UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RAFAEL DA CRUZ MOREIRA

DEMONSTRAÇÕES VISUAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2015

RAFAEL DA CRUZ MOREIRA

DEMONSTRAÇÕES VISUAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, do Curso de Licenciatura em Matemática do Departamento Acadêmico de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado.

Orientadora: Profa. Ms. Violeta Maria Estephan

CURITIBA

2015

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Curitiba
Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Departamento Acadêmico de Matemática
Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática

TERMO DE APROVAÇÃO

"DEMONSTRAÇÕES VISUAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA"

por

"Rafael da Cruz Moreira"

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 14h do dia 27 de novembro de 2015 na sala E-107 como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba. O aluno foi arguido pela Banca de Avaliação abaixo assinados. Após deliberação, de acordo com o parágrafo 1º do art. 37 do Regulamento Específico do trabalho de Conclusão de Curso para o Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR do Câmpus Curitiba, a Banca de Avaliação considerou o trabalho **aprovado**.

Prof. MSc. Violeta Maria Estephan (Presidente - UTFPR/Curitiba)	Profa. Dra. Leônia Gabardo Negrelli (Avaliador 1 - UTFPR/Curitiba)
Profa. Dra. Luciana Schreiner de Oliveira (Avaliador 2 - UTFPR/Curitiba)	Prof. Dr. Marco Aurélio Kalinke (Professor Responsável pelo TCC – UTFPR/Curitiba)
Profa. Dra. Neusa Nogas Tocha **(Coordenador do curso de Licenciatura em Matemática – UTFPR/Curitiba)**	

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso."

À Deus, em quem confio e que me sustentou em toda a minha jornada.

À meu pai, Luiz Carlos Moreira, e à minha mãe, Célia Regina da Cruz Moreira, que nunca faltaram com amor, e com sabedoria me apoiaram até aqui.

AGRADECIMENTOS

Um texto escrito nunca seria o suficiente, mas não deixar palavras seria um pecado maior.

Quero aqui honrar a professora Violeta Maria Estephan que me ajudou a escolher o tema e me orientou com grande cuidado e sensatez, de fato, ao fim de cada um dos nossos encontros eu sabia o que fazer e tinha confiança de que tudo daria certo.

Agradeço a todos os meus colegas do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, que sempre mostraram entusiasmo a medida que meu trabalho progredia, isso foi um grande apoio.

Tenho muita gratidão a minha família, em especial aos meus pais, que me deram suporte durante toda a minha jornada acadêmica e sempre demonstraram orgulho das escolhas que fiz.

Aos meus irmãos da Comunhão Cristã Abba de Curitiba desejo externar a minha alegria e satisfação por ter vivido essa experiência junto a eles, que colocaram cada situação diante de Deus, em oração.

Por último, mas sem nenhum menosprezo, tenho eterna gratidão aos meus amigos da Aliança Bíblica Universitária, que estiveram ao meu lado dia após dia e me supriram alegria em todos os momentos, e mesmo não tendo profundo conhecimento ou atração por matemática, demonstraram grande admiração por este trabalho.

A cognitive life in which all truth can be simply "seen" would be the life of... an angel. (LEWIS, Clive S., 1964)

Uma vida cognitiva em que toda a verdade pode ser simplesmente "vista" seria a vida de... um anjo. (LEWIS, Clive S., 1964)

RESUMO

NELSEN, Roger B. Proof whithout words: exercises in visual thinking. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1993.

Partindo de uma definição de proficiência matemática e motivados por oportunizar essa proficiência aos estudantes de Ensino Fundamental e Ensino Médio esta pesquisa procura mostrar a demonstração visual como uma ferramenta para alcançar esse objetivo. Introduz o conceito geral de demonstração visual a partir do que diversos pesquisadores classificam como representações visuais e seu uso dentro da estrutura lógica de uma demonstração matemática. São apresentadas pesquisas que indicam porque as demonstrações visuais podem ser ferramentas úteis em sala de aula, e caracterizam como uma demonstração visual pode ser efetiva para o ensino de matemática. Com essa fundamentação são apresentadas seis demonstrações visuais com sugestões de uso em sala de aula para desenvolver conteúdos do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Essas sugestões trazem modificações baseadas nos autores que fundamentam esse trabalho com a intensão de ampliar seu potencial pedagógico, como uso de imagem dinâmica, cor, repetição e material manipulável.

Palavras Chave: Demonstração Visual. Demonstração sem palavras. Representação visual. Ensino de matemática.

ABSTRACT

NELSEN, Roger B. Proof whithout words: exercises in visual thinking. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1993.

Starting from a definition of mathematics proficiency and motivated by give opportunity this proficiency to students of elementary and high school this research seeks to show visual proof as a tool to achieve that goal. Introduces the general concept of visual proof from what many researchers classify as visual representations and their use within the logical structure of a mathematical proof. Researches indicating appear because visual proofs can be useful tools in the classroom, and characterized as a visual proof can be effective in the teaching of mathematics. With those reasons are presented six visual proofs with usage suggestions in the classroom, with elementary and high school content. These suggestions bring changes based on authors underlying this work with the intention to expand their educational potential, such as use of dynamic image, color, repetition and manipulatable material.

Keywords: Visual proof. Proof without words. Visual representation. Teaching of mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Documento Japonês Com Um Exemplo De Demonstração Visual 16

Figura 2 – Demonstração Do Teorema De Pitágoras Por Bhaskara 17

Figura 3 – Demonstração Do Teorema De Pitágoras Por Bhaskara Passo a Passo 18

Figura 4 – Demonstração Visual Do Teorema De Pitágoras Baseada Na Demonstração De Euclides 20

Figura 5 – Quadrados Concêntricos 22

Figura 6 – Quadrados Concêntricos Destacados 22

Figura 7 – Esquema De Montagem Dos Quadrados Concêntricos Da Demonstração Visual 23

Figura 8 - Quadrados Concêntricos Montados Com Peças De Dominó 24

Figura 9 – Demonstração Visual – Todo Cubo É A Soma De Ímpares Consecutivos 25

Figura 10 – Demonstração Visual – A Soma Dos Cubos É O Quadrado Da Soma...........27

Figura 11 – Demonstração Visual – f E f^{-1}São Reflexões Sobre $y = x$ 29

Figura 12 – Gráficos Da Atividade Sugerida 31

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11
2 DESENVOLVIMENTO 12
2.1 DEMONSTRAÇÕES VISUAIS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA 16
2.2 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE DEMONSTRAÇÕES VISUAIS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA 17
2.2.1 Teorema de Pitágoras I 17
2.2.2 Teorema de Pitágoras II 19
2.2.3 Quadrados Concêntricos 21
2.2.4 Todo Cubo Perfeito pode ser escrito como a soma de Ímpares consecutivos 25
2.2.5 A soma dos Cubos é o Quadrado da soma 27
2.2.6 Os gráficos de f e f^{-1} são reflexões sobre a linha $y = x$ 28
3 CONSIDERAÇÕES FINAIS 33
REFERÊNCIAS 35

1 INTRODUÇÃO

No decorrer da experiência de um estudante de um curso de licenciatura estuda-se o uso de materiais didáticos, físicos e virtuais, para o ensino da matemática, em específico as demonstrações visuais. A partir dessa experiência questiona-se o potencial das demonstrações visuais para o ensino. Uma demonstração não visual neste trabalho é entendida pela definição de Blackburn (1997) como um argumento dedutivamente válido que parte de premissas verdadeiras que implicam a conclusão.

Santos (2014), após a realização de um estudo epistemológico da visualização matemática, definiu que *visualizar* é ser capaz de formular imagens mentais e esta capacidade está no início de todo processo de abstração, e permite "ver" mais padrões do que objetos. Essa capacidade é perceptível quando se explora uma demonstração visual, ou seja, uma demonstração descrita por meio de imagens, figuras, esquemas etc.

Pressupõe-se neste trabalho que a demonstração visual por sua simplicidade tem um grande potencial para o ensino de matemática, pela objetividade com que apresenta as informações sobre a demonstração matemática.

Esta pesquisa teve como proposito investigar o papel de demonstrações visuais, como recurso didático para o ensino da matemática no Ensino Fundamental e Ensino Médio. Para tanto foram escolhidos teoremas e resultados pertinentes a esses níveis de ensino e estudadas demonstrações visuais destes resultados existentes na literatura. Este estudo permitiu uma compreensão do papel das demonstrações no entendimento da matemática, de modo especial, de seus métodos de prova.

O texto deste estudo começa com uma rápida explanação de proficiência matemática e das características das representações visuais que possuem potencial para oportunizar aos estudantes o desenvolvimento dessa proficiência. São apresentadas as definições e critérios estabelecidos por professores pesquisadores de ilustrações e outras representações visuais que podem oferecer uma melhora no desenvolvimento da maturidade matemática aos estudantes.
Uma pequena introdução sobre como as demonstrações visuais foram utilizadas no decorrer da história da matemática é seguida da parte central deste estudo, a apresentação e discussão de seis demonstrações visuais para o ensino de matemática. As demonstrações visuais exibidas neste trabalho foram escolhidas de forma que pudessem exemplificar as diversas maneiras que essa ferramenta pedagógica pode se apresentar, cada uma acompanhada de uma sugestão de utilização em sala de aula.

2 DESENVOLVIMENTO

Professores e pesquisadores tem buscado produzir indicadores que revelam o perfil, habilidades e competências esperadas de estudantes ao longo de sua escolarização em matemática. O objetivo dessas escalas de proficiência de matemática é avaliar o grau que o aluno sabe, classificando-o em três patamares: insuficiente, suficiente e avançado. As escalas de proficiência têm sido desenvolvidas com o objetivo de traduzir medidas em diagnósticos qualitativos do desempenho escolar. Localmente, considerando cada sala de aula como um estudo de caso, a avaliação orienta o trabalho do professor com relação aos conhecimentos que seus alunos desenvolveram, apresentando os resultados em uma espécie de régua na qual os valores obtidos são ordenados e categorizados em intervalos ou faixas que indicam o grau de desenvolvimento dos conhecimentos para os alunos que alcançaram determinado nível de desempenho. Outro resultado esperado é que essa classificação contribua para ações voltadas à melhoria do sistema educacional, dentre elas, cursos de formação continuada e aperfeiçoamento para professores, quando essa escala de proficiência for usada em sistemas oficiais de avaliação.

Donovam e Bransford (2005) presidiram um comite de pesquisas da Academia Nacional de Ciências dos Estados Unidos cujo trabalho teve como um dos resultados o livro How Students Learn, no qual organizaram um conceito de proficiência matemática em cinco tópicos:

> 1. Compreensão Conceitual – Compreensão de conceitos, operações e relações matemáticas.
> 2. Fluência em Procedimentos – Habilidade em desenvolver procedimentos flexíveis, confiáveis, eficazes e apropriados.
> 3. Competência Estratégica – Habilidade em formular, representar e resolver problemas matemáticos.
> 4. Raciocínio Adaptativo – Capacidade para o pensamento lógico, reflexão, explanação, e justificação.
> 5. Disposição Produtiva – Inclinação habitual para ver que a matemática é sensível, útil, importante o bastante, e acompanhada de uma razoabilidade em sua diligência e eficácia.
>
> (p.218)

Os mesmos autores salientam, com base em seus estudos, que a maioria das pessoas que não gostam de matemática aprendeu, em sua experiência escolar, conceitos e procedimentos matemáticos desconectados de significado, o que lhes tirou a oportunidade de desenvolver uma proficiência matemática.

Com o intuito de melhorar essa realidade do ensino de matemática, e com um entendimento do que caracteriza a proficiência matemática, professores pesquisadores têm buscado diversas alternativas, entre elas o uso de representações visuais no ensino de matemática. Hanna e Sidoli (2007), professores pesquisadores da Universidade de Toronto, em seus estudos sobre a perspectiva filosófica da visualização e demonstração no ensino de matemática, perceberam que vem crescendo a aceitação da representação visual como complemento heurístico de uma demonstração ou prova matemática, que facilita a compreensão e eventualmente inspira a construção e prova do teorema, ou seja, para o ensino de matemática as representações visuais são uma ferramenta importante. Casselman (2000), professsor pesquisador da Universidade da Colúmbia Britânica no Canadá, há mais de uma década reforça que imagens são importantes para a compreensão, inclusive quando são apenas internalizadas, eventualmente são peças fundamentais em demonstrações lógicas, e que transmitem informação com potencial para explanar uma prova completa. Janzen (2011), em sua tese de doutorado, apresenta a tecnologia computacional como forma de movimentar as imagens, o que remete o ensino de matemática à construção de significados, à concretude do pensamento, à realidade. Neste sentido, a visualização (que abrange a demonstração visual), como um dos modos de dar suporte a uma compreensão ampla da matemática, tem se mostrado um elemento importante de estudo para se pensar um ensino de matemática comprometido com a construção conceitual, não somente como uma instrumentalização algorítmica.

Presmeg (1999), em sua tese de doutorado, realizou uma pesquisa com estudantes que estavam cursando o último ano de escolarização (equivalente ao Ensino Médio do Brasil) na África do Sul, Estados Unidos e Suécia, e observou que há nos três países uma grande porcentagem de educandos que se utiliza de representações visuais para resolver problemas matemáticos, e chega a afirmar que alguns estudantes tem uma real necessidade de trabalhar visualmente. Com isso a autora indica que os estudantes já têm familiaridade com representações visuais diversas e por isso tal conhecimento é importante para o professor que procura adaptar sua metodologia de ensino às necessidades dos alunos.

Nessa mesma pesquisa, a autora identificou e classificou cinco tipos de representações visuais mais utilizadas pelos alunos:

- Concreta: imagens pictóricas, desenhos mentais;
- Imagens de orientação: inconcretas, relações puras representadas em um esquema espaço-visual;
- Imagens de fórmulas na memória: memória de uma “foto” da fórmula no quadro ou no caderno.
- Imagens cinestésicas: representações visuais originadas no movimento muscular, como com um desenho feito no ar com os dedos;
- Imagens dinâmicas: Imagens que se movimentam.
(PRESMEG, 1999, p.20)

Pensando no uso de representações visuais em sala de aula, Presmeg (1999) elenca características que podem facilitar o pensamento visual. Entre elas destaca: um ambiente de sala de aula controlado, mas sem pressões; o uso de representações visuais realizadas pelo professor, mesmo que por meio de gestos; o uso de representações visuais pelos estudantes, que devem ser encorajados a criar suas próprias imagens e figuras em movimento; o uso de componentes móveis, como partes do corpo, e de modelos manipulativos; o uso de cores. Também um ambiente de ensino sem barreiras metodológicas, nos quais o professor recorre à intuição dos estudantes, usa métodos de busca de padrões, usa deliberadamente conflitos cognitivos, mostra e aceita métodos alternativos.

Sem se contrapor ao uso de representações visuais no ensino de matemática, essa mesma autora aponta algumas restrições potenciais dessa ferramenta, como por exemplo, uma única imagem pode conter detalhes irrelevantes ou introduzir detalhes falsos; uma imagem padrão de uma figura pode induzir a um pensamento pouco flexível que não reconhece os mesmos conceitos em figuras não padrão, ou seja, pelo fato de cada representação visual se tratar de um caso concreto, os estudantes podem ter dificuldade em realizar generalizações. Outro problema potencial se dá quando representações visuais não estão associadas a um processo de pensamento analítico rigoroso o que habitualmente tem pouca efetividade no ensino.

Diante do exposto se faz necessário estabelecer critérios que auxiliem na escolha de imagens adequadas ao ensino de matemática. Casselman (2000) sugere alguns que deveriam ser levados em consideração na criação do que ele mesmo chama de uma boa ilustração matemática:

- Reduzir a amplitude visual e – quando não significar a mesma coisa – eliminar distrações. Colocar na imagem somente o que ela necessita para chegar ao objetivo. Adicionar apenas componentes que evidenciam o contexto, pois não se trata de uma imagem decorativa, mas de uma demonstração
- Evidenciar componentes centrais à discussão corrente. Se necessário, repita o diagrama diversas vezes, mas enfatizando diferentes componentes em cada representação, como mostrado no segundo exemplo de demontração visual do Teorema de Pitágoras apresentado a seguir neste trabalho;
- A imagem por si só conta uma história. Coordenar ilustrações e texto exige extrema habilidade, o ideal seria criar os dois da forma mais independente possível;

- Na criação de uma imagem é importante pensar além do que se desejaria de um discurso falado. As imagens devem seguir uma narrativa, mesmo que isso exija repetir uma figura muitas vezes, como mostrado no primeiro exemplo de demontração visual do Teorema de Pitágoras apresentado a seguir neste trabalho;
- Constantemente deve-se refletir sobre se a imagem realmente converge para o ponto que deveria. Se necessário ela pode ser refeita, figuras podem ser redesenhadas, assim como textos podem ser reescritos até estarem corretos.
- Usar a imaginação. As vezes pequenas e sutis mudanças causarão grandes impactos. A prática ajudará.
- Nem sempre depender exclusivamente de figuras para chegar a um objetivo. Interpretações pessoais de figuras variam imprevisivelmente, é interessante testar a figura com mais de uma pessoa para ter mais certeza de como ela pode ser interpretada.

Considerando a definição de proficiência matemática de Donovam e Bransford (2005) apresentada neste texto, e o que caracteriza representações visuais efetivas no ensino de matemática, foi discutido sobre o uso de demonstrações que se apoiam em representações visuais no ensino de matemática, doravante chamadas de demonstrações visuais, e apresentar exemplos que se espera que possibilitem o seu uso em aulas de matemática e revelem a importância e os riscos desta ferramenta no ensino de matemática.

2.1 DEMONSTRAÇÕES VISUAIS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Alsina e Nelsen (2006), pesquisadores da Universidade Politécnica da Catalunia e da Escola Superior Lewis & Clack respectivamente, afirmam que no decorrer da história da matemática, imagens foram sendo introduzidas em textos matemáticos com os objetivos de substituir longas descrições e facilitar o raciocínio mental baseado na intuição gráfica. Entretanto, no príncipio essas imagens eram meras ilustrações referentes ao texto e poucos documentos continham imagens que permitiam a vizualização direta de propriedades matemáticas. Um exemplo apresentado por esses autores é um documento japonês (Figura 1) que mostra a divisão de um círculo e a maneira de construir uma figura similar a um retângulo com o objetivo de obter a fórmula da área do círculo em função do raio da mesma.

Figura 1: Documento japonês com um exemplo de demonstração visual
Fonte: Alsina e Nelsen (2006, p.119).

No decorrer da história, demonstrações visuais e representações visuais têm ganhando mais espaço a partir da introdução de novos estilos de representações criados por artistas e matemáticos, do desenvolvimento de novos ramos da geometria, como a geometria descritiva, da invenção da imprensa que possibilitou a reprodução e distribuição em larga escala, e das tecnologias computacionais que proporcionam novos níveis de interação.

2.2 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE DEMONSTRAÇÕES VISUAIS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Na seleção das demonstrações visuais a serem analisadas levou-se em consideração as afirmações de Hanna e Jahnke (2004, apud Alsina e Nelsen) que dizem que uma demonstração para o ensino deve ajudar na compreensão do porque das afirmações serem verdadeiras. Neste sentido, o objetivo da demonstração será explicitar relações subjacentes que colocam as suas afirmações em um contexto matemático mais amplo. Entretanto, ao se utilizar uma demonstração para o ensino na sala de aula, é necessário levar em consideração o conhecimento matemático limitado dos estudantes e fazer uso das propriedades dos objetos mais conhecidos por eles.

2.2.1 TEOREMA DE PITÁGORAS I

Eves (2011) afirma que a demonstração do teorema de Pitágoras (Figura 2) atribuída a Bhaskara Acharya (1114-1185) apresenta duas figuras acompanhadas tão somente da palavra “Veja!”.

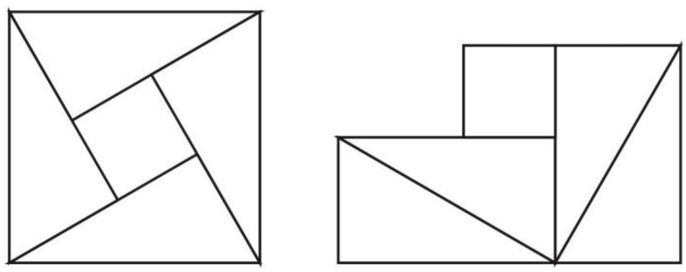


Figura 2: Demonstração do teorema de Pitágoras por Bhaskara

Com a intensão de tornar essa demonstração de Bhaskara mais didática para ser usada com alunos do Ensino Fundamental e também do Ensino Médio, criou-se uma sequência maior de imagens. O objetivo foi dar uma dinâmica a essa demonstração que conduza o aluno a percepção de elementos importantes da demonstração visual e que poderiam passar despercebidos ao olhar imaturo dos alunos. Por exemplo, uma possível dificuldade dos estudantes pode ocorrer na visualização das relações de medida que são apresentadas explicitamente nos quadros seis e sete da Figura 3, justamente para que superem essa dificuldade. O uso das cores também tem esse objetivo, auxiliar a visualização do movimento e das medidas relevantes à demonstração. Em suma, foi feita uma adaptação que leva em consideração o conhecimento limitado dos estudantes.

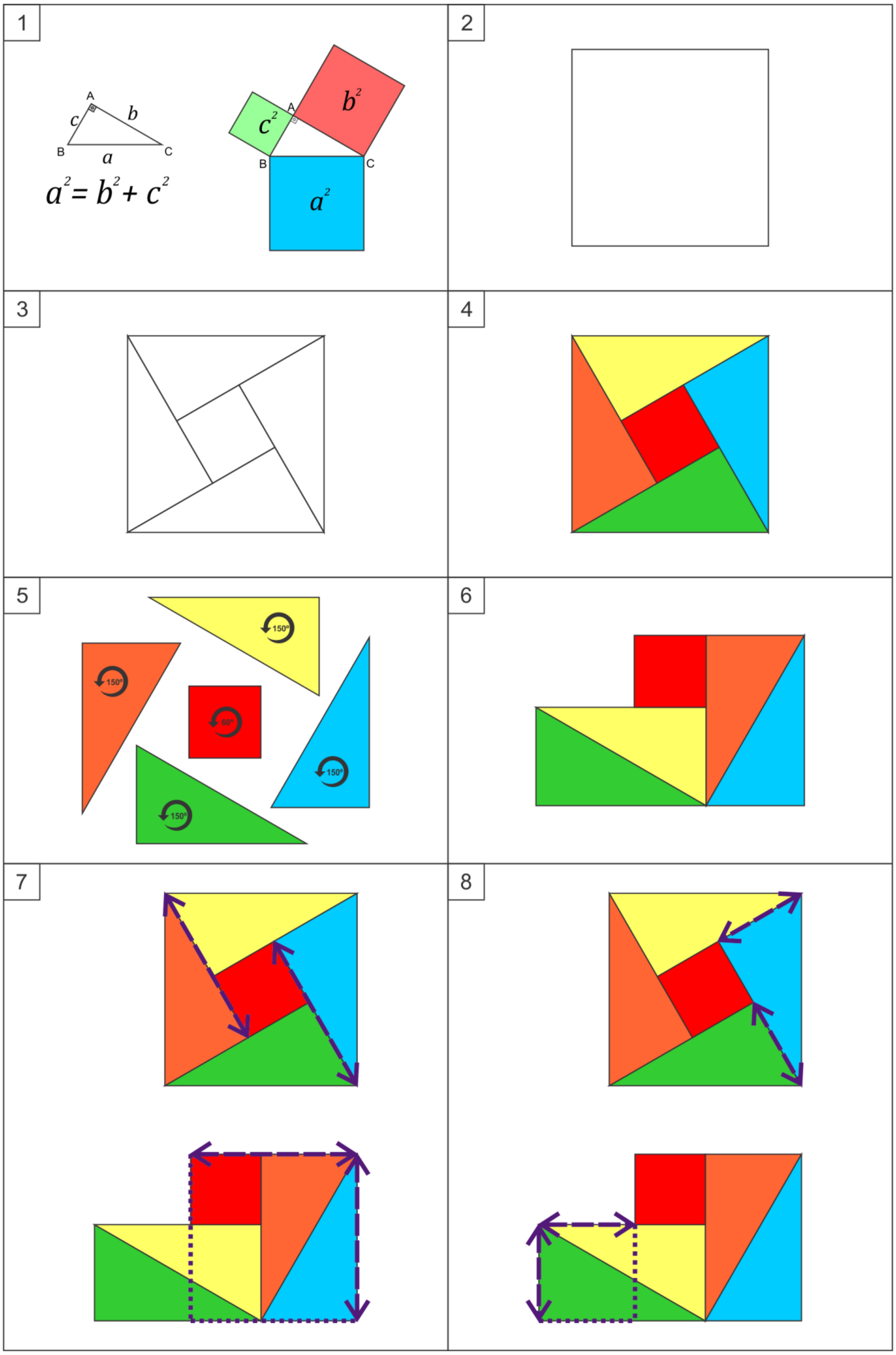


Figura 3: Demonstração do teorema de Pitágoras por Bhaskara passo a passo

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) estabelecem o ensino do Teorema de Pitágoras no terceiro ciclo do Ensino Fundamental, ou seja, a partir do 8º ano do Ensino Fundamental. Pensando nos estudantes dessa etapa de ensino, é sugerido ao professor que, após a introdução da nomenclatura dos lados e das principais características de um triângulo retângulo, e também da fórmula do teorema associada às áreas dos quadrados construídos sobre seus lados (quadro um da Figura 3) explore a sequência de imagens dos quadros dois a oito da Figura 3.

O desafio aos estudantes seria após a observação das imagens a escrita de um texto que explique a demonstração da fórmula do teorema de Pitágoras baseado nas figuras da demonstração visual[1].

Outro encaminhamento poderia ser entregar aos estudantes um quadrado conforme se vê no quadro dois da Figura 3 e pedir-lhes que após recortar a figura, reproduzam a demonstração registrando por escrito as etapas da demonstração visual e as conclusões que levam à fórmula do teorema.

2.2.2 TEOREMA DE PITÁGORAS II

Outra demonstração do teorema de Pitágoras que se apresenta (Figura 4) se baseia na demonstração de Euclides (330 a.C.). Lembramos que a demonstração de Euclides se baseia na relação entre as áreas de paralelogramos que possuem a mesma base e a mesma altura. Esse conhecimento é uma exigência para que o aluno compreenda a demonstração visual.

Nesta sequência de imagens tentou-se dar uma dinâmica a essa demonstração visual, mostrando etapas intermediárias da transformação das figuras. Novamente com o objetivo de aguçar a percepção dos alunos, neste caso para a transformação do quadrado em paralelogramo, mantendo-se a mesma base e a mesma altura.

Essa sequência de imagens da Figura 4 também foi desenvolvida num software de geometria dinâmica, o GeoGebra[2]. Com o uso dessa ferramenta a dinâmica torna-se real aos

---

[1] Indicamos a escrita de textos na aula de matemática por concordar com pesquisadores como Kátia Stocco Smole quando afirmam que: “A produção de textos nas aulas de matemática cumpre um papel importante para a aprendizagem do aluno e favorece a avaliação dessa aprendizagem em processo. Organizar o trabalho em matemática de modo a garantir a aproximação dessa área do conhecimento e da língua materna, além de ser uma proposta interdisciplinar, favorece a valorização de diferentes habilidades que compõem a realidade complexa de qualquer sala de aula.” (SMOLE e DINIZ, 2001, p.29)

[2] Uma cópia do arquivo com a demonstração pode ser visualizada e baixada no link http://ggbtu.be/m1968939.

olhos do estudante, sendo possivelmente mais eficiente que a demonstração descrita por etapas estáticas (Figura 4).

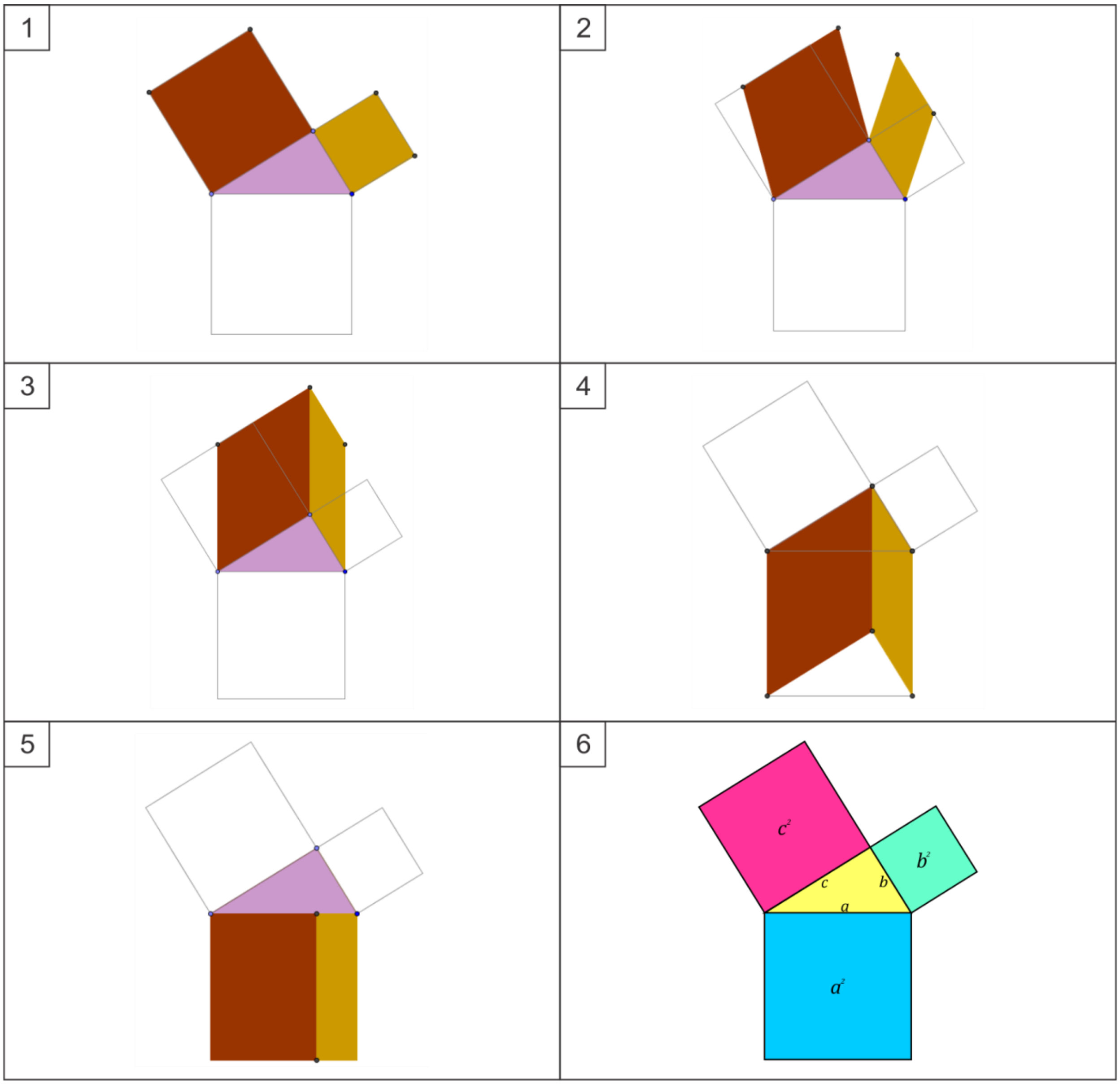
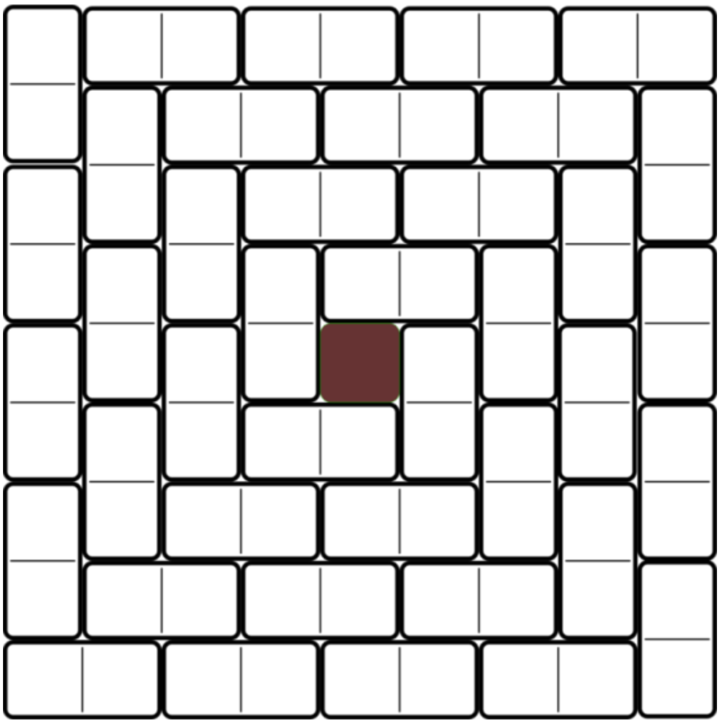


Figura 4: Demonstração visual do teorema de Pitágoras baseada na demonstração de Euclides

Como já foi colocado anteriormente esse conteúdo deve ser explorado, segundo os PCN, a partir do terceiro ciclo do Ensino Fundamental. Novamente pensando em um estudante dessa etapa sugere-se ao professor que, após a introdução da nomenclatura dos lados e das principais características de um triângulo retângulo e da exploração da relação entre paralelogramos que possuem a mesma base e mesma altura e por consequência são figuras equivalentes apresente ao estudante a sequência de imagens da Figura 4. Após uma observação inicial solicitar que os estudantes registrem em um texto as transformações sofridas pelos quadrados que estão desenhados sobre os catetos, explicitando em que polígono que os quadrados se transformam com o movimento e qual a relação entre as suas áreas. Depois, os estudantes devem ser convidados a conjecturarem sobre a relação entre as áreas dos três quadrados desenhados sobre os lados do triângulo retângulo, chegando assim a fórmula geral do teorema de Pitágoras. Finalizariam com a comparação entre as áreas dos quadrados iniciais sobre os catetos com o quadrado final, justificando tudo de acordo com as definições e conceitos matemáticos que já conheçam. Após isso uma formalização do assunto pelo professor tem grandes chances de não ser enfadonha nem desprovida de sentido, pois essa demonstração visual, mesmo contendo poucos elementos, possui um grande potencial de deixar claro para os estudantes o significado do teorema.

2.2.3 QUADRADOS CONCÊNTRICOS

O exemplo dos quadrados concêntricos (Figura 5) de autoria de Shirley A. Wakin (apud NELSEN, 1993, p.107), professora de matemática na Fairfield University, é a demonstração visual de uma relação entre números naturais. Conecta conceitos de geometria com conceitos da aritmética de forma simples utilizando apenas de elementos conhecidos pelos estudantes. Nesta demonstração visual inseriu-se a cor como elemento facilitador da compreensão pelos estudantes (Figura 6), nela se utiliza cores para explicitar os quadrados concêntricos que formam a figura. A interpretação desta figura geométrica em notação aritmética é uma atividade que pode ser realizada tanto por estudantes do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio, inclusive como introdução ao uso de demonstrações visuais.



$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} 4k = (2n+1)^2$$

Figura 5: Quadrados concêntricos
Fonte: Adaptado de Nelsen (1993, p.107).

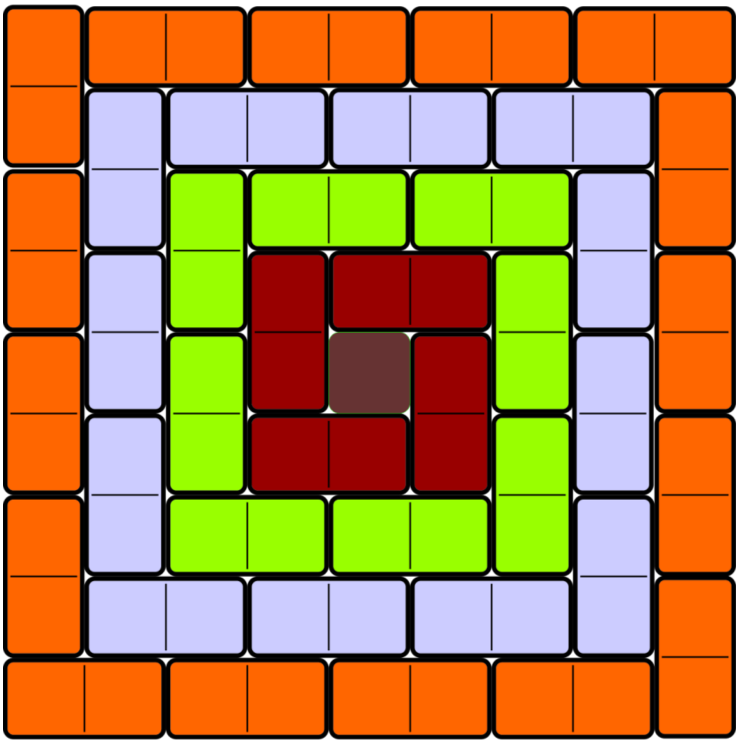


Figura 6: Quadrados concêntricos destacados

Pensando em um estudante do Ensino Médio sugere-se ao professor que essa demonstração seja explorada juntamente com o conteúdo Sequências Numérica ou ainda no desenvolvimento do estudo de binômios de Newton, uma vez que esses assuntos exploram a soma de números escrita por meio de fórmulas.

Após uma observação inicial da Figura 5, solicitará que os estudantes construam os quadrados concêntricos com peças de dominó[3] deixando o centro vazio seguindo o esquema apresentado na Figura 7 e registrem em um texto suas percepções sobre a construção. A Figura 8 ilustra como ficariam quatro quadrados concêntricos construídos com peças de dominó.

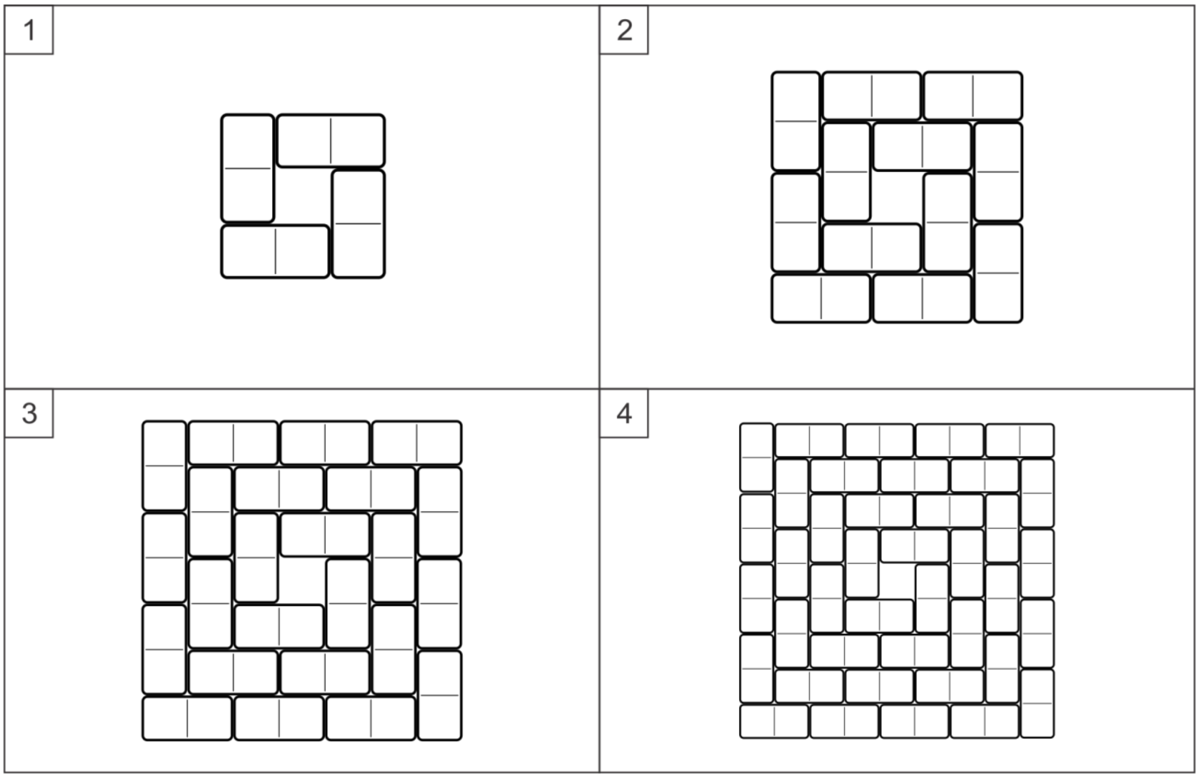


Figura 7: Esquema de montagem dos quadrados concêntricos da demonstração visual

[3] Muitos autores, como Sérgio Lorenzato, ressaltam a importância do apoio visual-tátil como facilitador para a aprendizagem. Eles concordam que as experiências do mundo real constituem um caminho para se construir um raciocínio. Reconhecem assim que a ação reflexiva do individuo sobre o objeto é básica para a aprendizagem. (LORENZATO, 2009)

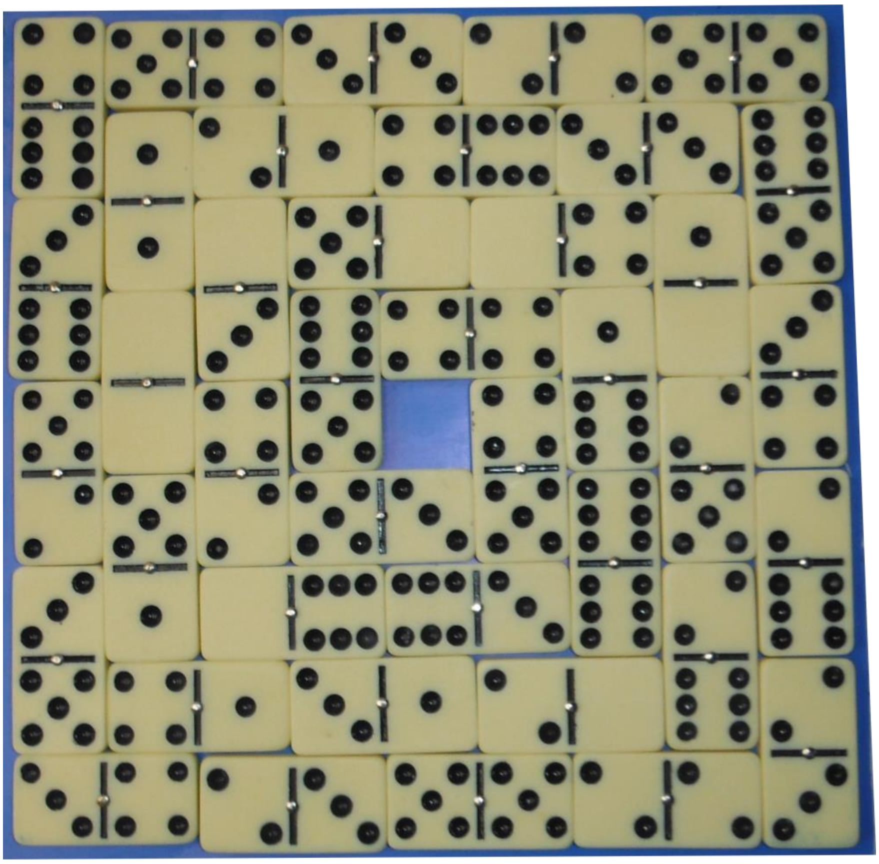


Figura 8: Quatro quadrados concêntricos construídos com peças de dominó.

Espera-se que por visualização o estudante seja capaz de perceber que o polígono central é um quadrado (Figura 5), cuja medida do lado é a metade da medida do lado maior de um dominó.

Na sequência tem-se que comunicar aos estudantes que o quadrado central é entendido como unidade, assim cada dominó tem duas unidades de área.

Essa demonstração visual explicita uma regra, ou fórmula, que relaciona a área de cada quadrado concêntrico formado por dominós com a área total da figura calculada em função da quantidade de dominós do lado do quadrado concêntrico maior. Sugere-se ao professor que com o apoio da visualização da figura 7 explicite cada uma das somas, deixando para o aluno a escrita da soma para a figura do quarto quadro.

Quadro 1: $1 + 4.2 = 9 = 3^2$

Quadro 2: $1 + 4.2 + 8.2 = 25 = 5^2$

Quadro 3: $1 + 4.2 + 8.2 + 12.2 = 49 = 7^2$

Entretanto, uma possível confusão é considerar a área da figura como sendo a área do quadrado concêntrico maior, ou seja, apenas os dominós que o delimitam, ignorando as peças em seu interior, o que entra em contradição com o conceito de área. A conclusão que se pretende chegar é que todo número ímpar maior ou igual a três, ao quadrado, é igual a soma da unidade com o dobro dos múltiplos de quatro, ou seja, $1 + 2\sum_{k=1}^{n} 4k = (2n+1)^2$. Essa expressão para a Figura 6, na qual n = 4 seria

$$1 + (2 \cdot 4) + (2 \cdot 8) + (2 \cdot 12) + (2 \cdot 16) = 9^2.$$

2.2.4 TODO CUBO PERFEITO PODE SER ESCRITO COMO A SOMA DE ÍMPARES CONSECUTIVOS

Nelsen (1993), professor de matemática na Escola Superior Lewis & Clark, também apresenta uma demonstração visual de uma relação entre números naturais. Ela se organiza em três imagens (Figura 9) que mostram que todo número natural n elevado ao cubo é igual à soma dos n primeiros números ímpares consecutivos. Essa demonstração explora o cálculo do volume de um cubo em função da medida da sua aresta e a área de um retângulo em função das medidas dos seus lados. Como esses conteúdos são pertinentes ao Ensino Fundamental e Ensino Médio justifica-se a sugestão do uso nessas etapas de ensino.

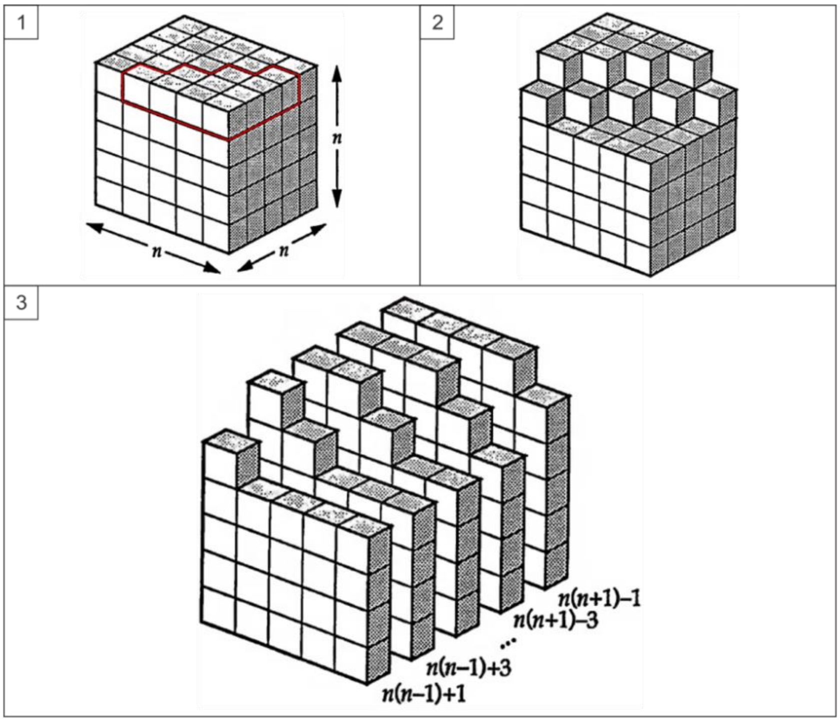


Figura 9: Demonstração visual – Todo cubo é a soma de ímpares consecutivos
Fonte: Adaptado de Nelsen (1993, p.110).

Nessa demonstração visual um número elevado à terceira potência é representado por um cubo de aresta n, no qual se considera o cubo menor como unidade. Sugere-se ao professor que os estudantes construam essa demonstração em sala de aula. Para realizá-la eles necessitarão de uma quantidade de cubos menores. Os estudantes podem construir esse material ou usar o material dourado para realizá-la, o que permitiria testar a afirmação para mais de um valor de n $(n \geq 2)$. Após a verificação pela demonstração visual, a atividade proposta aos estudantes seria formalizar por escrito a fórmula geral desta afirmação, que pode ser encontrada a partir de uma generalização como a do exemplo a seguir:

$$1^3 = 1$$
$$2^3 = 3 + 5$$
$$3^3 = 7 + 9 + 11$$
$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$n^3 = [n(n-1) + 1] + \cdots + [n(n+1) - 1]$$

Manipulando os cubos é fácil compreender a demonstração visual, entretanto é possível que os estudantes sintam dificuldade de explicitá-la algebricamente em função de n, visto que tal fórmula não tem um formato que seja usual em sala de aula. Contudo esse exemplo não deixa de ser uma boa atividade para o uso de demonstração visual no desenvolvimento da fluência em procedimentos, competência estratégica e raciocínio adaptativo.

2.2.5 A SOMA DOS CUBOS É O QUADRADO DA SOMA

Esta demonstração visual idealizada por J. Barry Love (apud NELSEN, 1993, p.85) pode ser utilizada no ensino de potenciação no terceiro ciclo do Ensino Fundamental, conforme indicação dos PCN, e também em uma revisão dessa operação nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

No exemplo anterior, em que vimos que todo cubo é igual à soma de números ímpares consecutivos, os números cúbicos eram representados por poliedros. Agora, nesta demonstração visual, o diferencial está em representar números cúbicos por figuras planas (Figura 10).

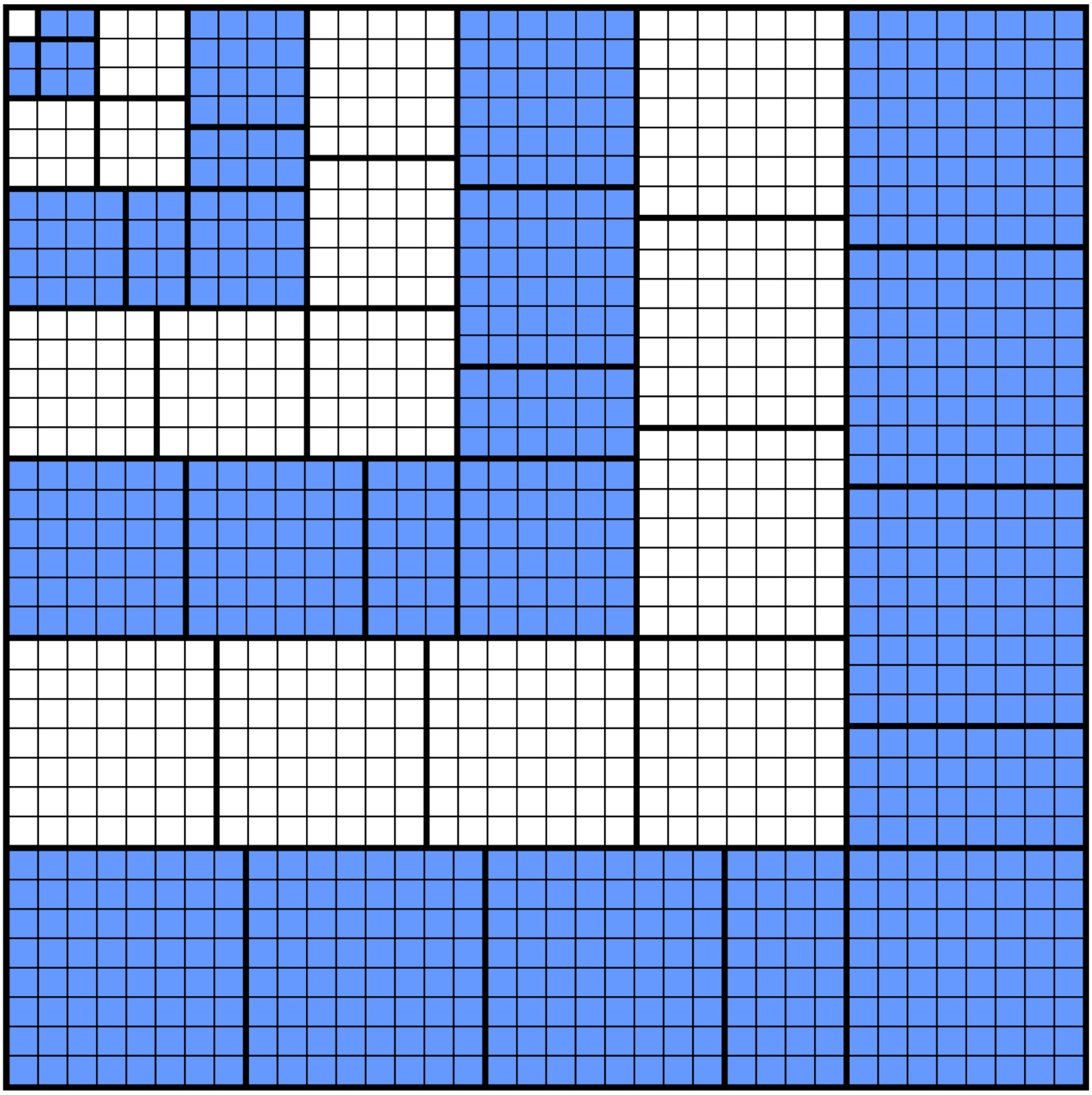


Figura 10: Demonstração visual – A soma dos cubos é o quadrado da soma
Fonte: adaptado de Nelsen (1993, p.85).

Sugere-se como primeira atividade com essa demonstração visual a verificação e compreensão dessa forma de representação, em que o estudante terá que relacionar a definição de potenciação com as faixas coloridas que representam cada número cúbico. Após isso, é simples visualizar que cada número cúbico somado com os números cúbicos antecessores formam um número quadrado cuja base é a soma das bases de cada potência cúbica. Se continuássemos a construção da figura, acrescentando os cubos sucessores, ainda se formaria um quadrado seguindo a regra.

Ao fim, os estudantes devem ser convidados a transcrever o significado da demonstração em linguagem matemática, como por exemplo:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

Na construção da figura, devido aos espaços que ajudam na visualização dos números quadrados, nem todos os quadrados que representam a unidade foram construídos com as mesmas medidas. Entretanto, como a diferença das medidas é muito inferior a um milímetro, visualmente não é perceptível. Tais espaços servem apenas para ajudar na visualização e não tem nenhum efeito no cálculo. Outra particularidade que auxilia na visualização são as cores que diferenciam, nesse caso, as potências de base par das potências de base ímpar.

2.2.6 OS GRÁFICOS DE f e f^{-1} SÃO REFLEXÕES SOBRE A LINHA $y = x$

Por sua relevância na vida prática e em outras áreas de conhecimento, a interpretação e compreensão das propriedades e características de uma função a partir de seu gráfico é uma habilidade que os PCN do Ensino Médio indicam que os estudantes devem adquirir em sala de aula. Considerando a disponibilidade de programas de computador e dispositivos eletrônicos portáteis, a criação e manipulação do gráfico de uma função podem ser facilitadas, e assim o próprio gráfico possuirá um grande potencial como ferramenta visual no ensino de funções.

Ayoub B. Ayoub (apud NELSEN, 1993, p.43), professor de matemática na Pennsylvania State University, elaborou a demonstração visual (Figura 11) de que o gráfico de uma função inversa é reflexão do gráfico da função, em que o eixo de reflexão é a função identidade $y = x$.

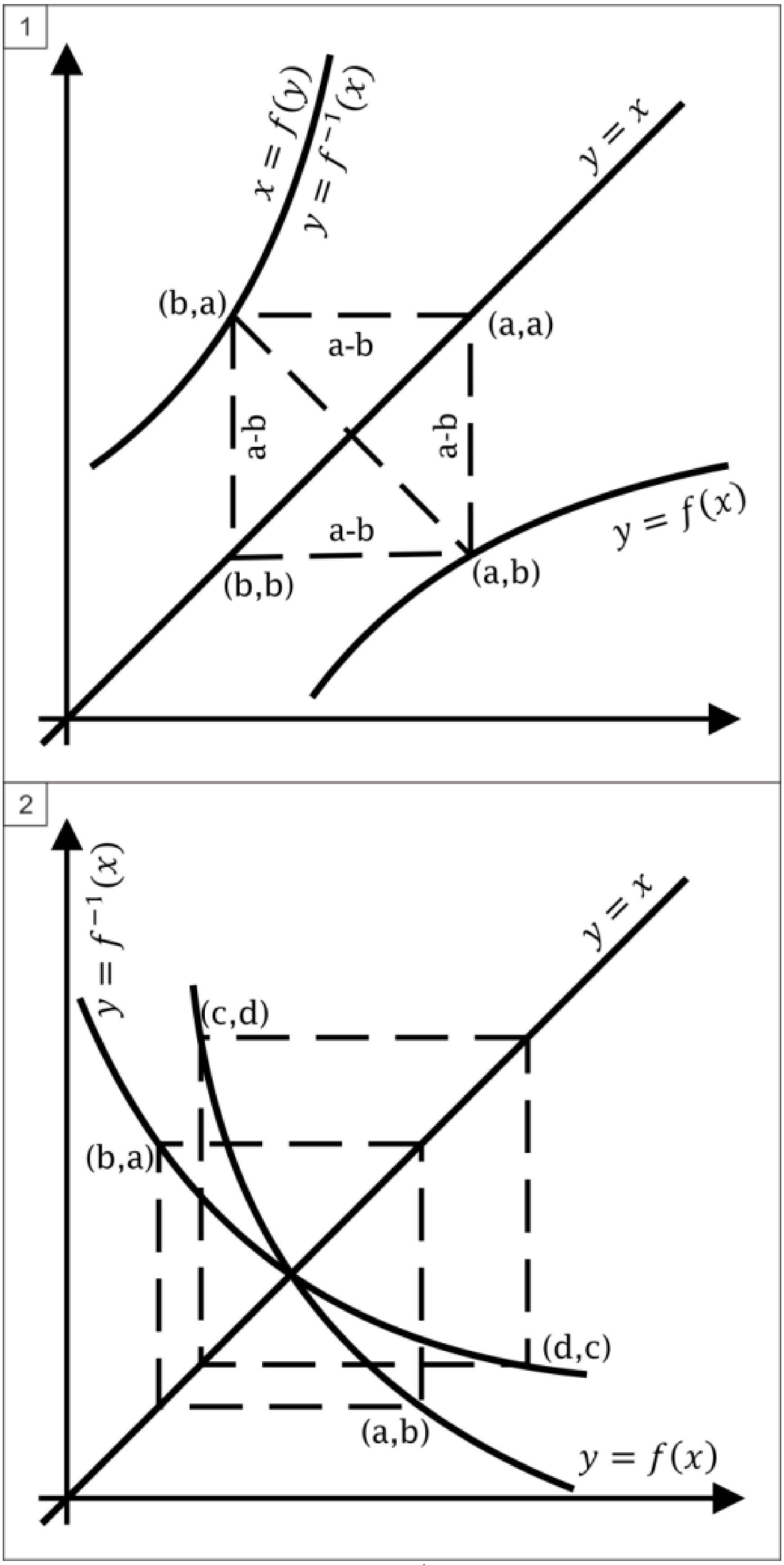


Figura 11: Demonstração Visual - f e f^{-1} são reflexões sobre $y = x$
Fonte: adaptado de Nelsen (1993, p.43).

Esta demonstração visual baseia-se na escolha de um ponto (a, b) do gráfico de f e do ponto (b, a) correspondente em f^{-1}, em seguida toma-se outros dois pontos no plano, um com ambas as coordenadas iguais à abscissa do ponto (a, b) e outro com coordenadas iguais a ordenada do ponto (a, b). Estes últimos dois pontos pertencem à reta $y = x$. O quadro um da Figura 11 mostra como verificar as distâncias entre esses pontos dois a dois em relação as suas abcissas ou ordenadas. E ainda, analisando as coordenadas dos pontos, os seguimentos que marcam a distância entre eles, são paralelos a algum dos eixos do plano cartesiano. Assim, se verifica que os quatro pontos são vértices de um quadrado, com a reta $y = x$ passando por uma de suas diagonais. Portanto os pontos (a, b) e (b, a) estão a uma mesma distância de $y = x$.

Essa propriedade do gráfico de uma função e sua inversa já é ensinada junto com os demais conteúdos sobre funções que são ministrados, usualmente, no primeiro ano do Ensino Médio. Sugere-se como atividade para os estudantes a verificação dessa propriedade por etapas, usando o software de geometria dinâmica GeoGebra (Figura 12).

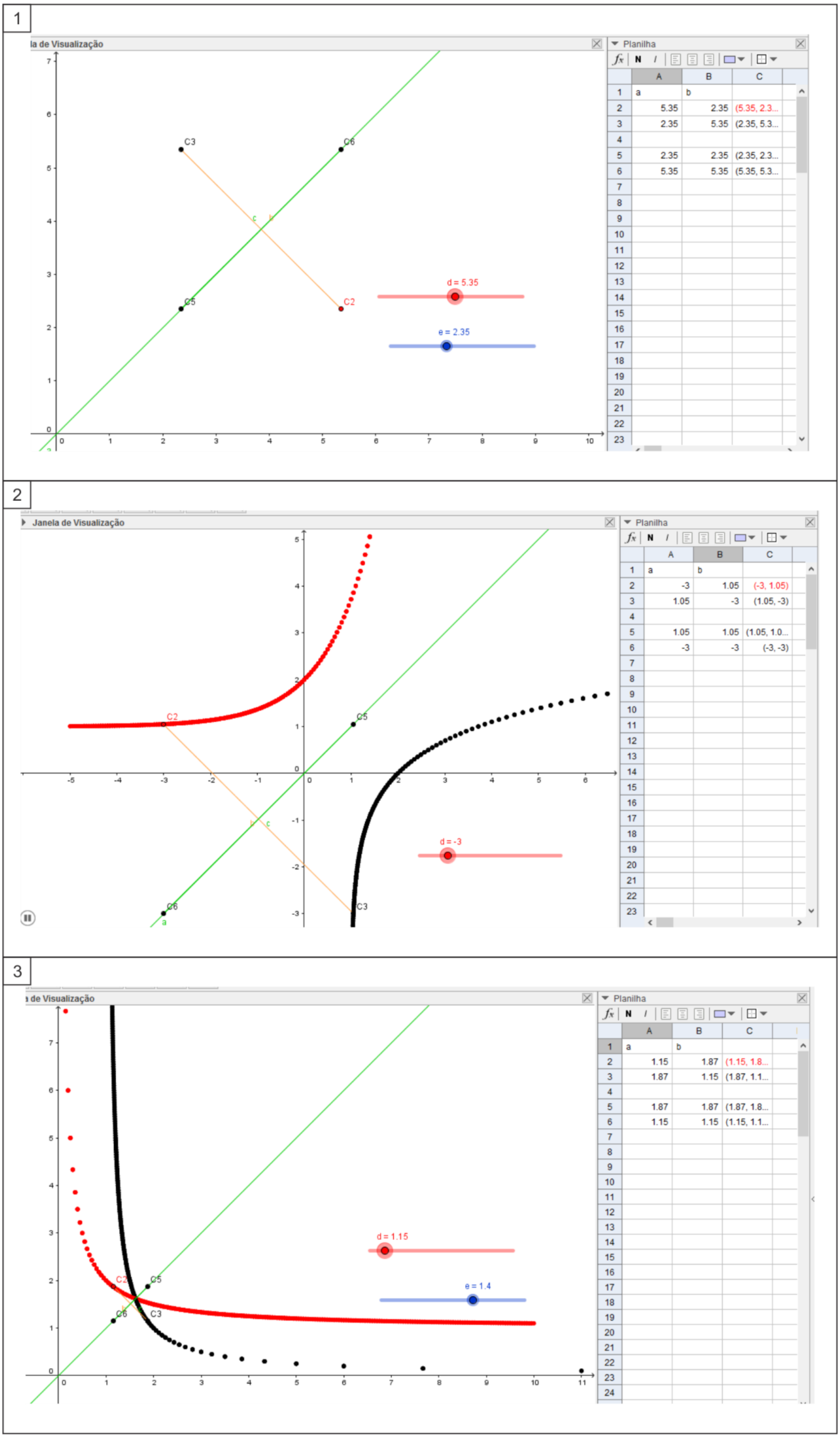


Figura 12 – Gráficos da atividade sugerida

O quadro um da Figura 12 ilustra a primeira parte da atividade, quando o estudante construirá, pela planilha, um ponto com coordenadas vinculadas a dois controles deslizantes, um ponto com coordenadas vinculadas a esses mesmos controles deslizantes, mas com posições trocadas, um ponto com coordenadas iguais a abscissa do primeiro ponto, e um com coordenadas iguais a ordenada do primeiro ponto. Será construído em seguida um segmento de reta que liga os dois primeiros pontos e uma reta que passa pelos outros dois pontos. A parte final dessa etapa da atividade será verificar o movimento dos pontos conforme se move os controles deslizantes e registrar por escrito quais propriedades entre os pontos não se alteram com o movimento.

A segunda etapa, ilustrada no quadro dois da Figura 12, consistirá na alteração da ordenada do primeiro ponto para uma função exponencial, por exemplo, $f(x) = e^x + 1$. Novamente o estudante movimentará a figura com controles deslizantes e registrará por escrito as propriedades que permanecem inalteradas apesar do movimento dos pontos. Na etapa seguinte, ilustrada no quadro 3 da Figura 12, novamente o estudante alterará a ordenada do primeiro ponto para uma função como $f(x) = \frac{1}{x} + 1$, por exemplo, e registrará as propriedades que permanecem quando movimentados os pontos.

Após a análise desses exemplos é sugerido que o professor apresente aos estudantes a demonstração visual da Figura 11 para uma verificação e elaboração de uma explanação por escrito da demonstração visual. A partir desse ponto, quando do estudo de funções quadráticas, é sugerido que os estudantes tenham por atividade criar suas próprias demonstrações visuais do fato de que o gráfico da parábola é uma reflexão sobre um eixo que passa por seu vértice e é paralelo ao eixo y, e deduzir a fórmula do cálculo das coordenadas do vértice da parábola.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foram apresentadas neste trabalho demonstrações visuais idealizadas por pesquisadores desde séculos antes de Cristo até início dos anos 90, e são apenas alguns exemplos do material já existente sobre esse assunto. Os autores aqui referenciados são alguns dentre os muitos pesquisadores que apoiam o uso de representações visuais no ensino de matemática. Essa é uma tendência de ensino com elementos de estudo suficientes para ser explorada e desenvolvida em escolas de Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Com o objetivo de mostrar o potencial das demonstrações visuais no ensino de matemática todos os exemplos deste documento foram adaptados para melhorar o aproveitamento na sala de aula, utilizando de repetições e cores não presentes nas demonstrações originais, etapas intermediárias para auxílio dos estudantes que ainda não possuem uma grande maturidade matemática, e dinamização de imagens estáticas. Essa dinamização, realizada no software livre de geometria dinâmica GeoGebra, foi um dos desafios desse trabalho, visto que foi necessário um estudo específico para se aprender as funcionalidades e formas de uso desse programa. Infelizmente, no documento em papel não é possível se visualizar o movimento das figuras dinâmicas, entretanto, a comunidade de desenvolvedores do GeoGebra criou uma plataforma virtual de compartilhamento na internet, aos interessados basta acessar os links que se encontram nas notas de rodapé das páginas das demonstrações.

As demonstrações visuais selecionadas para este trabalham visam expor as diversas maneiras que essa ferramenta pode se apresentar, como imagens estáticas, dinâmicas ou objetos manipuláveis. As propostas de atividades são sugestões, exemplos elaborados de acordo com a vivência no curso de licenciatura em matemática de como as demonstrações visuais podem ser empregadas em sala de aula. Isso tudo mostra a versatilidade dessa ferramenta que fica limitada apenas à imaginação do professor.

Para aqueles que se deparam com demonstrações visuais pela primeira vez através desse trabalho, espera-se que não compreendam esse assunto como sendo “a maneira certa de ensinar”, ou como um fim em si, mas como uma ferramenta a mais para a melhoria do ensino, como um facilitador do processo ensino-aprendizagem, como um meio para levar o estudante à uma maior maturidade matemática, sem desvalorizar nem ignorar nenhuma outra ferramenta já utilizada para esse mesmo fim.

Apesar do bom proveito desse instrumento, as demonstrações visuais para o ensino de matemática sofrem uma carência de pesquisas que usem essa ferramenta na prática. Foram vistos muitos autores que afirmam a capacidade dessa ferramenta, mas não mostram como usá-la. Felizmente essa não precisa ser uma área de conhecimento restrita a laboratórios e bibliotecas, mas pode ser desenvolvida pelo professor-pesquisador na sala de aula.

Essa é a primeira sugestão que deixamos para futuros trabalhos, a aplicação dessa ferramenta em sala de aula com uma posterior análise dos efeitos e defeitos. Pensando também na aplicação, outro encaminhamento seria a idealização ou adaptação de demonstrações visuais em softwares de geometria dinâmica, unindo essas duas ferramentas e somando suas potencialidades de deixar explícitos conceitos que são obscuros ao aluno quando apresentados apenas na forma textual.

REFERÊNCIAS

ALSINA, Claudi; NELSEN, Roger B. **Math made visual**: Creating images for understanding mathematics. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 2006.

BLACKBURN, Simon. **Dicionário oxford de filosofia**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1997.

BRASIL. **Parâmentros curriculares nacionais**: Terceiro e quarto ciclo do fundamental, matemática. Ministério da Educação: 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>

CASSELMAN, Bill. Pictures and Proofs. **Notices of AMS**, Providence, V. 47, n. 10, p.1257-1266, Nov. 2000. Disponível em:<http://www.ams.org/notices/200010/fea-casselman.pdf>. Acesso em: 07 jun. 2015.

DONOVAN, M.S.; BRANSFORD, John D. **How students learn:** History, mathematics, and scienci in the classroom. Washington, DC: The National Academies Press, 2005.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

HANNA, Gila; SIDOLI, Nathan. Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspective. **ZDM Mathematics Education**, n. 39, Jan. 2007. Disponível em: <http://individual.utoronto.ca/acephalous/Hanna_Sidoli_2007.pdf>. Acesso em: 11 mai. 2015.

JANZEN. Elen Andrea. **O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de geometria dinâmica**. Tese de doutorado (Doutorado em Educação), Universidade Federal do Paraná, Curitiba: 2011.

LEWIS, Clive S. **The discarded image**: An introduction to medieval and renaissance literature. London: Cambridge University Press, 1964.

LORENZATO, Sérgio. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professor**. 2. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

NELSEN, Roger B. **Proof whithout words:** exercises in visual thinking. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1993.

PRESMEG, Norma C. Las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas matemáticos. **Suma**, 32, nov. 1999, p.17-22. Disponível em: <http://revistasuma.es/revistas/32-noviembre-1999/las-posibilidades-y-peligros-del.html>. Acesso em: 4 Jun. 2015.

SANTOS, Alessandra H., **Um estudo epistemológico da visualização matemática**: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização. 2014. 98 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de pós-graduação em educação em ciências e em matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014. Disponível em: <http://www.ppgecm.ufpr.br/Disserta%C3%A7%C3%B5es/045_AlessandraHendidosSantos.pdf>. Acesso em : 9 jun. 2015.

SMOLE, Katia C. S.; DINIZ, Maria I. **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática**.** Porto Alegre: Artmed, 2001.