

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MECÂNICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MAYKON YUITI OGATA

ANÁLISE E SIMULAÇÃO DE MECANISMOS FLEXÍVEIS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO
(TCC 2 - N° de Inscrição - 43)

CURITIBA

2017

MAYKON YUITI OGATA

ANÁLISE E SIMULAÇÃO DE MECANISMOS FLEXÍVEIS

Monografia do Projeto de Pesquisa apresentada à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso - TCC2 do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para aprovação na disciplina.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Paula Carvalho da Silva Ferreira

CURITIBA

2017

TERMO DE APROVAÇÃO

Por meio deste termo, aprovamos a monografia do Projeto de Pesquisa "ANÁLISE E SIMULAÇÃO DE MECANISMOS FLEXÍVEIS", realizado pelo aluno(s) Maykon Y. Ogata, como requisito para aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Profa. Dra. Ana Paula C. S. Ferreira

DAMEC, UTFPR

Orientadora

Prof. Dr. Claudio Tavares da Silva

DAMEC, UTFPR

Avaliador

Prof. Dr. Marcio H. A. Gomes

DAMEC, UTFPR

Avaliador

Curitiba, 04 de julho de 2017.

RESUMO

OGATA, Maykon Yuiti. Análise e simulação de mecanismos flexíveis. 2017. 151 f. Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento Acadêmico de Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017.

O presente trabalho tem por objetivo realizar a análise cinemática de mecanismos flexíveis através do método dos elementos finitos. Devido à presença de grandes deflexões em mecanismos flexíveis, a não linearidade geométrica se torna presente, portanto as aplicações diretas dos métodos convencionais de análise cinemática se tornam inapropriadas. Para a análise destes mecanismos flexíveis é então empregado o conceito do Modelo de Corpo-Pseudo-Rígido (*pseudo-rigid body model - PRBM*), que modela o mecanismo flexível como sendo um mecanismo composto de elos rígidos e molas torcionais. Assim como no método tradicional, os elos rígidos são também empregados no método do corpo pseudo-rígido, no entanto, molas torcionais são adicionadas às juntas para se obter a aproximação da relação força-deflexão dos segmentos flexíveis. Um software comercial de elementos finitos de análise não linear é então utilizado para simular tanto o mecanismo pseudo-rígido, como também o mecanismo flexível. Os resultados obtidos da simulação numérica são então comparados e discutidos.

Palavras-chave: mecanismos flexíveis, corpos pseudo-rígidos, elementos finitos.

ABSTRACT

The study aims to perform the kinematic analysis of compliant mechanisms by analytical methods and thus compare with results obtained from the simulation employing the finite element method. Due to the presence of large deflection in compliant mechanisms, the geometric nonlinearity becomes present, so that direct application of conventional kinematic analysis method becomes inappropriate. Therefore, the analysis of the compliant mechanisms is performed utilizing the concept of pseudo-rigid body model (PRBM). The concept redesigns the compliant mechanism as a mechanism composed by rigid links and torsion springs. As in the traditional method, the rigid links are also employed, however, torsion springs are added to the joints to obtain an approximation of the force-deflection relationship of the flexible segments. A finite element software of nonlinear analysis is then used to simulate both the pseudo-rigid mechanism and the compliant mechanism. The results obtained from the numerical simulation are then compared and discussed.

Key-words: compliant mechanisms, pseudo-rigid body, finite elements.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1. (a) Mecanismo garra e gancho (b) Mecanismo de amplificação de força ..	22
Figura 2 – Uso de membros flexíveis para desempenhar movimento.....	26
Figura 3 – Vantagens e benefícios dos mecanismos flexíveis	27
Figura 4 – Tipo estrutural de elos flexíveis	28
Figura 5 – Classificação do tipo da função do elo	29
Figura 6 – Características dos segmentos dos elos.....	29
Figura 7 – Elo composto por três diferentes segmentos.	30
Figura 8 – Características dos elos	31
Figura 9 – Simbologia para os mecanismos flexíveis.....	31
Figura 10 – Viga engastada.	35
Figura 11– Alteração da deflexão devido a mudanças na geometria	37
Figura 12 – Viga com várias combinações de cargas, compressão e tração.....	38
Figura 13 – (a) Curva S-N de fadiga com limite de fadiga e (b) Curva S-N de fadiga sem o limite de resistência a fadiga	42
Figura 14 - Áreas da mecânica.	46
Figura 15 – Elos e juntas.....	47
Figura 16 – Simbologia dos mecanismos rígidos	47
Figura 17 – Mecanismo flexível biela manivela e o mecanismo de corpo pseudo- rígido	49
Figura 18 – Modelos de corpos rígidos para diferentes condições de contorno	50
Figura 19 – Principais características do modelo de corpo pseudo-rígido	51
Figura 20 – (a) viga flexível, (b) viga flexível modelada com o método do corpo pseudo-rígido e (c) variação do deslocamento no eixo y	52
Figura 21 – Erro da deflexão utilizando o método do corpo pseudo-rígido	53
Figura 22 – Coeficiente de rigidez x n	55

Figura 23 – Exemplos de mecanismos flexíveis com segmentos fixo-pinado	57
Figura 24 – (a) Viga flexível com ângulo da extremidade constante e o diagrama de corpo livre da metade do segmento (b) modelo do corpo pseudo-rígido da viga flexível	58
Figura 25 – Substituição de um elo rígido por um elo flexível	60
Figura 26 – (a) Mecanismo flexível biela-manivela e (b) Mecanismo flexível paralelo de quatro barras	62
Figura 27 – (a) Mecanismo biela manivela na posição defletida e (b) Mecanismo pseudo-rígido referente ao mecanismo flexível	63
Figura 28 – (a) Segmento na condição engastada com uma força na extremidade e (b) Modelo da viga pseudo-rígida	64
Figura 29 – (a) Mecanismo flexível paralelo e (b) Mecanismo pseudo-rígido	66
Figura 30 – (a) Deslocamento dos pontos A e B durante o movimento do mecanismo flexível e (b) Deslocamento o mecanismo pseudo-rígido	67
Figura 31 – (a) Segmento na condição engastada com uma força na extremidade e (b) Modelo da viga pseudo-rígida	68
Figura 32 – (a) Segmento flexível com as duas extremidades engastadas e (b) Modelo pseudo-rígido	70
Figura 33 – Mecanismo pseudo-rígido modelado no software Abaqus	72
Figura 34 - Junta de revolução utilizando o conector “ <i>hinge</i> ”	73
Figura 35 – Interação do tipo “ <i>coupling</i> ”	73
Figura 36 – (a) Restrição e imposição de rotação e (b) Ponto de análise e restrição	74
Figura 37 – Malha de elementos finitos do mecanismo pseudo-rígido	75
Figura 38 - Mecanismo pseudo-rígido paralelo modelado no software Abaqus	76
Figura 39 – (a) Conector do tipo “ <i>hinge</i> ” e (b) Interação do tipo “ <i>coupling</i> ”	76
Figura 40 – Interação e imposição de deslocamento	77
Figura 41 – Restrições de movimento	77
Figura 42 - Malha de elementos finitos do mecanismo pseudo-rígido	78

Figura 43 – (a) Segmentos modelados utilizando o recurso “ <i>wire</i> ” e (b) Mecanismo renderizado	79
Figura 44 – Interações e condições de contorno.....	80
Figura 45 - Malha de elementos finitos do mecanismo flexível	81
Figura 46 – (a) Mecanismo flexível modelado utilizando o recurso “ <i>wire</i> ” e (b) Mecanismo flexível renderizado	82
Figura 47 – (a) Interação do tipo “ <i>tie</i> ” e (b) Condições de contorno do mecanismo flexível.....	83
Figura 48 - Malha de elementos finitos do mecanismo flexível paralelo	83
Figura 49 – (a) Mecanismo Hoeken e (b) Elo rígido e elo pseudo-rígido equivalente	84
Figura 50 – (a) Mecanismo pseudo-rígido equivalente e (b) Mecanismo flexível.....	85
Figura 51 – Configuração do mecanismo pseudo-rígido	86
Figura 52 – Deslocamento do ponto B	87
Figura 53 – Força vertical da extremidade do elo r_3	88
Figura 54 – Resultado dos deslocamentos do ponto B utilizando o software Abaqus	89
Figura 55 - Força vertical na extremidade do elo r_3 (ponto A).....	90
Figura 56 – Deslocamento do ponto B	91
Figura 57 - Força vertical na extremidade do elo flexível (ponto A)	92
Figura 58 – Deslocamento do ponto B e força vertical P	93
Figura 59 – Influência das dimensões da seção transversal na força P.....	95
Figura 60 – Influência do comprimento do elo flexível na força P e no deslocamento X_p	96
Figura 61 – (a) Mecanismo pseudo-rígido paralelo de quatro barras e (b) Mecanismo na posição defletida	97
Figura 62 – Trajetória da variação do deslocamento do ponto A	98
Figura 63 – Força P em função do deslocamento Δx	99

Figura 64 – Trajetória da variação do deslocamento do ponto A	100
Figura 65 - Força P em função do deslocamento Δx	100
Figura 66 – Trajetória da variação do deslocamento dos pontos A e B	102
Figura 67 – Força P em função do deslocamento Δx	103
Figura 68 – Diferença dos resultados de Δy e força P entre os dois métodos	103
Figura 69 – Trajetória do ponto A para diferentes comprimentos do elo flexível.....	105
Figura 70 – Força P para diferentes comprimentos do elo flexível.....	106
Figura 71 – (a) Mecanismo Hoeken e (b) Mecanismo flexível Hoeken	107
Figura 72 – Comparação do deslocamento do ponto C dos mecanismos rígido e flexível	107
Figura 73 – Trajetória linear dos mecanismos.....	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores de C para diferentes deflexões.....	33
Tabela 2 – Dados numéricos para diferentes ângulos de força ϕ	54
Tabela 3 – Dados de entrada do mecanismo pseudo-rígido.....	64
Tabela 4 – Dados de entrada do mecanismo pseudo-rígido.....	68
Tabela 5 – Dados de entrada para modelagem do mecanismo pseudo-rígido (Abaqus).....	72
Tabela 6 – Dados para modelagem do mecanismo pseudo-rígido (Abaqus).....	75
Tabela 7 – Dados para a modelagem do mecanismo flexível (Abaqus).....	78
Tabela 8 – Dados para a modelagem do mecanismo flexível (Abaqus).....	81
Tabela 9 – Resultados da modelagem do mecanismo pseudo-rígido.....	86
Tabela 10 – Resultados dos pontos máximos e mínimos.....	93
Tabela 11 – Variação dos resultados dos métodos.....	94
Tabela 12- Resultados da modelagem do mecanismo pseudo-rígido.....	97
Tabela 13 – Efeito da espessura e largura na força P.....	104

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E ACRÔNIMOS

PRMD – *Pseudo-rigid Body Model* (Modelo de Corpo Pseudo-rígido)

MEMS - *Microelectromechanical Systems* (Sistemas Microeletromecânicos)

CS – Coeficiente de Segurança

S-N – Tensão versus número de ciclos

ϵ -N – Deformação versus número de ciclos

MFLE – Mecânica da Fratura Linear Elástica

CAD – *Computer Aided Design*

G.D.L. – Graus de Liberdade

D.C.L.- Diagrama de Corpo Livre

NLGEOM – Não Linearidade Geométrica

LISTA DE SÍMBOLOS

E	Módulo de elasticidade do material
I_{viga}	Momento de inércia da viga
M	Momento fletor
$d\theta/ds$	Taxa variação do ângulo de deflexão
dy/dx	Tangente do ângulo de inclinação da viga
I_y	Momentos de inércia em relação ao eixo y
I_x	Momentos de inércia em relação ao eixo x
h	Espessura da viga
b	Largura da viga
δ	Deflexão da viga
L	Comprimento da viga
σ	Tensão de flexão
d	Distância do eixo neutro até o ponto de interesse de análise
$F_{x\acute{m}ax}$	Força máxima suportada pela viga no eixo x
$F_{y\acute{m}ax}$	Força máxima suportada pela viga no eixo y
σ_{esc}	Tensão de escoamento do material
$\delta_{x\acute{m}ax}$	Deflexão máxima em relação ao eixo x
$\delta_{y\acute{m}ax}$	Deflexão máxima em relação ao eixo y
δ_y	Deflexão na direção y
$\tau_{m\acute{a}x}$	Tensão máxima de cisalhamento do material
τ	Tensão de cisalhamento atuante
σ_{eq}	Tensão equivalente
σ_x	Tensão de tração na direção x
σ_y	Tensão de tração na direção y

τ_{xy}	Tensão de cisalhamento
σ_1 e σ_3	Tensões normais principais
$\sigma_{última}$	Tensão máxima de tração
σ_{comp}	Tensão máxima de compressão
S_f	Resistência à fadiga
S_e	Limite de resistência à fadiga
a e b	Parâmetros da propriedade do material
N	Número de ciclos
S_e'	Limite de resistência à fadiga teórico (não corrigida)
S_f'	Resistência à fadiga teórico (não corrigida)
C_{sup}	Fator de superfície
C_{tam}	Fator de tamanho
C_{carreg}	Fator de carregamento
C_{conf}	Fator de confiabilidade
C_{conc}	Fator de concentração de tensão
C_{temp}	Fator de temperatura
$\sigma_{máx}$	Tensão máxima atuante
σ_a	Tensão alternada
σ_m	Tensão média
M	Graus de liberdade ou mobilidade
N_e	Número de elos
J_1	Número de juntas com um GDL
J_2	Número de juntas com dois GDL
θ	Ângulo formado pelo elo pseudo-rígido e o eixo horizontal
l	Comprimento da viga flexível

γ	Fator do raio característico
$\gamma_{médio}$	Fator do raio característico médio
γl	Raio característico
F	Força na extremidade da viga
P e nP	Componentes da força F
n	Porcentagem do ângulo da força P
Φ	Ângulo entre a força nP e a força F .
θ_0	Ângulo do elo pseudo-rígido
c_θ	Coefficiente de ângulo paramétrico
K_θ	Coefficiente de rigidez
$K_{\theta_{médio}}$	Coefficiente de rigidez médio
K	Constante de rigidez da mola torcional
I	Momento de inércia do segmento flexível
a	Coordenada vertical da extremidade da viga
b	Coordenada horizontal da extremidade da viga
Δx	Varição do deslocamento referente ao eixo x
Δy	Varição do deslocamento referente ao eixo y
F_t	Componente da força tangencial
F_n	Componente da força normal
r_{sup}	Elo pseudo-rígido superior
r_{inf}	Elo pseudo-rígido inferior
$r_{rígido}$	Elo rígido
r_{e1}, r_{e2}, r_{e3} e r_{e4}	Elos do mecanismo Hoeken
r_{e5} e r_{e6}	Elos pseudo-rígidos do mecanismo Hoeken
ω	Velocidade angular aplicado na manivela
r_2	Comprimento da manivela
r_3	Comprimento da biela

r_4	Elo rígido que conecta a biela e o bloco deslizante
w	Largura da seção do segmento flexível
t	Espessura do segmento flexível
e	Distância vertical entre o ponto B e o ponto central dos eixos cartesianos
θ_2	Ângulo formado entre a manivela e o eixo horizontal
θ_2	Ângulo formado entre a manivela flexível e o eixo horizontal
θ_1	Ângulo formado entre a biela rígida r_3 e o eixo horizontal
x_B	Posição horizontal do ponto B
I_l	Momento de inércia do elo flexível (biela)
P_{ap}	Força aplicada no segmento rígido
l_A	Comprimento do elo flexível A
l_B	Comprimento do elo flexível B
E_{l_A}	Módulo de elasticidade do elo flexível A
E_{l_B}	Módulo de elasticidade do elo flexível B
I_{l_A}	Momento de inércia da seção transversal do elo flexível A
I_{l_B}	Momento de inércia da seção transversal do elo flexível B
L	Comprimento do elo rígido
r_{1A} e r_{2A}	Comprimento dos elos pseudo-rígidos A
r_{3B}, r_{4B} e r_{5B}	Comprimento dos elos pseudo-rígidos B
K_A	Constante de rigidez da mola torcional A
K_B	Constante de rigidez da mola torcional B
${}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3$	Coordenadas do ponto P no tempo zero
${}^{t+\Delta t}x_1, {}^{t+\Delta t}x_2, {}^{t+\Delta t}x_3$	Coordenadas do ponto P no tempo $t+\Delta t$
${}^{t+\Delta t}u_i$ e ${}^t u_i$	Deslocamentos a cada instante de tempo
u_i	Incremento do deslocamento entre o tempo t até $t+\Delta t$.

δu	Componentes do vetor de deslocamento virtual no tempo $t+\Delta t$
${}^{t+\Delta t}\tau_{ij}$	Componentes do tensor de tensão de Cauchy no instante $t+\Delta t$
$\delta_{t+\Delta t}e_{ij}$	Tensor de deformação correspondente ao deslocamento virtual
$\partial\delta u_i$	Componentes do deslocamento virtual imposto na configuração $t+\Delta t$
${}^{t+\Delta t}x_i$	Coordenada do ponto material no tempo $t+\Delta t$.
${}^{t+\Delta t}f_i^B$	Componentes da força externa aplicado no corpo
${}^{t+\Delta t}f_i^S$	Componentes da força externa aplicado na superfície
${}^{t+\Delta t}S_f$	Superfície no tempo $t+\Delta t$ onde as forças externas são aplicadas
δu_i^S	Componentes do deslocamento virtual imposto na configuração $t+\Delta t$
	avaliado na superfície ${}^{t+\Delta t}S_f$
${}^tS_{ij}$	Tensor da 2ª tensão de Piola-Kirchhoff no instante de tempo t
${}^0x_{i,m}$	Comprimento infinitesimal (0dx) do material no instante zero com relação ao mesmo comprimento infinitesimal (tdx) no instante t
${}^0\rho$	Densidade no instante zero
${}^t\rho$	Densidade no instante t
${}^t\tau_{mn}$	Tensão de Cauchy no instante t
tX	Gradiente de deformação no instante t com referência à configuração no tempo zero
${}^0X^{-1}$	Inverso do gradiente de deformação
tR	Tensor de rotação.
tU	Tensor de extensão (" <i>stretch</i> ")
tK	Matriz de rigidez no instante t
ΔU	Incremento do deslocamento nodal
${}^{t+\Delta t}R$	Forças externas aplicadas no instante $t+\Delta t$
tF	Forças nodais correspondentes às tensões internas no instante t

${}_0C_{ijrs}$	Tensor incremental da propriedade do material no tempo t com relação à configuração inicial zero
${}_0e_{rs}$	Incremento de deformação linear
δ_0e_{ij}	Incremento de deformação linear virtual
$\delta_0\eta_{ij}$	Incremento de deformação não linear
u e v	Deslocamentos locais em quaisquer pontos no elemento
u_i e v_i	Deslocamentos correspondentes aos pontos nodais do elemento
e	Matriz de deformação linear
η	Matriz de deformação não linear
B_L	Matriz transformação deslocamento-deformação não linear
B_{NL}	Matriz transformação deslocamento-deformação não linear
${}^t_0B_L^T$	Matriz de transformação deslocamento-deformação linear transposta no instante t
t_0B_L	Matriz de transformação deslocamento-deformação linear no instante t
${}_0C$	Matriz da relação constitutiva da propriedade do material
$\delta\hat{u}^T$	Vetor transposto do deslocamento nodal virtual
${}^t_0B_{NL}^T$	Matriz de transformação deslocamento-deformação não linear transposto no instante t
${}^t_0B_{NL}$	Matriz de transformação deslocamento-deformação não linear no instante t
t_0S	Matriz da Segunda tensão de Piola-Kirchhoff
${}^t_0\hat{S}$	Vetor da Segunda tensão de Piola-Kirchhoff
H^T	Matriz de interpolação do deslocamento do corpo
H^{sT}	Matriz transposta de interpolação do deslocamento da superfície do corpo
${}^{t+\Delta t}_0f^B$	Vetor de força de corpo
${}^{t+\Delta t}_0f^S$	Vetor de força de superfície

t_0K_L	Matriz de rigidez linear
${}^t_0K_{NL}$	Matriz de rigidez não linear
${}^{t+\Delta t}_0S_{ij}$	Tensor da 2ª tensão de Piola-Kirchhoff no instante $t+\Delta t$
${}^{t+\Delta t}_0\epsilon_{ij}$	Tensor de deformação Green Lagrange no instante $t+\Delta t$
${}^{t+\Delta t}R$	Componentes das forças externas no instante $t+\Delta t$
${}_0S_{ij}$	Incremento de tensão
${}^t_0\epsilon_{ij}$	Tensor de deformação de Green Lagrange no instante t
${}_0\epsilon_{ij}$	Incremento do tensor de deformação
${}_0u_{i,j}, {}_0u_{j,i}, {}_0u_{k,j}, {}_0u_{k,i}$	Termos das derivadas dos incrementos dos deslocamentos
${}^t_0u_{k,i}$ e ${}^t_0u_{k,j}$	Termos relacionados às derivadas dos deslocamentos do instante t
${}_0e_{ij}$	Tensor de incremento de deformação linear
${}_0n_{ij}$	Tensor de incremento de deformação não linear
q	Número total de pontos nodais
k	Ponto nodal
${}^t x_i$	Tensor das coordenadas de qualquer ponto da viga
${}^t x_i^k$	Tensor das coordenadas do ponto nodal k
h_k	Função de interpolação do ponto nodal k
a_k e b_k	Dimensões da seção transversal da viga no ponto nodal k
$\frac{\zeta}{2}$ e $\frac{\varphi}{2}$	Termos relacionados às coordenadas ζ e φ
${}^t x, {}^t y$ e ${}^t z$	Coordenadas de um ponto dentro do elemento
${}^t u_i^k$	Tensor dos componentes do deslocamento nodal k no instante t
u_i^k	Tensor dos componentes do incremento do deslocamento nodal k
${}^t V_\zeta^k$	Vetor unitário na direção ζ do ponto nodal k no instante t
${}^t V_\varphi^k$	Vetor unitário na direção φ do ponto nodal k no instante t

${}^tV_{\zeta i}^k$	Tensor dos componentes do vetor unitário ${}^tV_{\zeta}^k$ do ponto nodal k no instante t
${}^tV_{\varphi i}^k$	Tensor dos componentes do vetor unitário ${}^tV_{\varphi}^k$ do ponto nodal k no instante t
${}^0V_{\zeta i}^k$ e ${}^0V_{\varphi i}^k$	Tensor dos componentes dos vetores unitários no instante zero
θ^k	Vetor dos incrementos das rotações dos pontos nodais
\hat{u}_k^T	Vetor de deslocamento em termos dos deslocamentos e das rotações transposto
ϵ	Matriz de deformação (linear e não linear)
B	Matriz de transformação deslocamento-deformação (linear e não linear)
\hat{u}	Vetor dos incrementos dos deslocamentos e rotações dos pontos nodais.
J	Matriz Jacobiano referente às coordenadas no instante zero
$h_{k,\xi}$	Derivada da função de interpolação em relação ao eixo ξ
\hat{g} e \bar{g}	Matrizes dos componentes do vetor unitário ${}^tV_{\zeta i}^k, {}^tV_{\varphi i}^k$
${}^tS_{\xi\xi}, {}^tS_{\xi\varphi}$ e ${}^tS_{\varphi\zeta}$	Tensões de Piola-Kirchhoff em relação aos eixos ξ, φ e ζ
${}^tC_{ijrs}$	Tensor da relação constitutiva da propriedade do material no instante t
λ e μ	Constantes de Lamé
δ_{ij}	Delta de Kronecker
$F(r)$	Função a ser integrada
r	Pontos de integração
α	Pesos (valores) de cada função
R_n	Erro devido à integração numérica

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	22
1.1	Contexto do Tema	22
1.2	Caracterização do Problema	24
1.3	Objetivos	24
1.4	Justificativa	25
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	26
2.1	Introdução e conceitos fundamentais de mecanismos flexíveis	26
2.1.1	Histórico	26
2.1.2	Vantagens	27
2.1.3	Terminologias	27
2.2	Comportamento mecânico dos mecanismos flexíveis	32
2.2.1	Grandes deflexões	32
2.2.2	Propriedades e características importantes	33
2.3	Critérios de falha	38
2.3.1	Falha estática	39
2.3.2	Falha por fadiga	41
2.4	Mecanismos de corpos rígidos	45
2.4.1	Conceitos fundamentais	45
2.4.2	Síntese de mecanismos	47
2.4.3	Análise cinemática de mecanismos	48
2.5	Modelo de corpo pseudo-rígido (<i>PRBM</i>)	49
2.5.1	Modelagem analítica do mecanismo flexível	52
2.6	Síntese de substituição de corpo rígido	59
3	METODOLOGIA	62
3.1	Modelo analítico utilizando o método de corpo pseudo-rígido	63
3.1.1	Mecanismo flexível biela-manivela	63
3.1.2	Mecanismo paralelo de quatro barras	66
3.2	Modelagem e simulação do mecanismo pseudo-rígido no software Abaqus	72
3.2.1	Mecanismo biela-manivela	72
3.2.2	Mecanismo paralelo	75
3.3	Modelagem e simulação do mecanismo flexível no software Abaqus	78
3.3.1	Mecanismo flexível biela-manivela	78
3.3.2	Mecanismo flexível paralelo de quatro barras	81
3.4	Síntese de substituição de um elo rígido	84
4	RESULTADOS	86
4.1	Mecanismo biela-manivela	86
4.1.1	Resultados da modelagem analítica utilizando o método de corpo pseudo-rígido	86
4.1.2	Resultados do mecanismo pseudo-rígido utilizando o software de elementos finitos Abaqus	88
4.1.3	Resultados do mecanismo flexível utilizando o software de elementos finitos Abaqus	90
4.2	Mecanismo paralelo de quatro barras	96
4.2.1	Resultados da modelagem analítica utilizando o método de corpo pseudo-rígido	96
4.2.2	Resultados do mecanismo pseudo-rígido utilizando o software de elementos finitos Abaqus	99

4.2.3 Resultados do mecanismo flexível utilizando o software de elementos finitos Abaqus	
101	
4.3 Comparação da trajetória do mecanismo Hoeken flexível	106
5 CONCLUSÕES	109
REFERÊNCIAS	111
APÊNDICE A – Elementos finitos de análise não linear	113
APÊNDICE B – formulação lagrangeana total	141
APÊNDICE C – exemplo do estabelecimento da matriz de rigidez	147

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contexto do Tema

Muitos equipamentos mecânicos, para desempenhar sua função necessitam de um mecanismo em seu sistema. Norton (2010) define um mecanismo como sendo um dispositivo que transforma um movimento qualquer em um padrão desejado e geralmente desenvolve forças de baixa intensidade e transmite pouca potência. O objetivo de um mecanismo é utilizar de seus movimentos para transferir um movimento e/ou uma força. Os mecanismos tradicionais conhecidos como mecanismos rígidos já se encontram bastante explorados na engenharia e constituem grande parte dos estudos de mecanismos até o momento. No entanto, devido ao avanço de pesquisas e tecnologias (novos materiais, desenvolvimento computacional, etc.), uma classe de mecanismos está atraindo interesse na engenharia, os denominados mecanismos flexíveis. Pode-se definir um mecanismo flexível como sendo um sistema composto por membros flexíveis que utilizam da deflexão de seus elementos para transmitir e/ou transformar movimento e força (HOWELL, 2001). A Figura 1 apresenta dois modelos de mecanismos flexíveis, sendo (a) um mecanismo composto por uma garra e gancho e (b) um mecanismo amplificador de força (alicate).

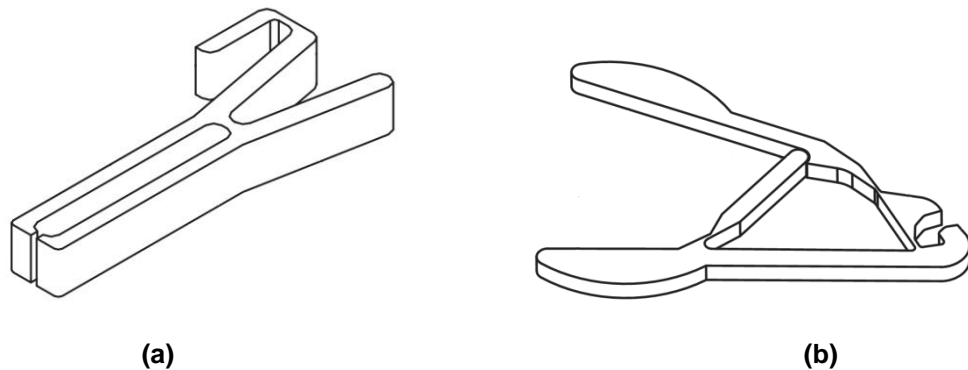


Figura 1. (a) Mecanismo garra e gancho (b) Mecanismo de amplificação de força

Fonte: Howell; Magleby; Olsen (2013)

Dentro da mecânica estrutural os mecanismos flexíveis integram duas principais áreas: a área da resistência dos materiais, para analisar a deflexão dos elos e a área de dinâmica, para analisar seu comportamento em movimento.

Os mecanismos flexíveis possuem grandes vantagens comparadas aos mecanismos rígidos. Estes mecanismos conseguem desempenhar as mesmas funções de um mecanismo tradicional, porém com um número reduzido de componentes e com menor custo. Outra vantagem é a capacidade desses mecanismos conseguir alta precisão nos movimentos. Apesar de grande interesse e vantagens nas áreas de aplicação da engenharia, o assunto ainda é pouco explorado em nível de graduação.

Vários dos mecanismos utilizados atualmente já se encontram bastante otimizados, portanto, somente pequenas alterações ou refinamentos no projeto não são garantia de melhoria do desempenho. Surge assim à necessidade de se obter outras formas de desenvolvimento (FOWLER; HOWELL; MAGLEBY, 2011). Os mecanismos flexíveis então se apresentam como sendo uma oportunidade para contribuir com os avanços e melhoria dos equipamentos atuais.

Muito dos mecanismos flexíveis, modelados décadas atrás, não se utilizavam do estudo de engenharia para o projeto e recorreram ao método de tentativa e erro para a configuração do modelo final. Porém, quando se tem a necessidade de produzir um mecanismo flexível de alta complexidade, o estudo e entendimento do comportamento do sistema se tornam fundamentais. Apesar de recentemente os mecanismos flexíveis terem ganhado bastante espaço, pouca atenção se tem dado à análise dinâmica desses mecanismos (REZAEI; TAYEFEH; MOHSEN, 2006).

Alguns trabalhos recentes têm focado o comportamento dinâmico desses mecanismos. Howell (2001) tem desenvolvido uma importante metodologia para a análise cinemática de mecanismos flexíveis, denominado de conceito de corpo pseudo-rígido (*Pseudo-rigid Body Model - PRMB*). Rezaei, Tayefeh e Mohsen (2006) analisam um micromecanismo de quatro barras através do método de modelo de corpo pseudo-rígido e utilizam de um software de elementos finitos para simular e comparar os resultados obtidos. Recentemente Dao e Huang (2014) apresentam um estudo sobre o projeto e formulação do modelo cinemático de um mecanismo biela manivela flexível como também apresentam a análise da falha por fadiga. Gupta, Rattan e Mukherjee (2013) também faz uma análise similar utilizando um mecanismo biela manivela flexível, porém ao final, um protótipo é construído e os resultados são comparados com o modelo baseado no conceito de corpo pseudo-rígido, obtendo bons resultados.

1.2 Caracterização do Problema

Apesar dos mecanismos flexíveis apresentarem grandes vantagens, os processos de síntese e análise representam grandes desafios. Uma das dificuldades encontrada é o fato dos mecanismos flexíveis apresentarem grandes deflexões durante o movimento. Essas grandes deflexões alteram a natureza do problema de modo a introduzir não linearidades estruturais ao sistema e as equações tradicionais já não são mais adequadas para o estudo. Devido a complexidade da análise cinemática desse tipo de mecanismo, surge a necessidade de métodos mais adequados e simplificados para o entendimento de seu comportamento dinâmico. O modelo de corpo pseudo-rígido (*PRBM*) é empregado apresentando bons resultados e relativa simplicidade. O método do *PRBM* fornece soluções analíticas para problemas com grandes ou pequenas deflexões, no entanto, soluções podem ser encontradas somente para carregamentos e geometrias relativamente simples (HOWELL, 2001). O método dos elementos finitos de análise não linear também é empregado para o estudo de mecanismos flexíveis, tanto na comparação de modelos analíticos, quanto no desenvolvimento de modelos mais complexos. A descrição da teoria da análise não linear de elementos finitos é apresentada no APÊNDICE A.

1.3 Objetivos

Compreender o comportamento dinâmico é uma etapa fundamental no desenvolvimento de um mecanismo. Depois da fase de síntese de um mecanismo, a próxima etapa é a análise (NORTON, 2010). Com o modelo matemático em mãos, têm-se informações valiosas e com isso pode-se explorar todo o comportamento dinâmico do sistema. Deste modo, o presente trabalho tem por finalidade realizar a análise cinemática de um mecanismo flexível utilizando o conceito do modelo de corpo pseudo-rígido (*PRBM*) e utilizar um *software* comercial de elementos finitos para simular o mecanismo pseudo-rígido como também o mecanismo flexível.

Podem-se citar os objetivos específicos do trabalho:

- Escolha de um mecanismo flexível que seja originado (inspirado) de um mecanismo de corpo rígido;

- Modelagem analítica do mecanismo flexível aplicando o modelo de corpo pseudo-rígido;
- Depois de modelado o mecanismo flexível pelo método de modelo de corpo pseudo-rígido, é realizada a análise do mecanismo pseudo-rígido utilizando o software de elementos finitos;
- Simular o mecanismo flexível pelo método de elementos finitos e comparar os resultados com o mecanismo pseudo-rígido.

1.4 Justificativa

A justificativa do tema proposto envolve três principais fatores. Primeiro fator se deve às notáveis vantagens em relação aos mecanismos tradicionais. Segundo, por consistir de um tema pouco explorado, mas com grande potencial de desenvolvimento tecnológico. O último fator é o desafio, pois o tema apresenta alta complexidade na análise cinemática em razão da não linearidade geométrica presente. Em virtude dessa complexidade, os métodos tradicionais já não podem ser aplicados diretamente e outros métodos se tornam necessários. Depois de aplicados os métodos adequados e modelado matematicamente o mecanismo flexível, então se torna fácil compreender o movimento e analisar a aplicabilidade em situações práticas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Introdução e conceitos fundamentais de mecanismos flexíveis

2.1.1 Histórico

Apesar do crescente estudo e aplicação dos mecanismos flexíveis, evidências mostram que desde os tempos antigos o emprego de membros flexíveis já estava presente. Instrumentos como arco e flecha e catapultas eram ferramentas que se utilizavam da flexibilidade de seus membros para obter movimento. A Figura 2 (a) apresenta um arco flexível utilizado para impulsionar uma flecha e a Figura 2 (b) mostra um projeto que simula o bater das asas de um inseto através de um mecanismo flexível.

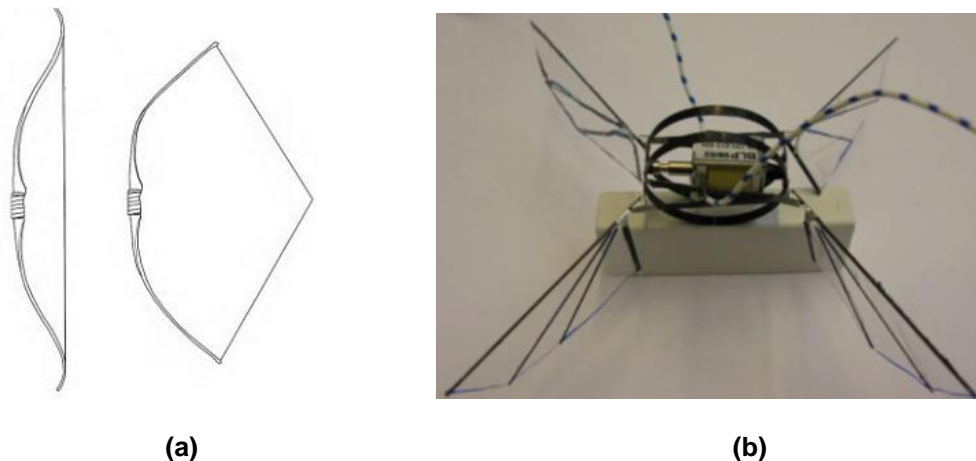


Figura 2 – Uso de membros flexíveis para desempenhar movimento

Fonte: (a) Howell; Magleby; Olsen (2013); (b) www.3me.tudelft.nl/?id=52660&L=1.

Nota-se que muitos dos projetos mecânicos vistos atualmente são baseados nas geometrias presentes na natureza. Um fato interessante de se observar é que a grande maioria dos movimentos desenvolvidos pelos organismos vivos se dá por membros flexíveis. Por exemplo, a asa de um pássaro, galho de uma árvore e nadadeira de um peixe são compostos por elementos flexíveis. Várias lições podem ser aprendidas apenas observando os mecanismos presentes na natureza e, portanto o uso dos mecanismos flexíveis no projeto de equipamentos mecânicos é uma inteligente forma de se obter as vantagens conseguidas nesses organismos.

2.1.2 Vantagens

Os mecanismos flexíveis apresentam grandes vantagens comparadas aos mecanismos de corpos rígidos. Estes mecanismos podem desempenhar as mesmas funções dos mecanismos tradicionais, porém oferecendo grandes benefícios e conveniências. Algumas dessas vantagens podem ser citadas:

- Podem ser fabricados como uma peça única, reduzindo o número de componentes;
- Menor custo em decorrência do menor número de elementos;
- Alta precisão no movimento devido à redução ou eliminação de folgas;
- Possibilidade de serem produzidos em tamanhos extremamente reduzidos (micromecanismos).

A Figura 3 (a) compara a quantidade de peças de um grampeador comum com um grampeador construído com uma única peça utilizando-se dos mecanismos flexíveis. A Figura 3 (b) apresenta um mecanismo microeletromecânico para movimento de precisão (*Microelectromechanical Systems - MEMS*).

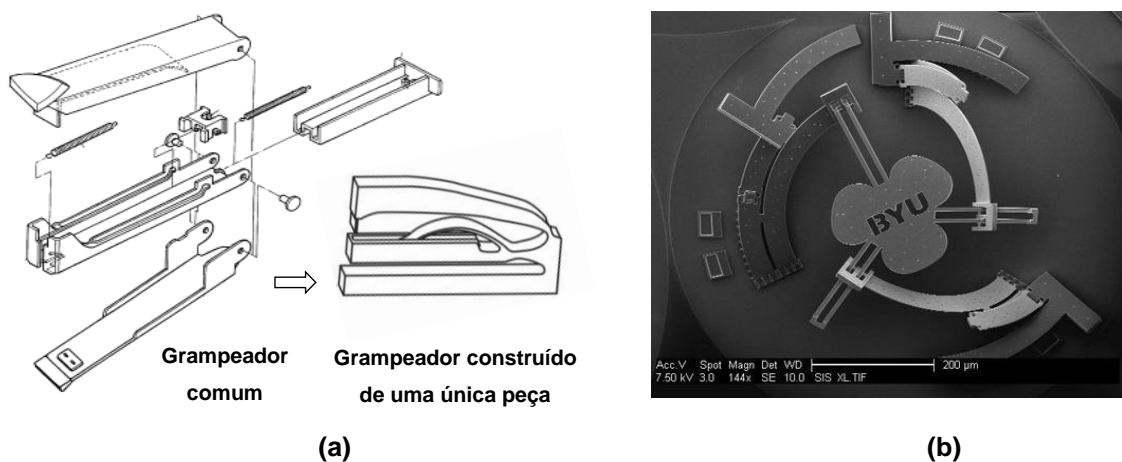


Figura 3 – Vantagens e benefícios dos mecanismos flexíveis

Fonte: (a) www.docstoc.com/docs/48469706/Structure-Of-A-Stapler---Patent-6142355 e Howell (2010); (b) me.byu.edu/content/design.

2.1.3 Terminologias

Howell (2001) descreve as principais denominações e categorias de mecanismos flexíveis. Os mecanismos flexíveis podem ser de dois tipos, totalmente

flexível ou parcialmente flexível. Como o próprio nome diz, os mecanismos completamente flexíveis são aqueles que não possuem nenhuma junta ou articulação rígida em seu arranjo. O mecanismo apresentado na Figura 1 (a) é um exemplo de mecanismo completamente flexível. Já os mecanismos que têm uma ou mais juntas em sua estrutura são denominados mecanismos parcialmente flexíveis.

O tipo do movimento em que o mecanismo flexível desenvolve depende de vários fatores. A geometria do elo, a magnitude das forças e a localização de onde essas forças são aplicadas influenciam diretamente no movimento do mecanismo flexível. Em função dessa quantidade de variáveis presentes, os elos desses mecanismos podem ser descritos pelo tipo da estrutura e pela sua função.

Tipo da estrutura do elo: de modo similar aos elos rígidos, os elos flexíveis também podem ser classificados pela quantidade de seus nós. Por exemplo, um elo flexível com dois nós é denominado como elo estrutural binário, um elo com três nós será um elo estrutural ternário e assim por diante. A Figura 4 apresenta a classificação do tipo de estrutura de dois elos elásticos, onde as curvas representam os elos flexíveis e os círculos representam os nós, pontos para articulações com outros elos.

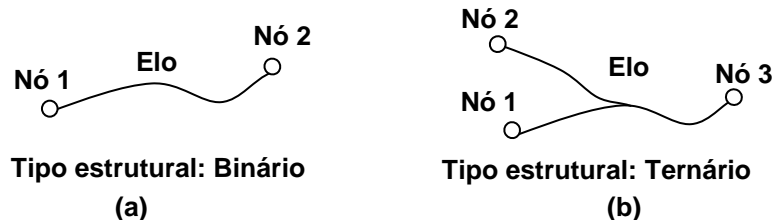


Figura 4 – Tipo estrutural de elos flexíveis

Fonte: Adaptado de Howell (2001)

Embora a similaridade, o tipo estrutural do elo deve ser determinado quando nenhuma força está sendo aplicada ao mesmo. Quando uma força é aplicada no segmento flexível, conforme Figura 5, o próprio segmento do elo flexível acaba adquirindo o comportamento similar ao de uma junta móvel, sendo assim denominada de pseudo junta.

Tipo da função do elo: o tipo da função de um elo flexível leva em conta o seu tipo estrutural (quantidade de nós) e o número de pseudo juntas. Se um elo é composto por dois nós e uma força está sendo aplicada no seu segmento flexível, como na Figura 5, este elo é classificado como sendo de tipo estrutural binário (dois

nós) e funcional ternário (dois nós e uma pseudo junta). No entanto, caso esta força seja aplicada somente ao nó em vez do segmento flexível, este elo é classificado como estrutural binário (dois nós) e funcional binário (dois nós e nenhuma pseudo junta).

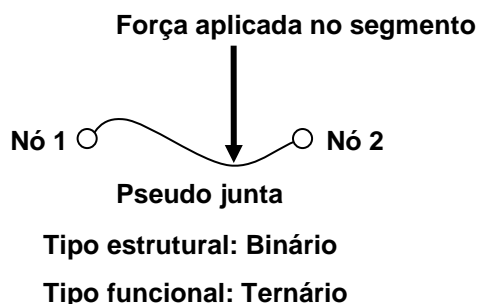


Figura 5 – Classificação do tipo da função do elo

Fonte: Adaptado de Howell (2001)

Os elos podem ser compostos por vários tipos de segmentos em sua estrutura e em virtude disso é apresentada uma classificação. Os segmentos podem ser do tipo rígido ou flexível. Caso for flexível, este pode ser categorizado em simples ou composto. Um segmento do tipo flexível simples é aquele em que é inicialmente reto, possui propriedade do material e seção transversal constantes. Caso contrário, será da categoria composto. A Figura 6 apresenta a classificação dos segmentos dos elos.

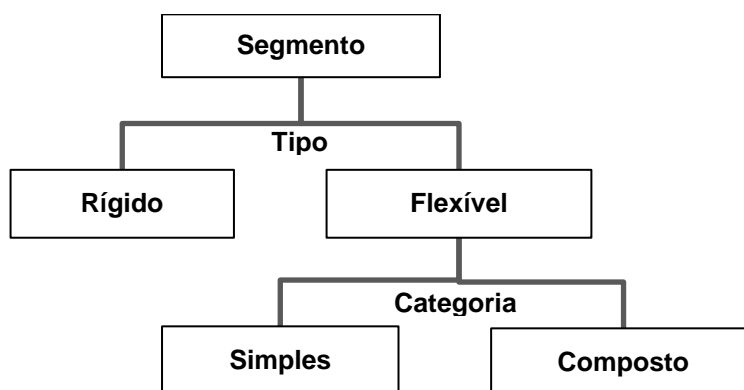


Figura 6 – Características dos segmentos dos elos.

Fonte: Adaptado de Howell (2001)

A Figura 7 mostra um exemplo de um elo composto por três diferentes segmentos.

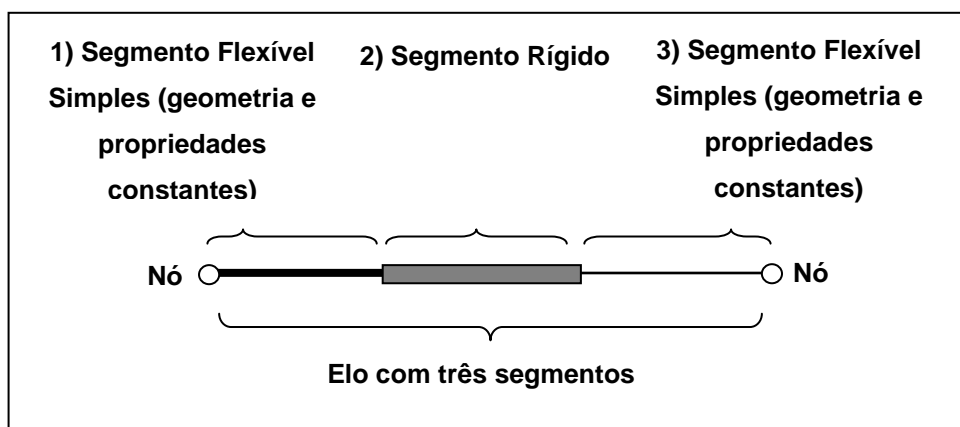


Figura 7 – Elo composto por três diferentes segmentos.

Fonte: Elaborado pelo autor

Depois de apresentado a classificação do segmento, um elo pode ser classificado pelo seu tipo, categoria e família.

Tipo do elo: flexível ou rígido

Categoria do elo: simples ou composto

Família do elo: homogêneo e não homogêneo

Um elo pode ser do tipo rígido ou flexível. O elo do tipo rígido como o próprio nome diz, é totalmente rígido e não apresenta uma subclassificação. Caso for flexível, este pode ser definido em duas categorias, simples ou composto. Um elo flexível simples consiste em um único simples segmento flexível, por exemplo, o elo da Figura 4 (a), caso contrário é considerado um elo composto. Os elos flexíveis compostos são aqueles que apresentam mais de um tipo segmento na estrutura e podem ser da família de homogêneos ou não homogêneos. Um elo da família homogêneo é aquele que se constitui de apenas de segmentos rígidos ou apenas de segmentos flexíveis. Portanto, elos rígidos e elos flexíveis simples são casos especiais da família de elos homogêneos. Elos não homogêneos contêm ambos os segmentos rígido e flexível.

A classificação das características dos elos pode ser visualizada na Figura 8.

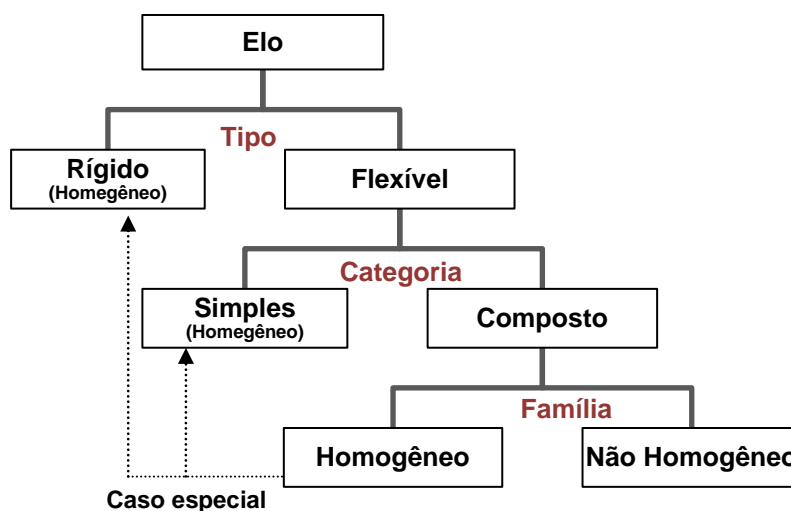


Figura 8 – Características dos elos

Fonte: Adaptado de Howell (2001).

Assim como nos mecanismos rígidos, os mecanismos flexíveis também são representados através de desenhos esquemáticos e simbologias. Isso facilita a representação e análise dos mecanismos. A Figura 9 apresenta as simbologias usuais utilizadas nos mecanismos flexíveis.

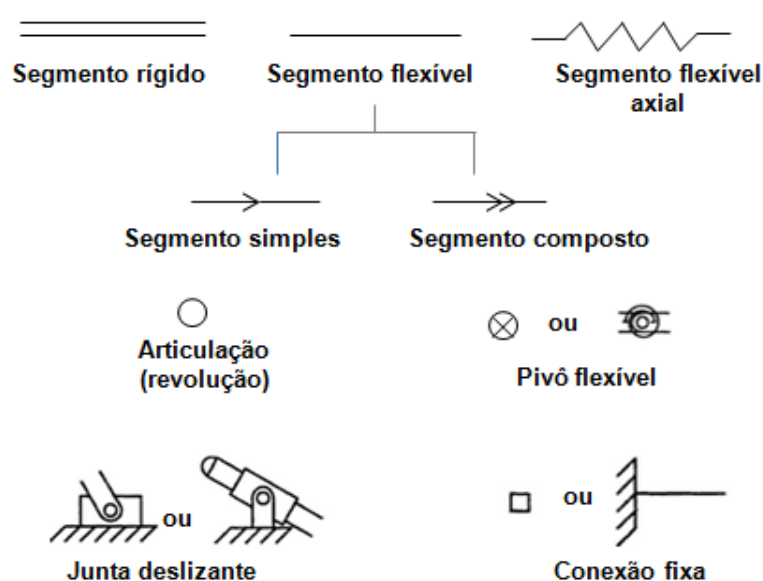


Figura 9 – Simbologia para os mecanismos flexíveis

Fonte: Howell (2001)

2.2 Comportamento mecânico dos mecanismos flexíveis

2.2.1 Grandes deflexões

Em virtude dos grandes deslocamentos ocorridos na deflexão dos membros flexíveis, a não linearidade estrutural domina o problema. Pode-se classificar a não linearidade estrutural em dois tipos: não linearidade geométrica e não linearidade de material. As não linearidades presentes em mecanismos flexíveis são geométricas. Ocorrem quando os grandes deslocamentos gerados pelos membros flexíveis alteram a natureza do problema. Grandes deflexões, aumento da rigidez e amplas deformações são alguns dos exemplos dessas alterações. Nos mecanismos flexíveis a não linearidade geométrica se dá basicamente pelas grandes deflexões ocorridas nos segmentos flexíveis.

Para a análise de uma viga, a teoria clássica (Euler-Bernoulli) apresenta o momento de flexão como:

$$M = EI_{viga} \left(\frac{d\theta}{ds} \right) \quad (1)$$

Sendo E o módulo de elasticidade, I_{viga} o momento de inércia e $d\theta/ds$ a taxa variação do ângulo de deflexão, ou seja, a curvatura da viga. A taxa de variação desse ângulo (curvatura) pode escrita como:

$$\frac{d\theta}{ds} = C \frac{d^2y}{dx^2} \quad (2)$$

onde C pode ser escrito como:

$$C = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3)$$

Quando se analisa problemas de pequenas deflexões, os valores de dy/dx (tangente do ângulo de inclinação da viga) se mostram como valores muito pequenos (ângulos pequenos) e por este motivo são assumidos como zero. Portanto, para problemas onde ocorrem pequenos deslocamentos o valor de C da equação (3) pode ser avaliado como unitário o que torna $d\theta/ds$ simplesmente dependente de d^2y/dx^2 . Porém para situações onde ocorrem grandes deflexões, essa suposição se torna inválida e as complexidades da não linearidade se tornam

presentes, ou seja, os valores de C passam a ser diferentes de um. A tabela 1 apresenta valores de inclinações de viga (dy/dx), o ângulo e o valor correspondente de C . Nota-se que para pequenas deflexões o valor de C se aproxima de um.

Tabela 1 – Valores de C para diferentes deflexões

dy/dx	θ (graus)	C
0,01	0,60	0,9999
0,05	2,90	0,9963
0,10	5,70	0,9852
0,25	14,00	0,9131
0,50	26,60	0,7155
1,00	45,00	0,3536
2,00	63,40	0,0894

Fonte: Adaptado de Howell (2001)

2.2.2 Propriedades e características importantes

Para a análise do comportamento mecânico dos mecanismos flexíveis alguns dos conceitos de propriedades mecânicas e características dos materiais devem ser estudados.

Rigidez: é uma propriedade que relaciona a capacidade de resistir às deformações e deflexões elásticas. Esta propriedade define o quanto o material pode defletir sob uma determinada carga aplicada (Howell, 2001). A rigidez de um membro está diretamente ligada à propriedade do material (módulo elasticidade) e a sua geometria (momento de inércia).

Flexibilidade: é a capacidade de um membro defletir sob a ação de uma carga. É o inverso da rigidez (Howell, 2001). Como a flexibilidade está diretamente ligada à rigidez, conseqüentemente esta característica também está vinculada a geometria e as propriedades do material. Esta característica é de ampla importância nos projetos dos mecanismos flexíveis, pois é nela em que os mecanismos flexíveis se fundamentam para o desempenho de sua função.

Material: para o projeto de um mecanismo flexível, o material escolhido tem um papel fundamental no comportamento do sistema. O principal objetivo quando se escolhe um material, no caso dos membros flexíveis, é aumentar ao máximo sua

flexibilidade. Um dos parâmetros para a seleção de um determinado material é a razão de tensão de escoamento por módulo de elasticidade que é visto mais adiante.

Relaxamento de tensão: esse tipo de fenômeno ocorre quando os valores das tensões internas, resultantes da deformação, diminuem à medida que o tempo passa. A magnitude das tensões internas do sistema é atenuada, ou seja, ocorre um relaxamento das tensões. Para aqueles mecanismos flexíveis que necessitam manter seus membros na condição defletida, por exemplo, na função de comprimir um objeto durante um longo intervalo de tempo, pode gerar um problema de perda da força atuante em razão do fenômeno de relaxamento de tensão.

Energia armazenada: quando da aplicação de uma força em um corpo, ocorre uma transferência de energia a esse sistema, deformando-o. O tipo de energia que o sistema armazena é chamado de energia de deformação. Nos mecanismos flexíveis essa forma de energia é absorvida pelo sistema e posteriormente liberada, gerando o movimento. Em muitas das aplicações dos mecanismos flexíveis essa energia de deformação é uma variável importante no projeto. Alguns projetos necessitam que essa energia continue armazenada (permanecer na posição), outros, no entanto, necessitam que essa energia liberada seja maximizada. O mecanismo flexível da Figura 1 (b) é um exemplo onde se deseja maximizar a força, ou seja, amplificar essa energia dissipada.

Enrijecimento por tensão: este fenômeno ocorre quando a rigidez de um corpo é alterada devido às tensões geradas dos grandes deslocamentos. Nos mecanismos flexíveis a maneira como a carga é aplicada pode influenciar diretamente no aumento ou na diminuição da rigidez do membro. Esta característica se torna importante para compreender a capacidade de uma carga em gerar uma máxima deflexão.

2.2.2.1 Análise de propriedades e características importantes

Para melhor compreensão, Howell (2001) demonstra algumas dessas características descritas anteriormente através da análise de uma viga engastada. Todas as propriedades são consideradas constantes e o material isotrópico.

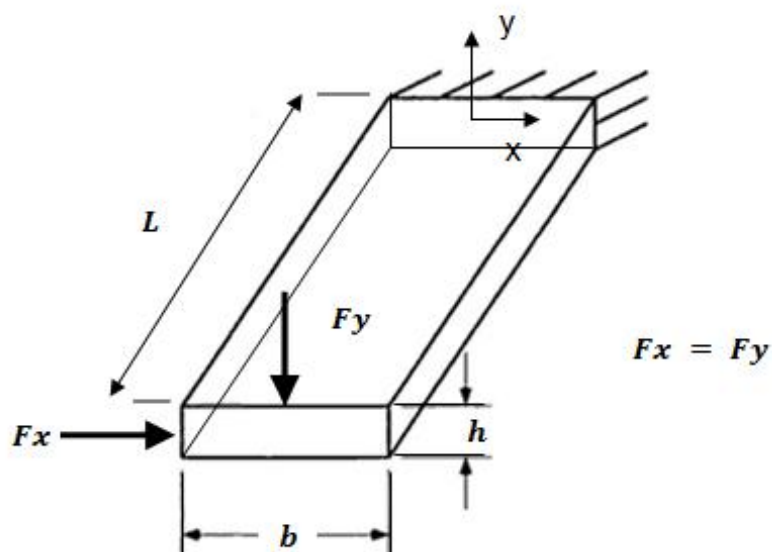


Figura 10 – Viga engastada.

Fonte: Adaptado de Howell (2001).

A Figura 10 mostra uma viga engastada onde duas forças são aplicadas, uma na direção em x e outra na direção y. As forças são analisadas separadamente. Para a viga acima, os momentos de inércia nas duas direções são:

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \quad (4)$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad (5)$$

A equação da deflexão em cada direção pode ser dada por:

$$\delta = \frac{1}{EI_{viga}} \iint M \, dx dy \quad (6)$$

onde:

E = módulo de elasticidade do material

I_{viga} = momento de inércia

M = Momento fletor

Reescrevendo, a deflexão pode ser obtida por:

$$\delta = \frac{FL^3}{3EI_{viga}} \quad (7)$$

A equação da tensão de flexão é escrita da forma:

$$\sigma = \frac{Md}{I_{viga}} \quad (8)$$

Onde d é a distância do eixo neutro até o ponto de interesse de análise e M o momento fletor causado pela força F . Pode-se escrever a força máxima suportada pela viga em cada eixo como:

$$F_{y_{m\acute{a}x}} = \frac{2I_{viga}\sigma_{esc}}{Lh} \quad (9)$$

$$F_{x_{m\acute{a}x}} = \frac{2I_{viga}\sigma_{esc}}{Lb} \quad (10)$$

As equações descritas são utilizadas para demonstrar de maneira simplificada o entendimento das características mencionadas.

Rigidez e flexibilidade

A propriedade de rigidez pode ser compreendida observando as deflexões em cada eixo. Analisando cada força separadamente e utilizando as equações de (1) a (4), podem-se determinar as máximas deflexões em cada direção:

$$\delta_{x_{m\acute{a}x}} = \frac{2\sigma_{esc}L^3}{3Eb} \quad (11)$$

$$\delta_{y_{m\acute{a}x}} = \frac{2\sigma_{esc}L^3}{3Eh} \quad (12)$$

$$\delta_{y_{m\acute{a}x}} = \frac{h}{b}\delta_{x_{m\acute{a}x}} \quad (13)$$

Conforme se observa, as deflexões se mostram diferentes para a direção x e y e o que se verifica é que, apesar das forças serem as mesmas, a localização da força altera a maneira de se analisar a geometria. Cada direção confere seu particular momento de inércia (propriedade geométrica), o que resulta em diferentes valores de deflexão. Isso reforça o conceito da rigidez como sendo uma propriedade diretamente dependente da geometria.

Para a análise da flexibilidade, utilizam-se as equações (5) e (7). A equação da deflexão pode ser escrita como:

$$\delta_y = 4F \left(\frac{1}{E} \right) \left(\frac{L^3}{bh^3} \right) \quad (14)$$

onde:

$1/E$: termo relacionado à propriedade do material

L^3/bh^3 : termo relacionado à geometria do material

Na equação (14) fica evidente essa relação da flexibilidade com a propriedade geométrica e a propriedade do material. Alterando as variáveis geométricas da equação (14), consegue-se visualizar a mudança no comportamento da deflexão da viga, conforme Figura 11.

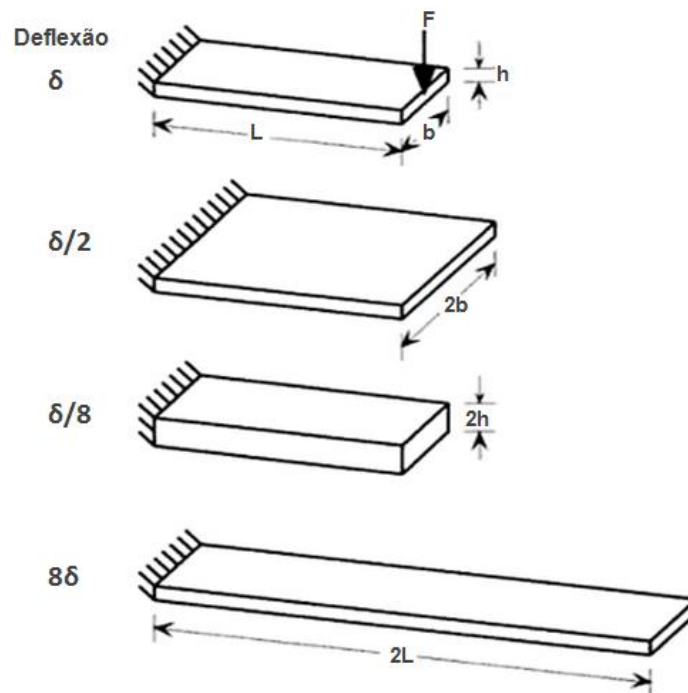


Figura 11– Alteração da deflexão devido a mudanças na geometria

Fonte: Howell (2001)

Material

Os materiais escolhidos para os mecanismos flexíveis têm por principal objetivo maximizar a flexibilidade. Utilizando as equações (5), (7) e (9) pode-se escrever a equação da máxima deflexão no eixo y como:

$$\delta_{y_{m\acute{a}x}} = \frac{2}{3} \left(\frac{\sigma_{esc}}{E} \right) \frac{L^3}{h} \quad (15)$$

A razão entre tensão de escoamento e módulo de elasticidade, em parênteses na equação (15), representa as propriedades do material e está diretamente ligada a máxima deflexão da viga. Para os mecanismos flexíveis, esta razão representa uma propriedade importante para a seleção de materiais de projeto. Quanto maior o valor dessa razão maior será a deflexão do membro flexível.

Enrijecimento por tensão

O enrijecimento por tensão ocorre quando a rigidez da estrutura é modificada em função das grandes deflexões geradas pelos membros flexíveis. O problema da não linearidade é gerado em virtude dessa dependência da rigidez à deflexão dos membros elásticos. A Figura 12 mostra o modo de como a ação de uma força altera a flexibilidade do membro flexível.

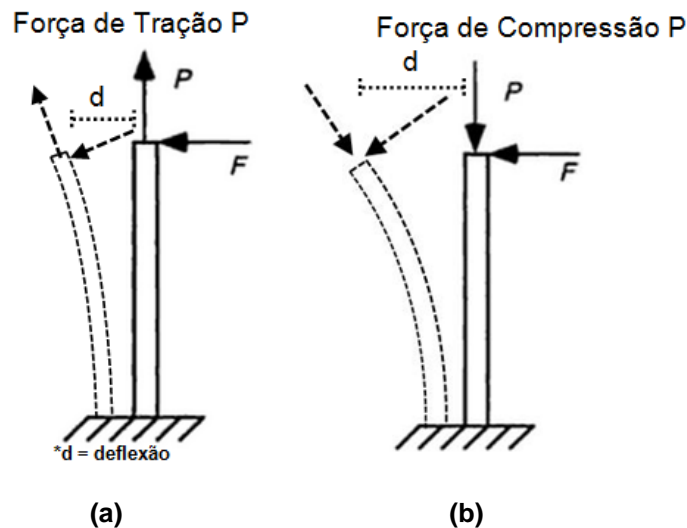


Figura 12 – Viga com várias combinações de cargas, compressão e tração.

Fonte: Adaptado de Howell (2001)

Se o membro flexível sofrer a ação de uma força P de tração na sua seção, Figura 12 (a), esta carga atuará como uma força contrária à deflexão, ou seja, acrescentado maior rigidez ao membro. Caso esta força for de compressão, Figura 12 (b), esta contribuirá para maior deflexão do corpo.

2.3 Critérios de falha

No projeto de mecanismos flexíveis dois modos de falhas devem ser analisados. Para casos em que o mecanismo flexível desempenha poucos ciclos

durante sua vida, a teoria de falha estática pode ser utilizada. No entanto, a grande maioria dos mecanismos flexíveis é projetada para realizar grande quantidade de ciclos no decorrer da vida, o que resulta em cargas variantes no tempo. Logo a falha por fadiga deve ser analisada. As tensões predominantes promovidas pelos membros flexíveis são tensão normal e tensão de flexão.

2.3.1 Falha estática

A análise da falha estática pode ser dividida para dois tipos de materiais, materiais dúcteis e materiais frágeis.

Materiais dúcteis

Para a análise de falha dos materiais dúcteis, duas teorias são geralmente adotadas para critério de falha, a teoria da máxima tensão de cisalhamento e a teoria da máxima energia de distorção (von Mises).

A teoria da máxima tensão de cisalhamento estabelece que para que não ocorra a falha, a tensão de cisalhamento atuante deve ser menor ou igual à tensão de cisalhamento do material, equação (17). A tensão máxima de cisalhamento do material pode ser dada como:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_{esc}}{2} \quad (16)$$

e para que não ocorra a falha:

$$\tau \leq \tau_{m\acute{a}x} \quad (17)$$

onde:

$\tau_{m\acute{a}x}$: tensão máxima de cisalhamento do material

τ : tensão de cisalhamento atuante

σ_{esc} : tensão de escoamento do material

A teoria da máxima energia de distorção (von Mises) estabelece que para que não ocorra a falha, a tensão equivalente atuante deve ser menor ou igual à tensão de escoamento do material, conforme equação (18).

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_{esc} \quad (18)$$

Para um estado de tensão bidimensional, a tensão equivalente pode ser escrita como:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (19)$$

onde:

σ_x : tensão de tração na direção x

σ_y : tensão de tração na direção y

τ_{xy} : tensão de cisalhamento

Materiais frágeis

Embora pouco utilizados em comparação aos materiais dúcteis, os materiais frágeis são também empregados para o projeto de mecanismos flexíveis. Para a análise de materiais frágeis duas teorias são mais utilizadas, a teoria de Coulomb-Mohr e a teoria de Mohr modificada. Em virtude dos materiais frágeis apresentarem tensões últimas diferentes de compressão e tração, dois casos devem ser analisados.

Para o estado plano de tensão, a teoria de Coulomb-Mohr estabelece que para que não ocorra a falha, o coeficiente de segurança (CS) deve ser maior ou igual a um. A equação (20) é utilizada quando $\sigma_1 > \sigma_3$ e $\sigma_3 \geq 0$.

$$CS = \frac{\sigma_{\acute{u}ltima}}{\sigma_1} \quad (20)$$

Conhecidas também como tensões principais, σ_1 e σ_3 são as tensões normais no plano onde as tensões de cisalhamento são nulas. As variáveis $\sigma_{\acute{u}ltima}$ e σ_{comp} são as tensões máxima de tração e compressão respectivamente. A equação (21) é empregada quando $\sigma_1 \geq 0$ e $\sigma_3 \leq 0$.

$$CS = \frac{\sigma_{\acute{u}ltima} \sigma_{comp}}{\sigma_{\acute{u}ltima} \sigma_1 - \sigma_{\acute{u}ltima} \sigma_3} \quad (21)$$

A teoria de Mohr modificada analisa os coeficientes de segurança de acordo com as equações (22) e (23). A equação (22) é utilizada quando $\sigma_3 \geq -\sigma_{\acute{u}ltima}$.

$$CS = \frac{\sigma_{\acute{u}ltima}}{\sigma_1} \quad (22)$$

e a equação (23)  utilizada quando $\sigma_3 < -\sigma_{\acute{u}ltima}$:

$$CS = \frac{\sigma_{\acute{u}ltima} \sigma_{comp}}{\sigma_{\acute{u}ltima} \sigma_1 - \sigma_{\acute{u}ltima} (\sigma_1 + \sigma_3)} \quad (23)$$

Quando se faz o uso de materiais frágeis no projeto de mecanismos flexíveis deve ser feita uma análise cuidadosa dos níveis de tensões atuantes nos segmentos, pois caso as tensões alcancam valores acima do limite elástico, existe a possibilidade da ocorrência de uma falha catastrófica. Outro fator que também se deve atentar são os pontos de concentração de tensão, pois estas são as regiões onde são esperados valores elevados de tensão.

2.3.2 Falha por fadiga

Para a maioria dos mecanismos flexíveis as cargas dinâmicas estão presentes em virtude dos movimentos realizados. Estas cargas repetidas durante o período de vida dos mecanismos podem resultar no fenômeno de falha por fadiga. As cargas oscilatórias (tração) presentes, atuam para o crescimento de uma trinca até que esta chega ao seu limite (limite de tenacidade à fratura) ocorrendo  falha repentina. As tensões em que esta falha ocorre geralmente se encontram abaixo da tensão de escoamento do material. Para o projeto de mecanismos flexíveis a análise de falha por fadiga se torna essencial para prever e reduzir as possibilidades de falha prematura do mecanismo.

Para estudar o comportamento do número de ciclos até a ocorrência de falha por fadiga, vários testes devem ser efetuados em protótipos, simulando as condições reais de carga de servio. No entanto, produzir protótipos e realizar testes se tornam complicados na prática. Assim, várias técnicas de ensaios experimentais são empregadas para analisar o comportamento de diversos tipos de materiais. O diagrama S-N (Tensão x Número de ciclos)  um gráfico bastante conhecido para se analisar os dados de resistência à fadiga dos materiais. O gráfico apresenta o resultado de vários corpos de prova do mesmo material submetido a diferentes cargas flutuantes. Cada valor tensão mostra o número de ciclos realizados até a

ocorrência de falha. A Figura 13 (a) apresenta o diagrama tensão por números de ciclos (S-N) de um aço. O material em análise apresenta o limite de resistência à fadiga (S_e) para uma vida infinita, ou seja, tensões de trabalho abaixo da tensão S_e , o material não apresentará a falha por fadiga. Para tensões acima do limite de resistência a fadiga, o material apresentará uma determinada vida finita dependendo de cada tensão de trabalho. A Figura 13 (b) apresenta o diagrama S-N para um material onde não se tem o limite de resistência à fadiga para uma vida infinita.

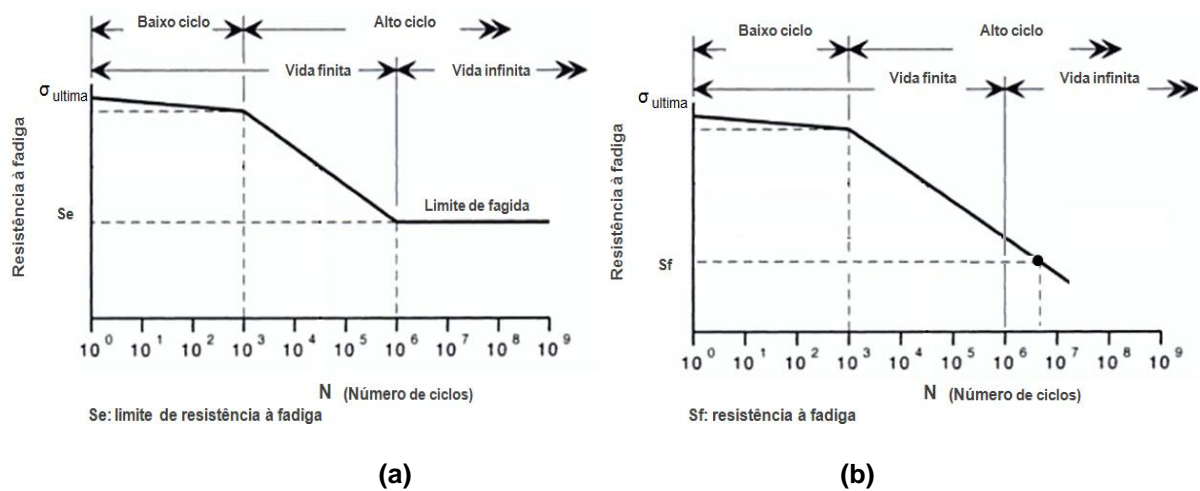


Figura 13 – (a) Curva S-N de fadiga com limite de fadiga e (b) Curva S-N de fadiga sem o limite de resistência a fadiga

Fonte: Adaptado de Howell (2001)

Prevenção da falha por fadiga

Três modelos de falha por fadiga podem ser empregados para a análise de falha e cada um possui um determinado propósito. As análises de fadiga podem ser feitas utilizando modelo de tensão-número de ciclos (S-N), modelo de deformação-número de ciclos (ϵ -N) e pela mecânica da fratura linear elástica (MFLE). Em função do modelo de análise tensão-número de ciclos ser de fácil aplicação é o mais utilizado para projetos de equipamentos.

A Figura 13 ilustra o diagrama característico S-N, onde na maioria das vezes o projeto se preocupa com a análise de fadiga de altos ciclos. A equação que representa a região de fadiga de alto ciclo, tanto para vida finita quanto para vida infinita, é escrita de acordo com a equação (24).

$$S_f = a(N)^b \quad (24)$$

onde:

S_f = resistência à fadiga

N = número de ciclos

a e b = parâmetros encontrados a partir do material

Limite de resistência à fadiga e resistência a fadiga

Quando se projeta um equipamento mecânico para uma vida infinita, ou seja para número de ciclos maiores que 10^6 , há a necessidade de se conhecer um parâmetro de comparação com as tensões atuantes nos sistema. Para ciclos maiores que 10^6 , alguns materiais apresentam o limite de resistência à fadiga (S_e). Conforme mostrado na Figura 13 (a). Esse parâmetro de tensão se apresenta como uma reta horizontal limite. Para tensões de trabalho abaixo desse parâmetro, a falha por fadiga não ocorrerá. Outros materiais não apresentam esse limite de resistência à fadiga e para uma determinada tensão (tensão de resistência à fadiga S_f) haverá um número médio de ciclos até a ocorrência de falha, conforme Figura 13 (b). Para cargas dinâmicas, estas tensões resistentes à fadiga descritas (S_e e S_f), são os parâmetros utilizados para a análise de critério de falha, similarmente ao valor de resistência ao escoamento para a falha estática.

Para alguns materiais, extensos testes de verificação para fadiga já foram executados e esses dados encontram-se disponíveis em *handbooks*. No entanto, para a grande maioria dos materiais, essas informações não existem e uma aproximação deve ser feita para se obter as resistências à fadiga para o projeto do equipamento. Estas informações podem ser encontradas para diversos tipos de materiais e tensões de escoamento. Para o aço, uma boa aproximação pode ser encontrada através:

$$S_e' \approx \begin{cases} 0,5 \cdot \sigma_{\text{última}} & \text{para } \sigma_{\text{última}} < 1400 \text{ MPa} \\ 700 \text{ MPa} & \text{para } \sigma_{\text{última}} \geq 1400 \text{ MPa} \end{cases} \quad (25)$$

O valor de resistência à fadiga encontrada, seja por testes de fadiga ou por aproximações, não representa as reais condições em que o equipamento irá atuar

durante sua vida. Estes valores foram obtidos a partir de testes em laboratórios, realizados em corpos de provas controlados. Portanto estes dados devem ser modificados para representar de modo adequado as condições reais de trabalho. Portanto, o limite de resistência à fadiga ou resistência à fadiga a ser utilizado pode ser encontrado utilizando as equações (26) e (27). Essas equações possuem as variáveis conhecidas como fatores modificadores que tem por objetivo representar as reais condições de trabalho.

$$S_f = C_{sup} C_{tam} C_{carreg} C_{conf} C_{conc} C_{temp} S_f' \quad (26)$$

ou

$$S_e = C_{sup} C_{tam} C_{carreg} C_{conf} C_{conc} C_{temp} S_e' \quad (27)$$

onde:

S_e' : limite de resistência à fadiga teórico (não corrigida)

S_f' : resistência à fadiga teórico (não corrigida)

C_{sup} : fator de superfície

C_{tam} : fator de tamanho

C_{carreg} : fator de carregamento

C_{conf} : fator de confiabilidade

C_{conc} : fator de concentração de tensão

C_{temp} : fator de temperatura

Norton (2013) descreve cada fator e como obtê-lo a partir das características e condições do projeto em análise.

Critério de falha por fadiga

O critério de falha por fadiga deve ser analisado dependendo dos tipos de cargas envolvidas no projeto. As equações dos critérios de falha são divididas em dois tipos, para cargas onde a tensão média é igual a zero ($\sigma_m = 0$) e para cargas em que a tensão média é diferente de zero ($\sigma_m \neq 0$).

O critério de falha para a tensão média igual a zero podem ser:

$$CS = \frac{S_e}{\sigma_{m\acute{a}x}} \quad (28)$$

$$CS = \frac{S_f}{\sigma_{m\acute{a}x}} \quad (29)$$

Onde $\sigma_{m\acute{a}x}$ é a tensão máxima atuante no equipamento. Caso as tensões máximas das equações (28) ou (29) forem maiores que as tensões do limite e da resistência à fadiga, a equação (24) deve ser utilizada para estimar o número de ciclos até a falha.

Os critérios de falha para casos em que a tensão média é diferente de zero são:

$$\frac{1}{CS} = \frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{\acute{u}ltima}} \quad (30)$$

$$\frac{1}{CS} = \frac{\sigma_a}{S_f} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{\acute{u}ltima}} \quad (31)$$

onde:

σ_a : tensão alternada

σ_m : tensão média

2.4 Mecanismos de corpos rígidos

2.4.1 Conceitos fundamentais

Os mecanismos tradicionais conhecidos como mecanismos de corpos rígidos, apresentam mínimas deformações em seus componentes e por isso as deflexões são desconsideradas na análise (HOWELL, 2001). Para o projeto de um mecanismo, dois tópicos devem ser estudados. A síntese de mecanismos, que busca obter um determinado mecanismo que realize movimento e tarefas desejadas e a análise de mecanismos, que tem por objetivo determinar o comportamento dinâmico dos corpos rígidos. (NORTON, 2010).

Norton (2010) descreve dois conceitos para razões didáticas no estudo de mecanismos, a cinemática e a cinética.

Cinemática: estudo do movimento, desconsiderando as forças que o causaram.

Cinética: estudo das forças de sistemas em movimento.

Shigley (1995) apresenta um esquema da localização desses dois tópicos dentro da área da dinâmica.

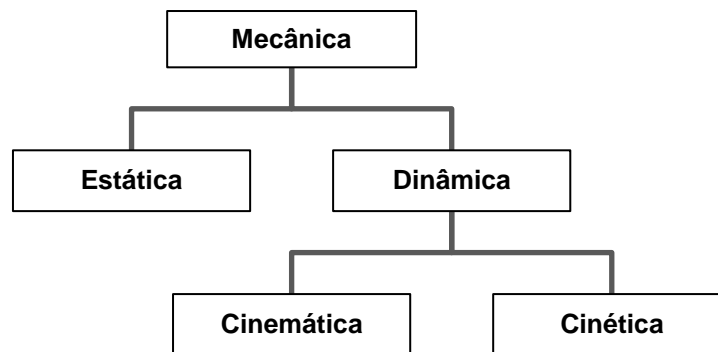


Figura 14 - Áreas da mecânica.

Fonte: Shigley (1995)

2.4.1.1 Graus de liberdade (GDL) ou mobilidade

A mobilidade ou o número de graus de liberdade de um mecanismo é o número de parâmetros (variáveis) necessários para descrever o movimento do mecanismo (HOWELL, 2001).

Para determinar o número de graus de liberdade de um mecanismo rígido, a equação de Gruebler (modificada por Kutzbach) pode ser utilizada.

$$M = 3(N_e - 1) - 2J_1 - J_2 \quad (32)$$

onde:

M: graus de liberdade ou mobilidade

N_e : número de elos

J_1 : número de juntas com um GDL

J_2 : número de juntas com dois GDL

2.4.1.2 Terminologias

Para um sistema cinemático de duas dimensões, um corpo rígido qualquer pode desempenhar os seguintes movimentos: rotação pura, translação pura ou a combinação simultânea desse movimento, conhecido como movimento complexo.

Os elos e as juntas são componentes que podem compor um mecanismo. Norton (2010) descreve esses dois componentes como:

Elos: “um corpo rígido que possui ao menos dois nós que são pontos para se anexar a outros elos”.

Juntas: “é uma conexão de um ou mais elos (em seus nós) que permite o movimento entre os elos conectados”.



Figura 15 – Elos e juntas

Fonte: Adaptado de Norton (2010).

Diagramas esquemáticos podem ser feitos com o objetivo de analisar o mecanismo em estudo. A Figura 16 apresenta as simbologias para a representação dos componentes dos mecanismos rígidos.

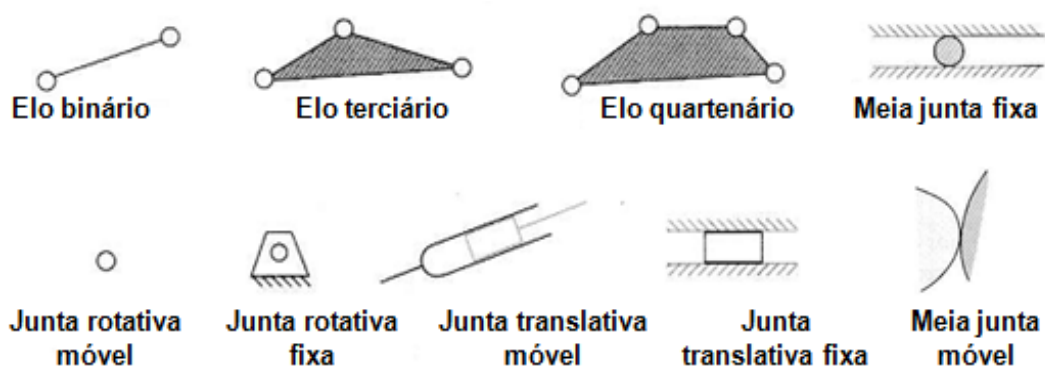


Figura 16 – Simbologia dos mecanismos rígidos

Fonte: Norton (2010).

2.4.2 Síntese de mecanismos

O objetivo da síntese cinemática é produzir um mecanismo que apresente as características desejadas de movimento (NORTON, 2010). Várias soluções de mecanismo podem ser encontradas para o problema em questão, no entanto, é preciso analisar as características dinâmicas e definir qual destas soluções

proporciona melhor desempenho para uma aplicação. Portanto o processo do projeto de um mecanismo envolve um processo iterativo de síntese e análise.

Para o projeto de síntese de um mecanismo, três etapas podem ser adotadas.

- 1) **Tipo de mecanismo:** definição do tipo de mecanismo a ser empregado para o problema.
- 2) **Quantidade de elementos (síntese numérica):** definição do número de elos, juntas e graus de liberdade necessários para desempenhar o movimento;
- 3) **Dimensões (síntese dimensional):** definição das dimensões (geometria) dos elementos.

Depois de definido o tipo de mecanismo e a quantidade de elementos, a próxima etapa é definir os comprimentos necessários dos elos. Para a síntese dimensional de um mecanismo de quatro barras, dois métodos podem ser utilizados, síntese gráfica (geração de movimento ou trajetória) ou síntese analítica (geração de função).

Síntese analítica: é um método algébrico e menos intuitivo e é definido como a “correlação entre uma função de entrada e uma função de saída em um mecanismo” (NORTON, 2010), ou seja, deseja-se fazer com que o corpo se movimente seguindo uma função matemática.

Síntese gráfica: é um método que se utiliza de representações gráficas para a síntese o mecanismo e possibilitam a visualização do sistema em análise. Pode ser de dois tipos, gerador de movimento ou de trajetória. Gerador de movimento é quando se deseja controlar uma linha de modo a estabelecer posições pré-estabelecidas e o gerador de trajetória em vez da linha, um ponto é controlado.

2.4.3 Análise cinemática de mecanismos

Depois de obtido as características dimensionais do mecanismo, a próxima etapa é analisar o comportamento cinemático dos elementos. A análise cinemática dos mecanismos envolve entender todos os aspectos relacionados ao movimento, como posição, velocidade, aceleração.

2.4.3.1 Análise de posição, velocidade e aceleração

A análise de posição pode ser efetuada por vários métodos disponíveis. Os métodos mais comuns são o método gráfico e o método analítico. Para a análise de velocidade e aceleração o método gráfico se torna complexo, já para o método analítico, mais comumente utilizado, uma vez obtidas as equações de posição, as velocidades e acelerações podem ser conseguidas apenas derivando essas expressões.

2.5 Modelo de corpo pseudo-rígido (PRBM)

O método de análise dos mecanismos flexíveis é mais complexo que o dos mecanismos de corpos rígidos em função das grandes deflexões de seus membros. Esses grandes deslocamentos geram não linearidades no sistema e o método tradicional de corpos rígidos não pode ser utilizado diretamente. Howell (2001) descreve o método de corpo pseudo-rígido (PRBM) como sendo um conceito empregado para modelar a deflexão dos membros flexíveis utilizando elementos de corpos rígidos que tenham características equivalentes de força-deflexão. Depois de aplicado o método PRBM, o método tradicional de análise de mecanismos pode ser empregado, ou seja, o método serve como um vínculo entre a teoria dos mecanismos rígidos e a teoria dos mecanismos flexíveis (HOWELL, 2001). A Figura 17 apresenta um mecanismo flexível biela manivela e o resultado depois de aplicado o método PRBM.

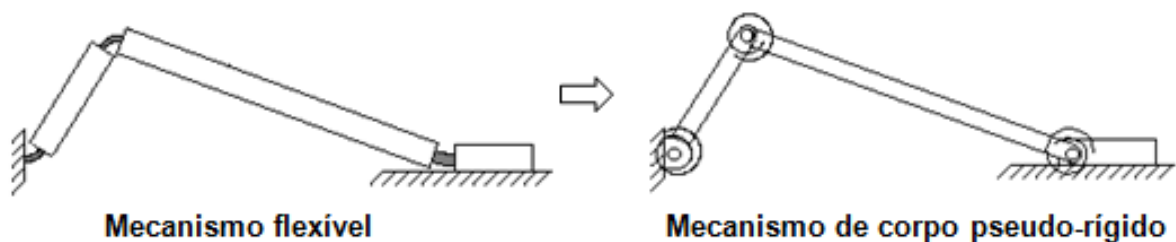


Figura 17 – Mecanismo flexível biela manivela e o mecanismo de corpo pseudo-rígido

Fonte: Adaptado de Howell; Magleby; Olsen (2013).

O modelo de corpo pseudo-rígido representa um conjunto de equações e diagramas que descrevem de modo aproximado às relações de força e deslocamento do membro flexível. O comportamento de um membro flexível se difere dependendo da geometria e das condições de contorno e em função disso

vários modelos de corpos pseudo-rígidos são descritos por Howell (2001). A Figura 18 apresenta alguns dos modelos de corpos pseudo-rígidos para determinadas condições de contorno.



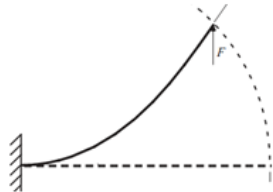
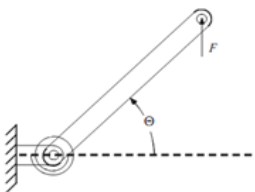
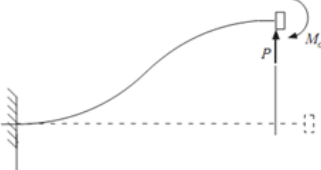
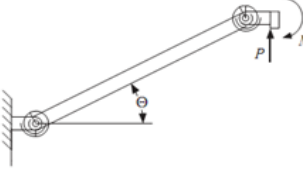
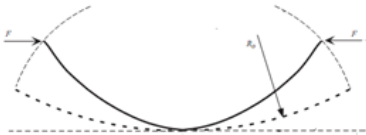

Mecanismo flexível	Mecanismo pseudo-rígido	Condição
		Junta flexível e momento aplicado numa viga rígida
		Força vertical aplicada na extremidade de uma viga flexível
		Ângulo da extremidade constante de uma viga flexível
		Viga flexível inicialmente curvada e força horizontal aplicada nas extremidades

Figura 18 – Modelos de corpos rígidos para diferentes condições de contorno

Fonte: Adaptado de Howell (2001).

O método *PRBM* modela a deflexão de um segmento flexível através de elos rígidos conectados em articulações de revolução e uma mola torcional é adicionada a estas articulações com o objetivo de simular a rigidez do membro elástico. O ponto central do método de corpo pseudo-rígido está na escolha da posição da articulação e o valor da constante de rigidez da mola.

Conforme mencionando, para cada diferente segmento e condições de contorno, distintas equações para a deflexão podem ser obtidas analiticamente. Howell (2001) apresenta uma biblioteca de modelos pseudo-rígidos para várias geometrias de vigas e diferentes tipos de carregamento. Portanto, é descrito apenas características importantes para o entendimento do conceito de *PRBM*.

A Figura 19 mostra um membro flexível e seu modelo de corpo pseudo-rígido onde as principais características são apresentadas.

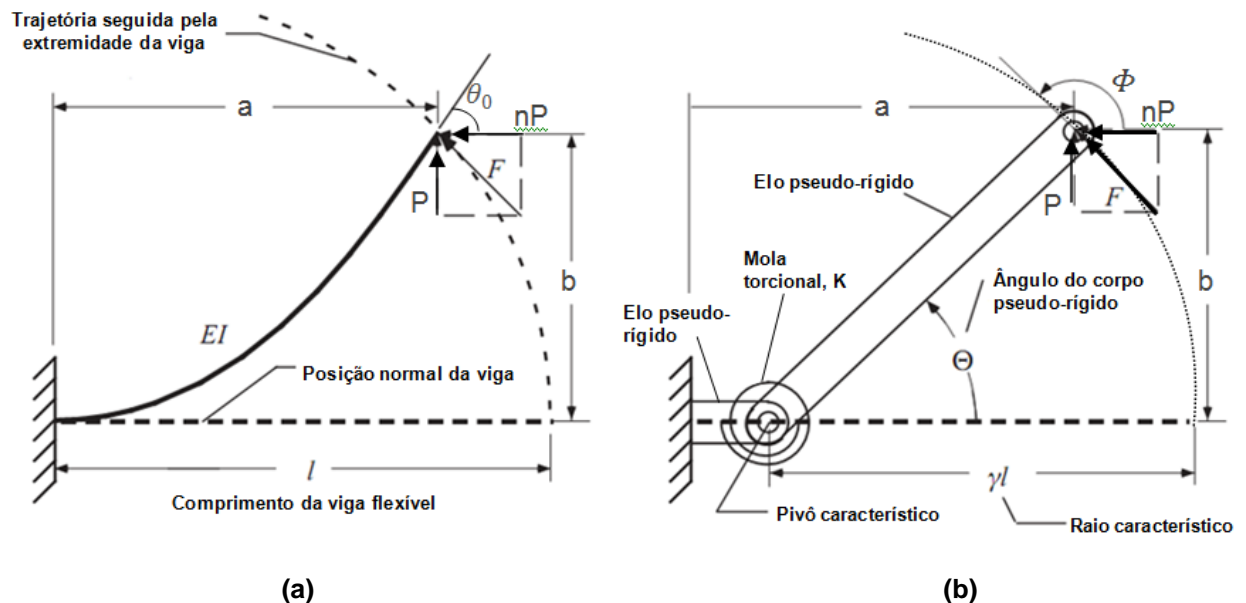


Figura 19 – Principais características do modelo de corpo pseudo-rígido

Fonte: Adaptado de Howell (2001)

O segmento flexível da Figura 19 (a) é modelado utilizando o método *PRBM*. Uma força F é aplicada na extremidade da viga e as grandes deflexões presentes podem ser visualizadas através de sua trajetória. As dimensões a e b representam a posição da extremidade em um determinado momento. A Figura 19 (b) representa o modelo pseudo-rígido da viga flexível. Para a representação das características da trajetória da viga, é utilizado no modelo pseudo-rígido dois elos unidos por uma junta de revolução, onde uma mola torcional é adicionada nesta junta.

As principais características do modelo *PRBM*, Figura 19 (b), podem ser descritas:

Mola torcional: inserido para simular a rigidez da viga, ou seja, a resistência à deflexão;

Elo pseudo-rígido: dois elos rígidos foram inseridos para modelar a deflexão do membro flexível;

θ : ângulo formado pelo elo pseudo-rígido e o eixo horizontal;

Pivô característico: articulação onde os membros rígidos são conectados e onde a mola torcional é inserida;

l : comprimento da viga flexível;

γ : fator do raio característico;

γl : raio característico, é o raio da trajetória feita pela deflexão da extremidade do elo pseudo-rígido. O comprimento deste raio é a parcela do comprimento total da viga flexível;

P e nP : componentes da força F , o valor positivo de n representa a força que causa a compressão na viga;

Φ : Ângulo entre a força nP e a força F .

2.5.1 Modelagem analítica do mecanismo flexível

Howell (2001) apresenta condições de contorno para a modelagem de diferentes mecanismos flexíveis. Dentre os diferentes modelos, são apresentadas duas situações da aplicação do método, viga engastada com uma força na extremidade (fixo-pinado) e segmento engastado com a extremidade guiada (fixo-guiado).

2.5.1.1 Viga engastada com uma força na extremidade (segmento fixo-pinado)

A Figura 20 (a) apresenta a aplicação de uma força F na extremidade de viga flexível engastada. A Figura 20 (b) e (c) representam o modelo de corpo pseudo-rígido da viga flexível.

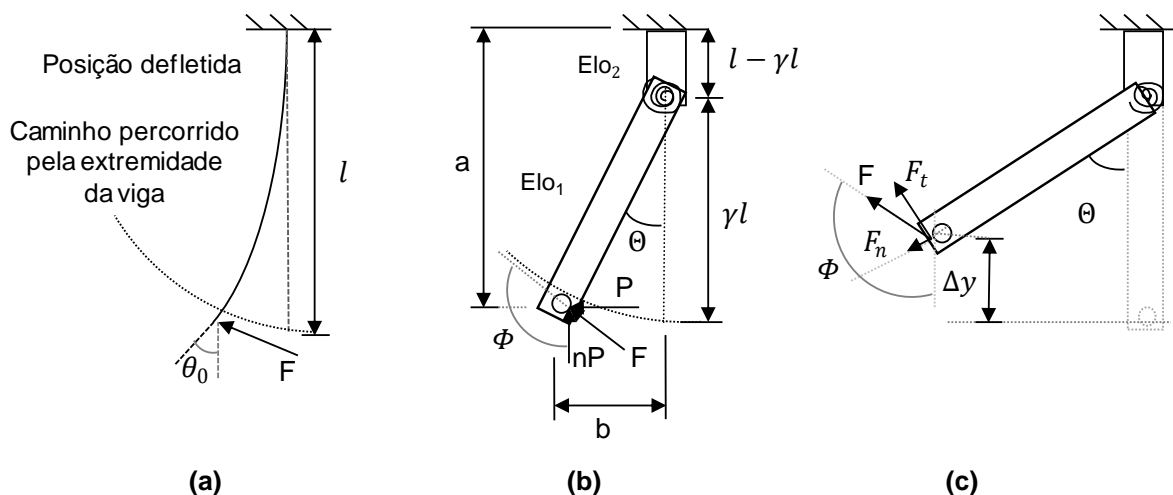


Figura 20 – (a) viga flexível, (b) viga flexível modelada com o método do corpo pseudo-rígido e (c) variação do deslocamento no eixo y

Fonte: Adaptado de Howell (2001)

Para a modelagem do segmento flexível, dois elos rígidos são utilizados e uma mola torcional é adicionada a junta de revolução que conecta os dois elos. A função da mola torcional é simular a rigidez do segmento flexível. Os comprimentos dos elos podem ser dados pelas equações:

$$\text{Elo}_1 = \gamma l \quad (33)$$

$$\text{Elo}_2 = l - \gamma l \quad (34)$$

onde l é o comprimento da viga flexível e γ o fator de raio característico.

Fator do raio característico (γ)

Devido aos erros de aproximação do método, deve-se estabelecer a máxima porcentagem do erro aceitável para a aproximação da deflexão da viga flexível. A Figura 21 mostra a comparação da deflexão utilizando o método da integral elíptica e o método do corpo pseudo-rígido. O erro pode ser visualizado devido a diferença da deflexão entre o elo flexível verdadeiro (abordagem utilizando integral elíptica) e o modelo aproximado utilizando o método do corpo pseudo-rígido. Quanto maior o ângulo de deflexão θ do elo pseudo-rígido, maior é o erro de aproximação. Portanto, o valor do fator do raio característico γ pode ser entendido como sendo o valor que permite maximizar o ângulo θ de deflexão e ao mesmo tempo satisfazer a restrição do erro máximo estabelecido.

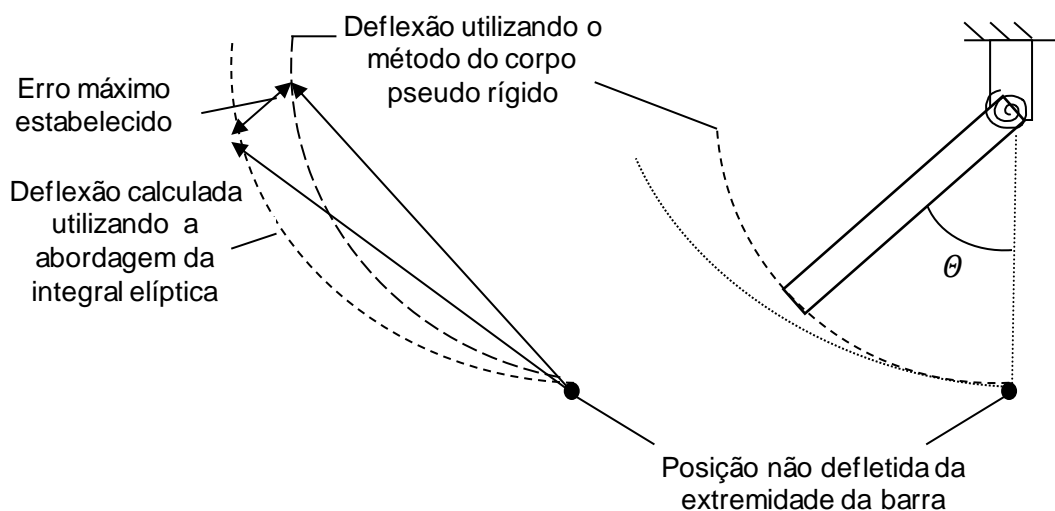


Figura 21 – Erro da deflexão utilizando o método do corpo pseudo-rígido

Fonte: Adaptado de Howell (2001)

Howell (2001) apresenta alguns valores do fator do raio característico γ em função dos ângulos de força ϕ , Tabela 2.

Tabela 2 – Dados numéricos para diferentes ângulos de força ϕ

ϕ (graus)	n	γ	$\theta_{m\acute{a}x}(\gamma)$ (graus)	c_{θ}	K_{θ}	$\theta_{m\acute{a}x}(K_{\theta})$ (graus)
64,3	-0,5	0,8612	47,7	1,2348	2,69320	44,4
90,0	0,0	0,8517	64,3	1,2385	2,67617	58,5
116,6	0,5	0,8430	81,8	1,2430	2,63744	64,1
135,0	1,0	0,8360	94,8	1,2467	2,61259	67,5

Fonte: Adaptado de Howell (2001)

Howell (2001) mostra que o valor do fator do raio característico γ não apresenta grande diferença para uma variedade de ângulos de força. Assim, o valor de γ é aproximado utilizando a média entres os valores, tem-se:

$$\gamma_{m\acute{e}dio} = 0,85 \text{ para } 135,0^{\circ} < \phi < 63,4^{\circ} \text{ ou } -0,5 < n < 1,0 \quad (35)$$

Coefficiente de ângulo paramétrico (c_{θ})

Uma aproximação linear entre o ângulo de deflexão do segmento flexível θ_0 e ângulo do elo pseudo-rígido θ pode ser dada por:

$$\theta_0 = c_{\theta} \theta \quad (36)$$

onde c_{θ} é uma constante conhecida como coeficiente de ângulo paramétrico. A Tabela 2 apresenta os valores de c_{θ} para diversos ângulos de força.

Coefficiente de rigidez (K_{θ})

A resistência à deflexão da viga pode ser modelada utilizando a constante K_{θ} conhecida como coeficiente de rigidez. Combinado com as propriedades geométricas e as propriedades do material, o coeficiente de rigidez é empregado para determinar o valor da constante de rigidez da mola torcional. A Tabela 2 também apresenta os valores do coeficiente de rigidez para diferentes ângulos de força. Howell (2001) apresenta um gráfico do coeficiente de rigidez K_{θ} em função da variável n (variável referente à componente horizontal de força nP). A Figura 22 mostra os valores de K_{θ} para diferentes ângulos de força F, ou seja, para diferentes valores de n.

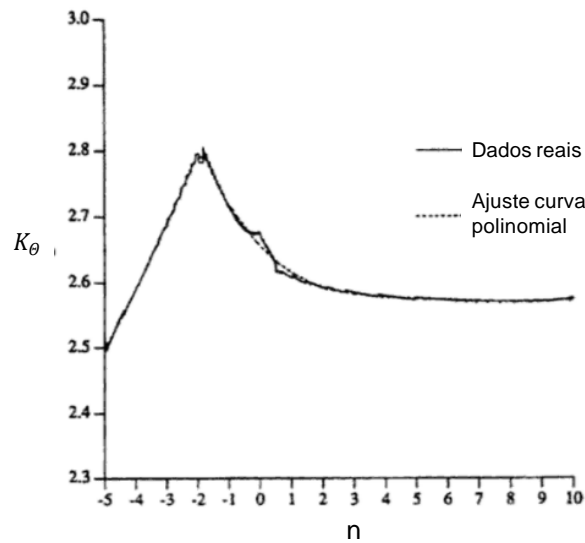


Figura 22 – Coeficiente de rigidez x n

Fonte: Howell (2001)

Percebe-se que a variação entre o menor e o maior valor do coeficiente de rigidez para os diversos ângulos de força é de aproximadamente 0,3. Dito isso, para uma aproximação, Howell (2001) estabelece um valor médio para o coeficiente de rigidez K_{θ} .

$$K_{\theta_{m\u00e9dio}} = 2,61 \text{ para } 11,3^{\circ} < \phi < 174,3^{\circ} \text{ ou } -5,0 < n < 10,0 \quad (37)$$

e

$$K_{\theta_{m\u00e9dio}} = 2,65 \text{ para } 63^{\circ} < \phi < 135^{\circ} \text{ ou } -5,0 < n < 1,0 \quad (38)$$

Constante de rigidez da mola torcional (K)

Combinado com as propriedades geom\u00e9tricas e as propriedades do material, a constante de rigidez da mola torcional pode ser encontrada atrav\u00e9s da equa\u00e7\u00e3o:

$$K = \gamma K_{\theta} \frac{EI}{l} \quad (39)$$

onde:

K_{θ} = coeficiente de rigidez

E = m\u00f3dulo de elasticidade do material

I = momento de in\u00e9rcia do segmento flex\u00edvel

l = comprimento do segmento flex\u00edvel

Coordenadas da extremidade livre da viga

As coordenadas a e b da extremidade da viga podem ser dadas por:

$$a = l - (\gamma l - \gamma l \cos\theta) \quad (40)$$

$$b = \gamma l \sin\theta \quad (41)$$

A variação do deslocamento da extremidade da viga referente ao eixo y, conforme Figura 20 (c), é dada como:

$$\Delta y = \gamma l - \gamma l \cos \theta \quad (42)$$

Forças na extremidade livre da viga

A força F aplicada na extremidade da viga pode ser escrita em termos dos componentes da horizontal (P) e vertical (nP):

$$F = P\sqrt{n^2 + 1} \quad (43)$$

A força F também pode ser utilizada para descrever as componentes da força que são tangente e normal à trajetória feita pela extremidade do segmento, Figura 20 (c).

$$F_t = F \sin (\Phi - \theta) \quad (44)$$

$$F_n = F \cos (\Phi - \theta) \quad (45)$$

A componente tangente F_t gera uma força de torque na mola torcional e contribui diretamente para a deflexão do elo pseudo-rígido, esta força é também conhecida como força ativa. A componente normal F_n não contribui para a deflexão e é chamada de força passiva.

A componente da força tangencial pode ser escrita de outra maneira:

$$F_t = \frac{K\theta}{\gamma l} \quad (46)$$

Combinando as equações (43), (44) e (46), podemos apresentar a força P como:

$$P = \frac{K \theta}{\gamma l \sqrt{(1 + n^2)} \operatorname{sen}(\Phi - \theta)} \quad (47)$$

Configurações de mecanismos com segmentos fixo-pinado

A Figura 23 apresenta exemplos de mecanismos flexíveis onde tem-se a condição de segmento fixo-pinado.

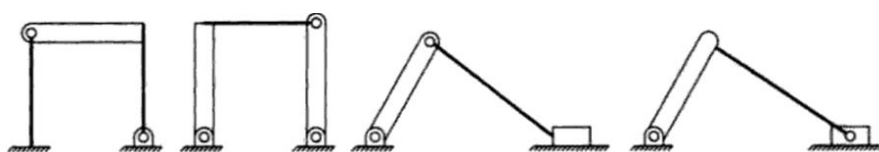


Figura 23 – Exemplos de mecanismos flexíveis com segmentos fixo-pinado

Fonte: Howell (2001)

Similarmente ao caso da força aplicada na viga, nos mecanismos da Figura 23, a força na extremidade do segmento ocorre na junta pinada de revolução. A outra extremidade fixa da viga pode ser investigada como uma fixação em um elemento rígido, como por exemplo, fixação no solo ou em um elo rígido.

2.5.1.2 Segmento engastado com a extremidade guiada (segmento fixo-guiado)

A Figura 24 (a) mostra o segmento flexível com uma força e um momento aplicado na extremidade. Devido ao momento fletor aplicado, a extremidade do segmento permanece com um ângulo constante durante a trajetória. Após a deflexão, o segmento flexível se apresenta como uma configuração antissimétrica em relação a linha central. No ponto central ocorre a máxima deflexão θ_0 e a curvatura do segmento se exhibe como zero. O diagrama de corpo livre (D.C.L.) da metade do segmento flexível pode ser visualizado na Figura 24 (a). Conforme o diagrama, o momento fletor no ponto central é nulo (devido à curvatura ser nula) e somente a força P é exibida no segmento. Observando atentamente as características da metade do segmento, estas se mostram similares às condições descritas do segmento fixo-pinado, item 2.5.1.1. Portanto, o modelo do corpo pseudo-rígido para o segmento flexível pode ser obtido utilizando a combinação de duas vigas antissimétricas, conforme Figura 24 (b).

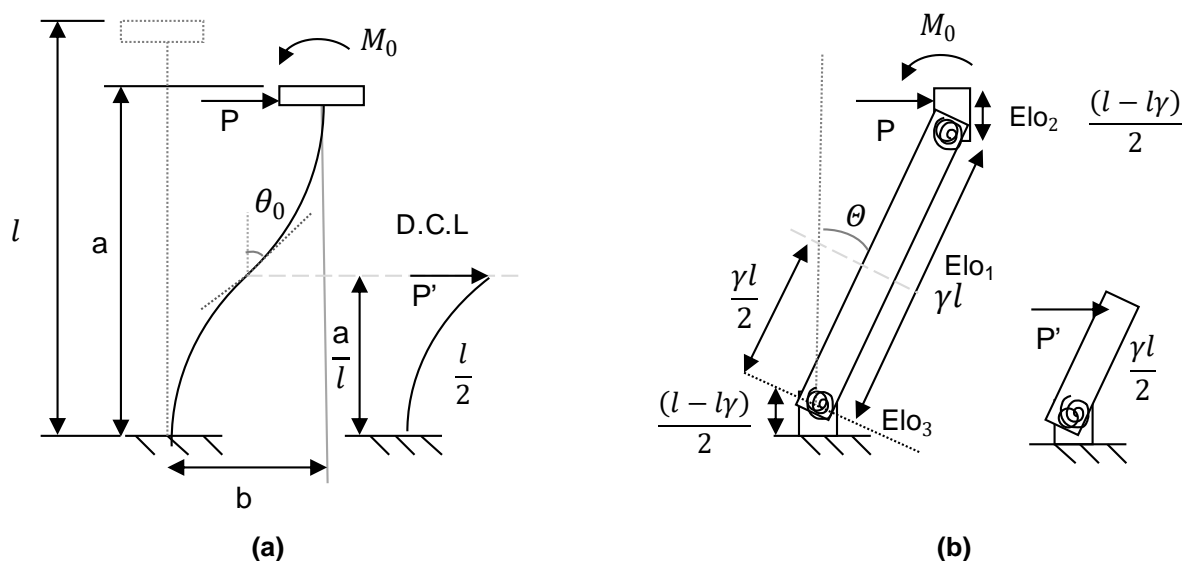


Figura 24 – (a) Viga flexível com ângulo da extremidade constante e o diagrama de corpo livre da metade do segmento (b) modelo do corpo pseudo-rígido da viga flexível

Fonte: Adaptado de Howell (2001)

Para análise do segmento fixo-guiado, a Figura 20 também é utilizada como uma referência. A força P é aplicada no eixo horizontal e portando a força nP é considerada nula, ou seja, temos o valor de n igual a zero.

Os comprimentos dos elos podem ser dados pelas equações (48) e (49).

$$Elo_1 = \gamma l \quad (48)$$

$$Elo_2 = Elo_3 = \frac{(l - \gamma l)}{2} \quad (49)$$

Para um determinado intervalo de ângulos de força, a equação (35) também pode ser utilizada para uma aproximação do fator de raio característico. De outra forma, a partir da Tabela 2, para n igual a zero, o fator de raio característico pode ser dado como:

$$\gamma = 0,8517 \quad (50)$$

Para o segmento flexível onde a extremidade permanece em um ângulo constante, o coeficiente de ângulo paramétrico é nulo.

$$c_\theta = 0 \quad (51)$$

O coeficiente de rigidez K_θ é encontrado da mesma forma do item 2.5.1.1. A constante de rigidez K de cada mola é dada por:

$$K = 2\gamma K_\theta \frac{EI}{l} \quad (52)$$

A força P que atua na extremidade do segmento pode ser descrito pela combinação das forças necessárias para dois segmentos fixo-pinado:

$$P = 2P' = 2 \left[\frac{K \theta}{\gamma l \sqrt{(1+n^2)} \text{sen}(\Phi - \theta)} \right] \quad (53)$$

As coordenadas da extremidade da viga podem ser encontradas através da manipulação das equações (40) e (41).

2.6 Síntese de substituição de corpo rígido

A síntese de substituição de corpo rígido é um método utilizado para se obter um elo/mecanismo flexível a partir de um elo/mecanismo pseudo-rígido utilizando o método de corpo pseudo-rígido (item 2.5).

Este conceito é utilizado quando se deseja gerar um elo ou mecanismo flexível que atenda as mesmas características de posição de um mecanismo tradicional de corpo rígido.

A dificuldade do método de síntese de substituição é determinar o modelo pseudo-rígido apropriado como também atender os requisitos definidos. Depois de obtida a configuração do mecanismo/elos flexível, as propriedades do segmento flexível podem ser determinadas de acordo as necessidades do projeto.

No modelo de corpo pseudo-rígido descrito no item 2.5, o mecanismo pseudo-rígido é obtido a partir de um mecanismo flexível. O mecanismo gerado é então analisado utilizando as equações analíticas desenvolvidas para o modelo. Porém, de maneira contrária, no método de síntese de substituição de corpo rígido, um mecanismo/elos pseudo-rígido (equivalente a um mecanismo rígido) é utilizado para se obter o mecanismo/elos flexível.

A Figura 25 (a) apresenta um elo rígido de dimensão conhecida onde é utilizado o método de substituição de corpo rígido para obter o elo flexível. O objetivo

é gerar um elo flexível que atenda as mesmas posições de trajetória da extremidade do elo rígido. A condição de contorno fixo-pinado (item 2.5.1.1) do método do corpo pseudo-rígido é utilizada para gerar o modelo pseudo-rígido e por final obter elo flexível.

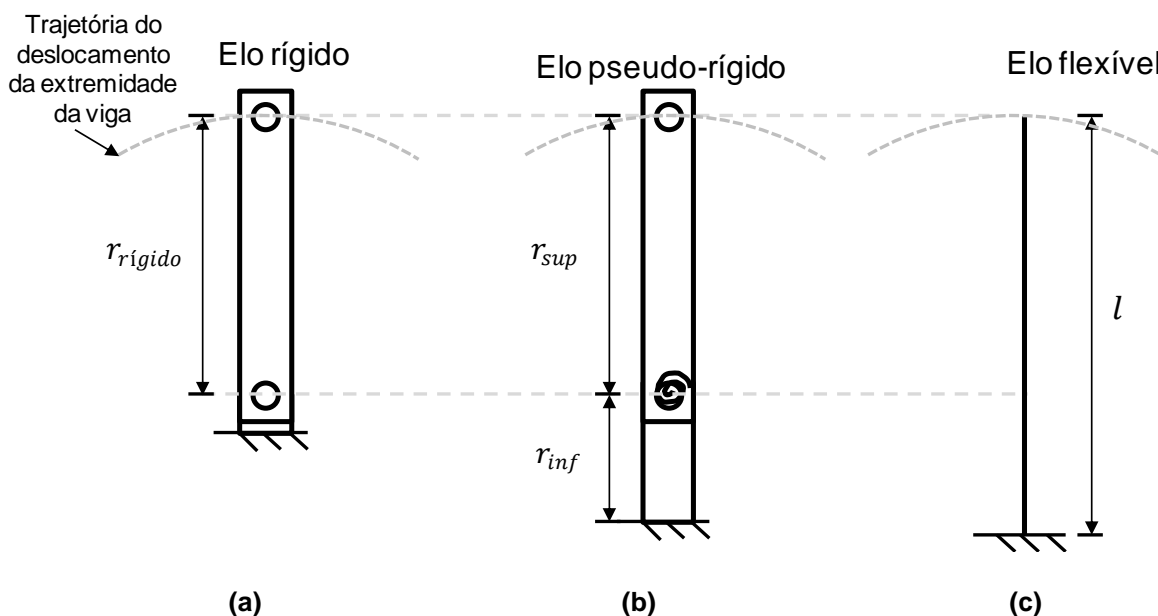


Figura 25 – (a) Elo rígido, (b) Elo pseudo-rígido e (c) Elo flexível

Fonte: Autor

O elo pseudo-rígido de configuração equivalente ao elo rígido pode ser obtido com o auxílio das equações (33), (34) e (35). O elo superior pseudo-rígido possui a mesma dimensão do elo rígido. Portanto têm-se:

$$r_{sup} = r_{rígido} \quad (54)$$

$$r_{inf} = \frac{r_{rígido}}{\gamma} (1 - \gamma) \quad (55)$$

A Figura 25 (b) mostra a configuração obtida do modelo pseudo-rígido, o qual é equivalente ao elo rígido (junta de revolução permanece na mesma posição), descrevendo assim a mesma trajetória de deslocamento da extremidade da viga do segmento rígido. A constante de rigidez da mola torcional não gera influência na obtenção do comprimento do elo flexível e, portanto é considerado como unitário.

O segmento flexível, Figura 25 (c), é obtido apenas substituindo os dois elos pseudo-rígidos pelo respectivo elo flexível da condição de contorno fixo-pinado. Utilizando as equações (33) e (54), pode-se encontrar o comprimento do elo flexível.

$$l = \frac{r_{sup}}{\gamma} \quad (56)$$

3 METODOLOGIA

Para a aplicação dos métodos descritos, dois modelos de mecanismos flexíveis apresentados por Howell (2001) são analisados. A Figura 26 mostra esses dois mecanismos, a Figura 26 (a) exibe o mecanismo flexível biela-manivela onde um elo rígido foi substituído por um elo flexível. A Figura 26 (b) mostra o mecanismo flexível paralelo de quatro barras onde dois elos flexíveis foram empregados. Os segmentos flexíveis que compõem os mecanismos podem ser visualizados.

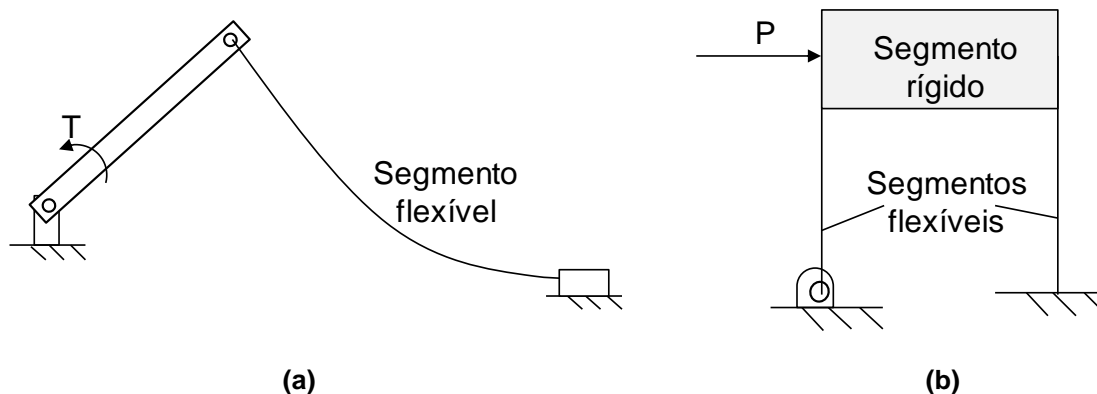


Figura 26 – (a) Mecanismo flexível biela-manivela e (b) Mecanismo flexível paralelo de quatro barras

Fonte: Adaptado de Howell (2001)

O procedimento de análise dos mecanismos flexíveis envolve os seguintes passos:

- 1) Modelagem analítica do mecanismo em análise através do método do corpo pseudo-rígido e este é avaliado utilizando as equações desenvolvidas no item 2.5.
- 2) Depois de obtida a configuração do mecanismo pseudo-rígido, este é modelado no software Abaqus. Nessa etapa os elos são corpos rígidos, no entanto molas torcionais são adicionadas às juntas para se obter a aproximação da relação força-deflexão dos segmentos flexíveis. As propriedades da mola e o tamanho dos elos rígidos são obtidas no passo 1. Os resultados então são adquiridos através da simulação numérica de elementos finitos.
- 3) O mecanismo flexível é modelado no software Abaqus. Nesse passo os elos modelados são flexíveis e torna-se necessária a simulação numérica de análise não linear.

4) Os resultados gerados são então comparados e discutidos.

3.1 Modelo analítico utilizando o método de corpo pseudo-rígido

3.1.1 Mecanismo flexível biela-manivela

3.1.1.1 Dados de entrada

A Figura 27 (a) apresenta o mecanismo flexível biela-manivela onde o elo flexível é empregado em vez da biela rígida. Uma velocidade angular é aplicada no elo da manivela e a posição defletida pode ser visualizada. A Figura 27 (b) mostra um exemplo da configuração do modelo pseudo-rígido referente ao mecanismo flexível.

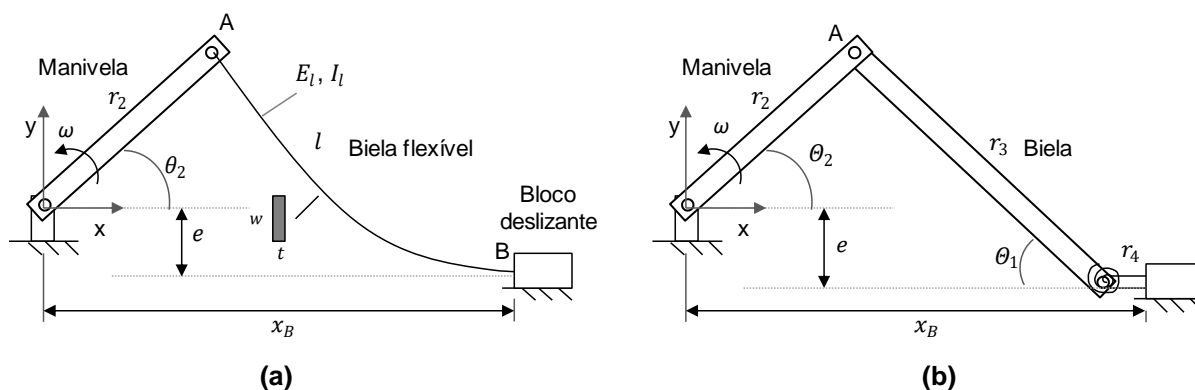


Figura 27 – (a) Mecanismo biela manivela na posição defletida e (b) Mecanismo pseudo-rígido referente ao mecanismo flexível

Fonte: Adaptado de Howell (2001)

Para a análise do mecanismo, assume-se que o bloco deslizante sempre se mantém em contato com o solo e a resistência ao atrito é desconsiderada. Na posição não defletida, o segmento flexível se mantém reto. As variáveis apresentadas na Figura 27 são descritas:

ω : velocidade angular aplicado na manivela

r_2 : comprimento da manivela

r_3 : comprimento da biela

r_4 : elo rígido que conecta a biela e o bloco deslizante

l : comprimento do elo flexível

w : largura da seção do segmento flexível

t : espessura do segmento flexível

e : distância vertical entre o ponto B e o ponto central dos eixos cartesianos

θ_2 e Θ_2 : ângulo formado entre a manivela e o eixo horizontal

θ_1 : ângulo formado entre a biela rígida r_3 e o eixo horizontal

x_B : posição horizontal do ponto B

I_l : momento de inércia do elo flexível

Os dados de entrada para a modelagem do mecanismo pseudo-rígido podem ser visualizados na Tabela 3.

Tabela 3 – Dados de entrada do mecanismo pseudo-rígido (analítico)

l (mm)	r_2 (mm)	e (mm)	$E = E_l$ (N/mm ²)	w (mm)	t (mm)
305,27	90	40	200×10^3	20	1

Fonte: Autor

3.1.1.2 Desenvolvimento do mecanismo pseudo-rígido

Para o desenvolvimento do mecanismo pseudo-rígido da Figura 27 (a), deve-se observar a condição de contorno em que o segmento flexível esta submetido. Para o caso da biela flexível, a condição em que se encontra é o da viga engastada com uma força na extremidade ou segmento fixo-pinado. A Figura 28 apresenta esta condição.

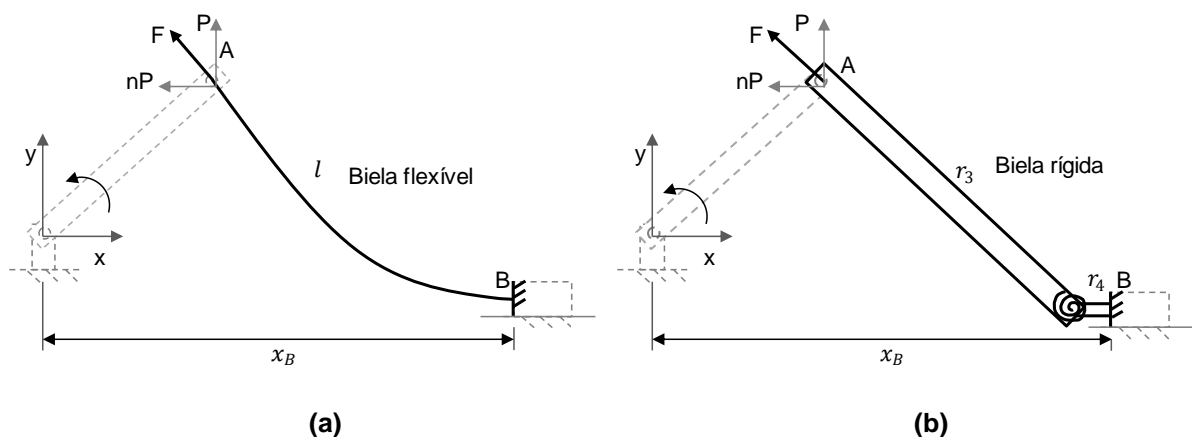


Figura 28 – (a) Segmento na condição engastada com uma força na extremidade e (b) Modelo da viga pseudo-rígida

Fonte: Autor

O bloco deslizando se movimenta livremente na direção horizontal, portanto nenhuma força de reação ocorre nesta direção. Assim, verifica-se que a força aplicada na extremidade (ponto A) atua somente na direção vertical, portanto tem-se o valor de n como sendo nulo ($n_P = 0$).

O comprimento dos elos r_3 e r_4 pode ser encontrado utilizando as equações (33) e (34):

$$r_3 = \gamma l \quad (57)$$

$$r_4 = l - \gamma l \quad (58)$$

Utilizando a Tabela 2, o valor do fator de raio característico γ e o coeficiente de rigidez K_θ para n igual a zero:

$$\gamma = 0,8517 \quad (59)$$

$$K_\theta = 2,67617 \quad (60)$$

A constante de rigidez da mola torcional pode ser calculada utilizando a equação (39):

$$K = \frac{\gamma K_\theta E_l I_l}{l} \quad (61)$$

e o momento de inércia I_l é dado por:

$$I_l = \frac{wt^3}{12} \quad (62)$$

A distância x_B do ponto B localizada no eixo horizontal pode ser escrita em termos dos ângulos θ_1 e θ_2 :

$$x_B = r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_1 + r_4 \quad (63)$$

e

$$\theta_1 = \arcsen \frac{e + r_2 \sen \theta_2}{r_3} \quad (64)$$

Depois de obtidos os valores dos elos r_3 e r_4 e da constante de rigidez K , a configuração do mecanismo pseudo-rígido pode ser construída. A Figura 27 (b)

apresenta esta configuração. A posição do ponto B é utilizada para a análise das posições do bloco deslizante em função da variação do ângulo θ_2 .

A força vertical que atua na extremidade do elo pode ser escrita utilizando a equação (47).

$$P = \frac{K \theta_2}{\gamma l \sqrt{(1 + n^2)} \operatorname{sen}(\Phi - \theta_2)} \quad (65)$$

3.1.2 Mecanismo paralelo de quatro barras

3.1.2.1 Dados de entrada

A Figura 29 (a) apresenta o mecanismo flexível de quatro barras onde dois segmentos flexíveis foram empregados. Os segmentos flexíveis possuem as mesmas dimensões (comprimento, largura e espessura), porém cada segmento é submetido a condições de contorno diferentes. Por este motivo cada segmento é desenvolvido separadamente. A extremidade do elo flexível esquerdo está conectada a uma junta de revolução e o elo esquerdo fixo ao chão. As outras extremidades dos elos são fixas no segmento rígido e este sofre a ação de uma força P . A Figura 29 (b) apresenta o exemplo do modelo pseudo-rígido do mecanismo de paralelo.

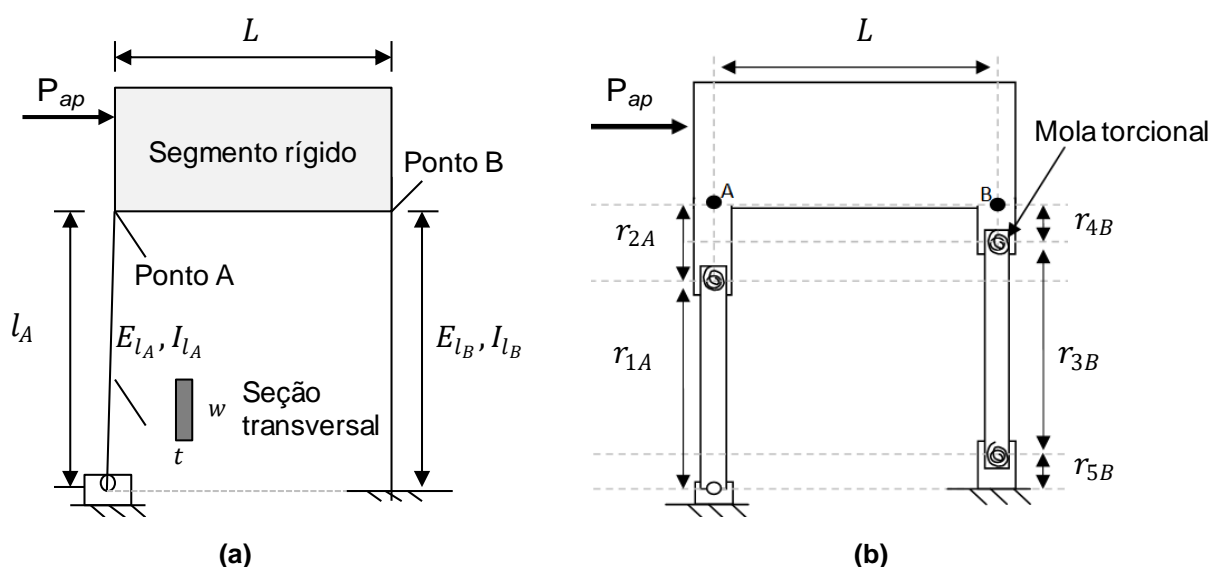


Figura 29 – (a) Mecanismo flexível paralelo e (b) Mecanismo pseudo-rígido

Fonte: Autor

O mecanismo flexível paralelo necessita que o segmento rígido não sofra rotações durante o seu movimento, ou seja, os ângulos das extremidades (ponto A e

B) dos segmentos flexíveis devem permanecer constantes no decorrer do movimento. A Figura 30 mostra o deslocamento dos pontos A e B durante o movimento.

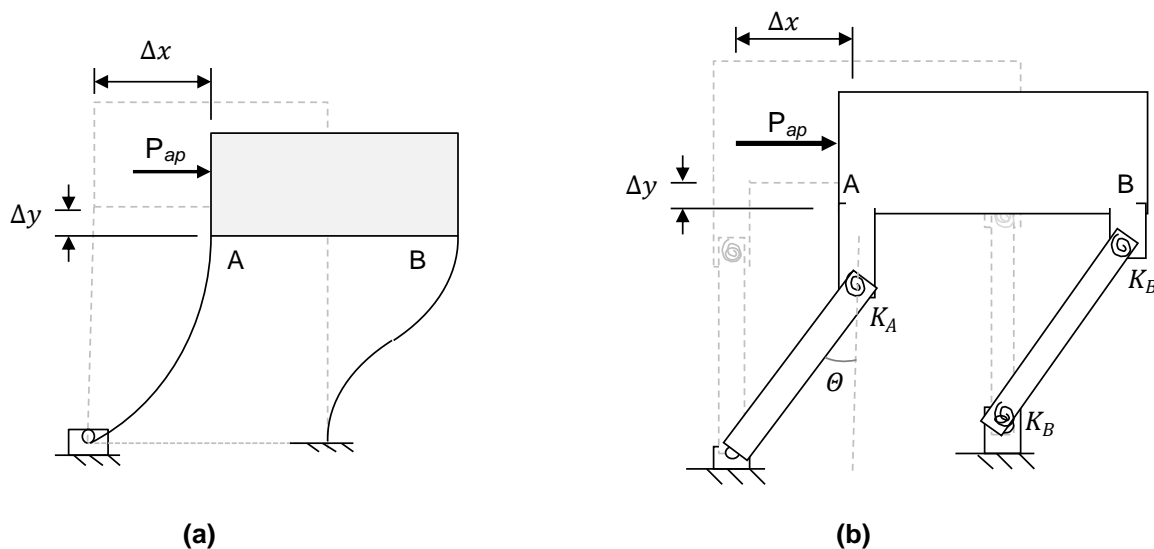


Figura 30 – (a) Deslocamento dos pontos A e B durante o movimento do mecanismo flexível e (b) Deslocamento o mecanismo pseudo-rígido

Fonte: Autor

As variáveis apresentadas na Figura 29 e Figura 30 são descritas:

P_{ap} : força aplicada no segmento rígido

$l_A = l_B = l$: comprimento do elo flexível

$E_{l_A} = E_{l_B} = E$: módulo de elasticidade do elo flexível

$I_{l_A} = I_{l_B} = I$: momento de inércia da seção transversal do elo flexível

w : largura da seção do segmento flexível

t : espessura do segmento flexível

L : comprimento do elo rígido

$r_{1A}, r_{2A}, r_{3B}, r_{4B}, r_{5B}$: comprimento dos elos pseudo-rígidos

K_A e K_B : constante de rigidez da mola torcional

Δy : variação do ponto A na direção vertical

Δx : variação do ponto A na direção horizontal

Os dados de entrada para a modelagem do mecanismo pseudo-rígido podem ser visualizados na Tabela 4.

Tabela 4 – Dados de entrada do mecanismo pseudo-rígido (analítico)

$l_A = l_B = l$ (pol)	$E_{l_A} = E_{l_B} = E$ (lbf/pol ²)	w (pol)	t (pol)	L (pol)
20	30×10^6	1,25	1/32	20

Fonte: Autor

As unidades de medidas são utilizadas no sistema imperial, pois estas são comparadas com os resultados da literatura.

3.1.2.2 Desenvolvimento do mecanismo pseudo-rígido

Segmento flexível l_A

Para o desenvolvimento do modelo pseudo-rígido que representa o mecanismo flexível, cada segmento flexível é analisado separadamente. O elo flexível l_A está submetido na condição de viga engastada com uma força na extremidade ou segmento fixo-pinado. A Figura 31 (a) mostra a condição do elo flexível l_A e a Figura 31 (b) exhibe o modelo pseudo-rígido.

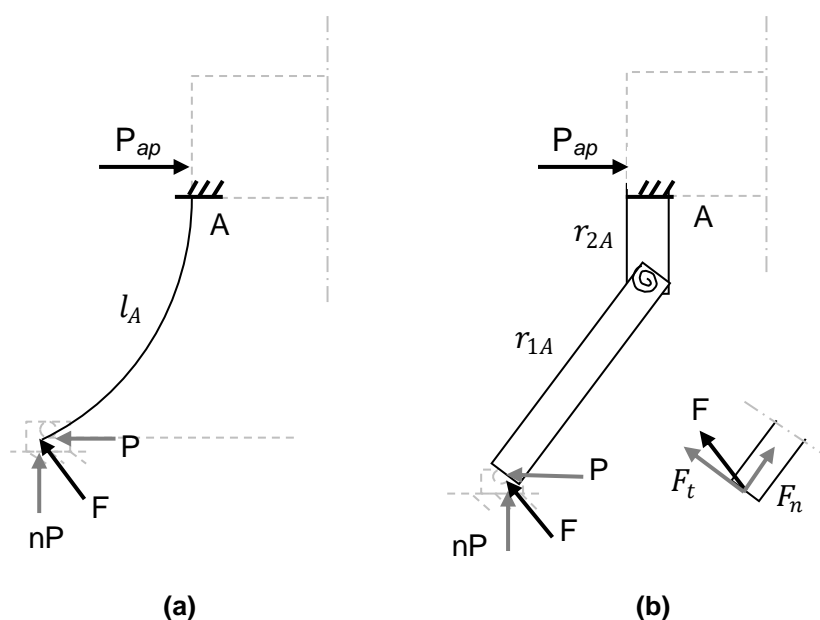


Figura 31 – (a) Segmento na condição engastada com uma força na extremidade e (b) Modelo da viga pseudo-rígida

Fonte: Autor

A força P_{ap} que é aplicado no elo rígido, atua na direção horizontal e portando verifica-se que a componente da força de reação na direção vertical é nula ($nP = 0$),

ou seja, temos que a força F é igual a força horizontal P . Howell (2001) faz uma importante observação. As condições da extremidade, junta de revolução e a fixação no solo conduzem a diferentes valores de n ou de ângulos de força (Φ) durante o movimento. A variação de n gera a necessidade de atualização dos comprimentos dos elos pseudo-rígidos, do coeficiente de rigidez e também do valor do coeficiente de raio característico. Porém, para evitar essa atualização constante, uma estimativa aproximada dos valores das variáveis é então utilizada.

Os valores de γ e K_θ apresentam pequenas variações para um determinado intervalo de ângulos de força (F). Poranto, γ e K_θ são utilizados como valores médios, conforme equações (35) e (37).

$$\gamma_{m\u00e9dio} = 0,85 \quad (66)$$

$$K_{\theta_{m\u00e9dio}} = 2,61 \quad (67)$$

O comprimento dos elos r_{1A} e r_{2A} pode ser encontrado utilizando as equações (33) e (34).

$$r_{1A} = \gamma_{m\u00e9dio} l_A \quad (68)$$

$$r_{2A} = l_A - \gamma_{m\u00e9dio} l_A \quad (69)$$

A constante de rigidez da mola torcional pode ser calculada utilizando a equação (39):

$$K_A = \gamma_{m\u00e9dio} K_{\theta_{m\u00e9dio}} \frac{E_{l_A} I_{l_A}}{l_A} \quad (70)$$

e o momento de in\u00e9rcia pode ser dado por:

$$I_{l_A} = I = \frac{wt^3}{12} \quad (71)$$

As varia\u00e7\u00f5es dos deslocamentos do ponto A podem ser escritos utilizando as equa\u00e7\u00f5es (41) e (42):

$$\Delta y = \gamma_{m\u00e9dio} l_A (1 - \cos\theta) \quad (72)$$

$$\Delta x = \gamma_{m\u00e9dio} l_A \sin\theta \quad (73)$$

A força de reação provocada pela junta de revolução pode ser dada pela equação (47). A força nP que atua na direção vertical é nula ($n = 0$), portanto somente a força horizontal P ($F = P$) age no segmento.

$$P = \frac{K_A \theta}{\gamma_{m\u00e9dio} l_A \sqrt{(1 + n^2)} \operatorname{sen}(\Phi - \theta)} \quad (74)$$

Segmento flexível l_B

O elo flexível l_B da Figura 32 (a) apresenta as duas extremidades engastadas, uma no solo e a outra no elo rígido. O modelo pseudo-rígido do elo flexível e o D.C.L. (diagrama de corpo livre) podem ser visualizados na Figura 32 (b). O D.C.L. mostra as forças originadas da condição de engaste. Analisando a situação do elo flexível (segmento fixo-fixo), pode-se dizer que o elo flexível está submetido a condição análoga ao item 2.5.1.2. Portanto a condição de segmento engastado com a extremidade guiada ou segmento fixo-guiado é utilizada para a análise do elo flexível.

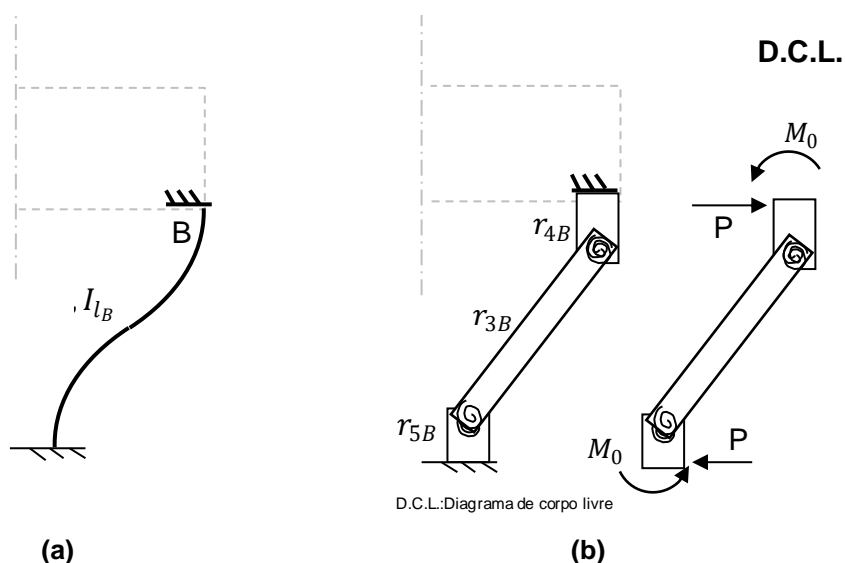


Figura 32 – (a) Segmento flexível com as duas extremidades engastadas e (b) Modelo pseudo-rígido

Fonte: Autor

Os valores de γ e K_θ são os mesmos utilizados para o segmento flexível l_A , equação (66) e (67).

Os comprimentos dos elos r_{3B} , r_{4B} e r_{5B} podem ser encontrados utilizando as equações (48) e (49).

$$r_{4B} = r_{5B} = \frac{(l_B - \gamma_{\text{médio}} l_B)}{2} \quad (75)$$

$$r_{3B} = \gamma_{\text{médio}} l_B \quad (76)$$

A equação (52) é utilizada para o cálculo da constante de rigidez de cada mola torcional.

$$K_B = 2 \gamma_{\text{médio}} K_{\theta_{\text{médio}}} \frac{E_{l_B} I_{l_B}}{l_B} \quad (77)$$

Sabendo que $E_{l_B} = E_{l_A}$, $I_{l_B} = I_{l_A}$ e $l_B = l_A$, tem-se:

$$K_B = 2 K_A \quad (78)$$

As variações dos deslocamentos do ponto B são dadas também pelas equações descritas (72) e (73).

A força de reação da extremidade fixa ao solo pode ser encontrada analogamente ao segmento l_A , porém utilizando a combinação de dois segmentos antissimétricos. A força P atua na horizontal e não existe nenhuma força ocorrendo na direção vertical ($n = 0$ ou $nP = 0$). Utilizando a equação (53):

$$P = \frac{2K_B \theta}{\gamma_{\text{médio}} l_B \sqrt{(1 + n^2)} \text{sen}(\Phi - \theta)} \quad (79)$$

ou

$$P = \frac{4K_A \theta}{\gamma_{\text{médio}} l_B \sqrt{(1 + n^2)} \text{sen}(\Phi - \theta)} \quad (80)$$

A força total que é aplicada ao segmento rígido pode ser descrito pela soma das duas forças de reação, equação (74) e (80):

$$P_{ap} = P_A + P_B \quad (81)$$

onde:

P_A : força de reação aplicada na extremidade do segmento flexível l_A (equação (74))

P_B : força de reação aplicada na extremidade do segmento flexível l_B (equação (79))

3.2 Modelagem e simulação do mecanismo pseudo-rígido no software Abaqus

Utilizando os dados do item 3.1, os mecanismos pseudo-rígidos são analisados utilizando o software de elementos finitos. Tanto a modelagem quanto a simulação dos mecanismos são feitas utilizando o software Abaqus. As equações desenvolvidas no item 3.1 são utilizadas para a modelagem do mecanismo pseudo-rígido.

3.2.1 Mecanismo biela-manivela

3.2.1.1 Modelagem do mecanismo

Utilizando as equações e os resultados obtidos do item 3.1.1, o mecanismo pseudo-rígido biela-manivela é modelado no Abaqus.

Os dados utilizados para a modelagem do mecanismo pseudo-rígido podem ser visualizados na Tabela 5.

Tabela 5 – Dados de entrada para modelagem do mecanismo pseudo-rígido (Abaqus)

l (mm)	r_2 (mm)	r_3 (mm)	r_4 (mm)	e (mm)	K (N.mm)	$E = E_l$ (N/mm ²)
305,27	90	260	45,27	40	2493,79	200×10^3

Fonte: Autor

As propriedades do material dos elos rígidos são definidas como lineares elásticas e todos os elos com o módulo de elasticidade de 200×10^3 N/mm². A Figura 33 apresenta a configuração inicial do mecanismo pseudo-rígido modelado no software Abaqus.

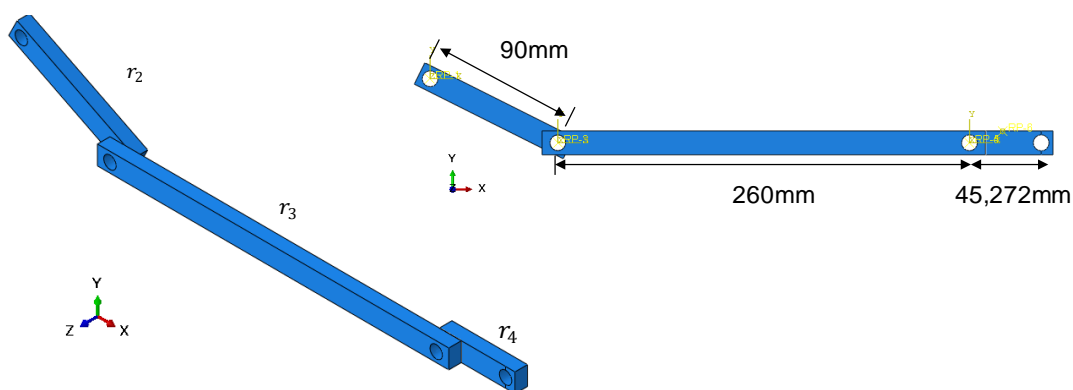


Figura 33 – Mecanismo pseudo-rígido modelado no software Abaqus

Fonte: Autor

3.2.1.2 Interações e condições de contorno

Para simular as juntas de revolução no software Abaqus, é utilizado o elemento conector do tipo “*hinge* (dobradiça)”. Este conector faz com que as posições de dois pontos se tornem as mesmas (união), restringem as rotações em dois eixos e libera a rotação em um eixo comum a estes dois pontos. Portanto dois pontos de referências irão ter as mesmas posições e poderão girar em torno do eixo de referência compartilhado. A Figura 34 mostra o conector do tipo “*hinge*”.

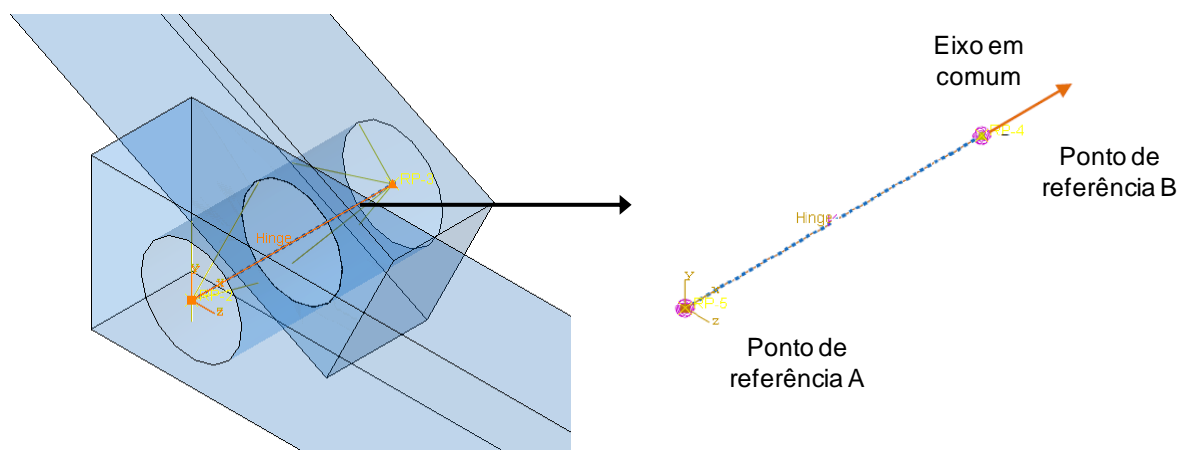


Figura 34 - Junta de revolução utilizando o conector “*hinge*”

Fonte: Autor

A interação do tipo “*coupling* (acoplamento)” é utilizada para relacionar a superfície interna do nó do elo a um ponto de referência. Estes pontos de referências são então utilizados para a modelagem do conector. A Figura 35 apresenta os pontos de referências das superfícies dos nós dos elos r_2 e r_3 .

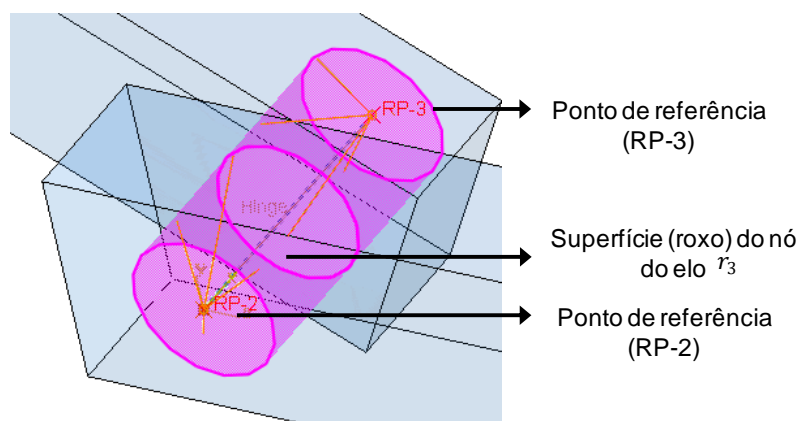


Figura 35 – Interação do tipo “*coupling*”

Fonte: Autor

Para simular mola torcional o próprio conector “*hinge*” dispõe-se de um recurso para a simulação da mola torcional. Este recurso é o comportamento “*elasticity* (elasticidade)”. A elasticidade utilizada é do tipo rigidez linear elástica e a constante de rigidez da mola atua em torno do eixo comum dos pontos de referência do conector. Pode-se também fazer a modelagem da mola utilizando “*Spring/Dashpots* (mola/amortecedor)”, porém de acordo com Online Documentation – Abaqus 6.14 (2014), aconselha-se o uso do conectores para análises de grandes deslocamentos.

Para o nó da extremidade do elo r_2 , Figura 36 (a), um ponto de referência é gerado com o auxílio da interação “*coupling*”. Neste ponto de referência são impostas restrições nos graus de liberdade, ou seja, permitindo apenas rotação em torno do eixo z. Neste mesmo ponto é aplicado uma velocidade angular. No elo r_4 , Figura 36 (b), é imposto uma restrição para permitir o deslocamento somente ao longo da direção x. Um ponto (ponto B) é inserido ao nó do elo r_4 para se obter os deslocamentos deste ponto durante o movimento.

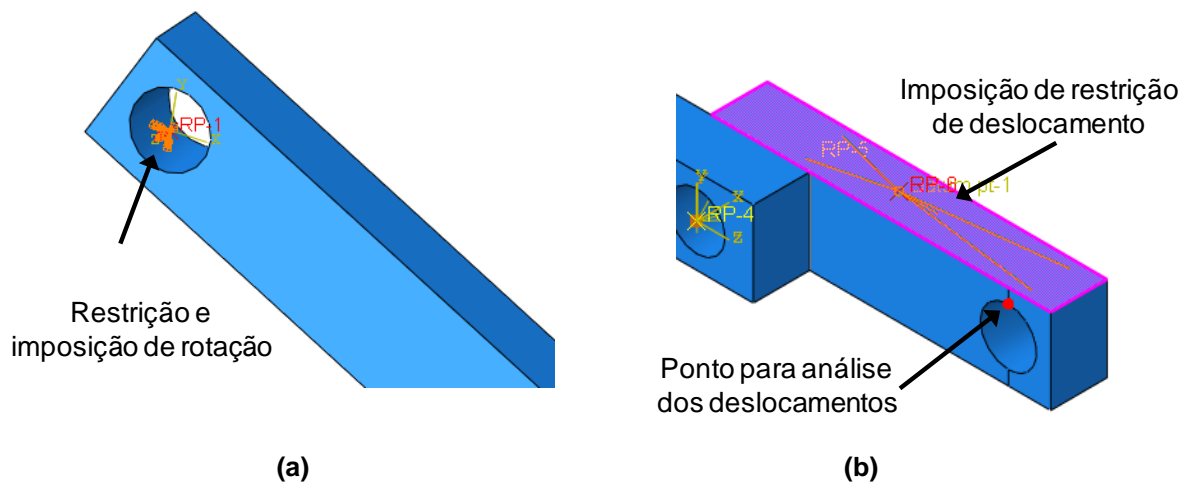


Figura 36 – (a) Restrição e imposição de rotação e (b) Ponto de análise e restrição

Fonte: Autor

3.2.1.3 Malha de elementos finitos

No total foram utilizados 1362 elementos do tipo C3D20, ou seja, elementos hexaédricos de interpolação quadrática com vinte pontos nodais cada. A Figura 37 mostra o mecanismo modelado utilizando elementos finitos.

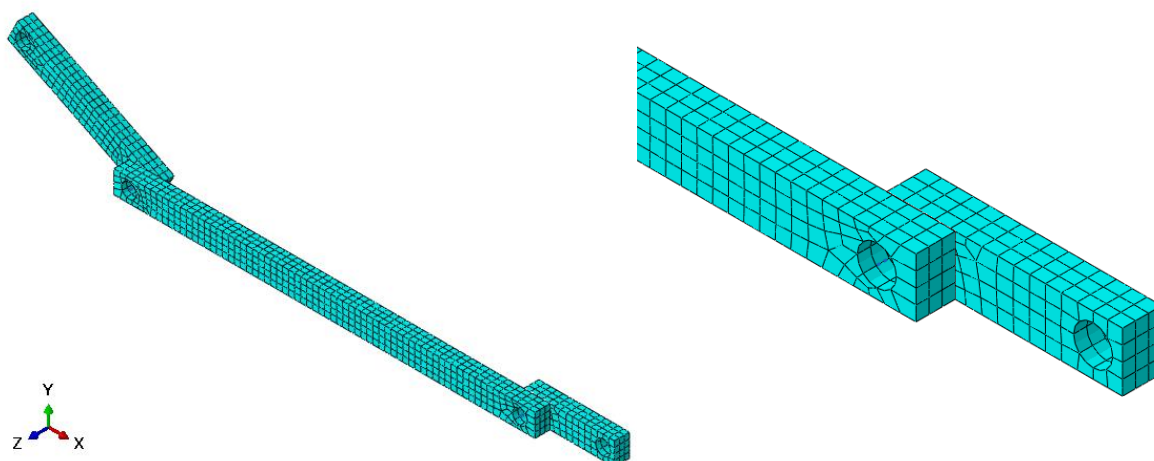


Figura 37 – Malha de elementos finitos do mecanismo pseudo-rígido

Fonte: Autor

3.2.2 Mecanismo paralelo

3.2.2.1 Modelagem do mecanismo pseudo rígido

Utilizando as equações e os resultados obtidos do item 3.1.2, o mecanismo pseudo-rígido é modelado no Abaqus.

Os dados utilizados para a modelagem do mecanismo pseudo-rígido podem ser visualizados na Tabela 6.

Tabela 6 – Dados para modelagem do mecanismo pseudo-rígido (Abaqus)

$l_A = l_B$ (pol)	$r_{1A} = r_{3B}$ (pol)	r_{2A} (pol)	$r_{4B} = r_{5B}$ (pol)	$E_{l_A} = E_{l_B}$ (lbf/pol ²)	w (pol)	t (pol)	L (pol)	K_A (lbf.pol)	K_B (lbf.pol)
20	17	3	1,5	30×10^6	1,25	1/32	20	10,58	21,16

Fonte: Autor

As propriedades do material dos elos rígidos são utilizadas como sendo lineares elásticas e todos os elos com o módulo de elasticidade de 30×10^6 lbf/pol². A Figura 38 apresenta a configuração inicial do mecanismo pseudo-rígido modelado no software Abaqus.

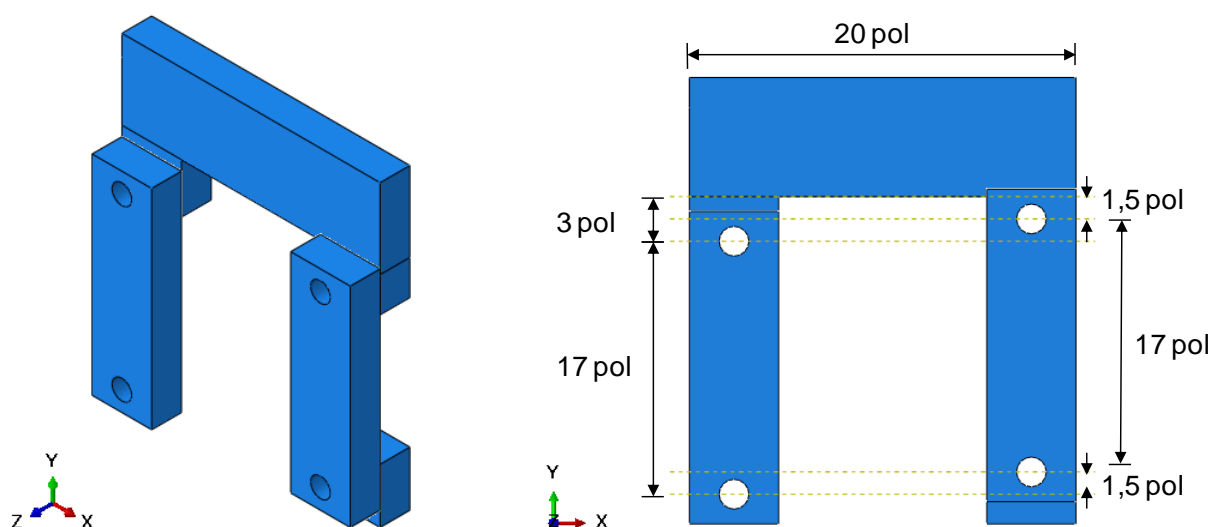


Figura 38 - Mecanismo pseudo-rígido paralelo modelado no software Abaqus

Fonte: Autor

3.2.2.2 Interações e condições de contorno

Similarmente ao mecanismo biela-manivela, o conector do tipo “*hinge*” é utilizado para modelar as juntas de revolução e a mola torcional, Figura 39 (a). A interação do tipo “*coupling*” é utilizada para relacionar um ponto de referência à superfície, Figura 39 (b).

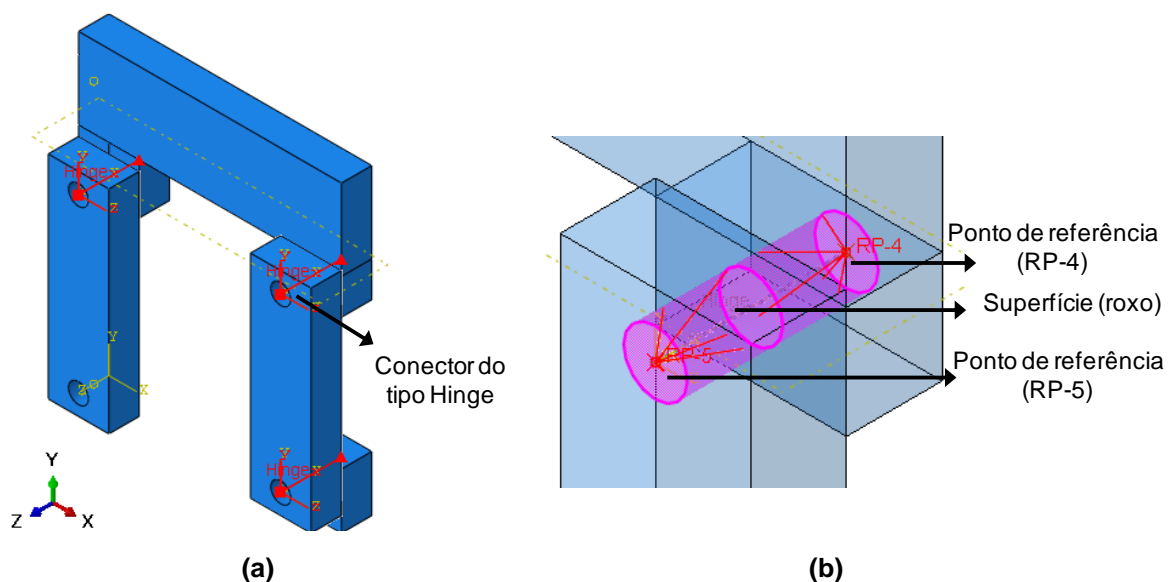


Figura 39 – (a) Conector do tipo “*hinge*” e (b) Interação do tipo “*coupling*”

Fonte: Autor

A Figura 40 apresenta outra interação do tipo “coupling” utilizada no elo superior. O ponto de referência então é utilizado para a imposição do deslocamento para posteriormente adquirir as reações de força.

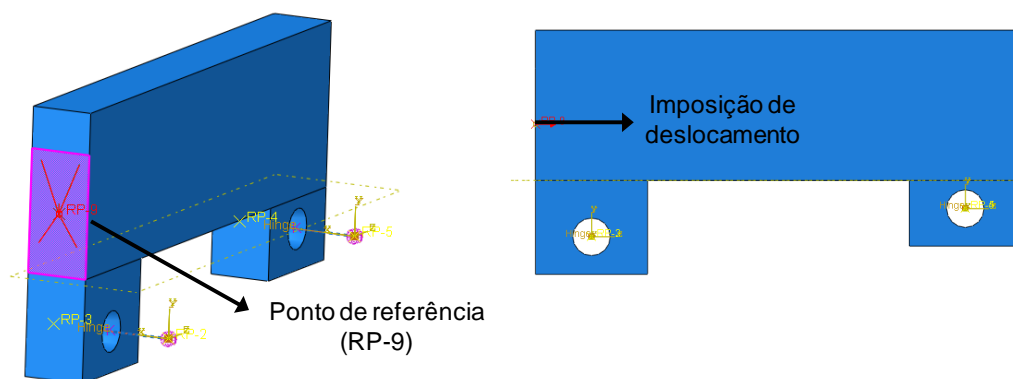


Figura 40 – Interação e imposição de deslocamento

Fonte: Autor

Uma restrição é utilizada no nó inferior do elo esquerdo para permitir somente rotação em torno do eixo z. Na extremidade inferior do elo direito, restringiram-se os movimentos para simular a fixação. A Figura 41 mostra os locais onde as restrições foram aplicadas.

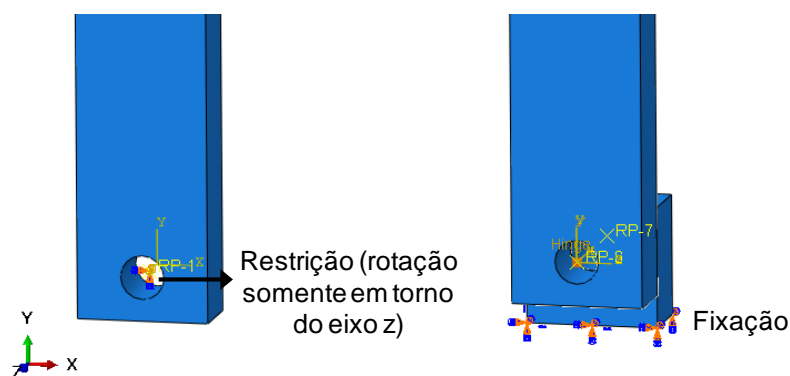


Figura 41 – Restrições de movimento

Fonte: Autor

3.2.2.3 Malha de elementos finitos

No total foram utilizados 3472 elementos do tipo C3D8, ou seja, elementos hexaédricos de interpolação linear com oito pontos nodais cada. A Figura 37 mostra o mecanismo modelado utilizando elementos finitos.

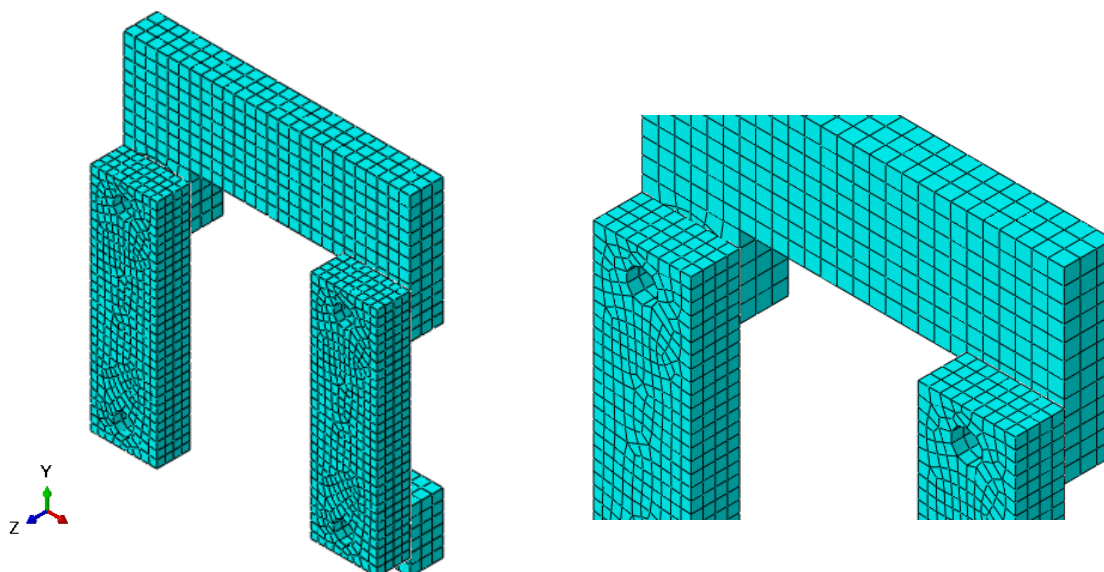


Figura 42 - Malha de elementos finitos do mecanismo pseudo-rígido

Fonte: Autor

3.3 Modelagem e simulação do mecanismo flexível no software Abaqus

Utilizam-se os dados dos mecanismos flexíveis para a modelagem e simulação no software Abaqus. Os mecanismos flexíveis são modelados utilizando elementos finitos de viga e a análise não linear é empregada.

3.3.1 Mecanismo flexível biela-manivela

3.3.1.1 Modelagem do mecanismo

Os dados utilizados para a modelagem do mecanismo flexível podem ser visualizados na Tabela 7.

Tabela 7 – Dados para a modelagem do mecanismo flexível (Abaqus)

l (mm)	r_2 (mm)	w (mm)	t (mm)	E_l (N/mm ²)
305,27	90	20	1	200×10^3

Fonte: Autor

Os segmentos rígido e flexível foram modelados utilizando o recurso “*wire* (linha)”. De acordo com a documentação Online Documentation – Abaqus 6.14 (2014), o recurso “*wire*” é representado como uma linha e é utilizado para idealizar um sólido onde a espessura e a largura são consideradas pequenas em relação ao comprimento. O uso do recurso “*wire*” exige a atribuição de uma seção transversal a

essa linha e o próprio software oferece uma biblioteca contendo diferentes tipos de seções. Para a análise é utilizada a seção “*beam* (viga)” de perfil “*rectangular* (retangular)”. No entanto, o uso da seção do tipo “*beam*” só pode ser empregada com o recurso “*wire*”. Dois perfis de tamanho diferentes são criados e atribuídos à seção transversal de cada segmento. Portanto, a diferença entre o elo rígido e flexível está basicamente na definição do tamanho das seções transversais.

As propriedades do material do elo rígido e flexível são lineares elásticas com módulo de elasticidade de $200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$. A Figura 43 (a) apresenta o modelo do mecanismo flexível utilizando o recurso “*wire*” e a Figura 43 (b) mostra o mecanismo utilizando a renderização.

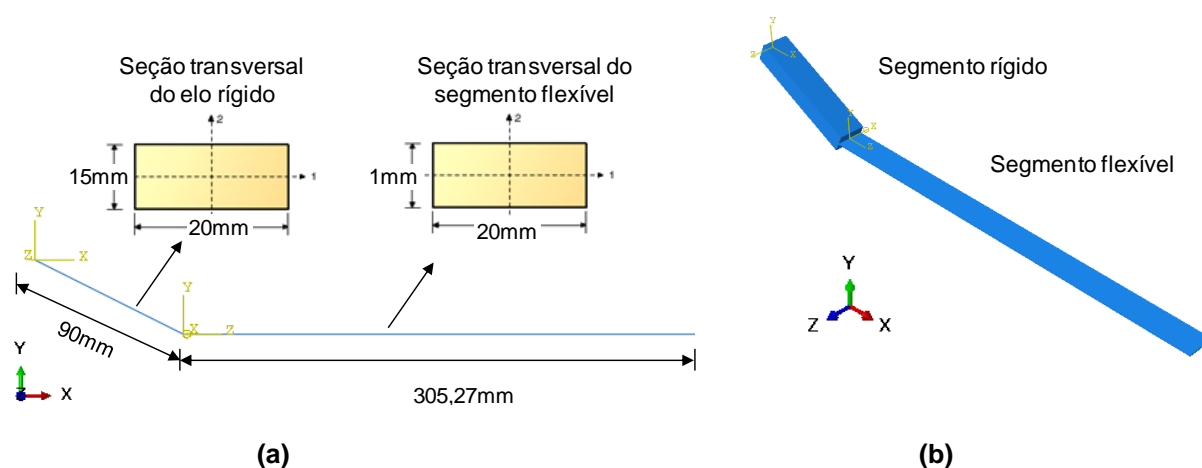


Figura 43 – (a) Segmentos modelados utilizando o recurso “*wire*” e (b) Mecanismo renderizado

Fonte: Autor

3.3.1.2 Interações e condições de contorno

Para simular a junta de revolução que conecta o elo rígido e o segmento flexível é utilizado o conector “*hinge*”. Na extremidade do segmento rígido é aplicada uma restrição para permitir a rotação somente em torno do eixo z. Nesta mesma extremidade, é imposta uma velocidade angular no sentido anti-horário. Na extremidade do segmento flexível é utilizada a restrição para permitir somente o deslocamento na direção x. A Figura 44 mostra as interações e condições de contorno do mecanismo flexível.

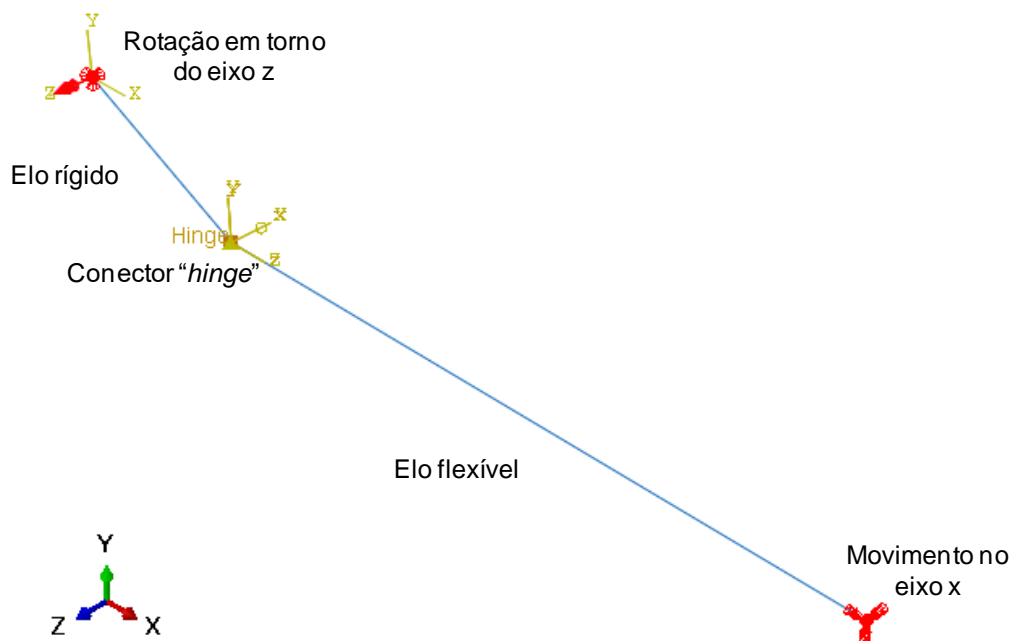


Figura 44 – Interações e condições de contorno

Fonte: Autor

3.3.1.3 Malha de elementos finitos

Para a modelagem do mecanismo flexível são utilizados elementos de vigas do tipo B32. A referência Online Documentation – Abaqus 6.14 (2014) descreve este elemento como baseado na teoria de vigas de Timoshenko, portanto permitindo a deformação de cisalhamento transversal. Conforme descrito por Bathe (1982), para evitar o fenômeno do “*shear locking*”, deve-se utilizar elementos de vigas de ordem mais elevadas, como três ou quatro nós. No entanto para o uso do elemento de dois nós, a integração reduzida deve ser empregada. O elemento do tipo B32 descreve a viga no espaço tridimensional e utiliza três pontos nodais com interpolação quadrática, evitando assim o fenômeno de “*shear locking* (travamento por cisalhamento)”. No total foram utilizados 79 elementos para modelar o mecanismo flexível. A Figura 45 apresenta o mecanismo flexível modelado utilizando elementos finitos de viga.

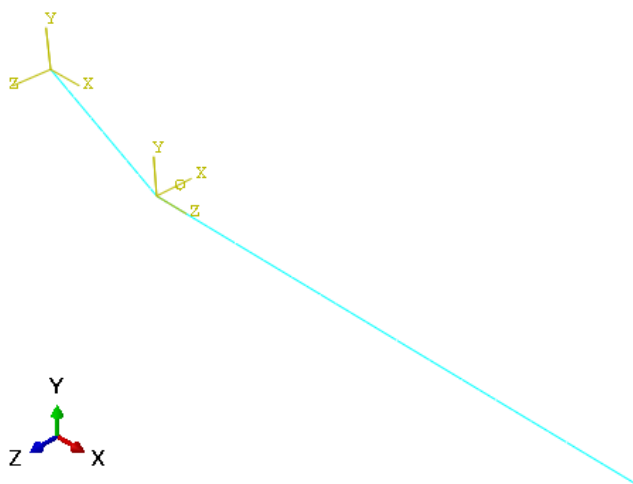


Figura 45 - Malha de elementos finitos do mecanismo flexível

Fonte: Autor

Conforme descrito na documentação Online Documentation – Abaqus 6.14 (2014), para incorporar os efeitos da não linearidade geométrica (grandes deflexões) no software Abaqus, a opção NLGEOM (não linearidade geométrica) deve ser ativada. O método de solução em que o software utiliza para a análise de problemas não lineares é o método de Newton-Raphson. O incremento inicial de carga deve ser inserido pelo analista e posteriormente o software ajusta o tamanho do incremento para resolver o problema eficientemente.

3.3.2 Mecanismo flexível paralelo de quatro barras

3.3.2.1 Modelagem do mecanismo

Os dados utilizados para a modelagem do mecanismo flexível podem ser visualizados na Tabela 8.

Tabela 8 – Dados para a modelagem do mecanismo flexível (Abaqus)

$l_A = l_B$ (pol)	$E_{l_A} = E_{l_B}$ (lbf/pol ²)	L (pol)	w (pol)	t (pol)
20	30×10^6	20	1,25	1/32

Fonte: Autor

Analogamente à modelagem do mecanismo flexível biela-manivela, o mecanismo paralelo foi modelado utilizando o recurso “*wire*”. O mecanismo modelado e as dimensões dos perfis podem ser visualizados na Figura 46. As

propriedades do material do elo rígido e flexível são lineares elásticas com módulo de elasticidade de $30 \times 10^6 \text{ lbf/pol}^2$.

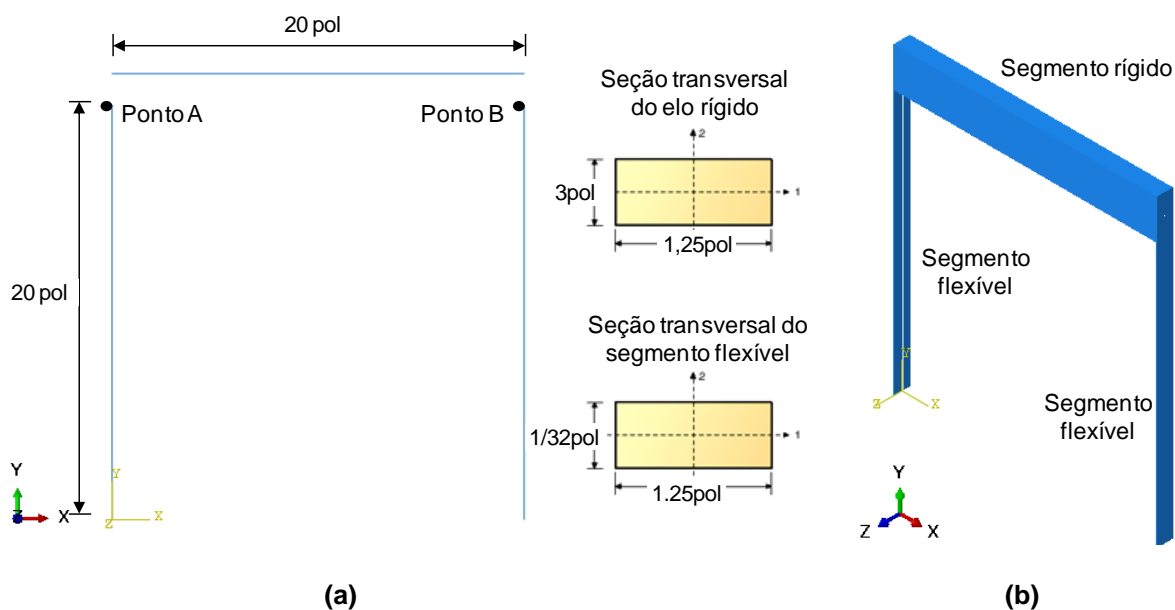


Figura 46 – (a) Mecanismo flexível modelado utilizando o recurso “wire” e (b) Mecanismo flexível renderizado

Fonte: Autor

3.3.2.2 Interações e condições de contorno

É utilizada a interação do tipo “tie (prender)” para fixar as extremidades dos segmentos flexíveis ao segmento rígido, restringindo qualquer movimento relativo entre os segmentos, Figura 47 (a). Para simular a junta de revolução na extremidade do elo flexível l_A , é utilizada a restrição para permitir somente rotação em torno do eixo z. Na extremidade do elo flexível l_B são restringidos os movimentos de todos os graus de liberdade, simulando assim a fixação ao solo. No segmento rígido é aplicado um deslocamento na direção x para posteriormente adquirir as forças de reação, Figura 47 (b).

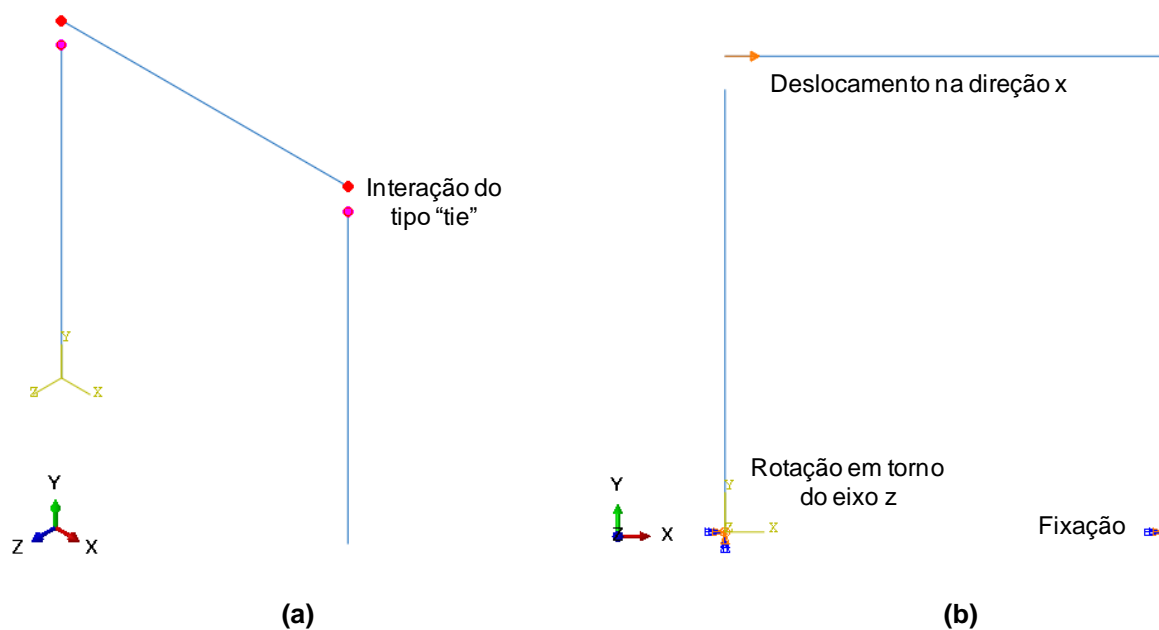


Figura 47 – (a) Interação do tipo “tie” e (b) Condições de contorno do mecanismo flexível

Fonte: Autor

3.3.2.3 Malha de elementos finitos

Assim como na análise do mecanismo biela-manivela, para a modelagem do mecanismo flexível são utilizados elementos de vigas do tipo B32. O elemento do tipo B32 descreve a viga no espaço tridimensional e utiliza três pontos nodais com interpolação quadrática, evitando assim o fenômeno de “*shear locking*”. No total foram utilizados 300 elementos para modelar o mecanismo flexível. A Figura 48 apresenta o mecanismo flexível modelado utilizando elementos finitos de viga.

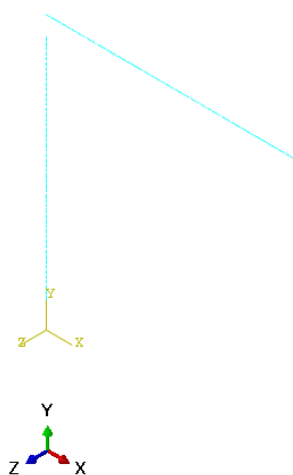


Figura 48 - Malha de elementos finitos do mecanismo flexível paralelo

Fonte: Autor

3.4 Síntese de substituição de um elo rígido

A Figura 49 (a) apresenta um mecanismo rígido de quatro barras de trajetória linear, conhecido também por mecanismo Hoeken. O método de substituição de corpo rígido é utilizado para substituir o elo rígido r_{e4} por um elo flexível e assim obter o mecanismo flexível. O ponto C descreve a trajetória do deslocamento da extremidade do elo r_{e3} .

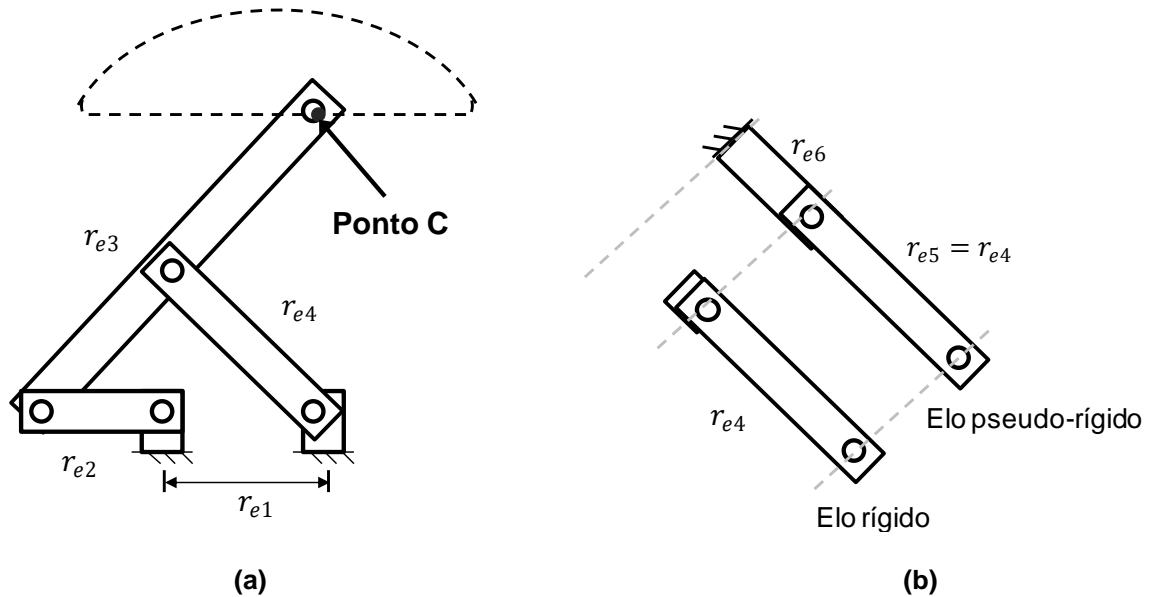


Figura 49 – (a) Mecanismo Hoeken e (b) Elo rígido e elo pseudo-rígido equivalente

Fonte: Autor

A Tabela 9 apresenta as dimensões dos elos rígidos do mecanismo Hoeken.

Tabela 9 – Dimensões dos rígidos

r_{e1} (mm)	r_{e2} (mm)	r_{e3} (mm)	r_{e4} (mm)
200	100	500	250

Fonte: Autor

A Figura 49 (b) apresenta o elo rígido r_{e4} e o elo pseudo-rígido equivalente obtido através das equações analíticas da condição fixo-pinado do método do corpo pseudo-rígido. As dimensões dos elos pseudo-rígidos podem ser obtidas utilizando as equações (54) e (55). O fator do raio característico é utilizado conforme a equação (35). Portanto têm-se:

$$r_{e5} = r_{e4} \quad (82)$$

$$r_{e6} = \frac{r_{e5}}{\gamma} (1 - \gamma) \quad (83)$$

A Figura 50 (a) mostra o mecanismo equivalente pseudo-rígido constituído pelos elos obtidos. O elo r_{e3} é modificado para adequar as dimensões do elo pseudo-rígido, no entanto as características de trajetória do ponto C permanecem similares ao do mecanismo rígido.

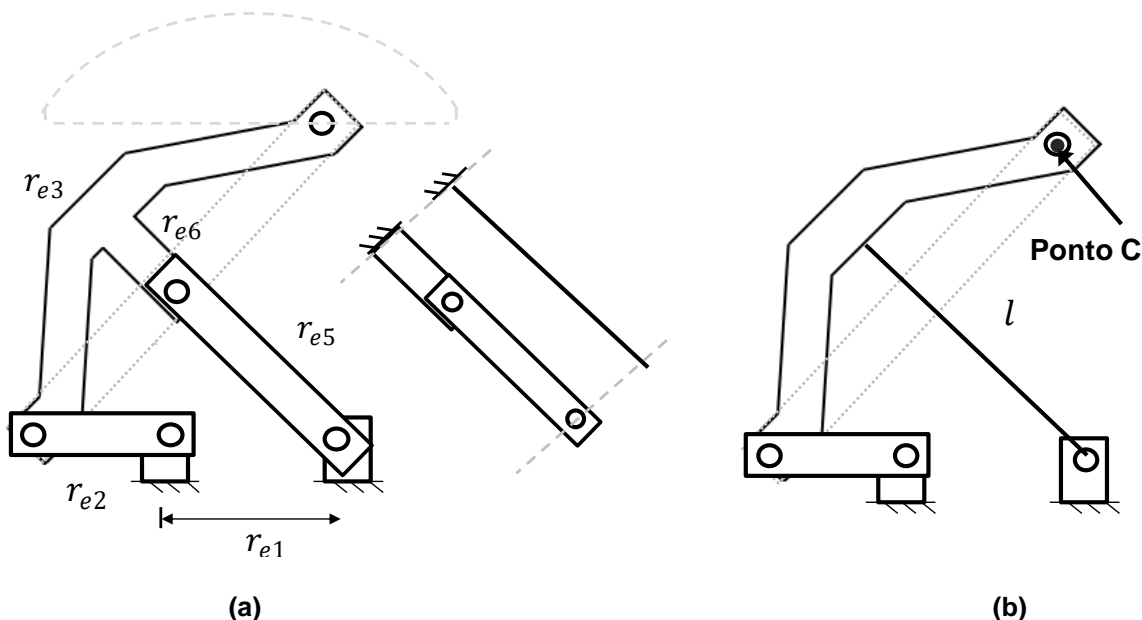


Figura 50 – (a) Mecanismo pseudo-rígido equivalente e (b) Mecanismo flexível

Fonte: Autor

O segmento flexível é obtido substituindo os dois elos pseudo-rígidos pelo respectivo elo flexível da condição de contorno fixo-pinado. O comprimento do elo flexível é encontrado utilizando a equação (56).

$$l = \frac{r_{e5}}{\gamma} \quad (84)$$

A Figura 50 (b) mostra o mecanismo flexível obtido através da substituição dos elos pseudo-rígidos por um elo flexível utilizando o método de substituição de corpo rígido. O ponto C é utilizado para a análise da trajetória dos deslocamentos da extremidade do elo r_{e3} .

4 RESULTADOS

Primeiramente são apresentados os resultados da modelagem analítica do mecanismo pseudo-rígido. Os resultados obtidos do método analítico são então comparados com os resultados da análise numérica de elementos finitos.

4.1 Mecanismo biela-manivela

4.1.1 Resultados da modelagem analítica utilizando o método de corpo pseudo-rígido

Os dados das dimensões e dos materiais dos elos são apresentados na Tabela 3 e Tabela 5 das seções 3.1.1.1 e 3.2.1.1.

A Figura 51 apresenta a configuração inicial do mecanismo pseudo-rígido utilizando o método do corpo pseudo-rígido e a Tabela 10 mostra os resultados dos comprimentos dos elos pseudo-rígidos e da constante de rigidez da mola torcional.

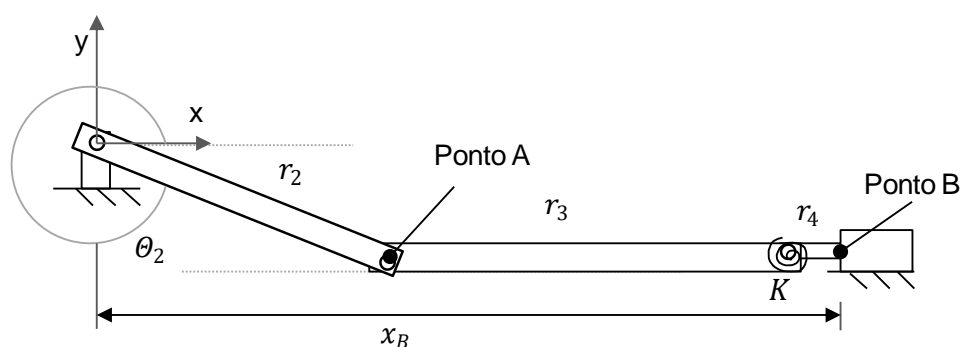


Figura 51 – Configuração do mecanismo pseudo-rígido

Fonte: Autor

Tabela 10 – Resultados da modelagem do mecanismo pseudo-rígido

Variáveis	r_2 (mm)	r_3 (mm)	r_4 (mm)	K (N.mm)
Resultados	90	260	45,272	2493,79

Fonte: Autor

É considerado o ponto inicial da análise o instante em que o elo r_2 é colinear com o eixo x, ou seja, quando o ângulo θ_2 é igual à zero ou 360. A escolha é feita de modo a facilitar a análise.

A aquisição dos deslocamentos do ponto B é feita variando o ângulo θ_2 a cada cinco graus e assim totalizando 360 graus. As equações utilizadas para o deslocamento são:

$$x_B = 90 \cos \theta_2 + 260 \cos \theta_1 + 45,272 \quad (85)$$

$$\theta_1 = \arcsen \frac{40 + 90 \sen \theta_2}{260} \quad (86)$$

A Figura 52 apresenta o resultado do deslocamento do ponto B em relação à variação do ângulo θ_2 . O ponto em verde representa a posição máxima e em vermelho a posição mínima.

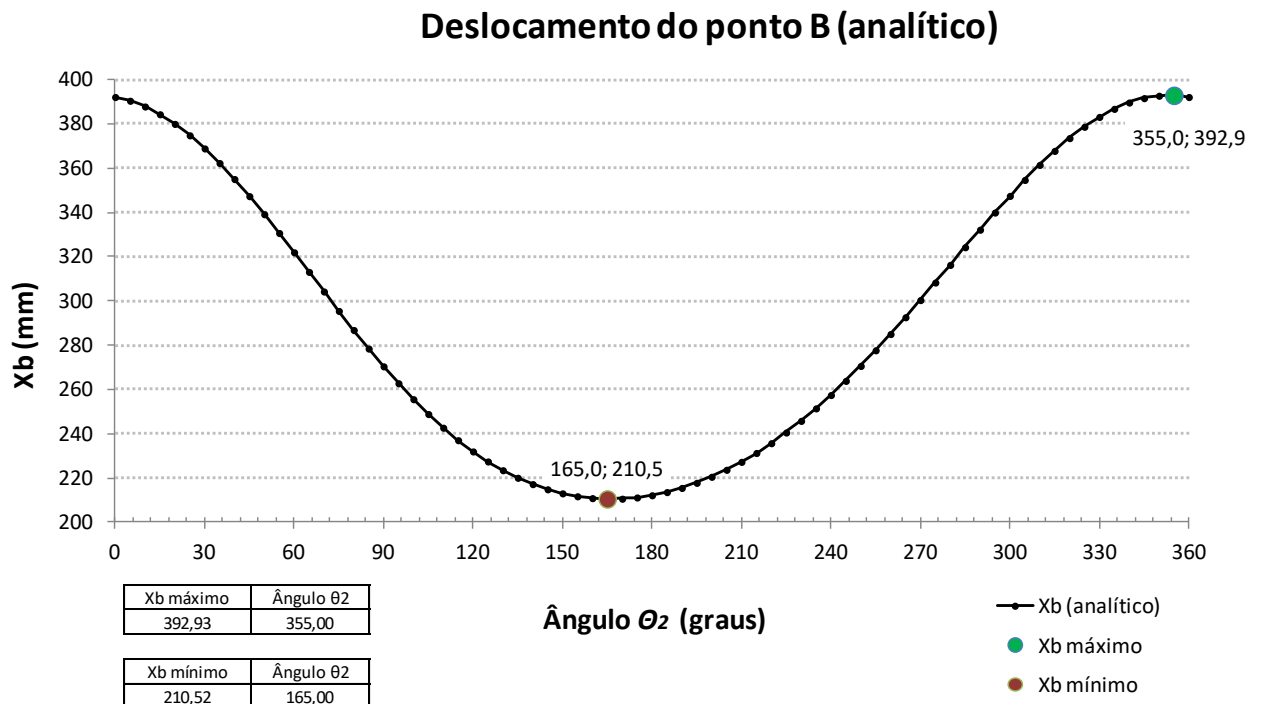


Figura 52 – Deslocamento do ponto B

Fonte: Autor

A aquisição da força vertical P, localizado no ponto A, também é feita variando o ângulo a cada cinco graus e assim totalizando 360 graus. A equação (87) é utilizada para obter a força P.

$$P = \frac{2493,79 \theta_2}{(0,8517) 305,27 \sen (90 - \theta_2)} \quad (87)$$

Conforme se observa na Figura 53, a força máxima (sentido positivo) se desenvolve quando o ângulo θ_2 é 90 graus e onde corresponde o ângulo máximo de deflexão do elo pseudo-rígido, $\theta_1 = 30$ graus. A força mínima (sentido negativo) se encontra quando $\theta_2 = 270$ graus ou $\theta_1 \approx -11$ graus.

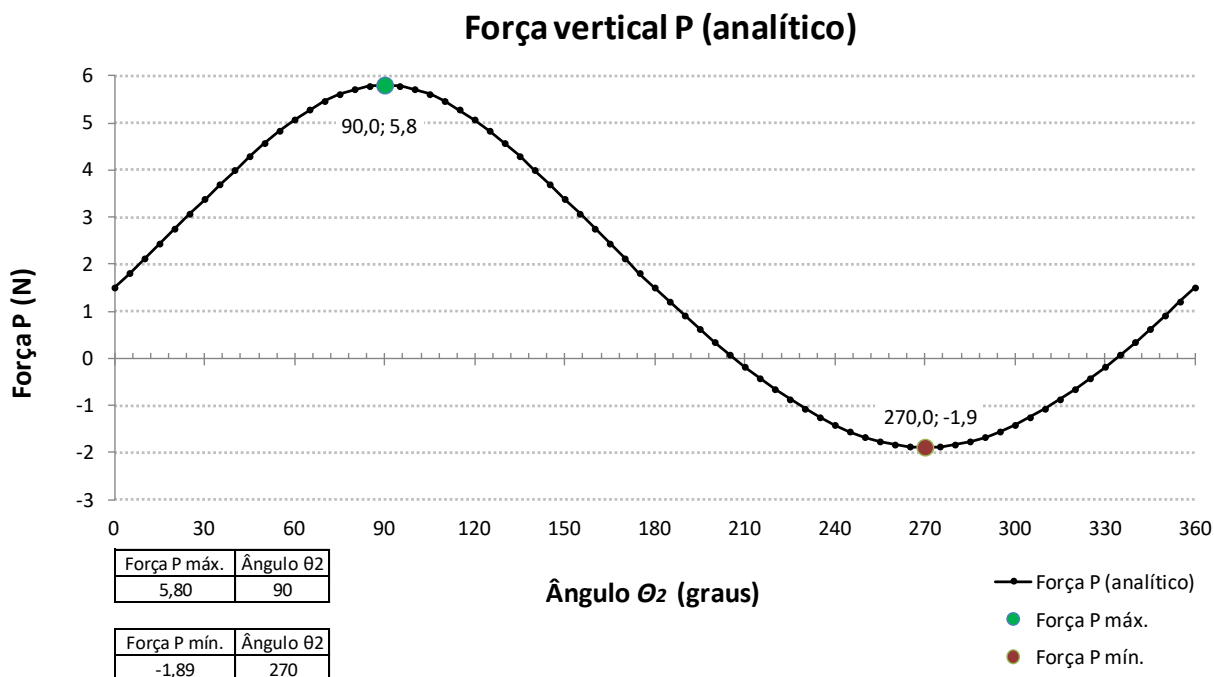


Figura 53 – Força vertical da extremidade do elo r_3

Fonte: Autor

4.1.2 Resultados do mecanismo pseudo-rígido utilizando o software de elementos finitos Abaqus

Os resultados obtidos analiticamente são comparados com os resultados obtidos do mecanismo pseudo-rígido utilizando o método de elementos finitos.

Os pontos em azul na Figura 54 representam as posições do ponto B em relação à variação do ângulo θ_2 . Para a análise das posições, são analisados 78 incrementos de ângulos θ_2 e com estes pontos são obtidos os respectivos deslocamentos. Os pontos pretos são referentes aos resultados do cálculo analítico. Observando o gráfico, percebe-se que não há diferença significativa entre os deslocamentos obtidos através do método analítico e o método numérico. Comparando os pontos máximos e mínimos entre os métodos, a diferença entre os valores máximos é de 0,07mm e entre os valores mínimos também uma diferença de 0,07mm.

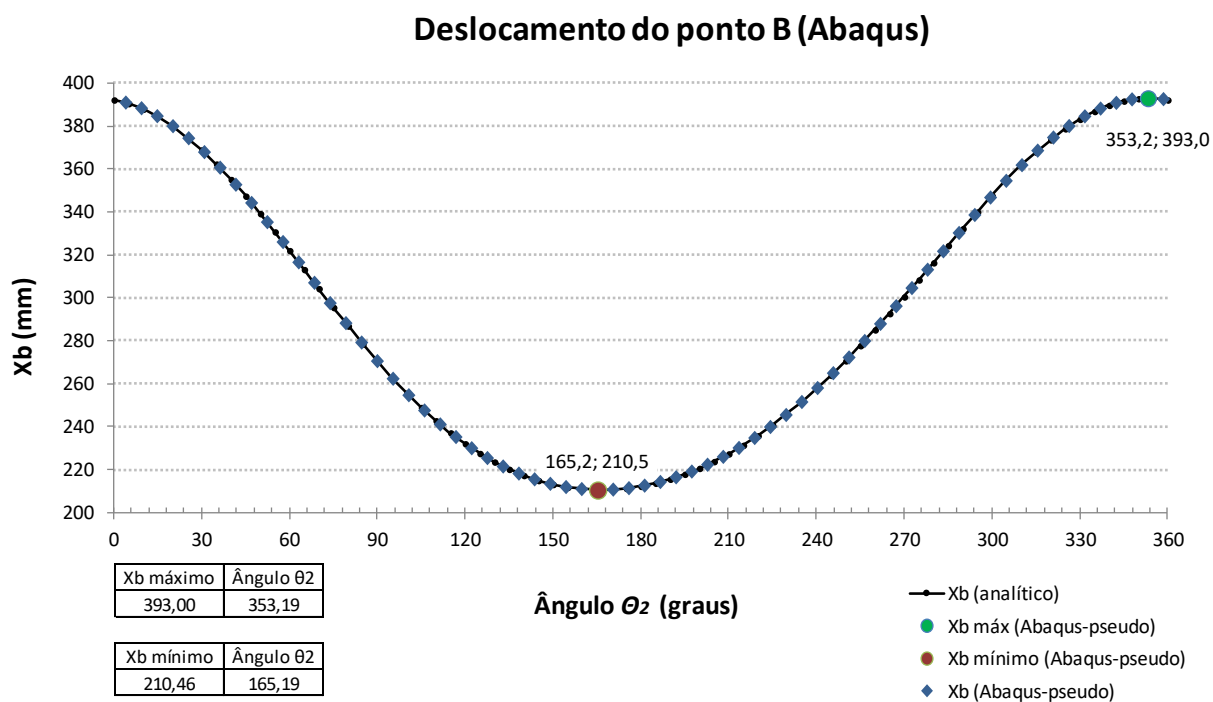


Figura 54 – Resultado dos deslocamentos do ponto B utilizando o software Abaqus

Fonte: Autor

Para a análise da força vertical (ponto A) também são analisados 78 incrementos de θ_2 e com estes valores são retirados as respectivas forças. A Figura 55 mostra a variação da força P em relação ao ângulo θ_2 . Comparando os resultados, observa-se no gráfico que não há divergência significativa entre os resultados. Os valores das forças máximas entre os dois métodos se mostram iguais e a diferença entre as forças mínimas é de apenas 0,01N.

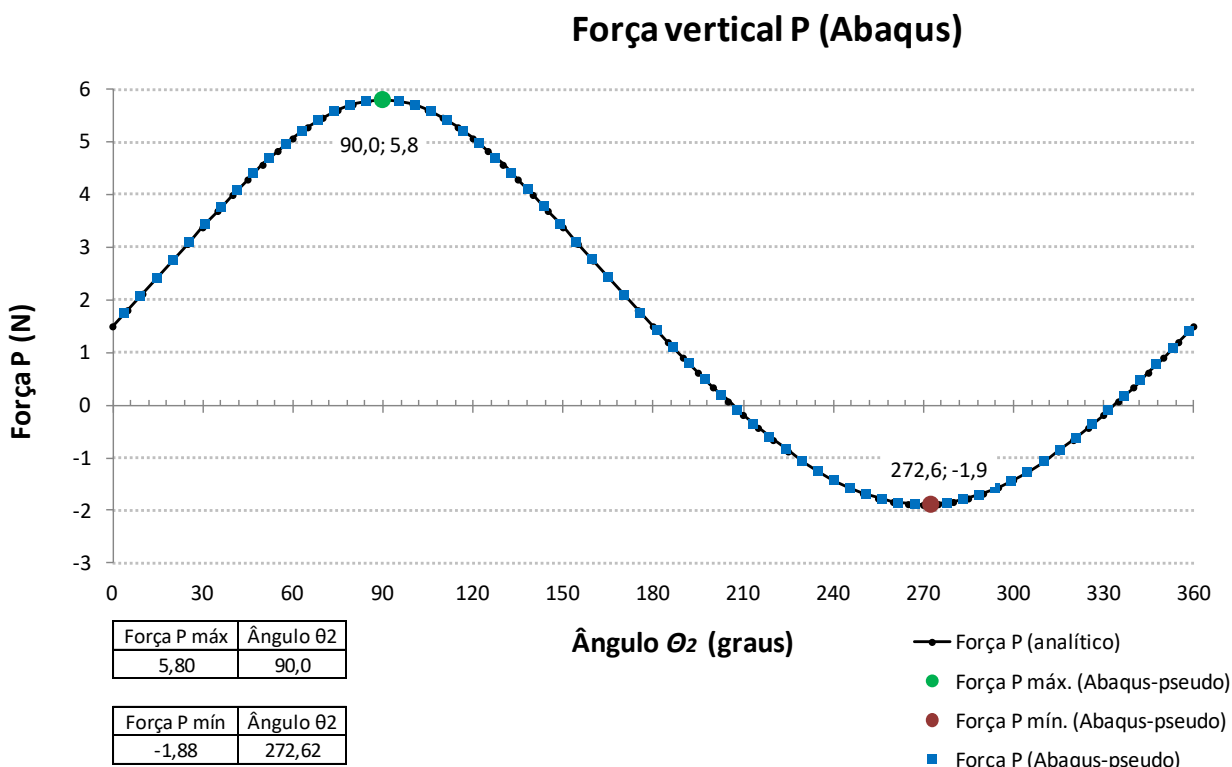


Figura 55 - Força vertical na extremidade do elo r_3 (ponto A)

Fonte: Autor

4.1.3 Resultados do mecanismo flexível utilizando o software de elementos finitos Abaqus

O mecanismo flexível é analisado utilizando o método de elementos finitos de análise não linear. Os resultados obtidos são comparados com os valores do método analítico.

Os pontos na cor laranja da Figura 56 representam os resultados dos deslocamentos do ponto B em relação ao ângulo θ_2 . São avaliados no total 82 ângulos θ_2 e com estes são retirados os respectivos deslocamentos. Os pontos pretos são referentes aos resultados do método analítico. Os valores dos deslocamentos entre os métodos se mostram bastante similares e comparando os pontos máximos e mínimos, verifica uma diferença de apenas 0,01mm nos deslocamentos máximos e uma variação de apenas 0,09mm entre os deslocamentos mínimos.

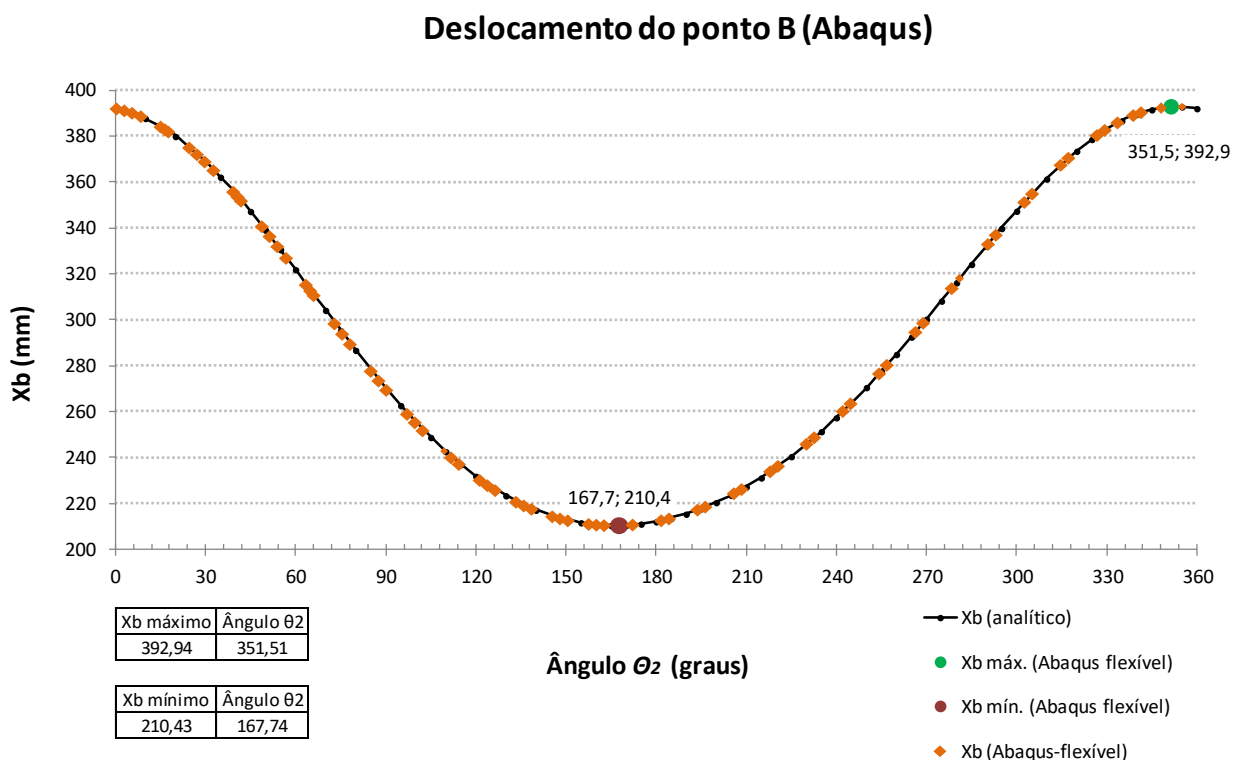


Figura 56 – Deslocamento do ponto B

Fonte: Autor

Os pontos em laranja da Figura 57 representam a força vertical P em função da variação do ângulo θ_2 . São também avaliados 82 ângulos θ_2 e assim obtidas às respectivas forças. Observa-se no gráfico, principalmente no intervalo dos ângulos de zero a 180, uma leve diferença entre os resultados do método numérico e do método analítico. A força P máxima do método numérico se mostra menor em comparação ao método analítico e a variação entre esses valores é de 0,15N. A força mínima também se apresenta menor com uma variação de 0,08N.

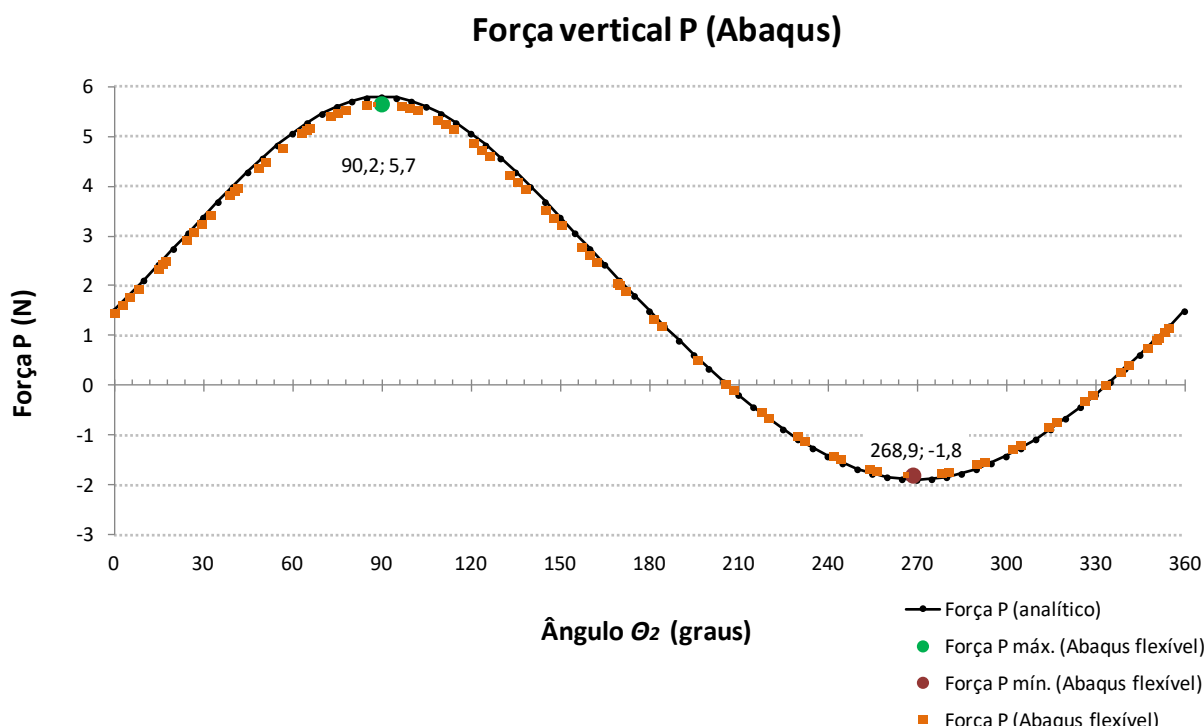


Figura 57 - Força vertical na extremidade do elo flexível (ponto A)

Fonte: Autor

A Figura 58 apresenta o gráfico contendo os resultados dos três métodos utilizados. Os pontos apresentados são referentes aos deslocamentos do ponto B como também a variação da força P. Dois eixos verticais podem ser visualizados, o eixo esquerdo representa os valores do deslocamento e o eixo direito é referente aos valores da força P. O gráfico também apresenta dois eixos horizontais, referentes aos ângulos θ_1 e θ_2 .

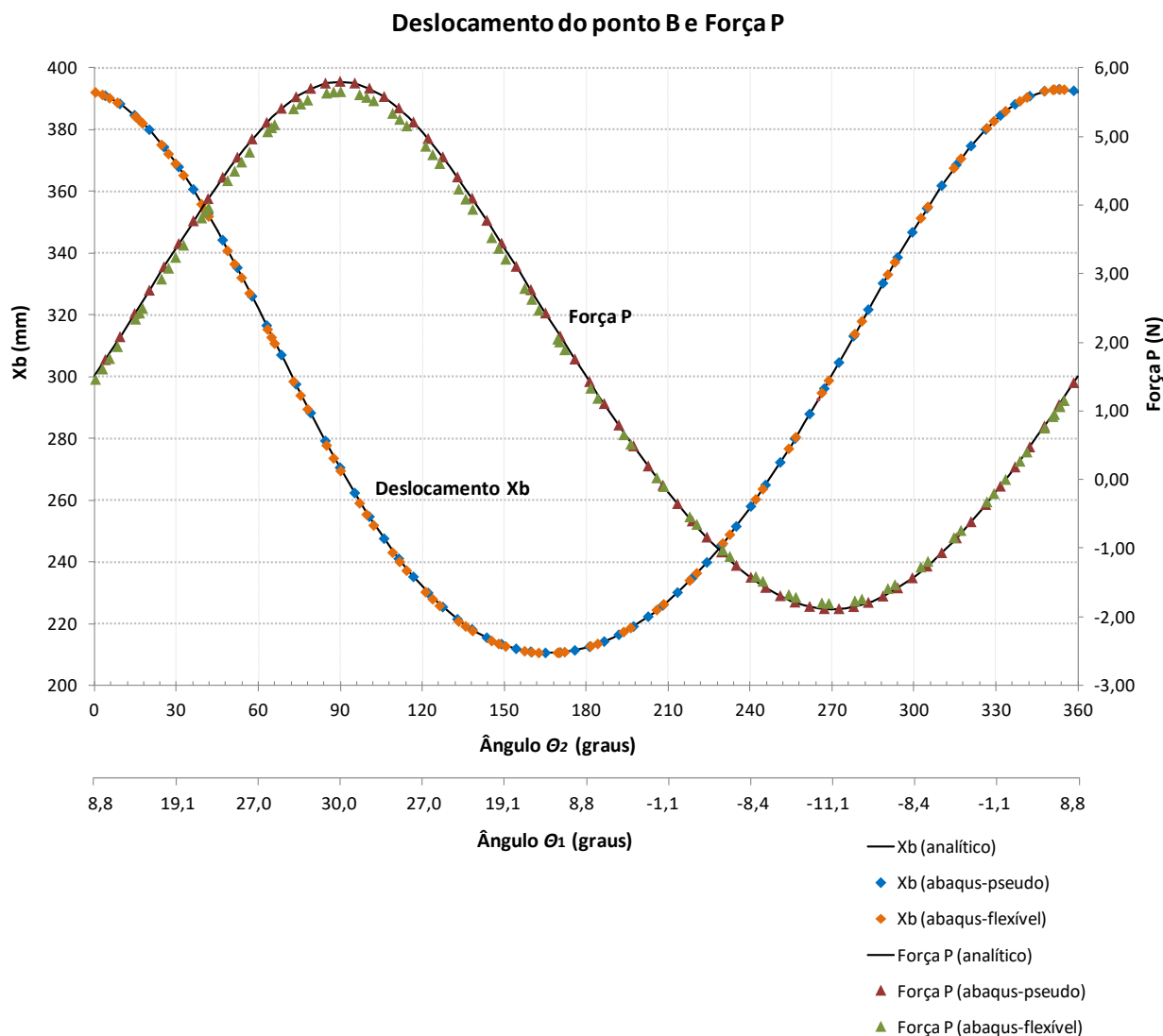


Figura 58 – Deslocamento do ponto B e força vertical P

Fonte: Autor

A Tabela 11 apresenta os resultados dos valores de máximo e mínimo dos deslocamentos e também da força P retirados utilizando os três métodos.

Tabela 11 – Resultados dos pontos máximos e mínimos

Método/mecanismo	Deslocamento X_b				Força P			
	X_b máx. (mm)	Ângulo θ_2 (graus)	X_b mín. (mm)	Ângulo θ_2 (graus)	Força P máx. (N)	Ângulo θ_2 (graus)	Força P mín. (N)	Ângulo θ_2 (graus)
Abaqus - flexível	392,94	351,51	210,43	167,74	5,65	90,22	-1,81	268,93
Abaqus - pseudo	393,00	353,19	210,46	165,19	5,80	89,99	-1,88	272,62
Analítico - pseudo	392,93	355,00	210,52	165,00	5,80	90,00	-1,89	270,00

Fonte: Autor

Utilizando os resultados da análise numérica não linear do mecanismo flexível como referência, estes são utilizados e comparados com os outros dois resultados

do mecanismo pseudo-rígido. A Tabela 12 apresenta a diferença dos valores dos pontos máximos e mínimos.

Tabela 12 – Variação dos resultados dos métodos

Comparação	Deslocamento Xb				Força P			
	ΔX_b máx. (mm)	$\Delta \text{Ângulo } \Theta_2$ (graus)	ΔX_b mín. (mm)	$\Delta \text{Ângulo } \Theta_2$ (graus)	$\Delta \text{Força P}$ máx. (N)	$\Delta \text{Ângulo } \Theta_2$ (graus)	$\Delta \text{Força P}$ mín. (N)	$\Delta \text{Ângulo } \Theta_2$ (graus)
Abaqus-flexível e Abaqus-pseudo	0,06	1,68	0,02	2,55	0,15	0,23	0,08	3,69
Abaqus-flexível e Analítico-pseudo	0,00	3,49	0,08	2,74	0,15	0,22	0,08	1,07

Fonte: Autor

Com base nos resultados do método analítico e nos resultados do método numérico do mecanismo pseudo-rígido, pode-se afirmar que é possível modelar e simular o mecanismo pseudo-rígido biela-manivela utilizando o software de elementos finitos Abaqus. Os gráficos de deslocamento, Figura 54 e de força, Figura 55, apresentam valores similares, portanto atendendo o objetivo esperado.

O uso do conector do tipo “*hinge*” apesar de possível somente para aplicações em modelagem tridimensional, oferece facilidade na modelagem do mecanismo pseudo-rígido, pois além de simular a junta de revolução ainda permite simular uma mola torcional inserida nesta.

Analisando os dados da Tabela 12, pode-se dizer que o método do modelo de corpo pseudo-rígido proporciona bons resultados na tentativa de simular o mecanismo flexível. Os valores dos deslocamentos se mostram bastante próximos, o que significa que o tamanho dos elos pseudo-rígidos definidos estão adequadamente modelados. A variação da força P também não se apresenta com diferença significativa. Assim pode-se dizer que a constante de rigidez da mola torcional está adequadamente modelada para representar a rigidez do elo flexível.

Depois de avaliado a capacidade do método pseudo-rígido em representar de modo aproximado o mecanismo flexível, pode-se então utilizar as equações analíticas desenvolvidas do mecanismo pseudo-rígido para entender a influência do elo flexível nas características do mecanismo.

A Figura 59 mostra a influência das dimensões t e w do elo flexível na força P. As variações das dimensões t e w não influenciam o deslocamento do ponto B, no entanto estão diretamente relacionadas à força P. O eixo horizontal superior do

gráfico apresenta a variação da largura a cada 1 mm. O eixo inferior é referente à variação de cada 0,1mm da espessura do elo flexível e o eixo vertical representa a diferença entre a força máxima e mínima. Comparado com a largura w , percebe-se que a espessura do elo flexível tem uma maior influência na força P , ou seja, a medida que a espessura aumenta necessita-se de uma maior força para executar o movimento.

Influência da largura w e espessura t na força P

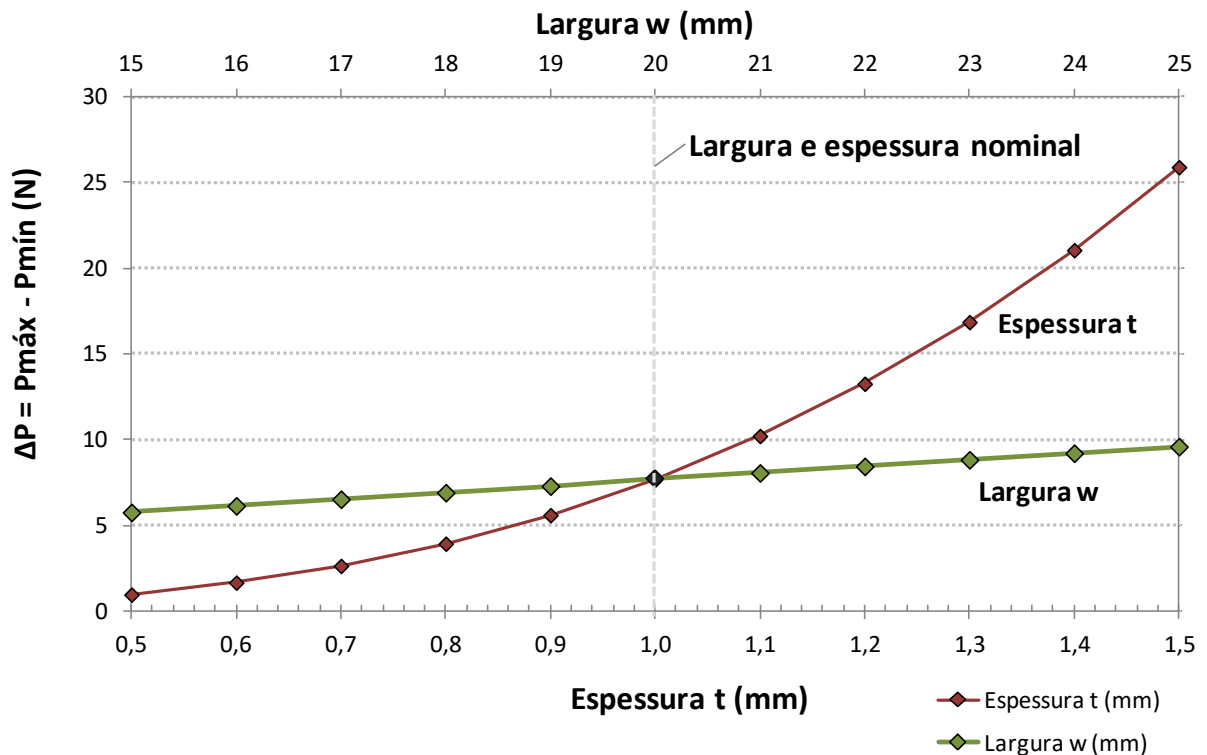


Figura 59 – Influência das dimensões da seção transversal na força P

Fonte: Autor

A Figura 60 apresenta a influência do comprimento do elo flexível no deslocamento do ponto B (curso do bloco deslizando) como também na força P . O eixo horizontal representa a variação do comprimento do elo a cada 1mm. O eixo vertical esquerdo representa os valores do curso do bloco deslizando (ΔX_b). O eixo vertical direito é referente à diferença entre a força P máxima e mínima. A cada variação do comprimento do elo flexível, os valores dos elos r_3 e r_4 são atualizados utilizando as equações (57) e (58) e então são obtidos os respectivos valores do curso do bloco deslizando (ΔX_b) e da variação da força P (ΔP) utilizando as equações (63) e (65) respectivamente. Com o aumento do comprimento do elo, no entanto percebe-se que o curso do bloco deslizando diminui e isso se deve à maior

deflexão do elo flexível, porém essa diferença não é significativa, aproximadamente 0,20mm ($182,52 - 182,32 \approx 0,20\text{mm}$). Em razão do aumento da flexibilidade, a variação da força P também diminui com o aumento do comprimento do elo, aproximadamente 0,84N ($8,11 - 7,27 \approx 0,84\text{N}$).

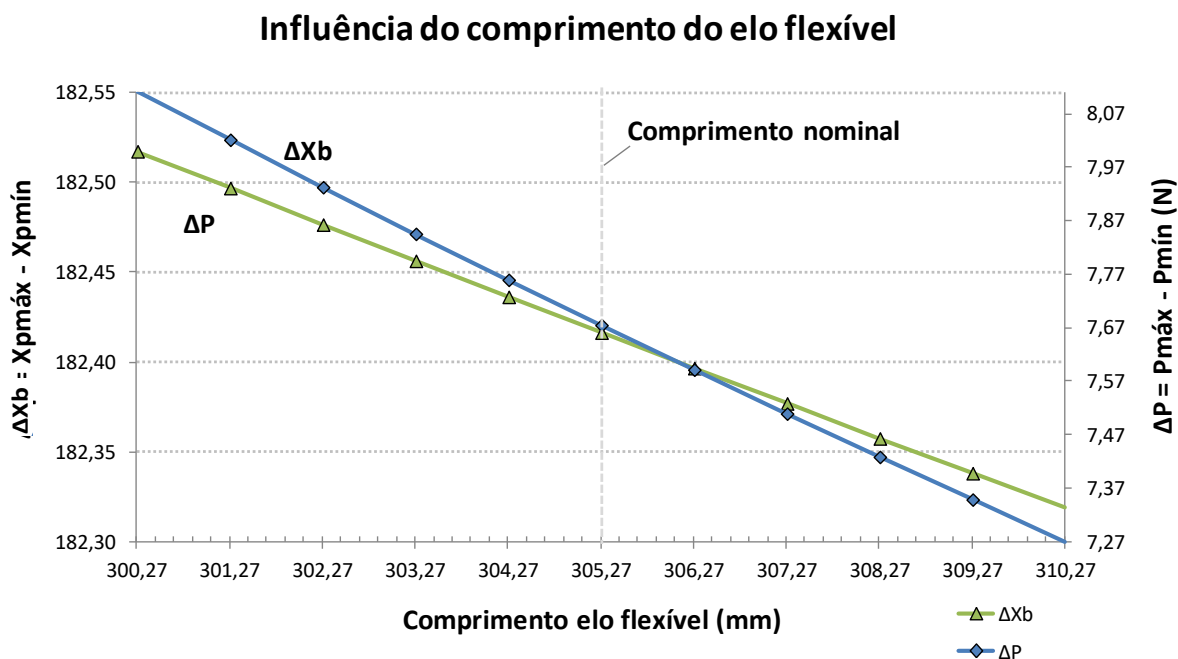


Figura 60 – Influência do comprimento do elo flexível na força P e no deslocamento Xb

Fonte: Autor

O uso do método pseudo-rígido possibilita um maior entendimento sobre o mecanismo flexível, podendo identificar as principais variáveis que interferem o desempenho do mecanismo. Analisando os gráficos, a espessura do elo flexível é a variável que apresenta maior influência na força P. Quanto maior a espessura, maior será a força P necessária para gerar o movimento. Visto que o comprimento do elo flexível não possui influência significativa no deslocamento do ponto B, o elo rígido r_2 é a variável que atuará no aumento ou decréscimo significativo do curso do bloco deslizando.

4.2 Mecanismo paralelo de quatro barras

4.2.1 Resultados da modelagem analítica utilizando o método de corpo pseudo-rígido

Os dados das dimensões e dos materiais dos elos são apresentados na Tabela 4 e Tabela 6 das seções 3.1.2.1 e 3.2.2.1.

A Figura 61 (a) apresenta a configuração inicial do mecanismo pseudo-rígido paralelo e a Tabela 13 mostra os resultados dos comprimentos dos elos pseudo-rígidos e das constantes de rigidez das molas torcionais.

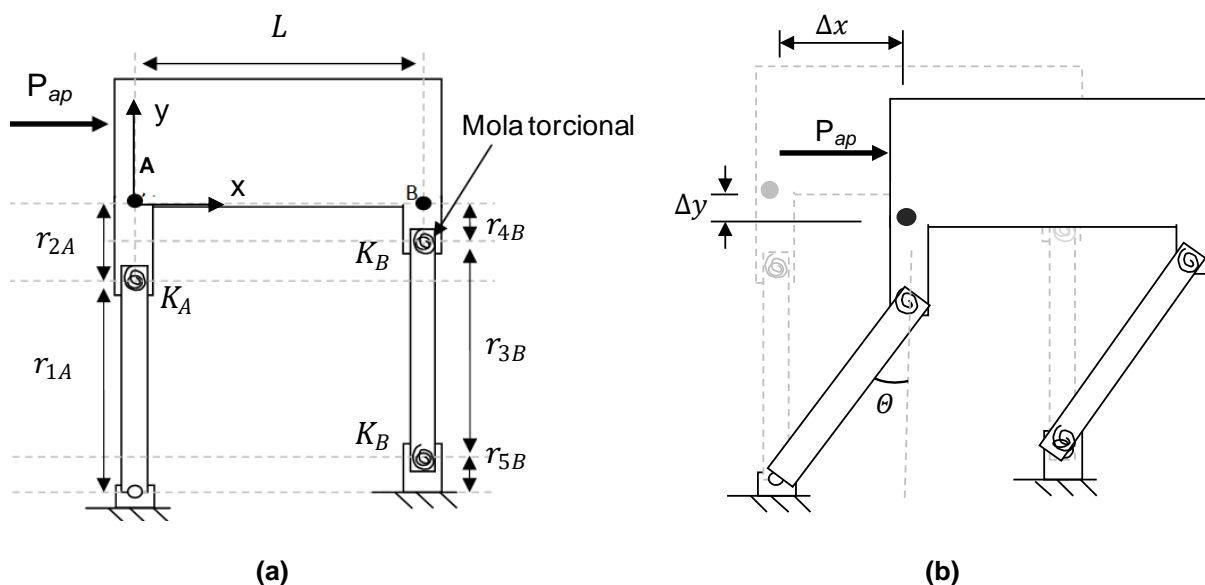


Figura 61 – (a) Mecanismo pseudo-rígido paralelo de quatro barras e (b) Mecanismo na posição defletida

Fonte: Autor

Tabela 13- Resultados da modelagem do mecanismo pseudo-rígido

Variáveis	r_{1A} (pol)	r_{2A} (pol)	r_{3B} (pol)	r_{4B} (pol)	r_{5B} (pol)	K_A (lbf.pol)	K_B (lbf.pol)
Resultados	17	3	17	1,5	1,5	10,579	21,158

Fonte: Autor

Para aquisição dos deslocamentos dos pontos A e B, é feita a variação do ângulo θ do elo r_{1A} , Figura 61 (b), em incrementos de um grau, totalizando 45 graus ou 45 incrementos. Durante o movimento do mecanismo pseudo-rígido, as variações dos deslocamentos Δx e Δy dos pontos A e B são exatamente iguais, portanto a análise é dada somente para o ponto A. As equações utilizadas para obter o deslocamento do ponto A são:

$$\Delta y = (0,85) 20(1 - \cos\theta) \quad (88)$$

$$\Delta x = (0,85) 20\text{sen}\theta \quad (89)$$

A Figura 62 apresenta a trajetória da variação do deslocamento do ponto A.

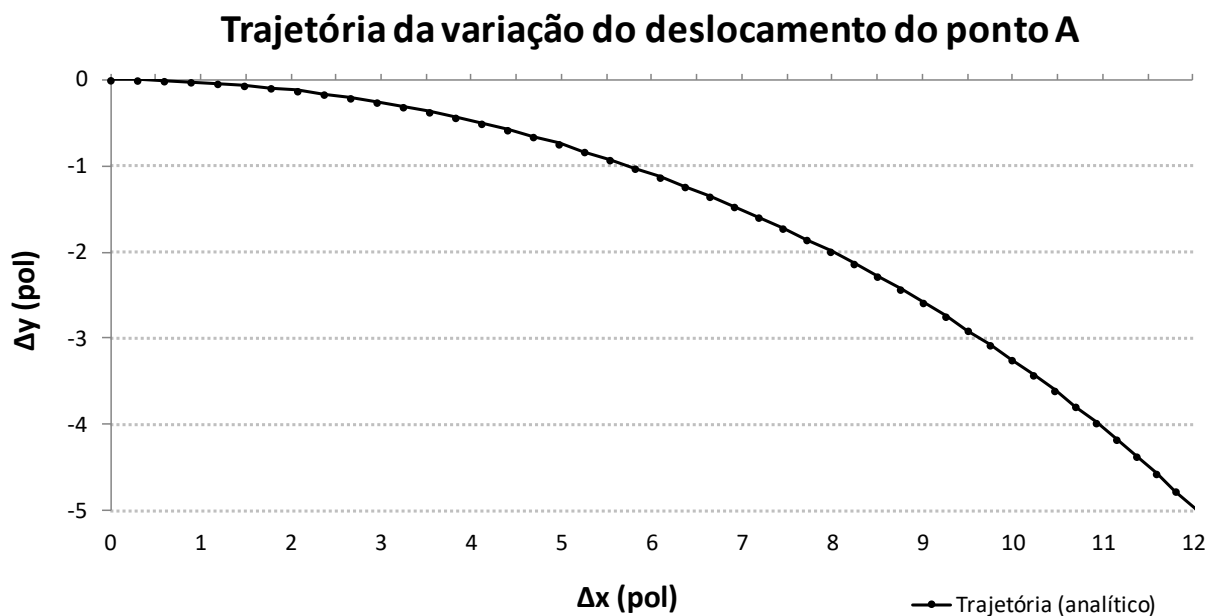


Figura 62 – Trajetória da variação do deslocamento do ponto A

Fonte: Autor

O intervalo Δx do gráfico da Figura 62 é delimitado em 12 pol e a variação Δy é delimitado em -5 pol. Essas delimitações são feitas de modo a avaliar os resultados dentro deste intervalo como também padronizar para a comparação com as análises dos outros métodos.

A equação (90) é utilizada para aquisição da força P aplicada. É feita a variação do ângulo θ em incrementos de um grau, assim totalizando 45 graus.

$$P_{ap} = \frac{(5)(10,579) \theta}{(0,85)(20) \text{sen}(90 - \theta)} \quad (90)$$

A Figura 63 apresenta a força P em relação à variação do deslocamento Δx . O eixo horizontal superior do gráfico mostra a relação da variação do ângulo θ .

Força P em relação ao deslocamento Δx

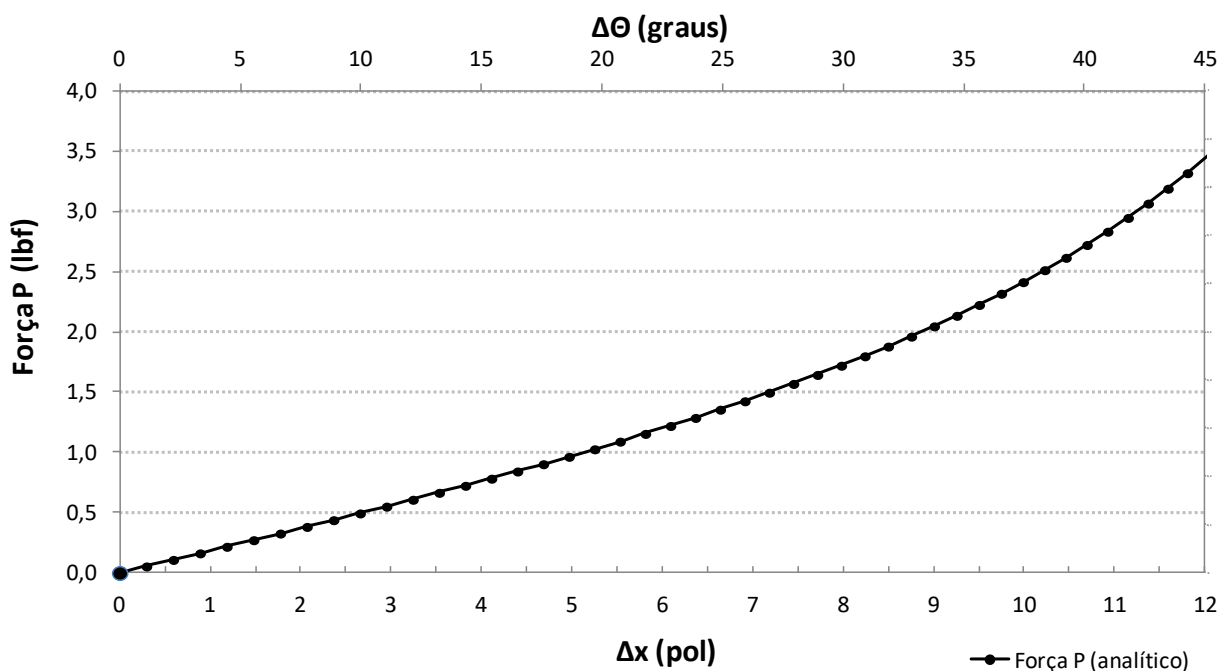


Figura 63 – Força P em função do deslocamento Δx

Fonte: Autor

Os resultados obtidos da trajetória do ponto A e da força P se mostram similares aos valores da literatura apresentados por Howell (2001), conforme ANEXO A.

4.2.2 Resultados do mecanismo pseudo-rígido utilizando o software de elementos finitos Abaqus

A partir dos resultados obtidos da análise analítica, estes são comparados com os resultados obtidos do mecanismo pseudo-rígido utilizando o método de elementos finitos.

No total são obtidos 41 valores de incrementos de deslocamentos na análise de elementos finitos. As variações dos deslocamentos Δx e Δy dos pontos A e B são exatamente iguais, portanto a análise será também dada somente para o ponto A. A Figura 64 apresenta a trajetória do deslocamento do ponto A. Os pontos em vermelho representam os dados dos deslocamentos obtidos a cada incremento e os pontos em preto são os resultados do método analítico.

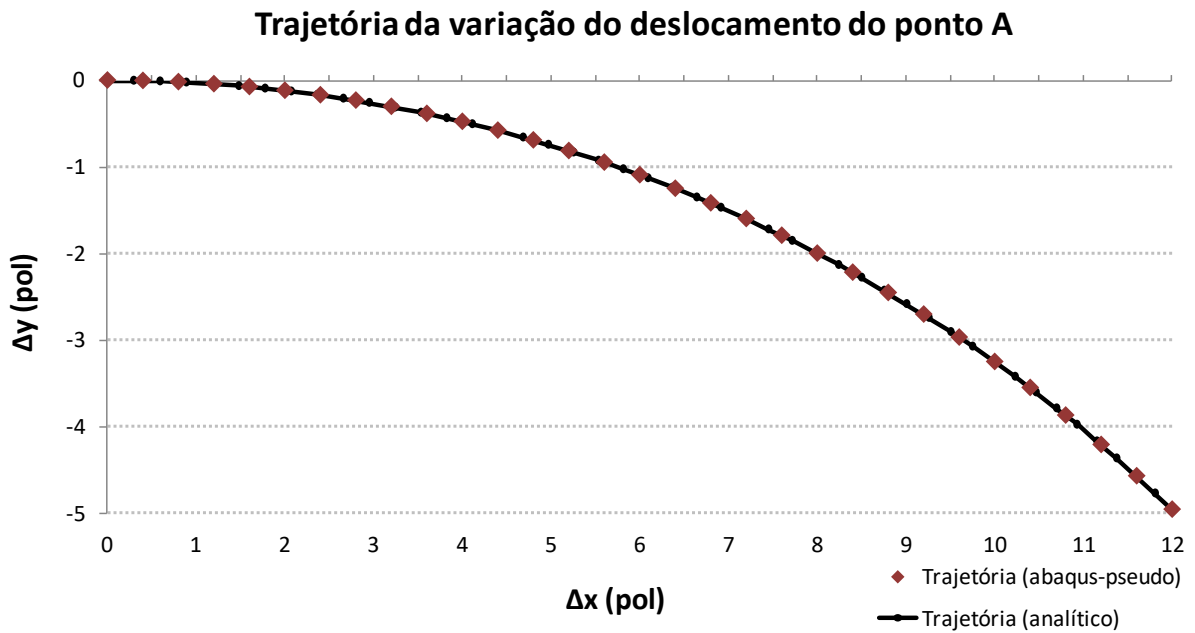


Figura 64 – Trajetória da variação do deslocamento do ponto A

Fonte: Autor

Para a análise da força P aplicada, são avaliados 41 pontos de incremento de deslocamento e estes foram utilizados para se obter as respectivas forças. A Figura 65 apresenta a comparação dos resultados da variação da força P. Os pontos em vermelho representam os valores obtidos da análise utilizando o software Abaqus e em preto os resultados do método analítico.

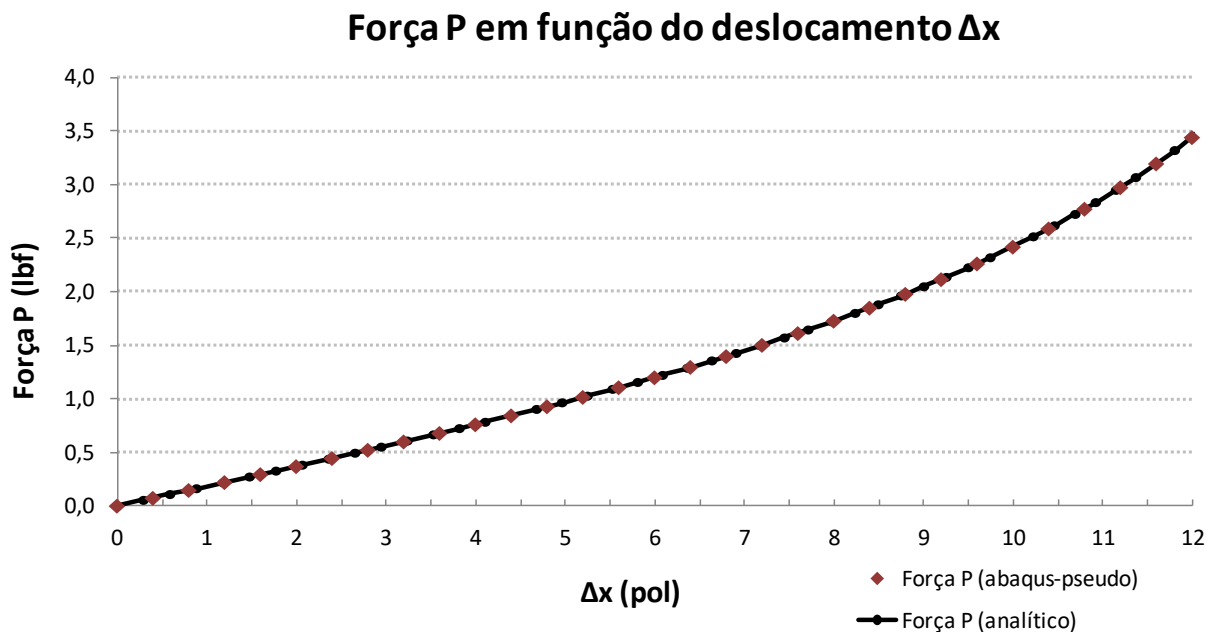


Figura 65 - Força P em função do deslocamento Δx

Fonte: Autor

Analisando os resultados dos gráficos da Figura 64 e Figura 65, observa-se que não há diferença significativa entre os resultados obtidos no método analítico e no método numérico. Pode-se afirmar então que os resultados do método numérico são adequados e dessa maneira é possível modelar e simular o mecanismo pseudo-rígido paralelo utilizando o software de elementos finitos Abaqus.

4.2.3 Resultados do mecanismo flexível utilizando o software de elementos finitos Abaqus

Os resultados obtidos da análise não linear do mecanismo flexível são comparados com os resultados obtidos do método analítico do corpo pseudo-rígido.

Para a análise da trajetória da deflexão dos pontos A e B, são obtidos 30 incrementos de deslocamentos e esses dados são apresentados na Figura 66. Conforme se observa no gráfico, a partir de $\Delta x \approx 8\text{pol}$, os deslocamentos referentes aos pontos A e B começam a apresentar uma diferença. Essa diferença representa uma rotação do elo rígido ao final do seu movimento. Diferentemente do mecanismo flexível, no método do corpo pseudo-rígido o elo rígido permanece na horizontal durante todo o seu movimento. Apesar do método pseudo-rígido não conseguir simular essa rotação, o estabelecimento adequado do tamanho dos elos pseudo-rígidos permitem aproximações adequadas da trajetória dos pontos A e B, conforme se observa no resultado do modelo analítico.

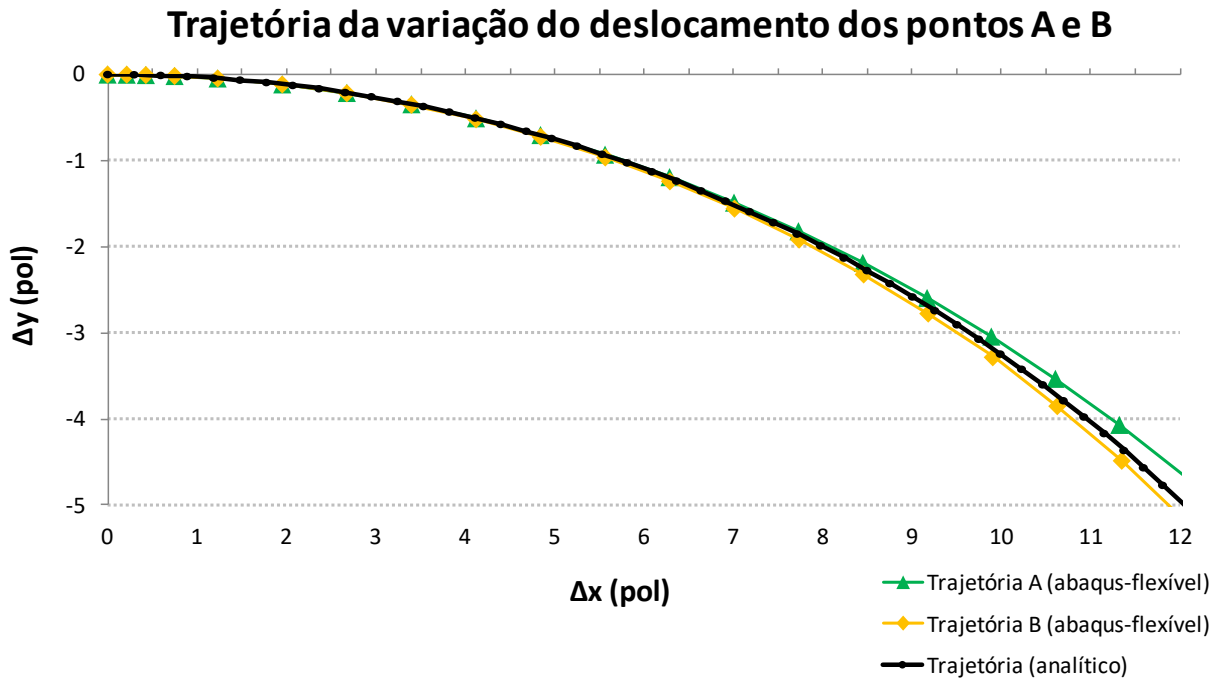


Figura 66 – Trajetória da variação do deslocamento dos pontos A e B

Fonte: Autor

Para a análise da força P são utilizados também 30 incrementos de deslocamentos e estes utilizados para avaliar a força P aplicada. A Figura 67 mostra aplicação da força P em função da variação do deslocamento Δx dos pontos A e B. Os resultados do gráfico são comparados com os resultados obtidos utilizando o método analítico. Conforme se observa no gráfico, a partir de $\Delta x \approx 9\text{pol}$, começa uma variação entre os resultados das forças, sendo maiores no método analítico. Apesar dessa diferença, pode-se dizer que os valores da força P são adequadamente aproximados. Portanto os valores obtidos da constante de rigidez e o uso da mola torcional são adequados para simular e representar a rigidez do elo flexível.

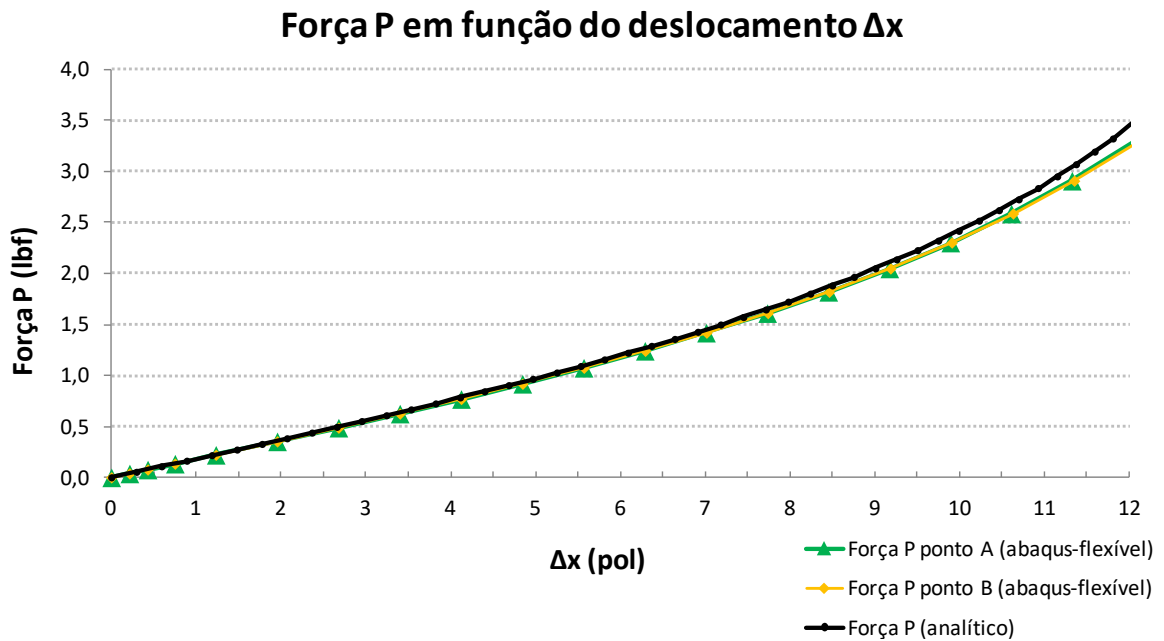


Figura 67 – Força P em função do deslocamento Δx

Fonte: Autor

O gráfico da Figura 68 é utilizado para analisar a diferença entre os resultados do método analítico e do mecanismo flexível. Os valores dos resultados numéricos do mecanismo flexível são interpolados utilizando a interpolação linear e assim possibilitando a comparação com os resultados do modelo analítico. No total 46 pontos são interpolados e então utilizados para gerar o gráfico, Figura 68.

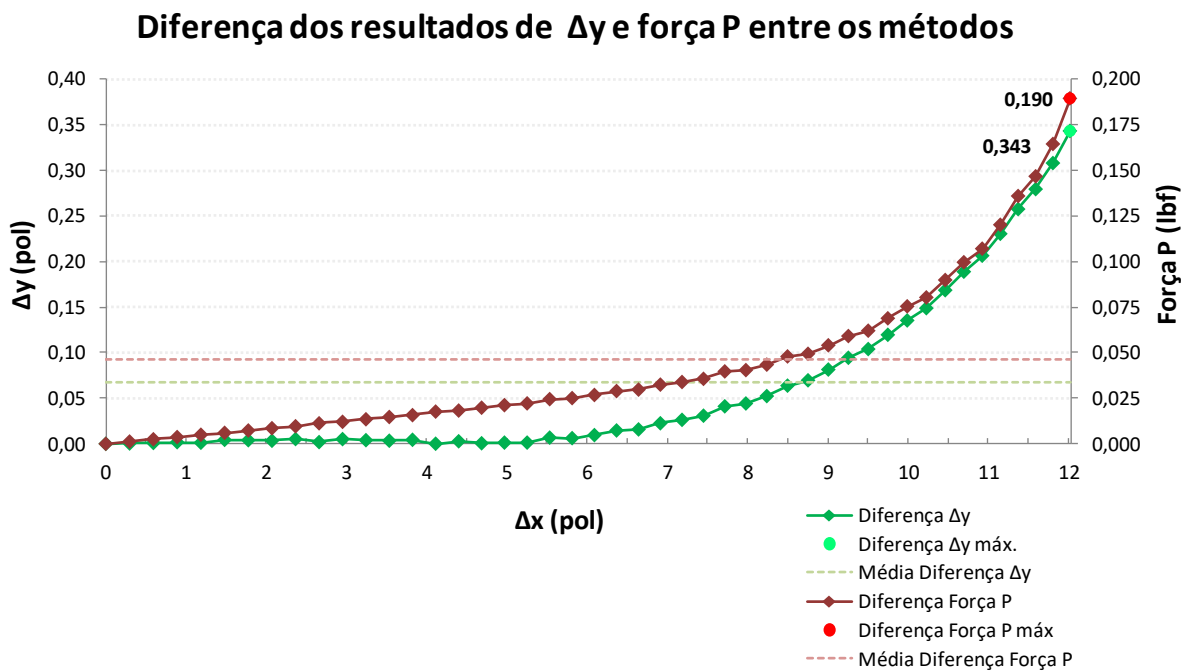


Figura 68 – Diferença dos resultados de Δy e força P entre os dois métodos

Fonte: Autor

Os pontos em vermelho escuro da Figura 68 representam a diferença entre os resultados do deslocamento Δy utilizando o método analítico e o método de elementos finitos do mecanismo flexível. Os pontos verdes são referentes às divergências dos resultados da força P. Os resultados começam a ter maiores variações na medida em que o mecanismo executa o movimento. Apesar destas disparidades, a diferença Δy máxima é de apenas 0,343pol (ponto verde) e a diferença para a força P é de apenas 0,190lbf (ponto vermelho).

A partir dos dados obtidos, pode-se dizer que o método do corpo pseudo-rígido fornecem resultados similares aos do mecanismo flexível. Assim, as equações desenvolvidas para o mecanismo pseudo-rígido podem ser utilizados para entender as características do mecanismo flexível.

O efeito das dimensões da seção transversal do elo flexível na força P pode ser compreendido através dos valores encontrados na Tabela 14. A tabela apresenta a força P máxima necessária para gerar o movimento. Para diferentes dimensões da largura w e espessura t, a equação (81) da força P é atualizada e então a cada incremento do ângulo θ (totalizando 45 graus) é retirada a respectiva força. De acordo com os resultados, quando se duplica a largura w, a força P necessária para o deslocamento também é duplicada. No entanto, quando se duplica a espessura t, a força P necessária para gerar o movimento é oito vezes maior. Essa diferença na força P se deve às características da rigidez e flexibilidade da geometria do elo flexível, conforme descrito no item 2.2.2.1.

Tabela 14 – Efeito da espessura e largura na força P

w (pol)	Força P (lbf)	t (pol)	Força P (lbf)
0,63	1,73	1/64	0,43
1,25	3,46	1/32	3,46
2,50	6,91	1/16	27,65

Fonte: Autor

Utilizando as equações do modelo pseudo-rígido, pode-se compreender o efeito do comprimento do elo flexível no comportamento do mecanismo flexível. O comprimento do elo flexível altera diretamente a trajetória do deslocamento como também a força necessária para gerar o movimento. A Figura 69 mostra a trajetória do ponto A para três diferentes comprimentos do elo flexível. A cada variação do comprimento do elo, as equações (72) e (73) da trajetória são atualizadas e os

deslocamentos Δx e Δy são avaliados variando o ângulo θ em incrementos, totalizando 45 graus.

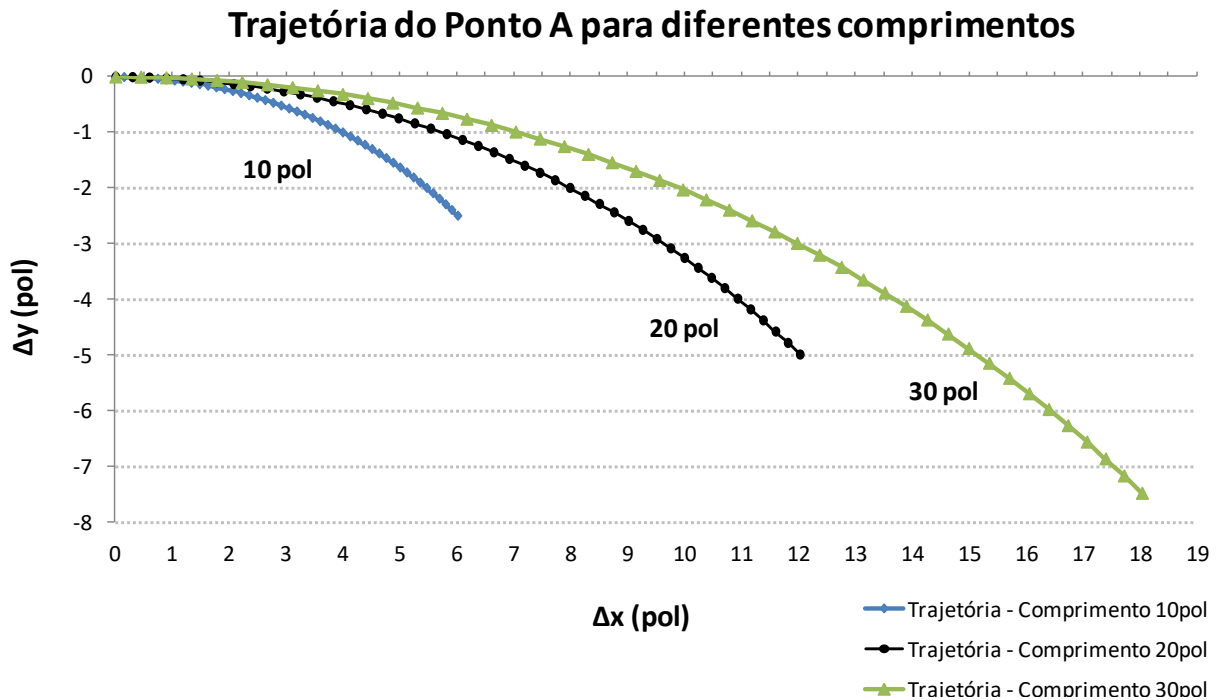


Figura 69 – Trajetória do ponto A para diferentes comprimentos do elo flexível

Fonte: Autor

A Figura 70 mostra a influência do comprimento dos elos flexíveis na força P . Três tamanhos de elos flexíveis também foram analisados. A cada variação do comprimento do elo, a equação (81) da força P é atualizada e então a cada incremento do ângulo θ (totalizando 45 graus) é retirada a respectiva força. Para um deslocamento $\Delta x \approx 6\text{pol}$, quanto menor o elo, maior é a força necessária para obter o deslocamento desejado.

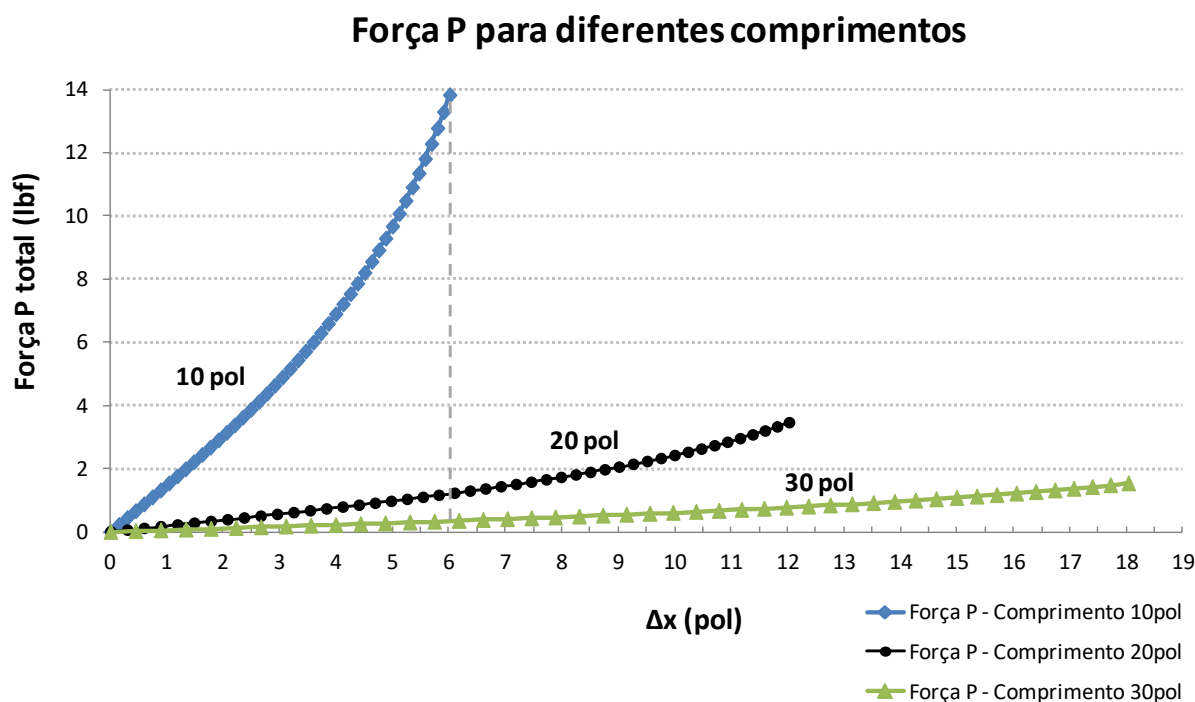


Figura 70 – Força P para diferentes comprimentos do elo flexível

Fonte: Autor

Assim, utilizando as equações do mecanismo pseudo-rígido, pode-se avaliar o desempenho do mecanismo variando as dimensões do elo flexível. As dimensões da seção transversal não influenciam na trajetória do mecanismo, no entanto está diretamente ligada à força necessária para o movimento. O comprimento do elo flexível influencia tanto a trajetória do movimento como também a força necessária para o deslocamento.

4.3 Comparação entre trajetórias do mecanismo Hoeken rígido e do mecanismo flexível correspondente

A Figura 71 (a) apresenta o mecanismo rígido Hoeken de quatro barras e a Figura 71 (b) mostra o mecanismo flexível Hoeken obtido através do método de substituição do corpo rígido.

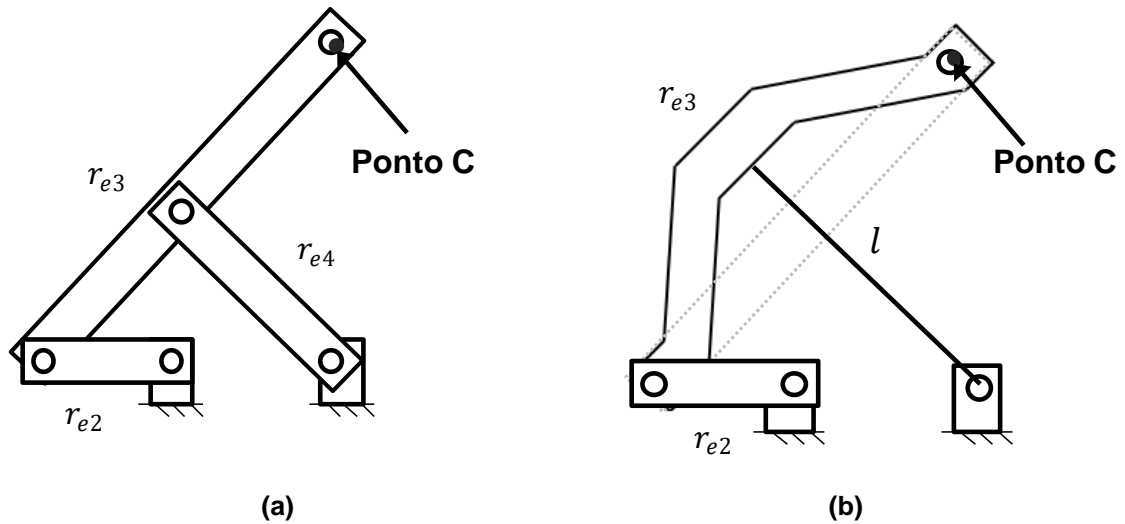


Figura 71 – (a) Mecanismo Hoeken e (b) Mecanismo flexível Hoeken

Fonte: Autor

A Figura 72 apresenta a comparação do resultado da trajetória do deslocamento do ponto C do mecanismo rígido e do mecanismo flexível obtido.

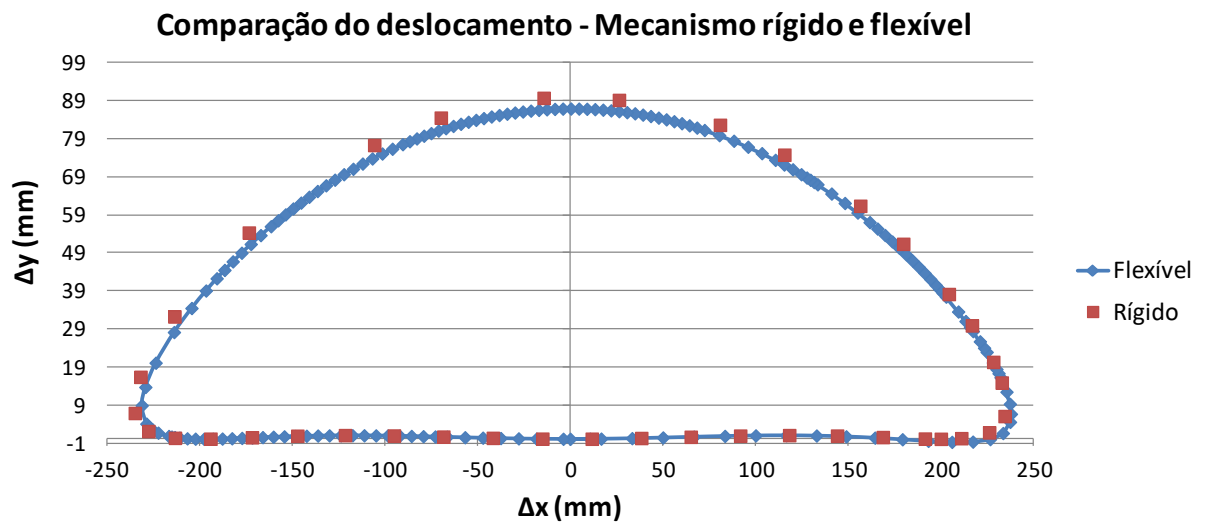


Figura 72 – Comparação do deslocamento do ponto C dos mecanismos rígido e flexível

Fonte: Autor

A Figura 73 destaca a comparação da trajetória linear do ponto C dos dois mecanismos, região de Δy entre -1 e 1 da Figura 72.

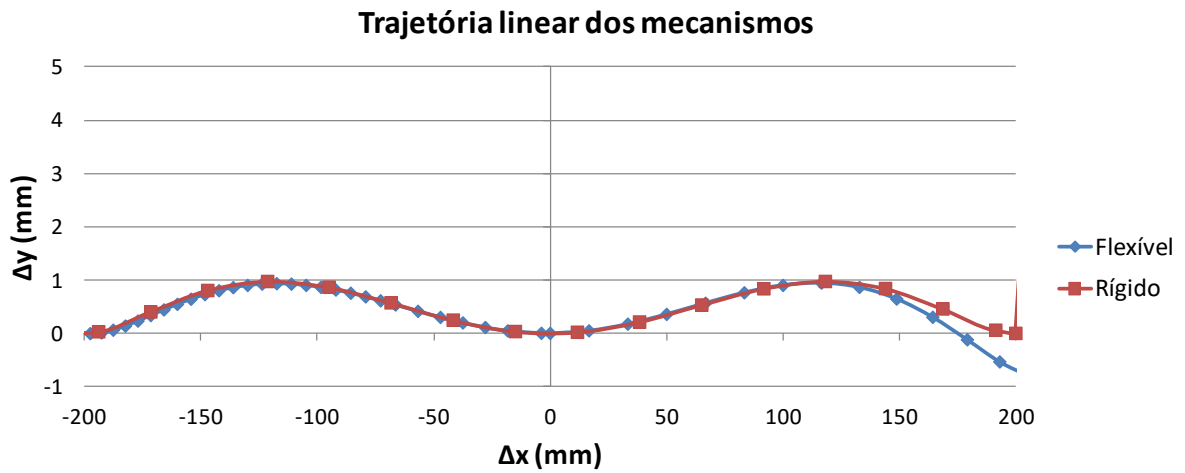


Figura 73 – Trajetória linear dos mecanismos

Fonte: Autor

A partir dos resultados obtidos, a similaridade dos deslocamentos mostra que mecanismo flexível proposto consegue fazer a mesma trajetória do mecanismo rígido, no entanto, pequenas variações são observadas a partir do deslocamento $\Delta x \approx 150$ mm, conforme Figura 73.

5 CONCLUSÕES

Muitos dos mecanismos rígidos empregados atualmente já se encontram bastante desenvolvidos e então surge a necessidade de outras formas de melhoria desses mecanismos. Substituir os elos rígidos por elos flexíveis é uma das maneiras de se otimizar a característica e desempenho em algumas aplicações.

Os mecanismos flexíveis utilizados na análise são o mecanismo biela-manivela e o mecanismo paralelo de quatro barras. Esses mecanismos são originados dos mecanismos rígidos os quais são bastante conhecidos e muito utilizados na engenharia. Assim, a análise desses mecanismos flexíveis fornecem informações importantes para uma futura aplicação ou substituição dos mecanismos tradicionais.

Os mecanismos flexíveis são modelados utilizando o método analítico de corpo pseudo-rígido. Depois de aplicado o método analítico e obtidas as equações e resultados pertinentes, o mecanismo pseudo-rígido gerado é então analisado utilizando o software de elementos finitos. A partir da comparação dos resultados, item 4.1.2 e 4.2.2, conclui-se que os mecanismos pseudo-rígidos (biela-manivela e paralelo de quatro barras) podem ser modelados utilizando o método de elementos finitos. Destaca-se o uso do conector “*hinge*” pela capacidade de simular a junta de revolução e a possibilidade de reproduzir a mola torcional inserida nesta.

O método de elementos finitos de análise não linear é utilizado para modelar e simular o mecanismo flexível. Os resultados são então comparados com os valores do método analítico, mostrando compatibilidade. A boa convergência entre resultado analítico e numérico indica que o método dos elementos finitos pode ser uma boa ferramenta na análise de mecanismos flexíveis mais complexos, que não possuem formulação analítica.

Uma observação importante é que, quando se modela o elo flexível (pequena espessura) utilizando elementos de vigas, deve-se atentar para o fenômeno de “*shear locking*”.

Depois de obtidos e validados os resultados, sabe-se que é possível modelar e simular o mecanismo pseudo-rígido no software Abaqus. O uso do software oferece inúmeras vantagens e conveniências, e umas dessas vantagens é a facilidade de se obter diferentes resultados.

O método do corpo pseudo-rígido proporciona simplicidade na análise dos mecanismos flexíveis e com o auxílio das equações é então possível determinar as variáveis que influenciam diretamente o movimento do mecanismo.

Uma das dificuldades observadas neste trabalho foi a modelagem do mecanismo utilizando o software Abaqus. O software possui inúmeros recursos para a modelagem do mecanismo, e apesar dos recursos serem interativos, há uma grande necessidade de se conhecer a teoria e os fundamentos por trás destes recursos. Entender a teoria e desenvolver a habilidade para modelar o mecanismo é desafiador visto que envolve não linearidade, no entanto, estes são fatores importantes para atingir o objetivo do estudo.

Dessa forma, pode-se dizer que o objetivo principal do trabalho é atingido. O uso das equações do mecanismo pseudo-rígido são importantes para a compreensão do mecanismo flexível. Em estágios iniciais do projeto de um mecanismo flexível, o método se torna uma importante ferramenta de análise, proporcionando um melhor entendimento do mesmo como também acelerando o processo de desenvolvimento do mecanismo.

REFERÊNCIAS

Bathe, K. J. (1996). *Finite Element Procedures*. Upper Saddle River: Prentice Hall.

Bathe, K. J. (1982). *Finite element procedures in engineering analysis*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Bolsman, C. (2010). *Delf University of Technology*. Retrieved Junho 4, 2015, from Flapping wing actuation using resonant compliant mechanisms: <http://www.3me.tudelft.nl/?id=52660&L=1>

Dao, T.-P., & Juang, S.-C. (2014). Design and Analysis of Flexible Slider Crank Mechanism. *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial and Mechatronics Engineering*, 8 (5), 827-834.

Design - BYU Department of Mechanical Engineering. (n.d.). Retrieved Junho 4, 2015, from BYU Mechanical Engineering: me.byu.edu/content/design

Docstoc Patent. (n.d.). Retrieved Junho 4, 2015, from Structure of a Stapler: <http://www.docstoc.com/docs/48469706/Structure-Of-A-Stapler---Patent-6142355>

Filho, A. A. (2012). *Elementos finitos - A base da tecnologia CAE - Análise não linear*. São Paulo: Érica.

Gupta, A., Rattan, S., & Mukherjee, S. (2013). Dynamic Analysis of Compliant Based Pseudo-Rigid-Body Constant Force Slider Crank Using the Environment like Ansys. *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research*, 2 (3), 296-309.

Howell, L. L. (2001). *Compliant Mechanisms* (First ed.). New York: John Willey & Sons.

Howell, L. L., Fowler, R. M., & Magleby, S. P. (2011). Compliant space mechanisms: a new frontier for compliant mechanisms. *Second International Symposium on Compliant Mechanisms* (pp. 205-215). Copernicus Publications.

Howell, L. L., Magleby, S. P., & Olsen, B. M. (2013). *Handbook of Compliant Mechanisms* (First ed.). Chichester, West Sussex: John Willey & Sons.

Norton, R. L. (2010). *Cinemática e Dinâmica dos Mecanismos* (1ª ed.). Porto Alegre: AMGH Editora.

Online Documentation - Abaqus, 6. (2014). Dassault Systèmes Simulia Corp. Providence, RI, USA.

R. D. Cook, D. S. Malakus, M. E. Plesha. (1989). *Concepts and application of finite element analysis*. Jhon Wiley & Sons.

Reddy, J. N. (2006). *An introduction to the finite element method*. McGraw Hill.

Rezaei, M., Tayefeh, M., & Bahrami, M. (2006). Dynamic Behavior Analysis of Compliant Micromechanisms. *International MEMS Conference 2006* (pp. 583-588). IOP Publishing Ltd.

Shigley, J. E., & Uicker, J. J. (1995). *Theory of Machines and Mechanisms* (Second ed.). McGraw-Hill Education (ISE Editions).

APÊNDICE A – ELEMENTOS FINITOS DE ANÁLISE NÃO LINEAR

1 ELEMENTOS FINITOS DE ANÁLISE NÃO LINEAR

1.1 Não linearidade geométrica

Na mecânica estrutural, um problema é dito não linear se a matriz de rigidez ou os vetores de força dependem dos deslocamentos. As não linearidades presentes nas estruturas podem ser classificadas como não linearidade de material (associado às mudanças nas propriedades do material, como por exemplo, na plasticidade) ou como não linearidade geométrica (associado com as mudanças na configuração, como por exemplo, em grandes deflexões de vigas elásticas delgadas) (COOK, PLESHA E MALKUS, 1989).

Nos mecanismos flexíveis as grandes deflexões são importantes fatores para o desempenho de seus movimentos, porém diferentemente das estruturas de pequenas deflexões (análise linear), a rigidez da estrutura não se mantém constante e é dependente dos seus deslocamentos. Dito isto, a análise da não linearidade geométrica é de grande importância para o estudo do mecanismo flexível.

De acordo com Filho (2012), no estudo da análise não linear, a rigidez da estrutura deve ser atualizada com base no deslocamento conhecido, porém também não há o conhecimento desses tais deslocamentos, pois estes dependem da rigidez a ser conhecida, ou seja, são dependentes entre si, gerando assim dificuldades na resolução de problemas não lineares. Como a cada deslocamento ocorre uma mudança na rigidez da estrutura, estrutura então será avaliada em etapas, ou seja, em incrementos. Conforme descrito, devido à dependência entre si dessas duas variáveis, métodos iterativos serão utilizados para a resolução dos mesmos.

1.2 Formulação da equação incremental utilizando mecânica do contínuo

Para a formulação da equação que governa o sistema, Bathe (1982) apresenta a equação utilizando a mecânica do contínuo para a solução do elemento finito baseado no deslocamento. No desenvolvimento da equação será utilizada a formulação Lagrangeana, ou seja, na análise todas as partículas do corpo serão

seguidas durante o seu movimento, desde o começo até a configuração final do corpo.

Para o melhor entendimento do desenvolvimento da equação, será considerado o movimento de um corpo qualquer no sistema cartesiano. Durante o movimento do corpo, o volume, a área superficial, as tensões e as deformações sofrem alterações contínuas. Como a configuração do corpo sofre estas mudanças frequentes, tem-se por objetivo avaliar as posições de equilíbrio em diferentes tempos (exemplo: 0, t, t+Δt). Assumimos que conhecemos as variáveis estáticas e cinemáticas do corpo em todos os tempos desde zero até t, porém o objetivo é determinar as variáveis no tempo t+Δt. A Figura A 1 apresenta as configurações de um corpo em três instantes de tempo.

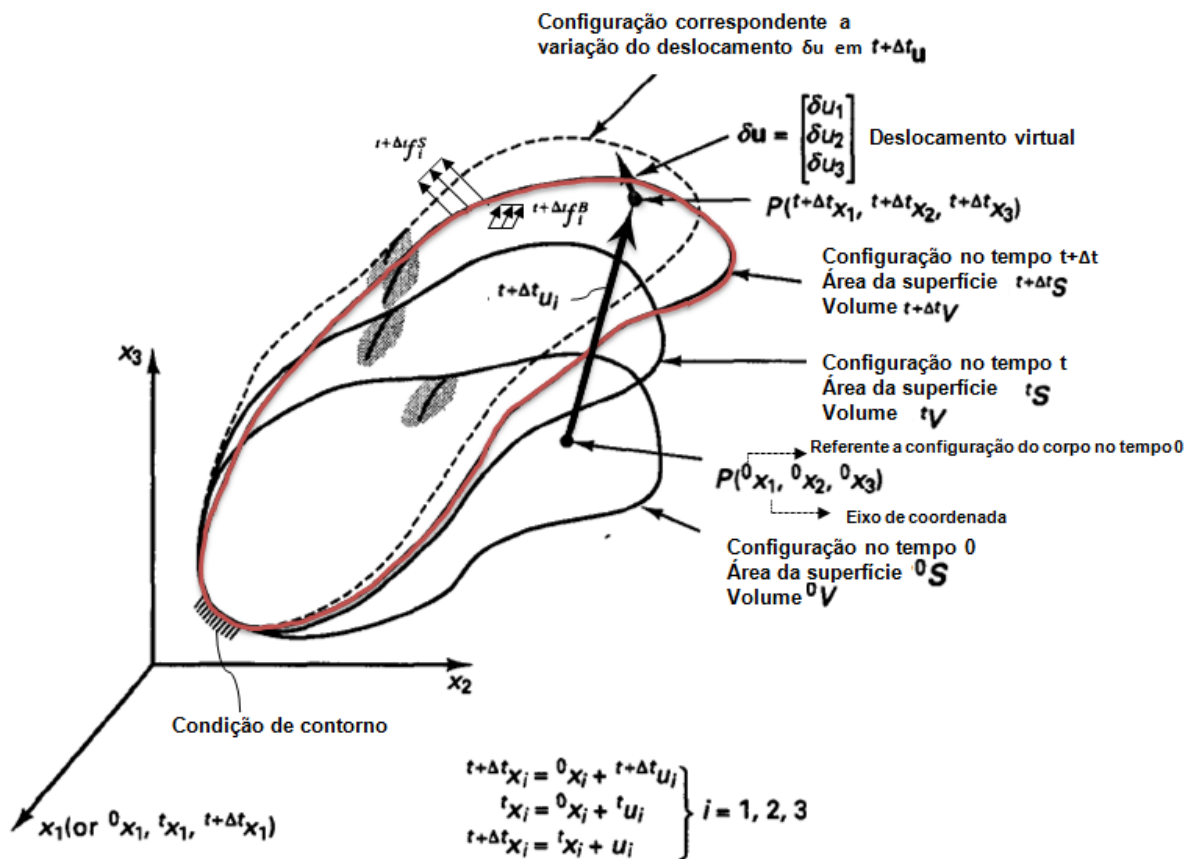


Figura A 1 – Configuração do corpo em três instantes de tempo

Fonte: Adaptado de Bathe (1996).

As variáveis da Figura A 1 são descritas:

$0x_1, 0x_2, 0x_3$: coordenadas do ponto P no tempo zero

${}^{t+\Delta t}x_1, {}^{t+\Delta t}x_2, {}^{t+\Delta t}x_3$: coordenadas do ponto P no tempo $t+\Delta t$

V e S: são os volumes e as áreas da superfície em determinada configuração de tempo

${}^{t+\Delta t}u_i$ e ${}^t u_i$ para $i = 1,2,3$: são os deslocamentos a cada instante de tempo

$u_i = ({}^{t+\Delta t}u_i - {}^t u_i)$ para $i = 1,2,3$: incremento no deslocamento entre o tempo t até $t+\Delta t$

δu : componentes do vetor de deslocamento virtual no tempo $t+\Delta t$

${}^{t+\Delta t}f_i^B, {}^{t+\Delta t}f_i^S$: componentes da força externa aplicado no corpo e na superfície respectivamente, no instante $t+\Delta t$

Na análise incremental Lagrangeana, o equilíbrio do corpo no tempo $t+\Delta t$ é expresso utilizando o princípio do trabalho virtual. Segundo Bathe (1982), esse princípio estabelece que para qualquer deslocamento virtual pequeno e compatível imposto no corpo, satisfazendo também as condições de contorno essenciais, o trabalho virtual total interno é igual ao trabalho virtual externo. Assim, tem-se:

Trabalho virtual interno = Trabalho virtual externo

$$\int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij} \delta_{{}^{t+\Delta t}}e_{ij} {}^{t+\Delta t}dV = {}^{t+\Delta t}R \quad (\text{A } 1)$$

e o tensor de deformação $\delta_{{}^{t+\Delta t}}e_{ij}$ pode ser escrito:

$$\delta_{{}^{t+\Delta t}}e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial {}^{t+\Delta t}x_i} \right) \quad (\text{A } 2)$$

e o trabalho virtual externo ${}^{t+\Delta t}R$ por ser escrito:

$${}^{t+\Delta t}R = \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i {}^{t+\Delta t}dV + \int_{{}^{t+\Delta t}S_f} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i^S {}^{t+\Delta t}dS \quad (\text{A } 3)$$

onde:

${}^{t+\Delta t}\tau_{ij}$: Componentes do tensor de tensão de Cauchy (força pela área da geometria deformada).

$\delta_{t+\Delta t} e_{ij}$: tensor de deformação correspondente ao deslocamento virtual.

$\partial \delta u_i$: componentes do deslocamento virtual imposto na configuração $t+\Delta t$, função dependente de ${}^{t+\Delta t}x_j$.

${}^{t+\Delta t}x_i$: coordenada do ponto material no tempo $t+\Delta t$.

${}^{t+\Delta t}f_i^B$, ${}^{t+\Delta t}f_i^S$: componentes da força externa aplicado no corpo e na superfície respectivamente.

${}^{t+\Delta t}S_f$ = superfície no tempo $t+\Delta t$ onde as forças externas são aplicadas.

$\delta u_i^S = \partial \delta u_i$ avaliado na superfície ${}^{t+\Delta t}S_f$.

Segundo Bathe (1982), a dificuldade em aplicar a equação (A 1) se deve ao fato de não haver o conhecimento da configuração do corpo no instante $t+\Delta t$ e sendo este uma importante diferença comparada com a análise linear, onde se assumem pequenos deslocamentos, portando podendo utilizar a configuração original.

Devido a essa complexidade, para se trabalhar com a equação (A 1), será necessário reescrever a equação utilizando novos medidores de tensão e deformação. Algumas complexidades em se trabalhar com a equação são:

- 1) Não se conhece o volume do corpo no instante $t+\Delta t$ e, portanto torna-se difícil efetuar a integração sobre este volume;
- 2) Dificuldade em trabalhar com incrementos de tensões utilizando as tensões de Cauchy (tensão verdadeira), pois essas tensões são sempre referentes à geometria atual (não conhecida);
- 3) Necessidade de se trabalhar com parâmetros de tensão e deformação invariantes às rotações de corpo rígido.

A análise da equação, portanto é tratada utilizando apropriados medidores de tensões e deformações e também adequadas relações constitutivas. O auxílio desses novos medidores tem por objetivo expressar a equação do princípio do trabalho virtual em termos de um volume conhecido bem como decompor e utilizar de modo incremental as tensões e deformações.

1.2.1 Segunda tensão de Piola-Kirchhoff

A tensão que será utilizada na equação de equilíbrio do trabalho virtual será a 2ª tensão de Piola-Kirchhoff. Para exemplificação, será utilizada a tensão no instante t referente à configuração inicial do corpo (instante zero).

$${}^tS_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} {}^0x_{i,m} {}^t\tau_{mn} {}^0x_{j,n} \quad (\text{A } 4)$$

onde:

${}^tS_{ij}$ = 2ª tensão de Piola-Kirchhoff no instante de tempo t , medido com relação à configuração no instante zero (inicial).

${}^0x_{i,m} = \frac{\partial {}^0x_i}{\partial {}^tx_m}$, comprimento infinitesimal (0dx) do material no instante zero com relação ao mesmo comprimento infinitesimal (tdx) no instante t .

$\frac{{}^0\rho}{{}^t\rho}$ = razão entre as densidades no instante zero e t .

${}^t\tau_{mn}$ = tensão de Cauchy (força sobre área) no instante t .

Também pode-se escrever da forma:

$${}^t\tau_{mn} = \frac{{}^t\rho}{{}^0\rho} {}^tx_{m,i} {}^tS_{ij} {}^tx_{n,j} \quad (\text{A } 5)$$

onde:

${}^tx_{m,i} = \frac{\partial {}^tx_m}{\partial {}^0x_i}$ e ${}^tx_{n,j} = \frac{\partial {}^tx_n}{\partial {}^0x_j}$ compõem os elementos do gradiente de deformação

Uma importante característica do uso dessa tensão é que seus componentes do tensor são invariantes à rotação de corpo rígido.

1.2.2 Gradiente de deformação

O objetivo do gradiente de deformação é capturar as alterações de uma determinada “fibra” ou um comprimento infinitesimal do corpo ao longo do tempo, descrevendo assim suas as deformações (rotação e variação do comprimento). O gradiente de deformação é dado por:

$${}^tX = ({}_0\nabla {}^tx^T)^T \quad (\text{A } 6)$$

$${}^t_0X = \begin{bmatrix} \frac{\partial^t x_1}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial^t x_1}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial^t x_1}{\partial^0 x_3} \\ \frac{\partial^t x_2}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial^t x_2}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial^t x_2}{\partial^0 x_3} \\ \frac{\partial^t x_3}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial^t x_3}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial^t x_3}{\partial^0 x_3} \end{bmatrix} \quad (\text{A } 7)$$

Onde t_0X é o gradiente de deformação no instante t com referência à configuração no tempo zero. O inverso do gradiente de deformação é dado por ${}^0_tX = {}^0_tX^{-1}$.

Utilizando o teorema da decomposição polar de Cauchy, podemos decompor o tensor gradiente de deformação.

$${}^t_0X = {}^t_0R {}^t_0U \quad (\text{A } 8)$$

onde:

t_0R = Tensor de rotação.

t_0U = Tensor de extensão (“*stretch*”).

Pode-se calcular a razão entre as massas utilizando o gradiente de deformação:

$$\frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} = \det {}^t_0X \quad (\text{A } 9)$$

Portanto uma vez conhecida o gradiente de deformação, pode-se calcular a razão entre as densidades e conhecendo as tensões de Cauchy é possível obter as tensões de Piola-Kirchhoff.

1.2.3 Tensor de deformação de Green-Lagrange

O tensor de deformação a ser utilizado em conjunto com a 2ª tensão de Piola-Kirchhoff é o tensor de deformação de Green-Lagrange:

$${}^t_0\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t_0u_{i,j} + {}^t_0u_{j,i} + {}^t_0u_{k,i} {}^t_0u_{k,j}) \quad (\text{A } 10)$$

onde:

$${}^t_0u_{i,j} = \frac{\partial {}^t u_i}{\partial {}^0 x_j} \quad (\text{A } 11)$$

Assim como a 2ª tensão de Piola-Kirchhoff, os componentes do tensor são invariáveis em relação ao movimento de corpo rígido do material e também é considerado energeticamente conjugado com a tensão de Piola-Kirchhoff. Assim:

$${}^t_0S_{ij} {}^t_0\epsilon_{ij} = \text{Trabalho virtual no instante } t \text{ por unidade de volume original} \quad (\text{A } 12)$$

O trabalho virtual expresso utilizando a 2ª tensão de Piola-Kirchhoff e o tensor de deformação de Green-Lagrange é a base para a formulação incremental Lagrangeana utilizado na análise não linear estrutural.

1.2.4 Formulação Lagrangeana Total (utilizando princípio do trabalho virtual)

Conforme descrito nos itens anteriores, durante o movimento o corpo sofre mudanças contínuas e portando para a análise deseja-se acompanhar todas as partículas do corpo desde o instante inicial até a configuração final. Para a análise destas condições é empregada a formulação Lagrangeana Total na qual todas as variáveis são referenciadas à configuração inicial do corpo no instante zero. De acordo com Bathe (1982) a formulação Lagrangeana Total incorpora todos os efeitos de não linearidade devido aos grandes deslocamentos, rotações e grandes deformações, porém o comportamento apropriado das grandes deformações depende das relações constitutivas apropriadas.

Utilizando os tensores de tensão e deformação apropriados descritos anteriormente, a equação do trabalho virtual utilizando a formulação Lagrangeana pode ser escrita de forma equivalente à equação (A 1):

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t}_0S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}_0\epsilon_{ij} {}^0dV = {}^{t+\Delta t}R \quad (\text{A } 13)$$

Conforme dito, essa formulação faz referência à configuração inicial do corpo, portanto os termos escritos com o zero (superior ou inferior) representam esta referência. O termo sobrescrito $t+\Delta t$ nas variáveis representam o instante de tempo em que a variável é analisada.

As alterações contínuas sofridas pelo corpo durante o movimento requer a reformulação da equação (A 13) em termos de incrementos, ou seja, a solução final do problema será obtida através das soluções de pequenos incrementos.

O objetivo final da formulação é obter uma equação incremental, conforme a equação (A 14), mas para isso alguns passos devem ser empregados. A equação (A 14) representa a equação de equilíbrio em termos de incrementos (depois de discretizada).

$${}^tK \Delta U = {}^{t+\Delta t}R - {}^tF \quad (\text{A } 14)$$

onde:

tK : matriz de rigidez no instante t

ΔU : incremento do deslocamento nodal

${}^{t+\Delta t}R$: forças externas aplicadas no instante $t+\Delta t$

tF : forças nodais correspondentes às tensões internas no instante t

Depois de seguido todos os passos necessários (linearização e a representação equação em termos de incrementos), conforme apêndice B, tem-se a equação (A 13) em termos de incrementos.

$$\int_{0V} {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs} \delta_0e_{ij}^0 dV + \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta_0\eta_{ij}^0 dV = {}^{t+\Delta t}R - \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta_0e_{ij}^0 dV \quad (\text{A } 15)$$

onde

${}_0C_{ijrs}$: tensor incremental da propriedade do material no tempo t com relação à configuração inicial zero. Este é descrito no item 1.4.4.

${}_0e_{rs}$, $r, s = 1, 2, 3$: incremento de deformação linear

δ_0e_{ij} : incremento de deformação linear virtual

${}^tS_{ij}$: 2ª tensão de Piola-Kirchhoff

$\delta_0\eta_{ij}$: incremento de deformação não linear virtual

A equação (A 15) é utilizada para o cálculo do incremento de deslocamento. O termo do lado direito representa o desequilíbrio (erro) entre o trabalho virtual interno e o trabalho virtual externo.

$$Erro = {}^{t+\Delta t}R - \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta_0 e_{ij}^0 dV \quad (A 16)$$

Devido a esse erro, iterações devem ser efetuadas de modo que o equilíbrio seja atendido e este será atendido quando o erro se aproximar de zero, ou seja, quando houver a igualdade entre o trabalho virtual externo e o trabalho virtual interno.

1.2.5 Método de Newton-Raphson (modificado)

Para resolver e atender o equilíbrio dos trabalhos interno e externo é utilizado o método iterativo de Newton Raphson modificado, este se diz modificado, pois a matriz de rigidez é atualizada apenas no início de cada passo de carga. O objetivo desse processo iterativo é, para um determinado incremento de carga imposto, conhecer o incremento de deslocamento gerado pela esta mesma carga. Assim, se o equilíbrio entre os trabalhos é satisfeito, o incremento do deslocamento pode ser obtido.

A equação linearizada desenvolvida é reescrita em uma notação diferente para aplicação do método iterativo.

$$\int_{0V} {}_0C_{ijrs} \Delta_0 e_{rs}^{(k)} \delta_0 e_{ij}^0 dV + \int_{0V} {}^tS_{ij} \Delta \delta_0 \eta_{ij}^{(k)} dV = {}^{t+\Delta t}R - \int_{0V} {}^{t+\Delta t}S_{ij}^{(k-1)} \delta_0 \epsilon_{ij}^{(k-1)} dV \quad (A 17)$$

Na equação (A 17) foi inserida o contador k, onde a equação será resolvida para k=1,2,3,4... e o delta Δ foi inserido para representar o incremento no deslocamento. O termo do lado esquerdo possui o contador com um valor unitário menor e o instante de tempo t foi substituído parat t+ Δ t para maior facilidade (BATHE, 1982). Outra observação é que $\delta_0 e_{ij}$ foi substituído por $\delta_0^t \epsilon_{ij}$, pois, $\delta_0^t \epsilon_{ij} = \delta_0 e_{ij}$.

Por exemplo, utilizando a equação (A 17) para k=1, a equação se torna a mesma em que foi formulada, equação (A 15).

$$\int_{0V} {}_0C_{ijrs} \Delta_0 e_{rs}^{(1)} \delta_0 e_{ij}^0 dV + \int_{0V} {}_0^t S_{ij} \Delta \delta_0 \eta_{ij}^{(1)0} dV = {}^{t+\Delta t}R - \int_{0V} {}^{t+\Delta t}{}_0^t S_{ij}^{(0)} \delta^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}^{(0)0} dV \quad (A 18)$$

onde:

$${}^{t+\Delta t}{}_0^t S_{ij}^{(0)} = {}_0^t S_{ij}$$

$$\delta^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}^{(0)0} dV = \delta_0^t \epsilon_{ij}$$

A discretização da equação (A 18) será descrita mais adiante, porém para conhecimento, a equação depois de discretizada é da forma:

$${}_0^t K \Delta U^{(k)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}{}_0^t F^{(k-1)} \quad (A 19)$$

onde:

$${}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}{}_0^t F^{(k-1)} = \textit{Erro}$$

Conhecido a matriz de rigidez ${}_0^t K$ e o *Erro*, pode-se calcular o incremento de deslocamento $\Delta U^{(k)}$. Este incremento de deslocamento $\Delta U^{(k)}$ é então utilizado para se obter o valor do próximo deslocamento, apenas adicionando ao deslocamento anterior conhecido.

$${}^{t+\Delta t}U^{(k)} = {}^{t+\Delta t}U^{(k-1)} + \sum_{j=0}^k \Delta U^{(j)} \quad (A 20)$$

Por exemplo, para $k=1$ (iteração 1):

$${}_0^t K \Delta U^{(1)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}{}_0^t F^{(0)} \quad (A 21)$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(1)} = {}^{t+\Delta t}U^{(0)} + \Delta U^{(1)} \quad (A 22)$$

Tendo obtido a solução ${}^{t+\Delta t}U^{(1)}$, caso necessário, pode-se obter uma melhor aproximação do deslocamento utilizando a próxima iteração, $k = 2$.

$${}_0^t K \Delta U^{(2)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}{}_0^t F^{(1)} \quad (A 23)$$

onde o termo ${}^{t+\Delta t}{}_0^t F^{(1)}$ representa as forças nodais internas correspondentes ao final da primeira iteração, ou seja, incluem o incremento de deslocamento $\Delta U^{(1)}$ anteriormente calculado.

$${}^{t+\Delta t}U^{(2)} = {}^{t+\Delta t}U^{(1)} + \Delta U^{(2)} \quad (A 24)$$

Para uma melhor visualização do processo, a Figura A 2 mostra o processo iterativo efetuado para alcançar o equilíbrio desejado e assim obter o deslocamento aproximado do corpo.

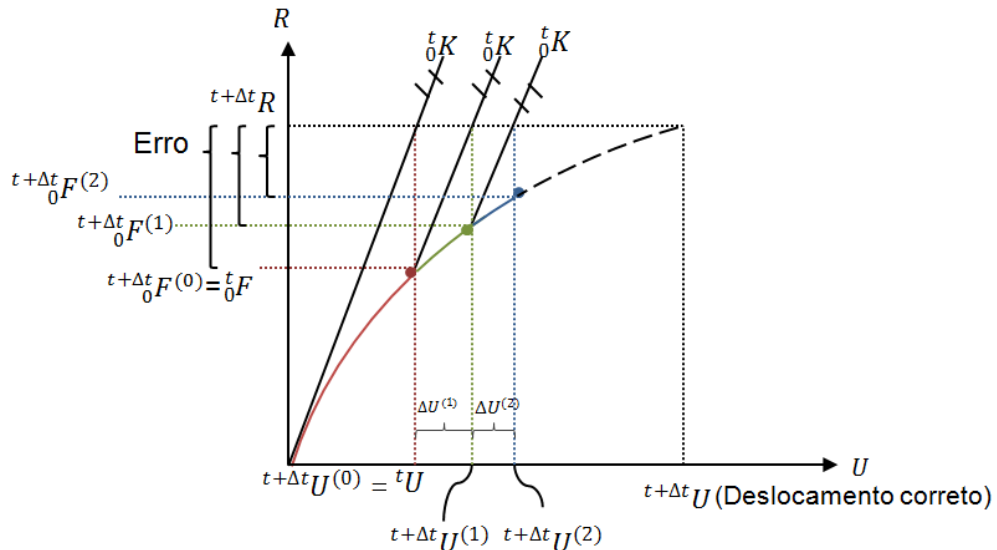


Figura A 2 – Processo iterativo para solução do deslocamento

Fonte: Autor

Portanto, como mostra a Figura A 2, para que o erro seja minimizado, novas iterações devem ser feitas até atingir o deslocamento correto aproximado.

Bathe (2010) mostra o processo geral em termos de um fluxograma, Figura A 3.

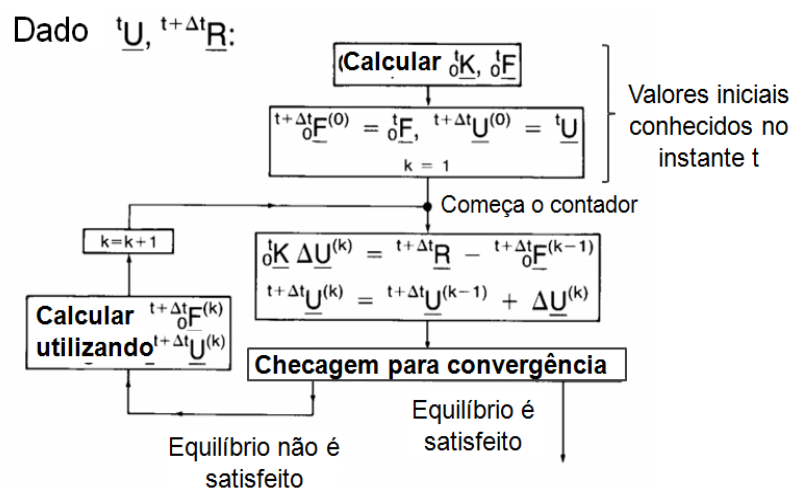


Figura A 3 – Fluxograma do processo iterativo

Fonte: Bathe (2010).

1.3 Formulação da equação de elementos finitos

Até o momento apenas a mecânica do contínuo foi aplicada para o desenvolvimento da formulação da equação de equilíbrio, embora tenha apresentado a equação de equilíbrio discretizada, equação (A 14) e (A 19), nenhum detalhe foi considerado. A equação da mecânica do contínuo será utilizada para desenvolver a equação governante do elemento finito.

O objetivo da discretização será de dividir o sistema contínuo em pequenos elementos finitos, estes conectados entre si utilizando os pontos nodais, e a partir do comportamento de cada elemento obter entendimento do comportamento de todo o seu conjunto.

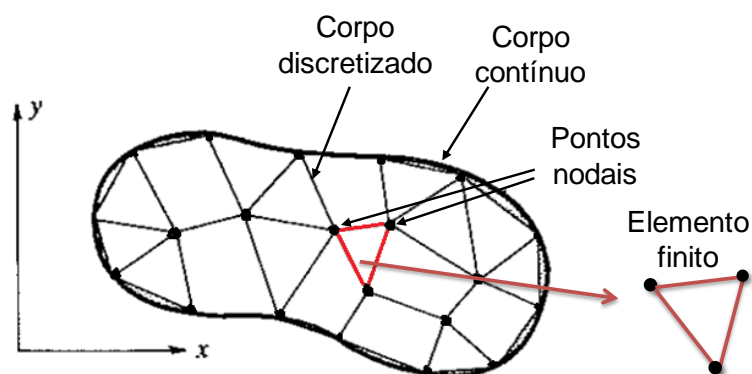


Figura A 4 – Discretização do corpo utilizando um elemento finito

Fonte: Adaptado Reddy (2006)

O comportamento do corpo discretizado será determinado através dos movimentos dos pontos nodais. Através destes pontos nodais em conjunto com as funções de interpolação, consegue-se então obter os valores de quaisquer outros pontos no elemento onde se queira examinar.

Segundo Bathe (1982), para a derivação da equação dos elementos finitos são necessárias:

1. Seleção das funções de interpolação.
2. Emprego das funções de interpolação para as representações das coordenadas e dos deslocamentos dentro do elemento.
3. Incorporar estas funções na equação governante da mecânica do contínuo.
4. Aplicação do princípio do trabalho virtual em cada um dos pontos nodais, resultando na equação do elemento finito.

As interpolações das coordenadas para um elemento bidimensional (isoparamétrico) são:

$$x = \sum_{i=1}^q h_i x_i \quad (\text{A } 25)$$

$$y = \sum_{i=1}^q h_i y_i \quad (\text{A } 26)$$

Onde x e y são as coordenadas de quaisquer pontos no elemento e x_i e y_i , $i=1,2,\dots,q$, são as coordenadas dos nós do elemento. As funções de interpolação $h_i(\xi, \varphi)$ são definidos no sistema de coordenada natural (coordenadas ξ e φ , variando de -1 até 1). A Figura A 5 apresenta a coordenada natural localizada no centro de um elemento retangular de quatro nós.

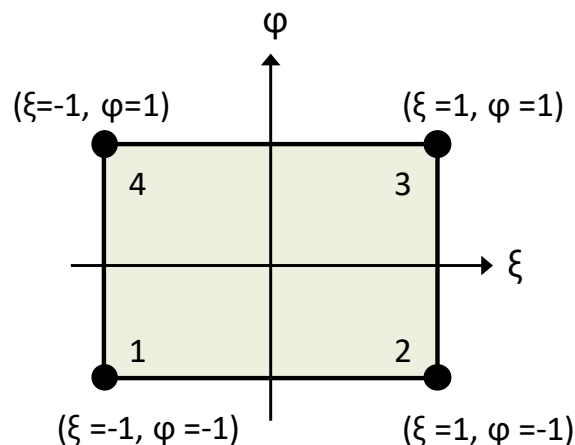


Figura A 5 – Coordenada natural (ξ e φ) do elemento retangular

Fonte: Autor

As equações dos deslocamentos utilizando as funções de interpolação são:

$$u = \sum_{i=1}^q h_i u_i \quad (\text{A } 27)$$

$$v = \sum_{i=1}^q h_i v_i \quad (\text{A } 28)$$

Onde u e v são os deslocamentos locais em quaisquer pontos no elemento e u_i e v_i são os deslocamentos correspondentes aos pontos nodais do elemento.

As deformações lineares e não lineares do elemento podem ser obtidas através das derivadas dos seus deslocamentos em relação à x e y . A matriz de deformação linear pode ser escrita como:

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}_L \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{A } 29)$$

e a matriz deformação não linear pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}_{NL} \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{A } 30)$$

Onde \mathbf{B}_L e \mathbf{B}_{NL} são as matrizes transformação deslocamento-deformação linear e não linear respectivamente e contém os termos das derivadas da função de interpolação. O vetor dos deslocamentos nodais é dado por $\hat{\mathbf{u}}$.

Seguindo os passos de Bathe (1982), utilizando as equações (coordenadas, deslocamento e deformação) em conjunto com as funções de interpolação e substituindo estas na equação governante da mecânica do contínuo, pode-se desenvolver a equação discretizada do elemento finito em termos matriciais. A seguir apresenta-se a discretização de cada termo, através da substituição das equações (A 29) e (A 30) na equação (A 15).

Para o primeiro termo tem-se:

$$1. \int_{0V} {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs} \delta {}_0e_{ij} {}^0dV \rightarrow \delta \hat{\mathbf{u}}^T \left(\int_{0V} {}_0^tB_L^T {}_0C {}_0^tB_L {}^0dV \right) \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{A } 31)$$

onde:

${}_0^tB_L^T$ e ${}_0^tB_L$: matriz de transformação deslocamento-deformação linear (contém derivadas dos elementos da matrix H (matriz de interpolação))

${}_0C$: relação constitutiva da propriedade do material

$\delta \hat{\mathbf{u}}^T$: vetor transposto do deslocamento nodal virtual

$\hat{\mathbf{u}}$: vetor do deslocamento nodal

Para o segundo termo, tem-se:

$$2. \int_{0V} {}_0^tS_{ij} \delta {}_0\eta_{ij} {}^0dV \rightarrow \delta \hat{\mathbf{u}}^T \left(\int_{0V} {}_0^tB_{NL}^T {}_0^tS {}_0^tB_{NL} {}^0dV \right) \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{A } 32)$$

onde:

${}_0^tB_{NL}^T$ e ${}_0^tB_{NL}$: matriz de transformação deslocamento-deformação não linear

t_0S : Matriz da Segunda tensão de Piola-Kirchhoff

$\delta\hat{u}^T$: vetor transposto do deslocamento nodal virtual

\hat{u} : vetor do deslocamento nodal

Para o terceiro termo, tem-se:

$$3. \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta_0 e_{ij} {}^0dV \rightarrow \delta\hat{u}^T \left(\int_{0V} {}^tB_L^T {}^t\hat{S} {}^0dV \right) \quad (A 33)$$

onde:

${}^tB_L^T$: Matriz de transformação deslocamento-deformação linear

${}^t\hat{S}$: Vetor da Segunda tensão de Piola-Kirchhoff

$\delta\hat{u}^T$: vetor transposto do deslocamento nodal virtual

Para o quarto termo, tem-se:

$$4. {}^{t+\Delta t}R = \int_{t+\Delta tV} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i {}^{t+\Delta t}dV + \int_{t+\Delta tS_f} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i {}^{t+\Delta t}dS \\ \rightarrow \delta\hat{u}^T \left(\int_{0V} H^T {}^{t+\Delta t}f_0^B {}^0dV + \int_{0V} H^{sT} {}^{t+\Delta t}f_0^S {}^0dV \right) \quad (A 34)$$

onde:

H^T : Matriz de interpolação do deslocamento do corpo

H^{sT} : Matriz transposta de interpolação do deslocamento da superfície do corpo

$\delta\hat{u}^T$: vetor transposto do deslocamento nodal virtual

${}^{t+\Delta t}f_0^B$, ${}^{t+\Delta t}f_0^S$: vetores de força de superfície e de corpo respectivamente

Portando, a equação final discretizada fica:

$$\delta\hat{u}^T \left(\int_{0V} {}^tB_L^T {}^0C {}^tB_L {}^0dV \right) \hat{u} + \delta\hat{u}^T \left(\int_{0V} {}^tB_{NL}^T {}^tS {}^tB_{NL} {}^0dV \right) \\ = \delta\hat{u}^T \left(\int_{0V} H^T {}^{t+\Delta t}f_0^B {}^0dV + \int_{0V} H^{sT} {}^{t+\Delta t}f_0^S {}^0dV \right) - \delta\hat{u}^T \left(\int_{0V} {}^tB_L^T {}^t\hat{S} {}^0dV \right) \quad (A 35)$$

Aplicando o princípio do trabalho virtual estabelecendo o deslocamento virtual $\delta\hat{u}^T$ como sendo unitário, podemos reescrever a equação como:

$$({}^tK_L + {}^tK_{NL}) \hat{u} = {}^{t+\Delta t}R - {}^tF \quad (A 36)$$

onde:

t_0K_L = matriz de rigidez linear

${}^t_0K_{NL}$ = matriz de rigidez não linear (matriz geométrica)

Reescrevendo a equação para a aplicação do método iterativo tem-se:

$$({}^t_0K_L + {}^t_0K_{NL}) \Delta U^{(k)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}_0F^{(k-1)} \quad (\text{A } 37)$$

O desenvolvimento das matrizes B_L^T , B_{NL}^T , H^T e H^{sT} para a obtenção da matriz de rigidez, dependerá de cada tipo do elemento finito empregado. Cada tipo de elemento finito possui a sua respectiva formulação que descreve o seu comportamento, portanto, o desenvolvimento destas matrizes está relacionado ao tipo do elemento a ser utilizado.

1.4 Elemento isoparamétrico de viga

Uma importante etapa para a aplicação do método dos elementos finitos é o desenvolvimento das matrizes de um elemento específico. Anteriormente foi desenvolvida a equação discretizada matricial dos elementos finitos e agora serão estabelecidas essas matrizes especificamente para o elemento de viga.

A base para a formulação isoparamétrica está no emprego das funções de interpolação utilizando as coordenadas naturais (ξ , φ e ζ) do elemento. Essas funções de interpolação serão então utilizadas para representar as coordenadas e os deslocamentos dentro do elemento.

1.4.1 Função de interpolação

As funções de interpolação h_i utilizadas na formulação da viga são definidas nas coordenadas naturais do elemento, possuindo variáveis ξ , φ e ζ e cada uma variando de -1 até +1, sendo um sistema adimensional. Essas funções de interpolação conforme já descrito tem por objetivo estabelecer o campo das coordenadas e dos deslocamentos dentro do elemento e a conseqüente determinação da matriz de rigidez do elemento (por meio das matrizes transformação deslocamento-deformação B)

Para um elemento finito unidimensional, Bathe (1982) apresenta uma tabela mostrando o tipo das funções de interpolação dependendo do número de nós no elemento, conforme Tabela A 1.

Tabela A 1 – Funções de interpolação

	Incluir se o nó 3 estiver presente	Incluir se o nó 3 e 4 estiver presente
$h_1 = \frac{1}{2}(1 - \zeta)$	$-\frac{1}{2}(1 - \zeta^2)$	$+\frac{1}{16}(-9\zeta^3 + \zeta^2 + 9\zeta - 1)$
$h_2 = \frac{1}{2}(1 + \zeta)$	$-\frac{1}{2}(1 - \zeta^2)$	$+\frac{1}{16}(9\zeta^3 + \zeta^2 + 9\zeta - 1)$
$h_3 = \frac{1}{2}(1 + \zeta^2)$	—	$+\frac{1}{16}(27\zeta^3 + 7\zeta^2 - 27\zeta - 7)$
$h_4 = \frac{1}{16}(-27\zeta^3 - 9\zeta^2 + 27 + 9)$	—	—

Fonte: Adaptado de Bathe (1982)

Para um elemento unidimensional com três pontos nodais, os tipos das funções de interpolação podem ser visualizados conforme Figura A 6.

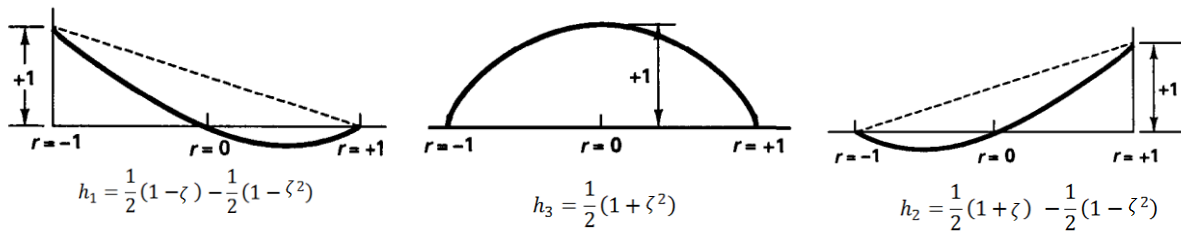


Figura A 6 – Funções de interpolação para elemento unidimensional de três nós

Fonte: Adaptado de Bathe (1982)

1.4.2 Operador Jacobiano

Para se conhecer as deformações que o corpo sofre podemos utilizar os deslocamentos e derivar em relação às coordenadas cartesianas (x, y e z). No entanto, as funções de deslocamento foram descritas em termos das coordenadas naturais (ξ, φ e ζ), portanto o operador Jacobiano servirá como uma ponte de conexão entre as coordenadas naturais e as coordenadas cartesianas x, y e z.

O operador Jacobiano é dado por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A 38})$$

e na notação matricial:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{A 39})$$

Onde J é o operador jacobiano e necessitamos do termo $\partial/\partial \xi$, portando:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (\text{A 40})$$

e o termo do diferencial do volume pode ser escrito:

$$dV = \det \mathbf{J} d\xi d\varphi d\zeta \quad (\text{A 41})$$

1.4.3 Desenvolvimento das matrizes do elemento de viga

A formulação do elemento de viga descrito por Bathe (1982) utiliza as equações da mecânica do contínuo e as interpolações isoparamétricas do elemento finito. Para a formulação do elemento de viga de análise não linear, algumas considerações são feitas:

- Para a análise da viga, é considerado o efeito da deformação por cisalhamento e assume-se que a seção plana da viga originalmente normal ao eixo neutro se mantém plana, porém, devido às deformações de cisalhamento, esta não necessariamente permanece normal ao eixo neutro.
- Apenas a tensão longitudinal e duas tensões de cisalhamento não são nulas.
- Grandes deslocamentos e rotações do elemento podem ser modelados.
- As deformações do elemento são consideradas pequenas o que significa que a área da seção permanece constante.
- Assume-se que a representação precisa da rigidez torcional não é necessária.

A Figura A 7 apresenta o modelo de viga de Timoshenko onde a deformação por cisalhamento é considerada. Após a deformação, a inclinação do plano que permanece normal ao eixo neutro é dada por dw/dx . Devido a deformação por cisalhamento, a seção plana que era normal ao eixo neutro sofre uma rotação γ e, portanto este não permanece normal ao eixo. A rotação total do plano originalmente normal ao eixo neutro é descrita como $\beta = dw/dx - \gamma$.

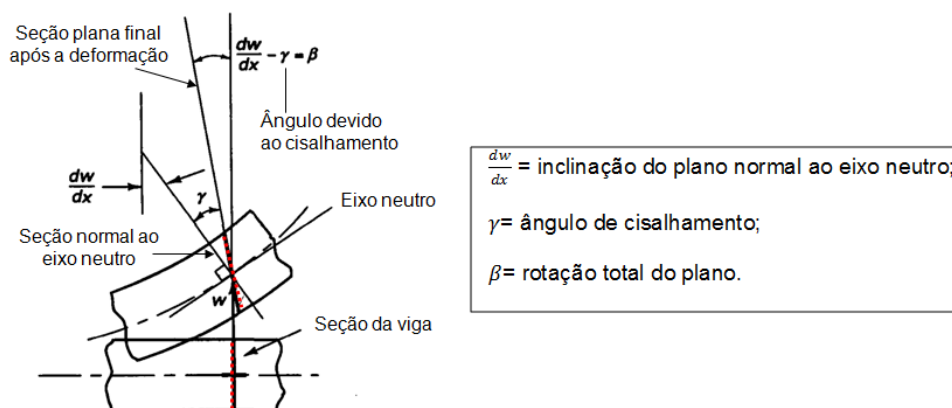


Figura A 7 – Deformação da viga considerando o efeito do cisalhamento

Fonte: Adaptado de Bathe (1982)

A viga a ser considerada para o desenvolvimento das matrizes pode ser visualizada na Figura A 8. O elemento de viga no espaço tridimensional apresenta quatro pontos nodais onde duas configurações de tempos diferentes são mostradas. As variáveis para a formulação do elemento de viga são dadas utilizando a notação tensorial.

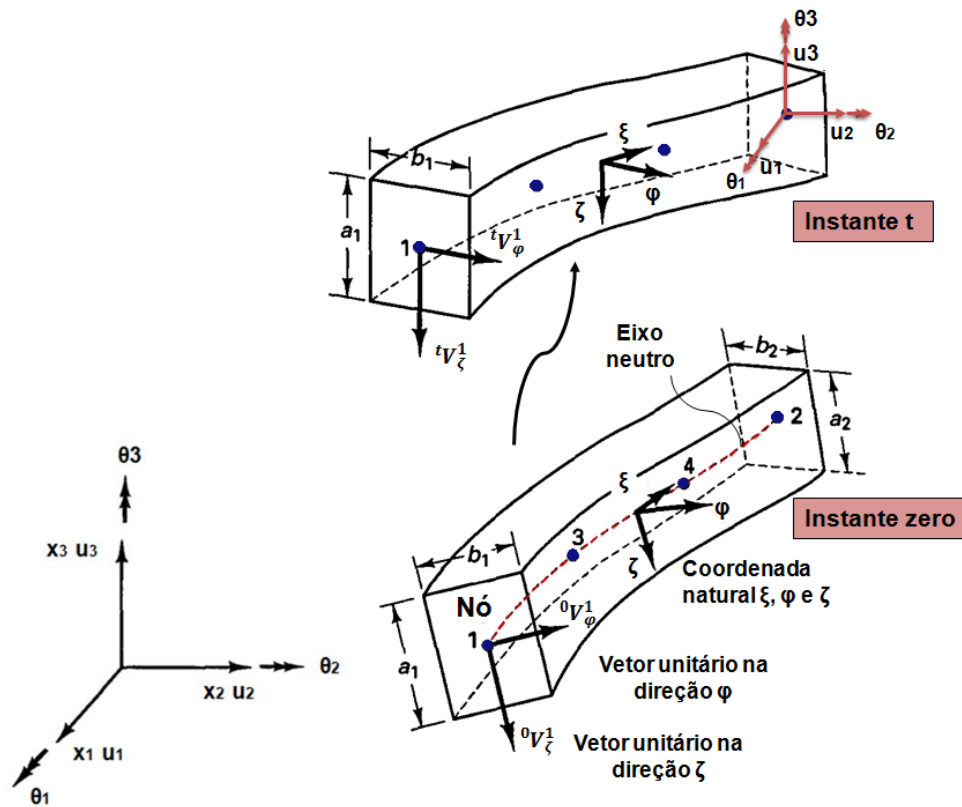


Figura A 8 – Elemento de viga no espaço tridimensional

Fonte: Adaptado de Bathe (1982)

Utilizando as funções de interpolação, as coordenadas de um determinado ponto dentro do elemento no instante t , na notação tensorial é dado por:

$${}^t x_i = \sum_{k=1}^q h_k {}^t x_i^k + \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k {}^t V_{\zeta i}^k + \frac{\varphi}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k {}^t V_{\varphi i}^k \quad (\text{A } 42)$$

e

$${}^t \mathbf{V}_{\zeta}^k = \begin{Bmatrix} {}^t V_{\zeta 1}^k \\ {}^t V_{\zeta 2}^k \\ {}^t V_{\zeta 3}^k \end{Bmatrix} \quad {}^t \mathbf{V}_{\varphi}^k = \begin{Bmatrix} {}^t V_{\varphi 1}^k \\ {}^t V_{\varphi 2}^k \\ {}^t V_{\varphi 3}^k \end{Bmatrix} \quad (\text{A } 43)$$

onde:

k : ponto nodal

q : número total de pontos nodais

$i=1,2$ e 3 (direções no sistema cartesiano, por exemplo para $i=1$, temos a direção x_1)

${}^t x_i$: coordenadas cartesianas de qualquer ponto da viga direções $i=1,2$ e 3

${}^t x_i^k$: coordenadas cartesianas do ponto nodal k nas direções $i=1,2$ e 3

h_k : função de interpolação do ponto nodal k

a_k e b_k : dimensões da seção transversal da viga no ponto nodal k

$\frac{\zeta}{2}$ e $\frac{\varphi}{2}$: são termos relacionados às coordenadas ζ e φ respectivamente

${}^t V_{\zeta i}^k$: componentes do vetor unitário ${}^t V_{\zeta}^k$ no ponto nodal k

${}^t V_{\varphi i}^k$: componentes do vetor unitário ${}^t V_{\varphi}^k$ no ponto nodal k

Os vetores unitários ${}^t V_{\zeta}^k$ e ${}^t V_{\varphi}^k$ sempre se mantêm constantes nas direções ζ e φ .

Para melhor visualização, em vez da notação tensorial, a equação (A 42) pode ser escrita em termos das coordenadas cartesianas x , y e z .

$${}^t x(\xi, \varphi, \zeta) = \sum_{k=1}^q h_k {}^t x^k + \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k {}^t V_{\zeta x}^k + \frac{\varphi}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k {}^t V_{\varphi x}^k \quad (\text{A 44})$$

$${}^t y(\xi, \varphi, \zeta) = \sum_{k=1}^q h_k {}^t y^k + \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k {}^t V_{\zeta y}^k + \frac{\varphi}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k {}^t V_{\varphi y}^k \quad (\text{A 45})$$

$${}^t z(\xi, \varphi, \zeta) = \sum_{k=1}^q h_k {}^t z^k + \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k {}^t V_{\zeta z}^k + \frac{\varphi}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k {}^t V_{\varphi z}^k \quad (\text{A 46})$$

O primeiro termo das equações (A 44), (A 45) e (A 46), é responsável pelas interpolações de um ponto ao longo do eixo neutro. O segundo e terceiro termo das equações estão relacionados às interpolações da seção transversal, ou seja, da largura (direção ζ) e da altura (direção φ) da viga.

A equação (A 42) foi descrita para a configuração no instante t , porém pode ser utilizada para diferentes configurações de tempos, como por exemplo, para os instantes zero e $t+\Delta t$. Utilizando a equação (A 42) para diferentes instantes de tempo, o deslocamento de um determinado ponto é dado por:

$${}^t u_i = {}^t x_i - {}^0 x_i \quad (\text{A 47})$$

e

$$u_i = {}^{t+\Delta t} x_i - {}^t x_i \quad (\text{A 48})$$

onde:

${}^t u_i$ = componentes do deslocamento no instante t

u_i = componentes do incremento do deslocamento no instante t+Δt

Utilizando a equação (A 42) e substituindo na equação e (A 47) e (A 48):

$${}^t u_i = \sum_{k=1}^q h_k {}^t u_i^k + \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k ({}^t V_{\zeta i}^k - {}^0 V_{\zeta i}^k) + \frac{\varphi}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k ({}^t V_{\varphi i}^k - {}^0 V_{\varphi i}^k) \quad (\text{A } 49)$$

$$u_i = \sum_{k=1}^q h_k u_i^k + \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{\zeta i}^k + \frac{\varphi}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k V_{\varphi i}^k \quad (\text{A } 50)$$

e

$$\mathbf{V}_{\zeta}^k = \begin{Bmatrix} V_{\zeta 1}^k \\ V_{\zeta 2}^k \\ V_{\zeta 3}^k \end{Bmatrix} \quad \mathbf{V}_{\varphi}^k = \begin{Bmatrix} V_{\varphi 1}^k \\ V_{\varphi 2}^k \\ V_{\varphi 3}^k \end{Bmatrix} \quad (\text{A } 51)$$

onde:

${}^t u_i^k$: componentes do deslocamento nodal

${}^t V_{\zeta i}^k, {}^0 V_{\zeta i}^k, {}^t V_{\varphi i}^k, {}^0 V_{\varphi i}^k$: componentes dos vetores unitários nos instantes zero e t.

u_i^k : componentes do incremento do deslocamento nodal

$V_{\zeta i}^k = ({}^{t+\Delta t} V_{\zeta i}^k - {}^t V_{\zeta i}^k)$: componentes do incremento do vetor unitário V_{ζ}^k

$V_{\varphi i}^k = ({}^{t+\Delta t} V_{\varphi i}^k - {}^t V_{\varphi i}^k)$: componentes do incremento do vetor unitário V_{φ}^k

Os incrementos dos vetores unitários V_{ζ}^k e V_{φ}^k , equação (A 51), são descritos em termos das rotações dos pontos nodais em torno dos eixos cartesianos x_1, x_2 e x_3 :

$$\mathbf{V}_{\zeta}^k = \boldsymbol{\theta}^k \times {}^t \mathbf{V}_{\zeta}^k = \begin{Bmatrix} \theta_2^k {}^t V_{\zeta 3}^k - \theta_3^k {}^t V_{\zeta 2}^k \\ \theta_3^k {}^t V_{\zeta 1}^k - \theta_1^k {}^t V_{\zeta 3}^k \\ \theta_1^k {}^t V_{\zeta 2}^k - \theta_2^k {}^t V_{\zeta 1}^k \end{Bmatrix} \quad (\text{A } 52)$$

$$\mathbf{V}_{\varphi}^k = \boldsymbol{\theta}^k \times {}^t \mathbf{V}_{\varphi}^k = \begin{Bmatrix} \theta_2^k {}^t V_{\varphi 3}^k - \theta_3^k {}^t V_{\varphi 2}^k \\ \theta_3^k {}^t V_{\varphi 1}^k - \theta_1^k {}^t V_{\varphi 3}^k \\ \theta_1^k {}^t V_{\varphi 2}^k - \theta_2^k {}^t V_{\varphi 1}^k \end{Bmatrix} \quad (\text{A } 53)$$

$$\boldsymbol{\theta}^k = \begin{bmatrix} \theta_1^k \\ \theta_2^k \\ \theta_3^k \end{bmatrix} \quad (\text{A } 54)$$

onde:

${}^tV_\zeta^k$ e ${}^tV_\varphi^k$ são os vetores unitários descritos na equação (A 43).

$\boldsymbol{\theta}^k$: vetor quem contém os incrementos das rotações dos pontos nodais

Assim, os componentes dos incrementos dos deslocamentos u_i , equação (A 50), são expressos em termos de incrementos dos deslocamentos nodais ${}^t u_i^k$ e dos incrementos das rotações θ_i^k . A equação (A 55) apresenta o vetor de deslocamento em termos dos deslocamentos e das rotações.

$$\hat{\mathbf{u}}_k^T = [u_1^k \ u_2^k \ u_3^k \ \theta_1^k \ \theta_2^k \ \theta_3^k] \quad (\text{A } 55)$$

As equações desenvolvidas de (A 42) a (A 55) são a base para o estabelecimento da matriz \mathbf{B} (matriz de transformação deslocamento-deformação) para a construção da matriz de rigidez do elemento.

Para a construção da matriz de transformação deslocamento-deformação, é utilizada a equação (A 56).

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{A } 56)$$

onde:

$\boldsymbol{\epsilon}$: matriz de deformação (linear e não linear) onde contém os termos das derivadas do incremento do deslocamento em relação aos eixos x_1 , x_2 e x_3 .

\mathbf{B} : matriz de transformação deslocamento-deformação (linear e não linear).

$\hat{\mathbf{u}}$: vetor dos incrementos dos deslocamentos e rotações dos pontos nodais.

As derivadas do incremento do deslocamento em relação aos eixos x_1 , x_2 e x_3 são obtidas com o auxílio do operador Jacobiano.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (\text{A } 57)$$

onde:

\mathbf{J} : Matriz Jacobiano referente às coordenadas no instante zero

$\frac{\partial}{\partial x}$: Matriz onde contém os termos das derivadas em relação à x_1, x_2 e x_3

$\frac{\partial}{\partial \xi}$: Matriz onde contém os termos das derivadas em relação à ξ, φ e ζ

As derivadas do incremento do deslocamento em relação aos eixos ξ, φ e ζ pode ser dada por:

$$\begin{bmatrix} u_{i,\xi} \\ u_{i,\varphi} \\ u_{i,\zeta} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^q \begin{bmatrix} h_{k,\xi} & [1 & (g)_{1i}^k & (g)_{2i}^k & (g)_{3i}^k] \\ h_k & [0 & (\hat{g})_{1i}^k & (\hat{g})_{2i}^k & (\hat{g})_{3i}^k] \\ h_k & [0 & (\bar{g})_{1i}^k & (\bar{g})_{2i}^k & (\bar{g})_{3i}^k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^k \\ \theta_i^k \\ \theta_i^k \end{bmatrix} \quad (\text{A } 58)$$

e

$$(\hat{g})^k = \frac{1}{2} b_k \begin{bmatrix} 0 & -tV_{\varphi_3}^k & tV_{\varphi_2}^k \\ tV_{\varphi_3}^k & 0 & -tV_{\varphi_1}^k \\ -tV_{\varphi_2}^k & tV_{\varphi_1}^k & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A } 59)$$

$$(\bar{g})^k = \frac{1}{2} a_k \begin{bmatrix} 0 & -tV_{\zeta_3}^k & tV_{\zeta_2}^k \\ tV_{\zeta_3}^k & 0 & -tV_{\zeta_1}^k \\ -tV_{\zeta_2}^k & tV_{\zeta_1}^k & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A } 60)$$

$$(g)_{ij}^k = \varphi (\hat{g})_{ij}^k + \zeta (\bar{g})_{ij}^k \quad (\text{A } 61)$$

onde:

h_k : função de interpolação dos pontos nodais

$h_{k,\xi}$: derivada da função de interpolação em relação ao eixo ξ

\hat{g} e \bar{g} : matrizes onde contém os componentes do vetor unitário tV_{ti}^k, tV_{si}^k

φ e ζ : coordenadas naturais

O uso dos termos $(\hat{g})^k$ e $(\bar{g})^k$ foram utilizados para representar a equação de uma forma mais compacta e estes termos são considerados submatrizes da matriz da equação (A 58).

Por fim, as derivadas dos incrementos dos deslocamentos em relação aos eixos x_1, x_2 e x_3 , equação (A 57), são obtidas com o auxílio do operador Jacobiano. Substituindo a equação (A 58) na equação (A 57), tem-se a equação análoga à equação (A 56).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^q \begin{bmatrix} h_{k,1} & (G1)_{i1}^k & (G2)_{i1}^k & (G3)_{i1}^k \\ h_{k,2} & (G1)_{i2}^k & (G2)_{i2}^k & (G3)_{i2}^k \\ h_{k,3} & (G1)_{i3}^k & (G2)_{i3}^k & (G3)_{i3}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^k \\ \theta_1^k \\ \theta_2^k \\ \theta_3^k \end{bmatrix} \quad (\text{A } 62)$$

onde:

$$h_{k,i} = J_{i1}^{-1} h_{k,r}$$

$$(Gm)_{in}^k = (J_{n1}^{-1} (g)_{mi}^k) h_{k,r} + (J_{n2}^{-1} (\hat{g})_{mi}^k + J_{n3}^{-1} (\bar{g})_{mi}^k) h_k$$

\hat{g} e \bar{g} : matriz onde contém os componentes do vetor unitário ${}^tV_{ti}^k$ e ${}^tV_{si}^k$

A matriz da segunda tensão de Piola-Kirchhoff é dada por:

$${}^t_0\bar{S} = \begin{bmatrix} {}^t_0\tilde{S} & & \\ & {}^t_0\tilde{S} & \\ & & {}^t_0\tilde{S} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad {}^t_0\tilde{S} = \begin{bmatrix} {}^t_0S_{\xi\xi} & & \text{sim.} \\ {}^t_0S_{\xi\varphi} & 0 & \\ {}^t_0S_{\varphi\zeta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A } 63)$$

Onde ${}^t_0S_{\xi\xi}$, ${}^t_0S_{\xi\varphi}$ e ${}^t_0S_{\varphi\zeta}$ são as tensões de Piola-Kirchhoff em relação aos eixos ξ , φ e ζ .

As equações descritas são a base para o estabelecimento da matriz de rigidez linear e não linear do elemento de viga. Para um melhor entendimento das equações desenvolvidas, um exemplo é descrito no APÊNDICE C.

Para a utilização do elemento de dois nós, algumas informações devem ser conhecidas. Uma importante consideração é que, o elemento composto por dois nós pode ser empregado efetivamente para a análise de vigas de espessuras moderadas e relativamente finas. No entanto para a análise de vigas delgadas, o elemento de três ou quatro nós deve ser utilizado ao invés do elemento de dois nós. Esta consideração torna-se importante, pois o elemento de dois nós não representa as deformações de cisalhamento e de momento com suficiente precisão. Para vigas delgadas ocorre o aparecimento de um fator multiplicador interpretado como “*penalty number*” e à medida que a espessura da viga decresce este valor se aproxima ao infinito. Paralelamente, quando a viga apresenta espessuras cada vez menores, a deformação por cisalhamento deve se apresentar muito pequena e

aproximadamente zero. No entanto, caso essa deformação de cisalhamento não for zero em todo o seu domínio, ou seja, conter erros, o fator multiplicador multiplica e eleva este valor resultando em uma rigidez maior que o normal, causando o efeito conhecido como “*shear locking*”.

Para a solução do problema descrito, Bathe (1982) propõe o uso de elementos de ordem mais elevadas (três e quatro nós), ou para o elemento de dois nós o emprego da integração reduzida, ou seja, não realizando a integral da energia de deformação de cisalhamento de forma exata, o fenômeno do “*shear locking*” pode ser evitado.

1.4.4 Relação constitutiva

Para que o elemento formulado possa modelar o problema corretamente, as relações constitutivas apropriadas devem ser utilizadas. Essas relações constitutivas descrevem as propriedades dos materiais exibindo corretamente suas características físicas. Diferentes materiais, como por exemplo, borracha, metal, polímero apresentam diferentes comportamentos, portanto devem ser utilizadas as adequadas descrições do material.

Para o comportamento linear elástico do material, a relação constitutiva pode ser escrita:

$${}^tS_{ij} = {}^tC_{ijrs} {}^t\epsilon_{rs} \quad (\text{A } 64)$$

onde ${}^tC_{ijrs}$ são os componentes do tensor elástico e é descrito como:

$${}^tC_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) \quad (\text{A } 65)$$

e

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{A } 66)$$

onde:

λ e μ : constantes de Lamé

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0; i \neq j \\ 1; i = j \end{cases} \text{ (delta de Kronecker)}$$

A relação constitutiva descrita é empregada para análises onde o material apresenta propriedades lineares elásticas e para outros tipos de comportamento de materiais, diferentes relações constitutivas devem ser utilizadas.

1.5 Integração numérica – Quadratura de Gauss

Até o momento formulou-se todas as matrizes contidas na equação de equilíbrio, resta então avaliar as integrais dos termos descritos.

O cálculo da integral, por exemplo, da matriz de rigidez t_0K_L ou ${}^t_0K_{NL}$, apresenta grande complexidade quando resolvido de forma analítica e por este motivo o procedimento de integração numérica torna-se mais interessante e viável. A metodologia empregada para a integração numérica é a Quadratura de Gauss.

A integração de Gauss é descrita pela multiplicação dos valores da função de pontos específicos pelos seus pesos correspondentes:

$$\int F(r) dr = \alpha_1 F(r_1) + \alpha_2 F(r_2) + \dots + \alpha_n F(r_n) + R_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i F(r_i) + R_n \quad (\text{A } 67)$$

onde:

$F(r)$: função a ser integrada

r : pontos específicos escolhidos (pontos de integração)

α : são os pesos (valores) de cada função

R_n : erro devido à integração numérica

A quadratura de Gauss otimiza as posições dos pontos r , conhecidos como pontos de integração, como também determina os pesos correspondentes para a multiplicação da função nestes pontos específicos, assim obtendo satisfatório resultados.

Por exemplo, para o cálculo da matriz de rigidez t_0K_L :

$$F = B_L^T C B_L \det J \quad (\text{A } 68)$$

Substituindo a função F na equação (A 67):

$${}^t_0K_L = \int F dr ds dt \quad (\text{A } 69)$$

$$= \iiint_{-1}^1 F(\xi, \varphi, \zeta) d\xi d\varphi d\zeta = \sum_{i,j,k} \alpha_i \alpha_j \alpha_k F(r_i, r_j, r_k) \tag{A 70}$$

A Figura A 9 exemplifica os pontos de integração e suas referidas coordenadas como também seus respectivos pesos.

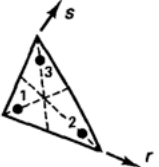

Ordem de integração	Grau de precisão	Pontos de integração	Coordenadas r	Coord. s	Pesos
3 pontos	2		$r_1 = 0.16666\ 66666\ 667$ $r_2 = 0.66666\ 66666\ 667$ $r_3 = r_1$	$s_1 = r_1$ $s_2 = r_1$ $s_3 = r_2$	$w_1 = 0.33333\ 33333\ 333$ $w_2 = w_1$ $w_3 = w_1$
7 pontos	5		$r_1 = 0.10128\ 65073\ 235$ $r_2 = 0.79742\ 69853\ 531$ $r_3 = r_1$ $r_4 = 0.47014\ 20641\ 051$ $r_5 = r_4$ $r_6 = 0.05971\ 58717\ 898$ $r_7 = 0.33333\ 33333\ 333$	$s_1 = r_1$ $s_2 = r_1$ $s_3 = r_2$ $s_4 = r_6$ $s_5 = r_4$ $s_6 = r_4$ $s_7 = r_7$	$w_1 = 0.12593\ 91805\ 448$ $w_2 = w_1$ $w_3 = w_1$ $w_4 = 0.13239\ 41527\ 885$ $w_5 = w_4$ $w_6 = w_4$ $w_7 = 0.225$

Figura A 9 – Pontos de integração de Gauss
 Fonte: Bathe (1982)

A escolha da ordem de integração numérica tem grande importância para o cálculo da integral. Integrações de altas ordens (maior número de pontos) requer um maior tempo de análise, no entanto obtém-se um maior grau de precisão. Contudo o uso de integrações de poucos pontos (reduzida), as matrizes podem ser avaliadas inadequadamente. O uso do número de integrações apropriadas depende do tipo matriz e do elemento finito no qual está sendo avaliada, e a aplicação das integrações reduzidas para alguns casos pode-se obter melhores resultados, como por exemplo, evitando o fenômeno de “*shear locking*”.

APÊNDICE B – FORMULAÇÃO LAGRANGEANA TOTAL

Para obter a equação final do trabalho virtual é necessário utiliza-la em forma de incrementos como também aplicar a linearização da equação. Utiliza-se a Figura A 8 para o melhor entendimento físico da formulação da equação. Supõe-se que as configurações nos instantes de tempo zero e t são conhecidas. É aplicado o princípio do deslocamento virtual na configuração do corpo no instante $t+\Delta t$.

A equação do princípio do trabalho virtual, conforme equação (A 1), é dada por:

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} {}^0 dV = {}^{t+\Delta t} R \quad (\text{B } 1)$$

e

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = \frac{{}^0 \rho}{{}^{t+\Delta t} \rho} {}^{t+\Delta t} x_{i,m} {}^{t+\Delta t} \tau_{mn} {}^{t+\Delta t} x_{j,n} \quad (\text{B } 2)$$

e

$${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t} u_{i,j} + {}^{t+\Delta t} u_{j,i} + {}^{t+\Delta t} u_{k,i} {}^{t+\Delta t} u_{k,j}) \quad (\text{B } 3)$$

onde:

${}^{t+\Delta t} S_{ij}$: 2ª tensão de Piola-Kirchhoff no instante $t+\Delta t$

${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}$: tensor de deformação Green Lagrange

${}^{t+\Delta t} R$: componentes das forças externas

É estabelecido o princípio do deslocamento virtual na configuração do instante $t+\Delta t$, conforme descrito. Vale lembrar que a configuração no instante $t+\Delta t$ não é conhecida. Portanto, em vez de escrever a variável no instante $t+\Delta t$, por exemplo, para o deslocamento ${}^{t+\Delta t} u$, podemos reescrever esta variável como sendo o deslocamento conhecido no instante t somado a um incremento de deslocamento, ou seja, ${}^{t+\Delta t} u = {}^t u + {}_0 u$ (incremento de deslocamento).

Decomposição incremental da tensão e deformação

As equações da tensão e da deformação serão reescritos em termos da variável conhecida no instante t somado a um incremento.

Segunda tensão de Piola-Kirchhoff

A segunda tensão de Piola-Kirchhoff é escrita em termos de incremento:

$${}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij} = {}^t{}_0S_{ij} + {}_0S_{ij} \quad (\text{B } 4)$$

onde:

${}^t{}_0S_{ij}$: 2ª tensão de Piola-Kirchhoff no instante conhecido t

${}_0S_{ij}$: incremento de tensão (não conhecido)

Tensor deformação de Green-Lagrange

O tensor deformação de Green-Lagrange é escrita é escrita em termos de incremento:

$${}^{t+\Delta t}{}_0\epsilon_{ij} = {}^t{}_0\epsilon_{ij} + {}_0\epsilon_{ij} \quad (\text{B } 5)$$

onde:

${}^t{}_0\epsilon_{ij}$: tensor deformação no instante t (conhecido)

${}_0\epsilon_{ij}$: incremento de deformação (não conhecido)

O incremento da deformação pode ser escrito da forma:

$${}_0\epsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij} \quad (\text{B } 6)$$

$${}_0\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}({}_0u_{i,j} + {}_0u_{j,i} + {}^t{}_0u_{k,i} {}_0u_{k,j} + {}_0u_{k,i} + {}^t{}_0u_{k,j}) + \frac{1}{2}{}_0u_{k,i} {}_0u_{k,j} \quad (\text{B } 7)$$

onde:

${}_0u_{i,j}$, ${}_0u_{j,i}$, ${}_0u_{k,j}$, ${}_0u_{k,i}$: termos relacionados às derivadas dos incrementos dos deslocamentos (termos não conhecidos)

${}^t{}_0u_{k,i}$ e ${}^t{}_0u_{k,j}$: termos relacionados às derivadas dos deslocamentos do instante t (termos conhecidos)

${}_0e_{ij}$: incremento de deformação linear (linear pois os termos que estão multiplicando são conhecidos)

${}_0\eta_{ij}$: incremento de deformação não linear (pois as duas variáveis são desconhecidas)

O termo ${}^t{}_0u_{k,i} {}_0u_{k,j} + {}_0u_{k,i} + {}^t{}_0u_{k,j}$ da equação (B 7) é conhecido como efeito do deslocamento inicial.

Equação utilizando as decomposições incrementais

As equações desenvolvidas na forma incremental, (B 4) à (B 7), são substituídas na equação do trabalho virtual (B 1).

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} {}^0 dV = {}^{t+\Delta t} R \quad (\text{B } 8)$$

$$\int_{0V} ({}^t S_{ij} + {}^0 S_{ij}) \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} {}^0 dV = {}^{t+\Delta t} R \quad (\text{B } 9)$$

$$\int_{0V} [({}^t S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}) + ({}^0 S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij})] {}^0 dV = {}^{t+\Delta t} R \quad (\text{B } 10)$$

Sabe-se que a variação do tensor de Green Lagrange no instante $t+\Delta t$ é:

$$\delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = \delta ({}^t \epsilon_{ij} + {}^0 \epsilon_{ij}) \quad (\text{B } 11)$$

e que variação está sendo realizada no instante $t+\Delta t$, assim temos $\delta {}^t \epsilon_{ij} = 0$.

Portanto, a equação (B 11) é escrita como:

$$\delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = \delta {}^t \epsilon_{ij} + \delta {}^0 \epsilon_{ij} = \delta {}^0 \epsilon_{ij} \quad (\text{B } 12)$$

Substituindo a equação (B 12) na equação (B 10):

$$\int_{0V} [({}^t S_{ij} \delta {}^0 \epsilon_{ij}) + ({}^0 S_{ij} \delta {}^0 \epsilon_{ij})] {}^0 dV = {}^{t+\Delta t} R \quad (\text{B } 13)$$

Utilizando a equação (B 6) e substituindo na equação (B 13):

$$\int_{0V} [({}^t S_{ij} \delta {}^0 e_{ij} + {}^t S_{ij} \delta {}^0 \eta_{ij}) + ({}^0 S_{ij} \delta {}^0 \epsilon_{ij})] {}^0 dV = {}^{t+\Delta t} R \quad (\text{B } 14)$$

Por fim, o termo onde consta a deformação linear é deslocado para o outro lado da equação.

$$\int_{0V} {}^0 S_{ij} \delta {}^0 \epsilon_{ij} {}^0 dV + \int_{0V} {}^t S_{ij} \delta {}^0 \eta_{ij} {}^0 dV = {}^{t+\Delta t} R - \int_{0V} {}^t S_{ij} \delta {}^0 e_{ij} {}^0 dV \quad (\text{B } 15)$$

Linearização da equação

A equação do princípio do trabalho virtual é em geral complicada. Esta equação é uma função não linear em relação ao incremento de deslocamento (u_i) não conhecido. Portanto, uma equação mais simples e aproximada é obtida desconsiderando os termos de altas ordens, considerando assim apenas os termos lineares. O objetivo da linearização é obter uma equação linear do tipo (após discretizado):

$${}^tK \Delta U = {}^{t+\Delta t}R - {}^tF \quad (B 16)$$

A linearização será efetuada para cada termo da integral da equação (B 15):

1) $\int_{0V} {}^tS_{ij} \delta_0 \eta_{ij}^0 dV$: a equação é linear em relação ao incremento u_i , portanto não há necessidade de linearização.

- ${}^tS_{ij}$ não contém o incremento de deslocamento u_i ;

- Quando se faz a variação do termo de incremento de deformação não linear $\delta_0 \eta_{ij}$, a equação é descrita por $\delta_0 \eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_0u_{k,i} \delta_0 u_{k,j} + \frac{1}{2} \delta_0 u_{k,i} {}_0u_{k,j}$, onde os termos descritos pela variação δ são tidos como valores constantes. Portanto as únicas variáveis não conhecidas são ${}_0u_{k,i}$ e ${}_0u_{k,j}$, o que torna a equação $\delta_0 \eta_{ij}$ linear.

2) $\int_{0V} {}^tS_{ij} \delta_0 e_{ij}^0 dV$: a equação é linear com relação à u_i , portanto não há necessidade de linearização.

- ${}^tS_{ij}$ não contém u_i ;

- $\delta_0 e_{ij}$ possui somente termos lineares no incremento u_i .

3) $\int_{0V} {}_0S_{ij} \delta_0 \epsilon_{ij}^0 dV$: a equação contém termos não lineares de altas ordens no incremento u_i .

- $\delta_0 \epsilon_{ij}^0 dV = \delta_0 e_{ij} + \delta_0 \eta_{ij}$ é uma função linear no incremento u_i .

- ${}_0S_{ij}$ é uma função não linear com relação à ${}_0\epsilon_{ij}$, portanto deve ser linearizado.

O termo ${}_0S_{ij}$ pode ser escrito utilizando a série de Taylor em relação à ${}_0\epsilon_{ij}$.

$${}_0S_{ij} = \frac{\partial {}^tS_{ij}}{\partial {}^t\epsilon_{rs}} \cdot {}_0\epsilon_{rs} + \text{termos de altas ordens} \quad (B 17)$$

onde:

$\frac{\partial {}_0^t S_{ij}}{\partial {}_0^t \epsilon_{rs}}$: termo conhecido no instante t

${}_0 \epsilon_{rs}$: contém termos lineares e não lineares (não conhecido)

Os termos de altas ordens da equação (B 17) são desconsiderados. Escrevendo o incremento da deformação da equação (B 17) em termos lineares e não lineares:

$${}_0 S_{ij} = \frac{\partial {}_0^t S_{ij}}{\partial {}_0^t \epsilon_{rs}} ({}_0 e_{rs} + {}_0 \eta_{rs}) \quad (\text{B 18})$$

O termo não linear da deformação ${}_0 \eta_{rs}$ é desconsiderado, portanto a equação pode ser escrita:

$${}_0 S_{ij} = \frac{\partial {}_0^t S_{ij}}{\partial {}_0^t \epsilon_{rs}} {}_0 e_{rs} = {}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs} \quad (\text{termo linearizado}) \quad (\text{B 19})$$

Onde ${}_0 C_{ijrs}$ é o tensor incremental tensão deformação (relação constitutiva do material).

Voltando e inserindo o termo linearizado na equação do item 3, tem-se :

$${}_0 S_{ij} \delta_0 \epsilon_{ij} = {}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs} (\delta_0 e_{ij} + \delta_0 \eta_{ij}) \quad (\text{B 20})$$

$$= {}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs} \delta_0 e_{ij} + {}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs} \delta_0 \eta_{ij} \quad (\text{B 21})$$

O termo $\delta_0 e_{ij}$ não contém incremento u_i , portanto o termo ${}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs} \delta_0 e_{ij}$ é linear. No entanto, o termo ${}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs} \delta_0 \eta_{ij}$ é desconsiderado, pois torna se quadrático. Assim, a equação (B 21) fica:

$${}_0 S_{ij} \delta_0 \epsilon_{ij} = {}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs} \delta_0 e_{ij} \quad (\text{B 22})$$

Portanto, a equação (B 15) depois de linearizada fica:

$$\int_{0V} {}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs} \delta_0 e_{ij} {}_0 dV + \int_{0V} {}_0^t S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} {}_0 dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} - \int_{0V} {}_0^t S_{ij} \delta_0 e_{ij} {}_0 dV \quad (\text{B 23})$$

Se aplicado a discretização utilizando elementos finitos na equação (B 23), obtem-se:

$$\delta U^T {}^t_0 K \Delta U = \delta U^T ({}^{t+\Delta t}R - {}^t_0 F) \quad (\text{B 24})$$

onde:

- Os termos da matriz de rigidez ${}^t_0 K$ são originados pela tensão ${}^t_0 S_{ij}$ e pelo tensor do material (relação constitutiva) ${}_0 C_{ijrs}$;
- Os termos do incremento de deslocamento ΔU provêm das partes das deformações ${}_0 e_{rs}$ e $\delta_0 \eta_{ij}$;
- Os termos do deslocamento virtual δU^T originam-se das deformações $\delta_0 e_{ij}$ e $\delta_0 \eta_{ij}$;
- O termo da parte do deslocamento virtual multiplicado pelo vetor de forças nodais $\delta U^T {}^{t+\Delta t}R$ provém trabalho virtual externo ${}^{t+\Delta t}R$;
- O termo ${}^t_0 S_{ij} \delta_0 e_{ij}$ resulta no vetor de forças (correspondente às tensões internas do elemento ${}^t_0 S_{ij}$) multiplicado pelo deslocamento virtual $\delta U^T {}^t_0 F$.

APÊNDICE C – EXEMPLO DO ESTABELECIMENTO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

Bathe (1982) apresenta um exemplo para o estabelecimento da matriz de deformação-deslocamento de um elemento de viga.

Um elemento de viga (plano bidimensional) de dois nós é utilizado na análise. As coordenadas, os deslocamentos e as derivadas que são requeridas para o estabelecimento da matriz de deformação-deslocamento são avaliados.

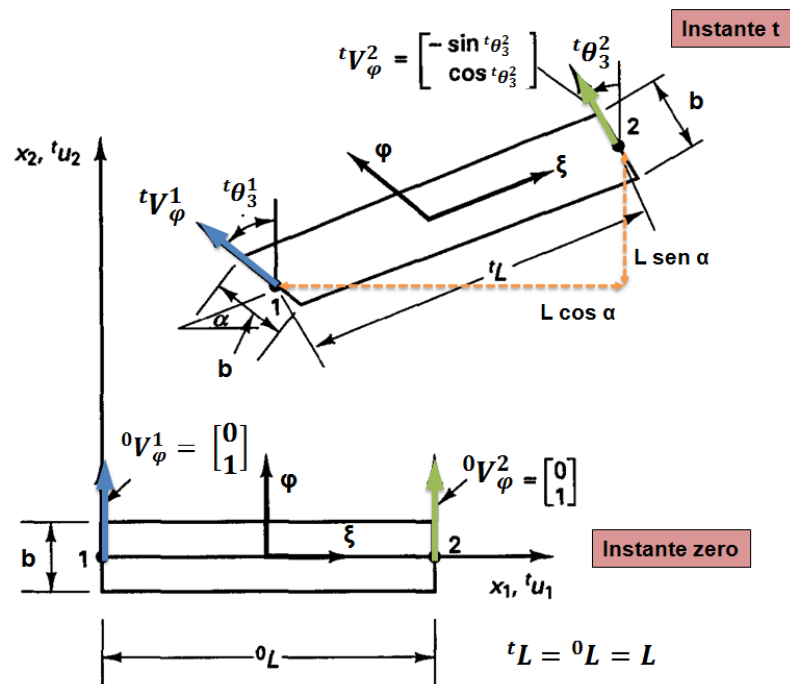


Figura C 1 – Elemento de viga no plano bidimensional
Fonte: Adaptado de Bathe (1982)

As funções de interpolação do elemento de viga de dois nós são:

$$h_1 = \frac{1}{2}(1 - r) \quad (\text{C } 1)$$

$$h_2 = \frac{1}{2}(1 + r) \quad (\text{C } 2)$$

Para o instante zero, as posições e os vetores dos pontos nodais são:

$${}^0x^1 = \begin{pmatrix} {}^0x_1^1 \\ {}^0x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C } 3)$$

$${}^0x^2 = \begin{pmatrix} {}^0x_1^2 \\ {}^0x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C } 4)$$

As coordenadas da viga podem ser escritas utilizando a equação (A 42). Para o instante zero temos:

$${}^0x_1 = h_1 {}^0x_1^1 + h_2 {}^0x_1^2 + \frac{\varphi}{2} [b_1 h_1 {}^0V_{\varphi 1}^1 + b_2 h_2 {}^0V_{\varphi 1}^2] = \frac{(1+r)}{2} {}^0L \quad (C 5)$$

$${}^0x_2 = h_1 {}^0x_2^1 + h_2 {}^0x_2^2 + \frac{\varphi}{2} [b_1 h_1 {}^0V_{\varphi 2}^1 + b_2 h_2 {}^0V_{\varphi 2}^2] = \frac{\varphi}{2} b \quad (C 6)$$

As coordenadas para o instante t:

$${}^t x_1 = \frac{(1-r)}{2} {}^t x_1^1 + \frac{(1+r)}{2} {}^0 x_1^2 + \frac{\varphi}{2} b \left[-\frac{(1-r)}{2} \text{sen } {}^t \theta_3^1 - \frac{(1+r)}{2} \text{sen } {}^t \theta_3^2 \right] \quad (C 7)$$

$${}^t x_2 = \frac{(1-r)}{2} {}^t x_2^1 + \frac{(1+r)}{2} {}^0 x_2^2 + \frac{\varphi}{2} b \left[\frac{(1-r)}{2} \text{cos } {}^t \theta_3^1 + \frac{(1+r)}{2} \text{cos } {}^t \theta_3^2 \right] \quad (C 8)$$

As equações dos deslocamentos para o instante t são:

$${}^t u_1 = \sum_{k=1}^q h_k {}^t u_1^k + \frac{\varphi}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k ({}^t V_{\varphi 1}^k - {}^0 V_{\varphi 1}^k) \quad (C 9)$$

$${}^t u_1 = h_1 ({}^t x_1^1 - {}^0 x_1^1) + h_2 ({}^t x_2^1 - {}^0 x_2^1) + \frac{\varphi}{2} b [-h_1 \text{sen } {}^t \theta_3^1 - h_2 \text{sen } {}^t \theta_3^2] \quad (C 10)$$

$${}^t u_2 = \sum_{k=1}^q h_k {}^t u_2^k + \frac{\varphi}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k ({}^t V_{\varphi 2}^k - {}^0 V_{\varphi 2}^k) \quad (C 11)$$

$${}^t u_2 = h_1 ({}^t x_2^1 - {}^0 x_2^1) + h_2 ({}^t x_2^2 - {}^0 x_2^2) + \frac{\varphi}{2} b [h_1 \text{cos } {}^t \theta_3^1 + h_2 \text{cos } {}^t \theta_3^2 - 1] \quad (C 12)$$

O incremento de deslocamento para um instante t+Δt:

$$u_1 = \sum_{k=1}^q h_k u_1^k + \frac{\varphi}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k V_{\varphi 1}^k \quad (C 13)$$

$$V_{\varphi}^1 = \theta^1 \times {}^t V_{\varphi}^1 = \begin{Bmatrix} \theta_2^1 {}^t V_{\varphi 3}^1 - \theta_3^1 {}^t V_{\varphi 2}^1 \\ \theta_3^1 {}^t V_{\varphi 1}^1 - \theta_1^1 {}^t V_{\varphi 3}^1 \\ \theta_1^1 {}^t V_{\varphi 2}^1 - \theta_2^1 {}^t V_{\varphi 1}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\theta_3^1 \text{cos } {}^t \theta_3^1 \\ -\theta_3^1 \text{sen } {}^t \theta_3^1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (C 14)$$

$$V_{\varphi}^2 = \theta^2 \times {}^tV_{\varphi}^2 = \begin{Bmatrix} \theta_2^2 {}^tV_{\varphi_3}^2 - \theta_3^2 {}^tV_{\varphi_2}^2 \\ \theta_3^2 {}^tV_{\varphi_1}^2 - \theta_1^2 {}^tV_{\varphi_3}^2 \\ \theta_1^2 {}^tV_{\varphi_2}^2 - \theta_2^2 {}^tV_{\varphi_1}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\theta_3^2 \cos^t \theta_3^2 \\ -\theta_3^2 \text{sen}^t \theta_3^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{C } 15)$$

$$u_1 = h_1 u_1^1 + h_2 u_1^2 + \frac{\varphi}{2} b [-h_1 \theta_3^1 \cos^t \theta_3^1 - h_2 \theta_3^2 \cos^t \theta_3^2] \quad (\text{C } 16)$$

$$u_2 = h_1 u_2^1 + h_2 u_2^2 + \frac{\varphi}{2} b [-h_1 \theta_3^1 \text{sen}^t \theta_3^1 - h_2 \theta_3^2 \text{sen}^t \theta_3^2] \quad (\text{C } 17)$$

As derivadas do incremento do deslocamento em relação aos eixos ξ e φ podem ser dadas utilizando a equação (A 58):

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi} = -\frac{u_1^1}{2} + \frac{u_1^2}{2} + \frac{\varphi}{4} b [\theta_3^1 \cos^t \theta_3^1 - \theta_3^2 \cos^t \theta_3^2] \quad (\text{C } 18)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} = -\frac{b(1-r)}{2} \frac{\theta_3^1 \cos^t \theta_3^1}{2} - \frac{b(1+r)}{2} \frac{\theta_3^2 \cos^t \theta_3^2}{2} \quad (\text{C } 19)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \xi} = -\frac{u_2^1}{2} + \frac{u_2^2}{2} + \frac{\varphi}{4} b [\theta_3^1 \text{sen}^t \theta_3^1 - \theta_3^2 \text{sen}^t \theta_3^2] \quad (\text{C } 20)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \varphi} = -\frac{b(1-r)}{2} \frac{\theta_3^1 \text{sen}^t \theta_3^1}{2} - \frac{b(1+r)}{2} \frac{\theta_3^2 \text{sen}^t \theta_3^2}{2} \quad (\text{C } 21)$$

As derivadas podem ser escritas em termos das matrizes:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\varphi b}{4} \cos^t \theta_3^1 & \frac{1}{2} & -\frac{\varphi b}{4} \cos^t \theta_3^2 \\ 0 & -\frac{b(1-r)}{2} \cos^t \theta_3^1 & 0 & -\frac{b(1+r)}{2} \cos^t \theta_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ \theta_3^1 \\ u_1^2 \\ \theta_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{C } 22)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\varphi b}{4} \text{sen}^t \theta_3^1 & \frac{1}{2} & -\frac{\varphi b}{4} \text{sen}^t \theta_3^2 \\ 0 & -\frac{b(1-r)}{2} \text{sen}^t \theta_3^1 & 0 & -\frac{b(1+r)}{2} \text{sen}^t \theta_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^1 \\ \theta_3^1 \\ u_2^2 \\ \theta_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{C } 23)$$

As matrizes podem ser escritas de uma forma compacta, de acordo com a equação (A 58).

$$\begin{bmatrix} u_{i,\xi} \\ u_{i,\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right) [1 & (g)_i^1] & \left(\frac{1}{2}\right) [1 & (g)_i^2] \\ \left(\frac{1-r}{2}\right) [0 & (\hat{g})_i^1] & \left(\frac{1+r}{2}\right) [0 & (\hat{g})_i^1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^1 \\ \theta_3^1 \\ u_i^2 \\ \theta_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{C 24})$$

$${}^t(g)_i^k = s (\hat{g})_i^k \quad (\text{C 25})$$

$$(\hat{g})_1^k = -\frac{b}{2} \cos \theta_3^k \quad (\text{C 26})$$

$$(\hat{g})_2^k = -\frac{b}{2} \sin \theta_3^k \quad (\text{C 27})$$

O operado Jacobiano pode ser dado por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^0 x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial^0 x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^0 x_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial^0 x_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0L}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{C 28})$$

Os termos do efeito do deslocamento inicial são encontrados utilizando as derivadas:

$${}^t_0 u_{1,1} = (\cos \alpha - 1) - \frac{\varphi b}{2L} (\sin^t \theta_3^2 - \sin^t \theta_3^1) \quad (\text{C 29})$$

$${}^t_0 u_{1,2} = -\left(\frac{1-r}{2}\right) \sin^t \theta_3^1 - \left(\frac{1+r}{2}\right) \sin^t \theta_3^2 \quad (\text{C 30})$$

$${}^t_0 u_{2,1} = \sin \alpha + \frac{\varphi b}{2L} [\cos^t \theta_3^2 - \cos^t \theta_3^1] \quad (\text{C 31})$$

$${}^t_0 u_{2,2} = \left(\frac{1-r}{2}\right) \cos^t \theta_3^1 + \left(\frac{1+r}{2}\right) \sin^t \theta_3^2 - 1 \quad (\text{C 32})$$

ANEXO A – RESULTADOS DA LITERATURA (HOWELL 2001)

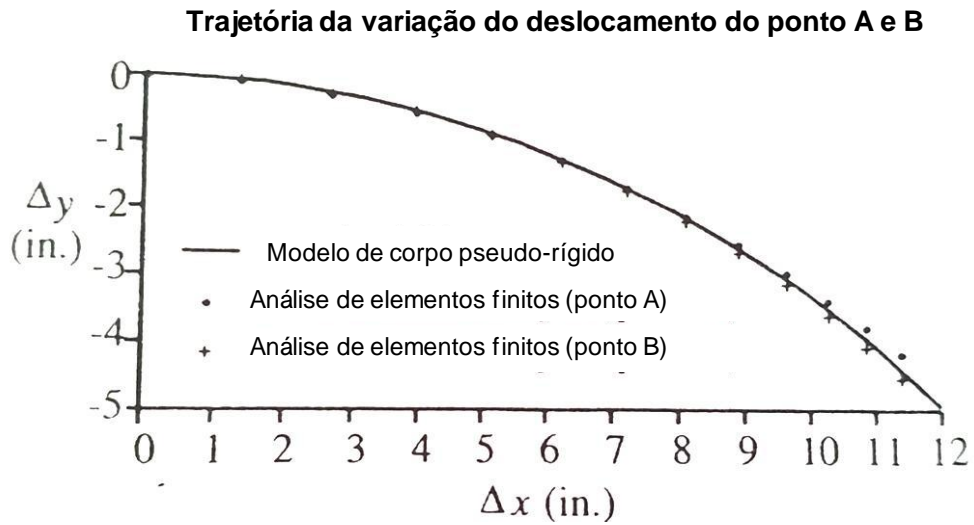


Figura ANEXO A 1 – Trajetória da variação do deslocamento

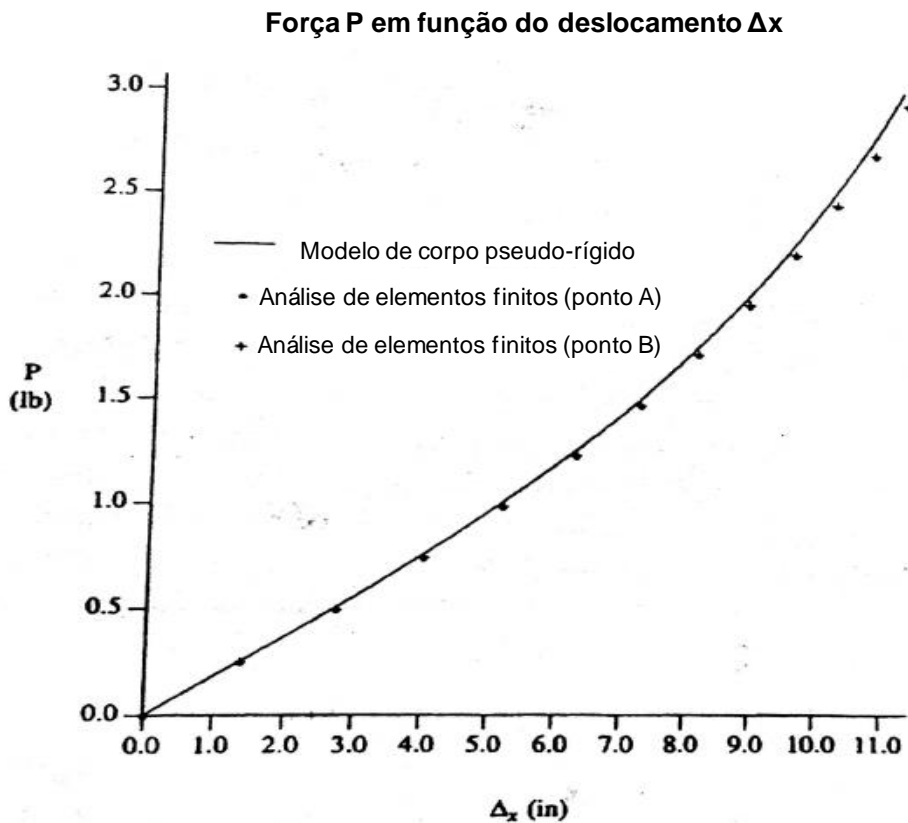


Figura ANEXO A 2 – Força P em função do deslocamento Δx