1961; SCHIJVE, 2009):

$$\frac{da}{dN} = f(R, \Delta K), \quad (2.9)$$

sendo $\Delta K = K_{m\acute{a}x} - K_{m\acute{i}n}$, $K_{m\acute{a}x} = \Delta K / (1 - R)$ e $K_{m\acute{i}n} = R \Delta K / (1 - R)$.

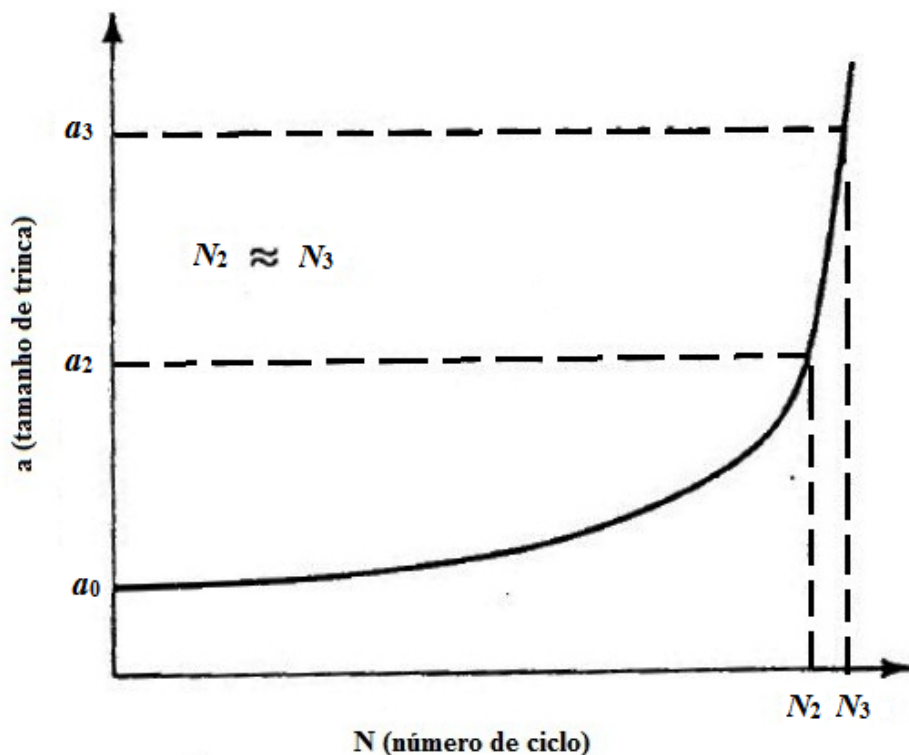


Figura 4: Efeito na vida de fadiga para o tamanho de trinca inicial e final.
Fonte: Adaptado de Bannantine et al. (1989).

A figura 5 representa a taxa de propagação de trinca pela variação do fator intensidade de tensão. A partir disso, observam-se três regiões bem distintas com comportamentos diferentes. A região I e III representam curvas verticais assintóticas e a região II representa uma curva onde a derivada é constante quando disposta em um gráfico em escala $\log \times \log$.

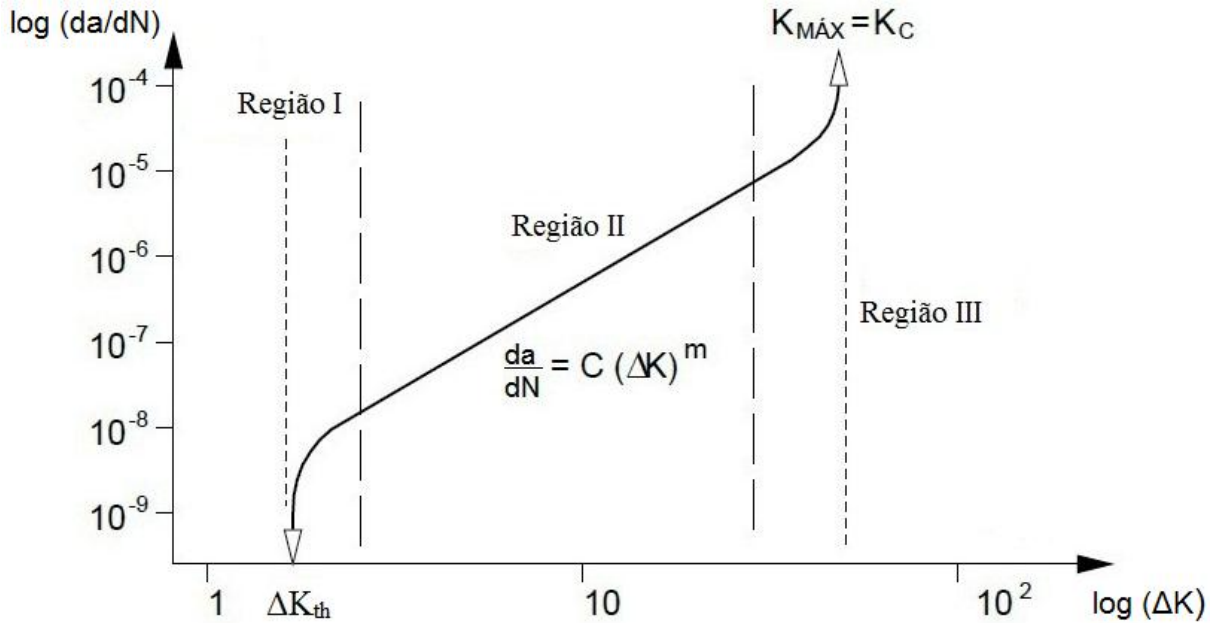


Figura 5: Curva $\log (da/dN)$ x $\log (\Delta K)$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A região I, pequenas trincas, é caracterizada por uma taxa de crescimento de trinca da ordem de 10^{-10} m/ciclo (SCHIJVE, 2009). Essa região é influenciada pela microestrutura do material, não podendo ser tratado com um material contínuo. O fator intensidade de tensão correspondente ao início dessa região é definido por um valor ΔK_{th} (*threshold stress intensity factor* ou fator intensidade de tensão inicial), o qual corresponde ao valor inicial onde as trincas em formação se propagam. Valores abaixo de ΔK_{th} as trincas não se propagam, ou se propagam a uma taxa muito baixa para ser mensurada (BANNANTINE et al., 1989).

A região II, corresponde a uma relação linear entre $\log (da/dN)$ x $\log (\Delta K)$ sendo representada pela seguinte equação:

$$\log \left(\frac{da}{dN} \right) = m_p \log (\Delta K) + \log (C_p), \quad (2.10)$$

sendo C_p e m_p constantes empíricas do material a serem obtidas a partir de dados experimentais. Essa equação é conhecida como equação de Paris (BANNANTINE et al., 1989; SCHIJVE, 2009). A equação (2.10) pode ser reescrita como:

$$\frac{da}{dN} = C_p (\Delta K)^{m_p}, \quad (2.11)$$

ou

$$\frac{da}{dN} = C_p \left(f(a) \Delta \sigma \sqrt{\Pi a} \right)^{m_p}. \quad (2.12)$$

Assim, destaca-se que a solução exata da equação (2.12) é:

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{ds}{(f(s)\sqrt{s})^{m_p}} = \int_{N_1}^{N_2} C_p (\Delta\sigma\sqrt{\pi})^{m_p} ds. \quad (2.13)$$

Da equação (2.13) observa-se que o lado direito da igualdade é facilmente determinado, pois, depende somente do carregamento e dos parâmetros que são função do material. Por outro lado, o lado esquerdo da igualdade é dependente da função de correção do fator intensidade de tensão, $f(s)$. Essa função é dependente do carregamento que está sendo aplicado, como também, da forma geométrica do componente em análise. Assim, em poucas situações consegue-se resolver a equação (2.13) de forma exata e, com isso, há a necessidade da solução por um método numérico aproximado.

Por fim, a região III, estado de trinca instável, da figura 5, corresponde a uma sensível aceleração no crescimento da trinca, finalizada pela ruptura final onde o fator intensidade de tensão é da ordem de K_c . Nessa região os efeitos da plasticidade começam a influenciar a taxa de propagação da trinca, pois o tamanho da região plástica, ou a região encruada do material, se torna grande em comparação com as dimensões da trinca. Em muitas situações práticas de engenharia a região III é desprezada, pois não afeta significativamente a vida total do material (BANNANTINE et al., 1989; SCHIJVE, 2009).

Modelos de Propagação de Trinca

Existem vários modelos encontrados na literatura para a descrição da propagação de uma trinca. Seus métodos de abordagem são diferentes, e consideram, por exemplo, a forma de analisar o material (macro ou microestrutura), o carregamento imposto (amplitude de tensão constante ou variável), a utilização de parâmetros associados aos materiais (fator intensidade de tensão, espessura, tensões residuais, etc.), dentre outras.

Uma das análises a ser verificada é descrever se o modelo considera o material como um contínuo, uma microestrutura ou uma interação entre o contínuo e a microestrutura (SHORT; HOEPPNER, 1989). Em linhas gerais, o contínuo é utilizado para situações com trincas longas (tamanho ≥ 1 mm) e a microestrutura é utilizada para situações envolvendo pequenas trincas (tamanho entre 100 μm a 1 mm) (ANDERSON, 1994).

A análise considerando o material como um contínuo tem como característica o estado de tensão bem definido na frente da trinca. Nessa região, assume-se que o material é

homogêneo, não possuindo qualquer descontinuidade. Se a análise for feita para um material elástico linear, o fator intensidade de tensão é utilizado para descrever o estado de tensão na frente da trinca. Short e Hoepfner (1989) destacam que a grande vantagem dessa análise é que ela considera fatores como o comprimento da trinca, geometria do componente, carga aplicada e, para o projetista, são considerações importantes em seu estudo.

A análise considerando o material como uma microestrutura utiliza a descrição das deformações. São considerados aspectos micro estruturais locais, como a estrutura cristalina, o comportamento do deslocamento dos grãos e a interação nos contornos dos grãos. O efeito do fechamento da trinca pode ser considerado.

No entanto, Short e Hoepfner (1989) afirmam que cada uma das abordagens tem também as suas desvantagens. Utilizar a abordagem do contínuo para pequenas trincas pode ser um erro, pois estudos confirmam, ao contrário do que essa abordagem considera, que o fator intensidade de tensão é dependente do tamanho da trinca. Assim, para melhorar a precisão dos resultados obtidos, pode-se modelar a propagação da trinca utilizando as duas abordagens, a contínua e a micro estrutural.

Outra forma de análise a ser verificada é representar, em linhas gerais, os modelos de crescimento de trinca por fadiga, conforme a figura 6 (TOOR, 1973; HOEPPNER, KRUPP, 1974; NELSON, 1977; BEDEN et al., 2009; MACHNIEWICZ, 2012).

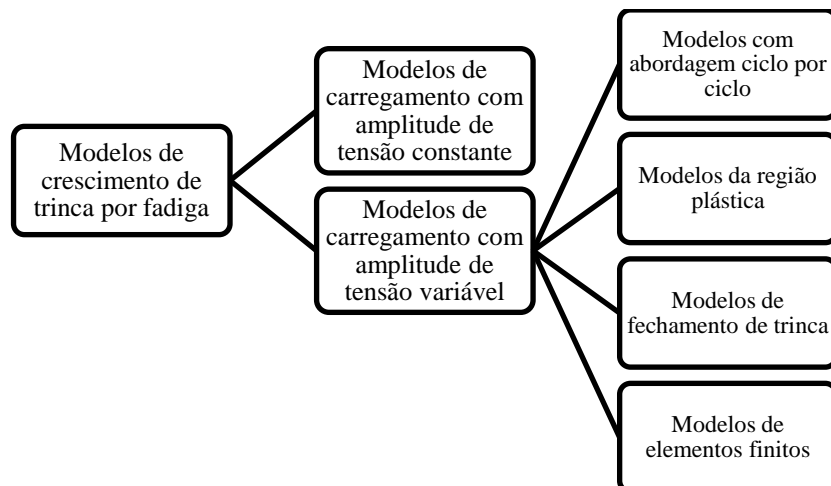


Figura 6: Classificação dos modelos de crescimento de trinca por fadiga.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 6 mostra duas grandes linhas de estudo, os modelos que consideram o Carregamento com Amplitude de Tensão Constante (CATC) e os modelos com Carregamento com Amplitude de Tensão Variável (CATV).

Modelos de Carregamento com Amplitude de Tensão Constante

Na primeira forma de abordagem, modelos com Carregamento com Amplitude de Tensão Constante (CATC), desconsidera-se qualquer histórico de carregamento. Essa abordagem é simplificada, pois, na prática, dificilmente encontra-se esse tipo de carregamento. Uma aplicação do CATC pode ser encontrada em máquinas rotativas. A seguir, destacam-se alguns dos modelos de crescimento de trinca para um CATC levando em consideração dois aspectos: a frequência de ocorrência na literatura e a abrangência da aplicabilidade dos modelos nas regiões I a III do diagrama $\log(da/dN) \times \log(\Delta K)$, figura 5 (TOOR, 1973; HOEPPNER, KRUPP, 1974; BEDEN et al., 2009). Nota-se que, em cada modelo, a variação do carregamento constante, $\Delta\sigma$, está atribuída ao parâmetro ΔK .

Modelo de Paris-Erdogan

Após os trabalhos desenvolvidos por Head (1953) e com base em dados experimentais, utilizando placas de ligas de alumínio (ligas 2024-T3 e 7075-T6 utilizadas em aeronaves), Paris e Erdogan (1961; 1963) propuseram o seu modelo que é conhecido como Lei de Paris, conforme a seguinte equação:

$$\frac{da}{dN} = C_P (\Delta K)^{m_P}, \quad (2.14)$$

sendo C_P e m_P constantes empíricas do material e ΔK a variação do fator intensidade de tensão por ciclo de carregamento.

A equação de Paris geralmente é válida para valores de ΔK entre 300 a 1800 MPa.mm^{1/2} (9 a 52 ksi.in^{1/2}). Valores de ΔK abaixo de 300 MPa.mm^{1/2} (9 ksi.in^{1/2}) estão próximos aos valores de ΔK_{th} , onde as trincas não se propagam, e valores de ΔK acima de 1800 MPa.mm^{1/2} (52 ksi.in^{1/2}) estão próximos dos valores de K_c (LAMPMAN, 1996).

Com relação ao coeficiente C_P e o expoente m_P , Barsom (1971) e Barsom e Rolf (1999) por meio de ensaios desenvolveram alguns valores empíricos para várias classes de aços conforme apresentado na tabela 1. Essas constantes empíricas são dependentes de parâmetros como a frequência do carregamento, a razão de tensão, o meio ambiente, o intervalo de variação do fator intensidade de tensão, a temperatura, dentre outros (CAVALLINI, IACOVIELLO, 1991).

Tabela 1: Parâmetros da equação de Paris-Erdogan para algumas classes de aços.

Aço	$C_P \left[\frac{\text{m/ciclo}}{(\text{MPa}\sqrt{\text{m}})^{m_P}} \right]$	$C_P \left[\frac{\text{in/ciclo}}{(\text{kpsi}\sqrt{\text{in}})^{m_P}} \right]$	m_P
Ferrítico-perlítico	$6,89 \times 10^{-12}$	$3,60 \times 10^{-10}$	3,00
Martensítico	$1,36 \times 10^{-10}$	$6,60 \times 10^{-9}$	2,25
Austenítico inoxidável	$5,61 \times 10^{-12}$	$3,00 \times 10^{-10}$	3,25

Fonte: Barsom e Rolf (1999).

Da mesma forma, as tabelas 2 e 3 apresentam alguns valores referentes ao coeficiente C_P e o expoente m_P da equação (2.14) para alguns ferros fundidos e materiais cerâmicos, respectivamente.

Tabela 2: Parâmetros da equação de Paris-Erdogan para alguns ferros fundidos.

Perlita [%]	$K_c [\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}]$	$C_P \left[\frac{\text{m/ciclo}}{(\text{MPa}\sqrt{\text{m}})^{m_P}} \right]$	m_P
73,8	25,6	1,58	10,75
45,2	38,5	1,83	6,66
37,5	37,5	1,10	7,14

Fonte: Adaptado de Lampman (1996).

Tabela 3: Parâmetros da equação de Paris-Erdogan para alguns materiais cerâmicos.

Aço	Condições de teste	$C_P \left[\frac{\text{m/ciclo}}{(\text{MPa}\sqrt{\text{m}})^{m_P}} \right]$	m_P	ΔK
AL2O3 (99% puro)	5 Hz, $R = -1,0$, temperatura ambiente	$1,1 \times 10^{-11}$	14 ± 5	2,7 – 4,0
AL2O3 (90% puro)	0,13 Hz, $R = 0,15$, $T = 1050^\circ\text{C}$	$2,8 \times 10^{-10}$	10	1,0 – 3,0
	2 Hz, $R = 0,15$, $T = 1050^\circ\text{C}$	$6,3 \times 10^{-11}$	8	2,0 – 3,5

Fonte: Adaptado de Lampman (1996).

A equação de Paris-Erdogan representa, conforme relatado, uma relação linear quando plotado em um diagrama $\log \times \log$ sendo:

$$\log\left(\frac{da}{dN}\right) = m_P \log(\Delta K) + \log(C_P), \quad (2.15)$$

e m_P é o coeficiente angular da reta. Portanto, a lei de Paris descreve a taxa de crescimento da trinca através da intensidade do campo de tensão a frente de trinca, sendo, essa intensidade, representada pelo fator intensidade de tensão.

Os problemas fundamentais a respeito da Lei de Paris é que ela se limita em representar somente a região II da figura 5 e, além disso, não considera o efeito da tensão média ou o efeito da variação da razão de tensão, R .

Modelo de Forman

A lei de Paris descreve que a propagação de uma trinca é essencialmente função da variação do fator intensidade de tensão. Porém, através de resultados experimentais, verificou-se uma grande discrepância utilizando a lei de Paris proposta. A partir disso, Forman (1967; 1972) aprimorou os trabalhos de Paris, considerando em seu modelo, parâmetros que deveriam ser utilizados quando se usa a relação $\log(da/dN) \times \log(\Delta K)$. O primeiro parâmetro é a variação dos resultados encontrados devido à razão de tensão, R , e o segundo é a instabilidade do crescimento de trinca quando o fator intensidade de tensão aproxima-se do valor crítico K_c . Assim, Forman propôs as seguintes equações:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_F (\Delta K)^{m_F}}{(1-R)(K_c - K_{máx})} = \frac{C_F (\Delta K)^{m_F-1}}{\frac{K_c}{K_{máx}} - 1}, \quad (2.16)$$

ou

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_F (\Delta K)^{m_F}}{(1-R) K_c - \Delta K}, \quad (2.17)$$

sendo C_F e m_F parâmetros do material para o modelo de Forman, $K_{máx}$ o fator intensidade de tensão máximo e K_c a tenacidade a fratura do material. Por esses fatos o modelo de Forman é capaz de descrever o comportamento da evolução de uma trinca para várias razões de tensão, R , aplicadas nas regiões II e III da figura 5. Também a equação é válida para valores de $R > 0$, pois, para determinados materiais, quando $R < 0$ não ocorre mudanças significativas na taxa de propagação de trinca se comparada com a taxa de propagação quando $R \geq 0$ (HUDSON, SCARDINA, 1969; BANNANTINE et al., 1989; KUMAR et al., 2013).

A razão de tensão, utilizada no modelo de Forman, é um fator que influencia diretamente na taxa de propagação de trinca. De forma geral, para valores de ΔK constante, quanto maior o valor de R , maior a taxa de propagação de trinca. Destaca-se que a razão de tensão é fortemente dependente do tipo de material em análise (HUDSON, SCARDINA, 1969; YUEN et al., 1974; BANNANTINE et al., 1989; MEHRZADI, TAHERI, 2012). A

figura 7 ilustra um gráfico representando a variação de da/dN por ΔK em relação a variação de R .

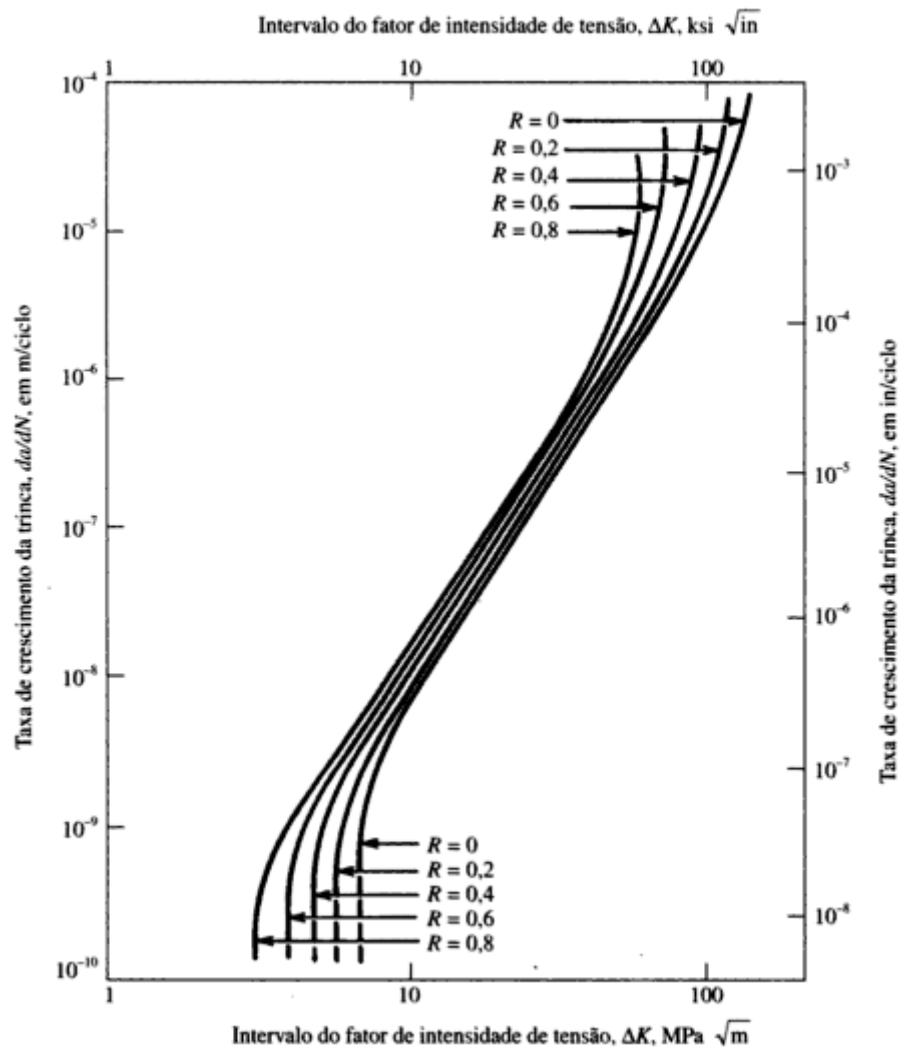


Figura 7: Variação do gráfico da/dN por ΔK em relação a variação de R .
Fonte: Norton (2013).

Com relação ao coeficiente C_F e o expoente m_F , Forman (1967) apresenta alguns valores para ligas de alumínio conforme mostra a tabela 4.

Tabela 4: Parâmetros da equação de Forman para algumas ligas de alumínio.

Liga de alumínio	K_c [lb/in ^{3/2}]	C_F $\left[\frac{\text{in/ciclo}}{(\text{kpsi}\sqrt{\text{in}})^{m_F}} \right]$	m_F
7075-T6	68.000	5×10^{-13}	3
2024-T3	83000	3×10^{-13}	3

Fonte: Adaptado Forman (1967).

Modelo de Walker

Na mesma abrangência que considera o modelo de Paris-Erdogan, Walker (1970), utilizando as mesmas ligas de alumínio, propôs seu modelo o qual considera o efeito da tensão média ou o efeito da variação da razão de tensão, R . Seu modelo é descrito conforme as equações:

$$\frac{da}{dN} = C_W \left[(1-R)^{\gamma_W} K_{m\acute{a}x} \right]^{m_W}, \quad (2.18)$$

ou

$$\frac{da}{dN} = C_W \left[(1-R)^{\gamma_W-1} \Delta K \right]^{m_W}, \quad (2.19)$$

sendo C_W , m_W e γ_W parâmetros do material para o modelo de Walker. Esse modelo é válido somente para a região II da figura 5 e, ainda, para valores de razão de tensão definidos entre $-2 < R < 0,7$ (NOROOZI et al., 2005). Para $R = 0$ a equação de Walker se torna equivalente a equação de Paris, considerando C_W e m_W igual a C_P e m_P .

Modelo de McEvily

McEvily e Groeger (1977) propuseram um modelo para descrever as regiões I a III da figura 5, conforme as equações:

$$\frac{da}{dN} = \frac{A_e}{\sigma_y E} (\Delta K - \Delta K_{th})^2 \left(1 + \frac{\Delta K}{K_c - K_{m\acute{a}x}} \right), \quad (2.20)$$

ou

$$\frac{da}{dN} = C_M (\Delta K - \Delta K_{th})^2 \left(1 + \frac{\Delta K}{K_c - K_{m\acute{a}x}} \right), \quad (2.21)$$

sendo A_e uma constante do material e seu valor é função do meio ambiente, σ_y a tensão de escoamento do material, E o módulo de Young e ΔK_{th} o valor inicial onde as trincas em formação se propagam. O valor ΔK_{th} é função da razão de tensão, R , e do meio ambiente. Com isso, a figura 8 mostra, para diferentes aços, que a tendência geral é de diminuir o valor de ΔK_{th} à medida que a razão de tensão, R , aumenta. Observa-se que as propriedades mecânicas e metalúrgicas dos aços analisados pouco influenciam o início da propagação da trinca.

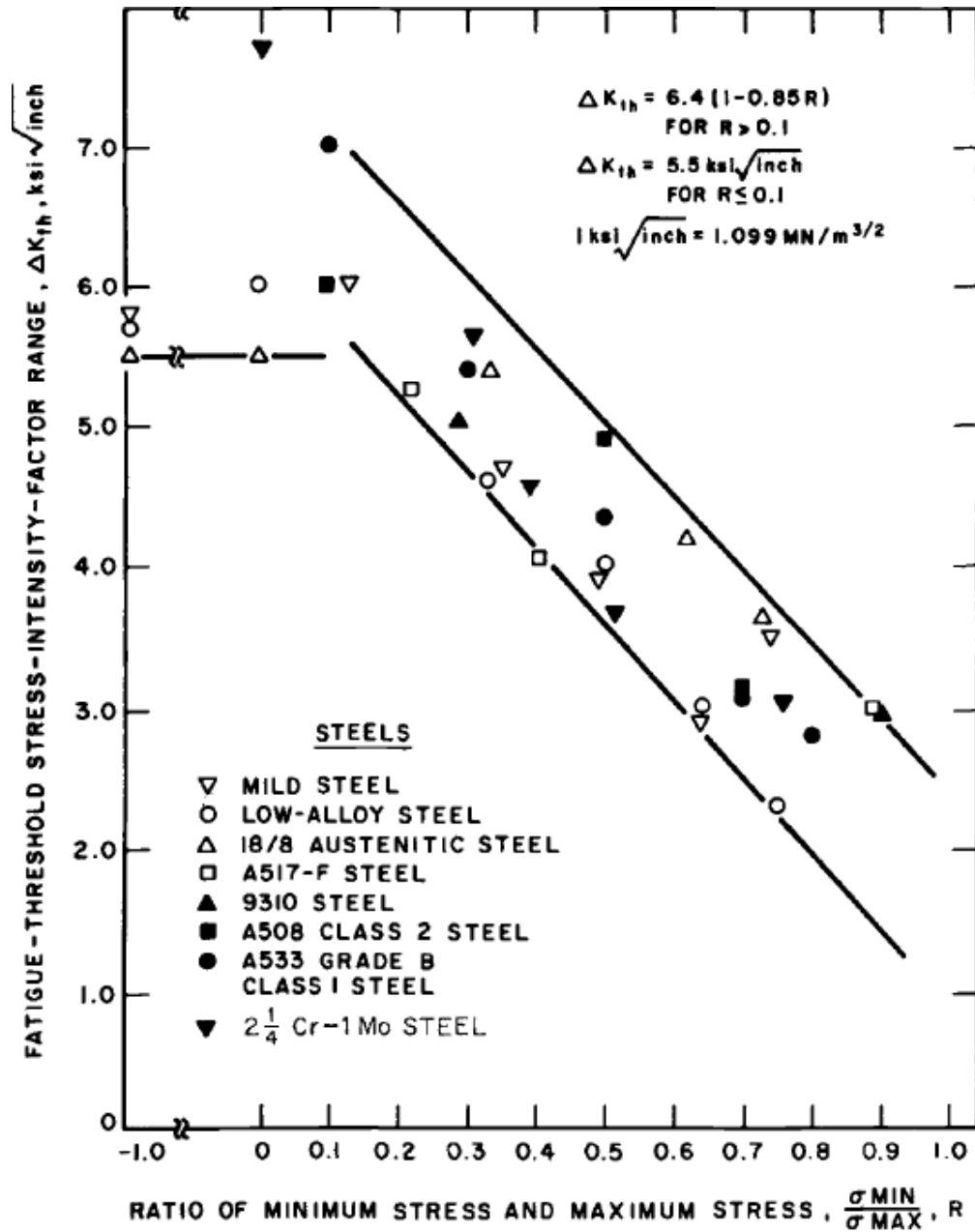


Figura 8: Variação de R em relação ao fator intensidade de tensão ΔK_{th} para diversos aços.

Fonte: Barsom e Rolfe (1999).

Modelo de Collipriest

Collipriest (1972) propôs um modelo que tem por objetivo descrever a propagação de trinca nas regiões I a III da figura 5, conforme a seguinte equação:

$$\frac{da}{dN} = C (K_c \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[\ln \left(\frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \tanh^{-1} \left\{ \frac{\ln \left(\frac{\Delta K^2}{(1-R) K_c \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left(\frac{(1-R) K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right\} \right], \quad (2.22)$$

sendo C e m parâmetros do material para o modelo de Collipriest. Esse modelo possui uma boa aproximação das regiões I a III da evolução da trinca por utilizar em sua equação a tangente hiperbólica inversa para representar da/dN por ΔK . Ainda, esse modelo, conforme afirmam Kumar et al. (2014), é o mais eficaz para representar os efeitos da razão de tensão nas três regiões da propagação de trinca.

Modelo de Priddle

Da mesma forma que McEvily e Collipriest descrevem seus modelos para as regiões I a III da figura 5, Priddle (1976) propôs seu modelo, conforme a equação:

$$\frac{da}{dN} = C \left(\frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_c - K_{m\acute{a}x}} \right)^m, \quad (2.23)$$

sendo C e m parâmetros do material para o modelo de Priddle. O estudo desenvolvido por Priddle foi inicialmente aplicado para descrever a propagação de uma trinca em um aço com baixo teor de carbono, aço EN3A (“aço doce”), em temperatura ambiente. Após, verificou-se, também, a validade da equação para um determinado aço AISI 316 (aço inox).

Conforme destacam Erdogan (1967), Toor (1973), Hoeppner e Krupp (1974), Nelson (1977) e Beden et al. (2009), muitos outros modelos, com suas especificidades e limitações, são encontrados na literatura para descrever o crescimento de trinca para um carregamento com amplitude de tensão constante.

Modelos de Carregamento com Amplitude de Tensão Variável

A segunda forma de abordagem, os modelos com Carregamento com Amplitude de Tensão Variável (CATV), descrevem mais realisticamente os problemas encontrados. Exemplo desse tipo de carregamento pode ser verificado em diversos equipamentos de serviço, automóveis, vasos de pressão e aeronaves.

Observa-se através da figura 9 um CATV, sendo que esse tipo de carregamento pode ser representado das mais diversas formas, e é muito influenciado pelas diferentes solicitações que o equipamento em análise está sendo submetido. Com isso, destacam-se alguns parâmetros que influenciam esse tipo de carregamento como a amplitude do carregamento, a razão de tensão, a frequência da carga e a sequência do carregamento. Assim, o estudo através da utilização do CATV torna-se complexo devido a não exatidão desses parâmetros se comparado ao estudo do CATC (BEDEN et al., 2009). A figura 9 ilustra um histórico de um CATV mostrando alguns dos parâmetros mencionados.

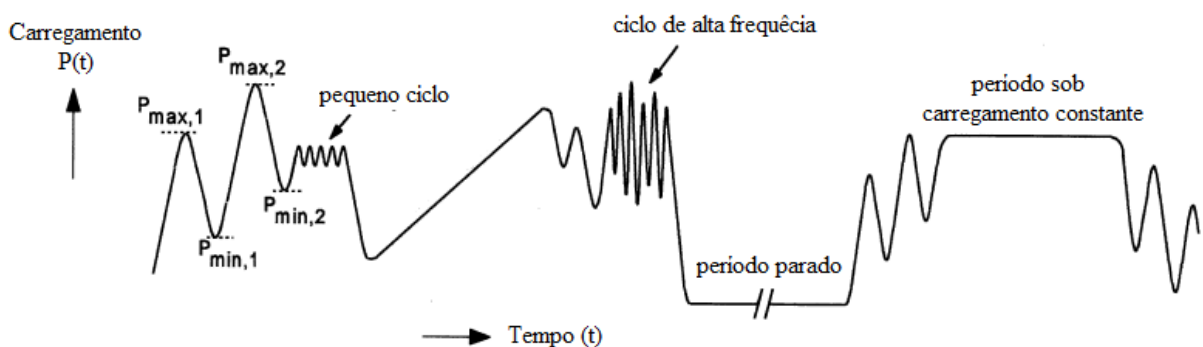


Figura 9: Ocorrências características de um histórico de carregamento $P(t)$.

Fonte: Adaptado de Schijve (2009).

Devido à forma do carregamento aplicado, com picos de tensão ou compressão, a taxa de propagação de um trinca por fadiga é influenciada diretamente. Considera-se, de uma forma geral, que uma sobrecarga (pico) de tensão retarda a taxa de propagação da trinca, uma sobrecarga (pico) de compressão acelera a taxa de propagação da trinca e uma sobrecarga (pico) de tensão seguida de uma sobrecarga (pico) de compressão minimiza os efeitos do retardo da taxa de propagação da trinca (NELSON, 1977; BEDEN et al., 2009).

A figura 10 ilustra o efeito de uma sobrecarga (pico) de tensão e o seu efeito na desaceleração da taxa de crescimento da trinca por fadiga.

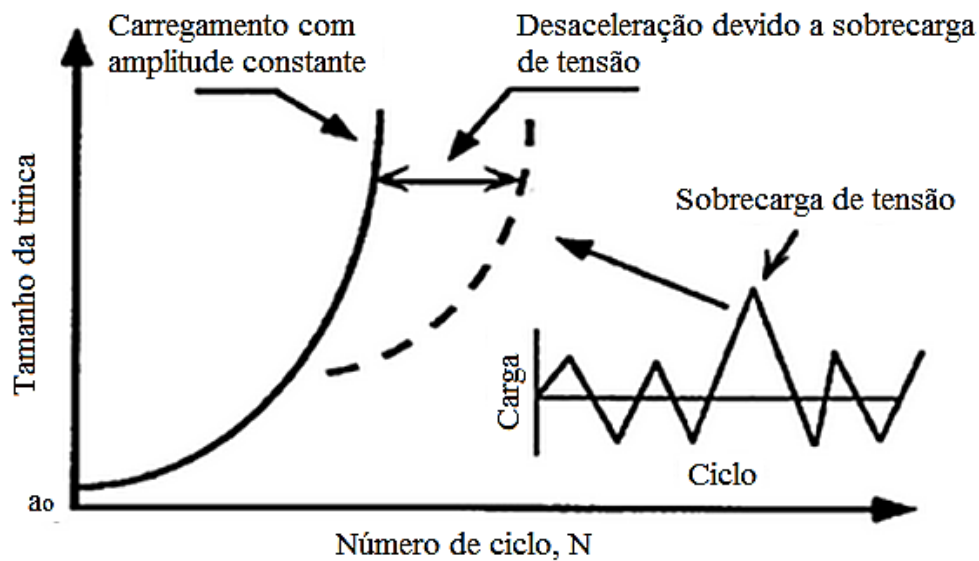


Figura 10: Desaceleração da taxa de crescimento da trinca devido a uma sobrecarga (pico) de tensão em um carregamento com amplitude de tensão constante.

Fonte: Adaptado de Beden et al. (2009).

Desse modo, devido à dificuldade em se prever esses tipos de carregamentos, como também, a falta de acurácia da aplicação dos modelos de CATC, que consideram o valor de fator intensidade de tensão para descrever um experimento com sobrecargas (picos), levaram os estudos a formulação de novos modelos. Uma forma geral de representar os modelos de CATV em conjunto com os modelos de CATC é descrevê-los ciclo por ciclo conforme a equação:

$$a_n = a_o + \sum_{i=1}^{i=n} \Delta a_i, \quad (2.24)$$

sendo a_n o tamanho de trinca após N ciclos, a_o o tamanho de trinca inicial e Δa_i o incremento do crescimento de trinca associado a consecutivos ciclos de carregamento. Esse método de descrever um CATV não considera a ação de um ciclo em relação ao outro, ou seja, cada novo ciclo é independente do anterior. Assim, esse método de representar o crescimento de trinca é considerado como conservador ou, também, como um método sem interações (SCHIJVE, 2009). Desse modo, essa forma de converter um histórico de CATV em um número de ciclos constantes (CATC) é chamada de *Cycle Counting*, sendo o método *Rainflow Cycle Counting* um dos mais difundidos na literatura (MATSUISHI, ENDO, 1968).

Da mesma forma que o método anterior, Barsom (1976) introduziu o conceito chamado de *Root Mean Square* (RMS) definindo uma variação de tensão equivalente correspondente a um fator intensidade de tensão equivalente, ΔK_{eq} . Esse conceito é aplicado

para a conversão de um CATV em um CATC, conforme ilustra a figura 11. O valor de ΔK_{eq} é correspondente a $\Delta\sigma_{rms} = \sigma_{máx,rms} - \sigma_{mín,rms}$, sendo:

$$\sigma_{máx,rms} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\sigma_{máx,i})^2},$$

$$\sigma_{mín,rms} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\sigma_{mín,i})^2}.$$
(2.25)

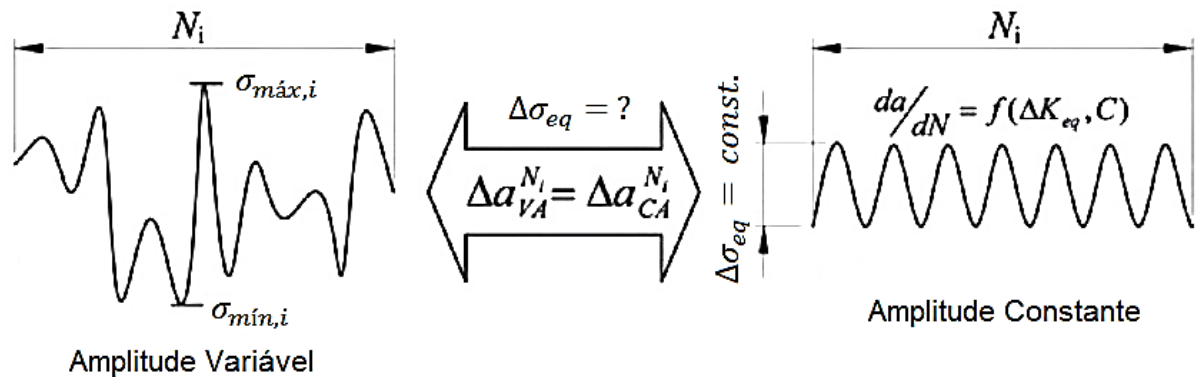


Figura 11: Fator intensidade de tensão equivalente, ΔK_{eq} . Carregamento com amplitude de tensão variável e carregamento com amplitude de tensão constante.

Fonte: Adaptado de Machniewicz (2012).

Wheeler (1972) e Willenborg et al. (1971) propuseram modelos explicando o retardo do crescimento de trinca ocasionado por sobrecargas de carregamento. Conforme já evidenciado e ilustrado na figura 10, o efeito de uma sobrecarga reduz a taxa de propagação da trinca. Esses modelos consideram a formação de uma região plástica gerada a frente de trinca. Como limitações, os modelos não consideram os efeitos de uma sobrecarga de compressão a qual acelera a taxa de propagação da trinca e o efeito da plasticidade induzindo o fechamento da trinca.

Outro modelo para o CATV foi proposto por Elber (1970) considerando o fechamento da trinca. Elber introduziu o conceito da variação do fator intensidade de tensão efetivo conforme a equação:

$$\Delta K_{eff} = K_{máx} - K_{op},$$
(2.26)

sendo ΔK_{eff} a variação do fator intensidade de tensão efetivo, $K_{máx}$ o fator intensidade de tensão máximo e K_{op} o fator intensidade de tensão de abertura da trinca. Esse modelo considera que a trinca começa a se propagar acima do valor de K_{op} , conforme representa a figura 12. Destaca-se que um dos mecanismos que induzem o fechamento de trinca é a plasticidade na região próxima a frente de trinca ocasionada por tensões residuais.

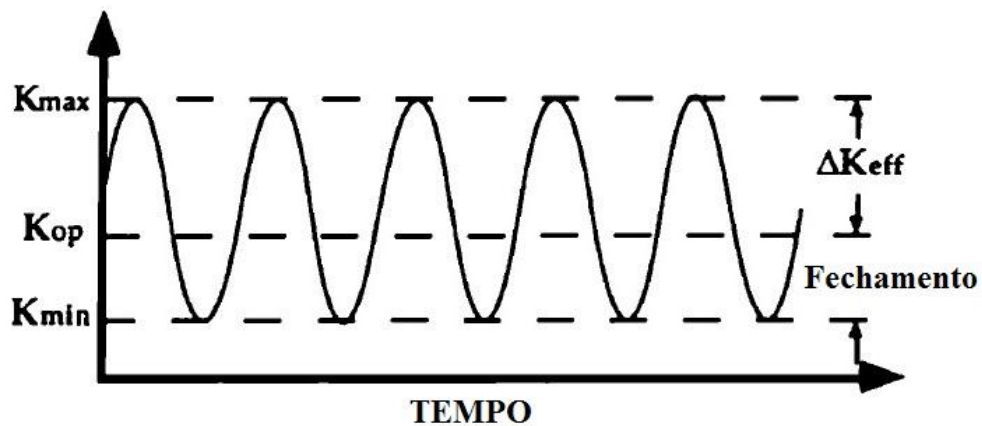


Figura 12: Definição da variação do fator intensidade de tensão efetivo.
Fonte: Adaptado de Anderson (1994).

Por fim, outra abordagem para o CATV, levando em consideração a análise pelo método dos elementos finitos (MEF), tem por finalidade fornecer os campos de tensão e deformação (MACHNIEWICZ, 2012). Uma dificuldade em se utilizar o MEF convencional é gerar uma malha a qual corresponda à geometria da descontinuidade. Devido à evolução da descontinuidade (trinca), uma nova malha deve atualizada a cada passo. Com isso, em razão da deficiência dos métodos convencionais, métodos como o *Extended Finite Element Method* (X-FEM) foram desenvolvidos (YAZID et al., 2009).

O X-FEM é um método numérico que modela as fronteiras internas e externas da geometria da descontinuidade (vazios, inclusões ou trincas) sem a necessidade de que a malha esteja em conformidade com essas fronteiras. Esse método pode ser aplicado a problemas envolvendo o modelamento da evolução das trincas (YAZID et al., 2009).

2.3 MÉTODOS NUMÉRICOS

Os modelos de evolução de trinca apresentados são formulados através de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's). No entanto, nem sempre se consegue obter uma solução exata para a EDO. A partir disso, o uso de métodos numéricos se faz necessário para se conseguir obter uma solução numérica aproximada.

Nesse trabalho os métodos numéricos apresentados serão aplicados a uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, juntamente com uma condição inicial que define um Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} \text{Determinar } Y \in C^1(\mathbb{R}) \text{ tal que:} \\ Y'(x) = f(x, Y(x)), x > 0; \\ Y(x_0) = Y_0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Assim, a função $Y(\cdot)$ é a solução exata do PVI com valor inicial Y_0 . Os métodos numéricos irão fornecer uma solução aproximada, representada por $y(x)$, discretizada em um conjunto de pontos:

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq b,$$

e esses pontos serão espaçados da seguinte maneira:

$$x_n = x_0 + nh; \quad n = 0, 1, \dots, N$$

sendo $x_0 = a$, $x_n = b$ e $N = (b - a)/h$. O comprimento do intervalo entre os pontos, h , é o tamanho do passo e N é o número de passos.

Portanto, o objetivo dos métodos numéricos é determinar soluções numéricas aproximadas $y(x)$ da solução exata $Y(x)$ para o conjunto de pontos definidos entre $[a, b]$ (ATKINSON, HAN, 2004).

Existem vários métodos numéricos para a solução do PVI, no entanto, nos próximos itens são descritos: os métodos de Taylor, de Euler Explícito e de Runge-Kutta Explícito.

Método de Taylor

Seja o PVI, equação (2.27), onde f pode ser linear ou não e regular. A expansão em série de Taylor para $Y(x_{n+1})$ em torno do ponto x_n é dada por:

$$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + hY^{(1)}(x_n) + \frac{h^2}{2!} Y^{(2)}(x_n) + \frac{h^3}{3!} Y^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{4!} Y^{(4)}(x_n) + \dots \quad (2.28)$$

Considerando os termos da equação (2.28) até a 2ª ordem, tem-se:

$$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + hY^{(1)}(x_n) + \frac{h^2}{2!} Y^{(2)}(\xi_n), \quad (2.29)$$

para $x_n \leq \xi_n \leq x_{n+1}$. Se $Y(x)$ satisfaz a equação diferencial, ela se torna:

$$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + hf(x_n, Y(x_n)) + \frac{h^2}{2!} Y^{(2)}(\xi_n). \quad (2.30)$$

O termo:

$$T_{n+1} = \frac{h^2}{2!} Y^{(2)}(\xi_n), \quad (2.31)$$

é o erro de truncamento para o método de Taylor, e também pode ser representado por $O(h^2)$. Esse erro é correspondente à aproximação (ATKINSON, HAN, 2004):

$$Y(x_{n+1}) \approx Y(x_n) + hf(x_n, Y(x_n)). \quad (2.32)$$

O erro do método de Taylor consiste de duas partes: o erro do truncamento, T_{n+1} , e a propagação do erro a cada passo. Assim, conforme os autores Atkinson e Han (2004), o erro total pode ser calculado pela seguinte equação:

$$e_{n+1} = \left[1 + h \frac{\partial f(x_n, z_n)}{\partial z} \right] e_n + \frac{h^2}{2!} Y^{(2)}(\xi_n), \quad (2.33)$$

para algum z_n entre $Y(x_n)$ e $y(x_n)$.

Conforme a equação (2.29) observa-se que o cálculo de x_{n+1} requer somente informações sobre o último ponto calculado, isto é, x_n . Métodos com essa característica são chamados de métodos de passo-1. Também observa-se que a equação (2.29) é uma equação explícita, pois os termos do lado direito dependem somente y_n , e, por isso, o método é chamado de explícito.

Apesar do método de Taylor ser simples de ser calculado, ele tem algumas desvantagens como: a sua eficiência computacional e a necessidade de calcular as derivadas de alta ordem. Assim, utilizam-se métodos mais precisos no cálculo das soluções numéricas aproximadas como os métodos de passo múltiplo (BARROSO et al., 1987; ATKINSON, HAN, 2004; FRANCO, 2006).

Método de Euler Explícito

Com relação ao desenvolvimento da solução exata do PVI em série de Taylor, equação (2.29), o Método de Euler Explícito de passo-1, é representado pela seguinte equação:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n). \quad (2.34)$$

O método de Euler é considerado convergente em ordem p se o erro global e_n , sendo $e_n = y_n - y(x_n)$, $e_0 = 0$, satisfaz (BARROSO et al., 1987; ASCHER, PETZOLD, 1998):

$$e_n = O(h^p) \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.35)$$

Método de Taylor com resto de Lagrange

O método de Taylor pode ser desenvolvido utilizando uma fórmula para o resto da aproximação da função y_{n+1} pelo seu polinômio de Taylor de ordem q , em termos da derivada $(q + 1)$ -ésima de y_{n+1} . Assim, se $y \in C^n[a, b]$ e se $y^{(n+1)}$ existem em (a, b) , então para qualquer ponto c e x em $[a, b]$ existe um ponto ξ entre c e x tal que (KINCAID, CHENEY, 1991; LIMA, 2009):

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} y^{(k)}(c)(x-c)^k + E_n(x), \quad (2.36)$$

sendo,

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}. \quad (2.37)$$

Método de Runge-Kutta Explícito

Conforme descrito anteriormente, o método de Taylor possui algumas desvantagens como a eficiência computacional e por calcular derivadas de ordem superior. Assim, para evitar a necessidade do cálculo dessas derivadas, será apresentado outro método de passo-1, conhecido como método de Runge-Kutta. O método avalia a função $f(x, z)$ em uma maior quantidade de pontos, garantindo de forma semelhante a acurácia do método de Taylor. Desse modo, o método de Runge-Kutta tem a forma:

$$y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n; h), \quad (2.38)$$

sendo $n \geq 0$ e $y(x_0) = Y_0$.

Neste trabalho, devido à acurácia e o desempenho verificado, os quais serão apresentados nas próximas seções, o método de Runge-Kutta de quatro estágios será utilizado. Assim, da equação (2.38), têm-se que o método de Runge-Kutta de 4 estágios fornece um sistema de 11 equações e 13 incógnitas fornecendo infinitas soluções. O método de Runge-Kutta de 4 estágios e ordem 4 mais utilizado é (ASCHER, PETZOLD, 1998):

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \left(\frac{h}{6}\right)(f(K_1) + 2f(K_2) + 2f(K_3) + f(K_4)); \\ K_1 = y_n; \\ K_2 = y_n + \left(\frac{h}{2}\right)f(K_1); \\ K_3 = y_n + \left(\frac{h}{2}\right)f(K_2); \\ K_4 = y_n + (h)f(K_3). \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Esse método possui precisão de quarta ordem com erro de truncamento $O(h^5)$ (KINCAID, CHENEY, 1991; ATKINSON, HAN, 2004).

3 METODOLOGIA DA PESQUISA

Este capítulo tem por objetivo apresentar a metodologia utilizada para o desenvolvimento desse trabalho.

3.1 MÉTODO DA PESQUISA

A pesquisa é desenvolvida seguindo o roteiro, de uma série de passos metodológicos, sugerido por Gil (1991) e, alguns desses passos são adaptados conforme o contexto desse trabalho. Assim, a metodologia é desenvolvida da seguinte maneira:

1) Formulação do problema: O estudo iniciou procurando-se melhorar a forma de se obter os resultados para os modelos de propagação de trinca objetivando, assim, a eficiência computacional, em termos do tempo. Primeiramente, a pesquisa é realizada com uma revisão bibliográfica sobre algumas definições e conceitos de Fadiga em Metais, da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) e de Métodos Numéricos. Na MFLE são destacados alguns modelos de propagação de trinca para Carregamento com Amplitude de Tensão Constante e para Carregamento com Amplitude de Tensão Variável.

Posteriormente, são delimitados os modelos de propagação de trinca utilizados nesta pesquisa. Para isso, são escolhidos os Modelos de Carregamento com Amplitude de Tensão Constante que apresentam maior abrangência, sendo selecionados, os modelos com relação a dois critérios: *a)* a abrangência da aplicabilidade dos modelos nas regiões I a III do diagrama $\log(da/dN) \times \log(\Delta K)$ da figura 5; *b)* os modelos que incorporam em suas equações parâmetros que possam influenciar a taxa de propagação de trinca por fadiga, como a razão de tensão, a tenacidade à fratura e o fator intensidade de tensão inicial. O quadro 2 apresenta os modelos de propagação de trinca, identificando as suas características, aos quais a metodologia proposta é aplicada.

Modelos de Propagação de Trinca para Carregamento com Amplitude de Tensão Constante	Características
<p style="text-align: center;"><u>Modelo de Paris</u></p> $\frac{da}{dN} = C_P (\Delta K)^{m_P}$	<ul style="list-style-type: none"> • Não considera a razão de tensão, R; • É válido somente para a região II.
<p style="text-align: center;"><u>Modelo de Forman</u></p> $\frac{da}{dN} = \frac{C_F (\Delta K)^{m_F}}{(1-R) K_c - \Delta K}$	<ul style="list-style-type: none"> • Considera o efeito das tensões médias; • Utiliza a tenacidade a fratura, K_c; • É válido somente para as regiões II e III.
<p style="text-align: center;"><u>Modelo de Walker</u></p> $\frac{da}{dN} = C_W \left[(1-R)^{\gamma_W - 1} \Delta K \right]^{m_W}$	<ul style="list-style-type: none"> • Considera o efeito das tensões médias; • É válido somente para a região II.
<p style="text-align: center;"><u>Modelo de McEvily</u></p> $\frac{da}{dN} = C_M (\Delta K - \Delta K_{th})^2 \left(1 + \frac{\Delta K}{K_c - K_{máx}} \right)$	<ul style="list-style-type: none"> • Considera o efeito das tensões médias; • Utiliza a tenacidade a fratura, K_c; • Utiliza o valor de ΔK_{th}; • É válido para as regiões I, II e III.
<p style="text-align: center;"><u>Modelo de Priddle</u></p> $\frac{da}{dN} = C \left(\frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_c - K_{máx}} \right)^m$	<ul style="list-style-type: none"> • Considera o efeito das tensões médias; • Utiliza a tenacidade a fratura, K_c; • Utiliza o valor de ΔK_{th}; • É válido para as regiões I, II e III.

Quadro 2: Modelos de propagação de trinca para carregamento com amplitude de tensão constante.

Fonte: Elaborado pelo autor.

2) Definição das hipóteses: Após a seleção dos modelos, a nova metodologia, proposta desse trabalho, é aplicada. Para isso, são elaboradas algumas hipóteses em relação aos modelos que foram utilizados, $[(da/dN)(N)]$, como também, hipóteses para o carregamento ($\Delta\sigma$) e a função de correção do fator intensidade de tensão, $f(\cdot)$. Com relação aos modelos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a \in C^1 \left[[N_o, N_1]; \mathbb{R}^+ \right] \text{ tal que,} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = f(a, N, \Delta K, R, \Delta K_{th}, K_c, f(a)), \forall N \in (N_o, N_1); \\ a(N_o) = a_o, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

a metodologia exige que a derivada de $a(\cdot)$, tamanho de trinca, seja uma função contínua e a_o , tamanho inicial da trinca, seja conhecida. A equação (3.1) representa um Problema de Valor Inicial (PVI) ou também conhecido como Problema Abstrato de Cauchy. As hipóteses sobre o carregamento ($\Delta\sigma$) e a função de correção do fator intensidade de tensão, $f(\cdot)$, são

apresentadas durante o desenvolvimento da metodologia para cada modelo. Destaca-se que outras hipóteses podem ser incluídas dependendo do modelo em estudo.

3) Definição do plano experimental: Através do PVI, equação (3.1), a nova solução de cada modelo selecionado é determinada através da expansão de Taylor de 2ª ordem com resto de Lagrange. Assim, por meio desse desenvolvimento, consegue-se obter duas funções que são as cotas superior e inferior da evolução de trinca para cada modelo.

4) Coleta de dados: Para o levantamento de dados, são propostos, como forma de validação do estudo, a implementação de códigos computacionais aplicados a três exemplos numéricos:

Exemplo 1: Placa com uma largura infinita e com uma trinca central.

O exemplo 1 representa uma placa com largura infinita e uma trinca central, a_0 , solicitada por um carregamento de tração conforme mostra a figura 13.

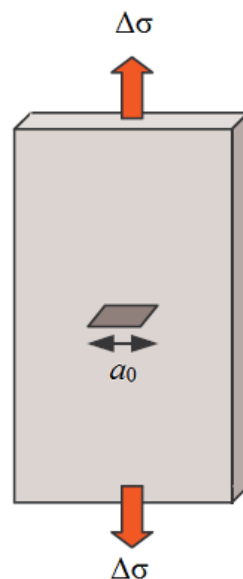


Figura 13: Placa infinita com uma trinca central.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Para esse exemplo, a função de correção do fator intensidade de tensão é dada por (TADA et al., 2000):

$$f(a(N)) = 1. \quad (3.2)$$

Exemplo 2: Placa com uma largura finita e com uma trinca central.

O exemplo 2 representa uma placa finita, com largura b , e uma trinca central, a_0 , solicitada por um carregamento de tração conforme mostra a figura 14.

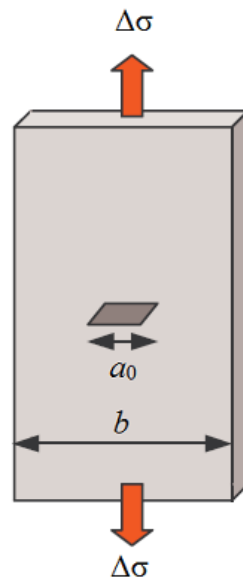


Figura 14: Placa finita com uma trinca central.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Para esse exemplo, a função de correção do fator intensidade de tensão é dada por (TADA et al., 2000):

$$f(a(N)) = \sqrt{\sec\left(\frac{\Pi a(N)}{2b}\right)}. \quad (3.3)$$

Exemplo 3: Placa com uma largura finita e com uma trinca na sua aresta.

O exemplo 3 representa uma placa finita, com largura b , e uma trinca na sua aresta ou “borda”, a_0 , solicitada por um carregamento de tração conforme mostra a figura 15.

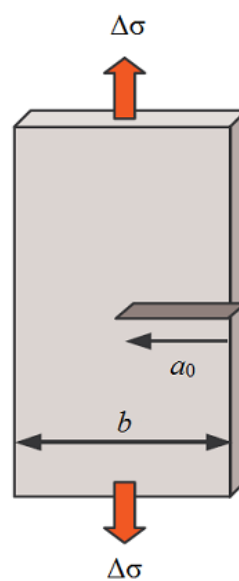


Figura 15: Placa finita com uma trinca na sua aresta ou “borda”.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Para esse exemplo, a função de correção do fator intensidade de tensão é dada por (TADA et al., 2000):

$$f(a(N)) = 1.122 - 0.231 \left(\frac{a(N)}{b} \right) + 10.55 \left(\frac{a(N)}{b} \right)^2 - 21.72 \left(\frac{a(N)}{b} \right)^3 + 30.39 \left(\frac{a(N)}{b} \right)^4. \quad (3.4)$$

5) Análise e interpretação dos dados: as funções cotas superior e inferior de cada modelo representam uma solução aproximada para o tamanho de trinca. Assim, essa solução aproximada é comparada com uma solução numérica aproximada, utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4), para os exemplos do “item 4”. A utilização do método RK4 como solução numérica aproximada dos PVI’s é justificada, por sua eficácia, através de um exemplo numérico. Após, através da literatura, é apresentado os parâmetros que cada modelo utilizará para a solução dos três exemplos numéricos. A partir disso, a avaliação das cotas em relação ao RK4 é obtida através das seguintes relações: gráficos representando o número de ciclos (N) versus o tamanho de trinca (a), o desvio relativo a cada número de ciclo e o tempo de computação necessário para um número de ciclos pré-determinado.

6) Apresentação das conclusões: Com relação aos resultados dos três exemplos, as conclusões são obtidas através dos valores dos desvios relativos entre a solução numérica aproximada, RK4, e as cotas superior e inferior para cada modelo. Ainda, é verificada a potencialidade da metodologia através do tempo de computação, comparando os resultados utilizando a solução numérica aproximada e as cotas para cada modelo.

4 COTAS PARA EVOLUÇÃO DO TAMANHO DE TRINCA

Neste capítulo é apresentado o desenvolvimento da nova metodologia a ser aplicada aos modelos de propagação de trinca selecionados. Primeiramente, são obtidas as cotas superior e inferior para a evolução do tamanho de trinca dos modelos de Paris-Erdogan, Forman, Walker, McEvily e Priddle. Em seguida, é apresentada, através de um exemplo numérico, a eficácia da utilização do método Runge-Kutta de 4ª ordem, como solução numérica aproximada, para ser utilizada nos exemplos seguintes. Por fim, como forma de verificar a potencialidade do estudo, as cotas de cada modelo são avaliadas por meio de três exemplos numéricos. Os resultados numéricos foram determinados a partir de um computador com processador *Intel Core 2 Duo* de 1,80 GHz e memória RAM de 4,00 GB.

4.1 COTAS SUPERIOR E INFERIOR

Para determinação das cotas superior e inferior, inicialmente, são apresentadas algumas características comuns a todos os modelos, e eles são apresentados através dos seus respectivos PVI's, referente à equação (3.1), para o crescimento de trinca. Destaca-se que os PVI's têm como característica serem equações diferenciais ordinárias, de 1ª ordem, não-lineares e autônomas. As suas determinações consistem em um problema de Cauchy, onde busca-se a trajetória que satisfaça a equação diferencial do PVI que tem como valor inicial, $a(N_0) = a_0$.

As funções que definem as cotas superior e inferior são determinadas utilizando a expansão de Taylor de 2ª ordem com resto de Lagrange a partir do PVI de cada modelo. E para todos os modelos, as cotas superior (a_{CS}) e inferior (a_{CI}), para a função tamanho de trinca, podem ser escritas através de um polinômio de segundo grau, em função do número de ciclos (N):

$$\begin{cases} a_{CS}(N) = \gamma.N^2 + \beta.N + a_0; \\ a_{CI}(N) = \alpha.N^2 + \beta.N + a_0; \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\forall N \in [N_0, N]$$

A equação (4.1) é apresentada para o primeiro modelo, Paris-Erdogan, sendo que para os outros modelos o procedimento da sua obtenção é o mesmo.

Cotas para o Modelo de Paris-Erdogan

O PVI, usando o modelo de propagação de trinca de Paris-Erdogan, quadro 2, é:

$$\begin{cases} \text{Determinar } a \in C^1 [[N_o, N_1); \mathbb{R}^+] \text{ tal que,} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = C_p \left(\sqrt{\Pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma \right)^{m_p}, \forall N \in (N_o, N_1) \\ a(N_o) = a_o, \end{cases} \quad (4.2)$$

Assim, utilizando a expansão de Taylor de 2ª ordem com resto de Lagrange as funções que definirão as cotas superior e inferior para o modelo de Paris-Erdogan são:

$$\begin{cases} a(N) - a_o \leq C_p \left\{ \begin{aligned} & (\Delta K(a_o))^{m_p} + \left(\frac{m_p C_p}{2} \right) (\Delta K(a^*))^{2m_p} \\ & x \left[\frac{1}{2a^*} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a^*) \right] (N - N_o) \end{aligned} \right\} (N - N_o); \\ a(N) - a_o \geq C_p (\Delta K(a_o))^{m_p} \left\{ \begin{aligned} & 1 + \left(\frac{m_p C_p}{2} \right) (\Delta K(a_o))^{m_p} \\ & x \left[\frac{1}{2a_o} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a_o) \right] (N - N_o) \end{aligned} \right\} (N - N_o); \end{cases} \quad (4.3)$$

$\forall N \in [N_o, N_1].$

Prova: Pela expansão de Taylor de 2ª ordem, com resto de Lagrange, têm-se:

$$a(N) = a_o(N_o) + \left(\frac{da}{dN}(N_o) \right) (N - N_o) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 a}{dN^2}(\eta) \right) (N - N_o)^2, \text{ com } \eta \in [N_o, N]. \quad (4.4)$$

Hipóteses:

$$\begin{cases} f \in C^1(\mathbb{R}); \\ \text{H1) } \left\{ \begin{aligned} & 0 < f(a_o) \leq f(x) \leq f(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_o, a_1]; \\ & f'(a_o) \leq f'(x) \leq f'(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_o, a_1]; \end{aligned} \right. \\ \text{H2) } m \geq 2. \end{cases} \quad (4.5)$$

Por meio da hipótese H1 as seguintes desigualdades podem ser escritas:

$$a(s) \leq a(t), s \leq t \in [N_o, N]; \quad (4.6)$$

$$(a(s))^m \leq (a(t))^m, s \leq t \in [N_o, N]; \quad (4.7)$$

também,

$$(f(s))^m \leq (f(t))^m, s \leq t \in [N_o, N]; \quad (4.8)$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}} f\right)^m(s) \leq \left(a^{\frac{1}{2}} f\right)^m(t), s \leq t \in [N_o, N]; \quad (4.9)$$

com isso, conclui-se que:

$$(\Delta K)^m(a(s)) \leq (\Delta K)^m(a(t)). \quad (4.10)$$

Sendo $C > 0$, obtêm-se:

$$\frac{da}{dN}(s) \leq \frac{da}{dN}(t), s \leq t \in [N_o, N]. \quad (4.11)$$

A segunda derivada da equação (4.4) é:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a}{dN^2}(a(N)) &= \frac{d}{dN} \left(\frac{da}{dN}(a(N)) \right) = \frac{d}{da} \left(\frac{da}{dN}(a(N)) \right) \frac{da}{dN}(a(N)) \\ &= mC^2 \Delta K^{2m} \left[\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Substituindo a equação (4.12) na equação (4.4), têm-se:

$$\begin{aligned} a(N) - a_o(N_o) &= C (\Delta K(a_o))^m (N - N_o) \\ &+ \frac{mC^2}{2} (\Delta K(a(\eta)))^{2m} \left[\frac{1}{2a(\eta)} + \left(\frac{f'}{f} \right)(a(\eta)) \right] (N - N_o)^2, \text{ com } \eta \in [N_o, N]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Assim, as cotas superior e inferior, equação (4.3), são obtidas por meio da equação (4.13), considerando, também, a hipótese H1.

As cotas para o modelo de Paris-Erdogan, equação (4.3), podem ser reescritas conforme a equação (4.1).

Prova: Da equação (4.3), sendo $N_o = 0$, têm-se:

$$\begin{cases} a(N) - a_o \leq C_p \left\{ (\Delta K(a_o))^{m_p} N + \left(\frac{m_p C_p}{2} \right) (\Delta K(a^*))^{2m_p} \left[\frac{1}{2a^*} + \left(\frac{f'}{f} \right)(a^*) \right] N^2 \right\}; \\ a(N) - a_o \geq C_p (\Delta K(a_o))^{m_p} \left\{ N + \left(\frac{m_p C_p}{2} \right) (\Delta K(a_o))^{m_p} \left[\frac{1}{2a_o} + \left(\frac{f'}{f} \right)(a_o) \right] N^2 \right\}; \end{cases}$$

$$\forall N \in [N_o, N_1].$$

com isso:

$$\begin{cases} a_{CS}(N) = \left\{ C_P \left(\frac{m_P C_P}{2} \right) (\Delta K(a^*))^{2m_P} \left[\frac{1}{2a^*} + \left(\frac{f'}{f} \right)(a^*) \right] \right\} N^2 + \left\{ C_P (\Delta K(a_0))^{m_P} \right\} N + a_0; \\ a_{CI}(N) = \left\{ C_P (\Delta K(a_0))^{m_P} \left(\frac{m_P C_P}{2} \right) (\Delta K(a_0))^{m_P} \left[\frac{1}{2a_0} + \left(\frac{f'}{f} \right)(a_0) \right] \right\} N^2 + \left\{ C_P (\Delta K(a_0))^{m_P} \right\} N + a_0; \\ \forall N \in [N_o, N_1]. \end{cases}$$

e obtêm-se a equação (4.1):

$$\begin{cases} a_{CS}(N) = \gamma \cdot N^2 + \beta \cdot N + a_0; \\ a_{CI}(N) = \alpha \cdot N^2 + \beta \cdot N + a_0; \\ \forall N \in [N_0, N] \end{cases}$$

Cotas para o Modelo de Forman

O PVI, usando o modelo de propagação de trinca de Forman, quadro 2, é:

$$\begin{cases} \text{Determinar } a \in C^1 \left[[N_o, N_1]; \mathbb{R}^+ \right] \text{ tal que,} \\ \left(\frac{da}{dN} \right)(N) = \frac{C_F \left(\sqrt{\Pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma \right)^{m_F}}{(1-R) K_c - \Delta K}, \forall N \in (N_o, N_1) \\ a(N_o) = a_o, \end{cases} \quad (4.14)$$

Assim, utilizando a expansão de Taylor de 2ª ordem com resto de Lagrange, apêndice A, as funções que definirão as cotas superior e inferior para o modelo de Forman são:

$$\left. \begin{aligned}
& \left. \left. \left. a(N) - a_o \leq \left\{ \frac{C_F (\Delta K(a_o))^{m_F}}{(1-R)K_c - \Delta K(a_o)} + \frac{1}{2} \left[\frac{C_F (\Delta K(a^*))^{m_F}}{(1-R)K_c - \Delta K(a^*)} \right]^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. m_F + \frac{1}{(1-R)\frac{K_c}{\Delta K(a^*)} - 1} \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. x \left[\frac{1}{2a^*} + \left(\frac{f}{f} \right) (a^*) \right] (N - N_o) \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. a(N) - a_o \geq \frac{C_F (\Delta K(a_o))^{m_F}}{(1-R)K_c - \Delta K(a_o)} \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{C_F (\Delta K(a_o))^{m_F}}{(1-R)K_c - \Delta K(a_o)} \right] \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. m_F + \frac{1}{(1-R)\frac{K_c}{\Delta K(a_o)} - 1} \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. x \left[\frac{1}{2a_o} + \left(\frac{f}{f} \right) (a_o) \right] (N - N_o) \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \forall N \in [N_o, N_1].
\end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Cotas para o Modelo de Walker

O PVI, usando o modelo de propagação de trinca de Walker, quadro 2, é:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \text{Determinar } a \in C^1 [[N_o, N_1]; \mathbb{R}^+] \text{ tal que,} \\
& \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = C_w \left[(1-R)^{\gamma_w - 1} \left(\sqrt{\Pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma \right) \right]^{m_w}, \forall N \in (N_o, N_1) \\
& a(N_o) = a_o,
\end{aligned} \right. \quad (4.16)$$

Assim, utilizando a expansão de Taylor de 2ª ordem com resto de Lagrange, apêndice B, as funções que definirão as cotas superior e inferior para o modelo de Walker são:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \left. \left. \left. a(N) - a_o \leq C_w \left\{ \left[(1-R)^{\gamma_w - 1} \Delta K(a_o) \right]^{m_w} + \frac{1}{2} m_w C_w \left[(1-R)^{\gamma_w - 1} \Delta K(a^*) \right]^{2m_w} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. x \left[\frac{1}{2a^*} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a^*) \right] (N - N_o) \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. a(N) - a_o \geq C_w \left[(1-R)^{\gamma_w - 1} \Delta K(a_o) \right]^{m_w} \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. 1 + \frac{1}{2} m_w C_w \left[(1-R)^{\gamma_w - 1} \Delta K(a_o) \right]^{m_w} \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left. x \left[\frac{1}{2a_o} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a_o) \right] (N - N_o) \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \forall N \in [N_o, N_1].
\end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Cotas para o Modelo de McEvily

O PVI, usando o modelo de propagação de trinca de McEvily, quadro 2, é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a \in C^1 [N_o, N_1; \mathbb{R}^+] \text{ tal que,} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = C_M \left[\left(\sqrt{\Pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma \right) - \Delta K_{th} \right]^2 \\ \times \left[1 + \frac{\left(\sqrt{\Pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma \right)}{K_c - \frac{\left(\sqrt{\Pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma \right)}{(1-R)}} \right], \forall N \in (N_o, N_1) \\ a(N_o) = a_o, \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Assim, utilizando a expansão de Taylor de 2ª ordem com resto de Lagrange, apêndice C, as funções que definirão as cotas superior e inferior para o modelo de McEvily são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a \in C^1 [N_o, N_1; \mathbb{R}^+] \text{ tal que,} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = C \left[\frac{\left(\sqrt{\Pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma \right) - \Delta K_{th}}{K_c - \frac{\left(\sqrt{\Pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma \right)}{(1-R)}} \right]^m, \forall N \in (N_o, N_1) \\ a(N_o) = a_o, \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Assim, utilizando a expansão de Taylor de 2ª ordem com resto de Lagrange, apêndice D, as funções que definirão as cotas superior e inferior para o modelo de Priddle são:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(N) - a_o \leq C \left\{ \left[\frac{\Delta K(a_o) - \Delta K_{th}}{K_c - \frac{\Delta K(a_o)}{(1-R)}} \right]^m + \frac{1}{2} Cm \Delta K(a^*) \left[\frac{\Delta K(a^*) - \Delta K_{th}}{K_c - \frac{\Delta K(a^*)}{(1-R)}} \right]^{2m-1} \right. \\ \quad \left. x \frac{K_c - \frac{\Delta K_{th}}{(1-R)}}{\left(K_c - \frac{\Delta K(a^*)}{(1-R)} \right)^2} \left[\frac{1}{2a^*} + \left(\frac{f'}{f} \right)(a^*) \right] (N - N_o) \right\} (N - N_o); \\ a(N) - a_o \geq C \left\{ \left[\frac{\Delta K(a_o) - \Delta K_{th}}{K_c - \frac{\Delta K(a_o)}{(1-R)}} \right]^m + \frac{1}{2} Cm \Delta K(a_o) \left[\frac{\Delta K(a_o) - \Delta K_{th}}{K_c - \frac{\Delta K(a_o)}{(1-R)}} \right]^{2m-1} \right. \\ \quad \left. x \frac{K_c - \frac{\Delta K_{th}}{(1-R)}}{\left(K_c - \frac{\Delta K(a_o)}{(1-R)} \right)^2} \left[\frac{1}{2a_o} + \left(\frac{f'}{f} \right)(a_o) \right] (N - N_o) \right\} (N - N_o); \end{array} \right. \quad (4.21)$$

$\forall N \in [N_o, N_1]$.

4.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA APROXIMADA

Para a avaliação da eficiência das funções cotas de cada modelo é utilizado nos próximos exemplos, o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4) como solução numérica aproximada dos PVI's. Justifica-se a utilização de uma solução numérica aproximada devido ao fato de que a obtenção de uma solução exata para cada modelo seria limitada a um determinado número de problemas. Assim, o RK4 empregado será:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a_{k+1} \in \mathbb{R}^+, \text{ tal que,} \\ a_{k+1} = a_k + \left(\frac{\Delta N}{6} \right) \cdot (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}; \\ K_1 = C_p \left(\Delta \sigma \sqrt{\Pi a_k} f_k \right)^{m_p}; \\ K_2 = a_k + \left(\frac{\Delta N}{2} \right) \cdot K_1; \\ K_3 = a_k + \left(\frac{\Delta N}{2} \right) \cdot K_2; \\ K_4 = a_k + (\Delta N) \cdot K_3; \\ a_o = a(N_o), \end{array} \right. \quad (4.22)$$

sendo $a_k = a(N_k)$, $f_k = f(a_k)$ e $\Delta N = N_{k+1} - N_k$, $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Como forma de assegurar que a utilização do RK4 possui uma boa aproximação como solução numérica aproximada para os modelos que são utilizados, é apresentada, por meio de um exemplo numérico, utilizando o modelo de Paris-Erdogan, a comparação, através do erro relativo, conforme a equação (4.23), entre a solução exata e a solução pelo método RK4.

$$\varepsilon(N_k) = \left(\frac{a(N_k) - a_{RK4}(N_k)}{a_{RK4}(N_k)} \right) 100[\%], \forall N_k \in \{0, 1, \dots, N\}. \quad (4.23)$$

O exemplo numérico utilizado é uma placa infinita, conforme a figura 13, pois, para esse caso, a função de correção do fator intensidade de tensão $f(a) = 1$ e, assim, tem-se a solução exata, via integração direta, para o modelo de Paris-Erdogan. Para esse exemplo são utilizados os seguintes dados: $C_p = 10^{-9}$ (in/ciclo), $m_p = 2$ e N até 900.000 ciclos (BARSOM, ROLF, 1999).

Assim, por meio da figura 16, observa-se o erro relativo entre a solução exata e solução pelo método RK4. Nota-se que para 900.000 ciclos o erro relativo é da ordem de

10^{-12} . Devido a isso, verifica-se a partir da figura 16 que a utilização do RK4 é válido como forma de aproximação da solução exata.

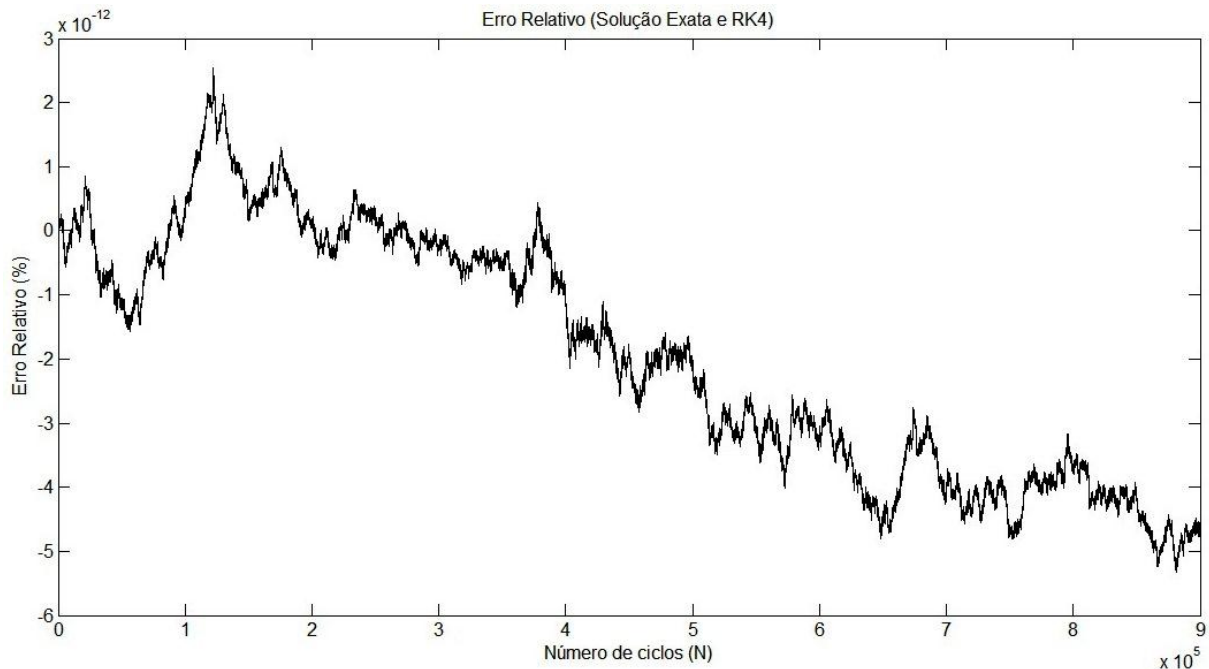


Figura 16: Gráfico da função erro relativo entre a solução exata e a solução numérica aproximada, RK4, para uma placa infinita.

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.3 AVALIAÇÃO DAS COTAS SUPERIOR E INFERIOR

A avaliação das cotas é feita por meio da resolução de três exemplos numéricos. Para todos os exemplos são utilizados os seguintes dados: número de ciclos, N , entre 0 a 900.000 ciclos, tamanho da trinca inicial $a_0 = 1$ mm e largura da placa $b = 100$ mm. O valor do carregamento, $\Delta\sigma$, utilizado em cada modelo, é determinado de forma a melhor representar o crescimento da trinca. Esses dados apresentados são arbitrários, ou seja, pode-se utilizar outros dados de entrada para a avaliação dos exemplos. Também como cada modelo apresenta em sua definição parâmetros diferentes, neste trabalho, foram utilizados os mesmos parâmetros empregados nos trabalhos de Barsom e Rolf (1999) e Castro e Meggiolaro (2009), aplicado aos aços ferríticos para valores de R iguais a zero, e o trabalho de Kumar et al. (2014), aplicado a liga de alumínio Al 2024 T351 para valores de R entre -1 a 0,5. Desse modo, devido ao melhor ajuste das curvas de cada modelo, a tabela 5 mostra os parâmetros utilizados para cada modelo em suas equações.

Tabela 5: Parâmetros que ajustam os modelos de propagação de trinca para aços ferríticos e o Al 2024 T351 – Exemplos 1, 2 e 3.

Propriedades - Aços Ferríticos: $K_c = 250 \text{ MPa.m}^{1/2}$, $\Delta K_{th} = 7 \text{ MPa.m}^{1/2}$				
Modelo	C (m/ciclo)	γ	m	R
Paris-Erdogan	$6,9 \cdot 10^{-12}$	-	3,0	-
Forman	$2 \cdot 10^{-9}$	-	2,9	0
Walker	$7 \cdot 10^{-12}$	1	2,0	0
Priddle	$2 \cdot 10^{-5}$	-	2,0	0
Propriedades - Al 2024 T351: $K_c = 37 \text{ MPa.m}^{1/2}$, $\Delta K_{th} = 3,3 \text{ MPa.m}^{1/2}$				
Modelo	C (m/ciclo)	γ	m	R
McEvily	$1,811 \cdot 10^{-9}$	-	-	0,5

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pode-se observar que a cota superior de cada modelo, equações (4.3), (4.15), (4.17), (4.19) e (4.21), é função do parâmetro a^* (tamanho de trinca). A partir disso, nesse trabalho, será arbitrado um valor específico do a^* , por inspeção, em cada modelo, de tal forma que esse valor apresente o menor desvio em relação à solução numérica aproximada. Com isso, o valor de a^* utilizado é $a^* = \alpha \cdot a_0$, sendo α uma constante, e a sua determinação é feita através de duas considerações: que a cota superior tenha um desvio máximo de 5% em relação ao RK4, e que o a^* utilizado seja o mesmo, em cada modelo, para todos os exemplos apresentados. Ainda, destaca-se que o maior valor para a^* pode ser obtido utilizando a tenacidade à fratura, sendo $f(a^*) = K_c$.

Portanto, nos próximos itens, é apresentado para cada modelo o comparativo entre a solução numérica aproximada (RK4) e as cotas através das seguintes relações: gráficos representando o número de ciclos (N) versus tamanho de trinca (a), os desvios relativos das cotas superior e inferior, definido pela equação (4.24), e a razão do tempo de computação.

$$\varepsilon_{CS,CI}(N_k) = \left(\frac{a_{CS,CI}(N_k) - a_{RK4}(N_k)}{a_{RK4}(N_k)} \right) 100[\%], \forall N_k \in \{0, 1, \dots, N\}. \quad (4.24)$$

Modelo de Paris-Erdogan

Para a resolução dos três exemplos, primeiramente, é definido o valor do parâmetro a^* , referente à cota superior, válido para todos os exemplos. Através de gráficos $N \times a$, figuras 17 a 19, referentes aos exemplos 1, 2 e 3, observa-se a variação desse parâmetro (a^* com valores de $1,2a_0$, $1,3a_0$ e $1,5a_0$) em relação à solução numérica pelo método RK4. Nos exemplos 1 e 2 o valor que mais se aproxima do RK4 é quando $a^* = 1,2a_0$. No entanto, no exemplo 3, esse mesmo valor de a^* não é mais uma cota superior. Assim, o valor de a^* válido para todos os exemplos é $a^* = 1,3a_0$.

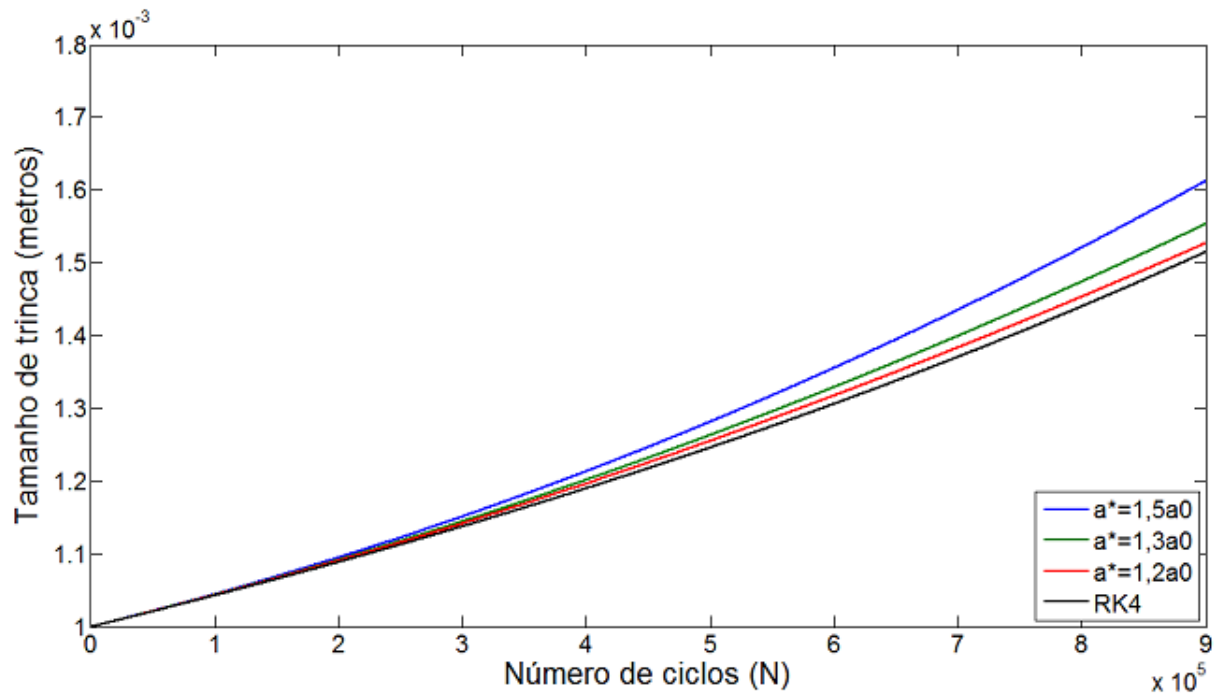


Figura 17: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,2a_0$, $1,3a_0$ e $1,5a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 1, para o modelo de Paris-Erdogan.

Fonte: Elaborado pelo autor.

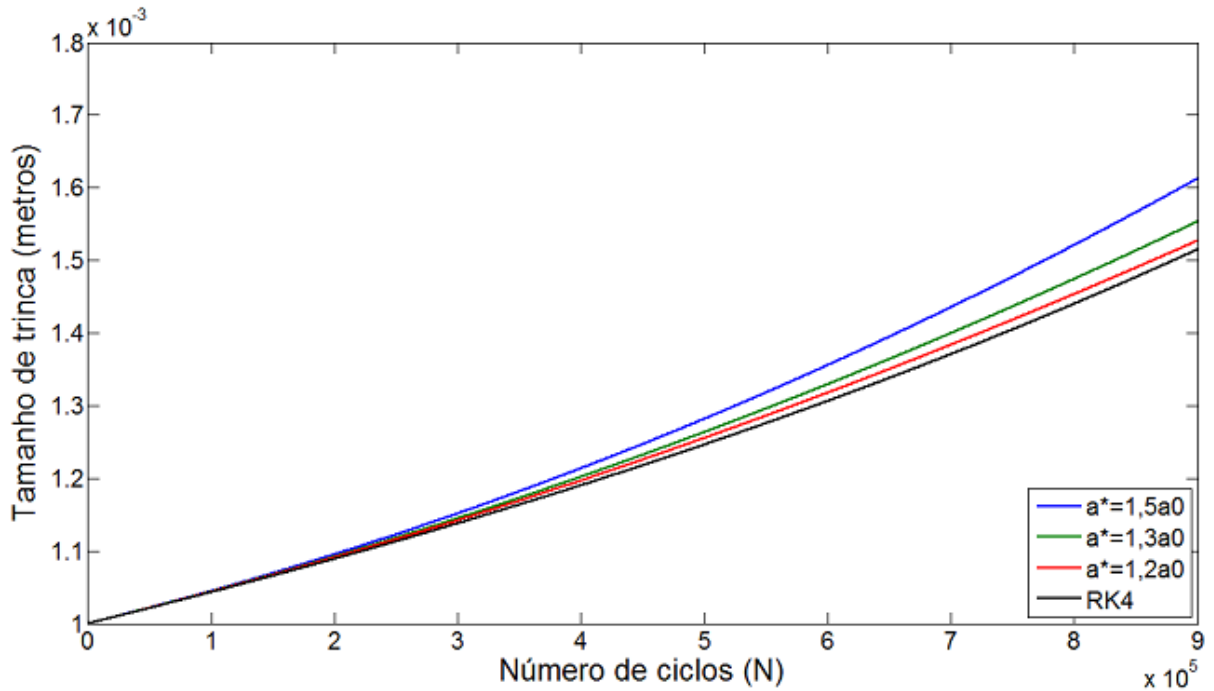


Figura 18: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,2a_0$, $1,3a_0$ e $1,5a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 2, para o modelo de Paris-Erdogan.

Fonte: Elaborado pelo autor.

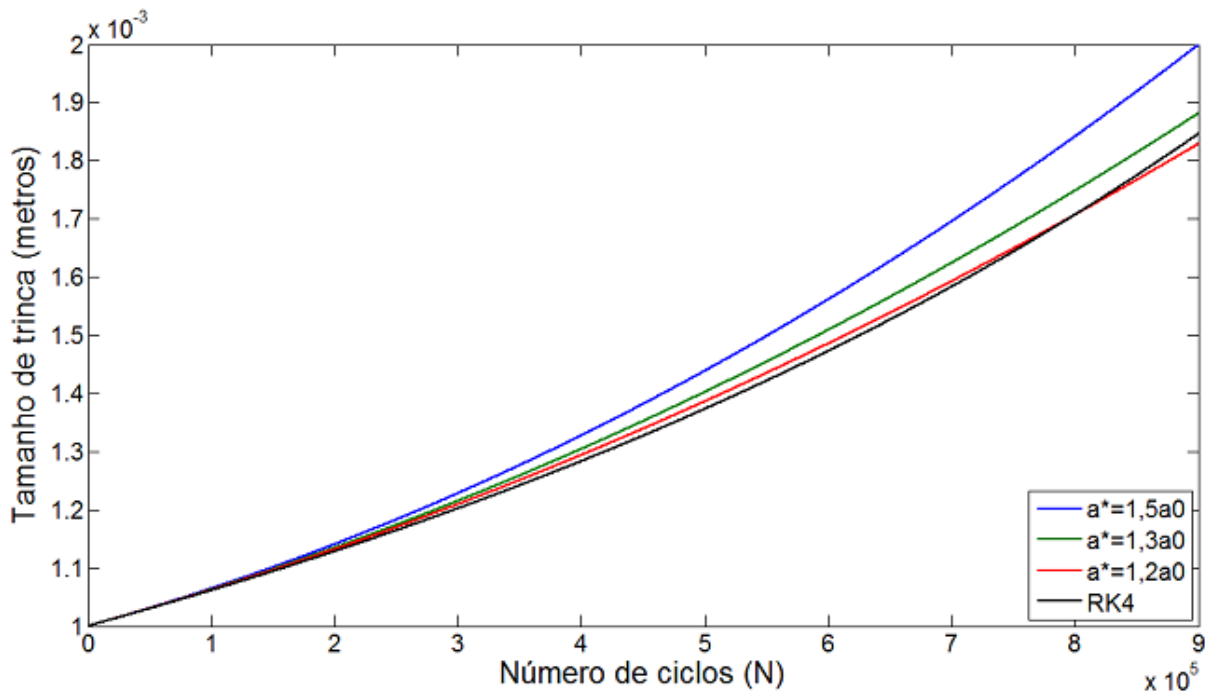


Figura 19: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,2a_0$, $1,3a_0$ e $1,5a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 3, para o modelo de Paris-Erdogan.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a definição do parâmetro a^* ($a^* = 1,3a_0$), é verificado o comportamento das cotas para o modelo de Paris-Erdogan, conforme mostram as figuras 20 a 22. As figuras apresentam em um gráfico $N \times a$, o crescimento da trinca através da solução definida pelas

cotas superior e inferior em relação à solução numérica aproximada calculada pelo método RK4, para os exemplos 1, 2 e 3 respectivamente. Para esse modelo é utilizado um carregamento arbitrário de $\Delta\sigma = 70$ MPa.

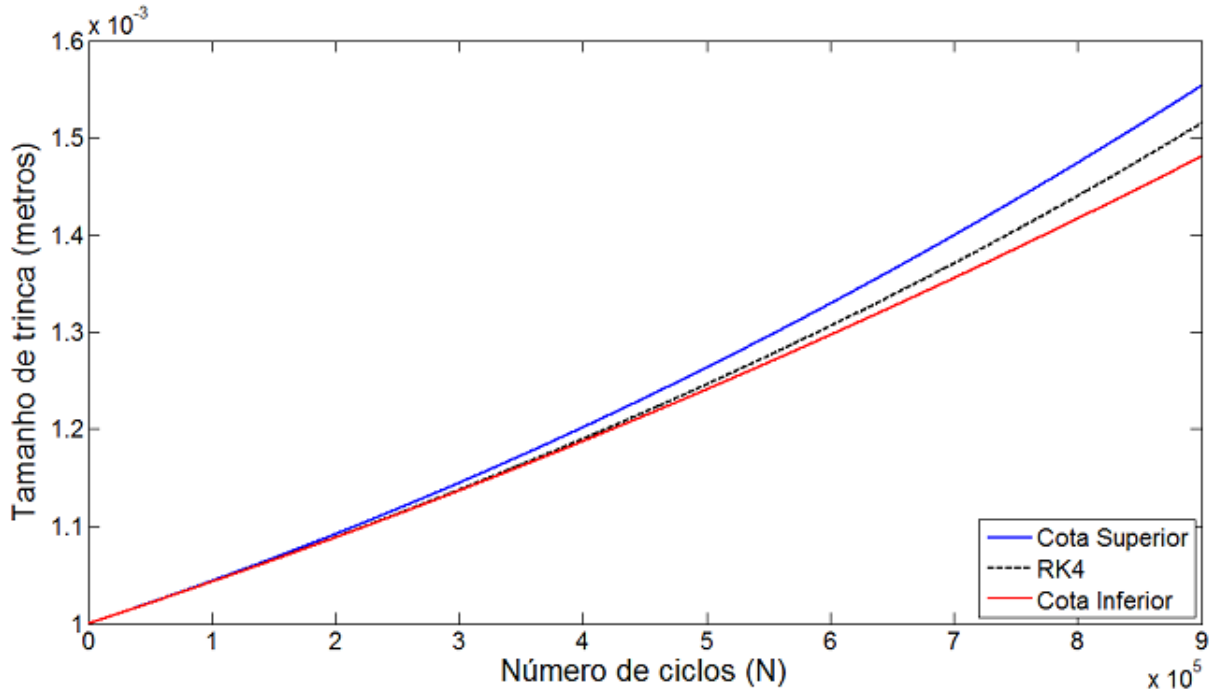


Figura 20: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 1 do modelo de Paris-Erdogan.

Fonte: Elaborado pelo autor.

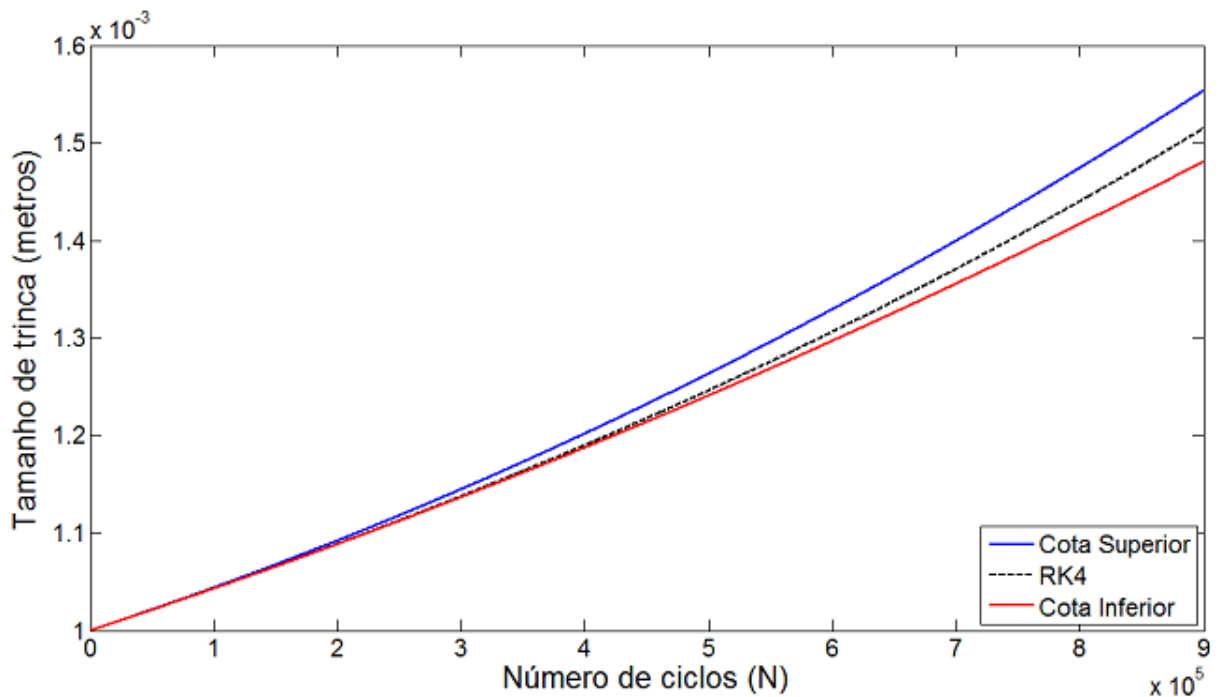


Figura 21: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 2 do modelo de Paris-Erdogan.

Fonte: Elaborado pelo autor.

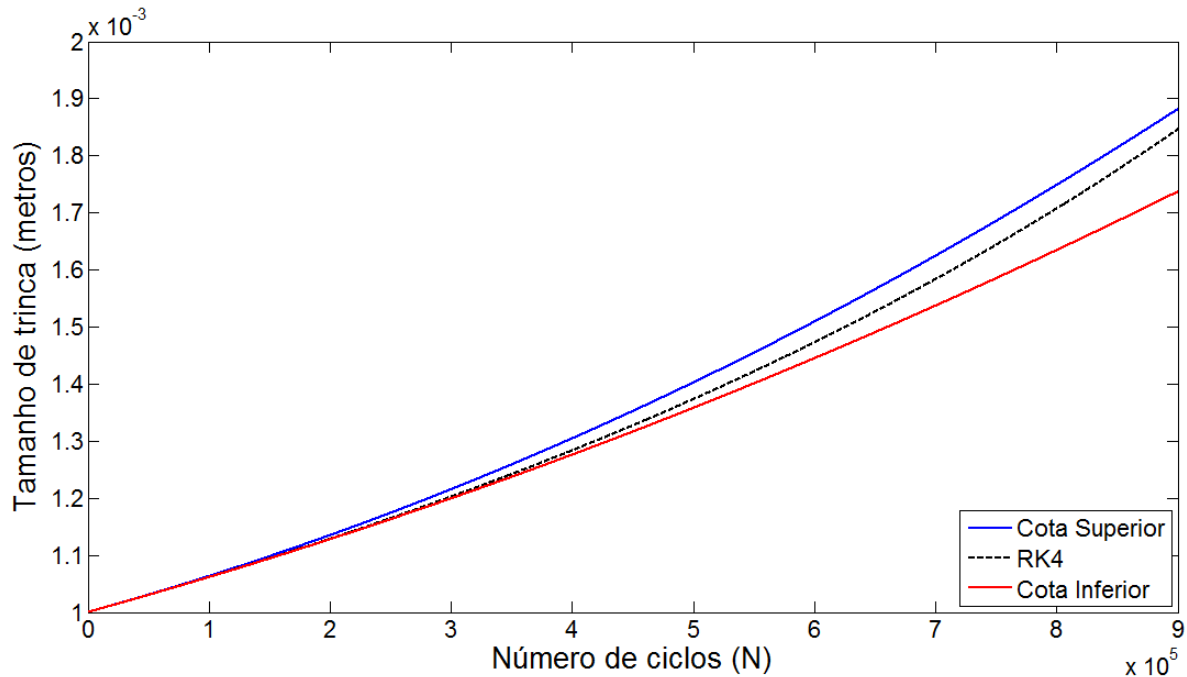


Figura 22: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 3 do modelo de Paris-Erdogan.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, através das figuras 20 a 22, observa-se que as cotas superior e inferior tem um bom desempenho, em termos de aproximação, para o modelo de Paris-Erdogan em relação solução numérica aproximada, RK4. Dessa forma, pode-se afirmar que, para esse modelo, as cotas superior e inferior representam de forma acurada a propagação da trinca.

Conforme descrito anteriormente, as cotas superior (a_{CS}) e inferior (a_{CI}), para a função tamanho de trinca, podem ser escritas por meio de um polinômio de segundo grau, conforme a equação (4.1). Assim, os coeficientes desse polinômio, para os exemplos 1, 2 e 3, podem ser verificados segundo a tabela 6.

Tabela 6: Coeficientes do polinômio da equação (4.1) para os exemplos 1, 2 e 3, aplicado ao modelo de Paris-Erdogan.

Exemplos	γ	α	β
1	2,20132419831991e-16	1,30255869723072e-16	4,16742717949691e-10
2	2,20224249129338e-16	1,30288018519031e-16	4,16742725661727e-10
3	4,36541034880858e-16	2,57978645279117e-16	5,86629033180576e-10

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para avaliar o desempenho da proposta é determinado o desvio relativo entre as cotas em relação ao RK4, equação (4.24). É determinada a eficiência computacional que é definida pela razão entre o tempo de computação da solução RK4 e o tempo de computação das cotas.

Portanto, para os exemplos 1, 2 e 3, as figuras 23 a 25, apresentam em um gráfico $N \times$ desvio relativo, os desvios relativos das cotas superior e inferior em relação à solução RK4.

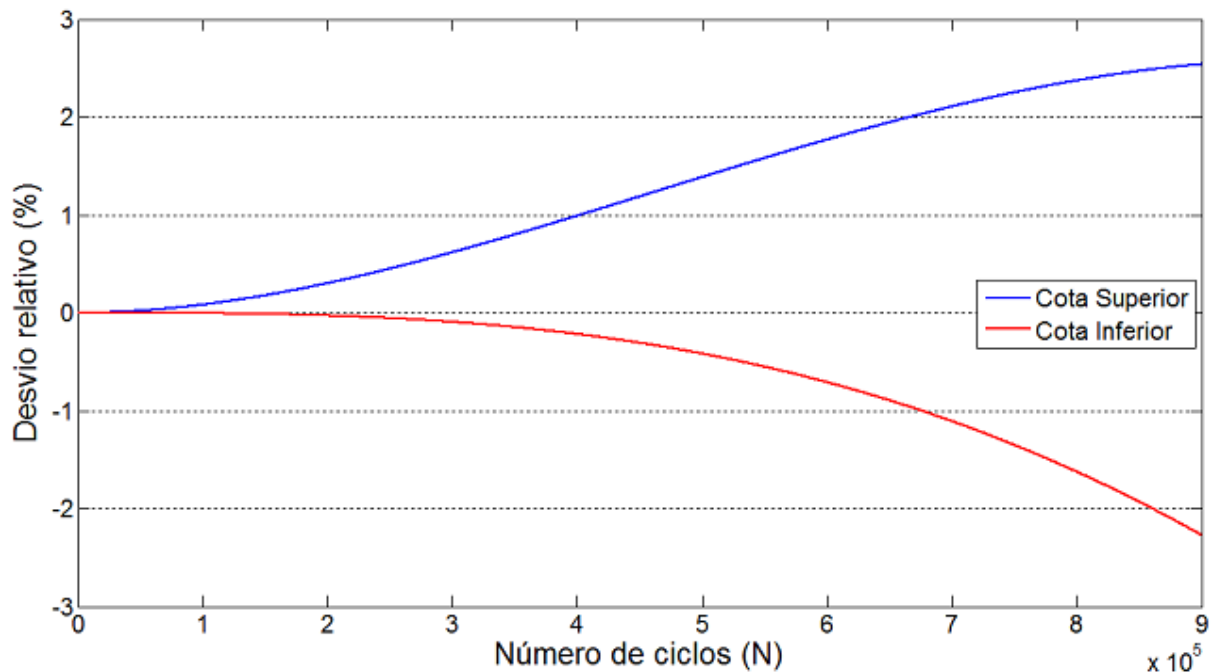


Figura 23: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 1 para o modelo de Paris-Erdogan.

Fonte: Elaborado pelo autor.

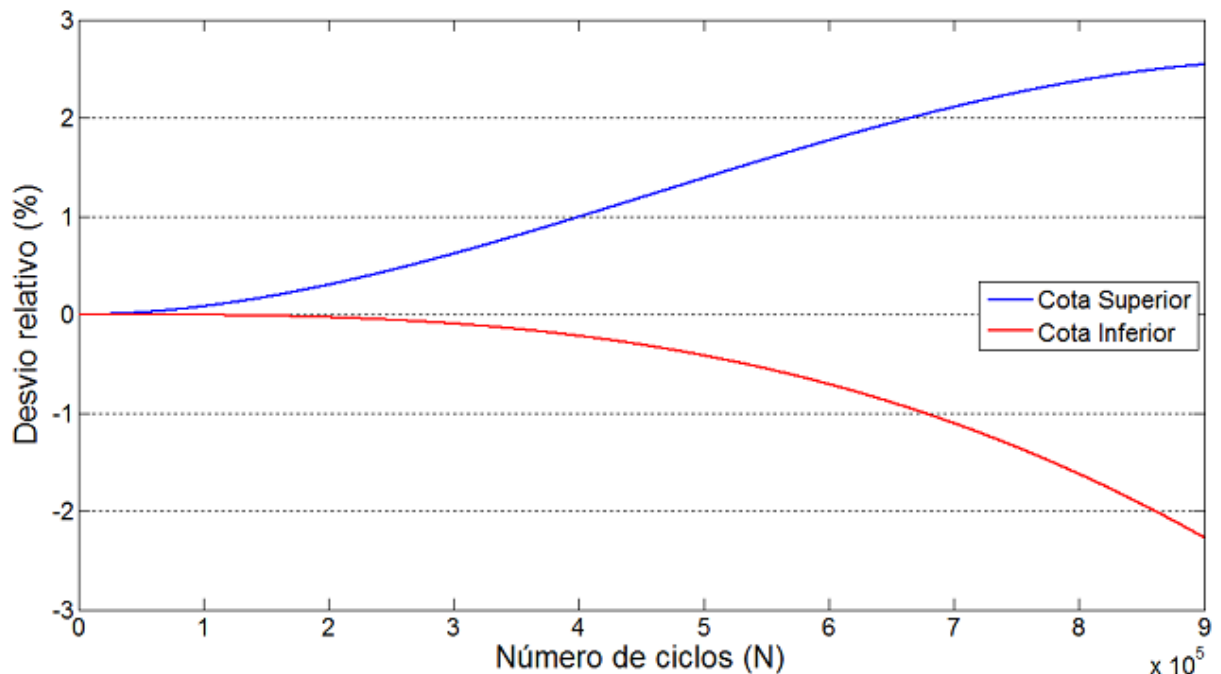


Figura 24: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 2 para o modelo de Paris-Erdogan.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas figuras 23 e 24 os valores máximos e mínimos dos desvios relativos são iguais. Sendo o valor máximo do desvio relativo para a cota superior corresponde a

aproximadamente 2,54%, e para a cota inferior o valor mínimo corresponde a aproximadamente -2,27%.

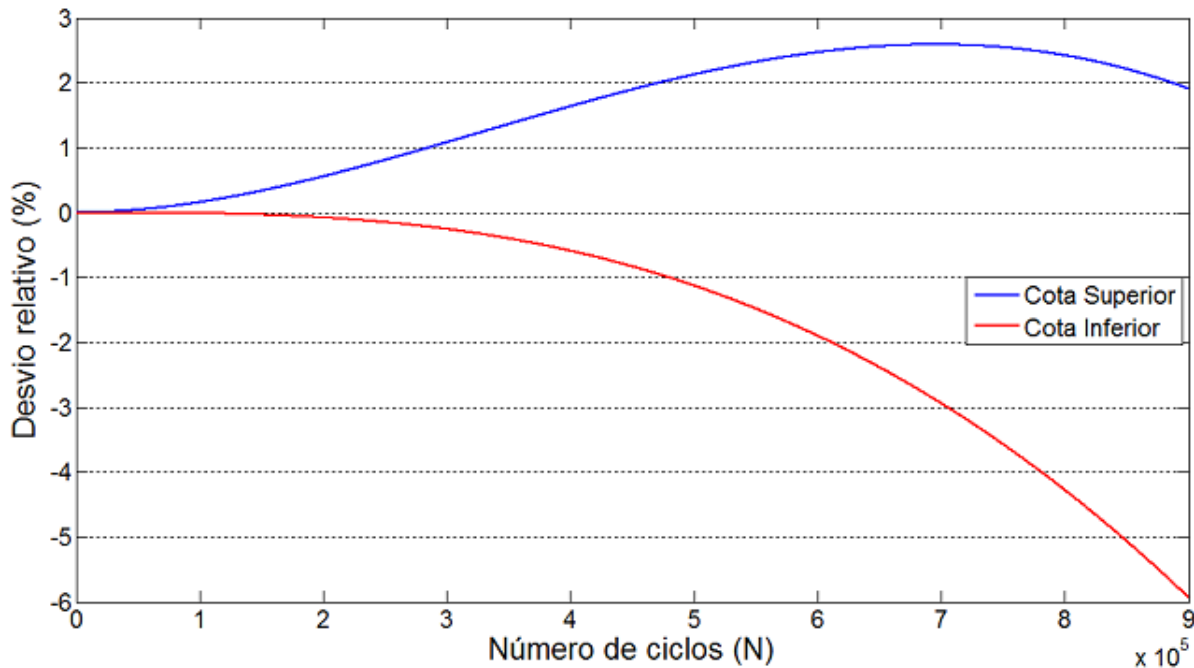


Figura 25: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 3 para o modelo de Paris-Erdogan.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na figura 25 verifica-se que o valor máximo do desvio relativo para a cota superior corresponde a aproximadamente 2,59% e para a cota inferior o valor mínimo corresponde a aproximadamente -5,92%.

Assim, verifica-se por meio das figuras 23 a 25, que para os exemplos 1 e 2, os desvios relativos das cotas superior e inferior são semelhantes. Sendo que a cota inferior apresentou um menor desvio que a cota superior a cada número de ciclo. E no exemplo 3, a cota inferior apresentou um menor desvio que a cota superior até 600.000 ciclos. Em linhas gerais, conclui-se que para todos os exemplos, as cotas são precisas em termos de aproximação da solução numérica aproximada, RK4, pois, o maior desvio relativo observado é de -5,92% quando $N = 900.000$ ciclos no exemplo 3. Esse valor corresponde a um tamanho de trinca calculado pela solução RK4 de 1,85 mm e calculado pela cota inferior de 1,74 mm.

A tabela 7 mostra o tempo aproximado de computação da solução RK4 e das cotas superior e inferior para 900.000 ciclos. Assim, as cotas são 119, 156 e 239 vezes mais eficientes computacionalmente se comparado com o RK4 para os exemplos 1, 2 e 3, respectivamente.

Tabela 7: Tempo aproximado de computação (em segundos) das cotas e do RK4, aplicado ao modelo de Paris-Erdogan, para 900.000 ciclos.

Exemplos	RK4 (seg.)	Cotas Superior / Inferior (seg.)	Eficiência Computacional (razão entre RK4/Cotas)
1	2,7211	0,0228	119
2	3,0695	0,0197	156
3	4,8829	0,0204	239

Fonte: Elaborado pelo autor.

Modelo de Forman

Da mesma forma que foi apresentada para o modelo de Paris-Erdogan, o parâmetro a^* é definido utilizando as mesmas variações para o modelo de Forman, conforme mostram as figuras 26 a 28. E obteve-se o mesmo valor o ser utilizado de a^* , válido para todos os exemplos, sendo $a^* = 1,3a_0$ (JÚNIOR, SANTOS, 2015).

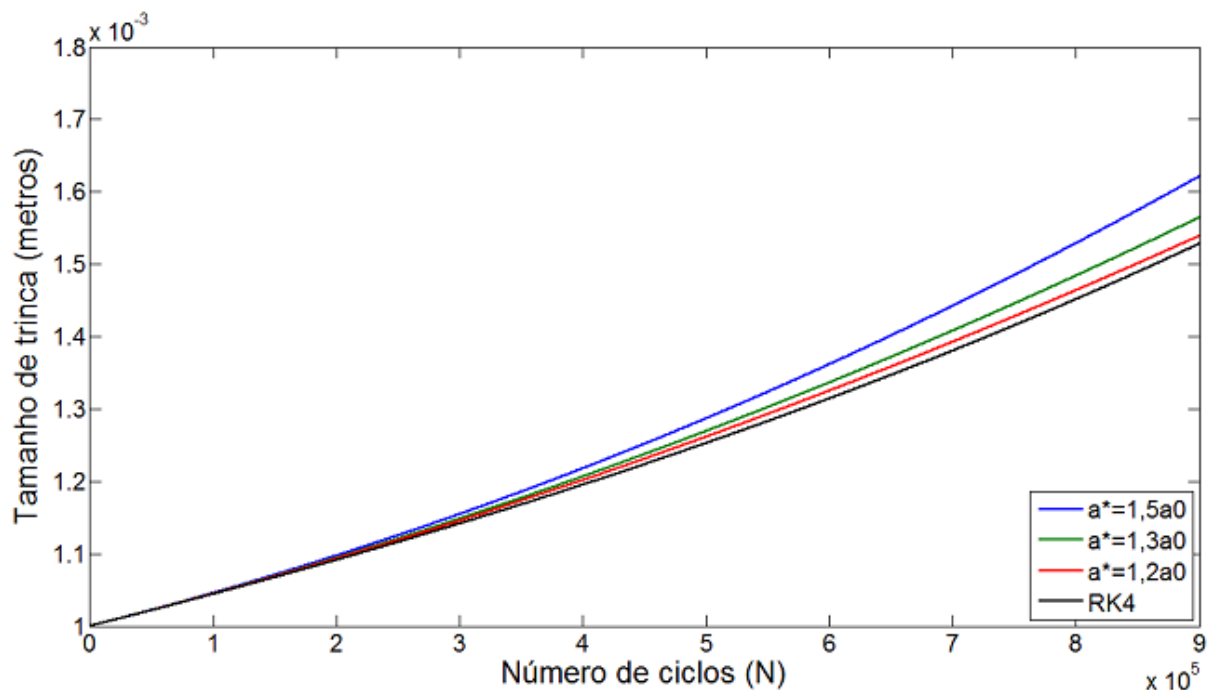


Figura 26: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,2a_0$, $1,3a_0$ e $1,5a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 1, para o modelo de Forman.

Fonte: Elaborado pelo autor.

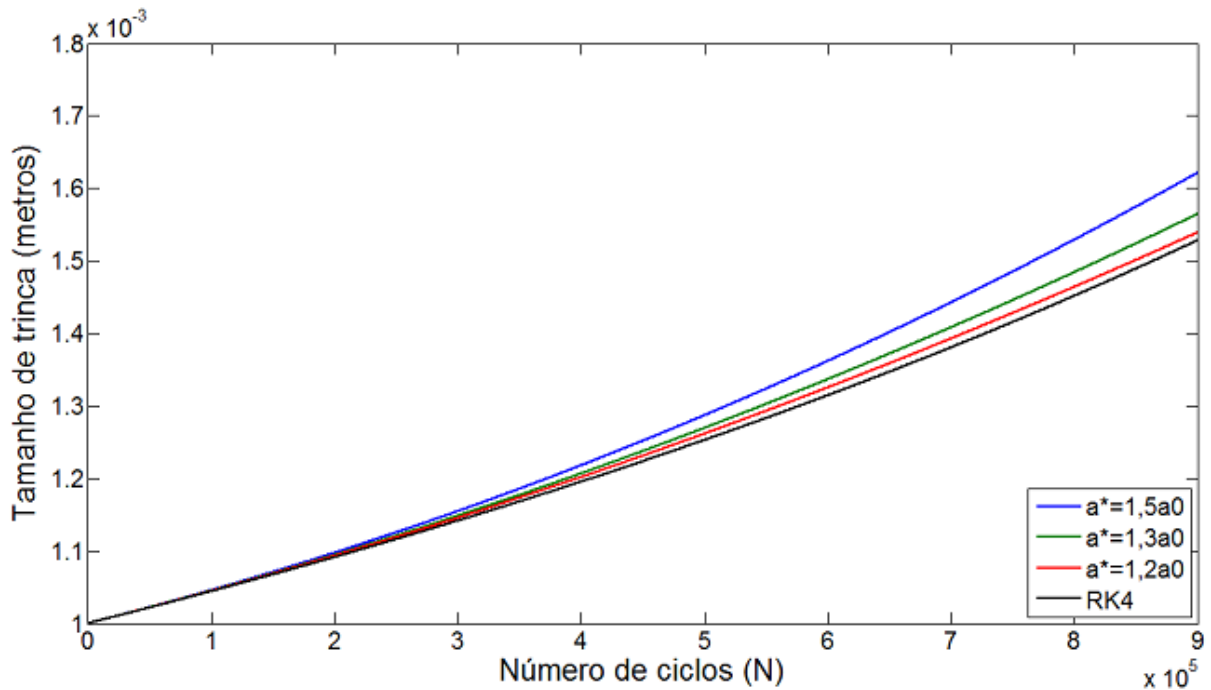


Figura 27: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,2a_0$, $1,3a_0$ e $1,5a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 2, para o modelo de Forman.

Fonte: Elaborado pelo autor.

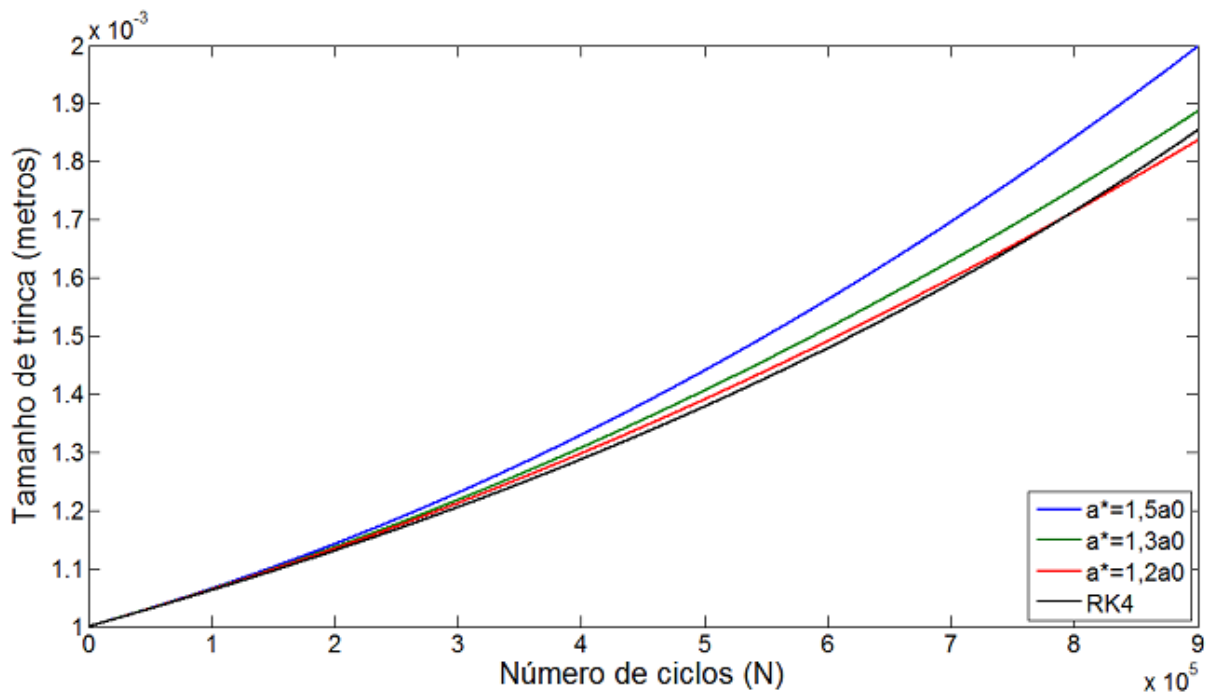


Figura 28: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,2a_0$, $1,3a_0$ e $1,5a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 3, para o modelo de Forman.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a definição do parâmetro a^* ($a^* = 1,3a_0$) percebe-se nas próximas figuras que os resultados para o modelo de Forman são semelhantes aos resultados previamente apresentados para o modelo de Paris-Erdogan. Desse modo, o comportamento das cotas, para o modelo de

Forman, está apresentado nas figuras 29 a 31. Nesse modelo, também é utilizado um carregamento arbitrário de $\Delta\sigma = 70$ MPa (JÚNIOR, SANTOS, 2015).

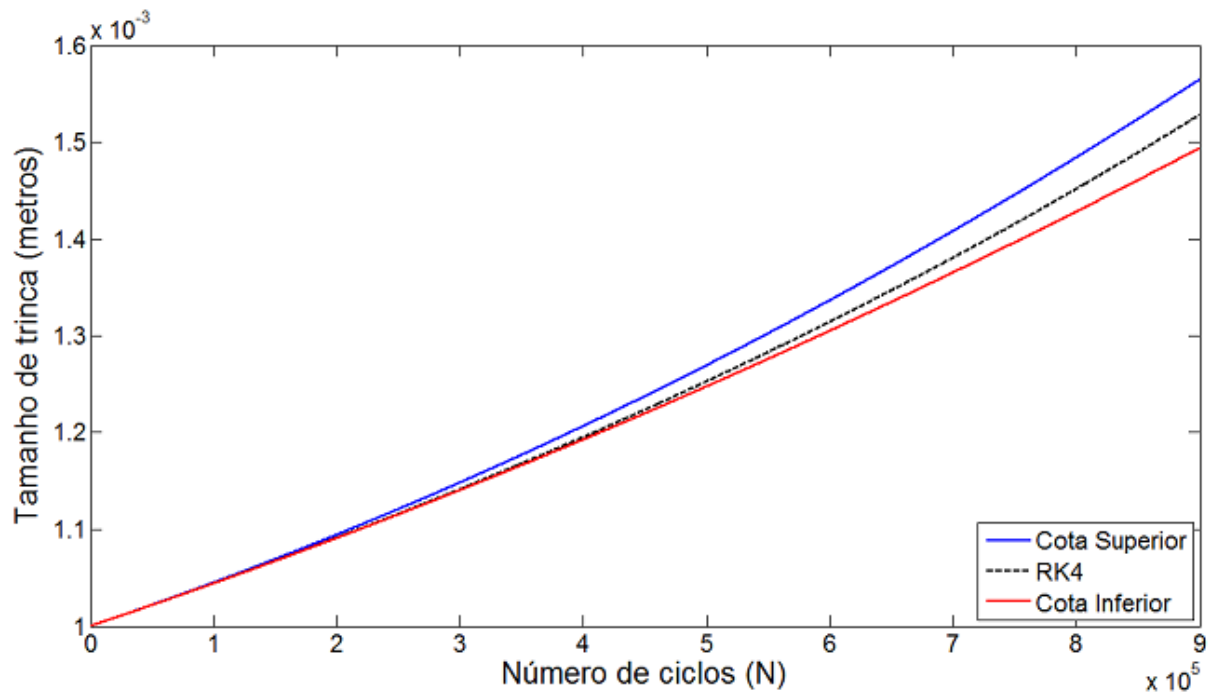


Figura 29: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 1 do modelo de Forman.

Fonte: Elaborado pelo autor.

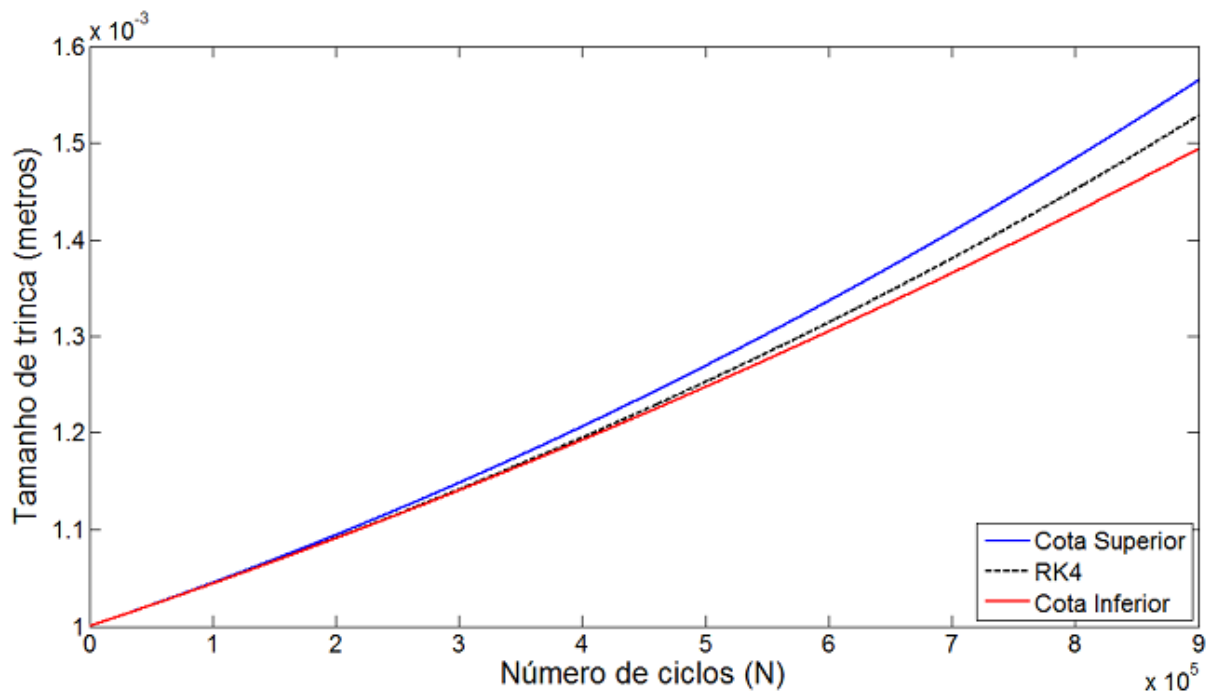


Figura 30: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 2 do modelo de Forman.

Fonte: Elaborado pelo autor.

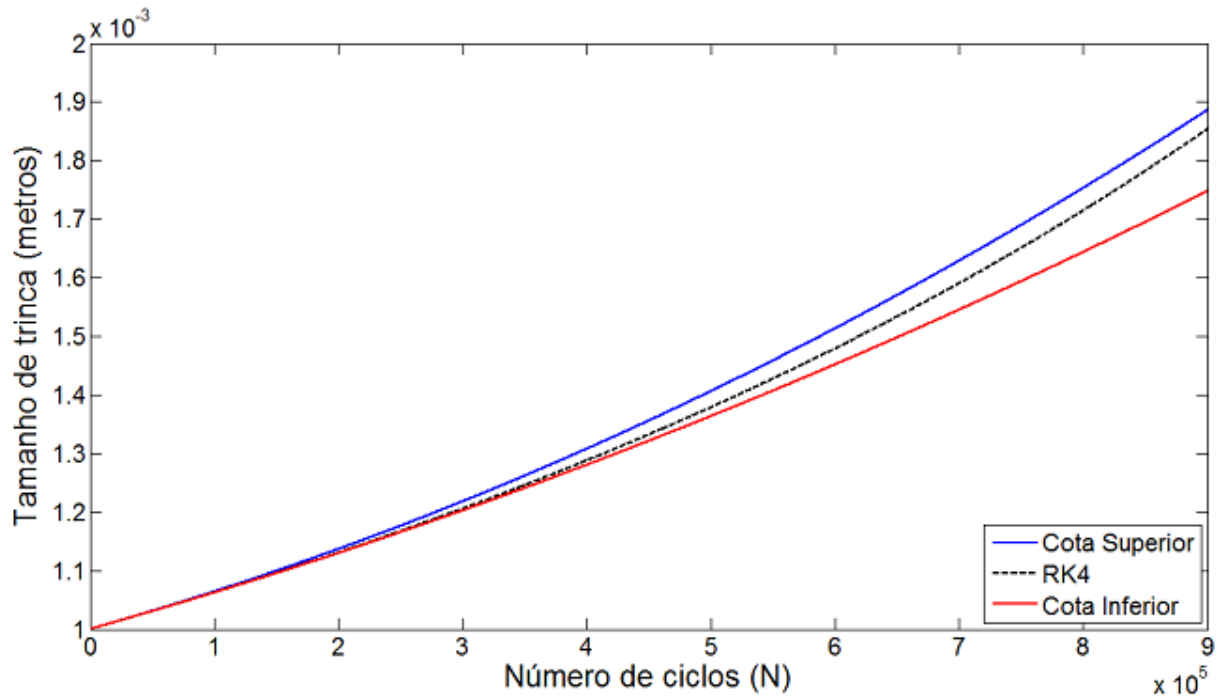


Figura 31: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 3 do modelo de Forman.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Da mesma forma que o modelo de Paris-Erdogan, através das figuras 29 a 31, pode-se afirmar que, para o modelo de Forman, as cotas superior e inferior representam de forma acurada a propagação da trinca.

E os coeficientes da equação (4.1), para os exemplos 1, 2 e 3, podem ser verificados segundo a tabela 8.

Tabela 8: Coeficientes do polinômio da equação (4.1) para os exemplos 1, 2 e 3, aplicado ao modelo de Forman.

Exemplos	γ	α	β
1	2,21165204299199e-16	1,33641754468262e-16	4,28165307400426e-10
2	2,21257464064954e-16	1,33674738809357e-16	4,2816531510184e-10
3	4,30927438837268e-16	2,59892738020747e-16	5,97026915762707e-10

Fonte: Elaborado pelo autor.

As figuras 32 a 34 apresentam, para os exemplos 1, 2 e 3, em um gráfico $N \times$ desvio relativo, os desvios relativos das cotas superior e inferior em relação à solução RK4.

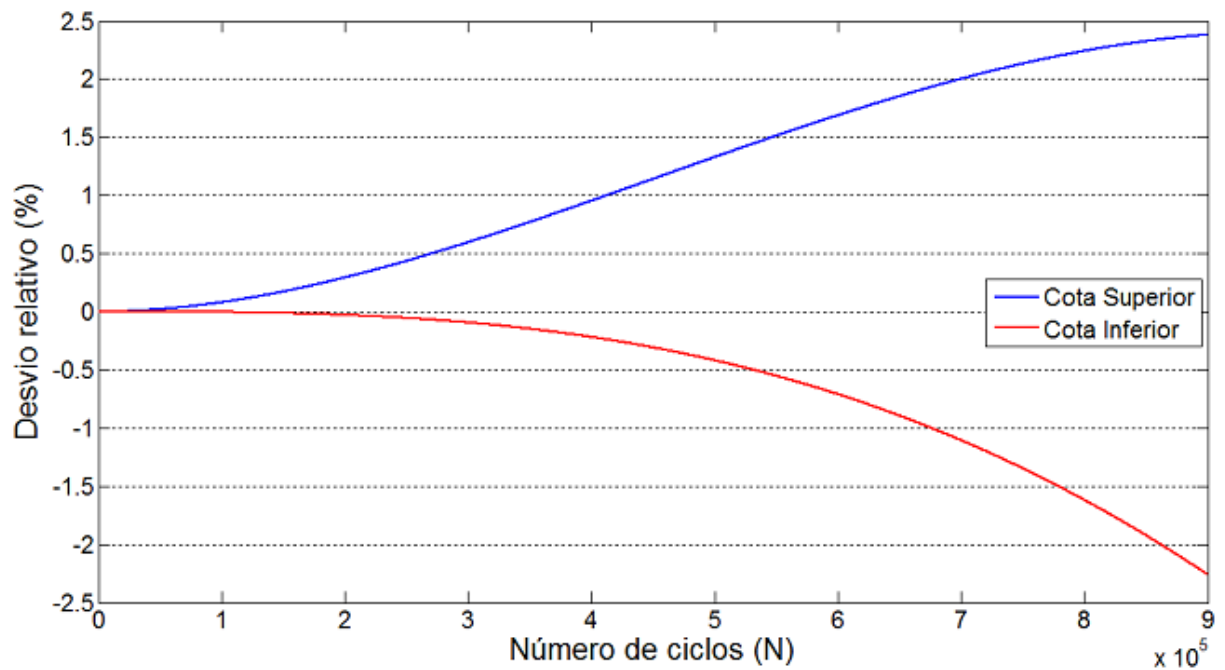


Figura 32: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 1 para o modelo de Forman.
Fonte: Elaborado pelo autor.

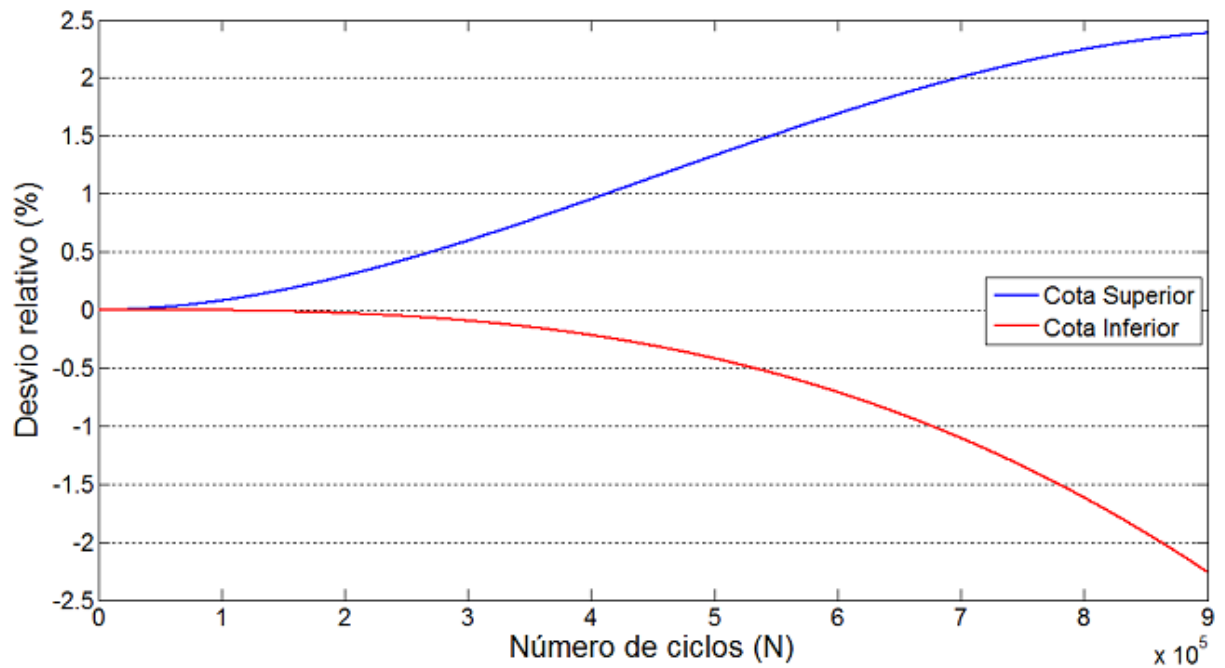


Figura 33: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 2 para o modelo de Forman.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas figuras 32 e 33 os valores máximos e mínimos dos desvios relativos são iguais. Sendo o valor máximo do desvio relativo para a cota superior corresponde a aproximadamente 2,39% e para a cota inferior o valor mínimo corresponde a aproximadamente -2,26%.

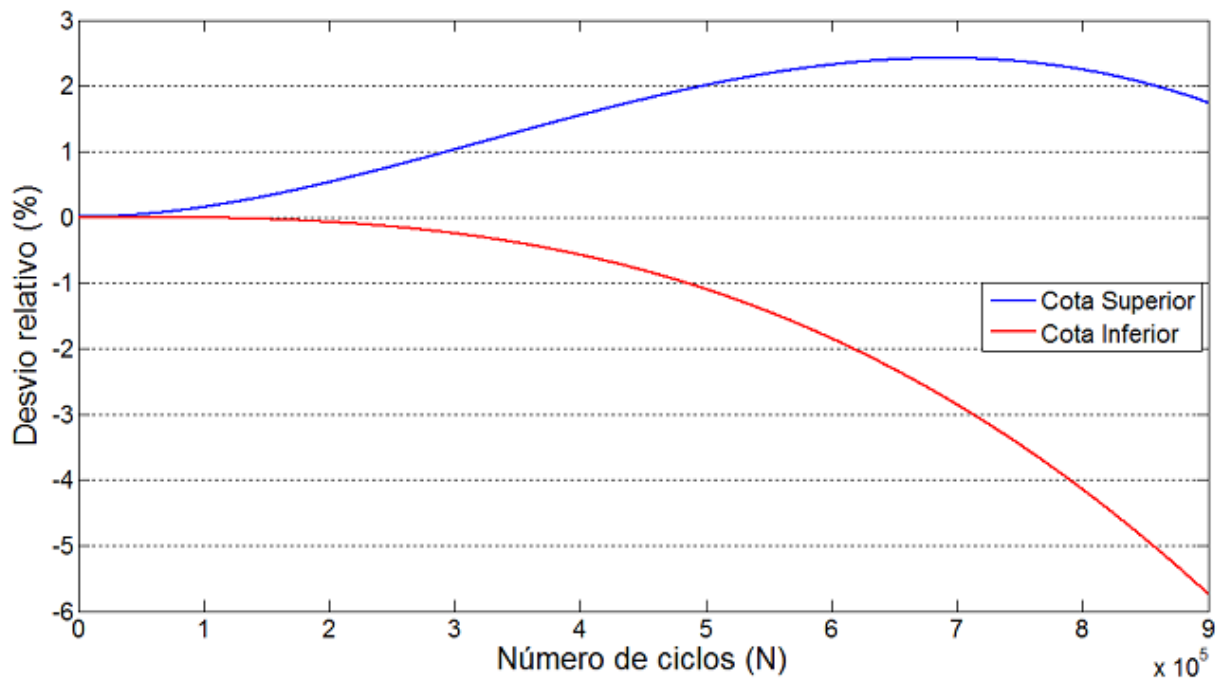


Figura 34: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 3 para o modelo de Forman.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Na figura 34 verifica-se que o valor máximo do desvio relativo para a cota superior corresponde a aproximadamente 2,42% e para a cota inferior o valor mínimo corresponde a aproximadamente -5,73%.

Assim, da mesma forma que o modelo de Paris-Erdogan, nos exemplos 1 e 2, os desvios relativos das cotas superior e inferior são semelhantes, sendo que a cota inferior apresentou um menor desvio que a cota superior a cada número de ciclo. E no exemplo 3, a cota inferior apresentou um menor desvio que a cota superior até 600.000 ciclos. Em linhas gerais, conclui-se que para todos os exemplos as cotas são precisas em termos de aproximação da solução RK4, pois, o maior desvio relativo observado é de -5,73% quando $N = 900.000$ ciclos para o exemplo 3. Esse valor corresponde a um tamanho de trinca calculado pela solução RK4 de 1,85 mm e calculado pela cota inferior de 1,75 mm.

A tabela 9 mostra o tempo aproximado de computação da solução RK4 e das cotas superior e inferior para 900.000 ciclos. Assim, as cotas são 155, 190 e 286 vezes mais eficientes computacionalmente se comparado com o RK4 para os exemplos 1, 2 e 3, respectivamente.

Tabela 9: Tempo aproximado de computação (em segundos) das cotas e do RK4, aplicado ao modelo de Forman, para 900.000 ciclos.

Exemplos	RK4 (seg.)	Cotas Superior / Inferior (seg.)	Eficiência Computacional (razão entre RK4/Cotas)
1	3,2270	0,0208	155
2	3,8494	0,0203	190
3	5,5767	0,0195	286

Fonte: Elaborado pelo autor.

Modelo de Walker

Para o modelo de Walker, as figuras 35 a 37, referentes aos exemplos 1, 2 e 3, mostram a variação do parâmetro a^* (a^* com valores de $1,4a_0$, $1,5a_0$ e $1,7a_0$), referente à cota superior, em relação à solução numérica aproximada, RK4. Nos exemplos 1 e 2 o valor que mais se aproxima do RK4 é quando $a^* = 1,4a_0$. No entanto, no exemplo 3, esse mesmo valor de a^* não é mais uma cota superior. Assim, o valor de a^* válido para todos os exemplos é quando $a^* = 1,5a_0$.

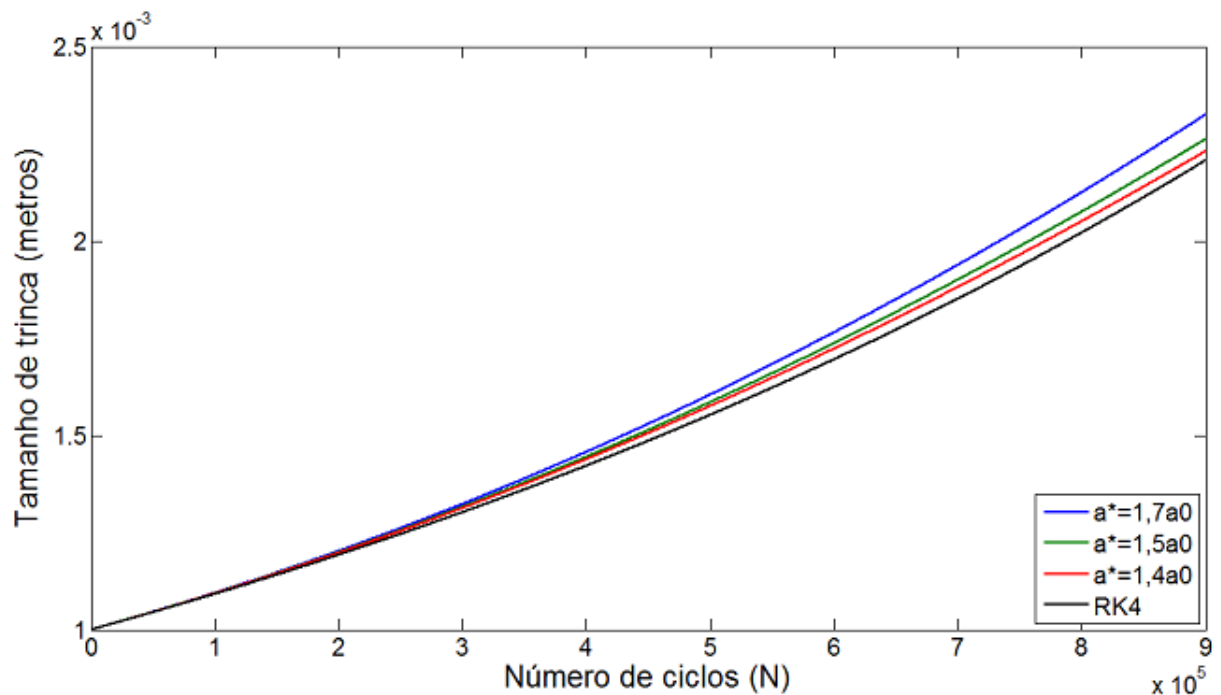


Figura 35: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,4a_0$, $1,5a_0$ e $1,7a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 1, para o modelo de Walker.

Fonte: Elaborado pelo autor.

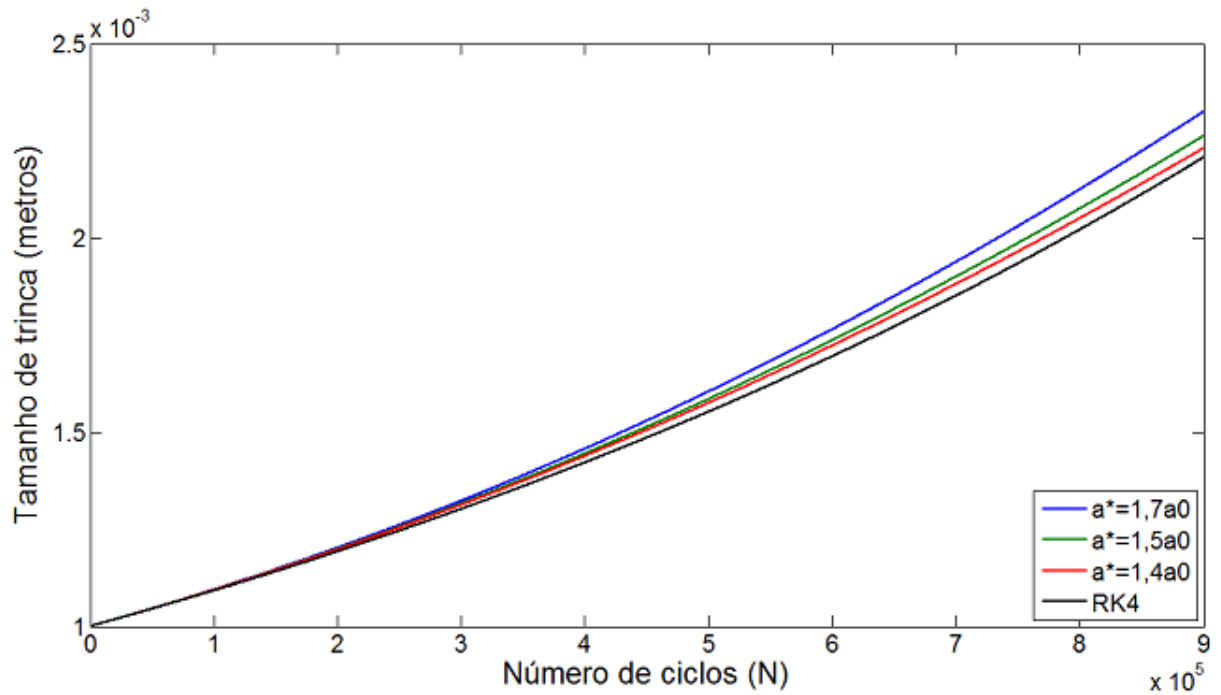


Figura 36: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,4a_0$, $1,5a_0$ e $1,7a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 2, para o modelo de Walker.

Fonte: Elaborado pelo autor.

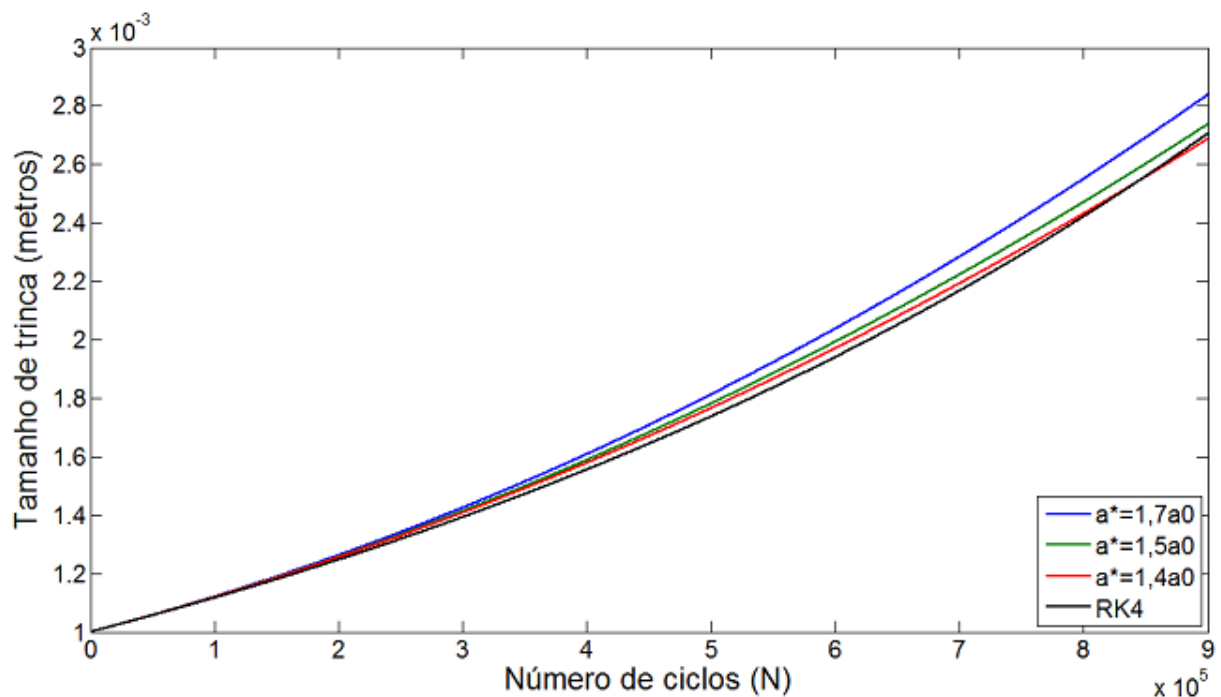


Figura 37: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,4a_0$, $1,5a_0$ e $1,7a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 3, para o modelo de Walker.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a definição do parâmetro a^* ($a^* = 1,5a_0$), é verificado o comportamento das cotas para o modelo de Walker, conforme mostram as figuras 38 a 40. As figuras apresentam em um gráfico $N \times a$, o crescimento da trinca através da solução definida pelas cotas superior

e inferior em relação à solução numérica aproximada calculada pelo método RK4, para os exemplos 1, 2 e 3 respectivamente. Para esse modelo é utilizado um carregamento arbitrário de $\Delta\sigma = 200$ MPa.

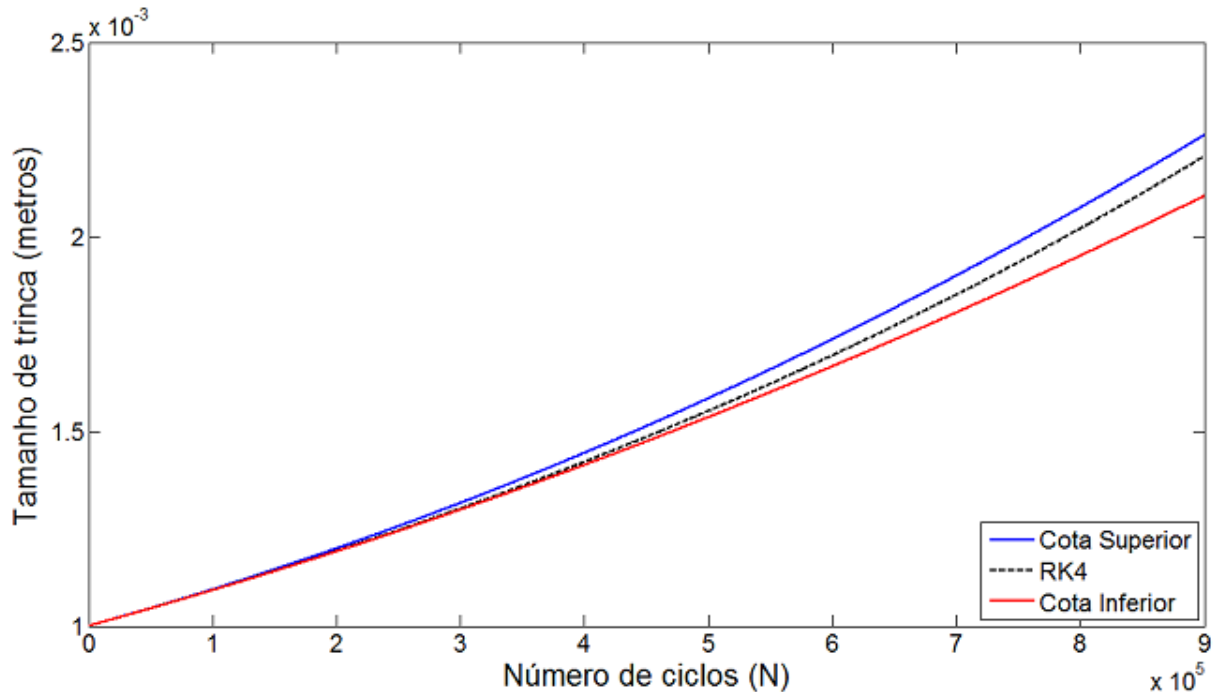


Figura 38: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 1 do modelo de Walker.

Fonte: Elaborado pelo autor.

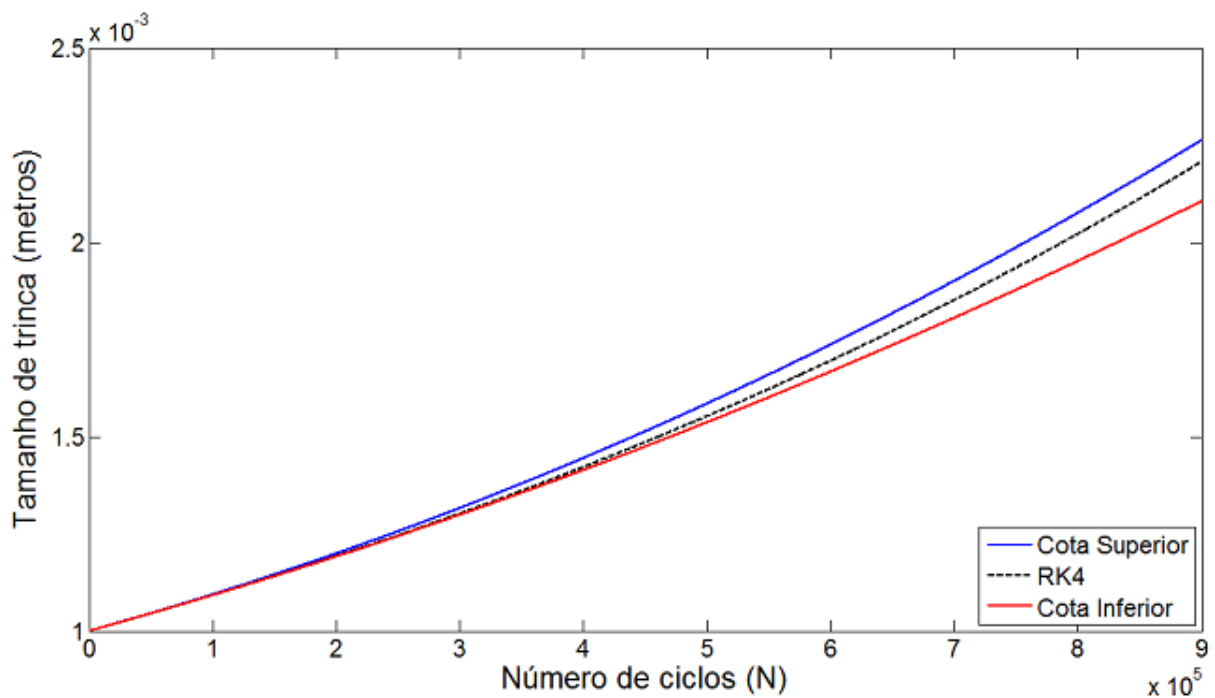


Figura 39: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 2 do modelo de Walker.

Fonte: Elaborado pelo autor.

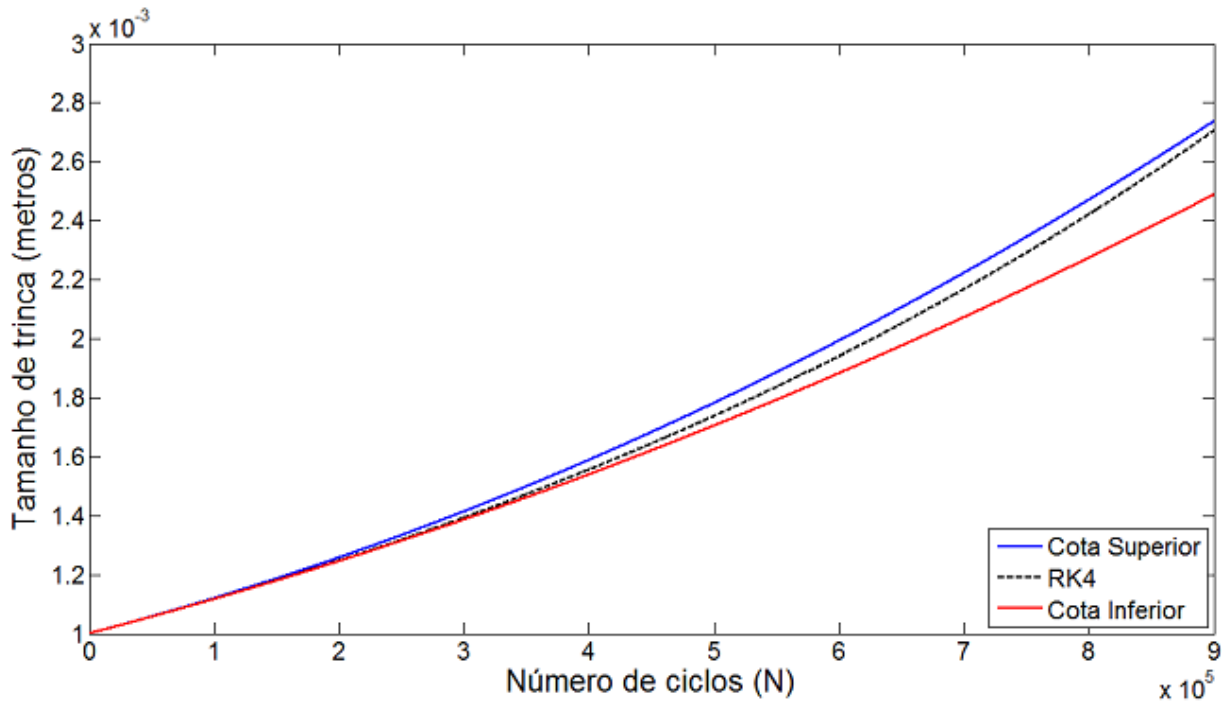


Figura 40: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 3 do modelo de Walker.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, da mesma forma que apresentados nos modelos anteriormente, observam-se nas figuras 38 a 40, que as cotas superior e inferior têm um bom desempenho, em termos de aproximação, para o modelo de Walker em relação à solução numérica aproximada, RK4.

Os coeficientes, para os exemplos 1, 2 e 3, da equação (4.1) para esse modelo podem ser verificados segundo a tabela 10.

Tabela 10: Coeficientes do polinômio da equação (4.1) para os exemplos 1, 2 e 3, aplicado ao modelo de Walker.

Exemplos	γ	α	β
1	5,80332738784054e-16	3,86888492522703e-16	8,79645943005142e-10
2	5,80655055949905e-16	3,86983976721311e-16	8,79645953857339e-10
3	9,17644168479747e-16	6,10063785182475e-16	1,10485408618331e-09

Fonte: Elaborado pelo autor.

As figuras 41 a 43 apresentam, para os exemplos 1, 2 e 3, em um gráfico $N \times$ desvio relativo, os percentuais dos desvios relativos das cotas superior e inferior em relação à solução RK4.

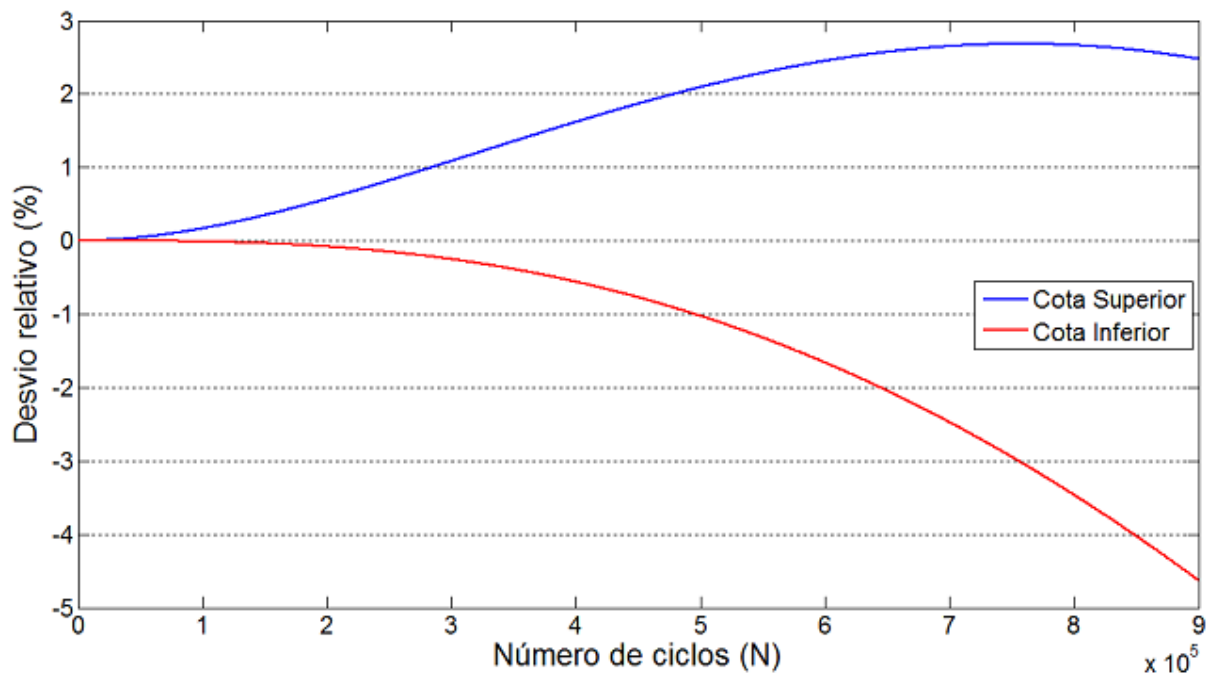


Figura 41: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 1 para o modelo de Walker.
Fonte: Elaborado pelo autor.

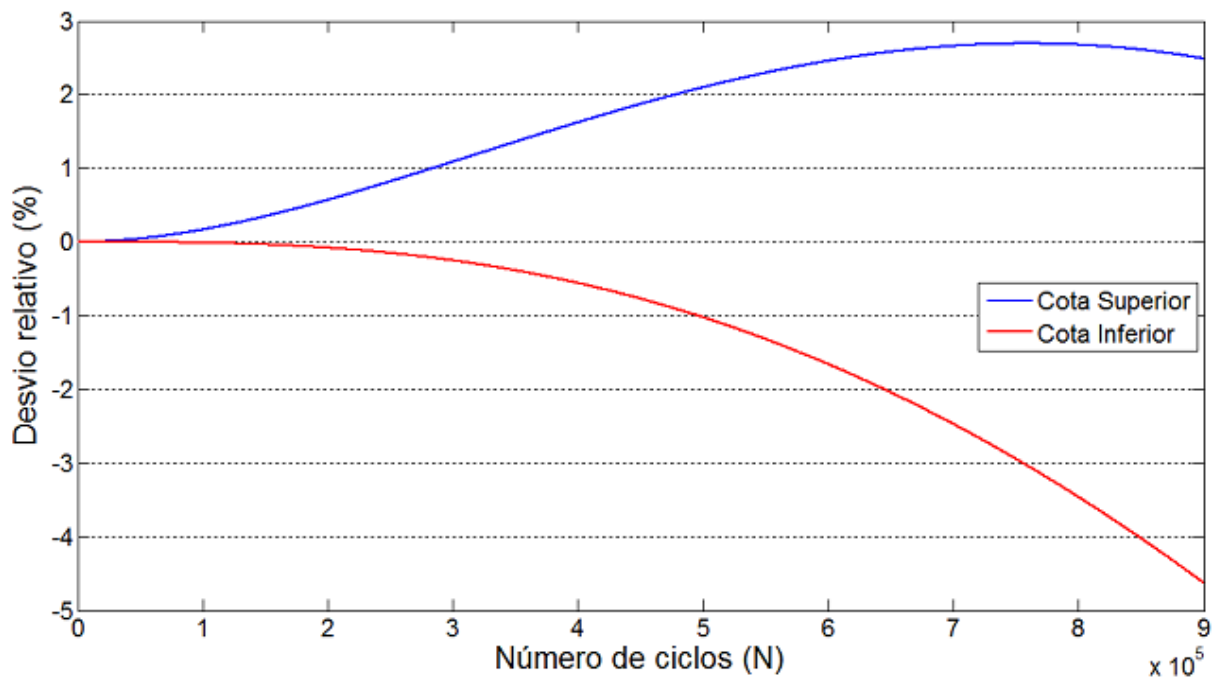


Figura 42: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 2 para o modelo de Walker.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas figuras 41 e 42 os valores máximos e mínimos dos desvios relativos são iguais. Sendo o valor máximo do desvio relativo para a cota superior corresponde a aproximadamente 2,69% e para a cota inferior o valor mínimo corresponde a aproximadamente -4,62%.

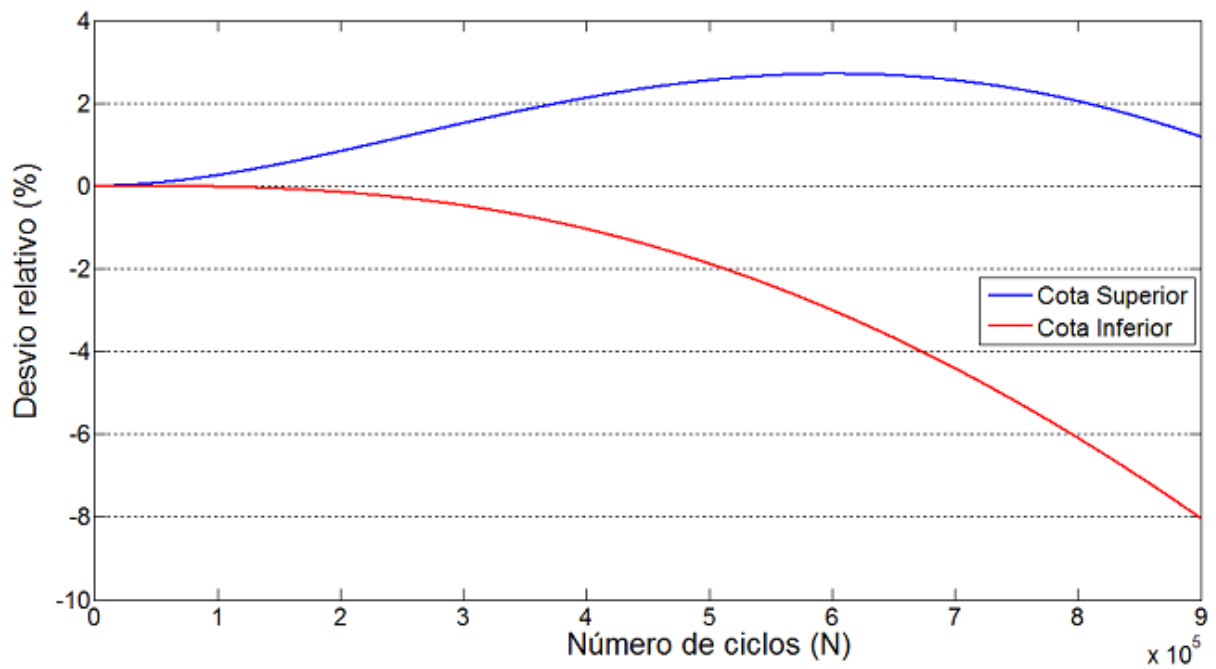


Figura 43: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 3 para o modelo de Walker.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Na figura 43 verifica-se que o valor máximo do desvio relativo para a cota superior corresponde a aproximadamente 2,71% e para a cota inferior o valor mínimo corresponde a aproximadamente -8,02%.

Assim, verifica-se por meio das figuras 41 a 43, que para os exemplos 1 e 2, a cota inferior teve um desvio relativo inferior que a cota superior até 700.000 ciclos. E no exemplo 3, a cota inferior teve um desvio relativo inferior que a cota superior até 600.000 ciclos. Em linhas gerais, conclui-se que para todos os exemplos as cotas são precisas em termos de aproximação da solução RK4, pois, o maior desvio relativo observado é de -8,02% quando $N = 900.000$ ciclos para o exemplo 3. Esse valor corresponde a um tamanho de trinca calculado pela solução RK4 de 2,71 mm e calculado pela cota inferior de 2,49 mm.

A tabela 11 mostra o tempo aproximado de computação da solução RK4 e das cotas superior e inferior para 900.000 ciclos. Assim, as cotas são 55, 83 e 175 vezes mais eficientes computacionalmente se comparado com o RK4 para os exemplos 1, 2 e 3, respectivamente.

Tabela 11: Tempo aproximado de computação (em segundos) das cotas e do RK4, aplicado ao modelo de Walker, para 900.000 ciclos.

Exemplos	RK4 (seg.)	Cotas Superior / Inferior (seg.)	Eficiência Computacional (razão entre RK4/Cotas)
1	1,1915	0,0215	55
2	1,6283	0,0197	83
3	3,3778	0,0193	175

Fonte: Elaborado pelo autor.

Modelo de McEvily

Para o modelo de McEvily, as figuras 44 a 46, referentes aos exemplos 1, 2 e 3, mostram a variação do parâmetro a^* (a^* com valores de $1,02a_0$, $1,03a_0$ e $1,05a_0$) em relação à solução RK4. Em todos os exemplos o valor que mais se aproxima do RK4 é quando $a^* = 1,03a_0$, e esse valor será utilizado.

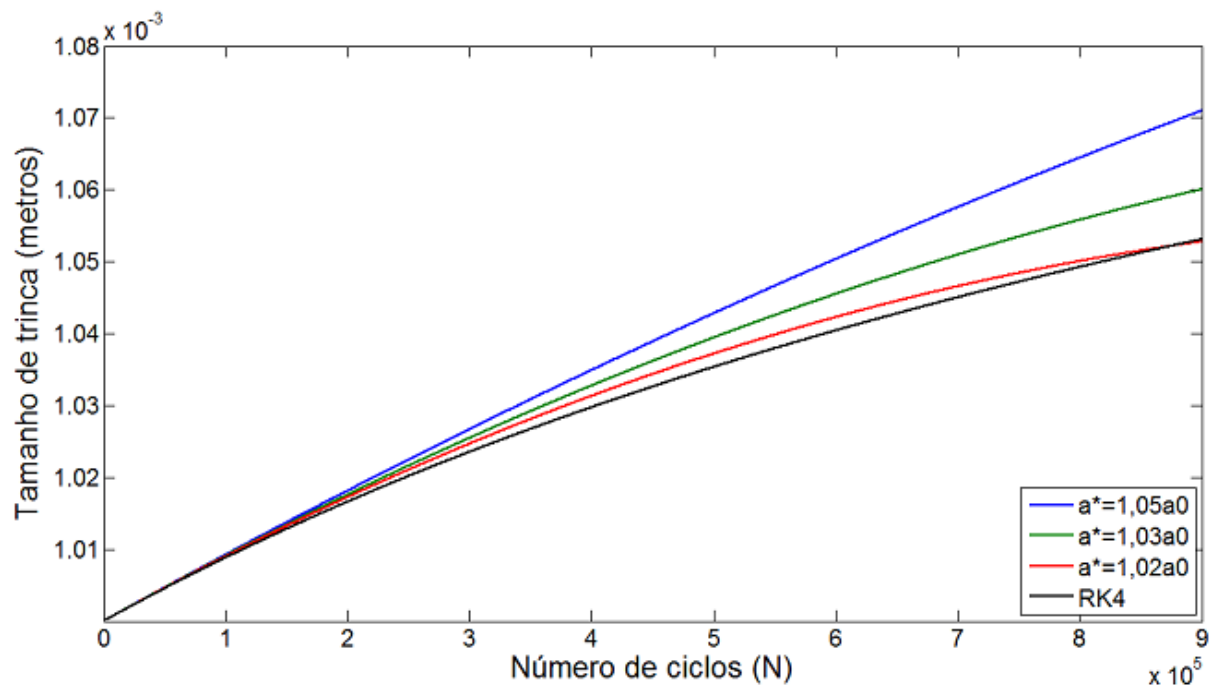


Figura 44: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,02a_0$, $1,03a_0$ e $1,05a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 1, para o modelo de McEvily.

Fonte: Elaborado pelo autor.

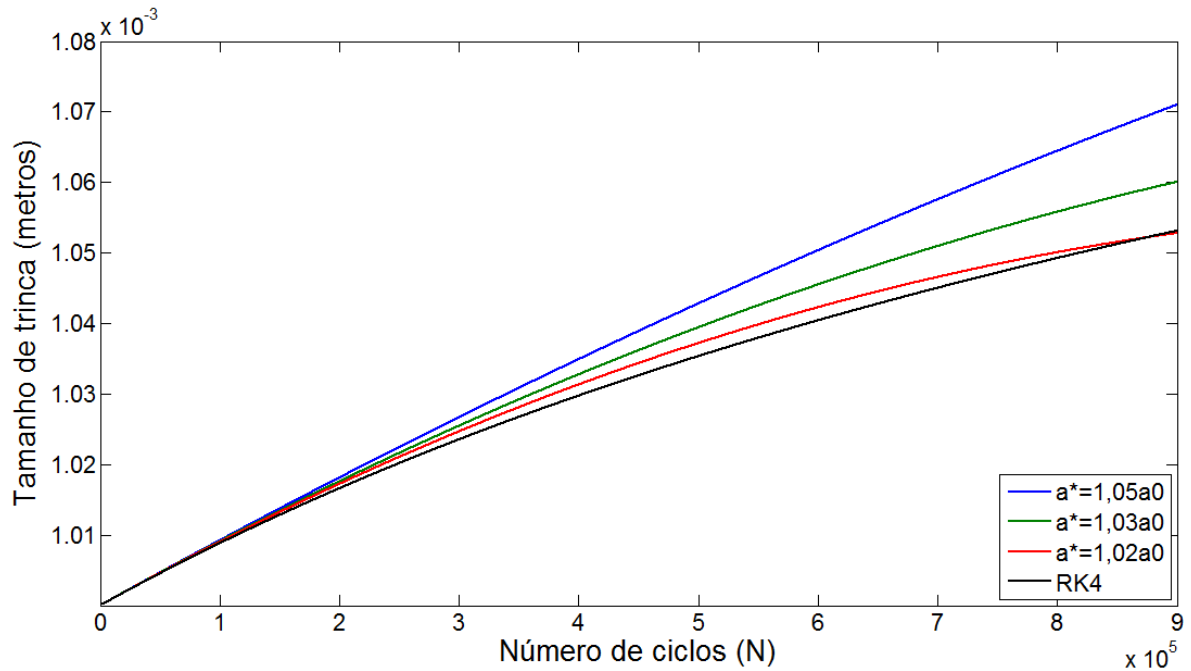


Figura 45: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,02a_0$, $1,03a_0$ e $1,05a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 2, para o modelo de McEvily.

Fonte: Elaborado pelo autor.

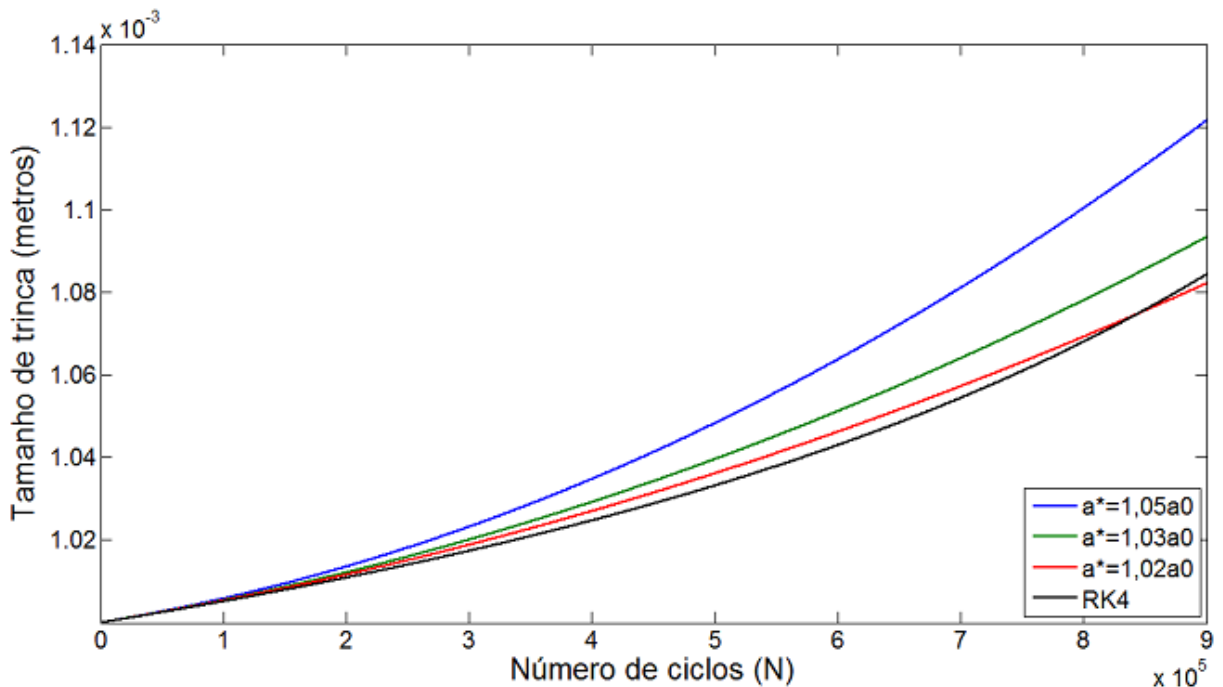


Figura 46: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $1,02a_0$, $1,03a_0$ e $1,05a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 3, para o modelo de McEvily.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a definição do parâmetro a^* ($a^* = 1,03a_0$), é verificado o comportamento das cotas para o modelo de McEvily, conforme mostram as figuras 47 e 49. As figuras apresentam em um gráfico $N \times a$, o crescimento da trinca através da solução definida pelas cotas superior e

inferior em relação à solução numérica aproximada calculada pelo método RK4, para os exemplos 1, 2 e 3 respectivamente. Para esse modelo é utilizado um carregamento arbitrário de $\Delta\sigma = 55$ MPa.

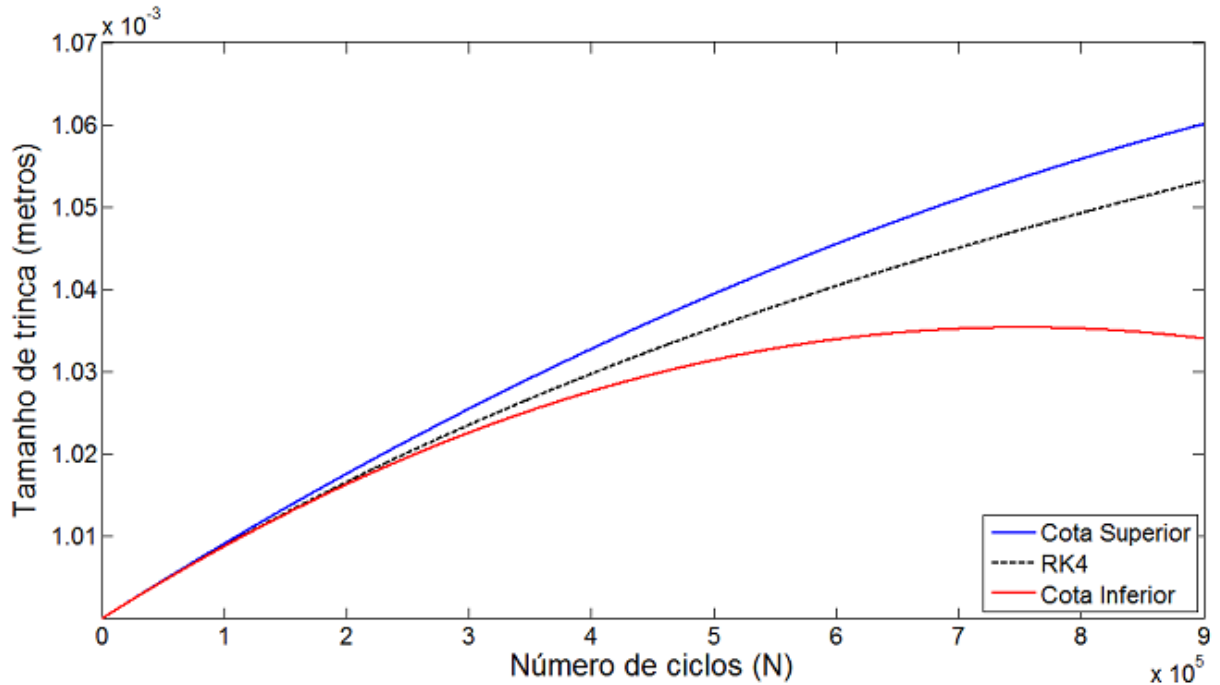


Figura 47: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 1 do modelo de McEvily.

Fonte: Elaborado pelo autor.

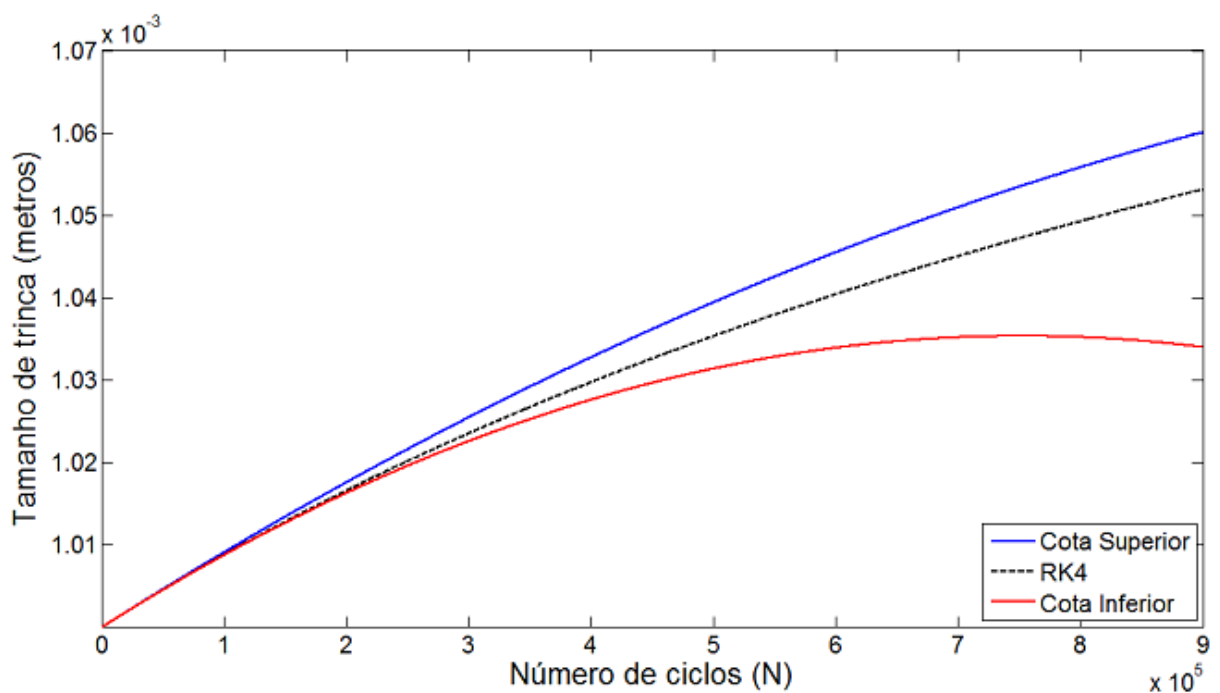


Figura 48: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 2 do modelo de McEvily.

Fonte: Elaborado pelo autor.

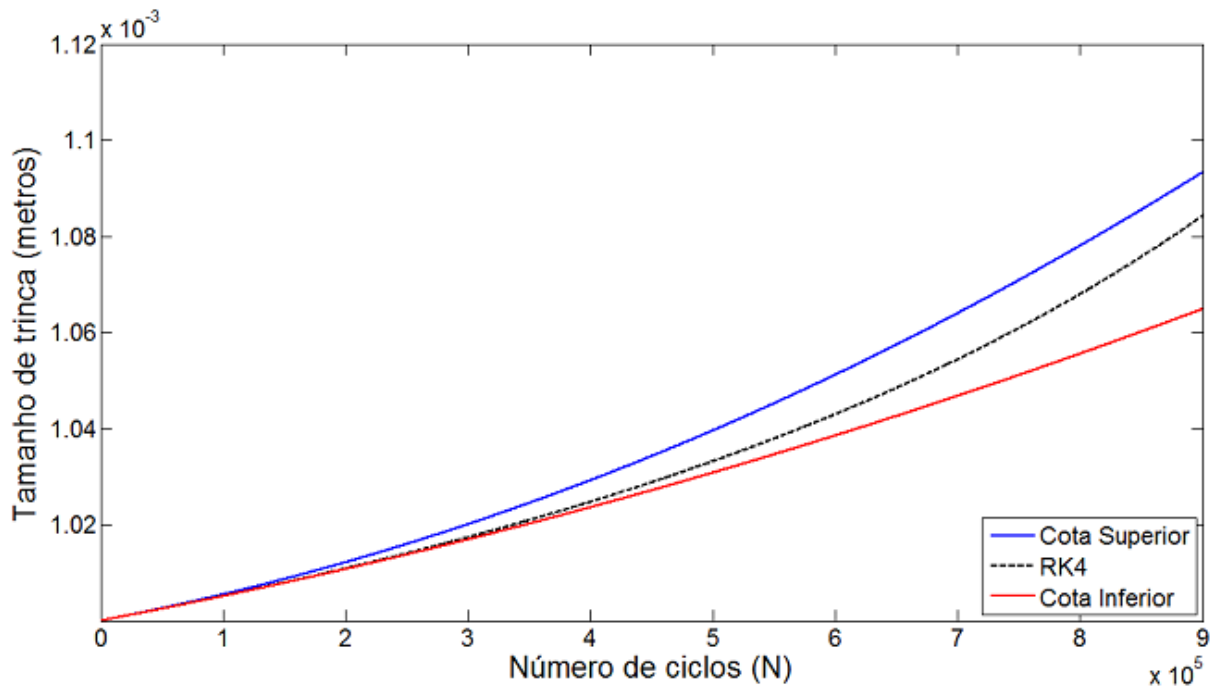


Figura 49: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 3 do modelo de McEvily.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, da mesma forma que os modelos anteriormente apresentados, observam-se nas figuras 47 a 49, que as cotas superior e inferior têm um bom desempenho, em termos de aproximação, para o modelo de McEvily em relação à solução numérica aproximada, RK4. Ainda, nota-se nos exemplos 1 e 2, que devido aos parâmetros utilizados nesse trabalho, tabela 5, a trinca teve um crescimento menor em comparação ao exemplo 3.

Os coeficientes, para os exemplos 1, 2 e 3, da equação (4.1) para esse modelo podem ser verificados segundo a tabela 12.

Tabela 12: Coeficientes do polinômio da equação (4.1) para os exemplos 1, 2 e 3, aplicado ao modelo de McEvily.

Exemplos	γ	α	β
1	-3,03302254899064e-17	-6,24809888851675e-17	9,4024489251073e-11
2	-3,03381555205417e-17	-6,24963917500288e-17	9,40244728547427e-11
3	6,13766925460222e-17	2,62346941374799e-17	4,84456316036219e-11

Fonte: Elaborado pelo autor.

As figuras 50 a 52 apresentam, para os exemplos 1, 2 e 3, em um gráfico $N \times$ desvio relativo, os percentuais dos desvios relativos das cotas superior e inferior em relação à solução RK4.

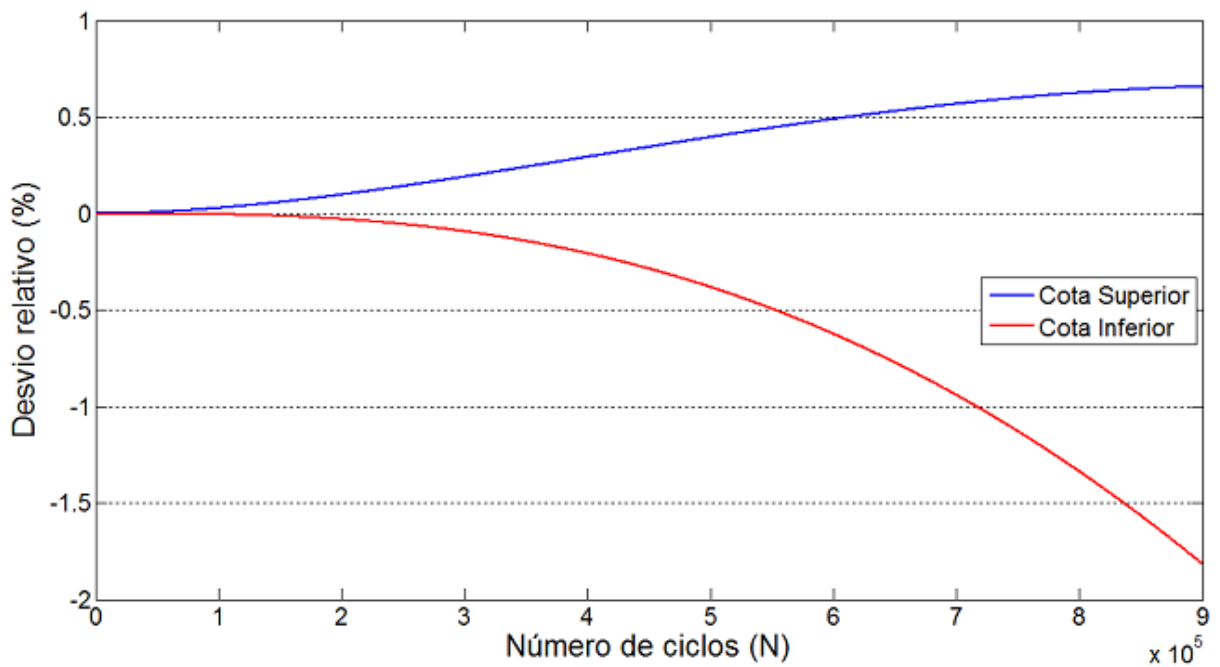


Figura 50: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 1 para o modelo de McEvily.
Fonte: Elaborado pelo autor.

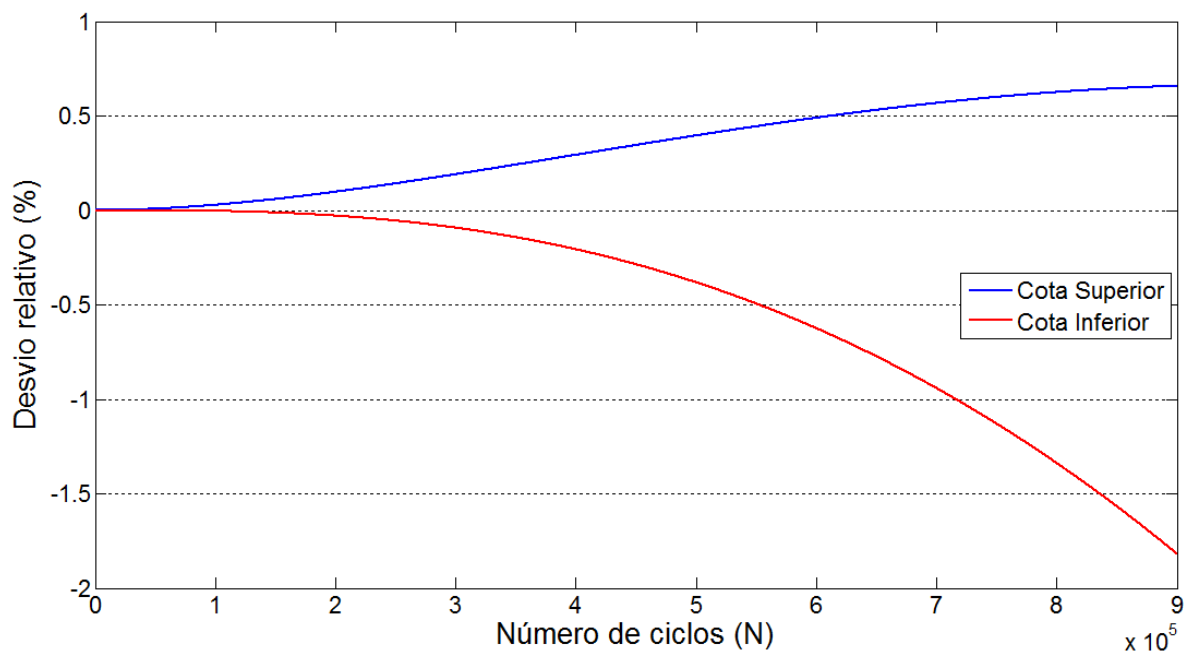


Figura 51: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 2 para o modelo de McEvily.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Em conformidade com os modelos anteriormente apresentados, as figuras 50 e 51 mostram que os valores máximos e mínimos dos desvios relativos são iguais. Sendo que o valor máximo do desvio relativo para a cota superior corresponde a aproximadamente 0,66% e para a cota inferior o valor mínimo corresponde a aproximadamente -1,82%.

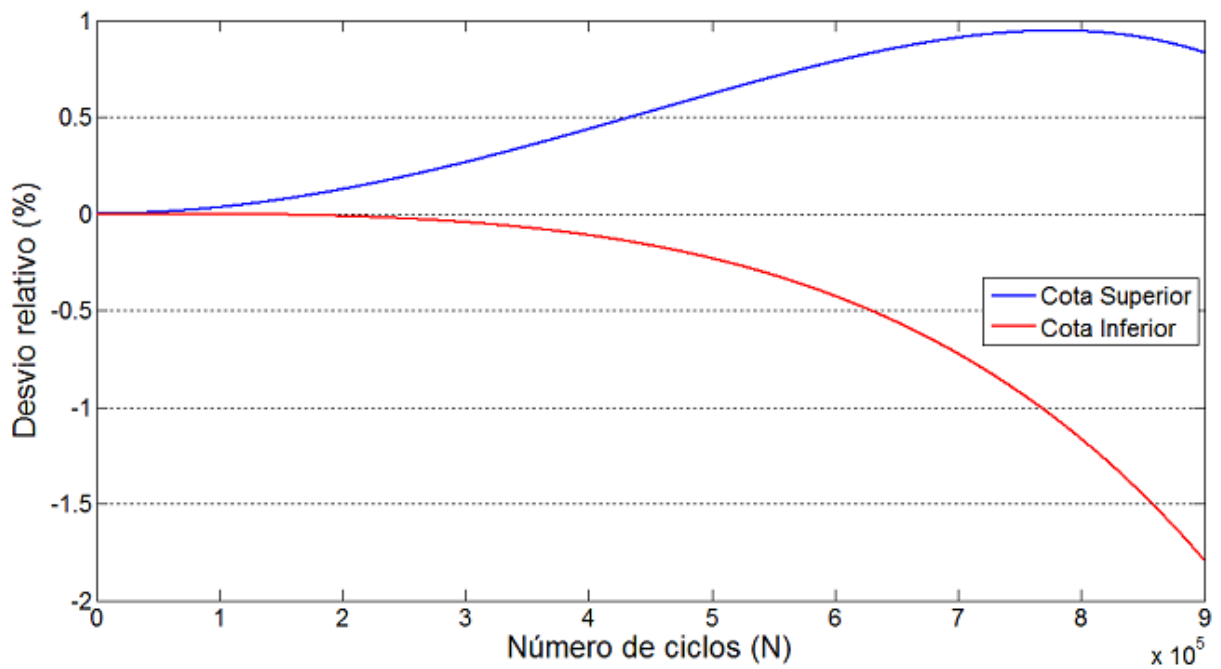


Figura 52: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 3 para o modelo de McEvily.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Na figura 52 verifica-se que o valor máximo do desvio relativo para a cota superior corresponde a aproximadamente 0,95% e para a cota inferior o valor mínimo corresponde a aproximadamente -1,79%.

Assim, verifica-se por meio das figuras 50 a 52, que para os exemplos 1 e 2, a cota inferior teve um desvio relativo inferior que a cota superior até 500.000 ciclos. E no exemplo 3, a cota inferior teve um desvio relativo inferior que a cota superior até 700.000 ciclos. Em linhas gerais, conclui-se que para todos os exemplos as cotas são precisas em termos de aproximação da solução RK4, pois, o maior desvio relativo observado é de -1,82% quando $N = 900.000$ ciclos para os exemplos 1 e 2. Esse valor corresponde a um tamanho de trinca calculado pela solução RK4 de 1,05 mm e calculado pela cota inferior de 1,03 mm.

A tabela 13 mostra o tempo aproximado de computação da solução RK4 e das cotas superior e inferior para 900.000 ciclos. Assim, as cotas são 101, 130 e 200 vezes mais eficientes computacionalmente se comparado com o RK4 para os exemplos 1, 2 e 3, respectivamente.

Tabela 13: Tempo aproximado de computação (em segundos) das cotas e do RK4, aplicado ao modelo de McEvily, para 900.000 ciclos.

Exemplos	RK4 (seg.)	Cotas Superior / Inferior (seg.)	Eficiência Computacional (razão entre RK4/Cotas)
1	2,1131	0,0209	101
2	2,5715	0,0198	130
3	4,4098	0,0220	200

Fonte: Elaborado pelo autor.

Modelo de Priddle

Para o modelo de Priddle, as figuras 53 a 55, referentes aos exemplos 1, 2 e 3, mostram a variação do parâmetro a^* (a^* com valores de $3,4a_0$, $3,5a_0$ e $4,5a_0$) em relação à solução RK4. Nos exemplos 1, 2 e 3 o valor que mais se aproxima do RK4 é quando $a^* = 3,5a_0$, e esse valor será utilizado.

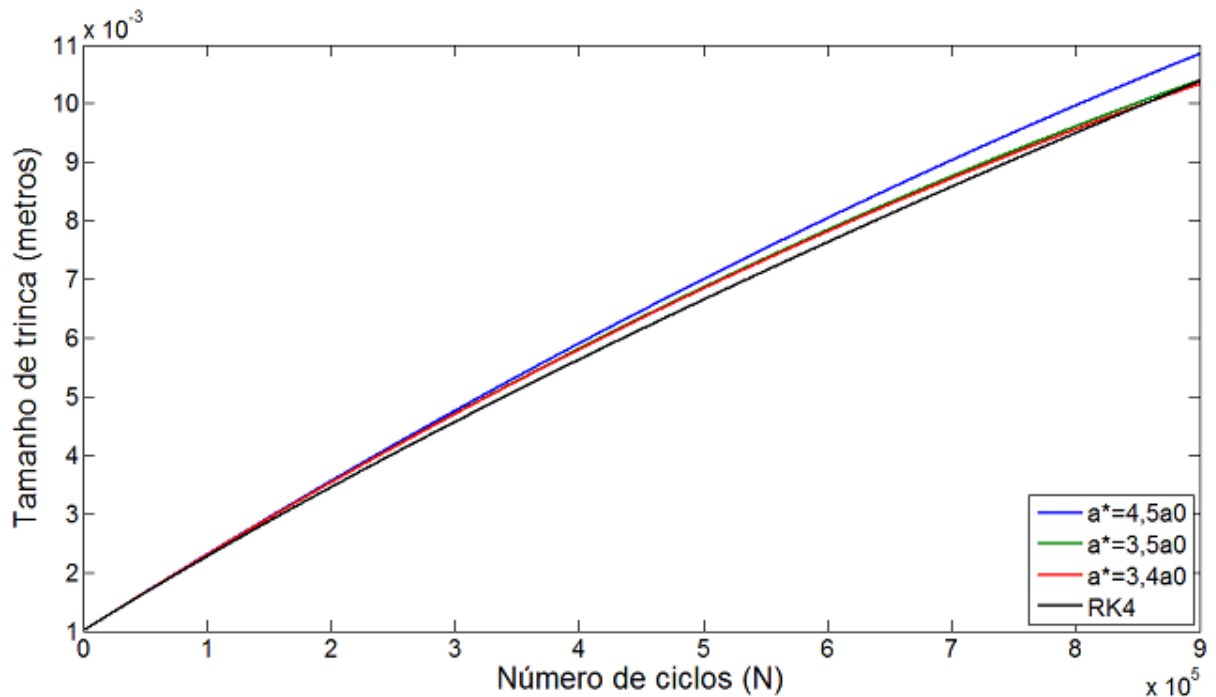


Figura 53: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $3,4a_0$, $3,5a_0$ e $4,5a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 1, para o modelo de Priddle.

Fonte: Elaborado pelo autor.

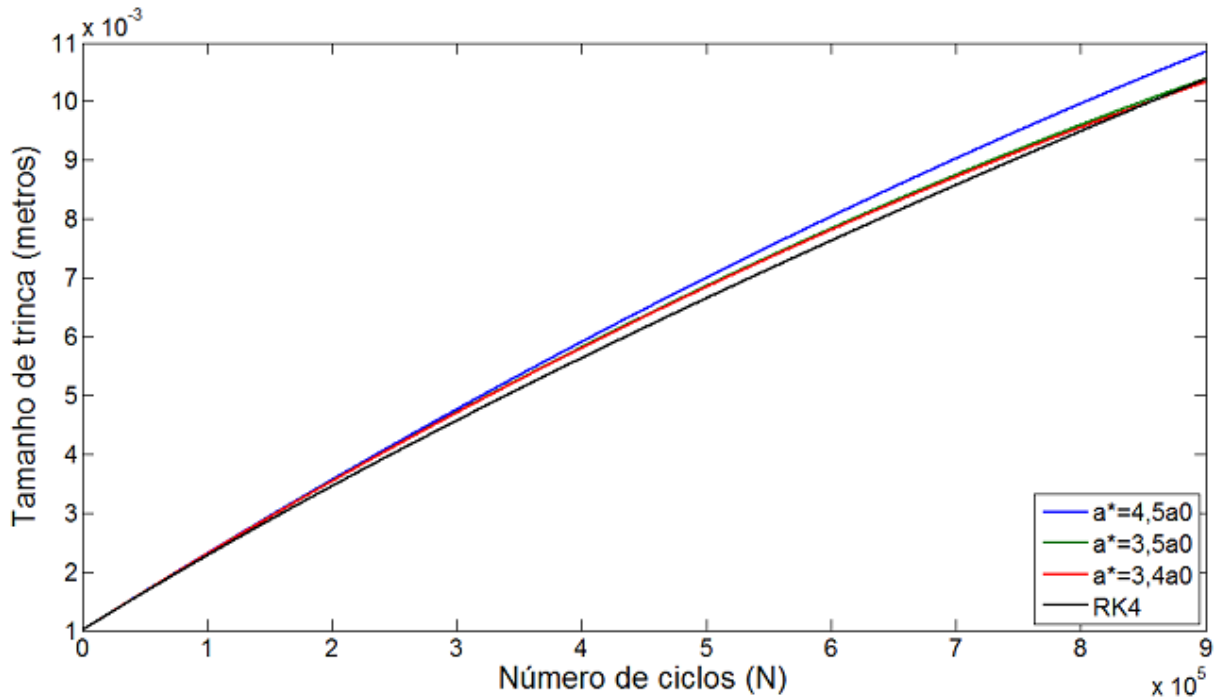


Figura 54: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $3,4a_0$, $3,5a_0$ e $4,5a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 2, para o modelo de Priddle.

Fonte: Elaborado pelo autor.

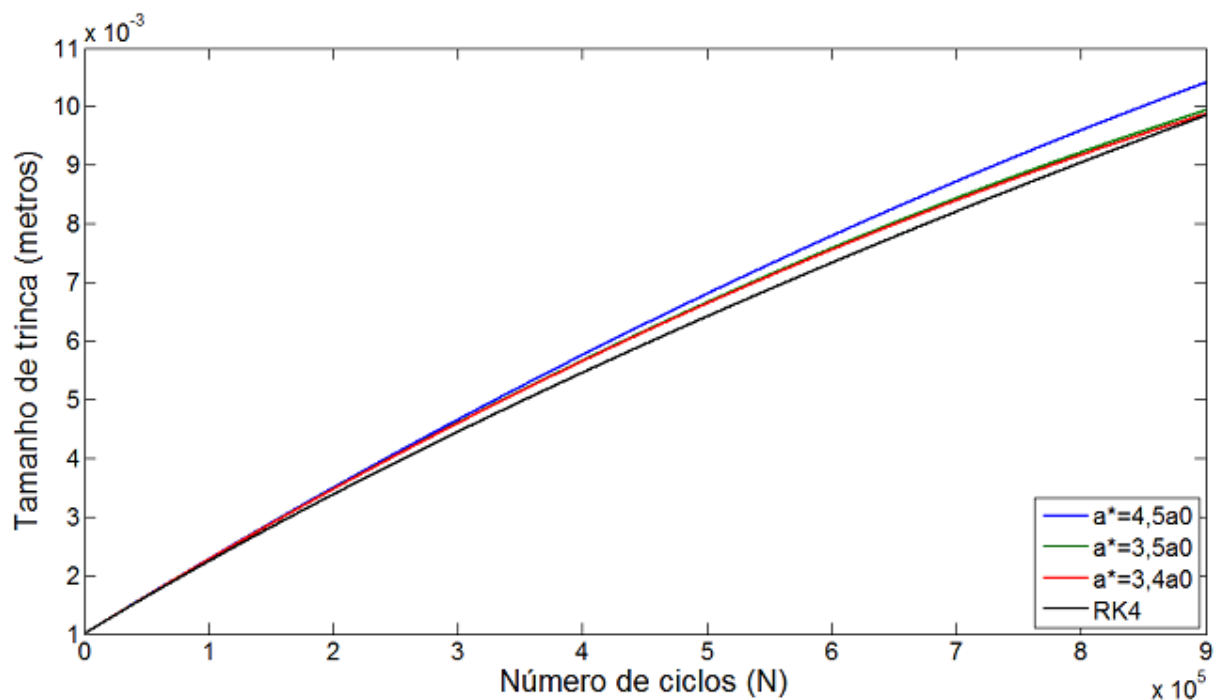


Figura 55: Variações da cota superior (sendo a^* com valores de $3,4a_0$, $3,5a_0$ e $4,5a_0$) em relação ao RK4, aplicado ao exemplo 3, para o modelo de Priddle.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a definição do parâmetro a^* ($a^* = 3,5a_0$), é verificado o comportamento das cotas para o modelo de Priddle, conforme mostram as figuras 56 a 58. As figuras apresentam em um gráfico $N \times a$, o crescimento da trinca através da solução definida pelas cotas superior

e inferior em relação à solução numérica aproximada calculada pelo método RK4, para os exemplos 1, 2 e 3 respectivamente. Para esse modelo é utilizado um carregamento arbitrário de $\Delta\sigma = 10$ MPa.

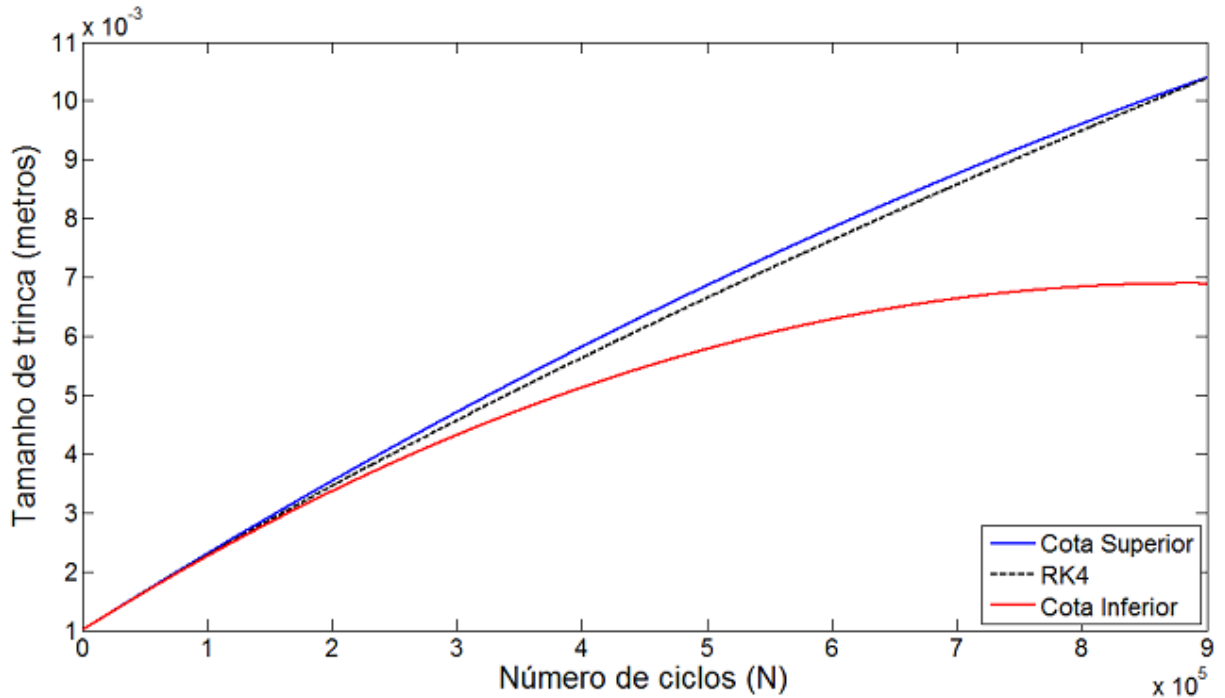


Figura 56: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 1 do modelo de Priddle.

Fonte: Elaborado pelo autor.

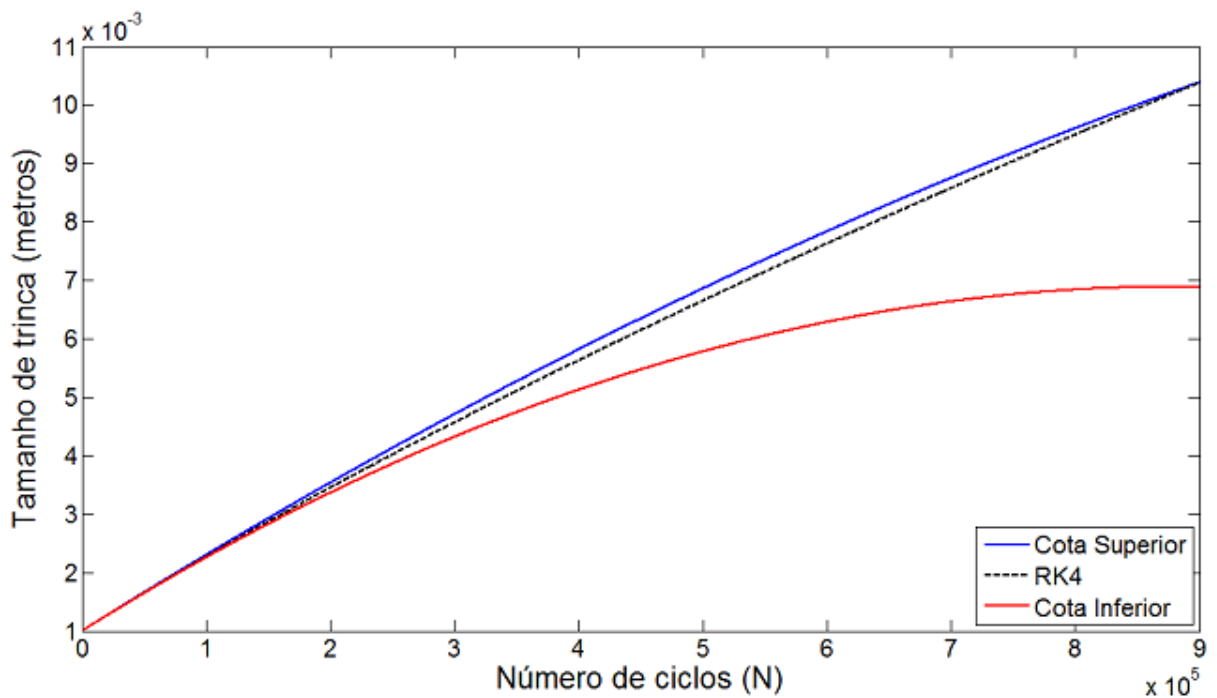


Figura 57: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 2 do modelo de Priddle.

Fonte: Elaborado pelo autor.

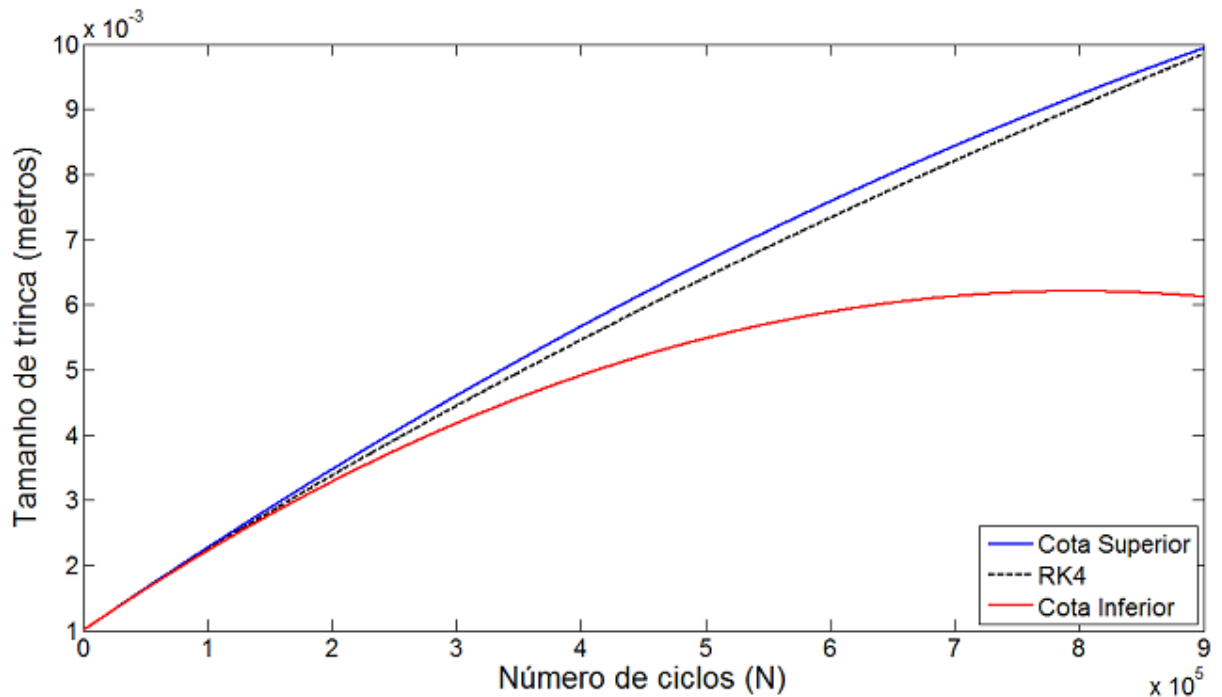


Figura 58: Funções cotas superior e inferior e a solução numérica aproximada, em relação ao método RK4, para o exemplo 3 do modelo de Priddle.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, através das figuras 56 a 58, observa-se que as cotas superior e inferior tem um bom desempenho, em termos de aproximação, para o modelo de Priddle em relação à solução numérica aproximada representada pelo método RK4.

Os coeficientes desse polinômio, para os exemplos 1, 2 e 3, da equação (4.1) podem ser verificados segundo a tabela 14.

Tabela 14: Coeficientes do polinômio da equação (4.1) para os exemplos 1, 2 e 3, aplicado ao modelo de Priddle.

Exemplos	γ	α	β
1	-3,2096833913683e-15	-7,53254407897861e-15	1,33291959209692e-08
2	-3,21940212244808e-15	-7,53440296212573e-15	1,33291959070255e-08
3	-3,47879574153963e-15	-8,18581159092954e-15	1,30576279773163e-08

Fonte: Elaborado pelo autor.

As figuras 59 a 61 apresentam, para os exemplos 1, 2 e 3, em um gráfico $N \times$ desvio relativo, os percentuais dos desvios relativos das cotas superior e inferior em relação à solução RK4.

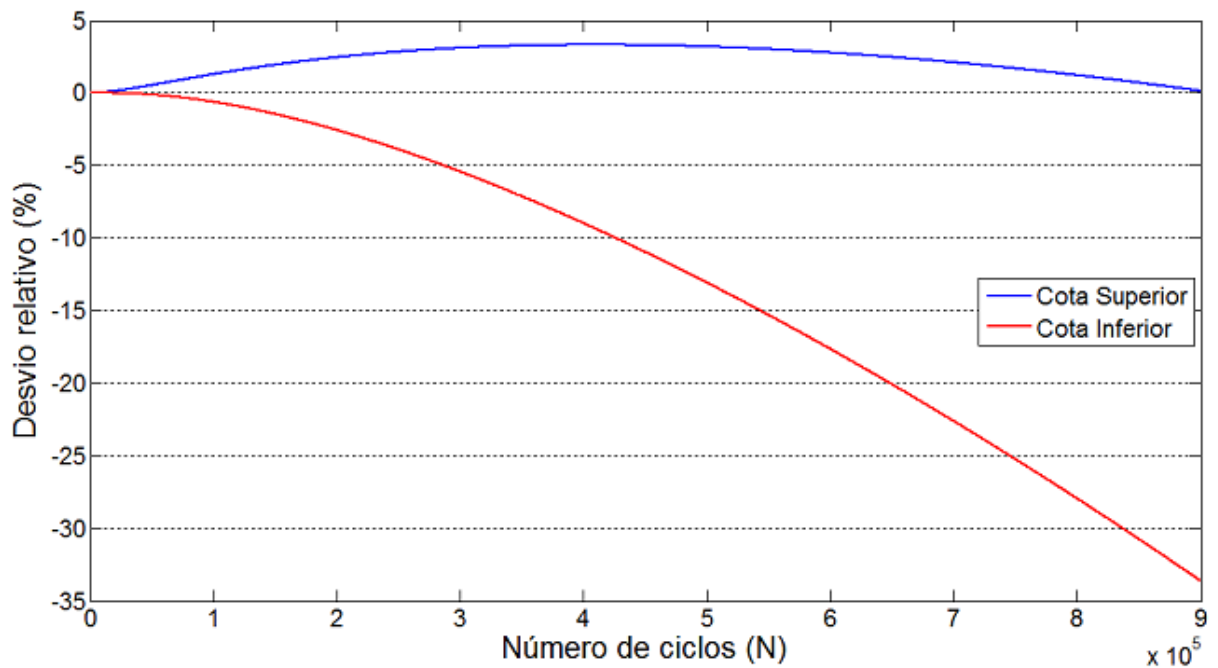


Figura 59: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 1 para o modelo de Priddle.
Fonte: Elaborado pelo autor.

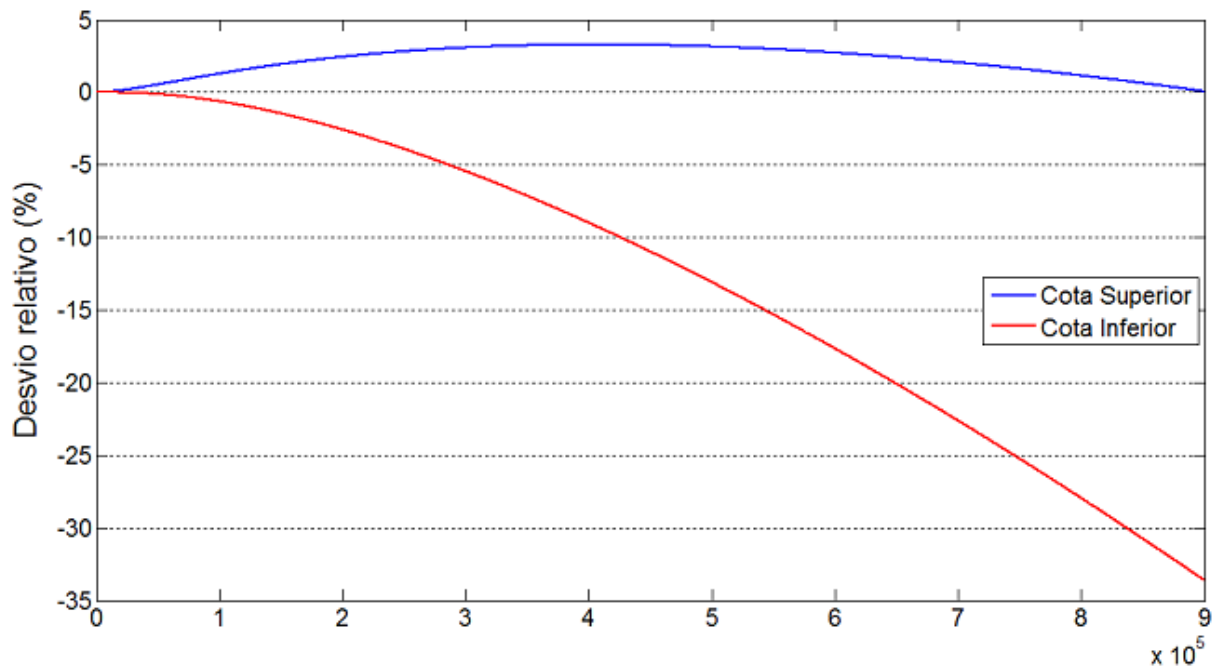


Figura 60: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 2 para o modelo de Priddle.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas figuras 59 e 60 os valores máximos dos desvios relativos para a cota superior são aproximadamente 3,31% e 3,29%, e para a cota inferior o valor mínimo corresponde a aproximadamente -33,59% e -33,61%.

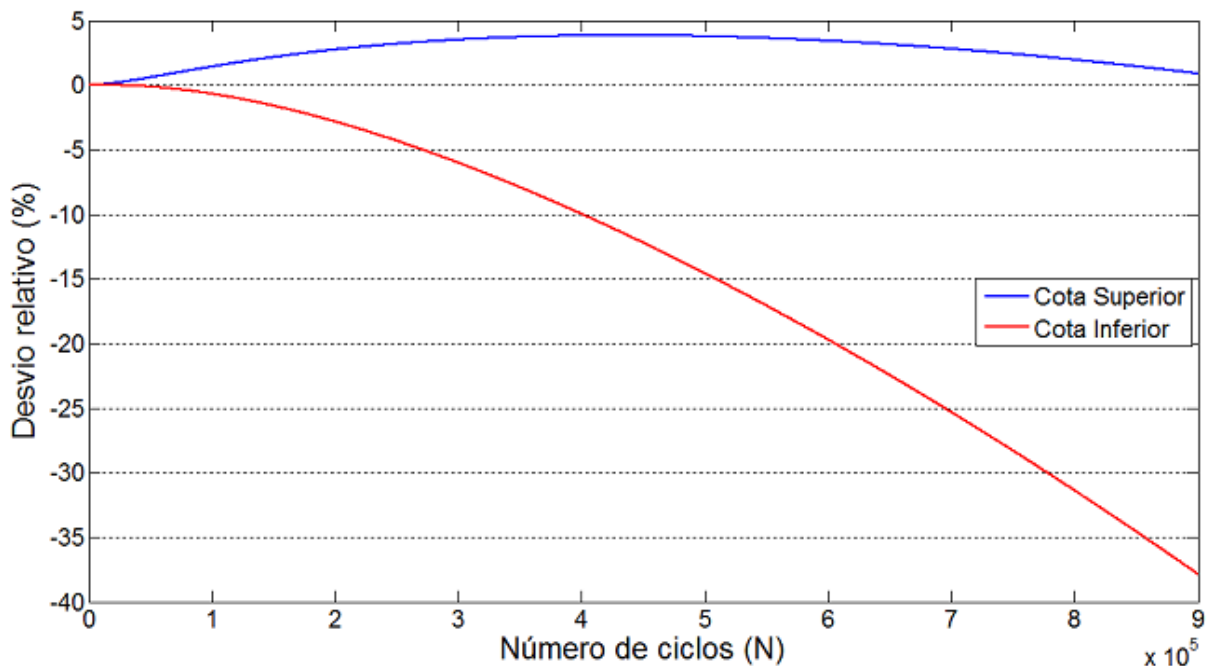


Figura 61: Desvio relativo para as cotas superior e inferior do exemplo 3 para o modelo de Priddle.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Na figura 61 verifica-se que o valor máximo do desvio relativo para a cota superior corresponde a aproximadamente 3,84% e para a cota inferior o valor mínimo corresponde a aproximadamente -37,84%.

Assim, verifica-se por meio das figuras 59 a 61, que para todos os exemplos a cota inferior teve um desvio relativo maior que a cota superior. Em linhas gerais, conclui-se que a cota inferior possui uma menor precisão em termos de aproximação da solução RK4, se comparado aos modelos anteriores. O maior desvio relativo observado é de -37,84% quando $N = 900.000$ ciclos para o exemplo 3. Esse valor corresponde a um tamanho de trinca calculado pela solução RK4 de 9,85 mm e calculado pela cota inferior de 6,12 mm.

A tabela 15 mostra o tempo aproximado de computação da solução RK4 e das cotas superior e inferior para 900.000 ciclos. Assim, as cotas são 80, 99 e 196 vezes mais eficientes computacionalmente se comparado com o RK4 para os exemplos 1, 2 e 3, respectivamente.

Tabela 15: Tempo aproximado de computação (em segundos) das cotas e do RK4, aplicado ao modelo de Priddle, para 900.000 ciclos.

Exemplos	RK4 (seg.)	Cotas Superior / Inferior (seg.)	Eficiência Computacional (razão entre RK4/Cotas)
1	1,6372	0,0204	80
2	2,1579	0,0219	99
3	3,8665	0,0197	196

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.4 AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

A nova metodologia apresentou funções definidas por cotas, superior e inferior, para delimitar o comportamento das soluções dos modelos de propagação de trinca de Paris-Erdogan, Forman, Walker, McEvily e Priddle. Nota-se que essas cotas dependem somente da avaliação da função de correção do fator intensidade de tensão e da sua derivada para dois pontos, a_0 e a^* . Sendo que o valor de a_0 é conhecido, e o valor de a^* está relacionado com o resto de Lagrange para a expansão de Taylor de 2ª ordem. Assim, a obtenção dos coeficientes das cotas ou dos coeficientes da equação (4.1) para cada modelo, depende somente da avaliação de $f(a_0)$, $f'(a_0)$, $f(a^*)$ e $f'(a^*)$.

Nesse trabalho, para a obtenção dos resultados dos três exemplos numéricos, foram arbitrados, em todos os modelos, os seguintes dados de entrada: o número de ciclos, N , o tamanho da trinca inicia, a_0 , e a largura da placa, b . Esses dados poderiam ser alterados obtendo-se, assim, novos resultados. Com relação aos parâmetros individuais, utilizados em cada modelo, tabela 5, bem como, o carregamento aplicado, $\Delta\sigma$, em cada modelo, percebeu-se que os resultados finais obtidos são sensíveis a esses valores de entrada, ou seja, alterando esses parâmetros ou o carregamento aplicado, alteram-se os resultados obtidos.

Assim, analisando os resultados obtidos dos três exemplos numéricos, de cada modelo, conclui-se que, em linhas gerais, através dos gráficos $N \times a$, todas as cotas têm um bom comportamento em relação à solução definida pelo método RK4. Ou seja, para todos os modelos as cotas são funcionais, fornecendo resultados aproximados da solução numérica

aproximada, RK4. Dessa forma, pode-se afirmar que as cotas superior e inferior representam de forma acurada a propagação da trinca.

Em relação aos desvios relativos, somente para o modelo de Priddle teve-se desvios relativos maiores em comparação com os outros modelos, na ordem de 30 a 40%, referente à cota inferior. No entanto, para todos os outros modelos os valores dos desvios relativos de ambas as cotas foram baixos, todos inferiores a 10%.

Por fim, observa-se que para todos os modelos, quanto mais complexa a função de correção do fator intensidade de tensão, maior é a eficiência, em termos do tempo de computação, utilizando as cotas para a obtenção dos resultados.

A tabela 16 apresenta um resumo dos resultados obtidos para todos os modelos, mostrando os desvios relativos, máximos e mínimos da cota superior e inferior, e o tempo de computação para os três exemplos avaliados.

Tabela 16: Resumo dos resultados obtidos para todos os modelos.

Modelo	Exemplo	Desvio Relativo (Máximo/Mínimo)		Eficiência Computacional (razão entre RK4/Cotas)
		Cota Superior (%)	Cota Inferior (%)	
Paris-Erdogan	1	2,54	-2,27	119
	2	2,54	-2,27	156
	3	2,59	-5,92*	239
Forman	1	2,39	-2,26	155
	2	2,39	-2,26	190
	3	2,42	-5,73*	286
Walker	1	2,69	-4,62	55
	2	2,69	-4,62	83
	3	2,71	-8,02*	175
McEvily	1	0,66	-1,82*	101
	2	0,66	-1,82*	130
	3	0,95	-1,79	200
Priddle	1	3,31	-33,59	80
	2	3,29	-33,61	99
	3	3,84	-37,84*	196

*Maior desvio relativo

Fonte: Elaborado pelo autor.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se uma nova metodologia para estabelecer, de forma acurada e eficiente, cotas que delimitam o comportamento das soluções de modelos de propagação de trinca, com amplitude de tensão constante. Para tal, nos exemplos que foram apresentados, foi necessária a elaboração de um conjunto de hipóteses para cada modelo, e a utilização da expansão de Taylor de 2ª ordem com resto de Lagrange.

Como resultado, foi apresentado o desenvolvimento da metodologia aplicada aos modelos de Paris-Erdogan, Forman, Walker, McEvily e Priddle. E as cotas de cada modelo foram avaliadas através de três exemplos numéricos. Assim, foram analisados os comportamentos das cotas superior e inferior em relação à solução numérica aproximada, definida pelo método Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4), através das seguintes relações: gráficos representando o número de ciclos (N) versus tamanho de trinca (a), os desvios relativos das cotas superior e inferior e o tempo de computação.

De forma geral, o comportamento das cotas em relação ao RK4 foi verificado nos gráficos (N) por (a) e através dos desvios relativos, e foi observado que para todos os modelos a metodologia é válida como forma de aproximação do comportamento da evolução da trinca. Para os modelos de Paris-Erdogan, Forman, Walker e McEvily as cotas superior e inferior obtiveram baixos valores de desvio relativo em relação ao RK4, apresentando, nesses casos, precisão. E para modelo de Priddle, somente a cota inferior teve um maior desvio em relação ao RK4. No entanto, pode-se afirmar que, para todos os modelos, as cotas superior e inferior representam de forma acurada a propagação da trinca.

Com relação ao tempo de computação, para todos os modelos, foi observado que com a utilização das cotas consegue-se um monitoramento dinâmico dos resultados. Ainda, quanto maior a complexidade da função de correção do fator intensidade de tensão, maior é a eficiência, em termos do tempo de computação, utilizando as cotas para a obtenção dos resultados.

Os resultados apresentados nesse trabalho foram obtidos através da expansão de Taylor de 2ª ordem, evitando, assim, a necessidade de estabelecer muitas restrições à função de correção do fator intensidade de tensão. A partir disso, as cotas apresentadas foram definidas pela avaliação da função de correção do fator intensidade de tensão e da sua derivada somente para dois pontos, a_0 e a^* . Poderia se obter cotas mais precisas em relação ao

RK4 considerando a expansão de Taylor de 3ª ordem, porém, nesse caso, seria necessário estabelecer mais hipóteses para a função de correção do fator intensidade de tensão.

5.1 TRABALHOS FUTUROS

Para dar continuidade a esse estudo, sugerem-se como trabalhos futuros algumas variações do que foi apresentado nesse trabalho. Assim, são propostas algumas sugestões a seguir:

O valor do parâmetro a^* , referente à cota superior, foi obtido em cada modelo por inspeção, ou seja, no intervalo analisado de números de ciclos, N , foi obtido o menor valor de a^* (foi utilizado um desvio máximo de 5% da cota superior em relação ao RK4), o qual não violasse a solução numérica aproximada definida pelo RK4. Assim, sugere-se que esse parâmetro seja obtido por meio de um processo de otimização. Através do intervalo analisado de números de ciclos, N , defina-se o menor valor de a^* .

Os resultados de todos os modelos foram apresentados para variações de número de ciclos, N , entre 0 a 900.000 ciclos. Não foi considerado nenhum parâmetro para definir o número de ciclo final. Com isso, observa-se que, para alguns modelos, em específico o modelo de McEvily, a trinca teve uma taxa de propagação inferior aos outros modelos. Entretanto, como forma de melhorar esses resultados percebeu-se que o número de ciclo final poderia ser obtido através do tamanho de trinca final, ou seja, o tamanho de trinca o qual o componente em estudo rompe ou o tamanho de trinca em que $K = K_c$. Outra forma de avaliar o número de ciclo final é através do gráfico $\log(da/dN) \times \log(\Delta K)$ para cada modelo.

Outro parâmetro que foi analisado e obtido arbitrariamente em cada modelo foi o valor do carregamento imposto, $\Delta\sigma$. Observou-se que variações nesse valor alteram a taxa de crescimento da trinca. Também como limitação dos modelos utilizados, para determinados valores específicos de carregamento, a taxa de crescimento de trinca utilizando o RK4 não pode ser obtida. Essa limitação foi observada em alguns modelos. Assim, sugere-se fazer variações desse carregamento verificando a sua validade e limitação.

Sugere-se estender a metodologia apresentada a aplicações utilizando carregamentos com amplitude de tensão variável. Por meio de métodos como o *Rainflow Cycle Counting* ou o *Root Mean Square* (RMS) pode-se obter um carregamento com amplitude de tensão

constante equivalente, $\Delta\sigma_{eq}$, ou um fator intensidade de tensão equivalente, ΔK_{eq} . Assim, através desses métodos a metodologia poderia ser aplicada.

Por fim, aplicar a metodologia a outros exemplos numéricos, mudando a função de correção do fator intensidade de tensão, $f(\cdot)$. Aplicar essa metodologia a outros materiais, alterando, assim, parâmetros como a tenacidade a fratura (K_c) e o fator intensidade de tensão inicial (ΔK_{th}), bem como, fazer variações dos parâmetros C e m , nos modelos que os utilizam, verificando as suas validades e limitações.

BIBLIOGRAFIA

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **E1823**: standard terminology relating to fatigue and fracture. West Conshohocken, PA, 2000.

ANDERSON, T. L. **Fracture mechanics: fundamentals and applications**. 2 ed. CRC Press, 1994.

ATKINSON, K.; HAN, WEIMIN. **Elementary numerical analysis**. 3 ed. Wiley, 2004.

ASCHER, U. M.; PETZOLD, L. R. **Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations**. Philadelphia: SIAM, 1998.

BANNANTINE, J. A. et al. **Fundamentals of metal fatigue analysis**. 1 ed. New Jersey: Prentice Hall, 1989.

BARROSO L. C. et al. **Cálculo numérico com aplicações**. 2 ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1987.

BARSON, J. M. Fatigue-crack propagation in steels of various yield strengths. **Journal of Engineering for Industry**. v. 93, n. 4, p. 1190-1196. 1971.

BARSON, J. M. Fatigue crack growth under variable amplitude loading in various bridge steels. Fatigue Crack Growth under Spectrum Loads. **American Society for Testing and Materials**. v. 595, p. 217-235. 1976.

BARSON J. M.; ROLFE S. T. **Fracture and fatigue control in structures: Applications of fracture mechanics**. 3 ed. Philadelphia: ASTM, 1999.

BEDEN, S. M.; ABDULLAH, S.; ARIFFIN, A. K. Review of fatigue crack propagation models for metallic components. **European Journal of Scientific Research**. v. 28, n. 3, p. 364-397. 2009.

BROEK, D. **Elementary engineering fracture mechanics**. 1 ed. The Hague: Martinus Nijhoff Publishers, 1982.

CAVALLINI, M.; IACOVIELLO, F. Fatigue models for Al alloys. **International Journal of Fatigue**. v. 13, p. 442-446. 1991.

CASTRO, J. T. P.; MEGGIOLARO, M .A. **Fadiga – Técnicas e práticas de dimensionamento estrutural sob cargas reais de serviço**. 1 ed. Create Space, 2009.

CHABOCHE, J. L. Anisotropic creep damage in the framework of continuum damage mechanics. **Nuclear Engineering and Design**. v. 79, p. 309-319. 1984.

COLLIPRIEST, J. E. An experimentalist's view of the surface flaw problem. **American Society for Testing and Materials**. p. 43-62. 1972.

CUI, W. A state-of-the-art review on fatigue life prediction methods for metal structures. **Journal of Marine Science and Technology**. v. 7, p. 43-56. 2002.

ELBER, W. Fatigue crack closure under cyclic tension. **Engineering Fracture Mechanics**. v. 2, p. 37-45. 1970.

ERDOGAN, F. **Crack propagation theories**. Lehigh University Bethlehem Pa: National Aeronautics and Space Administration, 1967.

EWING, J. A.; HUMPHREY, J. C. Fracture of metals under repeated alternations of stress. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**. v, 200, p. 241–253. 1903.

FORMAN R. G.; KEARNEY V. E.; ENGLE R. M. Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. **Journal of Fluids Engineering**. v. 89, p. 459-463. 1967.

FORMAN, R. G. Study of fatigue crack initiation from flaws using fracture mechanics theory. **Engineering Fracture Mechanics**. v. 4, p. 333-345. 1972.

FRANCO, N. B. **Cálculo numérico**. 1 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 3 ed. São Paulo: Atlas, 1991.

GRIFFITH, A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. **Philosophical Transactions of the Royal Society A**. v. 221, p. 163-198. 1920.

HEAD, A. K. The growth of fatigue cracks. **The Philosophical Magazine**. v. 44, p. 925-938. 1953.

HOEPPNER, D. W.; KRUPP W. E. Prediction of component life by application of fatigue crack growth knowledge. **Engineering Fracture Mechanics**. v. 6, p. 47-70. 1974.

HUDSON, C. M.; SCARDINA, J. T. Effect of stress ratio on fatigue-crack growth in 7075-T6 aluminum-alloy sheet. **Engineering Fracture Mechanics**. v. 1, p. 429-446. 1969.

IRWIN, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate. **Journal of Applied Mechanics**. v. 24, p. 361-364. 1957.

JANSON, J.; HULT, J. Fracture mechanics and damage mechanics - A combined approach. **Journal de Mecanique Appliquee**. v. 1, p. 69-84. 1977.

JÚNIOR, C. R. A. S.; SANTOS, R. V. Bounds for the propagation model of crack Forman. **International Journal of Sciences: Basic and Applied Research**. v. 22, n. 2, p. 219-231. 2015.

KRAJCINOVIC, D.; FONSEKA, G. U. The continuous damage theory of brittle materials. **Journal of Applied Mechanics**. v. 48, p. 809-815. 1981.

KINCAID, D. R.; CHENEY, E. W. Numerical analysis: mathematics of scientific computing. Brooks Cole, 1991.

KUMAR, A; MURTHY, R. C; IYER, N. R. A study of the stress ratio effects on fatigue crack growth using LOWESS regression. **International Conference on Advances in Civil, Structural and Mechanical Engineering – CSM**. p. 47-51. 2013.

KUMAR, A; MURTHY, R. C; IYER, N. R. Enhanced model for describing total fatigue rate curve considering stress ratio effects. **Advances in Structural Engineering**. v. 17, p. 1011-1028. 2014.

LAMPMAN, S. R. **ASM Handbook: Volume 19, Fatigue and Fracture**. ASM International, 1996.

LIMA, E. L. **Análise real volume 1. Funções de uma variável**. 10 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

LEMAITRE, J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. **Journal of Engineering Materials and Technology**. v. 107, p. 83-89. 1985.

MACHNIEWICZ, T. Fatigue crack growth prediction models for metallic materials. Part I: Overview of prediction concepts. **Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures**. v. 36, p. 293-307. 2012.

MATSUSHI, M; ENDO, T. Fatigue of metals subjected to varying stress – Fatigue lives under random loading. **The Japan Society of Mechanical Engineers**. p. 37-40. 1968.

MEHRZADI, M; TAHERI, F. The influence of negative and positive stress ratios on crack growth rate in AM60B magnesium alloy. **Materials Science and Engineering A**. v, 545, p. 68-77. 2012.

McEVILY A. J.; GROEGER J. On the threshold for fatigue crack growth. In: **ICF4, Waterloo (Canada)**. 1977.

MOTT, N. F. Fracture of metals: theoretical considerations. **Engineering**. v. 165, p. 16-18, 1948.

NELSON, D. V. Review of fatigue-crack-growth prediction methods. **Experimental Mechanics**. v. 17, p. 41-49. 1977.

NOROOZI, AH; GLINKA, G.; LAMBERT, S. A two parameter driving force for fatigue crack growth analysis. **International Journal of Fatigue**. v. 27, p. 1277-1296, 2005.

NORTON, R. L. **Projeto de máquinas: uma abordagem integrada**. 4 ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

OROWAN, E. Fracture and strength of solids. **Report on Progress in Physics**. v. 12, p. 185-232, 1948.

PARIS, P. C.; GOMEZ, M. P.; ANDERSON, W. E. A rational analytic theory of fatigue. **The Trend in Engineering**. v. 13, p. 9-14. 1961.

PARIS, P.; ERDOGAN, F. A critical analysis of crack propagation laws. **Journal of Fluids Engineering**. v. 85, p. 528-533. 1963.

PRIDDLE, E. K. High cycle fatigue crack propagation under random and constant amplitude loadings. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, v. 4, n. 2, p. 89-117, 1976.

SCHIJVE, J. **Fatigue of structures and materials**. 2 ed. Springer, 2009.

SHORT, J. S.; HOEPPNER, D. W. A global/local theory of fatigue crack propagation. **Engineering Fracture Mechanics**. v. 33, n. 2, p. 175-184. 1989.

SNEDDON, I. N. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**. v. 187, n. 1009, p. 229-260. 1946.

TADA, H.; PARIS, P. C.; IRWIN, G. R. **The stress analysis of crack handbook**. New York: ASME Press, 2000.

TAVERNELLI, J. F.; COFFIN, L. F. Experimental support for generalized equation predicting low cycle fatigue. **Journal of Fluids Engineering**. v. 84, p. 533-537. 1962.

TOOR, P. M. A review of some damage tolerance design approaches for aircraft structures. **Engineering Fracture Mechanics**. v. 5, p. 837-880. 1973.

WALKER, K. The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7076-T6 aluminum. Effect of environment and complex load history on fatigue life. **American Society for Testing and Materials**. p. 1–14. 1970.

WESTERGAARD, H. M. Bearing pressures and cracks. **Journal of Applied Mechanics**. v. 6, p. 49-53. 1939.

WILLENBORG, J.; ENGLE, R. M.; WOOD, H. A. A crack growth retardation model using an effective stress concept. **Air Force Flight Dynamic Laboratory**. Dayton. 1971.

WHEELER, O. E. Spectrum loading and crack growth. **Journal of Fluids Engineering**. v. 94, p. 181-186. 1972.

YAZID, A.; ABDELKADER, N.; ABDELMADJID, H. A state-of-the-art review of the X-FEM for computational fracture mechanics. **Applied Mathematical Modelling**. v. 33, p. 4269-4282. 2009.

YUEN A. et al. Correlations between fracture surface appearance and fracture mechanics parameters for stage II fatigue crack propagation in TI-6Al-4V. **Metallurgical and Materials Transactions B**. v. 5, p. 1833-1842. 1974.

APÊNDICE A

COTAS SUPERIOR E INFERIOR PARA O MODELO DE FORMAN

O PVI do modelo de Forman é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a \in C^1 \left[[N_o, N_1); \mathbb{R}^+ \right] \text{ tal que,} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = \frac{C_F \left(\sqrt{\Pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma \right)^{m_F}}{(1-R) K_c - \Delta K}, \forall N \in (N_o, N_1); \\ a(N_o) = a_o. \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

Prova:

Pela expansão de Taylor de 2ª ordem, com resto de Lagrange:

$$a(N) = a_o(N_o) + \left(\frac{da}{dN} (N_o) \right) (N - N_o) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 a}{dN^2} (\eta) \right) (N - N_o)^2, \text{ com } \eta \in [N_o, N] \quad (\text{A.2})$$

Hipóteses:

$$\text{H1) } \left\{ \begin{array}{l} f \in C^1(\mathbb{R}); \\ 0 < f(a_o) \leq f(x) \leq f(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_o, a_1]; \\ f'(a_o) \leq f'(x) \leq f'(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_o, a_1]; \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

H2) $m \geq 1$.

Por meio da hipótese H1 as seguintes desigualdades podem ser escritas:

$$a(s) \leq a(t), s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{A.4})$$

$$(a(s))^m \leq (a(t))^m, s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{A.5})$$

também,

$$(f(s))^m \leq (f(t))^m, s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{A.6})$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}} f \right)^m (s) \leq \left(a^{\frac{1}{2}} f \right)^m (t), s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{A.7})$$

com isso, conclui-se que:

$$(\Delta K)^m (a(s)) \leq (\Delta K)^m (a(t)) \quad (\text{A.8})$$

sendo $C > 0$ obtêm-se que:

$$\frac{da}{dN} (s) \leq \frac{da}{dN} (t), s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{A.9})$$

A segunda derivada da equação (A.2) é:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 a}{dN^2}(a(N)) &= \frac{d}{dN} \left(\frac{da}{dN}(a(N)) \right) = \frac{d}{da} \left(\frac{da}{dN}(a(N)) \right) \frac{da}{dN}(a(N)) \\
&= \left[\frac{C\Delta K^m}{(1-R)Kc - \Delta K} \right]^2 \left[m + \frac{1}{(1-R)Kc - 1} \frac{\Delta K}{\Delta K} \right] \left[\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right]
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Substituindo a equação (A.10) em (A.2):

$$\begin{aligned}
a(N) - a_o(N_o) &= \left[\frac{C\Delta K (a_o)^m}{(1-R)Kc - \Delta K (a_o)} \right] (N - N_o) \\
&+ \frac{1}{2} \left[\frac{C\Delta K (a(\eta))^m}{(1-R)Kc - \Delta K (a(\eta))} \right]^2 \left[m + \frac{1}{(1-R)Kc - 1} \frac{\Delta K (a(\eta))}{\Delta K (a(\eta))} \right] \\
&x \left[\frac{1}{2(a(\eta))} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a(\eta)) \right] (N - N_o)^2, \text{ com } \eta \in [N_o, N].
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Assim, as cotas superior e inferior são obtidas por meio da equação (A.11), considerando, também, a hipótese H1.

APÊNDICE B

COTAS SUPERIOR E INFERIOR PARA O MODELO DE WALKER

O PVI do modelo de Walker é:

$$\begin{cases} \text{Determinar } a \in C^1 \left[[N_o, N_1]; \mathbb{R}^+ \right] \text{ tal que,} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = C_w \left[(1-R)^{\gamma_w-1} \left(\sqrt{\Pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma \right) \right]^{m_w}, \forall N \in (N_o, N_1); \\ a(N_o) = a_o. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Prova:

Pela expansão de Taylor de 2ª ordem, com resto de Lagrange:

$$a(N) = a_o(N_o) + \left(\frac{da}{dN}(N_o) \right) (N - N_o) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2a}{dN^2}(\eta) \right) (N - N_o)^2, \text{ com } \eta \in [N_o, N] \quad (\text{B.2})$$

Hipóteses:

$$\text{H1) } \begin{cases} f \in C^1(\mathbb{R}); \\ 0 < f(a_o) \leq f(x) \leq f(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_o, a_1]; \\ f'(a_o) \leq f'(x) \leq f'(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_o, a_1]; \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

H2) $m \geq 1$.

Por meio da hipótese H1 as seguintes desigualdades podem ser escritas:

$$a(s) \leq a(t), s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{B.4})$$

$$(a(s))^m \leq (a(t))^m, s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{B.5})$$

também,

$$(f(s))^m \leq (f(t))^m, s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{B.6})$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}} f \right)^m (s) \leq \left(a^{\frac{1}{2}} f \right)^m (t), s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{B.7})$$

com isso, conclui-se que:

$$(\Delta K)^m (a(s)) \leq (\Delta K)^m (a(t)) \quad (\text{B.8})$$

sendo $C > 0$ obtêm-se que:

$$\frac{da}{dN}(s) \leq \frac{da}{dN}(t), s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{B.9})$$

A segunda derivada da equação (B.2) é:

$$\begin{aligned} \frac{d^2a}{dN^2}(a(N)) &= \frac{d}{dN} \left(\frac{da}{dN}(a(N)) \right) = \frac{d}{da} \left(\frac{da}{dN}(a(N)) \right) \frac{da}{dN}(a(N)) \\ &= mC^2 \left[(1-R)^{\gamma-1} \Delta K \right]^{2m} \left[\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Substituindo a equação (B.10) em (B.2):

$$\begin{aligned}
 a(N) - a_o(N_o) &= C \left[(1-R)^{\gamma-1} \Delta K(a_o) \right]^m (N - N_o) \\
 &+ \frac{1}{2} m C^2 \left[(1-R)^{\gamma-1} \Delta K(a(\eta)) \right]^{2m} \left[\frac{1}{2(a(\eta))} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a(\eta)) \right] (N - N_o)^2, \quad (\text{B.11}) \\
 &\text{com } \eta \in [N_o, N].
 \end{aligned}$$

Assim, as cotas superior e inferior são obtidas por meio da equação (B.11), considerando, também, a hipótese H1.

APÊNDICE C

COTAS SUPERIOR E INFERIOR PARA O MODELO DE MCEVILY

O PVI do modelo de McEvily é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a \in C^1 [N_o, N_1]; \mathbb{R}^+ \text{ tal que,} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = C_M \left[\left(\sqrt{\Pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma \right) - \Delta K_{th} \right]^2 \left[1 + \frac{\left(\sqrt{\Pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma \right)}{K_c - \frac{\left(\sqrt{\Pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma \right)}{(1-R)}} \right], \\ \forall N \in (N_o, N_1); \\ a(N_o) = a_o. \end{array} \right. \quad (\text{C.1})$$

Prova:

Pela expansão de Taylor de 2ª ordem, com resto de Lagrange:

$$a(N) = a_o(N_o) + \left(\frac{da}{dN}(N_o) \right) (N - N_o) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 a}{dN^2}(\eta) \right) (N - N_o)^2, \text{ com } \eta \in [N_o, N]$$

(C.2)

Hipóteses:

$$\text{H1)} \left\{ \begin{array}{l} f \in C^1(\mathbb{R}); \\ 0 < f(a_o) \leq f(x) \leq f(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_o, a_1]; \\ f'(a_o) \leq f'(x) \leq f'(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_o, a_1]. \end{array} \right. \quad (\text{C.3})$$

Por meio da hipótese H1 as seguintes desigualdades podem ser escritas:

$$a(s) \leq a(t), s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{C.4})$$

$$\left(a(s) \right)^m \leq \left(a(t) \right)^m, s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{C.5})$$

também,

$$\left(f(s) \right)^m \leq \left(f(t) \right)^m, s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{C.6})$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}} f \right)^m (s) \leq \left(a^{\frac{1}{2}} f \right)^m (t), s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{C.7})$$

com isso, conclui-se que:

$$\left(\Delta K \right)^m (a(s)) \leq \left(\Delta K \right)^m (a(t)) \quad (\text{C.8})$$

sendo $C > 0$ obtêm-se que:

$$\frac{da}{dN}(s) \leq \frac{da}{dN}(t), s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{C.9})$$

A segunda derivada da equação (C.2) é:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 a}{dN^2}(a(N)) &= \frac{d}{dN} \left(\frac{da}{dN}(a(N)) \right) = \frac{d}{da} \left(\frac{da}{dN}(a(N)) \right) \frac{da}{dN}(a(N)) \\
&= C^2 \Delta K (\Delta K - \Delta K_{th})^3 \left[2 \left(1 + \frac{\Delta K}{Kc - \frac{\Delta K}{(1-R)}} \right) + \frac{Kc(\Delta K - \Delta K_{th})}{\left(Kc - \frac{\Delta K}{(1-R)} \right)^2} \right] \\
&\quad \times \left[1 + \frac{\Delta K}{Kc - \frac{\Delta K}{(1-R)}} \right] \left[\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right]
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Substituindo a equação (C.10) em (C.2):

$$\begin{aligned}
a(N) - a_o(N_o) &= C(\Delta K(a_o) - \Delta K_{th})^2 \left[1 + \frac{\Delta K(a_o)}{Kc - \frac{\Delta K(a_o)}{(1-R)}} \right] (N - N_o) \\
&+ \frac{1}{2} C^2 \Delta K(a(\eta)) (\Delta K(a(\eta)) - \Delta K_{th})^3 \\
&\quad \times \left[2 \left(1 + \frac{\Delta K(a(\eta))}{Kc - \frac{\Delta K(a(\eta))}{(1-R)}} \right) + \frac{Kc(\Delta K(a(\eta)) - \Delta K_{th})}{\left(Kc - \frac{\Delta K(a(\eta))}{(1-R)} \right)^2} \right] \\
&\quad \times \left[1 + \frac{\Delta K(a(\eta))}{Kc - \frac{\Delta K(a(\eta))}{(1-R)}} \right] \left[\frac{1}{2(a(\eta))} + \left(\frac{f'}{f} \right)(a(\eta)) \right] (N - N_o)^2,
\end{aligned} \tag{C.11}$$

com $\eta \in [N_o, N]$.

Assim, as cotas superior e inferior são obtidas por meio da equação (C.11), considerando, também, a hipótese H1.

APÊNDICE D

COTAS SUPERIOR E INFERIOR PARA O MODELO DE PRIDDLE

O PVI do modelo de Priddle é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a \in C^1 [[N_o, N_1]; \mathbb{R}^+] \text{ tal que,} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = C \left[\frac{(\sqrt{\Pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma) - \Delta K_{th}}{K_c - \frac{(\sqrt{\Pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma)}{(1-R)}} \right]^m, \forall N \in (N_o, N_1); \\ a(N_o) = a_o. \end{array} \right. \quad (\text{D.1})$$

Prova:

Pela expansão de Taylor de 2ª ordem, com resto de Lagrange:

$$a(N) = a_o(N_o) + \left(\frac{da}{dN} (N_o) \right) (N - N_o) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 a}{dN^2} (\eta) \right) (N - N_o)^2, \text{ com } \eta \in [N_o, N] \quad (\text{D.2})$$

Hipóteses:

$$\text{H1) } \left\{ \begin{array}{l} f \in C^1(\mathbb{R}); \\ 0 < f(a_o) \leq f(x) \leq f(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_o, a_1]; \\ f'(a_o) \leq f'(x) \leq f'(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_o, a_1]; \end{array} \right. \quad (\text{D.3})$$

H2) $m \geq 1$.

Por meio da hipótese H1 as seguintes desigualdades podem ser escritas:

$$a(s) \leq a(t), s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{D.4})$$

$$(a(s))^m \leq (a(t))^m, s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{D.5})$$

também,

$$(f(s))^m \leq (f(t))^m, s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{D.6})$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}} f \right)^m (s) \leq \left(a^{\frac{1}{2}} f \right)^m (t), s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{D.7})$$

com isso, conclui-se que:

$$(\Delta K)^m (a(s)) \leq (\Delta K)^m (a(t)) \quad (\text{D.8})$$

sendo $C > 0$ obtêm-se que:

$$\frac{da}{dN} (s) \leq \frac{da}{dN} (t), s \leq t \in [N_o, N] \quad (\text{D.9})$$

A segunda derivada da equação (D.2) é:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 a}{dN^2}(a(N)) &= \frac{d}{dN} \left(\frac{da}{dN}(a(N)) \right) = \frac{d}{da} \left(\frac{da}{dN}(a(N)) \right) \frac{da}{dN}(a(N)) \\
&= C^2 m \Delta K \left[\frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{Kc - \frac{\Delta K}{(1-R)}} \right]^{2m-1} \left[\frac{Kc - \frac{\Delta K_{th}}{(1-R)}}{\left(Kc - \frac{\Delta K}{(1-R)} \right)^2} \right] \left[\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right]
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Substituindo a equação (D.10) em (D.2):

$$\begin{aligned}
a(N) - a_o(N_o) &= C \left[\frac{\Delta K(a_o) - \Delta K_{th}}{Kc - \frac{\Delta K(a_o)}{(1-R)}} \right]^m (N - N_o) \\
&+ \frac{1}{2} C^2 m \Delta K (a(\eta)) \left[\frac{\Delta K(a(\eta)) - \Delta K_{th}}{Kc - \frac{\Delta K(a(\eta))}{(1-R)}} \right]^{2m-1} \left[\frac{Kc - \frac{\Delta K_{th}}{(1-R)}}{\left(Kc - \frac{\Delta K(a(\eta))}{(1-R)} \right)^2} \right] \\
&x \left[\frac{1}{2(a(\eta))} + \left(\frac{f'}{f} \right)(a(\eta)) \right] (N - N_o)^2, \text{ com } \eta \in [N_o, N].
\end{aligned} \tag{D.11}$$

Assim, as cotas superior e inferior são obtidas por meio da equação (D.11), considerando, também, a hipótese H1.