UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PRISCILA KNISS

O ENSINO DA TRIGONOMETRIA E A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA
2015

PRISCILA KNISS

O ENSINO DA TRIGONOMETRIA E A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do Curso de Licenciatura em Matemática – DAMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para obtenção de título de licenciada.

Orientadora: Profa. Dra. Angelita Minetto Araújo

CURITIBA

2015

AGRADECIMENTOS

De fato, estes agradecimentos não contemplam a todos que de alguma forma estiveram presente nesta fase da minha vida, contribuindo para a realização deste trabalho.

Quero agradecer a professora Angelita Minetto Araújo, pela grande e rica orientação neste ano, pela compreensão, conversas, dicas e também pelo esforço desprendido para concluirmos este trabalho em 2015.

Também agradeço a professora Edna Sakon Banin, pela grande contribuição neste ano, pelas conversas, pela troca de experiências, e por todo o apoio à pesquisa realizada, a qual possibilitará a aplicação das atividades propostas no ano de 2016.

A UTFPR, por disponibilizar os materiais de pesquisa, o espaço, também por promover a pesquisa na graduação. Em especial, ao corpo docente do DAMAT que me incentivou e colaborou com a minha pesquisa.

Aos meus pais, Alvino Kniss e Rosane Haak Kniss, que estiveram ao meu lado, ajudando, apoiando, orando por mim e sendo meus melhores amigos.

Ao meu noivo, Rodrigo Ferreira, e aos meus irmãos, Eliézer Kniss e Calebe Kniss, por todo o companheirismo e compreensão, além do carinho e da atenção.

E por fim, àquele que permitiu que TUDO isso acontecesse, agradeço e louvo ao Senhor Jesus Cristo, à Ele toda honra, glória e louvor.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo estudar como ocorre a transição das razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente, representadas no triângulo retângulo, para a representação no ciclo trigonométrico, e apresentar uma sequência de atividades sobre essa transição para alunos do ensino médio, via História da Matemática. Fundamentado na abordagem qualitativa, o trabalho é pautado na pesquisa bibliográfica. Para abordar tal questão são discutidas algumas das vantagens e desvantagens do uso da História da Matemática em sala de aula; a história da trigonometria no que concerne às razões trigonométricas seno, cosseno e tangente; são abordadas algumas pesquisas sobre o ensino de trigonometria e a História da Matemática; e como resultado da pesquisa, apresenta-se uma proposta de sequência de atividades sobre a transição das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente representadas no triângulo retângulo, para a representação no ciclo trigonométrico via História da Matemática.

Palavras-chave: Trigonometria. História da trigonometria. História da Matemática.

ABSTRACT

The present work has the main objective to study how the transitions trigonometric ratios occurs: sine, cosine and tangent, represented in the rectangle triangle, to represent the trigonometric cycle, and to introduce a sequence of activities about transition to students in the high school, through History of Mathematics. Founded in the qualitative approach, the study is based on bibliographical research. To address this issue are discussed some of the advantages and disadvantages of the use of the History of Mathematics in classroom; the history of trigonometry as regards the trigonometric ratios sine, cosine, tangent, there, are addressed some searches about the teaching of trigonometry and Maths History; and as a result of this research, we will present a proposal for a sequence of activities about the transition of the trigonometric ratios sine, cosine, tangent represented in the rectangle triangle, for the representation in the cycle trigonometric trough History of Mathematics.

Keys-words: Trigonometry. History of trigonometry. History of Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A trigonometria está presente nos currículos escolares como um conteúdo que deve ser abordado nas 3 (três) séries do ensino médio, especialmente na 1ª e/ou 2ª séries. Assim sendo, subentende-se, e se espera que o aluno ao ingressar na universidade domine alguns conceitos relativos à trigonometria. Tais conceitos considerados elementares sobre a trigonometria são: definição de seno, cosseno e tangente, razões trigonométricas no triângulo retângulo, razões trigonométricas em um triângulo qualquer, ciclo trigonométrico, correspondência entre graus e radianos, redução de arcos ao primeiro quadrante e funções trigonométricas. Porém, isso nem sempre ocorre.

Ao cursar a disciplina de Fundamentos II, na Licenciatura em Matemática, a autora se aprofundou em alguns conhecimentos sobre trigonometria. Só então percebeu que muito do que estava sendo trabalhado, não havia aprendido na escola, causando-lhe dificuldade em entender que existe seno, cosseno, tangente em ângulos maiores que 90º. Sendo assim, a transposição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico, não ocorreu de forma tão simples.

Curiosamente, ao assistir uma aula na graduação, a professora responsável pela disciplina de Tendências Contemporâneas para o Ensino de Matemática no primeiro semestre de 2015, comentou sobre a dificuldade de uma colega em entender as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, vistas até então no triângulo retângulo agora, no ciclo trigonométrico.

É possível que a dificuldade que essa pessoa sentiu e a experiência da autora ao ingressar na universidade, não sejam experiências particulares, mas que ocorre com muitos alunos ao estudar trigonometria na escola básica. Tal desconforto motivou a pesquisa e o estudo do tema com o intuito de sanar essa lacuna, para que a tomada de consciência não se dê apenas naqueles que, futuramente, talvez cursem uma Graduação em Ciências Exatas.

A pesquisa foi realizada com o intuito estudar como ocorre a transição das razões trigonométricas representadas no triângulo retângulo para a representação no ciclo trigonométrico, visando o ensino deste conteúdo.

Para abordar tal questão se adotou o viés da História da Matemática. Escolha esta motivada pela própria natureza desta metodologia de ensino, pois a História da Matemática apresenta o surgimento da própria Matemática, revela quais problemas originaram a construção de certos conteúdos matemáticos, e mostra que a Matemática não está pronta e acabada. Ao contrário, está em constante processo de construção.

Inicialmente são apresentados os objetivos e a metodologia usada nesta pesquisa para então, justificar a escolha pela utilização da História da Matemática em sala de aula, não apenas como um papel pedagógico, mas também como uma metodologia de ensino.

Em seguida é abordada a história da trigonometria com respeito às razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, precedendo à apresentação das pesquisas realizadas por Mendes (1997 e 2001), Nascimento (2005), Sampaio (2008) e Gomes (2011), sobre o ensino de trigonometria e a História da Matemática, no tocante às razões trigonométricas no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico.

E por fim, a apresentação de uma sequência de atividades sobre a transição das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, representadas no triângulo retângulo para a representação no ciclo trigonométrico via História da Matemática, como resultado do estudo.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Esta pesquisa tem como objetivo estudar como ocorre a transição das razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) representadas no triângulo retângulo para a representação no ciclo trigonométrico e apresentar uma sequência de atividades sobre essa transição para alunos do ensino médio, via História da Matemática.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudar como ocorre a transição da representação das razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) no triângulo retângulo para a representação dessas razões no ciclo trigonométrico.
- Estudar a história da trigonometria relativa ao seno, cosseno e tangente.
- Elaborar uma sequência de atividades para o ensino médio, sobre a transição da representação das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo para a representação no ciclo trigonométrico, via concepção da História da Matemática.

3 PROBLEMA E HIPÓTESES

Como trabalhar com os alunos do ensino médio a transição da representação das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo para a representação dessas razões no ciclo trigonométrico por meio da História da Matemática?

A partir da questão proposta têm-se como hipóteses que:

- O uso da História da Matemática não apenas como informação ou motivação, mas como metodologia de ensino, possibilita melhor compreensão das relações entre os conteúdos matemáticos.
- Alguns alunos ingressam na universidade sem saber os conteúdos da trigonometria que são abordados no ensino médio.
- A trigonometria é considerada, por alguns alunos, como algo difícil de ser aprendido.

4 METODOLOGIA

Como o intuito dessa pesquisa é estudar como ocorre a transição das razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente, representadas no triângulo retângulo, para a representação no ciclo trigonométrico, e apresentar uma sequência de atividades sobre essa transição para alunos do ensino médio, via História da Matemática, identificou-se a pesquisa qualitativa como abordagem mais adequada. Tal opção se deve ao fato de que,

> A pesquisa qualitativa pode ser caracterizada como sendo um estudo detalhado de um determinado fato, objeto, grupo de pessoas ou ator social e fenômenos da realidade. Esse procedimento visa buscar informações fidedignas para se explicar em profundidade o significado e as características de cada contexto em que encontra o objeto de pesquisa. (OLIVEIRA, 2014, p. 60)

Em sua obra sobre “Como Fazer Pesquisa Qualitativa”, Oliveira (2014) apresenta alguns tipos de pesquisa, embora destaque que existam posicionamentos diferenciados sobre as características dessas entre alguns autores. Tais tipos de pesquisa são: pesquisa exploratória; pesquisa experimental; pesquisa descritiva; pesquisa bibliográfica; pesquisa documental; pesquisa na internet; pesquisa de laboratório; pesquisa ex-post facto; pesquisa etnográfica; pesquisa-ação; e pesquisa participativa. A partir da especificação da autora sobre esses tipos de pesquisa, o presente estudo se enquadra na pesquisa bibliográfica, que diz respeito a:

> Modalidade de estudo e análise de documentos de domínio científico tais como livros, enciclopédias, periódicos, ensaios críticos, dicionários e artigos científicos. [...] A principal finalidade da pesquisa bibliográfica é levar o pesquisador(a) a entrar em contato direto com obras, artigos ou documentos que tratem do tema em estudo. (OLIVEIRA, 2014, p. 69)

O pesquisador por meio da pesquisa bibliográfica toma conhecimento das publicações já realizadas na área de seu interesse com o objetivo de resolver seu problema de pesquisa. Como afirma Lakatos (2001) à pesquisa bibliográfica oferece caminhos para definir e resolver não só o problema proposto, mas também explorar novas áreas, onde os problemas ainda não se consolidaram claramente.

A fundamentação para desenvolver o trabalho de coleta de dados, ocorreu em livros, teses, dissertações, dentre outros materiais, que retratam a História da Matemática e, mais especificamente, o desenvolvimento da trigonometria relativa ao seno, cosseno e tangente.

Além da fundamentação sobre esses aspectos históricos, o trabalho apresenta o estudo e descrição de atividades sobre trigonometria, desenvolvidas por autores como Mendes (1997; 2001), Sampaio (2008), Nascimento (2005) e Gomes (2011) via História da Matemática.

O desenvolvimento da sequência de atividade foi pautado em livros de Matemática de autores tais como Iezzi (2013), Neto (2013), Dante (2000), Caraça (2000), Ayres (1974), Dolce e Pompeo (2005).

Como resultado desse Trabalho de Conclusão de Curso, apresenta-se uma sequência de atividades de trigonometria, para o ensino médio, sobre a transição da representação das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, para a representação dessas razões no ciclo trigonométrico por meio da História da Matemática.

5 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, PORQUE USÁ-LA?

Os baixos índices de desempenho dos estudantes (PISA[1], 2014; IDEB[2], 2013), apontados pelas avaliações internas e externas evidenciam a baixa aprendizagem dos alunos. Tais indicadores há algum tempo tem gerado muita insatisfação nos educadores e pesquisadores brasileiros. Nesse sentido, esses indicadores aliados ao avanço tecnológico acelerado da sociedade têm impulsionado pesquisadores a buscar maneiras de ensinar Matemática de modo que os alunos não sejam meros espectadores em sala de aula, mas sim capazes de pensar, opinar, refletir, discutir, argumentar, além de sentir prazer em estudar. Como afirma Micotti (1999, p. 158), “As atuais propostas pedagógicas, ao invés de transferência de conteúdos prontos, acentuam a interação do aluno com o objeto de estudo, a pesquisa, a construção dos conhecimentos para o acesso ao saber.”

Nessa perspectiva, apresenta-se a metodologia da História da Matemática, que segundo Baroni e Nobre (1999), é um dos “instrumentos” que tem ganhado destaque no meio acadêmico-cultural, embora existam outras tendências metodológicas para o ensino de Matemática, como Modelagem Matemática, Resolução de Problemas, Tecnologias, Etnomatemática e Investigação Matemática, dentre outras.

Neste trabalho o interesse é pela História da Matemática, por ser uma área que apresenta o surgimento dos conteúdos matemáticos, os quais não foram construídos de forma linear, apresentando os contextos em que se originou a Matemática e destacando algumas das pessoas envolvidas com esse desenvolvimento. Indo mais além, como afirma Baroni e Nobre (1999), a História da Matemática é um campo de investigação científica, como a Álgebra, a Análise e a Topologia. Ribeiro (2011) ainda acrescenta que:

> [...] além de ser a história de uma ciência e uma área de investigação científica, a História da Matemática pode ser ainda tratada como um

---

[1] PISA: Programme for International Student Assessment – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

[2] IDEB: Índice de Desenvolvimento da Educação Básica.

> instrumento pedagógico, considerada uma metodologia de ensino e aprendizagem. (RIBEIRO, 2011, p.150)

Usar a História da Matemática como uma metodologia de ensino e aprendizagem pode favorecer a compreensão da Matemática. Concorda-se com Mendes (1997) de que usar a história não irá resolver todos os problemas de aprendizagem apresentados diariamente em sala de aula, mas ela tem o potencial para minimizá-los.

A partir desta visão, Baroni, Teixeira e Nobre (2004) argumentam que a História da Matemática auxilia nas muitas necessidades educacionais e pode causar mudanças. Para sanar tais necessidades, os autores apresentam algumas situações, como: apresentar a História da Matemática em salas de aulas com grande quantidade de alunos como um elemento mobilizador, ou com os alunos que tenham dificuldade de aprendizagem; utilizar a História da Matemática na educação de jovens e adultos; apresentá-la também a alunos com bom rendimento na disciplina; utilizá-la como um incentivador ao uso da biblioteca; como forma de humanizar a Matemática; articular a Matemática com outras disciplinas; além de empregá-la na dramatização e produção textual.

Para Baroni, Teixeira e Nobre (2004), a História da Matemática é um instrumento que evidencia o valor da Matemática em sala de aula, mostrando sua vastidão e fazendo com que os alunos notem que esta perpassa os cálculos.

Struik (1985) ressalta alguns pontos do porque estudar a História da Matemática:

> 1) ela satisfaz o desejo de muitos de nós de sabermos como as coisas em matemática se originaram e se desenvolveram; 2) o estudo de autores clássicos pode oferecer uma grande satisfação em si mesmo, mas também pode ser um auxiliar no ensino e na pesquisa; 3) ela ajuda a entender nossa herança cultural, não somente através das aplicações que a matemática teve e ainda tem na astronomia, na física e em outras ciências, mas também devido às relações que ela teve e ainda tem com campos variados como a arte, a religião, a filosofia e as técnicas artesanais; 4) ela pode proporcionar um campo onde o especialista em matemática e os outros campos da ciência podem encontrar interesse comum; 5) ela oferece um pano de fundo para a compreensão das tendências em educação matemática no passado e no presente; 6) podemos ilustrar ou tornar mais interessante o seu ensino e conversação com historietas. (STRUIK, 1985, p. 213)

Estes pontos listados por Struik (1985) evidenciam que a História da Matemática ultrapassa a área do ensino, e é importante para conciliar diferentes áreas e compreender a nossa herança cultural.

Quanto ao ensino de Matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 2000), para o ensino médio, afirmam que "A importância da história das Ciências e da Matemática, contudo, tem uma relevância para o aprendizado que transcende a relação social, pois ilustra também o desenvolvimento e a evolução dos conceitos a serem aprendidos." (BRASIL, 2000, p. 54), e sugere o desenvolvimento de trabalhos coletivos para exploração deste aspecto.

Além desse uso que também já foi mencionado, Baroni, Teixeira e Nobre (2004) destacam outras maneiras de como adotar a História da Matemática em sala de aula: desenvolvimentos de projetos inspirados pela História; aspectos culturais da Matemática numa perspectiva histórica; no tratamento detalhado de exemplos particulares e aperfeiçoamento do conhecimento matemático.

Existem vários fatores que evidenciam as vantagens do uso da História da Matemática em sala, fatores estes que vão deste o âmbito motivacional até o de alcançar uma configuração de metodologia. Desvincular a Matemática das outras atividades humanas é um dos grandes erros cometido pela educação, como afirma D'Ambrósio (1999, p. 97), "Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber." Assim, se faz necessário que o aluno saiba como surgiu a Matemática que ele estuda na escola, para que esta passe a ter mais sentido.

Em defesa do uso da História da Matemática em sala de aula, diversos são os autores e a partir dessa abordagem, a seguir apresentam-se alguns pesquisadores que compuseram o referencial teórico.

Em seus estudos, Miguel (1993) retrata o posicionamento de alguns estudiosos[3] que eram a favor da História da Matemática como papel pedagógico para o ensino de Matemática. Destaque-se que tal discussão já ocorria no início do século XX. No Brasil, a História da Matemática se manifestou intensivamente no

[3] Dentre os quais estão Felix Kline (1945), Henri Poincaré (1908) e Morris Kline (1966, 1972, 1973, 1976). O posicionamento de Felix Kline encontra-se no volume 1 da obra "Elementary Mathematics from Advanced Stanpoint", uma tradução inglesa de 1945, contudo a primeira edição é de 1908 (MIGUEL, 1993).

período em que foram discutidas as propostas de um movimento de renovação da educação brasileira, que também teve início no começo do século XX, conhecido como Movimento da Escola Nova. É neste período que se encontra, “[...] talvez pela primeira vez, uma manifestação explícita em propostas oficiais sobre a importância da História da Matemática para a formação dos alunos [...]” (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 17).

Dentre esses estudiosos, Miguel (1993) destaca Morris Kline[4] (1966, 1972, 1973, 1976), segundo o qual, o papel pedagógico da história é à abordagem intuitiva da Matemática na escola, em contraposição a abordagem dedutiva[5]. Para Kline (1972), o estudante “é levado a acreditar que a matemática foi criada por gênios que começam com axiomas e raciocinam partindo diretamente dos axiomas para os teoremas.” (KLINE, 1976, p. 64). Assim, a História da Matemática tem um papel desmistificador para Kline, no sentido de apresentar os erros e as hesitações dos grandes matemáticos, o que pode gerar no aluno o desenvolvimento de atitudes positivas, as quais são desejáveis para a formação profissional e cidadã.

Além desse viés pedagógico, Miguel (1993), retrata a História da Matemática caracterizada pela história-anedotário[6], como fonte de motivação, enriquecendo as aulas e permitindo assim que os alunos “relaxem a mente” em contraposição à elevada concentração exigida ao se estudar Matemática.

Contudo não apenas as histórias-anedotário podem ser usadas para motivação, Swetz (1989, apud MIGUEL, 1993, p. 66-67) utiliza a resolução de

---

4 KLINE, Morris. **A proposal for the high school mathematics curriculum**. The mathematicsTeacher, April, 1966, pp. 322-334.

______. **Mathematical thought from na cient to modern times**. New York: Oxford University Press, 1972.

______. **O Fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: Ibrasa, 1976.

______. **Mathematics**: The Loss of Certainty. New York: Oxford University, 1980.

5 Abordagem intuitiva é aquela relacionada à experiência, à intuição, enquanto a abordagem dedutiva é aquela que começa com definições e axiomas e provam-se dedutivamente as conclusões, chamadas de teoremas. (KLINE, 1976, p. 42)

6 História-anedotário segundo o dicionário Houaiss (2009, p. 131), anedotário significa “coletânea de anedotas, conjunto de fatos jocosos ou picantes atribuídos a determinada pessoa ou evento”.

problemas históricos como chave para despertar o interesse dos alunos. Segundo o autor, os problemas históricos motivam por que:

> 1) possibilitam o esclarecimento e o reforço de muitos conceitos que estão sendo ensinados;
> 2) constituem-se em veículos de informação cultural e sociológica;
> 3) refletem as preocupações práticas ou teóricas das diferentes culturas em diferentes momentos históricos;
> 4) constituem-se em meio de aferimento da habilidade matemática de nossos antepassados
> 5) permitem mostrar a existência de uma analogia ou continuidade entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente. (MIGUEL, 1993, p.66-67)

Os problemas históricos vão além de acrescentar fatos históricos ao ensino de conteúdo, mas se voltam para um problema da época, apresentando como tal cultura, povo ou grupo de pessoas pensava em determinado momento da história.

Mais do que o uso de problemas históricos em sala de aula, a História da Matemática explica os “porquês” da Matemática. Segundo Jones (1969, apud MIGUEL, 1993, p. 76) existe três categorias de “porquês”:

1. Porquês cronológicos – são explicações que não são necessariamente lógicas, são fruto da natureza histórica, cultural, casual ou convencional as quais “estão na base de sua aceitação”. Exemplo: “Por que uma circunferência possui 360 graus?”
2. Porquês lógicos – são as explicações decorrentes de preposições previamente estabelecidas com o intuito de compatibilizar duas ou mais afirmações que não são compatíveis entre si. Exemplo: “Por que o produto de dois números negativos é um número positivo?”
3. Porquês pedagógicos – são as escolhas dos procedimentos mais pontuais, feitas pelo professor. Decisão esta, que se caracteriza pelo caráter pedagógico. Exemplo: “Por que você ensina a extrair o maior divisor comum entre dois números pelo método das subtrações sucessivas e não pelo da decomposição simultânea ou outro qualquer?”

Jones (1969) considera que a história é o fio condutor que liga as explicações dos “porquês” que estão em cada uma das três categorias, mostrando o potencial da História da Matemática para o ensino e aprendizagem, pautados na compreensão e significação.

Sad (2004) ainda acrescenta que a História da Matemática tem sido usada para apresentar o valor da notação simbólica nas estruturas matemáticas, e também para situar cronologicamente a matemática com respeito aos seus contribuidores e seu próprio estabelecimento.

A partir das perspectivas apontadas sobre o como trabalhar com a História da Matemática, acredita-se que essas podem provocar no aluno o interesse pelo conhecimento matemático, pois não se pode ignorar o desenvolvimento histórico da Matemática. Sad (2004) também destaca que, atualmente, a História da Matemática não tem como intuito apenas a narrativa, a descrição e a biografia, mas a problematização por meio do diálogo.

Nessa perspectiva, utilizar a História da Matemática como uma metodologia difere de usar fatos históricos apenas para introduzir conteúdos ou para motivar, é ensinar um conteúdo por meio da História. A esse respeito, Vianna (1995, p. 129), defende que "deve-se dar preferência ao uso da história da matemática como estratégia didática em contraposição às formas predominantes de simples motivação e/ou informação." Isto não quer dizer que a História da Matemática não possa cumprir o papel de motivar, pois como já mencionado ela tem seu valor durante as aulas, contudo para o presente trabalho ela será utilizada como metodologia de ensino.

Embora se esteja defendendo a utilização da História da Matemática para ensinar matemática, nem todos os matemáticos e educadores matemáticos concordam com isso. Os argumentos levantados contra a adoção da História da Matemática em sala de aula são:

> a) História não é Matemática;
> b) a História pode ser um dificultador para a compreensão dos conceitos;
> c) uma visão distorcida do passado pode impossibilitar uma contextualização eficaz da Matemática;
> d) a aversão que algum aluno possa ter à História implicaria uma aversão à História da Matemática e, consequentemente, à Matemática.
> e) o estudo do passado é perda de tempo, dado que os avanços ocorrem exatamente para resolver problemas complicados;
> f) outros fatores de ordem prática tais como: falta de tempo para cumprir o programa, falta de recursos materiais, falta de experiência do professor; dificuldade de avaliação. (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2004, p.167)

Não se podem ignorar os pontos levantados por aqueles que rejeitam a História da Matemática. Contudo, é perceptível que grande parte das práticas aplicadas em sala de aula gera o desinteresse pela Matemática em muitos alunos.

Acredita-se que ao apresentar como surgiu um conceito e as dificuldades que os matemáticos tiveram para aprimorá-lo, os alunos percebam que a Matemática não é construída por pessoas dotadas de inteligência fora do comum, ou que é algo “do outro mundo”. Ao contrário, ela foi se desenvolvendo a partir da necessidade da sociedade, e pelo interesse de algumas pessoas em determinados assuntos.

Ainda defendendo a utilização da metodologia da História da Matemática, sabe-se também que não é possível usar a História da Matemática sempre, visto que há, por exemplo, falta de informações precisas sobre determinados conceitos. Entretanto, nos conteúdos em que sua utilização for possível, ela pode gerar muito interesse nos alunos e, corroborando com essa perspectiva Balestri (2008) destaca que,

> [...] cabe ao professor determinar em qual perspectiva a História da Matemática será incorporada à sua prática pedagógica, e nesse processo é necessário que o professor tenha clareza das diferentes perspectivas e diferentes enfoques da participação da História da Matemática, avaliando suas implicações pedagógicas. (BALESTRI, 2008, p. 2)

Assim sendo, é responsabilidade do professor ser um mediador e instigador, sempre questionando: De onde isto surgiu? Sempre foi assim? Quem estava envolvido? Vale à pena refletir sobre essa questão.

É nessa perspectiva que se defende a relevância da questão: Como trabalhar com alunos do ensino médio a transição das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente representados no triângulo retângulo para a representação no ciclo trigonométrico, via História da Matemática? Tal questão se justifica pela falta de relação com que muitas vezes esses conteúdos são trabalhados em sala de aula, ignorando-se o contexto histórico de seu desenvolvimento. Ainda que os livros didáticos tragam trechos da História da trigonometria, muitas vezes, ela aparece dissociada do ensino do conteúdo.

Ao propor a História da Matemática como metodologia de ensino e como um meio para trabalhar com alunos do ensino médio essa transição, há alguns passos que caracterizam como usar esta metodologia.

Nesse sentido, apresentam-se os encaminhamentos defendidos por Baroni, Teixeira e Nobre (2004):

> [...] fazer um levantamento, em livros de História da Matemática e trabalhos de pesquisa, sobre a história do conteúdo a ser incorporada; refletir como a história daquele conteúdo pode ser incorporada ao seu ensino; propor formas de trabalho que incorporem um conteúdo com a sua história; oferecer um material que possa ser utilizado pelos professores em sua prática docente. (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2004, p.179-180)

Essa forma de encaminhamento de trabalho defendida pelos autores reflete, sobretudo, a necessidade de planejamento do professor. Não é possível trabalhar com a História da Matemática sem pesquisar e preparar as aulas. Atualmente existem muitos trabalhos que envolvem História da Matemática que são publicados na *internet*, em livros e em anais de eventos, facilitando o trabalho do professor quanto ao elaborar novas atividades que envolvam História da Matemática. Cabe ao professor pesquisar, filtrar as informações e se atualizar.

A partir desse encaminhamento, na sequência, apresenta-se a história da trigonometria para a compreensão da transição que foi mencionada anteriormente.

6 A HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA – RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS: SENO, COSSENO E TANGENTE

Conhecer a história é o primeiro passo para elaborar atividades norteadas pela História da Matemática. A história é fonte de subsídios para a construção do conhecimento do homem, afirma Mendes (1997). À luz disso, busca-se reconstruir cronologicamente a história da trigonometria referente às razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, que é apresentada nos livros de História da Matemática.

Primeiramente surge a questão: O que é trigonometria? Segundo o dicionário Houaiss (2009, p. 1880) a palavra trigonometria é definida como “parte da Matemática que estabelece os métodos de resolução de triângulos e investiga as funções trigonométricas.” Ou ainda, de acordo com Ayres Jr. (1974, p.11), a trigonometria “trata da determinação dos elementos de um triângulo”.

O surgimento de tal ramo da Matemática é muito difícil de ser datado, “Os primórdios do seu desenvolvimento perderam-se na pré-história.”, como afirma Keneddy (1992, p.1), e como algo que foi se desenvolvendo ao longo dos séculos, diversos foram os nomes de personalidades e povos que contribuíram para o que hoje conhecemos a respeito.

Uma das mais antigas fontes de informação referentes à trigonometria é a Matemática egípcia, contida no Papiro Rhind[7] (aproximadamente 1650 a.C.).

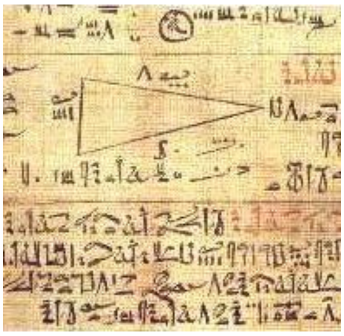


Figura 1: Papiro de Rhind
Fonte: http://tecciencia.ufba.br/equacao-do-2o-grau/curiosidades

[7] Recebeu este nome em homenagem ao egiptólogo escocês A. Henry Rhind, que adquiriu este papiro publicado em 1927 (EVES, 2011).

De acordo com Boyer (2010), no problema 56 do Papiro Rhind, encontra-se a introdução de um conceito equivalente ao da cotangente de um ângulo.

Segundo Kennedy (1992) os conceitos de tangente e cotangente tiveram sua origem devido às necessidades de medição de alturas e distâncias. Supõe-se que a construção das pirâmides levou os egípcios a este conceito, pois era necessário manter uma inclinação constante das faces. Hoje, o grau de inclinação de uma reta é medido por meio da razão entre segmentos verticais e horizontais, conceito que já era usado no Egito.

O afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade na altura, nessa época, foi denominado de *seqt*. Atualmente, ainda, para indicar a inclinação de uma parede, os arquitetos utilizam a palavra *seqt.* Logo, o *seqt* da face de uma pirâmide é o quociente entre o afastamento horizontal pelo vertical. A unidade de medida usada pelos egípcios para medir o afastamento vertical era o cúbito, e para medir a distância horizontal era usada a “mão” que equivale a um sétimo do cúbito.

No problema 56 do Papiro de Rhind, o escriba descreve como calcular o *seqt* de uma pirâmide que tinha 250 cúbitos de altura, e uma base quadrada com lado medindo 360 cúbitos (BOYER, 2010). A primeira orientação era dividir 360 por 2, pois, considerando a base da pirâmide *ABCD* (Figura 2 e 3), que possui uma base quadrada de lado 360 cúbitos, se dividir por 2 obtém-se o apótema do quadrado (conforme as figuras a seguir), este apótema é a base do triângulo *PFE*.

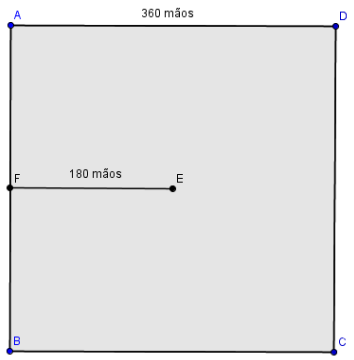


Figura 2: Apótema da base
Fonte: Autoria própria

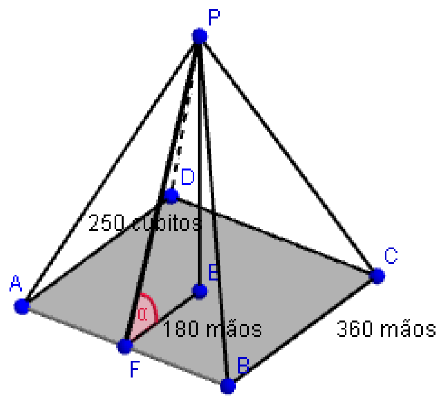


Figura 3: Pirâmide
Fonte: Autoria própria

Na sequência, a orientação era de que o resultado desta divisão (180) deveria ser dividido por 250, obtendo 1/2 + 1/5 + 1/50. Note que o problema pede o *seqt*, ou seja, a inclinação do ângulo $\hat{F}$, que é calculada pela razão entre o afastamento horizontal $(\overline{EF})$ e o eixo vertical $(\overline{PE})$, como mostra a figura 3.

$$\text{seqt} = \frac{\text{afastamento horizontal}}{\text{eixo vertical}} = \frac{180}{250} = 0{,}72 = 0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}02 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}$$

O que equivale a:

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen}\, \alpha} = \frac{\text{cat. ad}}{\text{cat. op}} = \frac{180}{250}$$

Posteriormente, a soma das frações obtidas 1/2 + 1/5 + 1/50 foram multiplicadas por 7, obtendo-se $5\ 1/25$ em mãos por cúbito. A explicação para tal procedimento surge do fato de que o *seqt* é dado em mãos por cúbitos, é preciso transformar esta unidade, logo como uma "mão" é igual a 7 cúbitos, então, multiplicando-se o resultado em cúbitos por 7, teremos $5\ 1/25$ mãos/cúbito.

Este documento mostra como os egípcios, há aproximadamente 1650 anos a.C., já faziam uso da trigonometria, especialmente no que diz respeito à tangente e cotangente.

Além disso, os egípcios também construíram tábuas de sombras projetadas por uma vara vertical ou gnômon[8] de relógio de sol (MILLER, 1992).

Observe na figura a seguir que o gnômon é representado por g e a sombra horizontal do gnômon é representado por h, conforme a elevação do Sol a sombra se torna menor, o que se relaciona ao conceito de cotangente.

[8] De acordo com o dicionário Houaiss (2009, p. 975), gnômon: "objeto (estilete, coluna, etc.) que, pela direção ou pelo comprimento de sua sombra no plano horizontal, indica a altura do Sol ou da Lua acima do horizonte e, por conseguinte, a hora do dia."

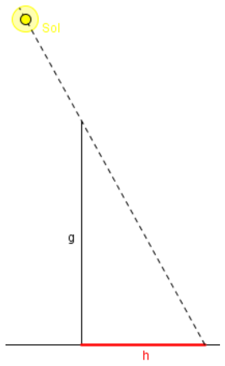


Figura 4: Sombra do gnômon
Fonte: Autoria própria.

Em algumas das versões de relógio de sol, encontradas em paredes das construções, o gnômon g é representado horizontalmente e a sombra do gnômon v representado verticalmente, observa-se que, quanto maior a elevação do Sol, as sombras são mais longas, relacionando-se ao conceito de tangente (figura 5).

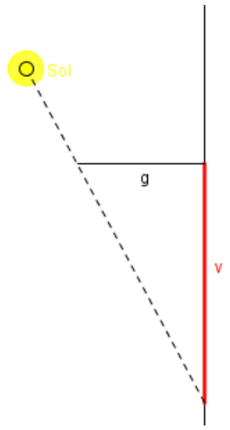


Figura 5: Sombra vertical do gnômon invertido
Fonte: Autoria própria

O outro achado histórico é a tábua cuneiforme babilônia *Plimpton 322*[9] (figura 6), escrita no período Babilônico Antigo (cerca de 1900 a 1600 a.C.), a qual representa uma notável tábua de secantes. Destaque-se que, nem os babilônios e nem os egípcios introduziram a medida de ângulos no sentido atual.

---

[9] A tábua recebeu este nome porque pertence à tábula da coleção G.A. Plimpton da Universidade de Colúmbia e é catalogada pelo número 322.

Figura 6: Plimpton 322
Fonte: http://www.nytimes.com/2010/11/27/arts/design/27tablets.html

Eves (2011) afirma que as investigações sobre a Matemática da Mesopotâmia[10] antiga indicam, possivelmente, um desenvolvimento da trigonometria prática. Ou seja, eles se detiveram às aplicações da trigonometria, usando-a como ferramenta para resolver diversos problemas relacionados ao comércio. Os astrônomos babilônicos[11] acumularam muitos dados de observações, e parte desse material chegou aos gregos. Atrelada à astronomia, a trigonometria foi sendo construída.

Partindo para os gregos, segundo Boyer (2010), encontra-se pela primeira vez um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas. Cabe ressaltar que, anteriormente, já haviam alguns escritos como, por exemplo, “Os Elementos”, de Euclides (séc. III a.C.), que apresentam teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas, mas não um estudo específico na área.

Foi Aristarco de Samos, grego, (aproximadamente 260 a.C.), quem, antes mesmo de Copérnico (1473-1543) propôs um sistema heliocêntrico (Sol como sendo o centro do Universo). Embora os escritos de Aristarco tenham se perdido na história (BOYER, 2010), cabe ressaltar que nesse período a Terra era considerada o centro do universo (universo geocêntrico). Aristarco escreveu um tratado (aproximadamente 260 a.C.) sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua, visto que se assumia o universo como geocêntrico. Ele mediu a distância do Sol e da Lua

[10] Mesopotâmia: região do Oriente Médio.

[11] Babilônia: cidade da Mesopotâmia.

em relação à Terra, seus procedimentos para o cálculo eram muito rudimentares visto que as tabelas trigonométricas não haviam sido construídas ainda. Para avaliar o tamanho do Sol e da Lua era necessário saber o tamanho do raio da Terra, e foi Eratóstenes de Cirene, contemporâneo de Arquimedes e Aristarco, quem obteve mais sucesso na estimativa da medida da circunferência da Terra.

> Eratóstenes observou que ao meio-dia no dia do solstício de verão o Sol brilhava diretamente para dentro de um poço profundo em Siene. Ao mesmo tempo em Alexandria, tomada como estando no mesmo meridiano e 5000 estádios ao norte de Siene, verificou-se que o Sol lançava uma sombra indicando que a distância angular do Sol ao zênite era um cinquentavo de um círculo. [...] a circunferência da Terra deve ter cinqüenta vezes a distância entre Sciene e Alexandria. Isso fornece um perímetro de 250.000 estádios, ou, como um estádio era cerca de um décimo de milha, de 25.000 milhas ou 37.000 quilômetros. (BOYER, 2010, p.110)

A partir das observações de Eratóstenes se verificou que, de fato, a Terra era redonda, pois caso fosse plana, as sombras deveriam ser iguais. Além dos astrônomos citados acima, talvez o mais notável da antiguidade fora Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.). É possível que Hiparco tenha introduzido na Grécia a divisão do círculo em 360 graus.

Segundo Kennedy (1992) esta divisão teve origem com os babilônios antigos que fizeram a divisão do zodíaco (caminho aparente do Sol, durante seu percurso anual, entre estrelas fixas) em 12 partes iguais. O zodíaco era usado como um círculo de referência para descrever o percurso dos planetas entre as estrelas fixas. Os babilônios desenvolveram um sistema numérico de base 60, utilizando a ideia de valor posicional para frações e para números inteiros.

Hiparco também compilou a primeira tábua trigonométrica, embora não se saiba como ele a construiu, porque muitos dos seus escritos se extraviaram. De acordo com Rooney (2012), Hiparco considerava que cada triângulo estava inscrito dentro de um círculo, assim ele desenvolveu um sistema para calcular ângulos a partir de cordas.

Foi à função corda, e não a função seno, a estar presente no início da trigonometria. Lowe e Schank (1992) explicam que a palavra corda, vem do latim *chorda*, que significa “corda de arco”, que tem por origem a palavra grega *chorde* que quer dizer intestino de um animal. A corda de um arco não é o seno, mas a metade da corda dividida pelo raio do círculo é o seno da metade do arco. Observe na figura 7, em que *R* é o raio da circunferência e β é o ângulo correspondente ao arco $\widehat{AB}$.

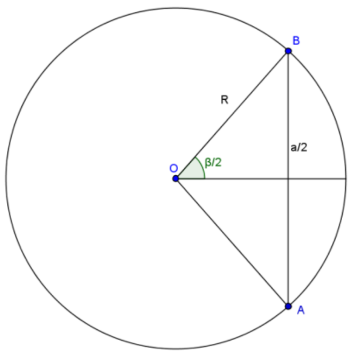


Figura 7: Função Corda
Fonte: Autoria própria.

$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \frac{a/2}{R} = \frac{1}{2R}\operatorname{crd}\beta$$

As contribuições de Hiparco foram importantes tanto para a Astronomia quanto para a trigonometria. Isso explica o fato de Hiparco ser considerado o “Pai da Trigonometria”.

A trigonometria não estava presa ao plano, na mesma época já se tinha conhecimento da trigonometria esférica, em que um triângulo é inscrito sobre a superfície de uma esfera. Assim, a trigonometria plana juntamente com a esférica foi se desenvolvendo, e vários estudiosos contribuíram tanto para uma quanto para a outra.

A ampliação do trabalho de Hiparco ocorreu graças ao grego Cláudio Ptolomeu (150 d.C.), que escreveu o livro *Syntaxis Matemática,* chamado mais tarde de *Almagesto* que significa “o maior”, para distinguir de outros trabalhos menores sobre Astronomia.

O *Almagesto* era composto por 13 livros, e teve por base muito dos escritos de Hiparco. Ptolomeu também fez uma tábua de cordas, de acordo com Aaboe (2002) a função corda é definida como sendo o comprimento da corda que corresponde a um arco de α graus em um círculo de raio 60, a qual está descrita no

Livro I[12]. Esta tábua "fornece os comprimentos de cordas dos ângulos centrais de um círculo dado, de $1/2°$ a $180°$, com incrementos de $1/2°$" (EVES, 2011, p. 203), e enunciou o teorema conhecido como teorema de Ptolomeu: se ABCD é um quadrilátero (convexo) inscrito em um círculo, então $AB.CD + BC.DA = AC.BD$.

Ptolomeu também usou o sistema de base 60 ao dividir graus em minutos *(partes minutae primae)* e cada minuto em 60 segundos *(partes minutae secundae).* (ROONEY, 2012). Ele considerava que a circunferência possui 360º e o raio igual a 60. Usando a notação sexagesimal babilônica, ele dividia cada parte em 60 subpartes e cada uma destas últimas em sexagésimos, e assim por diante (KENNEDY, 1992).

A cultura chinesa também contribuiu para a trigonometria, porém não de forma tão intensa quanto os gregos. Segundo Eves (2011), um dos mais importantes textos de matemática é o *K'ui-ch'ang Suanshu,* ou seja, "Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática". Este trabalho é datado do período da Dinastia Han (206 a.C. – 221 d.C.). Contudo esta era uma cópia, pois o original foi destruído anos antes pelo imperador chinês Shi Huang-ti. Essa cópia, provavelmente, foi reconstituída por memórias.

Em "Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática" encontra-se uma síntese do conhecimento matemático antigo, no qual constam 246 problemas sobre agricultura, procedimentos em negócios, engenharia, agrimensura, resolução de equações e propriedades de triângulos retângulos.

Os hindus também contribuíram para a trigonometria. Ainda que tivessem bastante apreço pela Astronomia, de acordo com Eves (2011) a Astronomia dos hindus era de baixa qualidade, mostrando sua falta de habilidade quanto à observação, coleta de dados e estabelecimento de leis indutivas.

Boyer (2012) afirma que, enquanto a trigonometria de Ptolomeu era pautada na relação funcional entre cordas de um círculo e os ângulos centrais, os hindus fizeram um estudo da correspondência entre metade de uma corda de um círculo e a metade do ângulo subtendido no centro pela corda. E aqui, temos então, a introdução da função seno.

---

[12] Nos demais livros do *Almagesto* há estudos sobre Astronomia. Esta obra foi considerada um trabalho-modelo sobre a Astronomia até a época de Copérnico e Kepler (BOYER, 2012; EVES, 2011).

Para Eves (2011), a trigonometria hindu era aritmética enquanto a grega era geométrica. Os hindus empregavam o equivalente a seno, cosseno e senos reversos (versenθ = 1 – cos θ), além de resolverem problemas com triângulos planos e esféricos. Destaque-se que eles usavam os nossos conhecidos graus, minutos e segundos nas tábuas de senos que construíram.

A palavra cosseno foi definida por Edmund Gunter em 1620, pois o cosseno é igual ao seno do complemento[13]. Gunter combinou a palavra "complemento" e "seno", formando então *co-sinus*, que foi modificada para *cosinus*, e em português cosseno.

Considere os triângulos retângulos $OAP\ e\ OBP$, na figura a seguir, sendo que P pertence à circunferência de raio unitário, observe que

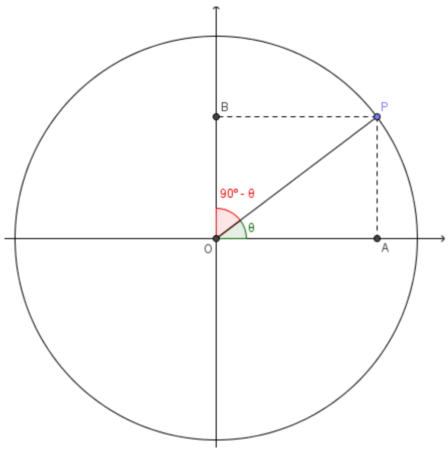


Figura 8: Cosseno é igual ao seno do complemento
Fonte: Autoria própria.

$$\mathrm{sen}(90° - \theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{OP}}}$$

Como $\overline{BP}$ é congruente a $\overline{OA}$ e $\overline{OP} = 1$, segue que

$$\mathrm{sen}(90° - \theta) = \frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{OP}}} = \frac{\overline{\mathrm{OA}}}{1} = \cos\theta$$

[13] Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é igual a 90º.

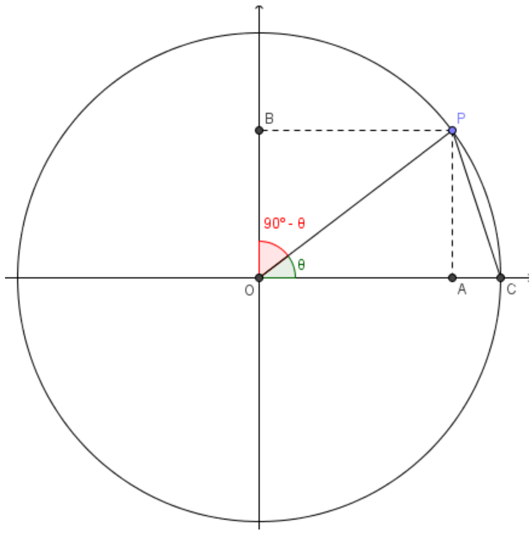


Figura 9: Seno reverso
Fonte: Autoria própria.

O seno reverso é definido como $\text{versen}\,\theta = 1 - \cos\theta$, na figura anterior considere a circunferência de raio unitário.

Note que

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = 1 - \frac{\overline{OA}}{1} = 1 - \cos\theta = \text{versen}\,\theta$$

Ao pesquisar sobre a função seno, duas obras são destacadas *Surya Siddhants e Aryabhatiya*. De acordo com Boyer (2012), o primeiro refere-se a um tratado astronômico hindu, os *Siddhantas* ou sistemas (de astronomia). Os *Siddhantas* são originários do final do quarto século ou começo do quinto, mas a autoria é desconhecida. O segundo, *Aryabhatiya*, é um pequeno volume escrito em 499 d.C., pelo matemático Aryabhata sobre a Astronomia e Matemática.

Nessas duas obras, encontram-se as mais antigas tabelas da função seno, em que são dados os senos dos ângulos até 90º, para vinte e quatro intervalos iguais de 3¾º. Cabe ressaltar que, para os cálculos o valor do raio não era unitário, mas assumia o valor 3438 e a circunferência como 360 x 60 = 21600. Assim o valor de π era $\sqrt{10}$, tal valor concorda com o valor atribuído por Ptolomeu de 3,1416 e também muitas vezes chamado de “o valor hindu”.

Ainda de acordo com Boyer (2010), Brahmagupta, que viveu na Índia Central, cerca de cem anos após Arybhata, ou seja, em 628, menciona dois valores de π, um deles denominado "valor prático" 3 e o "valor bom" $\sqrt{10}$. Na trigonometria, segundo Rooney (2012, p. 91), Brahmagupta[14] publicou uma tabela de senos para qualquer ângulo, ele usou um raio de 3270 em vez de 3438 como fez Aryabhata.

Ressalte-se que, nesse ponto da história há dois tipos de trigonometria:

a. A grega, baseada em cordas, como relatada no *Almagesto*;
b. E as tabelas hindus de seno.

Entre esses dois tipos de trigonometria, a que prevaleceu, na Arábia, foram as tabelas hindus de seno e, foi através dos árabes[15] que a trigonometria do seno chegou até a Europa, e a partir de então, grandes mudanças ocorreram.

O responsável por produzir as tabelas de senos para arcos variando de dez em dez minutos, por introduzir o conceito de tangente de um ângulo, e possivelmente, também os de secantes e co-secante, segundo Garbi (2010), foi o árabe Abu'l Wefa (940-998). Associa-se também aos árabes o uso das seis funções trigonométricas, e o aprimoramento da trigonometria esférica. Com relação à tangente, os árabes haviam compilado tábuas de sombras verticais e também sombras horizontais, assim como os egípcios. De acordo com Miller (1992), no início o comprimento do gnômon, era arbitrário, mas em 830 d.C., Habash, um matemático árabe, tomou o gnômon = 60 (base sexagesimal) e compilou uma tábua para sombras verticais. Os responsáveis por considerar o gnômon igual a uma unidade, ou seja, o raio igual a 1, foram Abu'l Wefa e al-Biruni (973-1048).

---

[14] Brahmagupta também escreveu sobre Astronomia, Álgebra, Aritmética e Geometria (GARBI, 2010).

[15] Foi o árabe, Tabitibn Qorra (826-901) médico, filósofo e matemático, que revisou as traduções do livro de Euclides, Os Elementos e também do livro de Ptolomeu (GARBI, 2010). De acordo com Rooney (2012), a partir do século IX, os árabes também contribuíram para o aperfeiçoamento do astrolábio, tal instrumento grego foi usado por Apolônio e Ptolomeu. O astrolábio é composto por uma série de anéis metálicos concêntricos marcados com as posições do sol, da lua, estrelas e planetas. O fato de mover os anéis dispensava uma grande quantidade de cálculos exaustivos. A motivação para o aperfeiçoamento deste instrumento surgiu da necessidade de determinar a direção de Meca em qualquer lugar do mundo, para que o devoto islâmico pudesse se voltar à cidade sagrada para orar, conforme ordena o Alcorão. O astrolábio foi trazido para a Europa, sendo muito utilizado pelos navegadores europeus; ele só foi substituído no século XVIII pelo sextante, que possibilitava aos marinheiros determinar suas posições traçando o curso do sol contra o horizonte. (ROONEY, 2012).

Foi por meio do matemático e astrônomo Al-Battani que o seno[16] chegou até a Europa. Al- Battani fez uma “tabela de sombras”, (ROONEY, 2012), que é uma tabela de cotangentes para ângulos entre 1º até 90º, com intervalos de 1º, além calcular a inclinação do eixo da Terra 23º 35’. Outro árabe que deixou marcas na trigonometria foi Nasir Eddin (1201-1274), o primeiro a considerar a trigonometria dissociada da Astronomia. Ele também colaborou para o desenvolvimento da trigonometria esférica.

Durante a Idade Média o que prevaleceu foi à tradução dos trabalhos árabes e gregos, não havendo expansão do que até então se havia produzido.

No século XV, a Matemática esteve centrada nas cidades italianas e nas cidades de Nuremberg, Viena e Praga, na Europa Central. E cresceu com enfoque na álgebra, aritmética e trigonometria. A Matemática, segundo Eves (2011) se destacou especialmente em cidades mercantis que estavam em desenvolvimento, tais cidades estavam sob influência do comércio, da navegação, da Astronomia e da agrimensura.

Ao mencionar a trigonometria na Europa, destacam-se alguns nomes como Georg von Peurbach (1423-1463), que escreveu uma aritmética, alguns trabalhos de Astronomia, organizou uma tábuas de senos e começou a traduzir para o latim, a partir do grego, a obra *O Almagesto* de Ptolomeu .

Em 1436 nasceu em Königsberg, cidade alemã, Johann Müller[17] (conhecido como Regiomontanus), sua grande contribuição para a Matemática foi o tratado *De triangulis omnimodis*, que foi escrito em 1464, porém, publicado em 1533. Esta é a primeira obra européia em que aparece a trigonometria separada da Astronomia,

---

[16] A origem da palavra seno é curiosa, *Aryabhata* usava a palavra *ardha-jya*, que significa semi-corda e também *jya-ardha*, que possui o significado de corda metade, que depois foi abreviada para *jya* (corda). Os árabes, ao invés de falarem *jya*, falavam *jiba*, por possuírem o costume de abreviar as vogais, *jiba*, esta se tornou *jb*, atualmente esta palavra não tem sentido na língua árabe, a não ser seu significado técnico. Devido à abreviação sem sentido *jiba* passou a ser *jaib*, que em árabe quer dizer “enseada” ou “baía”. O matemático Gerardo de Cremona (1114-1187), que viveu na Itália, estudou o árabe e traduziu várias obras do árabe para o latim, assim ao traduzir a palavra *jaib* a traduziu como *sinus*, de onde surge a palavra que conhecemos hoje: seno (EVES, 2011).

[17] Johann Müller (1436) mais conhecido com Regiomontanus, nome latinizado que significa “montanha do rei”. Estudou com Peurbach em Viena e terminou de traduzir *O Almagesto*, além disso, traduziu também, do grego, trabalhos de Apolônio, Herão e Arquimedes (EVES, 2011).

fazendo uma exposição sistemática de trigonometria plana e esférica. Este tratado se divide em cinco livros, sendo os dois primeiros dedicados à trigonometria plana e os demais à trigonometria esférica.

Regiomontanus aplicou a álgebra em suas proposições, usando apenas as funções seno e cosseno. Posteriormente, ele calculou uma tábua de tangentes, e em outro trabalho aplicou a álgebra e a trigonometria ao problema da construção de um quadrilátero cíclico[18], dados os quatro lados. O trabalho de Regiomontanus foi usado e adaptado pelo astrônomo Copérnico (EVES, 2011).

Nicolau Copérnico (1473-1543) foi um astrônomo que revolucionou a visão do mundo ao dizer que a Terra se move ao redor do Sol, essa ideia havia surgido com Aristarco, porém, não teve sucesso. Boyer (2010), afirma que naquela época um astrônomo era quase que um trigonômetra, o que permitiu a Copérnico contribuir para o avanço da Matemática.

Em 1543, ano de sua morte, Copérnico publicou o tratado "*De revolutionibus orbium coelestium".* Tal trabalho possui seções importantes sobre trigonometria, que haviam sido publicadas em um ano anterior com o título *De lateribus et angulis triangulorum*. O conteúdo era parecido com o de Regiomontanus, mas as datas de publicações indicam que Copérnico não tinha conhecimento sobre a obra de Regiomontanus. Contudo, a forma final da trigonometria parece ser derivada em parte do que Regiomontanus havia produzido. Tal possibilidade é levantada porque em 1539, Copérnico recebeu como estudante o matemático da Prússia, Georg Joachim Rheticus (1514-1576), o qual havia tido contato com a Matemática de Regiomontanus.

Rheticus foi muito além de Copérnico, pois juntou as ideias de Regiomontanus e Copérnico, com suas próprias ideias e publicou o mais elaborado tratado sobre trigonometria até o momento. A obra *Opuspalatinum de triangulis*, publicada em dois volumes concentrou-se nos triângulos retângulos, abandonando a tradicional consideração das funções trigonométricas com relação ao arco de um círculo. Tal abordagem possibilitou tratar o triângulo de forma independente, usando

[18] Um quadrilátero cíclico é um quadrilátero inscrito em uma circunferência tal que os ângulos opostos são suplementares.

as funções trigonométricas como razões entre lados de um triângulo retângulo. (BOYER, 2010).

Deve-se a Rheticus as seguintes definições:

> Em todo o triângulo com ângulo reto, o lado que subtende ao ângulo reto é chamado de hipotenusa. Se AB é o raio ou sinustotus (seno total), então a perpendicular é o seno e a base é o cosseno. (ZELLER, 1944, p. 56, apud SAMPAIO, 2008, p.60)

Além desses feitos, Rooney (2012) afirma que Rheticus também calculou tabelas detalhadas para as seis funções trigonométricas, e começou uma série de tabelas calculadas com grau de precisão muito elevado. Entretanto, morreu antes de conseguir terminar.

Possivelmente com base nas tábuas de sombras, Thomas Fincke, em 1583, colaborou com o nome "tangente", pois a sombra vertical v está localizada ao longo da tangente ao círculo de raio g.

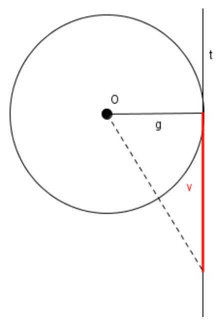


Figura 10: Tangente
Fonte: Autoria própria.

Ainda no século XVI, temos Fraçois Viète (1540-1603) que escreveu o livro *Canon mathematicus seu ad triangula* o qual apresenta contribuições significativas para a trigonometria. Provavelmente, este foi o primeiro livro europeu destinado a desenvolver sistematicamente métodos para resolver triângulos esféricos e planos, com o auxílio das seis funções trigonométricas, aplicando a álgebra à trigonometria. Viète obteve expressões para *cos nθ* para n = 1,2, ..., 9 como função de *cos θ* e, propôs uma solução trigonométrica para o caso irredutível das cúbicas (EVES, 2011).

Viète não contribui apenas para a trigonometria, mas também para diversos outros ramos da Matemática:

> Viète começou a modernização da simbologia algébrica e foi ele quem difundiu o emprego de letras para representar genericamente os números, não apenas no caso das incógnitas, mas, também dos coeficientes das expressões. (GARBI, 2010, p. 165)

Viète era a favor da representação decimal em vez da sexagesimal.

Observe-se que, inicialmente a trigonometria era usada como instrumento de mensuração de figuras geométricas. Porém, atualmente é um conjunto de relações entre os números, sem a necessidade de recorrer a arcos ou ângulos. Isso aconteceu com a representação das funções trigonométricas via séries infinitas, as quais, segundo Kennedy (1992) tiveram a contribuição de Cardano (1501-1576) e Issac Newton (1664-1665). Pode-se dizer o fundador da trigonometria moderna foi Leonhard Euler (1707-1783). Ele influenciou nos conceitos básicos, como o seno, que não é mais um segmento de reta a ser expresso em relação a alguma unidade, mas sim, a abscissa de um ponto do círculo unitário de centro na origem. Ele também contribuiu para a trigonometria esférica (DOMINGUES, 2013). Portanto, a trigonometria que é usada hoje se deve ao tratamento que Euler deu a esta área da Matemática.

Ao longo do desenvolvimento da trigonometria, houve a necessidade de se ter uma nova medida para arcos, de forma que esta simplificasse as fórmulas matemáticas e físicas (relativa as derivadas e integrais de funções trigonométricas e as expressões para velocidades e acelerações em movimento curvilíneo). Relacionado a isso, surgiu em 1873, à medida radiano (publicada pelo físico James T. Thomson). Algumas publicações de outros trabalhos da mesma época trazem os nomes: π - medida, circular ou medida arcual, os invés do nome radiano.

Ao remontar cronologicamente a história da trigonometria, esta “mostra em seu interior o crescimento embrionário de três partes clássicas da matemática: álgebra, análise e geometria.” (KENNEDY, 1992, p. 1).

A trigonometria surgiu com a necessidade da Astronomia, para medir os corpos celestes e suas distâncias, auxiliando nos cálculos de distâncias inacessíveis. Atualmente, as funções trigonométricas são usadas para resolver muitos problemas na área de Equações Diferenciais, na Física, no Cálculo, dentre outras.

Ao percorrer historicamente o desenvolvimento da trigonometria com respeito às razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, evidencia-se o carácter de necessidade de “ferramentas” cada vez mais sofisticadas de cálculo para resolver problemas intrínsecos à própria Matemática e relativos às necessidades humanas. Dessa forma, percebe-se o quanto a trigonometria foi se aprimorando ao longo dos séculos, e quão importante é para o aluno saber que a trigonometria que se estuda hoje na escola não surgiu da mesma maneira que está exposta nos livros didáticos.

Fazer o aluno pensar como surgiu tal conceito, ou a importância de se conhecer de forma mais aprofundada um assunto para poder dar continuidade aos seus estudos pode gerar uma aprendizagem que tenha mais significado para ele.

Assim, dando continuidade ao estudo em questão, são apresentados alguns autores que pesquisaram sobre o ensino de trigonometria via História da Matemática, com o intuito de fomentar uma aprendizagem com maior significado para o aluno.

7 PESQUISAS SOBRE O ENSINO DE TRIGONOMETRIA E A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Com o intuito de apresentar o que a literatura traz sobre a transição das razões trigonométricas da representação do triângulo retângulo para a representação do ciclo trigonométrico usando a História da Matemática, no ensino médio, destacam-se os trabalhos de Mendes (1997; 2001), Nascimento (2005), Sampaio (2008) e Gomes (2011).

7.1 IRAN ABREU MENDES – 1997 E 2001

Com o título o “Ensino de trigonometria através de atividades históricas”, Mendes (1997) desenvolveu sua dissertação de mestrado tendo como objetivo investigar o uso da História da Matemática na formação do professor de Matemática, conhecendo suas experiências, necessidades e percepções. O autor elaborou e testou atividades voltadas para o ensino de trigonometria no ensino médio.

Para elaborar as atividades, o autor se fundamentou na concepção de ensino pautada na redescoberta e apoiadas nas ideias de Dockweiler[19] (1996), que afirma que o aprendiz constrói seu conhecimento por meio de três estágios: experiências manipulativas e visuais; expressão oral ou verbalização dessa experiência; e a representação simbólica das ideias aprendidas na experiência.

Com base na perspectiva da redescoberta, a qual viabiliza a participação efetiva dos professores envolvidos, Mendes (1997, p. 19) busca na história evolutiva dos conceitos trigonométricos, subsídios necessários para a elaboração destas atividades.

Todo o seu trabalho é intimamente ligado ao Construtivismo. Nessa concepção, o sujeito do conhecimento é o sujeito ativo durante a relação entre ele e a realidade, na busca de produzir conhecimento. O autor tem a preocupação com ato cotidiano de ensinar-aprender e considera que a história deve ser utilizada na

---

[19] DOCKWEILLER, C. J. **Children’s Atta in ment of Mathematical Concepts**: A Model Under Development. Texas A&M University, 1996. 9p.

elaboração e execução de atividades voltadas para a construção das noções básicas da trigonometria. Nessa perspectiva, foram elaboradas oito atividades sequenciais relacionadas à trigonometria: atividades iniciais sobre a noção de ângulo; ideia da razão de semelhança; determinação de algumas relações de semelhança entre triângulos retângulos; determinação das medidas das cordas da circunferência; discussão a respeito da metade da corda até o surgimento do seno, cosseno, tangente e cotangente; e, por fim, atividades de construção do círculo trigonométrico e das tabelas para os arcos fundamentais (MENDES, 1997).

As atividades elaboradas foram testadas com professores da rede de ensino do Pará e Rio Grande do Norte, as quais sofreram modificações conforme algumas sugestões desses professores.

Como resultado, o autor afirma que sua proposta é eficaz, e que cabe ao professor o preparo para aplicá-las em sala de aula. Isso significa que é preciso planejar, conhecer bem as atividades e não interrompê-las, pois pode ocasionar a perda de significado para os alunos. Finalizando sua pesquisa, Mendes (1997) acredita que seu trabalho deu uma amostra de que há inúmeras possibilidades que podem ser exploradas no ensino de trigonometria através de atividades históricas.

Tendo por base os resultados obtidos em sua dissertação, o autor ampliou tal proposta partindo então para sua tese de doutorado com o título “Ensino da Matemática por atividades: uma aliança entre construtivismo e a História da Matemática” (MENDES, 2001). A aplicação das atividades desenvolvidas nessa outra pesquisa do autor se deu em uma escola pública de Natal (RN). Inicialmente com 154 alunos, de cinco turmas de uma mesma professora, o pesquisador e a professora atuaram juntos e depois com apenas 44 alunos, o trabalho foi desenvolvido inteiramente pelo pesquisador, elaborando, aplicando e avaliando as atividades.

O objetivo de sua tese era o de apresentar e discutir uma proposta de geração de conhecimento matemático escolar por meio da conjunção construtivismo-história, dentro do contexto da trigonometria. Em seu trabalho, Mendes (2001) defende que o ato ensinar-aprender ocorre através das interações entre aluno e professor e entre os próprios alunos, e que podem ser integradas às atividades construtivistas. Para trabalhar com a construção do conhecimento matemático escolar, o autor é favorável às informações históricas acerca da construção do conhecimento matemático sob a perspectiva de atividades manipulativas. O autor compartilha do pressuposto de que a aprendizagem do aluno se torna plena, significativa e sólida à medida que ele é provocado intelectualmente. Tal provocação intelectual significa despertar a curiosidade do aluno de maneira à conduzi-lo em busca da (re)construção da Matemática já elaborada historicamente. Nesse momento, o papel do professor é o de orientador, fazendo com que os estudantes vivenciem experiências manipulativas resgatadas das informações históricas, em uma perspectiva presente.

A utilização da História da Matemática, segundo o autor, funciona como um agente instigador do ato cognitivo em sala de aula, embora, ele defenda que para que isso ocorra, deve ser em forma de atividades para o aluno (MENDES, 2001).

O formato das atividades elaboradas pelo autor segue um roteiro, que contém os seguintes itens:

1. Nome de cada atividade;
2. Objetivo das atividades;
3. Conteúdo histórico;
4. Material a ser utilizado nas atividades;
5. Operacionalização das atividades;
6. Os desafios propostos nas atividades;
7. O exercício da sistematização e formalização do conhecimento;
8. Outras atividades complementares.

Mendes (2001) elaborou um módulo com 11 atividades de introdução à trigonometria plana para a 1ª série do ensino médio. O papel do professor nessas atividades foi o de condutor, subsidiando o exercício cognitivo do aluno em sala de aula. Para execução das atividades todos os estudantes deveriam ter em mãos alguns materiais de desenho, como: régua, compasso, esquadro e transferidor.

As atividades elaboradas por Mendes (2001) a respeito da abordagem histórica dos conteúdos se referiram aos seguintes assuntos:

1. Noção de ângulo.
2. Explorando triângulos retângulos.
3. Formulando o Teorema de Pitágoras.
4. Medindo altura de um objeto pela sombra.
5. Construindo e explorando o relógio de sol.
6. Medindo altura dos objetos sem utilizar sombras.

7. Razões trigonométricas: das cordas ao triângulo retângulo.
8. Construindo os valores de seno, cosseno e tangente de ângulos agudos.
9. Construindo e explorando o trigonômetro.
10. A razão pi (π) entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro.
11. Explorando o ciclo trigonométrico.

Além dessas atividades, o autor faz a sugestão de outras atividades complementares.

Em relação às primeiras aplicações das atividades, em 1998, o autor descreve que um dos fatores que contribuiu para o resultado abaixo do esperado, foram os textos históricos. Como os alunos não gostavam muito de ler, isso causou certo desinteresse pelas atividades, além de que, estavam acostumados com aulas tradicionais.

A partir desses resultados, uma nova testagem foi feita em 1999. Nessa, o pesquisador assumiu a turma e ele mesmo conduziu as atividades. Dessa vez, o resultado foi muito melhor que o anterior, as atividades alcançaram seus objetivos e despertaram muito mais interesse dos alunos, inclusive apresentaram as atividades desenvolvidas durante a pesquisa, na feira de cultural da escola. O autor relata que a História da Matemática causou impacto nos alunos, originando maior interesse pela Matemática.

7.2 ALESSANDRA ZEMAN DO NASCIMENTO – 2005

Com o intuito de construir uma tabela trigonométrica pautada em levantamentos históricos sobre os trabalhos de Ptolomeu e de outros matemáticos da Grécia Antiga, e para investigar a apropriação do significado dos conceitos trigonométricos seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, por estudantes da 1ª série do ensino médio, Nascimento (2005), elaborou “Uma sequência de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica”. Os questionamentos levantados pela autora versaram sobre: Como ensinar trigonometria no triângulo retângulo de forma significativa? Quais fatores influenciam a aquisição de tal conhecimento? Como distanciar a utilização da trigonometria no ensino médio da mecanização? O argumento defendido pela autora para tais questionamentos é que os alunos muitas vezes não sabem por que estão efetuando certos cálculos, e para ela, o aspecto central da aprendizagem é a produção de significado.

Apoiando seu trabalho nas teorias de Vygotsky[20] (1985 e 1998), Vergnaud[21] (1983,1986,1993,1994,1996 e 1998) e Parzysz[22] (1988, 2001a, 2001b, 2002) a autora defende que a interação entre os colegas em uma sala de aula afetam o pensamento e o raciocínio[23].Assim, a construção da tabela seria feita pelos alunos em duplas ou grupos. Acreditando que a qualidade das trocas verbais entre professor e aluno, irá influenciar na forma como os alunos tornam mais complexo o

---

[20] VYGOSTKY, Lev. Semenovitch. **La méthode instrumentale em psychologie**. In B. Schneuwlyet J-P. Bronchart, (Eds.), 1985.

______ **Pensamento e linguagem**. Tradução: Jefferson Luiz Camargo: 2ª edição, Ed. Martins fontes, São Paulo, 1998.

[21] VERGNAUD, G. **Multiplicativ estructures**. In Lesh, R. and Landau, M. (EDS.) Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. New York: Academic Press Inc, pp. 127-174, 1983.

______**Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas, um exemplo: estruturas aditivas**. Análise Psicológica 1 (V), p. 75 a 90, 1986.

______**Teoria dos campos conceituais**. In Nasser, L (Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. p. 1-26, 1983.

______ **Multiplicative conceptual field**: what and why**?** In Guershon, H. and CONFREY, J. (1994). (Eds.) The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. Albany, N.Y.: State University of New York Press. p. 41-59, 1994.

______ **A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos**. Revista do GEMPA, Nº 4:9-19, Porto Alegre, 1996.

______ **A comprehensive theory of representation for mathematics education**. Journal of Mathematical Behavior, 17(2): 167-181, 1998.

[22] PARZYSZ, Bernard ‘Knowing’ vs ‘seeing’. **Problemsofthe plane representationofspacegeometry figures**, in EducationStudies in Mathematics, 19:79-92, 1988.
______ (in press): **Articulation entre perception et déduction dans une démarche** en PE1, in Actes Du colloque COPIRELEM de Tours, IUFM Orléans-Tours & Equipe DIDIREM – Universidade de Paris-7-2001a.

______ Pre-service elementary **teachers and fundamental ambiguity of diagrams in geometry problem-solving**. IUFM Orléans-Tours & Equipe DIDIREM – Universidade de Paris-7-2001b.

[23] A autora não especifica a diferença entre pensamento e raciocínio, mas segundo o dicionário Houaiss (2009, p. 1467), pensar é “1. submeter (algo) ao processo do raciocínio lógico; exercer a capacidade de julgamento, dedução ou concepção. 2. determinar pela reflexão. 3. ter como intenção, pretender. 4. procurar lembrar-se, imaginar. 5. ser de opinião, de parecer.” Agora raciocinar é “1. fazer uso da razão para estabelecer relações entre (coisas e fatos), para entender, calcular, deduzir, julgar (algo); refletir. 2. apresentar razões; ponderar.”

seu pensamento e processam novas informações, o professor toma um papel de mediador da aprendizagem.

Nascimento (2005) elaborou uma sequência didática com o intuito de produzir significados para os conceitos básicos da trigonometria do triângulo retângulo. Embora a autora não defenda o uso da História da Matemática, como Mendes e outros autores, ela não desassocia a origem da trigonometria com a trigonometria estudada na escola.

A sequência didática proposta pela autora parte da semelhança de triângulos, homotetia, Teorema de Tales, definição de seno, cosseno e tangente, há a proposição de alguns problemas sobre altura de edifícios, distância entre margens opostas de um rio, até determinar a medida do raio da Terra. A partir dessas questões, o objetivo da autora era fazer com que os alunos percebessem a necessidade da tabela trigonométrica, e se deparassem com problemas semelhantes que motivaram a construção da tabela trigonométrica pelos matemáticos da Grécia Antiga. As atividades para a construção da tabela trigonométrica consistiram nas ideias da construção de Ptolomeu, na construção de um Teodolito e de um Astrolábio (instrumento usado para medir ângulos).

De acordo com Nascimento (2005), o trabalho desenvolvido foi muito bom, mesmo com as dificuldades dos alunos em relação à geometria e a álgebra. Como alguns resultados, a autora aponta que: não há uma metodologia ou uma sequência didática que faça com que a aprendizagem da construção da tabela trigonométrica ocorra de maneira simples, mas sim, estas facilitam a aprendizagem; o trabalho em dupla foi eficaz e produziu bons resultados; a linguagem acessível é imprescindível; outro destaque é dado em relação aos conhecimentos que os alunos já têm, e que o professor precisa saber, para usar como pontos de ancoragem. Finalizando, a autora destaca que o caminho é compreender a educação com um processo formativo.

7.3 HELENARA REGINA SAMPAIO – 2008

Com o objetivo de investigar a construção de uma abordagem histórico-filosófica para o ensino do ciclo trigonométrico no ensino médio, Sampaio (2008) em sua pesquisa de mestrado fez reconstrução histórico-epistemológica e teórico-conceitual do ciclo trigonométrico. A autora investigou as relações, adaptações e transposições pertinentes à Engenharia Didática aplicáveis às abordagens histórico-filosóficas e investigou e elaborou sequências didáticas que contemplassem as características teórico-metodológicas identificadas e as adaptações pedagógicas características à aprendizagem no ensino médio.

Sampaio (2008) defende o uso da História da Matemática, especificamente no ensino de trigonometria. A autora parte da transposição didática, devido ao fato de que muitos episódios da história da trigonometria não estão nos livros didáticos, e sim em livros mais específicos, e dessa forma possuem uma linguagem mais rebuscada. Nesse sentido, ela buscou na transposição didática tornar o saber científico em saber a ensinar (aquele que está nos livros didáticos), e através deste chegar ao saber ensinado (aquele de fato que ocorre em sala de aula).

Tendo como abordagem metodológica a pesquisa qualitativa e a engenharia didática, Sampaio (2008) elaborou atividades de forma a fazer uma reconstrução histórica da trigonometria e aplicou para alunos da 2ª série do ensino médio. Fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa, a autora aplicou um instrumento que serviu para elaboração e validação da sequência didática.

As atividades elaboradas por Sampaio (2008) se referiram a:

1. Trigonometria no triângulo retângulo, revisando as razões trigonométricas.
2. Desenhar triângulos em uma esfera de isopor e comparar com os triângulos no plano.
3. Explicação do contexto histórico sobre a importância das cordas para os matemáticos da antiguidade. Identificação do raio, das cordas e do arco na circunferência.
4. Explicação da conversão de unidades de graus para radianos, com contextualização histórica sobre o grau e suas partes.
5. Explicação do contexto histórico da trigonometria grega e indiana. Observação de uma figura que representava a corda (trigonometria grega) e de uma figura que representava um triângulo retângulo (trigonometria indiana, meia corda), destacando suas semelhanças e diferenças.

6 e 7. Explicação do seno e do complemento do seno (cosseno) segundo o contexto histórico, e explicação da adoção do raio unitário na circunferência.

8 e 9. Introdução às funções trigonométricas.

10. Preenchimento de tabelas com a variação das funções seno, cosseno, tangente e, tabelas com os sinais das funções.

11. Introdução do contexto histórico, exercícios de pêndulos para aplicar as funções trigonométricas.

12. Atividade extra de aplicação das funções trigonométricas à geografia.

13. Enumeração da linha do tempo com os aspectos mais importantes da história da trigonometria.

Como resultados, Sampaio (2008) destacou em seu trabalho que a aplicação da sequência didática trouxe mudanças significativas em relação aos valores atribuídos a Matemática e a História da Matemática. Destaque-se que, a partir dessas atividades a autora menciona a necessidade de retomar a trigonometria no triângulo retângulo, para então prosseguir para o ciclo trigonométrico, tal indicação revela a importância da análise da transição das razões trigonométricas da representação do triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico, que é a proposta desse estudo.

7.4 SEVERINO CARLOS GOMES – 2011

A partir de uma inquietação apontada por Nacarato, BradarioI e Passos (2007, p. 65) sobre “O que vem ocorrendo com o ensino de trigonometria que não resulta em aprendizagem, por parte dos alunos?”, Gomes (2011) se propôs a estudar se seria possível elaborar uma sequência de ensino de trigonometria que pudesse minimizar o problema levantado pelos autores mencionados.

Para abordar tal questão, Gomes (2011) propôs uma sequência de atividades para os professores do ensino médio, aliando o ensino de trigonometria ao estudo do seu desenvolvimento histórico, tais atividades versaram sobre:

1. Circunferência e polígonos regulares.

2. Circunferência, polígonos regulares, teorema de Pitágoras, triângulos isósceles e equiláteros.
3. Triângulo, mediatriz de um segmento e seno.
4. Circunferência, triângulos isósceles e unidades de medidas de arco.
5. Circunferência, projeções ortogonais e seno.

Após a aplicação desta sequência com vários professores, o autor aponta como resultados a necessidade do professor deter conhecimentos em geometria, domínios de cálculos algébricos e com números irracionais, ter familiaridade com construções geométricas e com o estudo de funções, para que a utilização da sequência de atividades ou parte dela seja viável em sala de aula.

Gomes (2011) ainda evidencia o uso de softwares para as construções das figuras e também uso da régua e compasso. Como seu estudo foi aplicado a um grupo de professores, o autor sugere a investigação dessa sequência de atividades com alunos do ensino médio.

A partir da apresentação dos estudos de alguns pesquisadores sobre o ensino e aprendizagem de trigonometria, a seguir, fundamentados na elaboração de sequências de atividades, apresenta-se uma sequência de atividades sobre a transição das razões trigonométricas representados no triângulo retângulo para a representação no ciclo trigonométrico via História da Matemática, proposta deste estudo. Tal proposição tem o intuito de tornar significativa esta transição, destacando como e porque surgiu a trigonometria, levando os alunos a pensarem sobre a importância da mesma.

8 SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES DE TRIGONOMETRIA VIA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A seguir apresenta-se a sequência de atividades proposta para este estudo, sobre a transição das razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente, representadas no triângulo retângulo, para a representação no ciclo trigonométrico, via História da Matemática.

Como o intuito da sequência proposta é auxiliar o professor que trabalha no ensino médio, as questões serão respondidas em *itálico* e indicadas por “R” e, oportunamente, serão sugeridas orientações ao professor, as quais foram sublinhadas e indicadas por “OP”.

Trigonometria no triângulo retângulo

Objetivos

- ✓ Identificar os elementos do triângulo retângulo.
- ✓ Representar as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Observe as figuras a seguir, e escreva como você imagina que os povos naquela época fizeram para construir esses monumentos.

Figura A: Pirâmide de Quéops é a maior e mais antiga das três pirâmides de Gizé, no Egito.
Início da construção: 2560 a.C.
Inauguração: 2540 a.C.

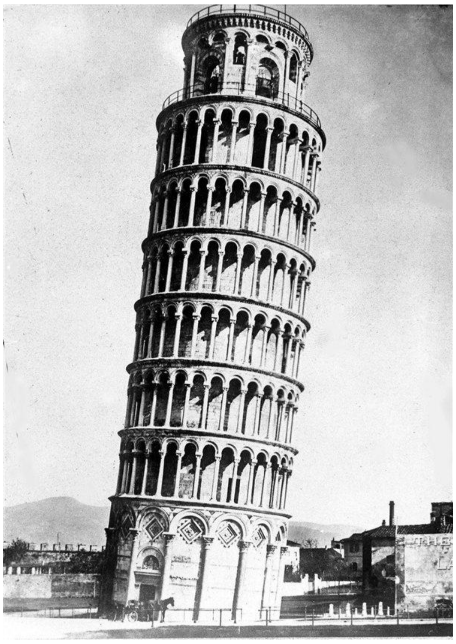


Figura B: Torre de Pisa, na Itália, imagem de 1927.

R: Esta questão é aberta, portanto, os alunos poderão responder conforme sua imaginação.

OP: Com o intuito de discutir a semelhança de triângulos e observando que o seno, cosseno e tangente de um triângulo são constantes não importando quais sejam as medidas dos lados do triângulo, inicia-se com uma revisão sobre o Teorema de Tales.

Que instrumentos você descreveria como sendo imprescindíveis para saber a altura da Pirâmide de Quéops? E para saber a inclinação da Torre de Pisa?

R: Os instrumentos que podem ser utilizados para calcular a medida da altura da Pirâmide são: uma vara vertical, instrumentos que meçam ângulos (caso já esteja familiarizado com a trigonometria). E para calcular a inclinação da Torre de Pisa, podem-se usar instrumentos que meçam distâncias, que meçam ângulos, como o teodolito.

Imagine que você está visitando a Pirâmide de Quéops, e deseja saber a altura da Pirâmide, mas não tem acesso à internet e não tem para quem perguntar. Como você poderia fazer para descobrir, aproximadamente, essa altura?

R: Resposta pessoal.

OP: Como são alunos do ensino médio, espera-se que respondam que poderiam utilizar o conceito de semelhança de triângulos. Para tal, deve-se considerar que os raios solares são paralelos, e que devemos saber a medida da base da pirâmide e a medida da sua sombra, aplicando na sequência o Teorema de Tales.

Utilizando o modelo do sólido geométrico da pirâmide de base quadrada, um pedaço de canudinho (ou objeto semelhante, usa-se massinha de modelar para fazer como canudinho permaneça na vertical) com tamanho menor que a altura da pirâmide e uma lanterna, imagine que a pirâmide representa a Pirâmide de Quéops, o canudinho representa uma pessoa com, aproximadamente, 1,70m e a lanterna representa a luz do Sol. Ilumine por diversos ângulos a pirâmide e o canudinho. Descreva o que acontece com a sombra conforme você ilumina com a lanterna.

R: Conforme a posição que a lanterna está em relação ao objeto e ao plano que ele está apoiado, teremos um ângulo diferente, o que fará com que a sombra projetada tenha um tamanho diferente e varie conforme a posição da lanterna.

Posicione na mesma direção a lanterna, a pirâmide e o canudinho, respectivamente. Agora ilumine a pirâmide e o canudinho ao mesmo tempo e anote as medidas das sombras projetadas e a altura do canudinho (figura 3).
Represente o esboço da situação descrita anteriormente.

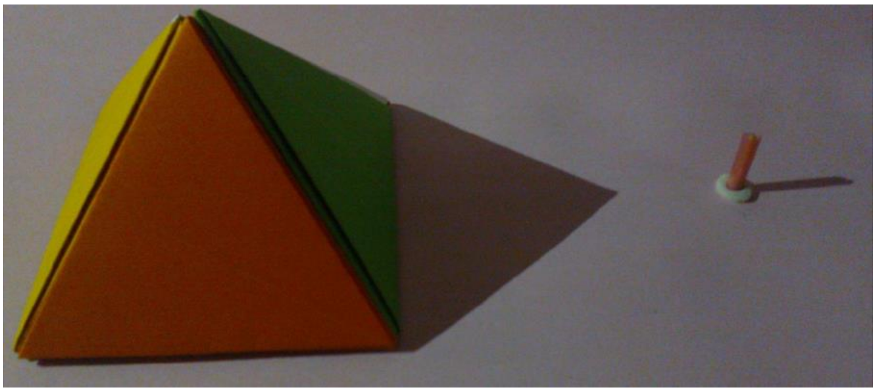
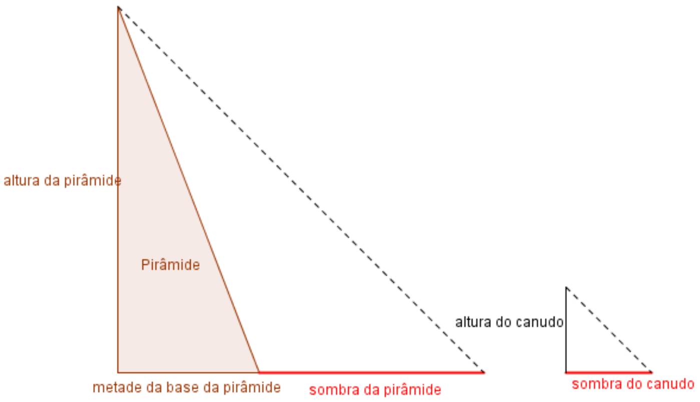


Figura C: Ilustração da atividade

R:



Com apenas as informações sobre a altura de um dos objetos e as medidas das sombras projetadas tente descobrir a altura da pirâmide.

R: Depende da pirâmide que o professor usar em sala de aula, e para resolver usa-se semelhança de triângulos.

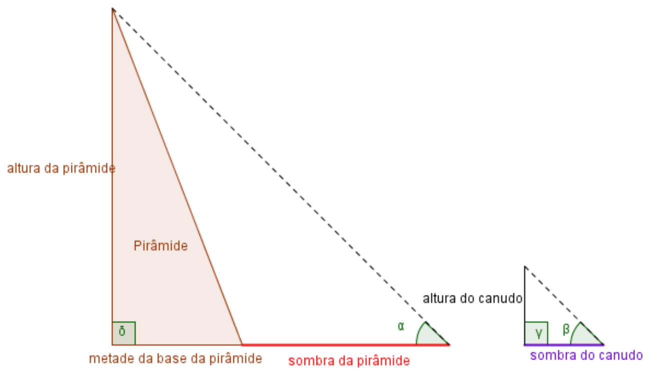
Agora, imagine calcular a altura de uma pirâmide de base quadrada, aproximadamente, no ano de 624-546 a.C. medindo 220 metros, sem ter os modernos instrumentos de medida que hoje temos.

Semelhantemente ao que fizemos Tales de Mileto, há aproximadamente, 624-546 a.C., fez para descobrir a altura das pirâmides do Egito. Por isso o teorema a seguir recebe seu nome: TEOREMA DE TALES.

Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

Agora, note que se um triângulo possui dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes. Foi o que ocorreu anteriormente, pois a luz (raios de sol) é considerada paralela.

Quais são os ângulos congruentes?



$$\delta = \gamma = 90° \quad \alpha = \beta$$

A partir da relação entre os ângulos e as medidas dos objetos e suas projeções, temos como calcular medidas inacessíveis, usando não apenas os lados de um triângulo, mas também seus ângulos. Foi da necessidade de calcular distâncias inacessíveis como larguras de rios, alturas de pirâmides e árvores, distâncias entre planetas e seus tamanhos, e estudar outras relações na Astronomia que surgiu a TRIGONOMETRIA.

A trigonometria se originou há muito, muito tempo atrás, e era bem diferente da trigonometria que temos hoje, que é chamada de trigonometria moderna.

A história nos revela o seu desenvolvimento, porém, o seu começo é difícil de ser datado. Contudo, por meio de registros como o Papiro de Rhind (cerca 1650 a.C.), Almagesto (século II d.C.) e outros escritos feitos por vários povos e propagados ao longo dos séculos percebemos o seu avanço.

Alguns dos fatores que motivaram esse desenvolvimento foram a Astronomia e as construções, como por exemplo, a altura de pirâmides do Egito.

Figura D: Papiro de Rhind

Fonte: http://tecciencia.ufba.br/equacao-do-2o-grau/curiosidades

Figura E: Almagesto

Fonte: http://www.danielmarin.es/hdc/astronomiaarabe.htm

Mas afinal, o que é trigonometria?

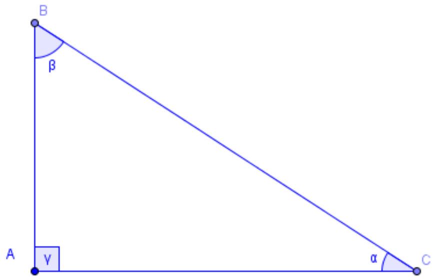
R: É parte da Matemática que estabelece os métodos de resolução de triângulos e investiga as funções trigonométricas.

E um triângulo retângulo?

R: Um triângulo é chamado de triângulo retângulo, se e somente se, possui um ângulo reto.

Represente um triângulo retângulo ABC e indique na figura os ângulos.

R:



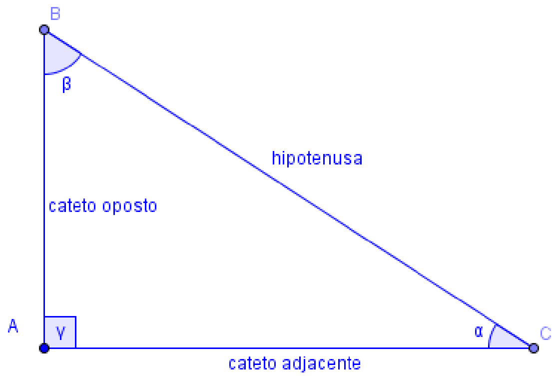
Os ângulos que não são retos são:

(*X*) agudos ( ) obtusos

Justifique: *R: Os ângulos agudos são menores que um ângulo reto* $(90°)$*, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é* $180°$ *e um deles é* $90°$*, concluí-se que a soma dos demais deve medir* $90°$*.*

No triângulo retângulo temos algumas relações entre os ângulos e os lados opostos a esses ângulos. Escolha um dos ângulos do triângulo, exceto o ângulo reto, e em relação a este ângulo, nomeie os demais lados de cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa.

Em relação ao ângulo α*, temos:*



Representе as definições dadas em linguagem matemática:

> **a.** **Seno** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.
> **b.** **Cosseno** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.
> **c.** **Tangente** de um ângulo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo.
> **d.** **Cotangente** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e o cateto oposto.

<u>Espera-se que o aluno consiga transpor a linguagem escrita para a linguagem matemática:</u>

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{cateto\ oposto}{hiponetusa} \qquad \tan\alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hiponetusa} \qquad \cot\alpha = \frac{cateto\ adjacente}{cateto\ oposto}$$

Assim, para calcular, por exemplo, à distância e a altura, os astrônomos e matemáticos usavam a trigonometria. Para que não precisassem calcular sempre que fosse necessária a medida de algum ângulo, foram construídas as tábuas trigonométricas, ou seja, tábuas que continham as razões trigonométricas. Dessa maneira se podia consultar na tabela quando se queria alguma medida de ângulo.

Você já viu uma tabela trigonométrica?
R: Resposta pessoal.

Pesquise uma tabela trigonométrica que contenha as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de ângulos compreendidos entre $0°$e $90°$.

<u>OP: Solicitar que os alunos tragam para a próxima aula.</u>

As tabelas trigonométricas

Objetivos

- ✓ Apresentar como surgiram as tabelas trigonométricas.
- ✓ Relacionar a função corda e a função seno.
- ✓ Discutir o surgimento do cosseno.

Como já vimos anteriormente, as tabelas trigonométricas surgiram da necessidade do cálculo de medidas inacessíveis e para facilitar a obtenção dessas medidas.

<u>OP: As palavras que estão em itálico e sublinhada são para serem completadas pelos alunos ao longo do desenvolvimento da atividade.</u>

As primeiras tábuas foram construídas por Hiparco de Nicéia, que viveu na época de 120 a.C., por isso ele é chamado de <u>*Pai da Trigonometria*</u>. Ele considerava que cada triângulo estava inscrito dentro de um círculo, e com base nisso construiu suas tábuas trigonométricas.
O trabalho de Hiparco foi ampliado por Cláudio Ptolomeu, no século II d.C., que escreveu o livro O Almagesto, que significa <u>*o maior.*</u>

Figura F: Cláudio Ptolomeu (século II d.C.)

Fonte: http://www.explicatorium.com/biografias/Biografia_Claudio_Ptolomeu.php

No livro Almagesto estão contidas tábuas trigonométricas e estudos sobre a Astronomia. Esta foi uma importante obra, consultada durante muito tempo pelos astrônomos.

Por estar aliada a Astronomia, a Trigonometria não ficou apenas do plano.

Para ilustrar esse outro ramo da trigonometria, vamos representar um triângulo sobre a superfície de uma esfera. Assim, fixe três alfinetes em uma bola de isopor, e depois coloque um elástico envolvendo esses alfinetes, de tal forma que cada alfinete represente um vértice do triângulo.

<u>OP: Por meio dessa atividade é possível discutir sobre a geometria não-euclidiana, pois este é um amplo assunto que não nos deteremos neste trabalho, mas que pode servir como âncora para conteúdo de geometrias não–euclidianas.</u>

Que figura você encontrou?

Figura G: Triângulo na esfera

R: Um triângulo esférico.

A trigonometria esférica é aquela em que os triângulos estão sob a superfície de uma *<u>esfera</u>,* como por exemplo, a figura que você obteve na atividade anteriormente.

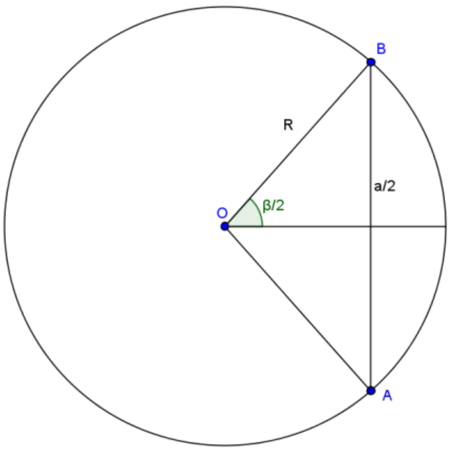
A partir de observações como essas surgiram as duas trigonometrias: a *esférica* e a *plana*, as quais se desenvolveram juntas com a contribuição de muitos estudiosos.

RETORNANDO AS TABELAS TRIGONOMÉTRICAS...

Será que existiu outra função para calcular as tabelas trigonométricas que não seja por meio do seno e/ou cosseno?
R: Resposta pessoal.

OP: A intenção é fazer o aluno refletir sobre como surgiram às razões trigonométricas, as quais não foram definidas como vemos nos livros didáticos, mas aperfeiçoadas até chegar ao que conhecemos hoje.

Por incrível que pareça nenhum dos dois, o que surgiu inicialmente foi a função corda:
A corda é um segmento cujas extremidades pertencem à circunferência.
Observe a figura a seguir, em que: crd representa corda; a representa a medida da corda; R o raio; e β o ângulo central.



$$\mathrm{crd}\beta = 2\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2}$$

$$\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2} = \frac{a/2}{R} = \frac{1}{2R}\,\mathrm{crd}\,\beta$$

Figura H: Função corda

Ptolomeu colocou em sua obra uma tabela trigonométrica e de forma bem detalhada a explicação de como calcular tal tabela.

Foi por meio da função corda que Ptolomeu construiu a tabela trigonométrica para ângulos compreendidos entre $0°$ a $180°$, com incrementos de $1/2°$. Para isso usou o raio igual a 60, isto porque, havia influência dos babilônios, os quais usavam o sistema sexagesimal, isto é, base 60.

Logo:

$$\mathrm{crd}\ \beta = 120\ \mathrm{sen}\frac{\beta}{2}$$

Agora é com você: Considerando a relação acima, e sabendo que a $\mathrm{crd}\ 90° = 84^p 51' 10''$ (lê-se: 84 partes, 51 sexagésimos e 10 três mil e seiscentos avos, pois está em base sexagesimal), calcule o $\mathrm{sen}\ 45°$.

Observação: Note que $84^p 51' 10''$está na base sexagesimal, ou seja, $$84 + \frac{51}{60} + \frac{10}{60^2}$$ $$84 + \frac{51}{60} + \frac{10}{3600}$$

R:

Usando $crd\ \beta = 120\ sen\frac{\beta}{2}$*, segue que:*

$crd\ 90° = 120\ sen\ 45°$

$$84 + \frac{51}{60} + \frac{10}{60^2} = 120\ sen\ 45°$$

$$\left(84 + \frac{51}{60} + \frac{10}{60^2}\right)\frac{1}{120} = sen\ 45°$$

$$\frac{84}{120} + \frac{51}{60 * 120} + \frac{10}{3600 * 120} = sen\ 45°$$

$0{,}7 + 0{,}007 + 0{,}000023 = sen\ 45°$

$sen\ 45° = 0{,}707023$

Faça o caminho inverso, sabendo que $\mathrm{sen}\ 36° = 0{,}5877852$, calcule a $\mathrm{crd}\ 72°$, em base sexagesimal.

Observação: $\text{crd}\,90° = 60\sqrt{2} = 84,85281374$ em base decimal.

Para transformar em base sexagesimal:

$$0{,}8528 * 60 = \mathbf{51},168$$

$$0{,}168 * 60 = \mathbf{10},08$$

Logo em base sexagesimal $\text{crd}\,90° = 84^{p}51'10''$

R:

Usando $crd\ \beta = 120\, sen\frac{\beta}{2}$*, segue que:*

$$crd\ 72° = 120\, sen\frac{72°}{2}$$

$$crd\ 72° = 120\, sen\, 36°$$

$$crd\ 72° = 120 * 0{,}5877852$$

$$crd\ 72° = 70{,}534224$$

Transformando em base sexagesimal:

$$0{,}534224 * 60 = \mathbf{32},05344$$

$$0{,}053344 * 60 = \mathbf{3},20064$$

Logo $crd\ 72° = 70^{p}32'3''$

Veja agora a tabela que Ptolomeu construiu usando a função corda:

Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			Tábua de Cordas		
περιφερειῶν	εὐθειῶν	ἑξηκοστῶν	arcos	cordas	sexagesimos
∠'	ō λα κε	ō α β ν	½°	0;31,25	0;1,2,50
α	α β ν	ō α β ν	1°	1;2,50	0;1,2,50
α∠'	α λδ ιε	ō α β ν	1½°	1;34,15	0;1,2,50
β	β ε μ	ō α β ν	2°	2;5,40	0;1,2,50
β∠'	β λζ δ	ō α β μη	2½°	2;37,4	0;1,2,48
γ	γ η κη	ō α β μη	3°	3;8,28	0;1,2,48
γ∠'	γ λθ νβ	ō α β μη	3½°	3;39,52	0;1,2,48
δ	δ ια ις	ō α β μζ	4°	4;11,16	0;1,2,47
δ∠'	δ μβ μ	ō α β μζ	4½°	4;42,40	0;1,2,47
ε	ε ιδ δ	ō α β μς	5°	5;14,4	0;1,2,46
ε∠'	ε με κζ	ō α β με	5½°	5;45,27	0;1,2,45
ς	ς ις μθ	ō α β μδ	6°	6;16,49	0;1,2,44
ς∠'	ς μη ια	ō α β μγ	6½°	6;48,11	0;1,2,43
ζ	ζ ιθ λγ	ō α β μβ	7°	7;19,33	0;1,2,42
ζ∠'	ζ ν νδ	ō α β μα	7½°	7;50,54	0;1,2,41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ροδ∠'	ριθ να μγ	ō ō β νγ	174½°	119;51,43	0;0,2,53
ροε	ριθ νγ ι	ō ō β λς	175°	119;53,10	0;0,2,36
ροε∠'	ριθ νδ κζ	ō ō β κ	175½°	119;54,27	0;0,2,20
ρος	ριθ νε λη	ō ō β γ	176°	119;55,38	0;0,2,3
ρος∠'	ριθ νς λθ	ō ō α μζ	176½°	119;56,39	0;0,1,47
ροζ	ριθ νζ λβ	ō ō α λ	177°	119;57,32	0;0,1,30
ροζ∠'	ριθ νη ιη	ō ō α ιδ	177½°	119;58,18	0;0,1,14
ροη	ριθ νη νε	ō ō ō νζ	178°	119;58,55	0;0,0,57
ροη∠'	ριθ νθ κδ	ō ō ō μα	178½°	119;59,24	0;0,0,41
ροθ	ριθ νθ μδ	ō ō ō κε	179°	119;59,44	0;0,0,25
ροθ∠'	ριθ νθ νς	ō ō ō θ	179½°	119;59,56	0;0,0,9
ρπ	ρκ ō ō	ō ō ō ō	180°	120;0,0	0;0,0,0

Figura I: Tábuas de Cordas

Fonte: Aaboe (2002, p. 123)

As tabelas trigonométricas foram sendo aprimoradas ao longo dos séculos.
É interessante ressaltar que no *século IV e V*, os *hindus* começaram a utilizar a função seno, e esta foi sendo propagada pelo mundo.
E o cosseno? Existe alguma relação entre seno e cosseno?
R: Resposta pessoal.

OP: Deixar que o aluno reflita sobre isso.

Observe-se que o seno e cosseno surgiram da necessidade da *Astronomia.*
De acordo com a história, o povo que usou as seis funções trigonométricas foram os *árabes*, tais funções são: *seno*, *cosseno*, *tangente*, *cotangente*, *secante* e *cossecante*.

Ao mencionar os árabes, não podemos esquecer *Nasir Eddin* (1201-1274),que foi o primeiro a estudar a trigonometria separada da Astronomia.
O europeu Regiomontanus (1436-1476) construiu tabelas de cossenos. E em 1620, Edmund Gunter definiu a palavra cosseno, pois como o **cosseno é igual ao seno do complemento**, Gunter combinou a palavra “complemento” e “seno”, formando então co-sinus, que foi modificada para cosinus, e em português cosseno.

Escreva em linguagem matemática a seguinte sentença: **cosseno é igual ao seno do complemento.**

R: $cos\,\alpha = sen(90° - \alpha)$

Aplicação das razões trigonométricas

Objetivos:

✓ Aplicar as razões trigonométricas: seno, cosseno, tangente e cotangente.

Problema 01:

O Parque Barigui, localizado em Curitiba, possui um amplo espaço para lazer e prática de esportes, além de um grande lago.

Carlos e Maria querem saber qual a distância de onde eles estão até o seu amigo João, que está do outro lado do lago; usando um teodolito, eles mediram o ângulo entre Maria, Carlos e João obtendo 78°. Se eles fossem atravessar o lago com o "pedalinho", partindo de onde Carlos está e sabendo que a distância entre Carlos e Maria é 10 metros, que distância eles percorrerão com o "pedalinho"?

Figura J: Parque Barigui

R: Sendo x a distância entre Carlos e João, segue que:

$$cos\,78° = \frac{10}{x} \Longrightarrow 0{,}2079 = \frac{10}{x} \Leftrightarrow 0{,}2079 * x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{0{,}2079}$$

$$\Longrightarrow x = 48{,}10\, metros$$

Eles percorrerão com o "pedalinho", aproximadamente, 48 metros.

Problema 02:

Luana, Felipe e Talita estão passeando no Jardim Botânico de Curitiba, e estão nos pontos conforme a figura a seguir:

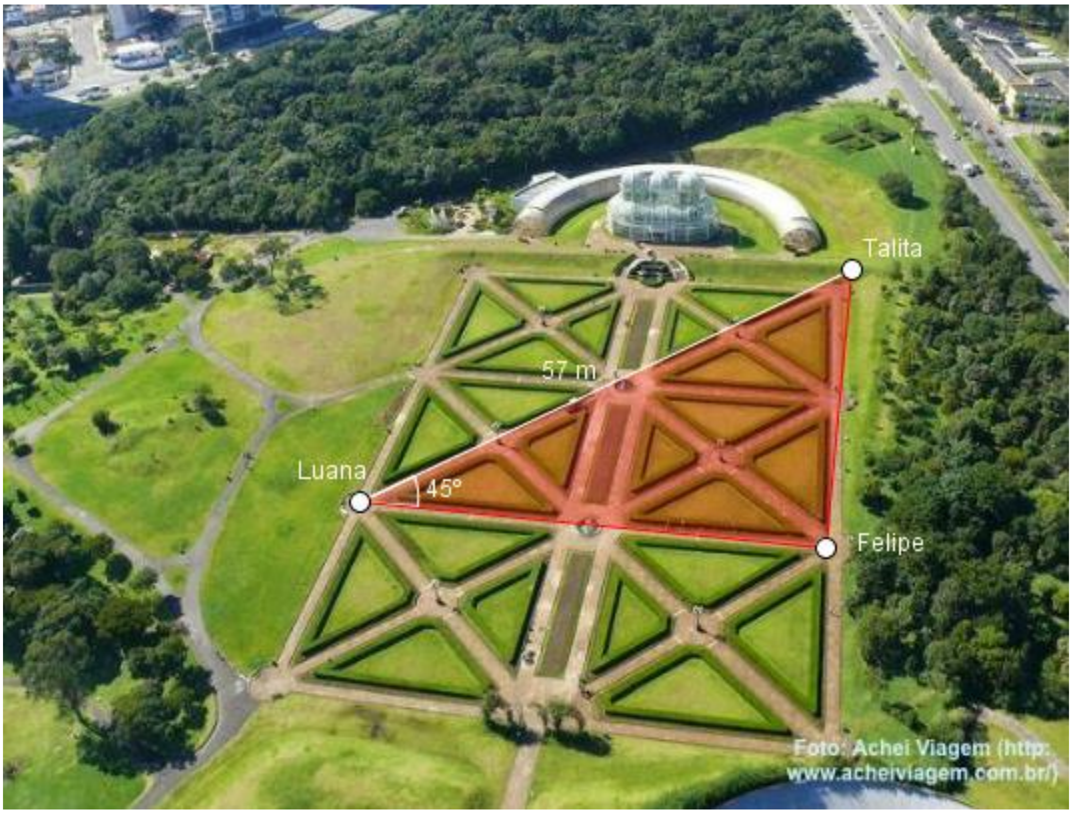


Figura K: Jardim Botânico

Fonte: http://www.areasverdesdascidades.com.br/2015/04/jardim-botanico-francisca-maria.html

Sabendo que a distância entre Talita e Luana é 57 metros, calcule a distância entre Felipe e Talita (Considere $\sqrt{2} = 1{,}4142$).

R:

Sendo d a distância entre Felipe e Talita, segue que:

$$sen\,45° = \frac{d}{57} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{57} \Leftrightarrow 2 * d = 57 * \sqrt{2} \Leftrightarrow d = \frac{57}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow d = 20{,}15\,metros$$

Portanto, a distância entre Talita e Felipe é de 20,15 metros.

Problema 03:

Um dos mais antigos registros sobre a cultura egípcia é o Papiro de Rhind (aproximadamente 1650 a.C.), nele encontramos vários problemas que envolvem a construção de pirâmides.

Devido à observação das inclinações constantes das faces de uma pirâmide, os egípcios obtiveram as primeiras noções de tangente e cotangente. Hoje, o grau de inclinação de uma reta é medido por meio da razão entre segmentos verticais e horizontais, conceito que já era usado no Egito.

O afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade na altura é denominado de *seqt*. Atualmente, ainda, para indicar a inclinação de uma parede, os arquitetos utilizam a palavra *seqt.*

Logo, o *seqt* da face de uma pirâmide é o quociente entre o afastamento horizontal pelo vertical, a unidade de medida usada pelos egípcios para medir o afastamento vertical era o cúbito, já, para medir a distância horizontal era usada a “mão” que equivale a um sétimo do cúbito.

A seguir, temos a descrição do problema 56 do Papiro de Rhind, tal problema mede o *seqt* de uma pirâmide de 250 cúbitos de altura cujos lados da base medem 360 cúbitos.

- Divida 360 por 2;

Explicação: Considerando a base da pirâmide *ABCD* (Figura 12 e 13), que possui uma base quadrada de lado 360 cúbitos. Se dividir por 2, obtém-se o apótema do quadrado, conforme as figuras abaixo, este apótema é a base do triângulo *PFE*.

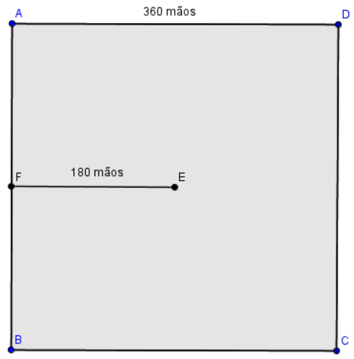


Figura L: Apótema da base

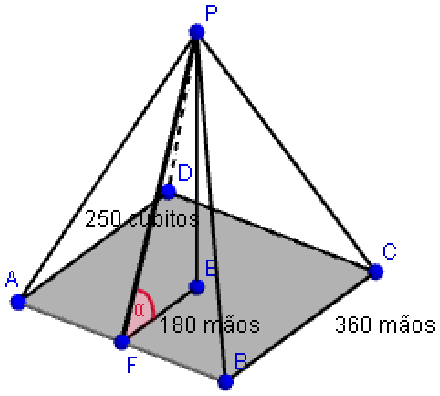


Figura M: Pirâmide

- Ao resultado desta divisão (180), divida por 250, obtendo 1/2 + 1/5 + 1/50.

Explicação: Note que o problema pede o *seqt*, ou seja, a inclinação do ângulo $\hat{F}$, que é calculada pela razão entre o afastamento horizontal $(\overline{EF})$ e o eixo vertical $(\overline{PE})$, como mostra a figura 5. Logo:

$$\text{seqt} = \frac{\text{afastamento horizontal}}{\text{eixo vertical}} = \frac{180}{250} = 0{,}72 = 0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}02 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}$$

O que equivale a:

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\text{cat. ad}}{\text{cat. op}} = \frac{180}{250}$$

- Multiplique $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}\right)$ por 7 e obterá 5 $\frac{1}{25}$ em mãos por cúbito.

Explicação: Como o *seqt* é dado em mãos por cúbitos é preciso transformar esta unidade, logo como uma "mão" é igual a 7 cúbitos, multiplicamos o resultado em cúbitos por 7, assim teremos 5 $\frac{1}{25}$ mãos/cúbito.

Este documento mostra o conhecimento que os egípcios tinham, especialmente no que diz respeito a cotangente.

Agora, imagine que com apenas esses conhecimentos os egípcios há, aproximadamente, 1650 anos a.C., já faziam uso da trigonometria. Assim, sabendo que a Pirâmide de Quéops possui a base quadrada com lados de 440 cúbitos e altura de 280 cúbitos, calcule o *seqt* da pirâmide.

OP: Esta é uma questão que requer um pouco mais de aprofundamento. Uma sugestão é o professor resolver o problema 56 do Papiro de Rhind, juntamente com os alunos, explicando cada passo, e mostrando como o pensamento egípcio estava correto quanto à inclinação da face da pirâmide.
Para resolver esse problema os alunos terão que retomar alguns conceitos sobre a transformação de números fracionários em número decimais e vice-versa, como também resolver frações mistas e transformação de unidades de medida (mãos por cúbito).

R:

$$seqt = \frac{afastamento\ horizontal}{afastamento\ vertical} = \frac{220}{280} = 0{,}78571$$

$$= 0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}08 + 0{,}005 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{5}{1000}$$

Multiplicando por 07, visto que o seqt é medido em mãos, segue que:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{5}{1000}\right) * 7 = \frac{7}{2} + \frac{7}{5} + \frac{7}{25} + \frac{35}{1000} = 5{,}495 \cong 5\frac{1}{2}$$

Logo o seqt da pirâmide é aproximadamente é 5,5 mãos por cúbitos.

Sabendo que o cúbito vale aproximadamente 0,5 metros, quantos metros tem a base da Pirâmide de Quéops?

R: $440 * 0{,}5 = 220\ metros$

Problema 04:

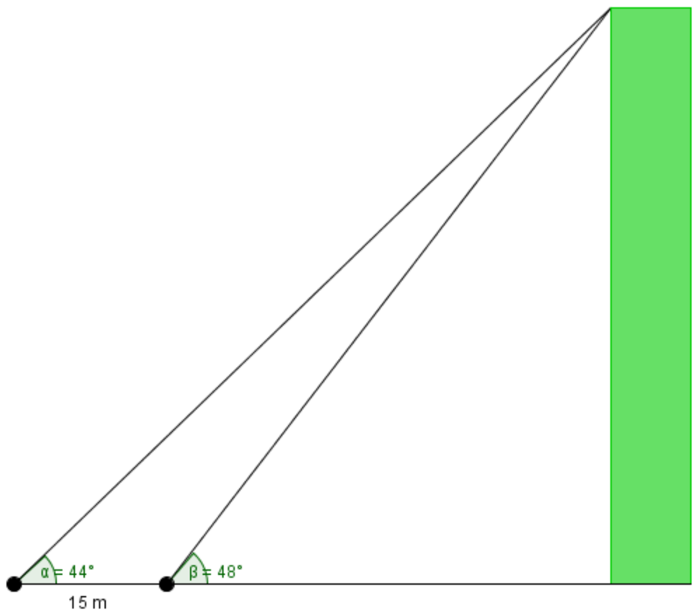
Em Curitiba há um ponto turístico chamado Torre da Telepar, onde é possível ter uma vista panorâmica da cidade. Um observador quis saber qual era a altura da torre. Então, usando um instrumento chamado teodolito, ele observou a torre de dois pontos distintos. A partir da sua própria altura, ele fez um modelo para então determinar a altura da torre. Com base nessas informações calcule a altura, aproximada, da torre.

Figura N: Torre da Telepar

Fonte: http://www.guiaturismocuritiba.com/2010/10/torre-panoramica.html

Figura O: Teodolito, instrumento usado para medir ângulos.

Fonte: http://construdeia.com/wp-content/gallery/teodolito/teodolito-14.jpg



R:

Usaremos a razão trigonométrica tangente para resolver este problema. Denominemos por h a altura da torre e de x a distância entre a base da torre até o primeiro ponto. Dessa maneira:

$$\begin{cases} tan\,44° = \dfrac{h}{15+x} & (1) \\ tan\ 48° = \dfrac{h}{x} & (2) \end{cases}$$

Isolando h na equação (2)

$$x * tan\,48° = h \qquad (3)$$

E substituindo (3) na equação (1) segue que:

$$tan\,44° = \frac{x *\ tan\,48°}{15+x}$$
$$\Leftrightarrow 15 *\ tan\,44° + tan\,44° * x = x * tan\,48°$$
$$\Leftrightarrow tan\,44° * x - x * tan\,48° = -15 * tan\,44°$$
$$\Leftrightarrow x * (tan\,44° - tan\,48°) = -15 * tan\,44°$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-15 * tan\,44°}{tan\,44° - tan\,48°}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-15 * 0{,}9656}{0{,}9656 - 1{,}1106}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-14{,}484}{-0{,}145}$$
$$\Rightarrow x = 99{,}88$$

Retornando a equação (3) e substituindo o valor de x, encontramos h:

$$99{,}88 * 1{,}1106 = h$$
$$\Rightarrow h = 110{,}92 \cong 110\,metros$$

Portanto, a altura da torre é de, aproximadamente, 110 metros.

Arcos e ângulos

Objetivos

- ✓ Construir arcos de circunferência.
- ✓ Identificar unidades de medidas para arcos.

Hiparco de Niceia (120 a.C.) inscrevia triângulos em círculos e a partir disso desenvolveu um sistema para calcular ângulos.
Dessa forma, a trigonometria foi tratada em termos de arcos de círculo, até que Rheticus (1514-1576) concentrou-se em estudar os triângulos retângulos.

Diferencie circunferência de círculo.

R:

Circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano que estão localizados a uma mesma distância r do centro da circunferência.

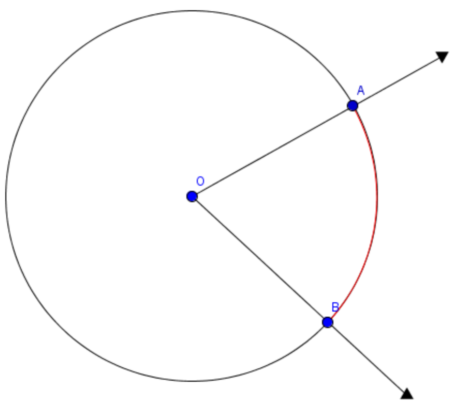
O círculo é a reunião da circunferência com o conjunto de pontos localizados dentro da mesma.

Explique o que é um arco de uma circunferência.

R: O arco de uma circunferência é uma parte da circunferência determinado por dois de seus pontos.

Faça a construção de um arco de circunferência.

R: Na figura abaixo temos o arco $\widehat{BA}$.



Quais unidades de medida, você imagina, que são usadas para medir um arco de uma circunferência?
R: Resposta pessoal. Grau e o radiano.

No começo da trigonometria a unidade de medida usada era o ***grau**.*
Quantos graus têm uma circunferência?
R: $360°$.

Você sabe explicar o por quê?
R: Resposta pessoal.

A justificativa é porque os ***babilônios antigos*** desenvolveram um sistema ***sexagesimal***, isto é, na base 60. Eles fizeram a divisão do ***zodíaco*** (que é o caminho aparente do Sol, durante seu percurso anual, entre estrelas fixas) em 12 partes iguais. O zodíaco era usado como um ***círculo*** de referência para descrever o percurso dos planetas entre as estrelas fixas.
E foi ***Hiparco*** quem introduziu a divisão do círculo em $360°$.
Ptolomeu dividiu cada parte (grau) em 60 subpartes, originando o ***minuto*** e depois dividiu cada um desses em 60 novamente, surgindo então o ***segundo**.*

Mas será que esta é a única medida utilizada?
R: Resposta pessoal.

No ano de 1873, a unidade de medida ***radiano*** apareceu impressa pela primeira vez em uma publicação de ***James Thomson**.*
Vários estudiosos consideraram a importância de uma nova unidade de medida, para ***simplificar*** fórmulas matemáticas e físicas.
Mas afinal o que é o radiano e o grau?

O grau é um arco unitário igual $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido, ou seja, é quando dividimos a circunferência em 360 partes congruentes.

O radiano é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio r da circunferência que contém o arco a ser medido.

Como estamos estudando sobre círculos e circunferência, como você imagina que eram os tamanhos dos raios utilizados pelos matemáticos e astrônomos quando eles construíram as tabelas trigonométricas?
R: Resposta pessoal.

OP: Estas questões de reflexão servem para o aluno perceber que a trigonometria foi se modificando ao longo do tempo. Ao aplicar as atividades, discuta com os alunos, questione, peça que eles se manifestem em sala, para que o conhecimento seja construído e não imposto como algo pronto e acabado.

As medidas dos raios eram valores altos e diferentes para cada povo que estudava a trigonometria. Por exemplo, Ptolomeu usou um raio de *60* unidades, alguns hindus utilizaram um raio de *3438 unidades*, já Regiomontanus usou um raio de *600.000* unidades.
Foram os árabes Abul'Wefa e al-Biruni que usaram o raio *unitário*, ou seja o raio igual a 1.
Assim, a partir do raio unitário, calcule o comprimento de uma circunferência, sabendo que o radiano é igual a medida do raio da circunferência.

R: Sabendo que o comprimento da circunferência é dado por $C = 2\pi R$, onde R é o raio da circunferência e C é o comprimento. Então $R = 1\,rad$:

$$C = 2\pi R \Leftrightarrow C = 2\pi(1\,rad) \Leftrightarrow C = 2\pi\,rad$$

Portanto, o comprimento da circunferência é $2\pi\,rad$.

Se sabemos que $360°$ corresponde a $2\pi\,rad$, como podemos fazer para transformar um valor que está em grau para radiano?
R: Usando a regra de três.

Exemplo: Para calcularmos quantos radianos equivalem a $60\,°$. *Montaremos uma regra de três, chamando de* x *o valor que queremos encontrar em radianos.*

$$360^0 \;\rightarrow\; 2\pi\, rad$$

$$60^0 \;\rightarrow\; x\, rad$$

$$360° * x\, rad = 2\pi\, rad * 60°$$

$$\Longleftrightarrow x\, rad = \frac{2\pi\, rad * 60°}{360°}$$

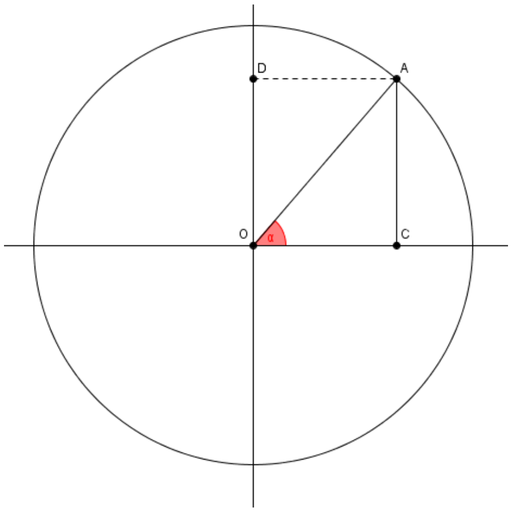
$$\Longleftrightarrow x\, rad = \frac{\pi}{3}\, rad$$

Ciclo trigonométrico

Objetivos

- ✓ Estudar o ciclo trigonométrico.
- ✓ Razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

A partir do raio unitário, estipulado por Abul' Wefa e al-Biruni, considere a circunferência abaixo. Sabendo que o ponto A pertence à circunferência e o triângulo ACO é retângulo, calcule o seno e o cosseno em relação ao ângulo α.



R:

Calculando o seno de α temos:

$$sen\,\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}}$$

Como o raio é 1 então:

$$sen\,\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC}$$

Como o segmento $\overline{OD} = \overline{AC}$, logo

$$sen\,\alpha = \overline{AC} = \overline{OD}$$

Calculando o cosseno de α:

$$cos\, \alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \overline{OC}$$

Rheticus (1514-1576) disse que se OA é o raio, então a perpendicular é o seno e a base é o cosseno.

Seus cálculos confirmam o que Rheticus disse?

R: Sim.

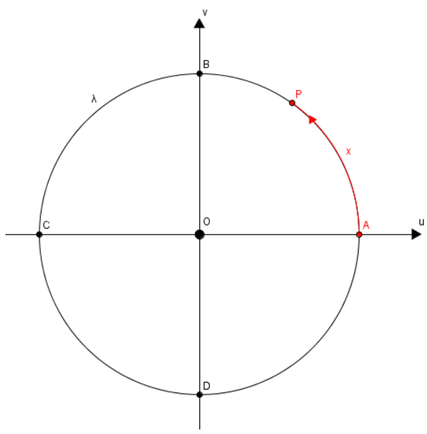
DEFININDO CICLO TRIGONOMÉTRICO...

Considere uma circunferência λ de centro O e raio $r = 1$, sobre um plano cartesiano ortogonal uOv.

Sabemos que o comprimento da circunferência é 2π, então associe a cada número real x com $0 \leq x \leq 2\pi$, um único ponto P da circunferência λ da seguinte maneira:

Se $x = 0$ então P coincide com A.

Se $x > 0$ então realizamos a partir de A um percurso de comprimento x, no sentido anti-horário, e marcamos P como ponto final do percurso.



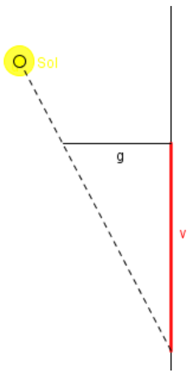
Esta circunferência λ é chamada de circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico.

Foi *François Viète* (1540-1603) quem aplicou a *álgebra* à trigonometria, ele é considerado o *pai da abordagem analítica* da trigonometria e, além disso, ele era a favor da representação *decimal* e não sexagesimal.

Figura P: François Viète (1540-1603)
Fonte: http://www.biografiasyvidas.com/biografia/v/vieta.htm

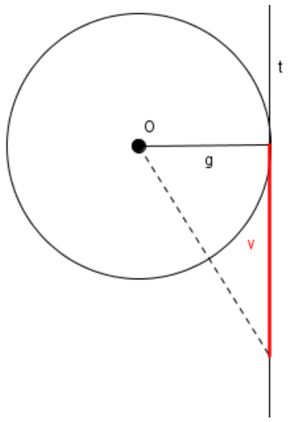
Pesquisando sobre as razões trigonométricas, descobrimos as origens da história da tangente. Foram os *egípcios* com os *relógios* de sol nas paredes de construções os criadores das tábuas de sombras. Esses relógios serviam para medir o *tempo*, pois eles perceberam que conforme o sol se movia, as sombras dos objetos *variavam*, e assim construíram essas *tábuas de sombras*.

Eles tomavam o gnômon, que é uma espécie de vara, e a colocavam na parede das construções e a partir da sua sombra mediam o tempo.
Considere g o comprimento do gnômon e v a sombra vertical.



Agora, construa uma circunferência de raio g.

R:



Em qual reta a sombra vertical está contida?

R: Na reta tangente a circunferência.

Foi por meio dessas observações que se originou o conceito da tangente, batizada com este nome, em 1583, por *Thomas Fincke*. Vale lembrar que *Rheticus* já havia tratado a tangente como razão entre os lados de um triângulo.

Construindo o ciclo trigonométrico:

1) Faça uma circunferência com a medida do raio definida por **Abul' Wefa** e **al-Biruni**.
2) Coloque os eixos ortogonais, os quais foram definidos por **Descartes**, que é considerado o pai da geometria analítica.
3) Nomeie os eixos por seno e cosseno, conforme **Rheticus**.
4) Coloque o eixo da tangente da mesma maneira que **Fincke** havia feito.
5) Considere o sentido anti-horário e nos ângulos retos e suplementares, coloque a medida do ângulo na unidade que **James Thomson** publicou em 1873.

6) Observe que o ciclo trigonométrico ficou dividido em quatro partes. Qual é nome de cada parte?
7) Quais os sinais da função seno, cosseno e tangente em cada uma dessas partes?
8) Quanto é a $\tan\frac{\pi}{2}$ e $\tan\frac{3\pi}{2}$? Por quê?

R:

1) Raio unitário
2) Eixos cartesianos.
3) Seno e cosseno.
4) Tangente.
5) Em radianos.
6) Quadrantes.

7)

***1º quadrante**:*
Seno: positivo
Cosseno: positivo
Tangente: positiva

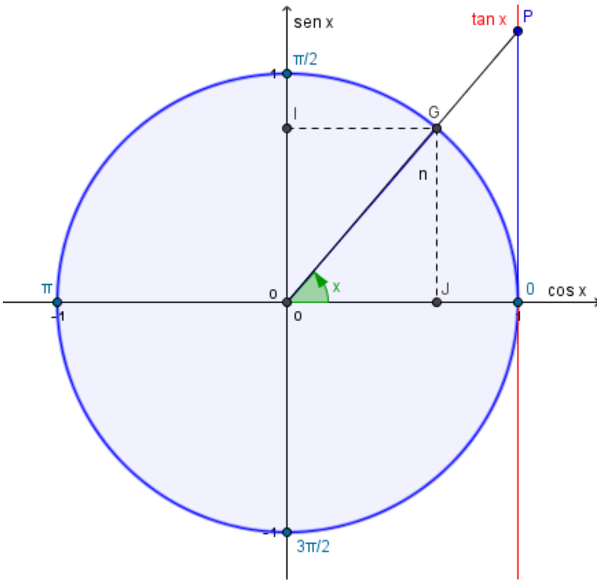
***2º quadrante**:*
Seno: positivo
Cosseno: negativo
Tangente: negativa

***3º quadrante**:*
Seno: negativo
Cosseno: negativo
Tangente: positiva

***4º quadrante**:*
Seno: negativo
Cosseno: positivo
Tangente: negativa

8) Não está definido, pois nesses pontos o cosseno é 0 e não existe divisão por zero.

Resultado final - construção do ciclo trigonométrico:



Tudo o que foi estudado até esse momento é conhecido como trigonometria moderna.

Entretanto, a partir dos estudos de *Leonard Euler* (1707-1783), o seno deixou de ser considerado como um segmento de reta e passou a ser expresso em relação a alguma unidade, ou seja, a *abscissa* de um ponto da circunferência de raio unitário com centro na origem.

OP: Essas atividades têm como objetivo explicar a transição das razões trigonometrias representadas no triângulo retângulo para a representação no ciclo trigonométrico via História da Matemática. Sugerimos a aplicação de alguns exercícios de cálculo do seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico.

Linha do tempo

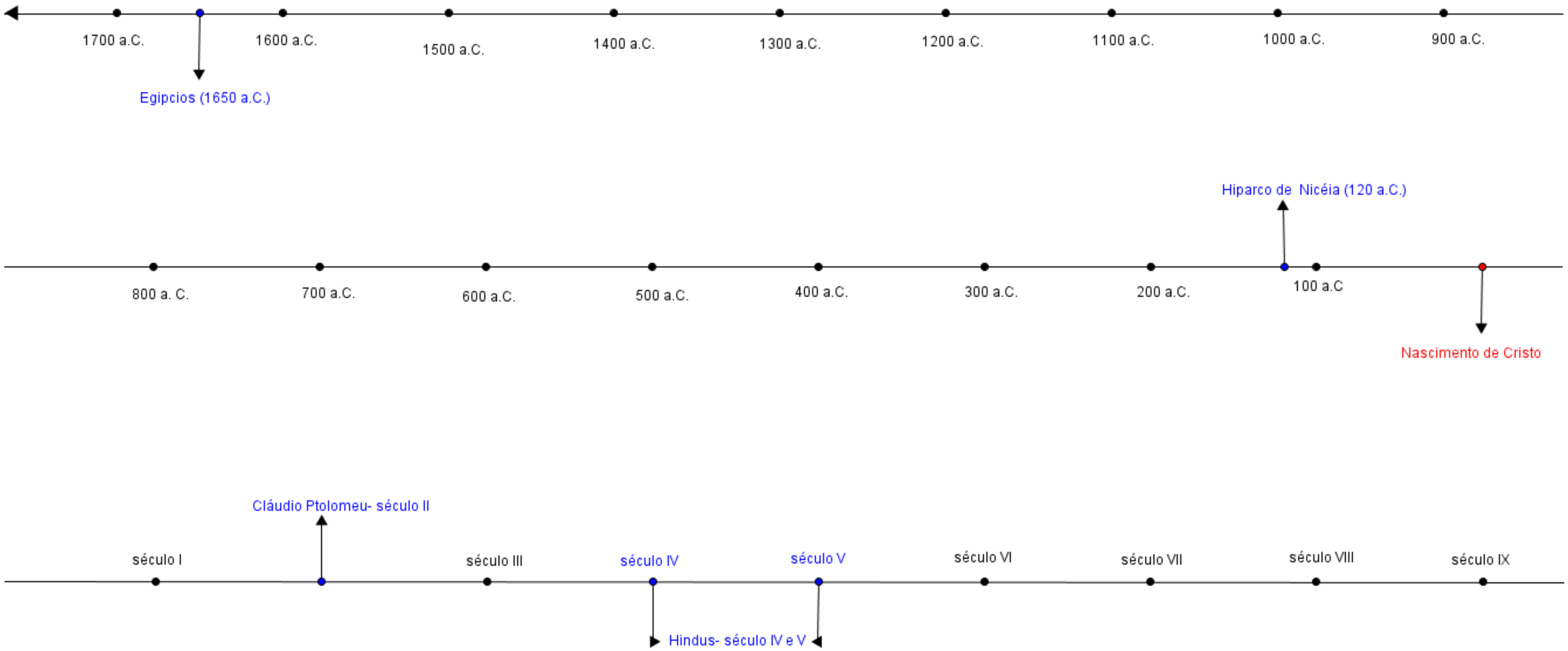
Objetivo

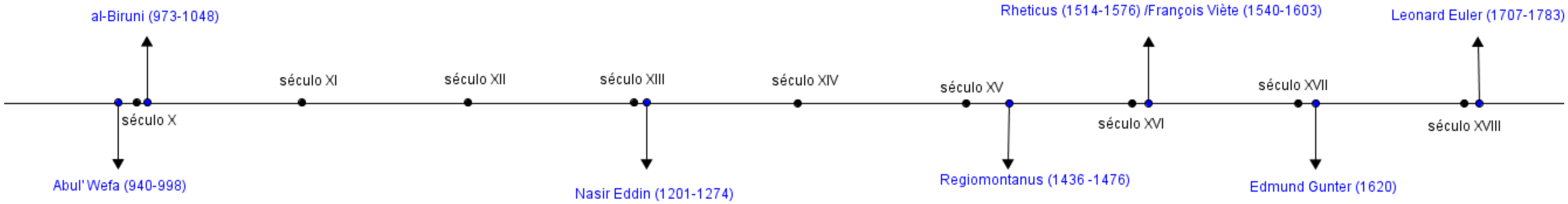
✓ Organizar cronologicamente o desenvolvimento da trigonometria.

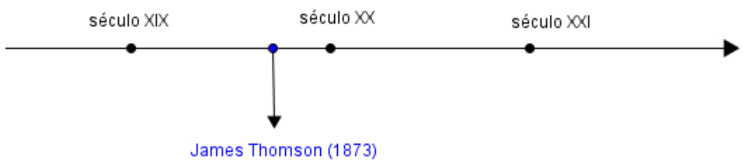
Complete os espaços em branco com a informação pertinente e a seguir construa uma linha do tempo. Destaque na linha do tempo as datas referentes a cada acontecimento relacionado à trigonometria, e o nome do matemático, povo ou do astrônomo responsável.

- O povo *egípcio* foi principiante no conceito de tangente e cotangente a aproximadamente 1650 a.C.
- *Hiparco de Nicéia* que viveu em 120 a.C. é considerado o “Pai da Trigonometria.”
- O Almagesto foi escrito por *Claúdio Ptolomeu* que viveu no século II d.C.
- Os hindus nos *séculos IV e V* começaram a usar a função seno ao invés da função corda.
- Foram os árabes *Abul’Wefa* (940-998) e *al-Biruni* (973-1048) que usaram o raio unitário, ou seja o raio igual a 1.
- *Nasir Eddin* (1201-1274) foi o primeiro a estudar a trigonometria separada da Astronomia.
- O europeu *Regiomontanus*, que viveu entre 1436 a 1476, construiu as tabelas de cossenos.
- *Rheticus* (1514-1576) concentrou-se em estudar os triângulos retângulos e nomeou os eixos cartesianos por seno e cosseno.
- Foi *François Viète* (1540-1603) quem aplicou a álgebra à trigonometria, ele é considerado o pai da abordagem analítica da trigonometria.
- Em 1620, *Edmund Gunter* definiu a palavra cosseno, pois o cosseno é igual ao seno do complemento.
- *Leonard Euler* (1707-1783) é considerado o “Pai da trigonometria moderna”.
- No ano de 1873, a unidade de medida radiano surgiu impressa pela primeira vez em uma publicação de *James Thomson.*

LINHA DO TEMPO:




al-Biruni (973-1048)
Rheticus (1514-1576) /François Viète (1540-1603)
Leonard Euler (1707-1783)
século XI
século XII
século XIII
século XIV
século XV
século XVII
século X
século XVI
século XVIII
Abul' Wefa (940-998)
Nasir Eddin (1201-1274)
Regiomontanus (1436 -1476)
Edmund Gunter (1620)


século XIX
século XX
século XXI
James Thomson (1873)

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao finalizar este estudo, a sensação é de que este trabalho está inacabado, e de fato, é perceptível a necessidade da aplicação da sequência de atividades que foi proposta anteriormente, pois somente a partir da aplicação é possível a análise e a verificação da sequência, indicando possíveis mudanças para o aperfeiçoamento da mesma e até a comprovação de que a História da Matemática permite ensinar trigonometria de forma significativa ao aluno.

Contudo, a aplicação não foi possível devido à falta de tempo, já que este trabalho foi concluído em um semestre letivo, prazo destinado a execução da Proposta de Projeto e redação da monografia. Nessa perspectiva, pretende-se aplicar a sequência apresentada para avaliá-la e dar continuidade ao estudo em questão.

O desafio de fazer uma sequência de atividades que explicasse o conteúdo por meio da História da Matemática foi realmente instigador e desafiador. Não é simples incorporar o conteúdo à história. Isso requer tempo, planejamento e disposição do professor. Tal conclusão agrega ainda mais valor a este estudo, pois poderá ser utilizado como referência pelos professores que quiserem utilizar a metodologia História da Matemática em suas aulas de trigonometria.

Usar a História da Matemática como metodologia de ensino, é ensinar o conteúdo por meio da história, dessa maneira na elaboração das atividades, evidencia-se que esta foi guiando todo o desenvolvimento das atividades, e os conteúdos foram sendo incorporados à medida que a história avançava.

Pautado na orientação de Baroni, Teixeira e Nobre (2004), primeiramente foi realizado todo o levantamento histórico sobre este conteúdo, e também sobre trabalhos na área, depois se incorporou o conteúdo com a história.

Ao começar pelo Teorema de Tales, buscou-se retomar a maneira como Tales de Mileto pensou ao calcular a altura da pirâmide, note que o aluno primeiro resolve a questão, e então é colocado que foi dessa forma que Tales de Mileto resolveu este problema, de acordo com história. Este fato retoma a afirmação de Sad (2004), quanto à utilização da História da Matemática com a problematização, por meio do diálogo.

Este diálogo foi estabelecido também nas próprias atividades, e não apenas em sala de aula durante a explicação caso esta fosse aplicada. Na elaboração das atividades tomou-se o cuidado de não negligenciar o conhecimento prévio do aluno, fazendo com que ele raciocine e registre a maneira como imaginava que foram construídos os monumentos antigos.

A partir das construções e do uso da Astronomia, evidencia-se a herança cultural que é destacada por Struik (1985), assim, se faz notória a necessidade que a humanidade teve por uma nova ferramenta, a trigonometria. Nas atividades buscou-se destacar isso, para que o conhecimento não chegue ao aluno de forma pronta e acabada. Ao contrário, buscou-se instigá-lo a descobrir o porquê do surgimento de tal ramo da Matemática.

Questionar sobre quem surgiu primeiro, o seno ou cosseno, revela mais um ponto da herança cultural, pois haviam muitos povos envolvidos: egípcios, gregos, hindus árabes e europeus.

Os porquês defendidos por Jones (1969), também são evidenciados nas atividades, ao questionar sobre os 360º da circunferência, observa-se claramente o porquê cronológico.

Quanto às aplicações elaboradas, houve a preferência por problemas que envolvessem a cidade de Curitiba, para contextualizar com a realidade do aluno, salvo que este não more em Curitiba, abre-se a possibilidade dos próprios professores, que morem em outras cidades, formularem outras situações, minimizando a distância entre o conteúdo e a realidade. E em meio às aplicações, foi destacado um problema histórico, o problema 56 do Papiro de Rhind, corroborando com o pensamento de Swetz (1989). Tal problema possibilitou o esclarecimento e o reforço do conceito da cotangente, revelando a preocupação do povo egípcio em manter as faces das pirâmides com inclinação constante, ou seja, o problema revela uma informação cultural.

No momento que ocorre a transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico, usou-se a afirmação de Rheticus para justificar porque os eixos ortogonais são denominados seno e cosseno. Ao propor que o aluno calcule o seno e cosseno do triângulo contido no círculo, permite-se que ele compreenda por que existem estes eixos, para que não se reproduza o que afirma Kline (1976), que muitos pensam que a Matemática foi criada por gênios. É imprescindível que os alunos conheçam a história para perceberem que isso não surgiu de maneira pronta.

Ao propor a construção do ciclo trigonométrico, a partir das afirmações históricas, procurou-se que o aluno associasse diretamente a Matemática e a História da Matemática, o que é evidenciado por Viana (1995) que propõe usar a História da Matemática como uma estratégia didática para ensino.

A inspiração para a elaboração das sequências de atividades foi pautada nos trabalhos desenvolvidos na área, os quais foram testados com professores e alunos do ensino médio. O cuidado tomado para não repetir o que já se tem publicado, permitiu o desenvolvimento de atividades diversificadas, o que trouxe enorme retorno para a autora.

Finalizando a proposta da sequência de atividades, foi proposta a elaboração de uma linha do tempo com o intuito de trabalhar a visão cronológica da trigonometria, destacando alguns povos e/ou personalidades envolvidas em seu desenvolvimento, o que é também é defendido por Sad (2004).

Ainda que o objetivo do estudo fosse o de estudar como ocorre a transição das razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente, representadas no triângulo retângulo, para a representação no ciclo trigonométrico, e apresentar uma sequência de atividades sobre essa transição para alunos do ensino médio, via História da Matemática, destaque-se que a partir desse estudo a maior beneficiada foi a autora. O estudo dos motivos que levam o professor a utilizar a História da Matemática apenas se fortaleceu na mesma, e o conhecimento da história da trigonometria permitiu aprender um pouco mais sobre esta área tão fantástica. Portanto, como já mencionado, o desejo da autora é de dar continuidade a esta pesquisa aplicando-a a alunos do ensino médio para validação e continuidade do estudo em questão.

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática**. Tradução de: CARVALHO, João B.P. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

AYRES JR., Frank. **Trigonometria**: plana e esférica. Coleção Schaum. Tradução de: GUEDES, Mario Pinto. Editora McGraw-Hill do Brasil, LTDA. 1974. Plane and Spherical Trigonometry.

BALESTRI, Rodrigo D. **A participação da História da Matemática na formação inicial de professores de Matemática na ótica de professores e pesquisadores**. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/345-1-A-GT4_balestri_tc.pdf>. Acesso em: 08 set. 2015.

BARONI, Rosa L.S. NOBRE, Sergio. A pesquisa em história da matemática e suas relações com a educação matemática. In: BICUDO, Maria A.V. (org). **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções & Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 129- 136.

BARONI, Rosa L.S. TEIXEIRA, Marcos V. NOBRE, Sergio R. A Investigação Cientifica em História da Matemática e suas Relações com o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. In: BICUDO, Maria A. V. BORBA, Marcelo C. (orgs). **Educação Matemática pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004, p. 164-185.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília: MEC, 2000.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de: GOMIDE, Elza F. 3 ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. São Paulo: E. Blucher, 2012.

CARAÇA, Bento J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. 3 ed. Lisboa: Gradiva, 2000. p. 136-143.

DANTE, Luiz R. **Matemática contexto & aplicação**. 2 ed. São Paulo: Ática, 2000.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N. **Fundamentos da matemática elementar**. Volume 9. 8 ed. São Paulo: Atual, 2005.

DOMINGUES, Hygino H. Euler e a incorporação da trigonometria à análise. In: IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 9 ed. São Paulo: Atual, 2013. p. 194-196.

D'AMBROSIO, Ubiratan. A história da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. In: BICUDO, Maria A.V. (org). **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções & Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 97-115.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

GARBI, Gilberto G. **A Rainha das Ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 5 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GOMES, Severino C. **Elaboração e aplicação de uma sequência de atividades para o ensino de Trigonometria numa abordagem histórica**. 2011. 93 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

HOUAISS, Antonio; VILLAR, Mauro de Salles. **Dicionário Houaiss de Língua Portuguesa**. 1 ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática elementar**. Volume 3. 9 ed. São Paulo: Atual, 2013.

JONES, Phillip. S. The history of Mathematics as a Teaching Tool. In: **Historical topics on the Mathematics Classroom.** Washinton, D.C.: National Council of Tearches of Mathematics, 1969.

KENNEDY, Edward S. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

KLINE, Morris. **O fracasso da Matemática moderna**. Tradução de: CARVALHO, Leonidas G. São Paulo: IBRASA, 1976.

LAKATOS, Eva M; MARCONI, Marina A. **Metodologia do trabalho científico**: procedimentos básicos, pesquisa bibliográfica, projeto e relatório, publicações e trabalhos científicos. 6 ed. São Paulo: Atlas, 2001.

LOWE, Roger D.; SCHANCK, Cynthia. Seno e co-seno. In: KENNEDY, Edward S. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**. Tradução de: DOMINGUES, Hygino H. São Paulo: Atual, 1992.p. 38-40.

MENDES, Iran A. **Ensino de trigonometria por meio de atividades históricas**. 1997. 221 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 1997.

______. **Ensino da Matemática por atividades**: uma aliança entre o construtivismo e a História da Matemática. 2001. 207 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2001.

MICOTTI, Maria C.O. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, Maria A.V. (org). **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções & Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 153-167.

MIGUEL, Antonio. **Três estudos sobre história e educação matemática**. 1993. 274 f. Tese (Doutorado em Educação na área de Metodologia de Ensino). UNICAMP, Campinas, 1993.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria A. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

MILLER, Ruth A. Tangente e co-tangente. In: KENNEDY, Edward S. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**. Tradução de: DOMINGUES, Hygino H. São Paulo: Atual, 1992. p. 41-43.

NASCIMENTO, Alessandra Z. **Uma sequência de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica**. 2005. 228 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

NETO, Antonio C.M. **Tópicos de Matemática Elementar**. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

OLIVEIRA, Maria M. **Como fazer pesquisa qualitativa**. 6 ed. Rio de Janeiro: Petrópolis: Vozes, 2014.

Papiro de Rhind. Disponível em: < http://tecciencia.ufba.br/equacao-do-2o-grau/curiosidades>. Acesso em: 11 nov. 2015.

Plimpton 322. Disponível em: <http://www.nytimes.com/2010/11/27/arts/design/27tablets.html>. Acesso em: 11 nov. 2015.

RIBEIRO, Dulcyene M.R. História da Matemática e a formação de professores de Matemática. In: STRIEDER, Dulce M; MALACARNE, Vilmar. (orgs). **Ensino de Ciências e Matemática aspectos da formação docente**. Curitiba: CRV, 2011. p. 147-167.

ROONEY, Anne. **A história da Matemática**. São Paulo: M Books, 2012.

SAD, Ligia. **Educação Matemática**: unidade na história e nos objetivos educacionais. Disponível em: <www.miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/.../mr16-Ligia.do>. Acesso em: 13 nov. 2015.

SAMPAIO, Helenara R**. Uma abordagem histórico-filosófica na Educação Matemática**: Contribuições ao processo de aprendizagem de trigonometria no Ensino Médio. 2008. 188 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e

Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, 2008.

STRUIK, Dirk J. Por que estudar história da matemática? In: GAMA, Ruy. **História da Técnica e da Tecnologia**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1985. p. 191-215.

SWETZ, Frank. **Using Problems from History of Mathematics in classroom Instruction**. In: MathematicsTeacher, 1989.

VIANNA, Carlos Roberto. **Matemática e História**: algumas relações e implicações pedagógicas. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação, USP, 1995.

ZELLER, Mary C. **The development of trigonomet from regiomontanus to pitiscus.** Ann arbor: University of Michigan doctoral dissertation, 1944.

REFERÊNCIAS LISTA DE FIGURAS

FIGURA A (ATIVIDADE). Disponível em: <http://www.infoescola.com/civilizacao-egipcia/piramide-de-queops/ >. Acesso em: 11 nov. 2015.

FIGURA B (ATIVIDADE). Disponível em: <http://www.nationalgeographic.com.es/articulo/historia/actualidad/8543/hace_840_anos_que_comenzo_construccion_torre_pisa.html>. Acesso em: 13 nov. 2015.

FIGURA C (ATIVIDADE). Autoria própria.

FIGURA D (ATIVIDADE). Disponível em: < http://tecciencia.ufba.br/equacao-do-2o-grau/curiosidades>. Acesso em: 11 nov. 2015.

FIGURA E (ATIVIDADE). Disponível em: <http://www.danielmarin.es/hdc/astronomiaarabe.htm>. Acesso em: 11 nov. 2015

FIGURA F (ATIVIDADE). Disponível em: <http://www.explicatorium.com/biografias/Biografia_Claudio_Ptolomeu.php >. Acesso em: 11 nov. 2015.

FIGURA G (ATIVIDADE). Autoria própria.

FIGURA H (ATIVIDADE). Autoria própria.

FIGURA I (ATIVIDADE). AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática**. Tradução de: CARVALHO, João B.P. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

FIGURA J (ATIVIDADE). Autoria própria.

FIGURA K (ATIVIDADE). Disponível em: <http://www.areasverdesdascidades.com.br/2015/04/jardim-botanico-francisca-maria.html>. Acesso em: 11 nov. 2015.

FIGURA L (ATIVIDADE). Autoria própria.

FIGURA M (ATIVIDADE). Autoria própria.

FIGURA N (ATIVIDADE). Disponível em: <http://www.guiaturismocuritiba.com/2010/10/torre-panoramica.html>. Acesso em: 11 nov. 2015.

FIGURA O (ATIVIDADE). Disponível em: <http://construdeia.com/wp-content/gallery/teodolito/teodolito-14.jpg>. Acesso em: 11 nov. 2015.

FIGURA P (ATIVIDADE). Disponível em: http://www.biografiasyvidas.com/biografia/v/vieta.htm>. Acesso em: 11 nov. 2015.