

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

VICTORIA MAZOTTI RODRIGUES DA SILVA

CALCULANDO O VOLUME DE POLIEDROS CONVEXOS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2018

VICTORIA MAZOTTI RODRIGUES DA SILVA

CALCULANDO O VOLUME DE POLIEDROS CONVEXOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Rudimar Luiz Nós, Dr.

CURITIBA

2018

TERMO DE APROVAÇÃO

“CALCULANDO O VOLUME DE POLIEDROS CONVEXOS”

por

“VICTORIA MAZOTTI RODRIGUES DA SILVA”

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 9 horas e 30 minutos do dia 25 de junho de 2018, na sala B205, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba. A aluna foi arguida pela Banca de Avaliação abaixo assinados. Após deliberação, de acordo com o parágrafo 1º do art. 37 do Regulamento Específico do trabalho de Conclusão de Curso para o Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR do Câmpus Curitiba, a Banca de Avaliação considerou o trabalho APROVADO.

<hr/> <p>Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós (Presidente - UTFPR/Curitiba)</p>	<hr/> <p>Profa. Dra. Olga Harumi Saito (Avaliador 1 – UTFPR/Curitiba)</p>
<hr/> <p>Prof. Dr. Luiz Fernando Nunes (Avaliador 2 – UTFPR/Curitiba)</p>	<hr/> <p>Profa. Ms. Violeta Maria Estephan (Professor Responsável pelo TCC – UTFPR/Curitiba)</p>
<hr/> <p>Profa. Dra. Neusa Nogas Tocha (Coordenadora do curso de Licenciatura em Matemática – UTFPR/Curitiba)</p>	

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.”

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado forças, saúde e doses extras de paciência.

A minha mãe, Cleide, por atender meus telefonemas em momentos de frustração, euforia e desespero, vibrando e chorando comigo a cada capítulo terminado. Por mais que você não soubesse como me ajudar a resolver os problemas que apareciam, você sempre me incentivou a resolvê-los da melhor forma possível. Obrigada por tudo.

Ao meu pai, Vicente, pelas piadas e ideias nada matemáticas. Por mais que elas não se adequassem ao meu problema, sempre me fizeram vê-lo por um outro ângulo e isso valeu muito.

Ao meu irmão, Matheus, pela paciência, apoio e compreensão ao longo desse tempo. Por não permitir que eu me isolasse do mundo na reta final e me lembrado constantemente que eu não deveria esquecer de dormir e comer.

Ao meu orientador, Rudimar, pela confiança, incentivo e amizade. Esse trabalho não seria metade do que é sem todo carinho e cuidado que sempre teve com ele. Obrigada por ter aceitado me orientar em tantos quesitos acadêmicos sem nunca exitar.

Aos professores do Departamento Acadêmico de Matemática, pela contribuição em minha formação.

A Tatiana Maciel Chenisz, Lidia Kraus e Roberta Andrade pelo apoio e incentivo nos momentos em que eu mais precisei.

"A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la."

Johannes Kepler (1571-1630): astrônomo e matemático alemão

RESUMO

SILVA, Victoria Mazotti Rodrigues da. **Calculando o volume de poliedros convexos**. 129 f. Trabalho de conclusão de curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

Apresentamos neste trabalho duas estratégias para calcular o volume de alguns poliedros convexos das seguintes classes: poliedros Platônicos, poliedros Arquimedianos, poliedros de Catalan e poliedros de Johnson. Essas estratégias consistem em: decompor o poliedro convexo em poliedros convexos de volume conhecido, como prismas e pirâmides; partindo de um poliedro convexo de volume conhecido, como o cubo por exemplo, eliminar poliedros convexos de volume conhecido, como prismas e pirâmides, até obter o poliedro convexo do qual se quer determinar a medida do volume. Concluímos apresentando atividades de composição/decomposição de poliedros convexos para o cálculo do volume empregando o GeoGebra 3D. Essas atividades são propostas para o Curso de Licenciatura em Matemática, porém podem ser adaptadas para o Ensino Médio.

Palavras-chave: poliedros Platônicos; poliedros Arquimedianos; poliedros de Catalan; poliedros de Johnson; GeoGebra 3D.

ABSTRACT

SILVA, Victoria Mazotti Rodrigues da. **Calculating the volume of convex polyhedra**. 129 f. Trabalho de conclusão de curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

We present in this work two strategies to calculate the volume of some convex polyhedra of the following classes: Platonic polyhedra, Archimedean polyhedra, Catalan's polyhedra and Johnson's polyhedra. These strategies consist of: decomposing the convex polyhedron into convex polyhedra of known volume, such as prisms and pyramids; starting from a convex polyhedron of known volume, such as the cube, for example, to eliminate convex polyhedra of known volume, such as prisms and pyramids, to obtain the convex polyhedron from which the volume measurement is to be determined. We conclude by presenting composition/decomposition activities of convex polyhedra for the calculation of the volume using GeoGebra 3D. These activities are proposed for the Graduation in Mathematics, but can be adapted for High School.

Keywords: Platonic polyhedra; Archimedean polyhedra; Catalan's polyhedra; Johnson's polyhedra; GeoGebra 3D.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 – (a) Poliedro de Johnson J51; (b) poliedro J51 decomposto em prismas e pirâmides - Fonte: sólidos construídos na disciplina de Geometria B	1
FIGURA 1.2 – Obtenção de um poliedro por decomposição: (a) cubo; (b) rombicuboctaedro - Fonte: sólidos construídos na disciplina de Geometria Espacial . . .	2
FIGURA 1.3 – Obtenção de um poliedro por decomposição: (a) icosaedro regular; (b) icosaedro truncado - Fonte: sólidos construídos na disciplina de Geometria Espacial	2
FIGURA 1.4 – Molécula de silicato (UFC, 2017)	3
FIGURA 1.5 – Molécula de metano (DIAS, 2017b)	3
FIGURA 1.6 – Molécula de cloreto de sódio (DIAS, 2017a)	4
FIGURA 1.7 – Molécula de fulereno (OLIVEIRA, 2017)	4
FIGURA 1.8 – Estruturas de POSS: (a) prisma quadrangular; (b) prisma pentagonal - (JOSÉ; PRADO, 2005)	5
FIGURA 1.9 – (a) Pirâmides de Gizé (CURIOSO, 2017); (b) pirâmide do Museu do Louvre (DESIGN, 2013)	5
FIGURA 1.10– Favo de mel (BONADIO, 2017)	6
FIGURA 1.11– Cristais: (a) grossular; (b) spessartine - (DATABASE, 2000)	6
FIGURA 1.12– Cristais: (a) turmalina; (b) aquamarine; (c) biotite - (DATABASE, 2000)	7
FIGURA 1.13– Cristais: (a) andradite; (b) uvarovite; (c) dravite - (DATABASE, 2000) .	7
FIGURA 1.14– Cristais: (a) spinel; (b) eulytine; (c) zircônio - (DATABASE, 2000)	8
FIGURA 1.15– Vírus: (a) Adenovírus (BALDOR, 2016); (b) Varicela-Zoster (SOPHIA, 2014)	8
FIGURA 1.16– Vírus da herpes simples (MICHENER, 2013)	9
FIGURA 1.17– Radiolários (DOLVEN; SKJERPEN, 2000)	9
FIGURA 1.18– Radiolários: (a) com espículas; (b) com formato de esfera fechada - (DOLVEN; SKJERPEN, 2000)	10
FIGURA 1.19– <i>Astrosphaera hexagonalis</i> (DOLVEN; SKJERPEN, 2000)	10
FIGURA 1.20– Livro de papiro (BAPTISTA, 2011)	11
FIGURA 1.21– Sólidos divididos em cubos unitários (OBJETIVO, 2017)	11
FIGURA 1.22– Volume de um sólido irregular por imersão (TARINGA, 2012)	12
FIGURA 2.1 – Poliedros (SCHOOL, 2017)	14
FIGURA 2.2 – Elementos de um poliedro (LIMEIRA, 2014)	15
FIGURA 2.3 – Poliedros Platônicos e seus duais (SANTOS, 1999)	17
FIGURA 2.4 – Truncamento do cubo: (a) cubo; (b) cubo truncado (IAVE, 2017)	18
FIGURA 2.5 – Acumulação do tetraedro regular	18
FIGURA 2.6 – Snubficação do cubo	19
FIGURA 2.7 – Expansão do cubo	19
FIGURA 2.8 – Poliedro composto por dois tetraedros regulares	20
FIGURA 2.9 – Estrelamento do dodecaedro regular	20
FIGURA 2.10– Poliedros de Kepler-Poinsot: (a) pequeno dodecaedro estrelado; (b) grande dodecaedro estrelado; (c) grande dodecaedro; (d) grande icosaedro (MC-COOEY, 2015)	22

FIGURA 2.11– Pirâmides: (a) pirâmide triangular; (b) pirâmide pentagonal	23
FIGURA 2.12– Prismas: (a) prisma triangular; (b) prisma hexagonal	24
FIGURA 2.13– Antiprismas: (a) antiprisma quadrado; (b) antiprisma hexagonal (MC- COOEY, 2015)	24
FIGURA 2.14– (a) Dipirâmide heptagonal; (b) trapezoedro hexagonal (MCCOOEY, 2015)	24
FIGURA 3.1 – Poliedros regulares: (a) tetraedro regular; (b) octaedro regular; (c) hexa- edro regular; (d) dodecaedro regular; (e) icosaedro regular	28
FIGURA 3.2 – Tetraedro regular: (a) sólido; (b) planificação	28
FIGURA 3.3 – Triângulo equilátero de lado a e altura h	29
FIGURA 3.4 – Altura H do tetraedro regular de aresta a	30
FIGURA 3.5 – Hexaedro regular: (a) sólido; (b) planificação	31
FIGURA 3.6 – Octaedro regular: (a) sólido; (b) planificação	32
FIGURA 3.7 – Decomposição do octaedro regular	32
FIGURA 3.8 – Altura da pirâmide que compõe o octaedro regular	33
FIGURA 3.9 – Dodecaedro regular: (a) sólido; (b) planificação	34
FIGURA 3.10– Decomposição do dodecaedro regular	34
FIGURA 3.11– Poliedros oriundos da decomposição do dodecaedro regular com as me- didadas das arestas	35
FIGURA 3.12– Face do dodecaedro regular: (a) diagonal; (b) triângulo isósceles obtido a partir dos lados e da diagonal do pentágono regular	35
FIGURA 3.13– Decomposição do poliedro removido do dodecaedro regular	37
FIGURA 3.14– Face trapezoidal do poliedro após a decomposição	37
FIGURA 3.15– Triângulo que forma a base do prisma triangular	38
FIGURA 3.16– Icosaedro regular: (a) sólido; (b) planificação	41
FIGURA 3.17– Decomposição do icosaedro regular	41
FIGURA 3.18– Icosaedro regular: (a) seção passando pelo centro e por dois pares de vértices opostos; (b) polígono da seção	42
FIGURA 3.19– Icosaedro regular: (a) seção passando por cinco vértices de um pentá- gono regular; (b) polígono da seção	42
FIGURA 3.20– Icosaedro regular: (a) seções; (b) polígono de uma seção	43
FIGURA 3.21– Pirâmide triangular removida do icosaedro regular	43
FIGURA 4.1 – Poliedros Arquimedianos: (a) tetraedro truncado; (b) cuboctaedro; (c) cubo truncado; (d) octaedro truncado; (e) rombicuboctaedro; (f) cuboctae- dro truncado; (g) cubo snub; (h) icosidodecaedro; (i) dodecaedro truncado; (j) icosaedro truncado; (k) rombicoidodecaedro; (l) icosidodecaedro trun- cado; (m) icosidodecaedro snub	46
FIGURA 4.2 – Octaedro truncado: (a) sólido; (b) planificação	47
FIGURA 4.3 – Truncamento do octaedro regular	47
FIGURA 4.4 – (a) Face hexagonal do octaedro truncado a partir da face triangular do oc- taedro regular; (b) ângulos e medidas na face triangular do octaedro regular e na face hexagonal do octaedro truncado	48
FIGURA 4.5 – Pirâmides removidas no processo de truncamento do octaedro regular ..	49
FIGURA 4.6 – Pirâmide removida a partir dos vértices do octaedro regular	49
FIGURA 4.7 – Dodecaedro truncado: (a) sólido; (b) planificação	51
FIGURA 4.8 – Truncamento do dodecaedro regular	51
FIGURA 4.9 – (a) Face decagonal do dodecaedro truncado a partir da face pentagonal do dodecaedro regular; (b) ângulos e medidas na face pentagonal do dode- caedro regular e na face decagonal do dodecaedro truncado	52

FIGURA 4.10– Pirâmide removida do vértice do dodecaedro regular: (a) face lateral; (b) divisão da face lateral	53
FIGURA 4.11– Pirâmide removida a partir dos vértices do dodecaedro regular	54
FIGURA 4.12– Icosaedro truncado: (a) sólido; (b) planificação	58
FIGURA 4.13– Truncamento do icosaedro regular	58
FIGURA 4.14– Pirâmide removida a partir dos vértices do icosaedro regular	59
FIGURA 4.15– Pirâmide removida do vértice do icosaedro regular: (a) base pentagonal; (b) triângulo isósceles que compõe a base	59
FIGURA 5.1 – Poliedros de Catalan: (a) tetraedro triakis; (b) dodecaedro rômbo; (c) hexaedro tetrakis; (d) octaedro triakis; (e) icositetraedro deltoidal; (f) icositetraedro pentagonal; (g) triacontaedro rômbo; (h) dodecaedro disdiakis; (i) dodecaedro pentakis; (j) icosaedro triakis; (k) hexecontaedro deltoidal; (l) hexecontaedro pentagonal; (m) triacontaedro disdiakis	64
FIGURA 5.2 – Acumulação do tetraedro regular	65
FIGURA 5.3 – Tetraedro triakis: (a) sólido; (b) planificação	66
FIGURA 5.4 – Pirâmide da acumulação do tetraedro regular	66
FIGURA 5.5 – Face do tetraedro triakis: (a) lados (b) altura	67
FIGURA 5.6 – Dodecaedro rômbo: (a) sólido; (b) planificação	70
FIGURA 5.7 – Acumulação do cubo	70
FIGURA 5.8 – Truncamento das arestas do cubo	71
FIGURA 5.9 – Primeiro truncamento das arestas do cubo	71
FIGURA 5.10– Face do cubo após o truncamento: a parte cinza é a parte removida	72
FIGURA 5.11– Prisma removido no primeiro truncamento das arestas do cubo	72
FIGURA 5.12– Segundo truncamento das arestas do cubo	73
FIGURA 5.13– Face lateral do paralelepípedo reto retângulo após o truncamento: a parte cinza é a parte removida	73
FIGURA 5.14– Pirâmide removida no segundo truncamento das arestas do cubo	74
FIGURA 5.15– Terceiro truncamento das arestas do cubo	74
FIGURA 5.16– Face lateral do octaedro não regular após o truncamento: a parte cinza é a parte removida	74
FIGURA 5.17– Pirâmide removida no terceiro truncamento das arestas do cubo	75
FIGURA 5.18– Base da pirâmide removida no terceiro truncamento das arestas do cubo	76
FIGURA 5.19– Acumulação do octaedro regular	78
FIGURA 5.20– Octaedro triakis: (a) sólido; (b) planificação	79
FIGURA 5.21– Pirâmide da acumulação do octaedro regular	79
FIGURA 6.1 – Cúpula pentagonal (J5) (RESEARCH, 2018)	84
FIGURA 6.2 – Rotunda pentagonal (J6) (RESEARCH, 2018)	84
FIGURA 6.3 – Esfenocorona (RESEARCH, 2018)	84
FIGURA 6.4 – Ortobirrotunda pentagonal (J34) (RESEARCH, 2018)	85
FIGURA 6.5 – Processo de diminuir o icosaedro regular, obtendo o icosaedro metabidiminuído (J62) e o icosaedro tridiminuído (J63)	85
FIGURA 6.6 – Processo de aumentar o prisma triangular, obtendo o prisma triangular aumentado (J49), o prisma triangular biaumentado (J50) e o prisma triangular triaumentado (J51)	86
FIGURA 6.7 – Bipirâmide quadrada alongada (J15)	86
FIGURA 6.8 – Bipirâmide quadrada giroalongada (J17)	87
FIGURA 6.9 – Rotunda pentagonal (J6): (a) sólido; (b) planificação	87
FIGURA 6.10– Rotunda pentagonal (J6): metade do icosidodecaedro	88

FIGURA 6.11– Decomposição da rotunda pentagonal (J6) em pirâmides triangulares e pentagonais	88
FIGURA 6.12– Base maior da rotunda pentagonal (J6): (a) medidas no decágono regular; (b) medidas no triângulo isósceles que compõe o decágono regular	89
FIGURA 6.13– Medidas nas pirâmides da decomposição da rotunda pentagonal (J6): (a) pirâmide pentagonal; (b) pirâmide triangular	90
FIGURA 6.14– Base da pirâmide pentagonal: (a) medidas no pentágono regular; (b) medidas no triângulo isósceles que compõe o pentágono regular	90
FIGURA 6.15– Girobicúpula quadrada (J29): (a) sólido; (b) planificação	93
FIGURA 6.16– Girobicúpula quadrada (J29): decomposição em duas cúpulas quadradas	93
FIGURA 6.17– Projecção ortogonal das arestas das faces triangulares e das faces quadrangulares da cúpula quadrada sobre o plano da base octogonal	94
FIGURA 6.18– Decomposição da cúpula quadrada (J4) em prismas e pirâmides	94
FIGURA 6.19– Poliedros obtidos na decomposição da cúpula quadrada	94
FIGURA 6.20– Cubo truncado aumentado (J66): (a) sólido; (b) planificação	97
FIGURA 6.21– Cubo truncado aumentado (J66): decomposição em um cubo truncado e uma cúpula quadrangular	98
FIGURA 6.22– Truncamento do cubo	98
FIGURA 6.23– (a) Face octogonal do cubo truncado a partir da face quadrada do cubo; (b) ângulos e medidas na face quadrada do cubo e na face octogonal do cubo truncado	99
FIGURA 6.24– Pirâmide removida a partir dos vértices do cubo	99
FIGURA 7.1 – Tela inicial do GeoGebra - Janela de Visualização 2D	102
FIGURA 7.2 – Ícones da tela inicial do GeoGebra	103
FIGURA 7.3 – Tela do GeoGebra com a Janela de Visualização 3D	104
FIGURA 7.4 – Ícones da tela do GeoGebra com a Janela de Visualização 3D	104
FIGURA 7.5 – Coordenadas do tetraedro triakis (MCCOOEY, 2015)	106
FIGURA 7.6 – Poliedros para as atividades: (a) cuboctaedro; (b) hexaedro tetrakis; (c) icosaedro tridiminuído(J63) (RESEARCH, 2018)	107
FIGURA 7.7 – Tela do GeoGebra após a inserção dos pontos	108
FIGURA 7.8 – Tela do GeoGebra após a inserção das faces	109
FIGURA 7.9 – Tela do GeoGebra após a inserção dos segmentos	110
FIGURA 7.10– Tela do GeoGebra após a inserção das retas paralelas aos segmentos ...	111
FIGURA 7.11– Tela do GeoGebra após a inserção das pirâmides	111
FIGURA 7.12– Tela do GeoGebra com a vista 2D do plano da face do cubo	112
FIGURA 7.13– Tela do GeoGebra após a inserção dos pontos	113
FIGURA 7.14– Tela do GeoGebra após a inserção das faces	115
FIGURA 7.15– Tela do GeoGebra após a construção da esfera	116
FIGURA 7.16– Tela do GeoGebra após a intersecção das superfícies	117
FIGURA 7.17– Tela do GeoGebra após a construção dos vetores	117
FIGURA 7.18– Tela do GeoGebra após a translação das pirâmides	118
FIGURA 7.19– Tela do GeoGebra após as ocultações	119
FIGURA 7.20– Tela do GeoGebra após a construção do icosaedro regular	120
FIGURA 7.21– Tela do GeoGebra após construção da esfera e das retas	121
FIGURA 7.22– Tela do GeoGebra após a construção dos vetores	121
FIGURA 7.23– Tela do GeoGebra após a definição das pirâmides a serem removidas ...	122
FIGURA 7.24– Tela do GeoGebra após a translação	123
FIGURA 7.25– Tela do GeoGebra após as ocultações	123

FIGURA 8.1 – Bpirâmide quadrada giroalongada (J17): decomposição em duas pirâmides quadrangulares e um antiprisma 124

LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1 – Classes de poliedros Platônicos	27
TABELA 5.1 – Poliedros de Catalan e seus duais	65

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	ESTRUTURAS MOLECULARES	2
1.2	CONSTRUÇÕES HUMANAS	5
1.3	CRISTAIS	6
1.4	VÍRUS	8
1.5	RADIOLÁRIOS	9
1.6	NOÇÃO INTUITIVA DE VOLUME DE UM SÓLIDO	10
1.7	METODOLOGIAS	12
1.8	OBJETIVOS	13
1.8.1	Objetivo geral	13
1.8.2	Objetivos específicos	13
1.9	ESTRUTURA DO TRABALHO	13
2	POLIEDROS CONVEXOS	14
2.1	DEFINIÇÃO	14
2.2	ELEMENTOS	14
2.3	RELAÇÃO DE EULER	15
2.4	OPERAÇÕES DE TRANSFORMAÇÃO SOBRE POLIEDROS	17
2.4.1	Poliedros duais	17
2.4.2	Truncamento	18
2.4.3	Acumulação	18
2.4.4	Snubificação	19
2.4.5	Expansão	19
2.4.6	Composição	20
2.4.7	Estrelamento	20
2.5	CLASSES	21
2.5.1	Poliedros regulares	21
2.5.2	Poliedros não regulares	22
3	POLIEDROS PLATÔNICOS	25
3.1	DEFINIÇÃO	25
3.2	POLIEDROS REGULARES	27
3.3	VOLUME	28
3.3.1	Tetraedro regular	28
3.3.2	Hexaedro regular	31
3.3.3	Octaedro regular	32
3.3.4	Dodecaedro regular	34
3.3.5	Icosaedro regular	40
4	POLIEDROS ARQUIMEDIANOS	46
4.1	DEFINIÇÃO	46
4.2	TIPOS	46
4.3	VOLUME	47
4.3.1	Octaedro truncado	47

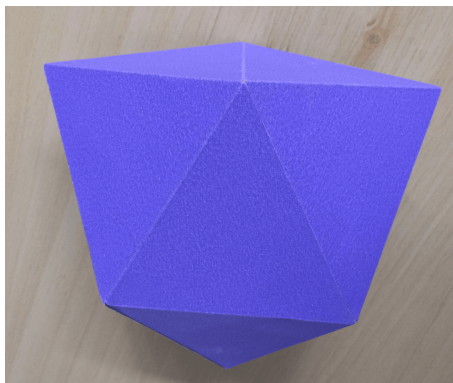
4.3.2	Dodecaedro truncado	51
4.3.3	Icosaedro truncado	57
5	POLIEDROS DE CATALAN	64
5.1	DEFINIÇÃO	64
5.2	TIPOS	64
5.3	VOLUME	65
5.3.1	Tetraedro triakis	65
5.3.2	Dodecaedro rômico	70
5.3.3	Octaedro triakis	78
6	POLIEDROS DE JOHNSON	83
6.1	DEFINIÇÃO	83
6.2	TIPOS	83
6.2.1	Operações de transformação	85
6.3	VOLUME	87
6.3.1	Rotunda pentagonal (J6)	87
6.3.2	Girobicúpula quadrada (J29)	92
6.3.3	Cubo truncado aumentado (J66)	97
7	ATIVIDADES COM O GEOGEBRA	102
7.1	GEOGEBRA 3D	102
7.2	ATIVIDADES DE COMPOSIÇÃO/DECOMPOSIÇÃO DE POLIEDROS CONVE- XOS	106
7.2.1	Cuboctaedro	107
7.2.2	Hexaedro tetrakis	113
7.2.3	Icosaedro tridiminuído (J63)	119
8	CONCLUSÕES	124
	REFERÊNCIAS	126

1 INTRODUÇÃO

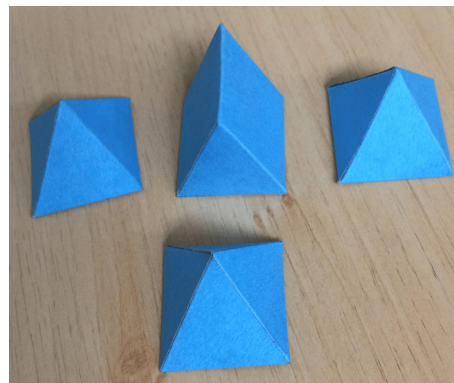
O cálculo do volume de um poliedro convexo pode ser uma tarefa complexa. Podemos empregar basicamente duas estratégias:

1. Decompor o poliedro em poliedros com volume conhecido, como prismas e pirâmides;
2. Partindo de um poliedro de volume conhecido, como o cubo por exemplo, eliminar poliedros de volume conhecido, como prismas e pirâmides, até obter o poliedro do qual se quer determinar a medida do volume.

A Figura 1.1 ilustra a primeira estratégia com a decomposição do poliedro de Johnson J51, o prisma triangular triaumentado, em prismas e pirâmides convexas.



(a)



(b)

Figura 1.1: (a) Poliedro de Johnson J51; (b) poliedro J51 decomposto em prismas e pirâmides
- Fonte: sólidos construídos na disciplina de Geometria B

As Figuras 1.2 e 1.3 ilustram, respectivamente, a segunda estratégia com a decomposição:

- de um cubo em um rombicuboctaedro;
- de um icosaedro regular em um icosaedro truncado.

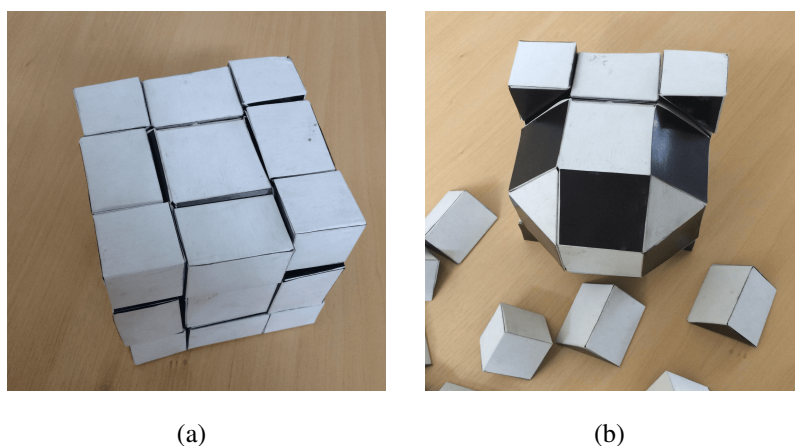


Figura 1.2: Obtenção de um poliedro por decomposição: (a) cubo; (b) rombicuboctaedro -
 Fonte: sólidos construídos na disciplina de Geometria Espacial

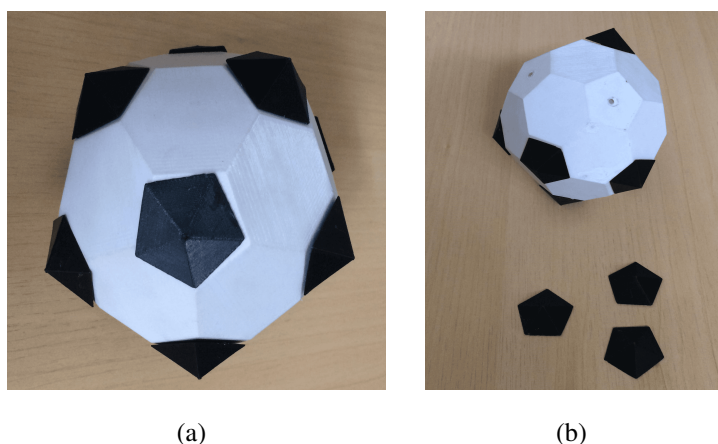


Figura 1.3: Obtenção de um poliedro por decomposição: (a) icosaedro regular; (b) icosaedro
 truncado - Fonte: sólidos construídos na disciplina de Geometria Espacial

O cálculo do volume de um poliedro convexo é um tema pertinente à formação geométrica do professor de Matemática. A escassez de referências bibliográficas em português justifica a elaboração de material didático sobre o tema. Além disso, há na natureza cristais e organismos vivos com formatos poliédricos. O volume de uma pedra preciosa e de uma massa viral, por exemplo, são medidas que devem, sob certas circunstâncias, ser calculadas.

1.1 ESTRUTURAS MOLECULARES

Ao final do primeiro ano do Ensino Médio, deparamo-nos na disciplina de Química com estruturas moleculares. Ao estudá-las, percebemos que cada uma possui um formato diferente dependendo do número de átomos e ligações existentes. Por conta da repulsão entre elétrons, que possuem cargas negativas, algumas estruturas assumem formatos poliédricos.

- Silicato (SiO_4)

Compondo a mais importante classe mineral, os silicatos constituem 95% do volume da crosta terrestre. Segundo (MACHADO, 2017), "os silicatos são essenciais na produção de cerâmica, refratários, fibra de vidro e vários outros produtos usados na fabricação de utensílios". Os silicatos também estão presentes na alimentação humana, pois são minerais absorvidos pelas plantas, muitas das quais nos servem de alimento.

Os silicatos são compostos de silício e oxigênio. Uma molécula de silicato contém um átomo de silício, que se encontra no centro, e quatro átomos de oxigênio, que se dispõem nos vértices de um tetraedro, como mostra a Figura 1.4.

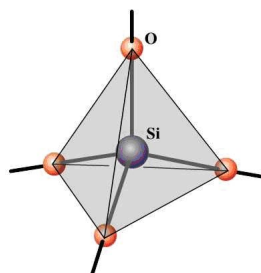


Figura 1.4: Molécula de silicato (UFC, 2017)

- Metano (CH_4)

O metano é um gás incolor da família dos alcanos e uma das primeiras estruturas moleculares estudadas em Química. Uma molécula de metano tem um átomo de carbono no centro e quatro átomos de hidrogênio dispostos nos vértices de um tetraedro, como ilustra a Figura 1.5.

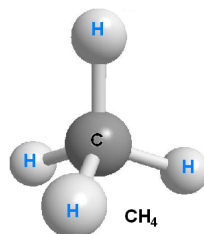


Figura 1.5: Molécula de metano (DIAS, 2017b)

- Cloreto de sódio (NaCl)

A reação química de neutralização de um ácido por uma base produz um sal e água. Da reação entre ácido clorídrico (HCl) e hidróxido de sódio (NaOH), obtemos o sal cloreto

de sódio, popularmente conhecido como sal de cozinha. A estrutura molecular do sal de cozinha possui formato cúbico. Ao se unirem, os átomos de sódio e de cloro formam moléculas hexaédricas regulares, como mostra a Figura 1.6.

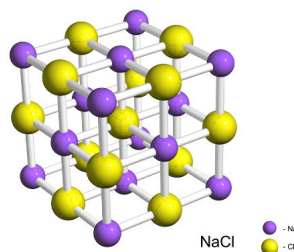


Figura 1.6: Molécula de cloreto de sódio (DIAS, 2017a)

- Fulereo (C_{60})

Em 1985, o buckminsterfulereno, também conhecido como fulereno, foi descoberto pelo inglês Harold W. Kroto e pelos americanos Robert F. Curl e Richard E. Smalley. A descoberta lhes rendeu o Prêmio Nobel de Química em 1996. Segundo (KANSO, 2012), a molécula possui esse nome "em homenagem ao arquiteto norte-americano Richard Buckminster Fuller (1895-1983), célebre pelos seus trabalhos dotados de cúpulas geodésicas".

Segundo (KANSO, 2012), os fulerenos são obtidos "por meio da irradiação de uma superfície de grafite com emprego de laser em um jato pulsado de hélio de alta densidade, a uma temperatura de $10.000^{\circ}C$ ". Após o processo, os átomos de carbono se unem em formato de icosaedro truncado, como na Figura 1.7.

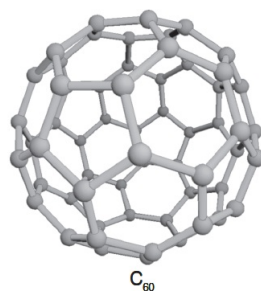


Figura 1.7: Molécula de fulereno (OLIVEIRA, 2017)

- POSS

Constituídos de silício e oxigênio, os POSS (Poliedros Oligoméricos Silsesquioxanos) possuem um grupo orgânico ligado ao átomo de silício. Na Figura 1.8, esses grupos orgânicos estão denotados por R. Segundo (BIANCHI, 2011), "as estruturas dos POSS (gaiolas) podem

conter de 4 a 12 átomos de silício com 4 a 12 radicais orgânicos ligados aos átomos de silício". Dessa forma, os POSS possuem formato de prismas com bases diferentes, dependendo do número de átomos de silício que a estrutura possui.

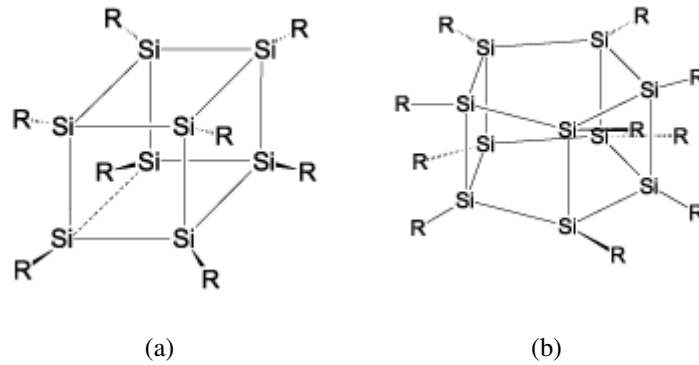


Figura 1.8: Estruturas de POSS: (a) prisma quadrangular; (b) prisma pentagonal - (JOSÉ; PRADO, 2005)

Na Figura 1.8(a), vemos que um octâmero (estrutura que possui oito átomos de silício) possui o formato cúbico; na Figura 1.8(b), que um decâmero (estrutura que possui dez átomos de silício) possui o formato de prisma pentagonal.

1.2 CONSTRUÇÕES HUMANAS

Ao olharmos à nossa volta, identificamos diversos objetos e construções com formatos poliédricos. Dentre eles, o corpo de algumas canetas com formato de prisma hexagonal, as caixas de leite com formato de paralelepípedo reto retângulo e as Pirâmides de Gizé - Figura 1.9(a), e do Louvre - Figura 1.9(b), com formato de pirâmide quadrangular.



(a)



(b)

Figura 1.9: (a) Pirâmides de Gizé (CURIOSO, 2017); (b) pirâmide do Museu do Louvre (DESIGN, 2013)

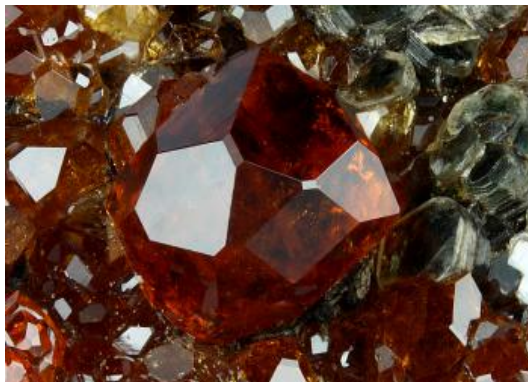
Os exemplos anteriores são criações do homem. Contudo, também encontramos na natureza estruturas poliédricas construídas por outros seres vivos, como os favos de mel fabricados pelas abelhas com estruturas no formato de prisma hexagonal, ilustrados na Figura 1.10.



Figura 1.10: Favo de mel (BONADIO, 2017)

1.3 CRISTAIS

Segundo (AURÉLIO, 2016), cristal é um "sólido de forma poliédrica regular". Definindo cristais segundo (GEOTECNIA, 2009), temos que, em um ambiente favorável, "os grupos de átomos (moléculas) se juntam em forma ordenada", o que afeta a forma que os cristais assumem, pois admitem "uma geometria em que as faces são planas". Ao assumirem tal geometria, o resultado final da formação de cristais é o formato poliédrico, como ilustrado na Figura 1.11.



(a)



(b)

Figura 1.11: Cristais: (a) grossular; (b) spessartine - (DATABASE, 2000)

Podemos dividir os minerais em sete sistemas cristalinos. Cada um deles possui um valor para constantes paramétricas e angulares que definem a que sistema o mineral pertence. Segundo (NEVES, 2008), os sistemas são: "Cúbico ou Isomérico, Tetragonal ou Quadrático,

Rômbico ou Ortorrômico, Hexagonal, Trigonal ou Romboédrico, Monoclínico ou Clinorrômico e Triclínico ou Anórtico".

Cada sistema possui um sólido fundamental, como o cubo, o romboedro e prismas de base quadrada e hexagonal. A Figura 1.12(a) mostra um cristal com formato de prisma quadrangular; as Figuras 1.12(b) e 1.12(c) mostram cristais com formato de prisma hexagonal.

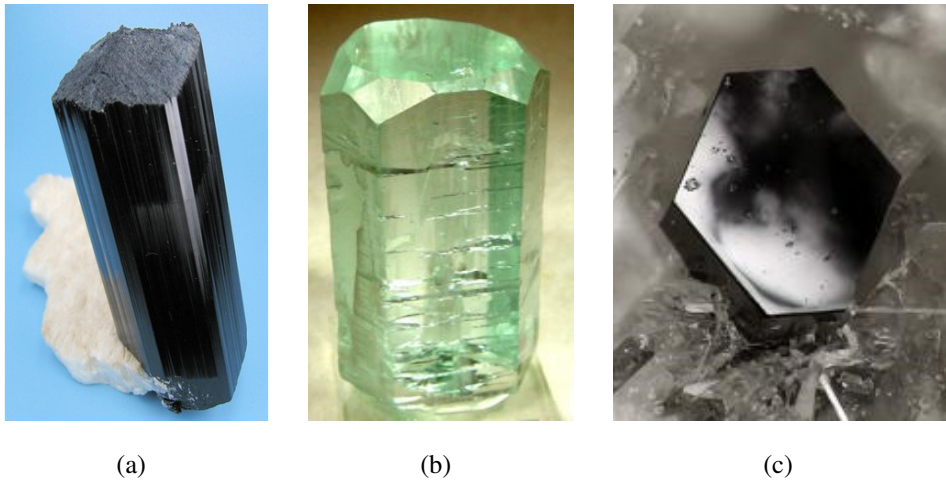


Figura 1.12: Cristais: (a) turmalina; (b) aquamarine; (c) biotite - (DATABASE, 2000)

O sistema Cúbico ou Isomérico possui 14 formas, entre elas o tetraedro, o octaedro, o trapezoedro e o rombododecaedro, que podem estar combinadas ou não. As Figuras 1.13(a), 1.13(b) e 1.13(c) mostram cristais com o formato de um dodecaedro rômbico, um poliedro de Catalan; a Figura 1.14(a) mostra um cristal com o formato de um octaedro regular, um poliedro Platônico; as Figuras 1.14(b) e 1.14(c) mostram, respectivamente, cristais com o formato de pirâmide triangular e pirâmide quadrangular.



Figura 1.13: Cristais: (a) andradite; (b) uvarovite; (c) dravite - (DATABASE, 2000)

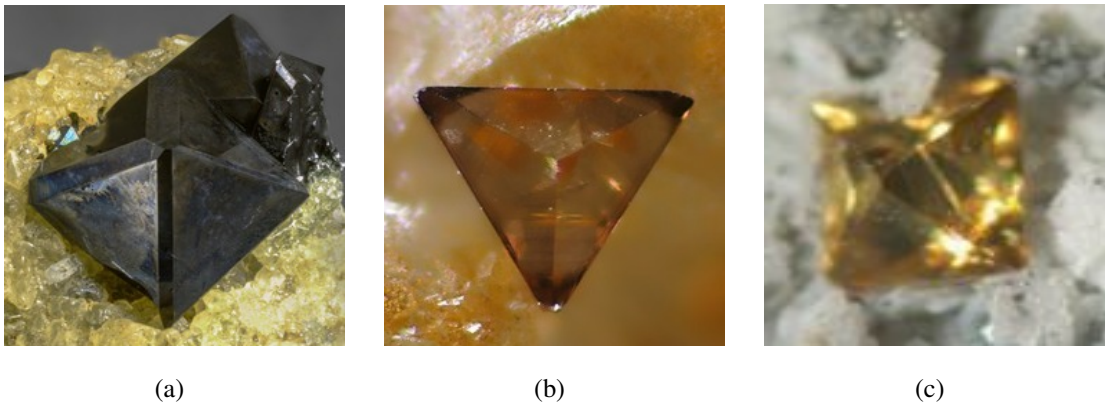


Figura 1.14: Cristais: (a) spinel; (b) eulytine; (c) zircônio - (DATABASE, 2000)

1.4 VÍRUS

Ao iniciarmos o estudo dos seres vivos, na disciplina de Biologia, deparamo-nos com os vírus. Segundo (AURÉLIO, 2016), o vírus é um "microrganismo invisível ao microscópio óptico que atravessa os filtros que retêm habitualmente as bactérias, possuindo um só tipo de ácido nucleico A".

Com estruturas simples, por possuírem apenas um capsídeo e o DNA, os vírus possuem características morfológicas que definem seu formato. Este pode variar entre espiralado, esférico, encapsulado, cúbico, icosaédrico e espermatozoidal.

Causador de doenças respiratórias e oculares, o adenovírus - Figura 1.15(a), é um "vírus não encapsulado com um capsídeo icosaédrico" (BALDOR, 2016). Com o mesmo formato, encontramos o Varicela-Zoster - Figura 1.15(b), causador da catapora.

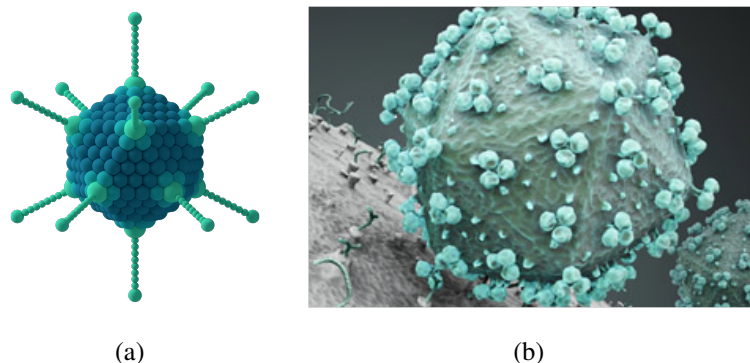


Figura 1.15: Vírus: (a) Adenovírus (BALDOR, 2016); (b) Varicela-Zoster (SOPHIA, 2014)

O vírus da herpes simples é outro vírus com formato icosaédrico, porém encapsulado, como ilustra a Figura 1.16. Segundo (REIS, 2012), a herpes simples é uma "infecção viral

comum que se caracteriza pelo surgimento de pequenas bolhas ao redor dos lábios e/ou dos genitais – mas que também podem aparecer em qualquer outra parte do corpo".

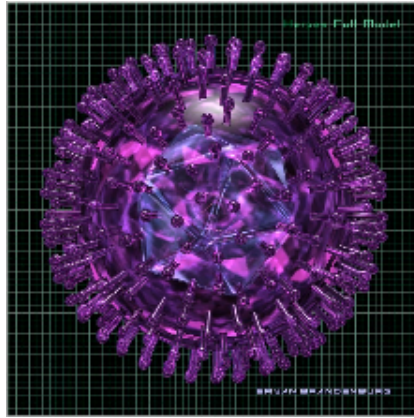


Figura 1.16: Vírus da herpes simples (MICHENER, 2013)

1.5 RADIOLÁRIOS

Segundo (KOCHHANN, 2011), "Radiolários são protistas planctônicos amplamente distribuídos pelos oceanos modernos e do passado geológico". Vivem no fundo dos oceanos e possuem o esqueleto formado por sílica, proveniente de onde habitam. Seu esqueleto cresce seguindo um padrão geométrico, como na Figura 1.17.

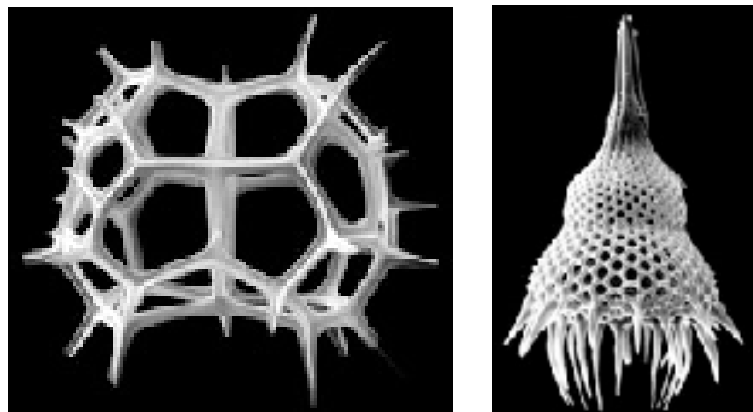


Figura 1.17: Radiolários (DOLVEN; SKJERPEN, 2000)

Antigos no planeta, eles "remetem ao Cambriano da Austrália, apresentando formas cônicas, esferas fechadas e espículas isoladas" (KOCHHANN, 2011), como ilustra a Figura 1.18.

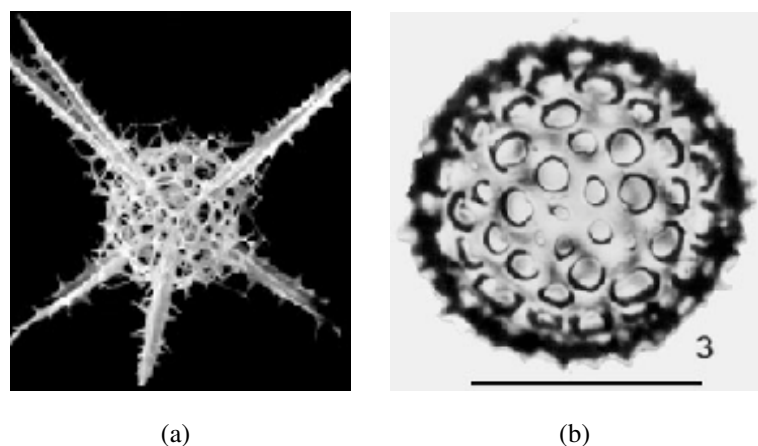


Figura 1.18: Radiolários: (a) com espículas; (b) com formato de esfera fechada - (DOLVEN; SKJERPEN, 2000)

Por possuírem crescimento com padrões geométricos, alguns radiolários assumem o formato poliédrico, como é o caso da *Astrosphaera hexagonalis*, descoberta por Haeckel em 1887, que possui o formato semelhante ao de um icosaedro, como mostra a Figura 1.19.

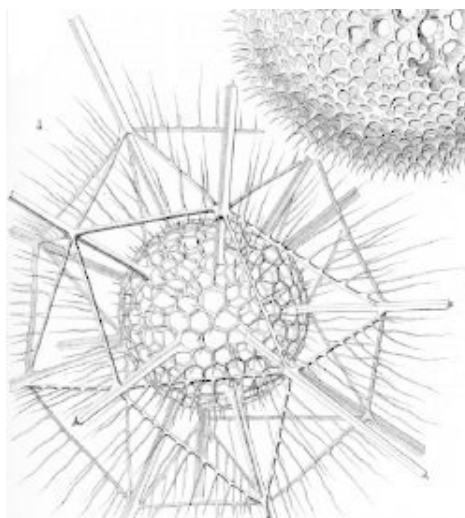


Figura 1.19: *Astrosphaera hexagonalis* (DOLVEN; SKJERPEN, 2000)

1.6 NOÇÃO INTUITIVA DE VOLUME DE UM SÓLIDO

Derivada do Latim, a palavra "volumen, de volvere, ato de fazer rodar; acabou se aplicando aos livros antigos, aqueles que eram de papiro e a gente precisava fazer girar na mão para ler" (PALAVRA, 2017). A Figura 1.20 mostra um desses livros de enrolar. Quando os livros eram grandes e ocupavam muito espaço, o volume foi aplicado à noção espacial, tornando-se uma grandeza física.



Figura 1.20: Livro de papiro (BAPTISTA, 2011)

Para (LIMA, 1991), "o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupada". Porém, como calculamos o espaço ocupado por um sólido? Segundo (LIMA, 1991), para calcularmos o volume "deveremos compará-lo com uma unidade".

Considerando como unidade um cubo unitário, com aresta de medida uma unidade de comprimento, ou $1uc$, por definição, seu volume será uma unidade de volume, ou $1uv$. Então, para calcular o volume de um sólido, devemos determinar quantos cubos unitários cabem nele, como ilustra a Figura 1.21.

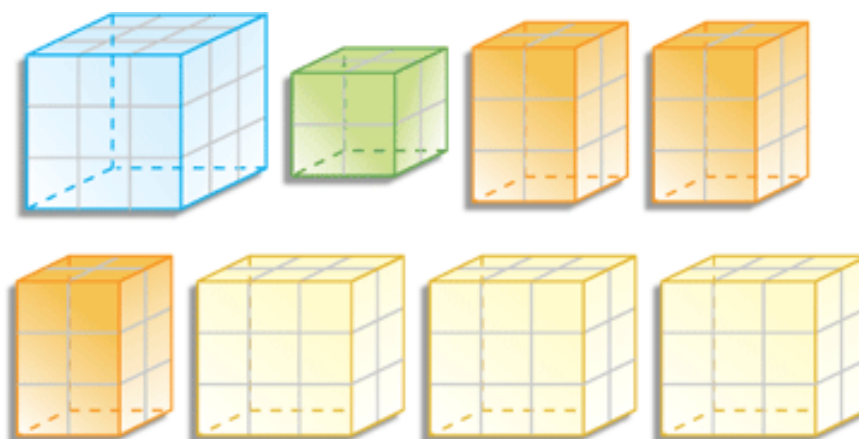


Figura 1.21: Sólidos divididos em cubos unitários (OBJETIVO, 2017)

Quando o sólido possui formato irregular, seu volume pode ser calculado por meio da imersão. Ao sair gritando Eureka e correndo nú por Siracusa, Arquimedes havia descoberto que o volume de um sólido irregular pode ser calculado pelo volume de água deslocado ao se afundar o mesmo na água (BATALHA; BENTO, 2007), como exemplifica a Figura 1.22.

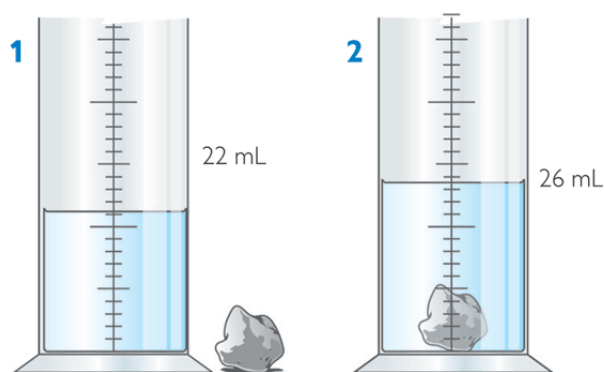


Figura 1.22: Volume de um sólido irregular por imersão (TARINGA, 2012)

1.7 METODOLOGIAS

Serão utilizadas as metodologias descritas a seguir.

1. Confeção dos poliedros e decomposição dos mesmos

Os poliedros serão confeccionados manualmente, assim como suas decomposições. As Figuras 1.1 e 1.2 ilustram essa estratégia.

2. Impressão 3D

Com o avanço da tecnologia e a invenção da impressora 3D, podemos criar diversos objetos poliédricos com o auxílio desse instrumento. Os poliedros da Figura 1.3 foram criados com uma impressora 3D.

3. GeoGebra 3D

Com o auxílio de softwares, podemos desenhar graficamente poliedros. Um desses softwares é o GeoGebra 3D. A partir do desenho do poliedro, podemos visualizar formas de decompô-lo em poliedros conhecidos ou compô-lo a partir de poliedros conhecidos.

4. Fotografia

Poliedros construídos manualmente ou com auxílio da impressora 3D serão fotografados para ilustrar a decomposição ou a composição. Empregamos a fotografia para registrar as Figuras 1.1, 1.2 e 1.3.

1.8 OBJETIVOS

1.8.1 OBJETIVO GERAL

Estabelecer estratégias para calcular o volume de alguns poliedros convexos das seguintes classes: poliedros Platônicos, poliedros Arquimedianos, poliedros de Catalan, poliedros de Johnson.

1.8.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Explorar o software GeoGebra 3D, propondo atividades de composição/decomposição de poliedros convexos para serem desenvolvidas com o aplicativo.
- Organizar material didático para o Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, Câmpus Curitiba.
- Compilar os trabalhos semestrais da disciplina Geometria B, do Curso de Licenciatura em Matemática, e da disciplina Geometria Espacial, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, ambos da UTFPR, Câmpus Curitiba, sobre o cálculo do volume de poliedros convexos.

1.9 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está estruturado da seguinte forma:

1. no Capítulo 1, apresentamos a justificativa, a metodologia, os objetivos e discorremos sobre poliedros na natureza e o conceito de volume;
2. no Capítulo 2, conceituamos poliedro convexo e classificamos os poliedros quanto à regularidade;
3. nos Capítulos 3, 4, 5 e 6, apresentamos estratégias para calcular o volume de alguns poliedros Platônicos, Arquimedianos, de Catalan e de Johnson, respectivamente;
4. no Capítulo 7, propomos atividades de composição/decomposição de poliedros convexos para o cálculo do volume empregando o GeoGebra 3D;
5. no Capítulo 8, mencionamos as conclusões.

2 POLIEDROS CONVEXOS

Antes de iniciarmos o cálculo do volume de poliedros convexos, algumas definições são necessárias. A primeira delas é a definição de poliedro convexo. Outras definições mencionadas neste capítulo são apresentadas nos Capítulos 3, 4, 5 e 6.

2.1 DEFINIÇÃO

Segundo (COXETER, 1973), um poliedro pode ser definido como "a finite, connected set of plane polygons, such that every side of each polygons belongs also to just one other polygon"¹. Dessa forma, para que o poliedro seja convexo é preciso que dois polígonos não estejam no mesmo plano e que o plano de cada polígono deixe os demais em um mesmo semiespaço (DOLCE; POMPEU, 2013), como na Figura 2.1(a).

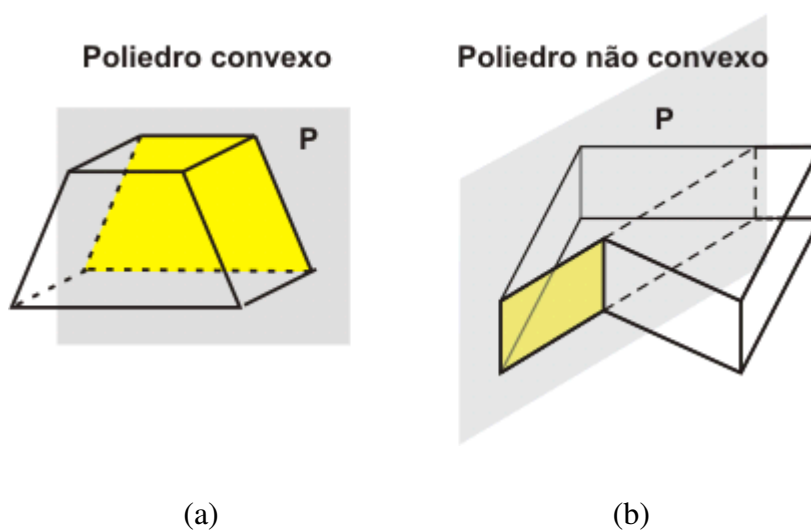


Figura 2.1: Poliedros (SCHOOL, 2017)

2.2 ELEMENTOS

Os elementos de um poliedro são as faces, os vértices e as arestas, representados na Figura 2.2.

¹um poliedro é um conjunto finito de polígonos conectados, onde todo lado de um polígono pertence a apenas um outro polígono (COXETER, 1973).

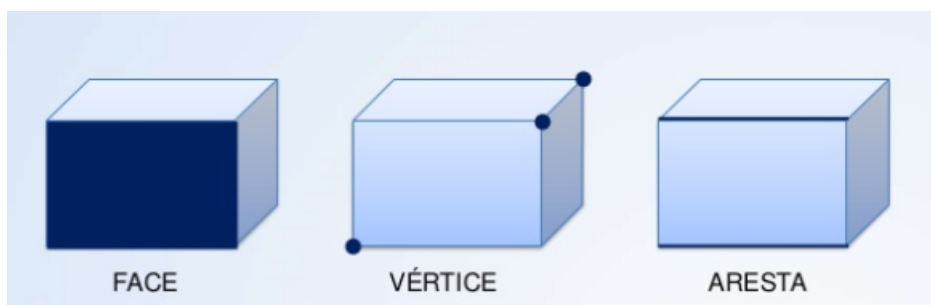


Figura 2.2: Elementos de um poliedro (LIMEIRA, 2014)

Segundo (DOLCE; POMPEU, 2013), as faces do poliedro são os polígonos que o compõem, as arestas são os lados dos polígonos, os vértices são os vértices dos polígonos e a união das faces é a superfície do poliedro.

René Descartes (1596-1650)², formulou uma relação entre o número de vértices, arestas e faces de um poliedro. Como essa relação foi demonstrada por Leonhard Euler (1707-1783)³, ela leva seu nome (SIMOES; BUENO, 2008).

2.3 RELAÇÃO DE EULER

Para (COXETER, 1973), um poliedro satisfaz a relação de Euler quando "every simple closed curve drawn on the surface can be shrunk, or every circuit of edges bounds a region"⁴. Poliedros que satisfazem a relação de Euler são poliedros Eulerianos. Nem todo poliedro Euleriano é convexo, mas todo poliedro convexo é Euleriano (DOLCE; POMPEU, 2013). Apresentamos a seguir, segundo (DOLCE; POMPEU, 2013), a prova para a relação de Euler.

Teorema 2.1 (Relação de Euler) *Para todo poliedro convexo, vale a relação*

$$V - A + F = 2, \tag{2.1}$$

onde V é o número de vértices, A o de arestas e F o de faces do poliedro.

Demonstração.

Inicialmente, consideremos uma superfície poliédrica limitada convexa aberta⁵. Pro-

²René Descartes: filósofo, físico e matemático francês.

³Leonhard Euler: matemático e físico suíço.

⁴toda curva fechada simples desenhada na superfície pode ser diminuída (encolhida), ou cada circuito de arestas limita uma região (COXETER, 1973).

⁵A definição pode ser encontrada em (DOLCE; POMPEU, 2013).

varemos, por indução finita sobre o número de faces, que

$$V' - A' + F' = 1, \quad (2.2)$$

onde V' é o número de vértice, A' é o número de arestas e F' é o número de faces da superfície poliédrica limitada convexa aberta, doravante denominada simplesmente superfície aberta.

i) Base de indução

Seja $F' = 1$. Neste caso, a superfície aberta se reduz a um polígono de n lados. Assim, $V' = A' = n$ e $V' - A' + F' = n - n + 1 = 1$.

ii) Hipótese de indução

Suponhamos que a relação (2.2) vale para uma superfície aberta com F'' faces, V'' vértices e A'' arestas, ou seja,

$$V'' - A'' + F'' = 1. \quad (2.3)$$

iii) Validade para o sucessor, isto é, para uma superfície aberta de $F'' + 1$ faces

Ao acrescentarmos uma face à superfície aberta, temos vértices e arestas coincidentes a vértices e arestas já existentes. Assim, se a face acrescentada à superfície aberta de V'' vértices, A'' arestas e F'' faces tem n arestas com m arestas coincidentes, onde $m < n$, temos para a nova superfície aberta que:

$$F' = F'' + 1; \quad (2.4)$$

$$A' = A'' + n - m; \quad (2.5)$$

$$V' = V'' + n - (m + 1). \quad (2.6)$$

Logo, por (2.4), (2.5) e (2.6), concluímos que:

$$\begin{aligned} V' - A' + F' &= V'' + n - (m + 1) - (A'' + n - m) + F'' + 1 \\ &= V'' + n - m - 1 - A'' - n + m + F'' + 1 \\ &= V'' - A'' + F''. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Em (2.7), temos a hipótese de indução (ii). Portanto, $V' - A' + F' = 1$.

Consideremos agora uma superfície poliédrica limitada convexa fechada⁶, com F faces, V vértices e A arestas.

Retirando uma face dessa superfície, obtemos uma superfície aberta de V' vértices, A' arestas e F' faces para a qual vale a relação (2.2). Dessa forma, $V' = V$, $A' = A$ e $F' = F - 1$.

Portanto, temos que

$$V' - A' + F' = V - A + F - 1 = 1,$$

isto é,

$$V - A + F = 2.$$

□

2.4 OPERAÇÕES DE TRANSFORMAÇÃO SOBRE POLIEDROS

Podemos transformar poliedros removendo, acoplado ou girando poliedros. Apresentamos a seguir as operações que transformam poliedros em outros poliedros.

2.4.1 POLIEDROS DUAIS

Segundo (SANTOS, 1999), obtemos o dual de um poliedro unindo por segmentos de reta os centros das faces consecutivas do poliedro. Dessa maneira, um novo poliedro é formado, dentro do primeiro, de modo que os vértices do poliedro interior coincidem com o centro das faces do poliedro exterior. A Figura 2.3 ilustra os duais dos poliedros Platônicos.

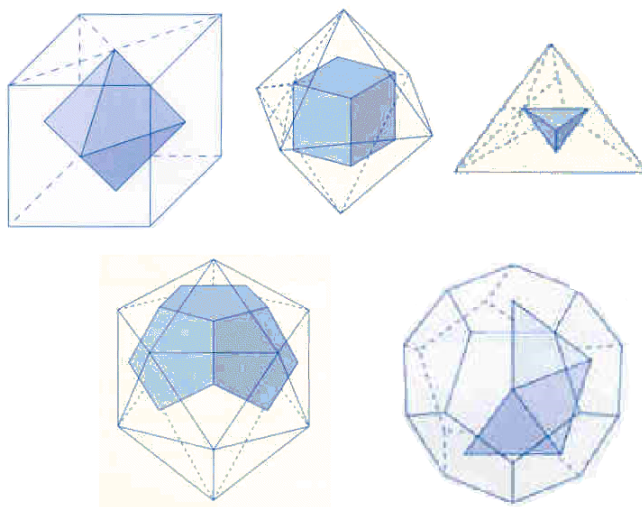


Figura 2.3: Poliedros Platônicos e seus duais (SANTOS, 1999)

⁶A definição pode ser encontrada em (DOLCE; POMPEU, 2013).

Na Figura 2.3, podemos observar, a partir do cubo, que primeiro determinamos o centro de cada face e depois unimos os centros das faces adjacentes, formando um novo poliedro. Este poliedro é o poliedro dual do poliedro original.

2.4.2 TRUNCAMENTO

O truncamento "consiste em cortar os vértices ou as arestas de um sólido" (LOCCI, 2011). A Figura 2.4 mostra o truncamento de um cubo.

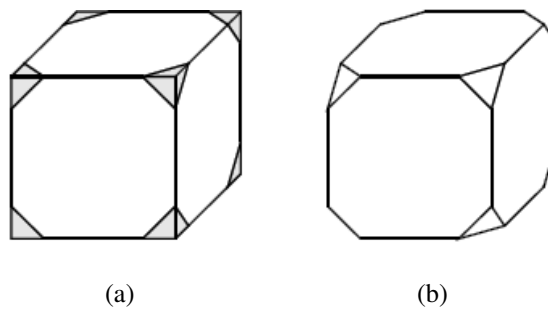


Figura 2.4: Truncamento do cubo: (a) cubo; (b) cubo truncado (IAVE, 2017)

Na Figura 2.4, ao removermos as oito pirâmides dos vértices do cubo, um poliedro Platônico, obtemos o cubo truncado, um poliedro Arquimediano. Muitos poliedros são obtidos a partir do truncamento, como a maioria dos poliedros Arquimedianos.

2.4.3 ACUMULAÇÃO

Segundo (RESEARCH, 2018), "cumulation is the dual operation of truncation which replaces the faces of a polyhedron with pyramids of height h (where h may be positive, zero, or negative) having the face as the base"⁷. A Figura 2.5 ilustra a acumulação do tetraedro regular.

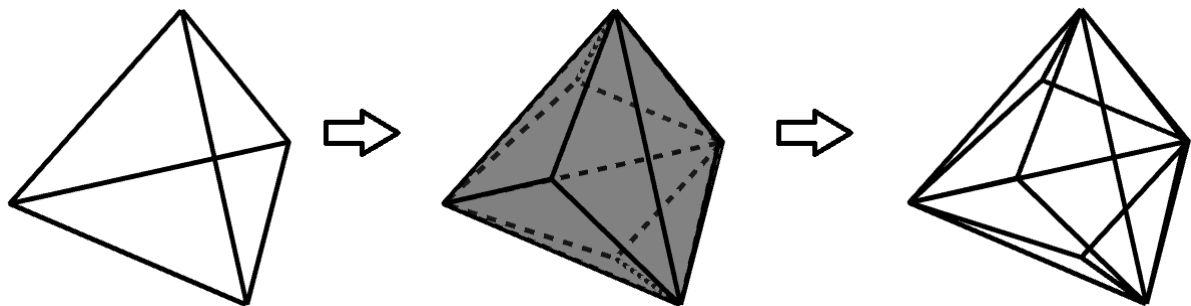


Figura 2.5: Acumulação do tetraedro regular

⁷a acumulação é a operação dual do truncamento que substitui as faces do poliedro por pirâmides de altura h (onde h pode ser positiva, nula ou negativa) tendo a face como base (RESEARCH, 2018).

Ao acumularmos pirâmides nas faces do tetraedro regular, este um poliedro Platônico, obtemos o tetraedro triakis, um poliedro de Catalan. Muitos poliedro são obtidos a partir da acumulação, como a maioria dos poliedros de Catalan.

2.4.4 SNUBIFICAÇÃO

A snubificação "consiste em afastar as faces do poliedro, rodar as mesmas de um certo ângulo (normalmente 45°), e preencher o espaço vazio entre as novas faces com triângulos" (LOCCI, 2011). A Figura 2.6 mostra a snubificação do cubo.

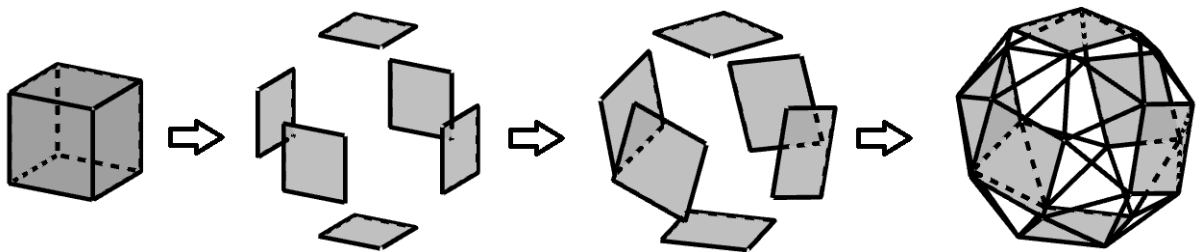


Figura 2.6: Snubificação do cubo

Ao snubificarmos o cubo, um poliedro Platônico, obtemos o cubo snub, um poliedro Arquimediano. Dois poliedros Arquimedianos são obtidos por snubificação.

2.4.5 EXPANSÃO

Segundo (RESEARCH, 2018), "expansion is a special case of snubification in which no twist occurs"⁸. A Figura 2.7 ilustra a expansão do cubo.

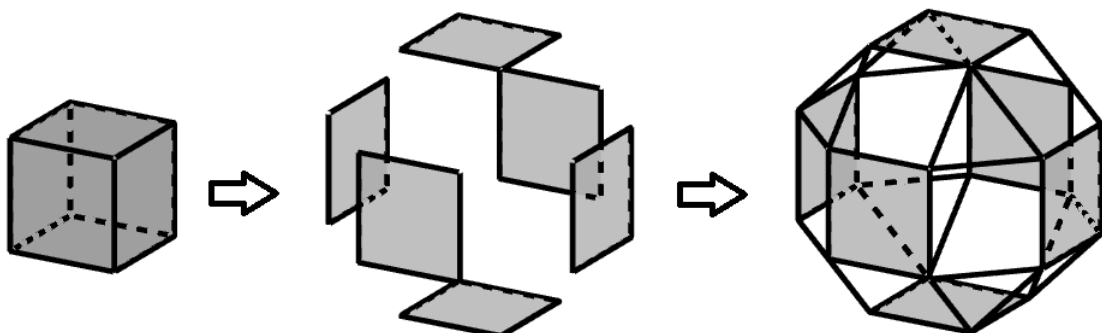


Figura 2.7: Expansão do cubo

Ao expandirmos o cubo, um poliedro Platônico, obtemos o rombicuboctaedro, um

⁸expansão é um caso especial de snubificação onde não ocorrem rotações (RESEARCH, 2018).

poliedro Arquimediano. Alguns poliedros Arquimedianos podem ser obtidos por meio da expansão de poliedros Platônicos.

2.4.6 COMPOSIÇÃO

Para (RESEARCH, 2018), a composição é "an arrangement of a number of interpenetrating polyhedra, either all the same or of several distinct types, usually having visually attractive symmetric properties"⁹. A Figura 2.8 mostra um poliedro composto por dois tetraedros regulares.

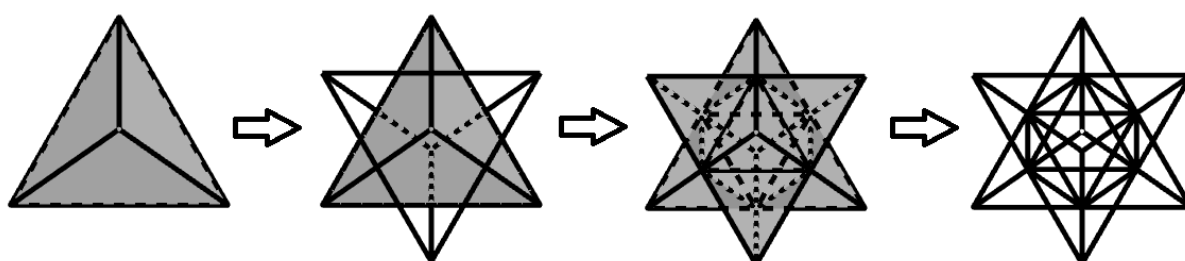


Figura 2.8: Poliedro composto por dois tetraedros regulares

Ao compormos dois tetraedros regulares, obtemos o *Stella Octangula*. Podemos obter um poliedro composto a partir de poliedros Platônicos e Arquimedianos ou a partir de poliedros e seus duais.

2.4.7 ESTRELAMENTO

Segundo (LOCCI, 2011), o estrelamento "consiste em estender os planos definidos pelas faces do poliedro até se intersectarem, formando assim um novo sólido". A Figura 2.9 ilustra o estrelamento do dodecaedro regular.

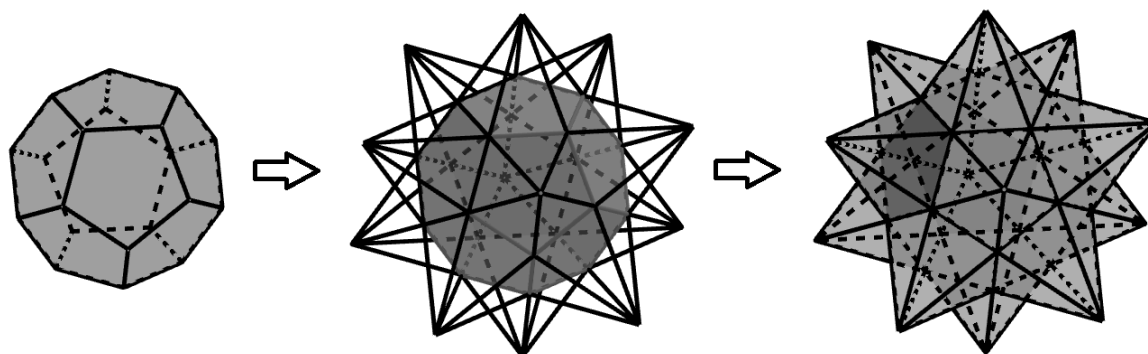


Figura 2.9: Estrelamento do dodecaedro regular

⁹um arranjo de vários poliedros interpenetrantes, todos iguais ou de vários tipos distintos, geralmente com propriedades simétricas visualmente atraentes (RESEARCH, 2018).

Ao estrelarmos o dodecaedro regular, um poliedro Platônico, obtemos o pequeno dodecaedro estrelado, um poliedro de Kepler-Poinsot.

2.5 CLASSES

Podemos dividir os poliedros em duas classes: os poliedros regulares e os não regulares.

2.5.1 POLIEDROS REGULARES

Segundo (DOLCE; POMPEU, 2013), poliedros regulares são aqueles que:

1. possuem polígonos regulares e congruentes em suas faces;
2. possuem ângulos poliédricos congruentes.

Podemos então descrever dois tipos de poliedros com essas características: os poliedros Platônicos e os poliedros de Kepler-Poinsot.

a) Poliedros Platônicos

Poliedros que possuem o mesmo polígono regular em cada face, com o mesmo número de faces se encontrando em cada vértice. Os poliedros Platônicos são os únicos poliedros convexos que atendem a esses critérios (MCCOOEY, 2015).

b) Poliedros de Kepler-Poinsot

Os poliedros de Kepler-Poinsot são aqueles que se autointersectam. Eles são regulares pois cada um tem o mesmo polígono regular ou estrela em cada face, com o mesmo número de faces se encontrando em cada vértice. Foram descritos quatro poliedros de Kepler-Poinsot: o pequeno dodecaedro estrelado, o grande dodecaedro estrelado, o grande dodecaedro e o grande icosaedro. Os dois primeiros foram descobertos por Johannes Kepler (1571-1630) e os outros dois por Louis Poinsot (1777-1859) (MCCOOEY, 2015). A Figura 2.10 ilustra os quatro poliedros de Kepler-Poinsot.

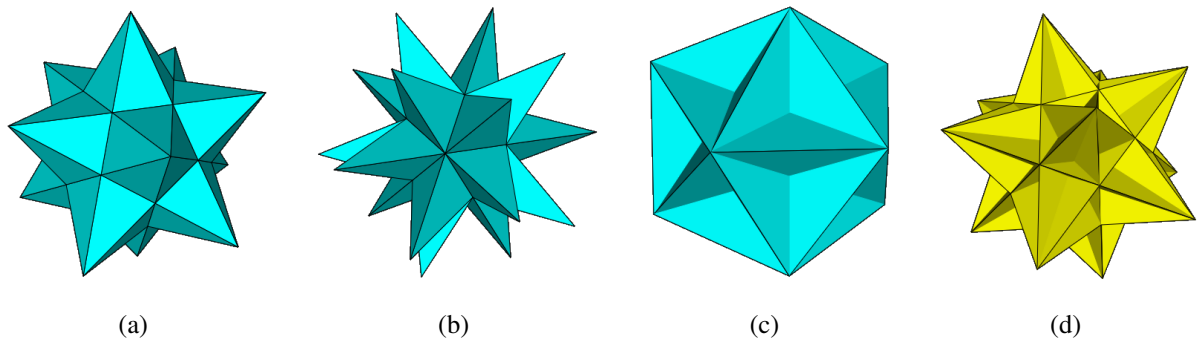


Figura 2.10: Poliedros de Kepler-Poinsot: (a) pequeno dodecaedro estrelado; (b) grande dodecaedro estrelado; (c) grande dodecaedro; (d) grande icosaedro (MCCOOEY, 2015)

2.5.2 POLIEDROS NÃO REGULARES

São os poliedros que não atendem aos critérios de regularidade. São poliedros como os Arquimedianos, os de Catalan, os de Johnson, as pirâmides, as dipirâmides, os prismas, os antiprismas e os trapezoedros.

a) Poliedros Arquimedianos

Um poliedro Arquimediano ou semirregular é um poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares de dois ou mais tipos, que se encontram no mesmo padrão em torno de cada vértice. Estes poliedros têm simetria rotacional de grupo poliédrico (tetraédrico, octaédrico ou icosaédrico). Existem outros poliedros, que não os Arquimedianos, que possuem faces poligonais regulares de dois ou mais tipos, reunidos no mesmo padrão em torno de cada vértice. Contudo, nenhum deles possui simetria rotacional. Assim, os poliedros Arquimedianos são somente treze (MCCOOEY, 2015).

b) Poliedros de Catalan

Os poliedros de Catalan não possuem polígonos regulares compondo suas faces. Alguns possuem faces definidas por triângulos isósceles ou escalenos, por losangos, por deltóides¹⁰ ou por pentágonos não regulares. Os poliedros de Catalan são duais dos poliedros Arquimedianos.

¹⁰Deltóide ou pipa é um quadrilátero não regular, cujos lados contíguos são congruentes dois a dois. O deltóide é o dual do trapézio isósceles.

c) Poliedros de Johnson

São poliedros cujas faces são polígonos regulares, porém não são todas de um tipo, ou quando são, não possuem ângulos poliédricos congruentes.

d) Pirâmides

Segundo (MUNIZ NETO, 2013), dados um polígono convexo $A_1A_2 \dots A_n$ e um ponto V não pertencente ao plano de $A_1A_2 \dots A_n$, a pirâmide $VA_1A_2 \dots A_n$, de vértice V e base $A_1A_2 \dots A_n$, é a porção limitada do espaço tridimensional delimitada por $A_1A_2 \dots A_n$ e pelos triângulos VA_iA_{i+1} , $1 \leq i \leq n$, com a convenção de que $A_{n+1} = A_1$. A Figura 2.11 ilustra algumas pirâmides.

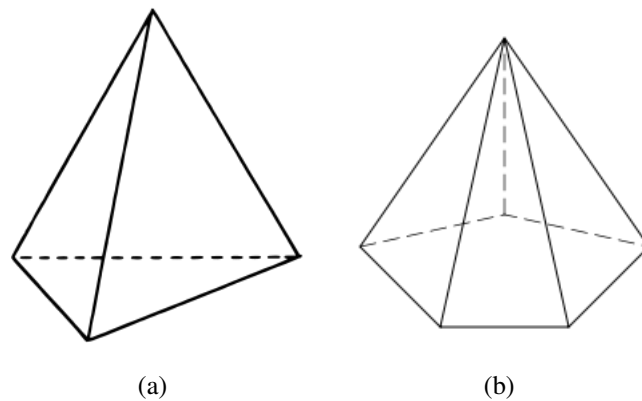


Figura 2.11: Pirâmides: (a) pirâmide triangular; (b) pirâmide pentagonal

e) Prismas e Antiprismas

Para (MUNIZ NETO, 2013), dados dois polígonos convexos $A_1A_2 \dots A_n$ e $A'_1A'_2 \dots A'_n$, situados em planos paralelos, tais que as retas $\overleftrightarrow{A_1A'_1}, \overleftrightarrow{A_2A'_2}, \dots, \overleftrightarrow{A_nA'_n}$ também são paralelas, o prisma de bases $A_1A_2 \dots A_n$ e $A'_1A'_2 \dots A'_n$ é a porção limitada do espaço tridimensional delimitada pelos polígonos $A_1A_2 \dots A_n$ e $A'_1A'_2 \dots A'_n$ e pelos paralelogramos $A_iA_{i+1}A'_{i+1}A'_i$, $1 \leq i \leq n$, com a convenção de que $A_{n+1} = A_1$ e $A'_{n+1} = A'_1$. A Figura 2.12 mostra alguns prismas.

Segundo (LOPES, 2012), "os antiprismas são compostos por duas faces poligonais iguais e paralelas chamadas diretrizes, ligados por triângulos. O número de triângulos é o dobro do número de lados da face diretriz". A Figura 2.13 ilustra alguns antiprismas.

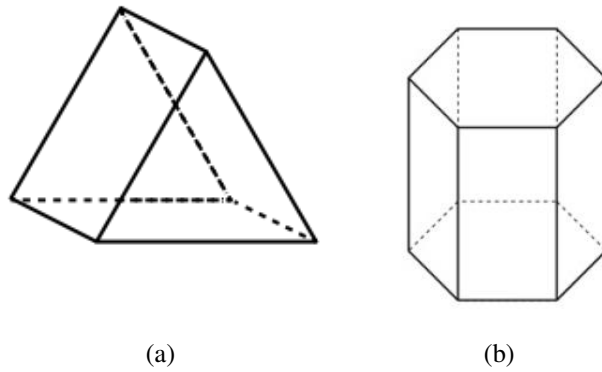


Figura 2.12: Prismas: (a) prisma triangular; (b) prisma hexagonal

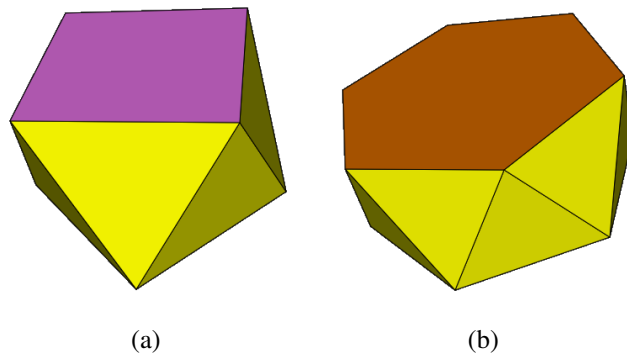


Figura 2.13: Antiprismas: (a) antiprisma quadrado; (b) antiprisma hexagonal (MCCOOEY, 2015)

f) Dipirâmides e Trapezoedros

Segundo (MCCOOEY, 2015), as dipirâmides são os duais dos prismas e os trapezoedros são os duais dos antiprismas. As faces das dipirâmides são triângulos e as dos trapezoedros são deltóides, como ilustra a Figura 2.14.

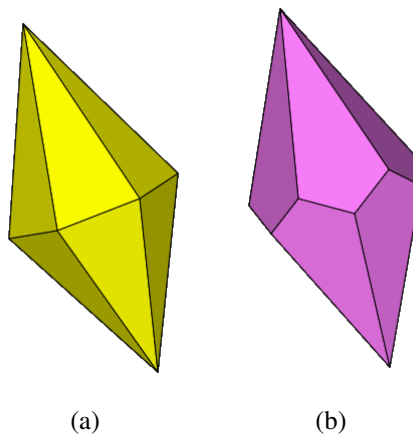


Figura 2.14: (a) Dipirâmide heptagonal; (b) trapezoedro hexagonal (MCCOOEY, 2015)

3 POLIEDROS PLATÔNICOS

Provavelmente, os poliedros Platônicos já eram conhecidos antes de 500 a.C.. Eles foram nomeados em homenagem ao antigo filósofo grego Platão¹ (428 a.C. - 348 a.C.), que os mencionou em seu diálogo *Timeu*, escrito por volta de 360 a.C. (MCCOOEY, 2015).

3.1 DEFINIÇÃO

Um poliedro Platônico "é aquele que possui como faces polígonos regulares congruentes, e todos os vértices unem a mesma quantia de polígonos" (BUSKE, 2007). Ainda, segundo (DOLCE; POMPEU, 2013), um poliedro é dito de Platão se, e somente se:

1. possui todas as faces com o mesmo número n de arestas;
2. possui todos os ângulos poliédricos com o mesmo número m de arestas;
3. vale a Relação de Euler.

Teorema 3.1 (Classes de poliedros Platônicos) *Existem apenas cinco classes de poliedros de Platão.*

Demonstração.

Como o poliedro é Platônico, temos que:

1. todas as faces possuem o mesmo número n , $n \geq 3$, de arestas. Assim,

$$\begin{aligned} nF &= 2A, \\ F &= \frac{2A}{n}; \end{aligned} \tag{3.1}$$

2. todos os vértices possuem o mesmo número m , $m \geq 3$, de arestas. Logo,

$$\begin{aligned} mV &= 2A, \\ V &= \frac{2A}{m}; \end{aligned} \tag{3.2}$$

¹Platão: filósofo e matemático grego, discípulo de Sócrates e mentor de Aristóteles; fundador da Academia de Atenas.

3. a relação de Euler é válida. Portanto,

$$V - A + F = 2. \quad (3.3)$$

Substituindo (3.1) e (3.2) em (3.3), obtemos:

$$\begin{aligned} V - A + F &= 2 \\ \frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} &= 2 \\ A \left(\frac{2}{m} - 1 + \frac{2}{n} \right) &= 2 \\ \frac{2}{m} - 1 + \frac{2}{n} &= \frac{2}{A} \\ \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} &= \frac{1}{A}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Considerando m e n simultaneamente maiores do que 3, temos que:

$$\begin{aligned} m \geq 4 &\Rightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4} \\ n \geq 4 &\Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} &\leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} &\leq 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ao compararmos (3.5) e (3.4), constatamos que

$$\frac{1}{A} \leq 0 \Rightarrow A \leq 0,$$

o que é claramente um absurdo, pois o número de arestas de um poliedro não pode ser negativo. Logo, m e n não podem ser simultaneamente maiores do que 3. Assim, ou o poliedro possui faces triangulares ($n = 3$) e/ou possui ângulos triedros ($m = 3$).

Se $m = 3$, temos por (3.4) que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} &= \frac{1}{A} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} &= \frac{1}{A} \\ \frac{1}{n} - \frac{1}{6} &= \frac{1}{A}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Em (3.6), como $A > 0$, $\frac{1}{n} > \frac{1}{6} \Rightarrow n < 6$. Assim, se $m = 3$, temos que $n = 3$ ou $n = 4$

ou $n = 5$.

Se $n = 3$, temos por (3.4) que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} &= \frac{1}{A} \\ \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= \frac{1}{A} \\ \frac{1}{m} - \frac{1}{6} &= \frac{1}{A}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Em (3.7), como $A > 0$, $\frac{1}{m} > \frac{1}{6} \Rightarrow m < 6$. Assim, se $n = 3$, temos que $m = 3$ ou $m = 4$ ou $m = 5$.

Dessa forma, com as relações (3.1), (3.2) e (3.4) estabelecemos as cinco classes de poliedros de Platão, mencionadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Classes de poliedros Platônicos

m	n	A	V	F	Classes de poliedros
3	3	6	4	4	Tetraedros
3	4	12	8	6	Hexaedros
4	3	12	6	8	Octaedros
3	5	30	20	12	Dodecaedros
5	3	30	12	20	Icosaedros

□

3.2 POLIEDROS REGULARES

Conforme as definições apresentadas no Capítulo 2, um poliedro regular é um poliedro com faces e ângulos poliédricos (vértices) congruentes. Assim, um poliedro convexo regular é um poliedro de Platão (a recíproca não é verdadeira) e existem, portanto, somente cinco poliedros convexos regulares, ilustrados na Figura 3.1. Estes poliedros têm faces triangulares, quadrangulares ou pentagonais, e ângulos poliédricos triedros, tetraédricos ou pentaédricos, como provado no Teorema 3.1.

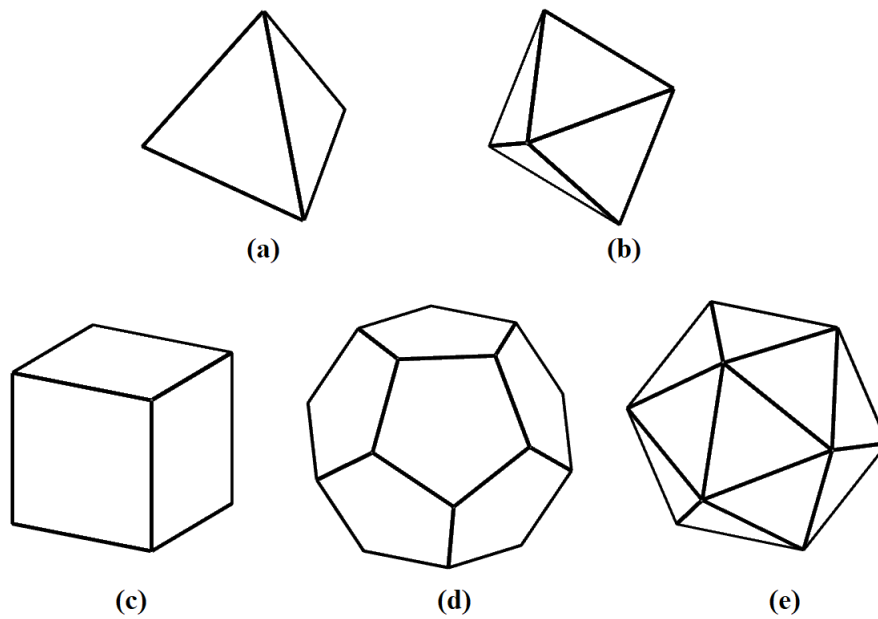


Figura 3.1: Poliedros regulares: (a) tetraedro regular; (b) octaedro regular; (c) hexaedro regular; (d) dodecaedro regular; (e) icosaedro regular

3.3 VOLUME

Calcularemos o volume dos poliedros Platônicos regulares porque estes são a base para o cálculo do volume de outros poliedros.

3.3.1 TETRAEDRO REGULAR

O tetraedro regular é composto por 4 vértices, 6 arestas e 4 faces regulares, todas triangulares, como ilustra a Figura 3.2.

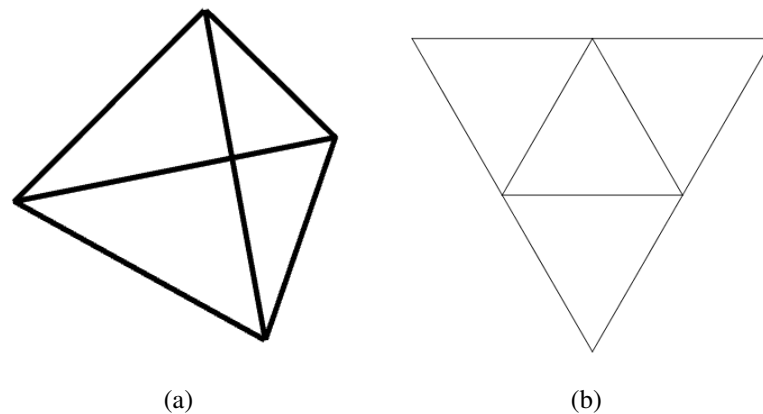


Figura 3.2: Tetraedro regular: (a) sólido; (b) planificação

Como o tetraedro regular é uma pirâmide de base triangular, o volume V_t desse poliedro é dado por

$$V_t = \frac{A_b H}{3}, \quad (3.8)$$

onde A_b é a medida da área da base e H é a medida da altura.

Determinaremos inicialmente a área A_b da base, que é um triângulo equilátero de lado a , sendo a a medida da aresta do tetraedro regular. Para tanto, devemos calcular a altura h desse triângulo, a qual também é uma mediana do triângulo. Dessa forma, temos as medidas indicadas na Figura 3.3.

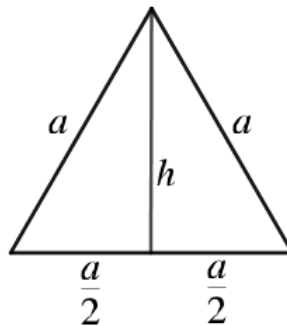


Figura 3.3: Triângulo equilátero de lado a e altura h

A altura h divide o triângulo equilátero em dois triângulos retângulos congruentes. Aplicando o Teorema de Pitágoras a um desses triângulos, obtemos:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ h^2 &= a^2 - \frac{a^2}{4} \\ h^2 &= \frac{3a^2}{4} \\ h &= \frac{\sqrt{3}}{2}a. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Assim, por (3.9), a área da base é dada por:

$$\begin{aligned} A_b &= \frac{ah}{2} \\ &= \frac{a \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} \\ A_b &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Precisamos ainda determinar a altura H do tetraedro, indicada na Figura 3.4.

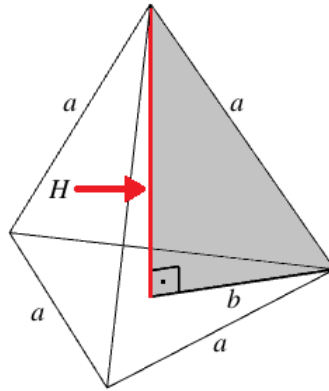


Figura 3.4: Altura H do tetraedro regular de aresta a

Na Figura 3.4, a medida b corresponde a $\frac{2}{3}$ da medida (3.9) da altura (ou da mediana) do triângulo equilátero. Logo,

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{2h}{3}, \\
 b &= \frac{2 \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)}{3}, \\
 b &= \frac{\sqrt{3}}{3}a.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b (3.11) e H , temos que:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= H^2 + b^2 \\
 a^2 &= H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2 \\
 a^2 &= H^2 + \frac{3a^2}{9} \\
 H^2 &= a^2 - \frac{a^2}{3} \\
 H^2 &= \frac{2a^2}{3} \\
 H &= \frac{\sqrt{6}}{3}a.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Finalmente, substituindo (3.10) e (3.12) em (3.8), obtemos para o volume do tetraedro regular:

$$\begin{aligned}
 V_t &= \frac{A_b H}{3} \\
 V_t &= \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \frac{a \sqrt{6}}{3} \\
 V_t &= \frac{a^3 \sqrt{18}}{36} \\
 V_t &= \frac{3a^3 \sqrt{2}}{36} \\
 V_t &= \frac{\sqrt{2}}{12} a^3.
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Logo, o volume V_t do tetraedro regular é dado por

$$V_t = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3,$$

onde a é a medida da aresta do poliedro.

3.3.2 HEXAEDRO REGULAR

O hexaedro regular é composto por 8 vértices, 12 arestas e 6 faces quadradas, como ilustra a Figura 3.5.

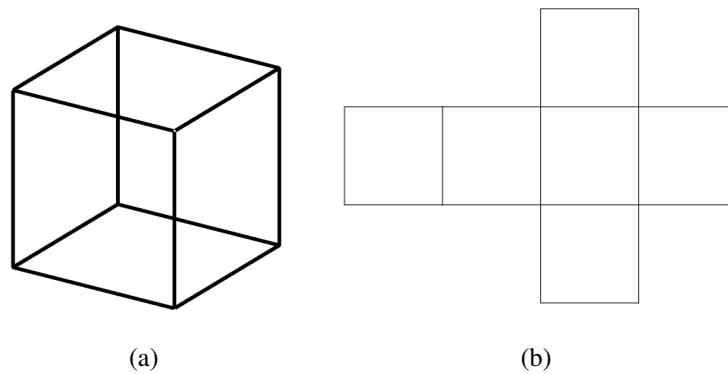


Figura 3.5: Hexaedro regular: (a) sólido; (b) planificação

O volume V_h do hexaedro regular é dado por

$$V_h = a^3,$$

onde a é a medida da aresta do poliedro. A demonstração construtivista dessa relação pode ser encontrada em (DOLCE; POMPEU, 2013), em (MUNIZ NETO, 2013), em (LIMA, 1991) e

em (FERNANDES, 2018).

3.3.3 OCTAEDRO REGULAR

O octaedro regular é composto por 6 vértices, 12 arestas e 8 faces triangulares regulares, como ilustra a Figura 3.6.

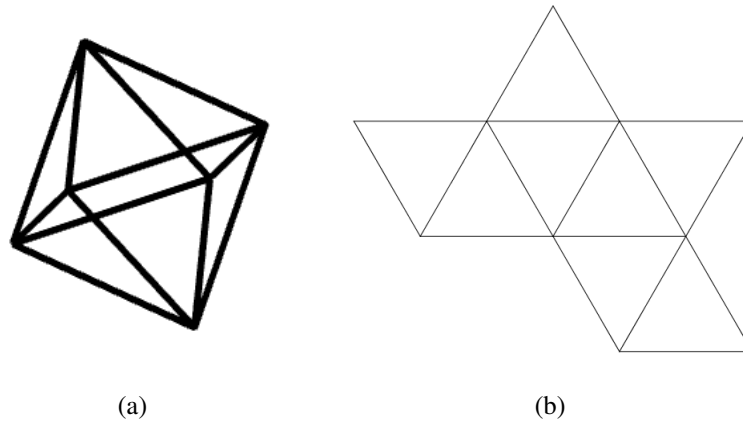


Figura 3.6: Octaedro regular: (a) sólido; (b) planificação

Podemos decompor o octaedro regular em duas pirâmides congruentes de base quadrada, como na Figura 3.7. Assim, o volume V_o do octaedro regular é dado por

$$V_o = 2V_p, \quad (3.14)$$

sendo V_p o volume de cada uma das pirâmides nas quais o octaedro regular foi decomposto.

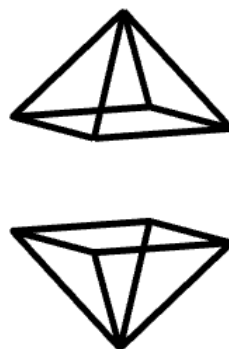


Figura 3.7: Decomposição do octaedro regular

Para calcularmos o volume dessas pirâmides, precisamos determinar a altura H , indicada na Figura 3.8.

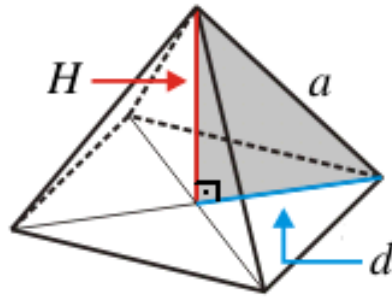


Figura 3.8: Altura da pirâmide que compõe o octaedro regular

Na Figura 3.8, d é a metade da diagonal do quadrado que define a base da pirâmide. Como o lado desse quadrado é a , medida da aresta do octaedro regular, temos que $d = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos d e H , ilustrado na Figura 3.8, obtemos:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= H^2 + d^2 \\
 a^2 &= H^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
 a^2 &= H^2 + \frac{a^2}{2} \\
 H^2 &= \frac{a^2}{2} \\
 H &= \frac{\sqrt{2}}{2}a.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

A área A_b do quadrado de lado a , base da pirâmide, é $A_b = a^2$. Usando essa relação e a igualdade (3.15), temos que o volume da pirâmide é:

$$\begin{aligned}
 V_p &= \frac{1}{3}A_bH \\
 V_p &= \frac{1}{3}a^2\frac{a\sqrt{2}}{2} \\
 V_p &= \frac{\sqrt{2}}{6}a^3.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Substituindo (3.16) em (3.14), concluímos que:

$$\begin{aligned}
 V_o &= 2V_p \\
 V_o &= 2\frac{a^3\sqrt{2}}{6} \\
 V_o &= \frac{\sqrt{2}}{3}a^3.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Logo, o volume V_o do octaedro regular é dado por

$$V_o = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3,$$

onde a é a medida da aresta do poliedro.

3.3.4 DODECAEDRO REGULAR

O dodecaedro regular é composto por 20 vértices, 30 arestas e 12 faces pentagonais regulares, como ilustra a Figura 3.9.

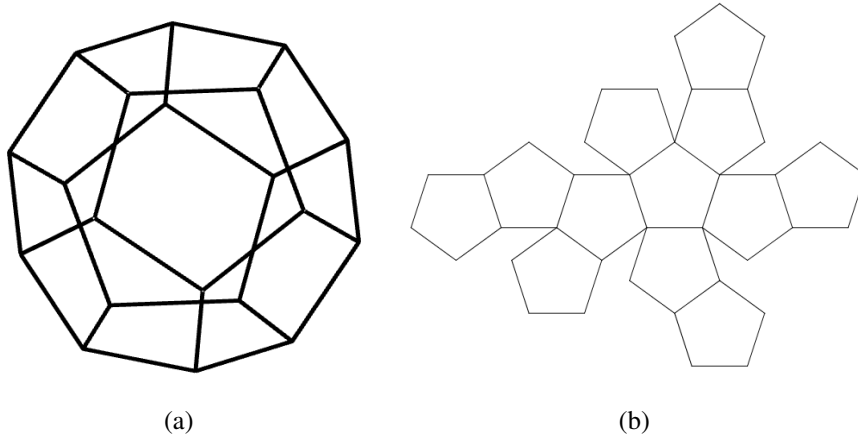


Figura 3.9: Dodecaedro regular: (a) sólido; (b) planificação

Podemos decompor o dodecaedro regular removendo 6 poliedros congruentes, de forma a obtermos um cubo cuja aresta é a diagonal d do pentágono regular que define a face do dodecaedro. Essa decomposição está ilustrada na Figura 3.10.

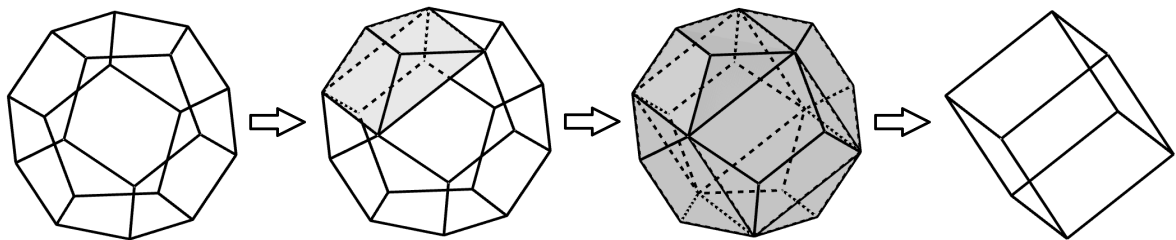


Figura 3.10: Decomposição do dodecaedro regular

A Figura 3.11 mostra os poliedros resultantes da decomposição, com as medidas das arestas. A medida a é a aresta do dodecaedro regular.

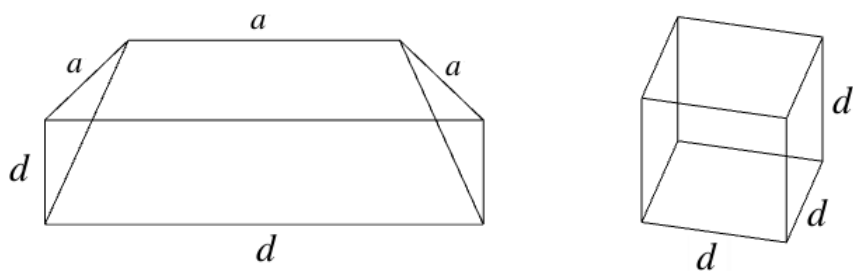


Figura 3.11: Poliedros oriundos da decomposição do dodecaedro regular com as medidas das arestas

Assim, o volume V_d do dodecaedro regular é dado por

$$V_d = 6V_p + V_c, \quad (3.18)$$

onde V_p é o volume do poliedro removido e V_c é o volume do cubo.

Calcularemos primeiramente o volume do cubo. Para tanto, precisamos determinar a medida da diagonal do pentágono regular. A Figura 3.12 mostra as medidas relevantes na face pentagonal do dodecaedro regular.

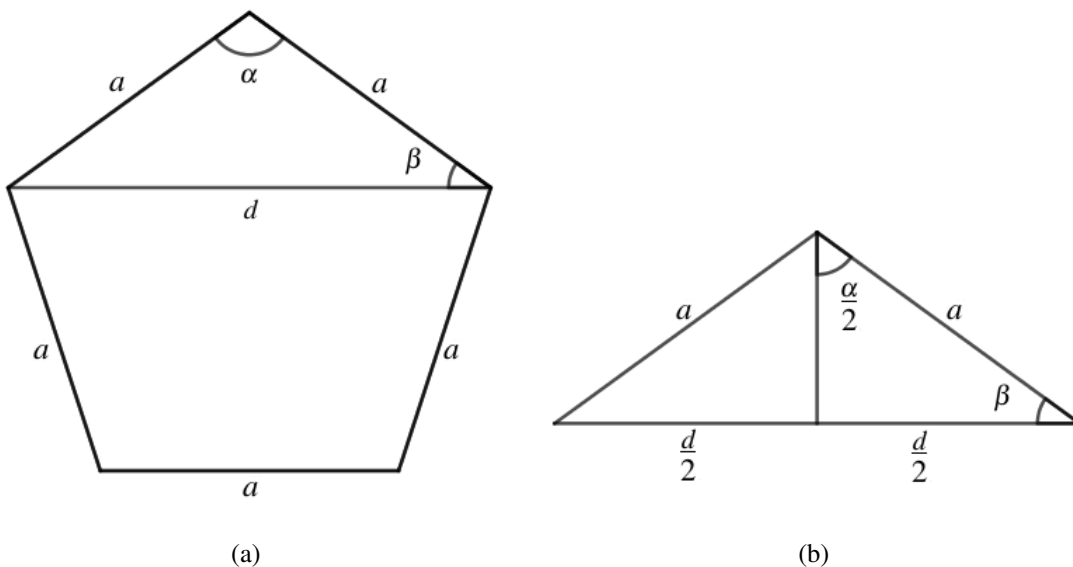


Figura 3.12: Face do dodecaedro regular: (a) diagonal; (b) triângulo isósceles obtido a partir dos lados e da diagonal do pentágono regular

Como α é um ângulo interno do pentágono regular, temos que:

$$\alpha = \frac{180^\circ(5-2)}{5}$$

$$\alpha = \frac{540^\circ}{5}$$

$$\alpha = 108^\circ. \quad (3.19)$$

Na Figura 3.12(b), o triângulo isósceles é dividido em dois triângulos retângulos. Nesses triângulos, temos, usando (3.19), que:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} + \beta &= 90^\circ \\ \frac{108^\circ}{2} + \beta &= 90^\circ \\ \beta &= (90 - 54)^\circ \\ \beta &= 36^\circ. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sabendo que

$$\cos(36^\circ) = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

(NÓS et al., 2017), obtemos:

$$\begin{aligned} \cos(36^\circ) &= \frac{\left(\frac{d}{2}\right)}{a} \\ \frac{\sqrt{5} + 1}{4} &= \frac{d}{2a} \\ d &= \frac{2a(\sqrt{5} + 1)}{4} \\ d &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2} a. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dessa forma, o volume V_c do cubo é igual a:

$$\begin{aligned} V_c &= d^3 \\ V_c &= \left(\frac{a(\sqrt{5} + 1)}{2}\right)^3 \\ V_c &= \frac{a^3}{8} (8\sqrt{5} + 16) \\ V_c &= (\sqrt{5} + 2) a^3. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Agora, precisamos determinar o volume do poliedro removido. Esse poliedro pode ser decomposto em duas pirâmides de base retangular e em um prisma triangular, como mostra a

Figura 3.13.

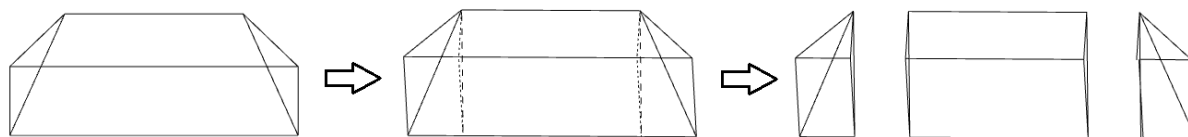


Figura 3.13: Decomposição do poliedro removido do dodecaedro regular

Dessa maneira, o volume V_p do poliedro é dado por

$$V_p = 2V_{p1} + V_{p2}, \quad (3.23)$$

onde V_{p1} é o volume da pirâmide de base retangular e V_{p2} é o volume do prisma triangular. A Figura 3.14 mostra a face trapezoidal do poliedro após a decomposição.

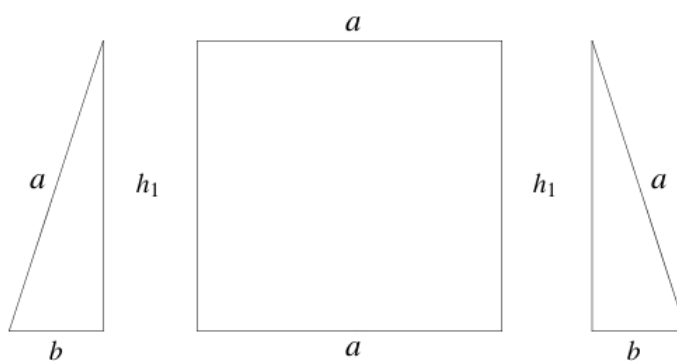


Figura 3.14: Face trapezoidal do poliedro após a decomposição

Na Figura 3.14, h_1 é a altura do trapézio. Empregando (3.21), obtemos:

$$\begin{aligned} a + 2b &= d \\ 2b &= \frac{a(\sqrt{5} + 1)}{2} - a \\ 2b &= \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2} \\ b &= \frac{\sqrt{5} - 1}{4} a. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e h_1 e utilizando (3.24), constatamos que:

$$a^2 = b^2 + h_1^2$$

$$\begin{aligned}
h_1^2 &= a^2 - \left(\frac{a(\sqrt{5}-1)}{4} \right)^2 \\
h_1^2 &= a^2 - \frac{a^2(6-2\sqrt{5})}{16} \\
h_1^2 &= \frac{a^2(10+2\sqrt{5})}{16} \\
h_1 &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Para determinar o volume do prisma, precisamos calcular a área da base triangular e a altura. Na Figura 3.14, podemos observar que a altura mede a . A Figura 3.15 mostra o triângulo que forma a base do prisma.

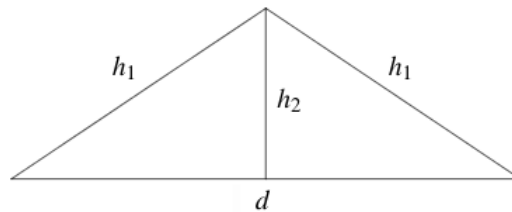


Figura 3.15: Triângulo que forma a base do prisma triangular

Na Figura 3.15, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de hipotenusa h_1 e catetos $\frac{d}{2}$ e h_2 e utilizando (3.21) e (3.25), obtemos:

$$\begin{aligned}
h_1^2 &= \left(\frac{d}{2} \right)^2 + h_2^2 \\
\left(\frac{a}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}} \right)^2 &= \left(\frac{a(\sqrt{5}+1)}{4} \right)^2 + h_2^2 \\
h_2^2 &= \frac{a^2(10+2\sqrt{5})}{16} - \frac{a^2(6+2\sqrt{5})}{16} \\
h_2^2 &= \frac{4a^2}{16} \\
h_2^2 &= \frac{a^2}{4} \\
h_2 &= \frac{a}{2}. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Empregando (3.21) e (3.26), temos que a área A_{b1} do triângulo da Figura 3.15 é dada

por:

$$\begin{aligned}
 A_{b1} &= \frac{dh_2}{2} \\
 &= \frac{a(\sqrt{5}+1)a}{2} \\
 A_{b1} &= \frac{a^2(\sqrt{5}+1)}{2} \\
 A_{b1} &= \frac{\sqrt{5}+1}{8}a^2.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Assim, por (3.27), temos que o volume V_{p2} do prisma triangular é igual a:

$$\begin{aligned}
 V_{p2} &= A_{b1}a \\
 V_{p2} &= \frac{a^2(1+\sqrt{5})}{8}a \\
 V_{p2} &= \frac{\sqrt{5}+1}{8}a^3.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Falta-nos ainda calcular o volume da pirâmide de base retangular. Pela Figura 3.13, temos que a altura da pirâmide é a altura h_2 do triângulo que forma a base do prisma triangular. Como a base da pirâmide é um retângulo de lados b e d , usando (3.21) e (3.24), obtemos para a área A_{b2} da base da pirâmide:

$$\begin{aligned}
 A_{b2} &= bd \\
 &= \frac{a(\sqrt{5}-1)a(\sqrt{5}+1)}{4} \\
 A_{b2} &= \frac{4a^2}{8} \\
 A_{b2} &= \frac{a^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Dessa forma, por (3.26) e (3.29), o volume V_{p1} da pirâmide é igual a:

$$\begin{aligned}
 V_{p1} &= \frac{1}{3}A_{b2}h_2 \\
 V_{p1} &= \frac{1}{3} \frac{a^2}{2} \frac{a}{2} \\
 V_{p1} &= \frac{a^3}{12}.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Substituindo (3.28) e (3.30) em (3.23), temos que o volume do poliedro é dado por:

$$\begin{aligned}
V_p &= 2V_{p1} + V_{p2} \\
V_p &= 2\frac{a^3}{12} + \frac{a^3(1+\sqrt{5})}{8} \\
V_p &= \frac{a^3}{6} + \frac{a^3(1+\sqrt{5})}{8} \\
V_p &= \frac{4a^3 + 3a^3(\sqrt{5}+1)}{24} \\
V_p &= \frac{3\sqrt{5}+7}{24}a^3.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Por fim, substituindo (3.22) e (3.31) em (3.18), concluímos que o volume V_d do dodecaedro regular é dado por:

$$\begin{aligned}
V_d &= 6V_p + V_c \\
V_d &= 6\frac{a^3}{24}(7+3\sqrt{5}) + a^3(\sqrt{5}+2) \\
V_d &= \frac{a^3(7+3\sqrt{5})}{4} + a^3(\sqrt{5}+2) \\
V_d &= \frac{4a^3(\sqrt{5}+2) + a^3(7+3\sqrt{5})}{4} \\
V_d &= \frac{7\sqrt{5}+15}{4}a^3.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Portanto, o volume V_d do dodecaedro regular é dado por

$$V_d = \frac{7\sqrt{5}+15}{4}a^3,$$

sendo a a medida da aresta do poliedro.

3.3.5 ICOSAEDRO REGULAR

O icosaedro regular é composto por 12 vértices, 30 arestas e 20 faces triangulares regulares, como ilustra a Figura 3.16.

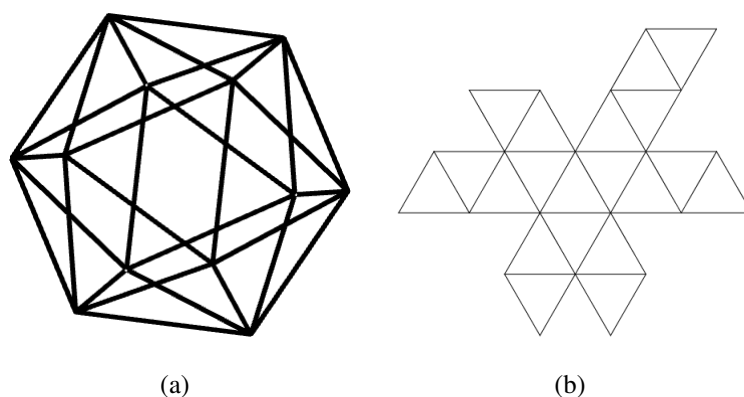


Figura 3.16: Icosaedro regular: (a) sólido; (b) planificação

Podemos decompor o icosaedro regular em 20 pirâmides cujas bases são as faces do icosaedro e a aresta lateral é o raio da esfera circunscrita ao icosaedro, como ilustra a Figura 3.17.

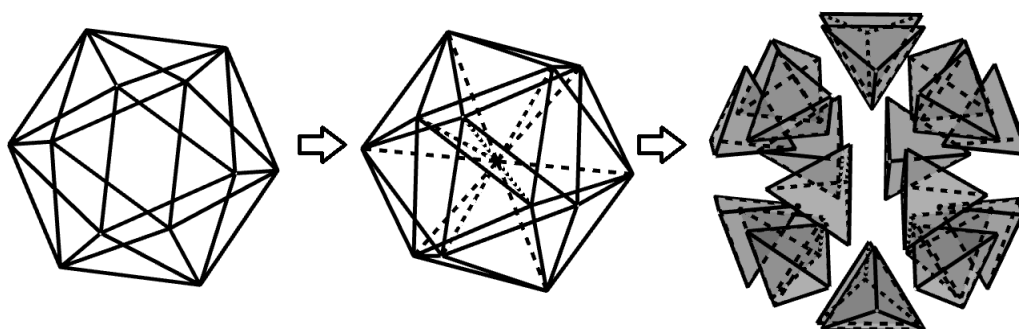


Figura 3.17: Decomposição do icosaedro regular

Dessa forma, o volume V_i do icosaedro regular é dado por

$$V_i = 20V_p, \quad (3.33)$$

onde V_p é o volume da pirâmide triangular removida.

Para determinarmos a medida da aresta lateral de cada pirâmide, devemos determinar o raio da esfera circunscrita ao icosaedro regular². Para tanto, seccionamos o icosaedro segundo um plano que passa pelo centro e por dois pares de vértices opostos, determinando assim o polígono pontilhado da Figura 3.18.

²Todo poliedro regular é inscritível e circunscritível a uma esfera.

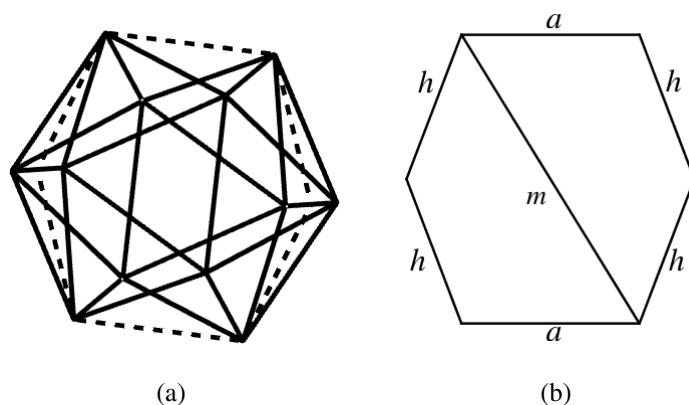


Figura 3.18: Icosaedro regular: (a) seção passando pelo centro e por dois pares de vértices opostos; (b) polígono da seção

Denotando a aresta do icosaedro regular por a , temos que a altura h do triângulo equilátero que forma a face do icosaedro define quatro dos seis lados do hexágono - Figura 3.18(b). Precisamos determinar a diagonal m do hexágono não regular porque esta equivale ao diâmetro da esfera circunscrita ou ao dobro da medida da aresta lateral das pirâmides triangulares removidas.

Como o hexágono é não regular e não possuímos informações acerca dos ângulos, precisamos seccionar o icosaedro regular por outro plano, como na Figura 3.19.

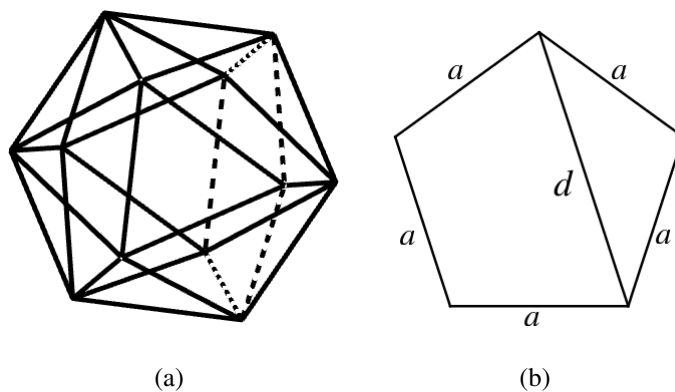


Figura 3.19: Icosaedro regular: (a) seção passando por cinco vértices de um pentágono regular; (b) polígono da secção

A intersecção do icosaedro regular com esse plano é um pentágono regular, cuja diagonal d está contida no plano da Figura 3.18, como ilustra a Figura 3.20.

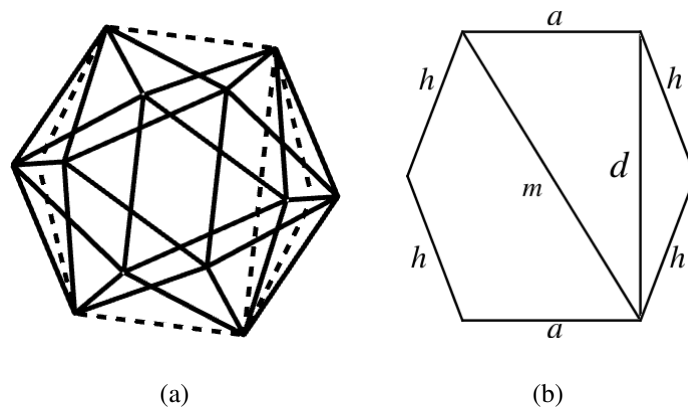


Figura 3.20: Icosaedro regular: (a) seções; (b) polígono de uma seção

Pela Figura 3.20, sabemos que m é a diagonal do retângulo de lados a e d e, por (3.21), que $d = \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de hipotenusa m e catetos a e d , temos que:

$$\begin{aligned}
 m^2 &= d^2 + a^2 \\
 m^2 &= \left(\frac{a(\sqrt{5}+1)}{2} \right)^2 + a^2 \\
 m^2 &= \frac{a^2}{4} (6 + 2\sqrt{5}) + a^2 \\
 m^2 &= \frac{a^2}{4} (10 + 2\sqrt{5}) \\
 m &= \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2} a.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Sendo m o dobro da medida da aresta lateral, temos que as pirâmides removidas têm dimensões como na Figura 3.21.

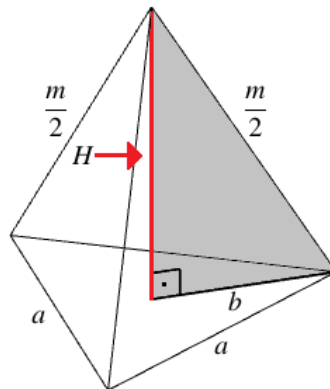


Figura 3.21: Pirâmide triangular removida do icosaedro regular

Na Figura 3.21, a medida b equivale a $\frac{2}{3}$ da altura do triângulo equilátero de lado a . Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de hipotenusa $\frac{m}{2}$ e catetos H e b , temos, por (3.11) e (3.34), que:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{m}{2}\right)^2 &= H^2 + b^2 \\
\frac{a^2}{16} (10 + 2\sqrt{5}) &= H^2 + \frac{a^2}{3} \\
H^2 &= \frac{a^2 (30 + 6\sqrt{5} - 16)}{48} \\
H^2 &= \frac{a^2 (7 + 3\sqrt{5})}{24} \\
H &= \frac{a}{2\sqrt{6}} \sqrt{7 + 3\sqrt{5}} \\
H &= \frac{\sqrt{42 + 18\sqrt{5}}}{12} a. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Segundo (NÓS et al., 2017), podemos transformar um radical duplo do tipo $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ em radicais simples do tipo $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, com $A, B, a, b \in \mathbb{Q}_+^*$, $A^2 > B$, $A^2 - B$ sendo um quadrado perfeito e não sendo B um quadrado perfeito, através da relação

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}. \tag{3.36}$$

Temos um radical duplo em (3.35), o qual pode ser escrito como $\sqrt{42 + 18\sqrt{5}} = \sqrt{42 + \sqrt{1620}}$. Aplicando a transformação (3.36), com $A = 42$ e $B = 1620$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{42 + \sqrt{1620}} &= \sqrt{\frac{42 + \sqrt{42^2 - 1620}}{2}} + \sqrt{\frac{42 - \sqrt{42^2 - 1620}}{2}} \\
\sqrt{42 + \sqrt{1620}} &= \sqrt{\frac{42 + \sqrt{144}}{2}} + \sqrt{\frac{42 - \sqrt{144}}{2}} \\
\sqrt{42 + \sqrt{1620}} &= \sqrt{\frac{42 + 12}{2}} + \sqrt{\frac{42 - 12}{2}} \\
\sqrt{42 + \sqrt{1620}} &= \sqrt{\frac{54}{2}} + \sqrt{\frac{30}{2}} \\
\sqrt{42 + \sqrt{1620}} &= \sqrt{27} + \sqrt{15} \\
\sqrt{42 + \sqrt{1620}} &= 3\sqrt{3} + \sqrt{15}. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Substituindo (3.37) em (3.35), temos que a altura da pirâmide é igual a

$$H = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12}a. \quad (3.38)$$

Como a base da pirâmide é um triângulo equilátero, temos por (3.10) que a área A_b desse triângulo é $A_b = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Assim, empregando (3.10) e (3.38), o volume da pirâmide pode ser expresso por:

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{1}{3}A_b H \\ V_p &= \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \frac{a}{12} (3\sqrt{3} + \sqrt{15}) \\ V_p &= \frac{a^3}{144} (9 + 3\sqrt{5}) \\ V_p &= \frac{\sqrt{5} + 3}{48} a^3. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Substituindo (3.39) em (3.33), concluímos que o volume V_i do icosaedro regular é dado por:

$$\begin{aligned} V_i &= 20V_p \\ V_i &= 20 \frac{a^3}{48} (3 + \sqrt{5}) \\ V_i &= \frac{5(\sqrt{5} + 3)}{12} a^3. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Logo, o volume V_i do icosaedro regular é dado por

$$\boxed{V_i = \frac{5(\sqrt{5} + 3)}{12} a^3,}$$

onde a é a medida da aresta do poliedro.

4 POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

4.1 DEFINIÇÃO

Os poliedros Arquimedianos foram descritos por Pappus de Alexandria por volta de 340 d.C. e ele os atribuiu a Arquimedes¹ (287 a.C. - 212 a.C.). Se Pappus não os tivesse atribuído a Arquimedes, não saberíamos que ele os havia estudado, pois os escritos do próprio Arquimedes sobre o assunto foram perdidos (MCCOOEY, 2015).

Poliedros Arquimedianos, ou semirregulares, são "poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo" (LOPES, 2012). Neste tipo de poliedro, os "vértices são congruentes, isto é, existe o mesmo arranjo de polígonos em torno de cada vértice" (LOPES, 2012).

4.2 TIPOS

Segundo (LOPES, 2012), "existem apenas treze poliedros Arquimedianos e são todos obtidos por operações sobre os sólidos Platônicos", sendo onze deles obtidos por truncamento e dois por snubificação. A Figura 4.1 mostra os treze poliedros Arquimedianos.

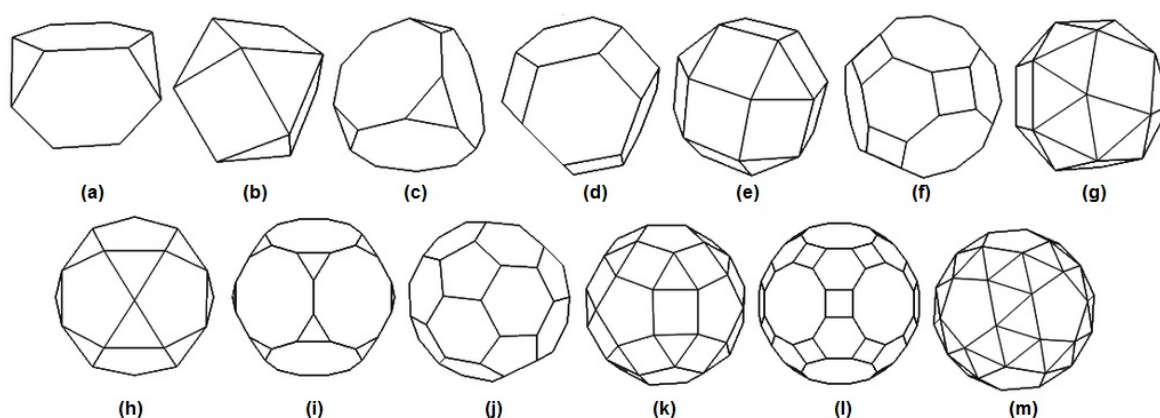


Figura 4.1: Poliedros Arquimedianos: (a) tetraedro truncado; (b) cuboctaedro; (c) cubo truncado; (d) octaedro truncado; (e) rombicuboctaedro; (f) cuboctaedro truncado; (g) cubo snub; (h) icosidodecaedro; (i) dodecaedro truncado; (j) icosaedro truncado; (k) rombicoidodecaedro; (l) icosidodecaedro truncado; (m) icosidodecaedro snub

¹Arquimedes de Siracusa: inventor, físico, matemático, filósofo, engenheiro e astrônomo grego; considerado por muitos o maior matemático da antiguidade.

4.3 VOLUME

Calcularemos o volume de três poliedros Arquimedianos obtidos por truncamento de poliedros Platônicos regulares: o octaedro regular, o dodecaedro regular e o icosaedro regular. Como estratégia para o cálculo do volume, descontaremos do volume desses sólidos Platônicos, deduzido no Capítulo 3, o volume das pirâmides eliminadas no processo de truncamento.

4.3.1 OCTAEDRO TRUNCADO

O octaedro truncado é composto por 24 vértices, 36 arestas e 14 faces regulares, sendo 6 faces quadradas e 8 faces hexagonais, como ilustra a Figura 4.2.

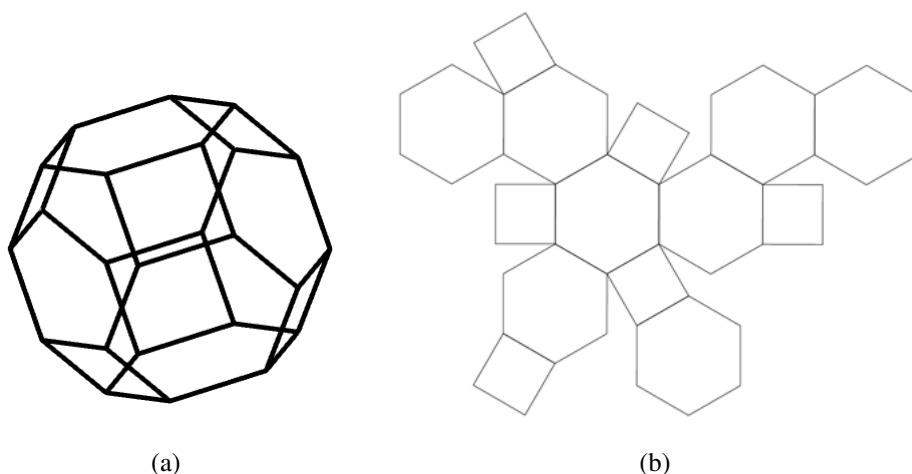


Figura 4.2: Octaedro truncado: (a) sólido; (b) planificação

No processo de truncamento do octaedro regular, são removidas a partir de cada um dos 6 vértices pirâmides congruentes regulares de base quadrada, como mostra a Figura 4.3.

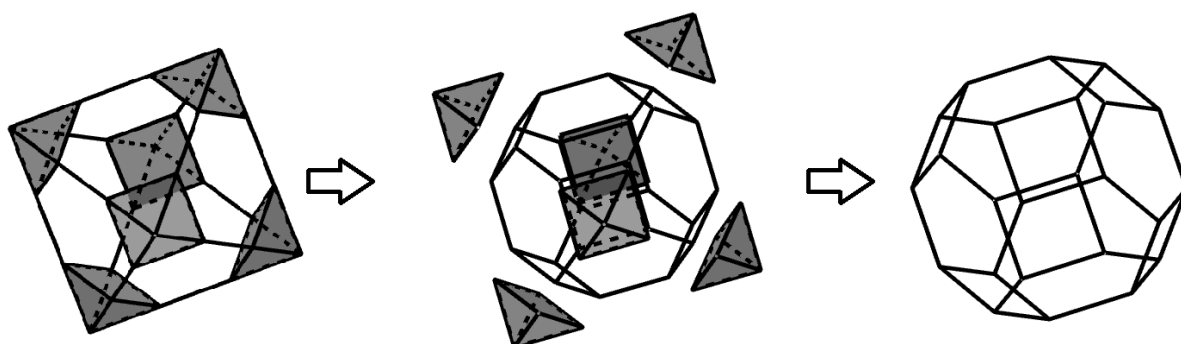


Figura 4.3: Truncamento do octaedro regular

Dessa forma, o volume V_{ot} do octaedro truncado é dado por

$$V_{ot} = V_o - 6V_p, \quad (4.1)$$

sendo V_o o volume do octaedro regular e, V_p , o volume de cada uma das pirâmides retiradas a partir dos seis vértices.

Para determinar as dimensões dessas pirâmides, consideramos inicialmente o polígono das faces do octaedro regular. Sabemos que esse polígono é um triângulo equilátero. Assim, quando truncamos o octaedro regular, a face hexagonal do octaedro truncado é definida como na Figura 4.4(a), onde as partes sombreadas são as partes que serão removidas.

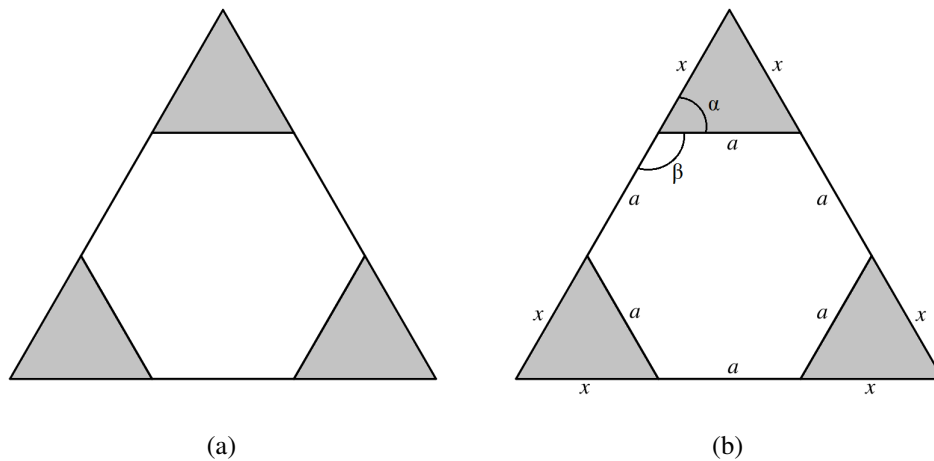


Figura 4.4: (a) Face hexagonal do octaedro truncado a partir da face triangular do octaedro regular; (b) ângulos e medidas na face triangular do octaedro regular e na face hexagonal do octaedro truncado

Denominando a aresta da face hexagonal do octaedro truncado de a , devemos obter o valor da medida x e dos ângulos α e β , ilustrados na Figura 4.4(b), para que possamos calcular o volume das pirâmides que serão removidas.

Sabemos que α e β são ângulos suplementares. Logo,

$$\alpha + \beta = 180^\circ. \quad (4.2)$$

Como β é um ângulo interno do hexágono regular que define uma das faces do octaedro truncado, temos que:

$$\beta = \frac{180^\circ(6-2)}{6}$$

$$\beta = \frac{720^\circ}{6}$$

$$\beta = 120^\circ. \quad (4.3)$$

Substituindo (4.3) em (4.2), obtemos $\alpha = 60^\circ$. Dessa forma, os triângulos removidos da face triangular também são equiláteros. Portanto,

$$a = x,$$

e retiramos uma pirâmide quadrangular regular de cada vértice do octaedro regular, como mostra a Figura 4.5.

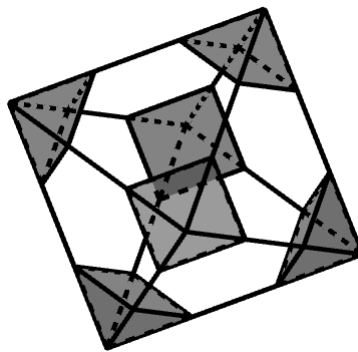


Figura 4.5: Pirâmides removidas no processo de truncamento do octaedro regular

Para calcular o volume dessas pirâmides quadrangulares regulares de base de lado a e, conseqüentemente, de área $A_b = a^2$, devemos determinar a medida da altura H , ilustrada na Figura 4.6.

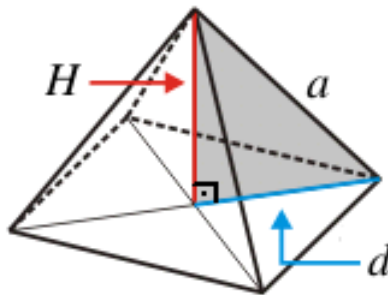


Figura 4.6: Pirâmide removida a partir dos vértices do octaedro regular

Como d é a metade da medida da diagonal do quadrado que define a base da pirâmide, ou seja, $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, temos que:

$$a^2 = H^2 + d^2$$

$$\begin{aligned}
a^2 &= H^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
a^2 &= H^2 + \frac{a^2}{2} \\
H^2 &= a^2 - \frac{a^2}{2} \\
H^2 &= \frac{a^2}{2} \\
H &= \frac{\sqrt{2}}{2}a.
\end{aligned}$$

Dessa maneira, o volume V_p da pirâmide removida é dado por:

$$\begin{aligned}
V_p &= \frac{1}{3}A_bH, \\
V_p &= \frac{1}{3}a^2\frac{a\sqrt{2}}{2}, \\
V_p &= \frac{\sqrt{2}}{6}a^3.
\end{aligned}$$

Por serem removidas 6 pirâmides, temos que:

$$\begin{aligned}
6V_p &= 6\frac{\sqrt{2}}{6}a^3, \\
6V_p &= \sqrt{2}a^3.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Para calcularmos o volume V_{ot} do octaedro truncado, devemos determinar o volume V_o do octaedro regular, ilustrado na Figura 4.5. Para tanto, devemos conhecer as dimensões do octaedro regular e calcular seu volume por meio da relação (3.17).

Como as arestas do octaedro truncado têm medida a e as arestas das pirâmides removidas também medem a , então a aresta do octaedro regular tem medida $3a$ e, por (3.17), o volume do octaedro regular é

$$\begin{aligned}
V_o &= \frac{(3a)^3\sqrt{2}}{3}, \\
V_o &= \frac{27a^3\sqrt{2}}{3}, \\
V_o &= 9\sqrt{2}a^3.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Substituindo (4.4) e (4.5) em (4.1), concluímos que

$$V_{ot} = 9\sqrt{2}a^3 - \sqrt{2}a^3,$$

$$V_{ot} = 8\sqrt{2}a^3.$$

Assim, o volume V_{ot} do octaedro truncado é dado por

$$V_{ot} = 8\sqrt{2}a^3,$$

onde a é a medida da aresta do poliedro.

4.3.2 DODECAEDRO TRUNCADO

O dodecaedro truncado é composto por 60 vértices, 90 arestas e 32 faces regulares, sendo 20 faces triangulares e 12 faces decagonais, como ilustra a Figura 4.7.

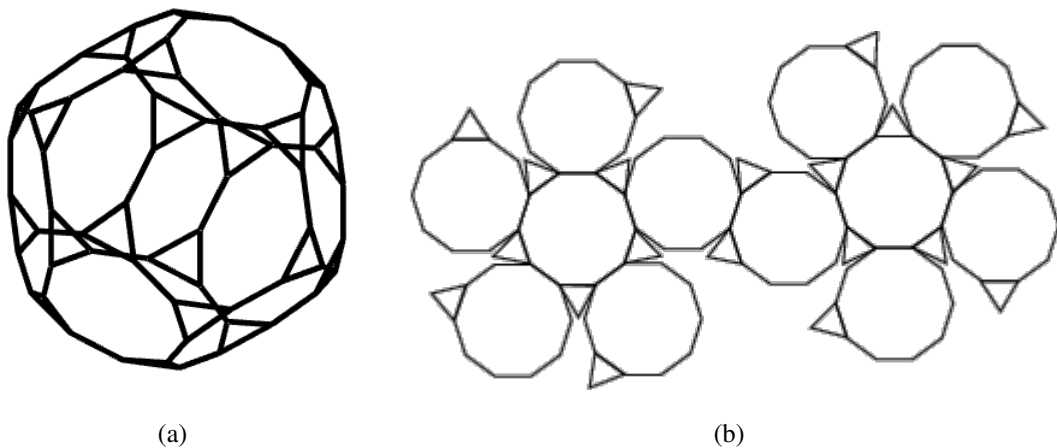


Figura 4.7: Dodecaedro truncado: (a) sólido; (b) planificação

No processo de truncamento do dodecaedro regular, são removidas a partir de cada um dos 20 vértices pirâmides congruentes regulares de base triangular, como mostra a Figura 4.8.

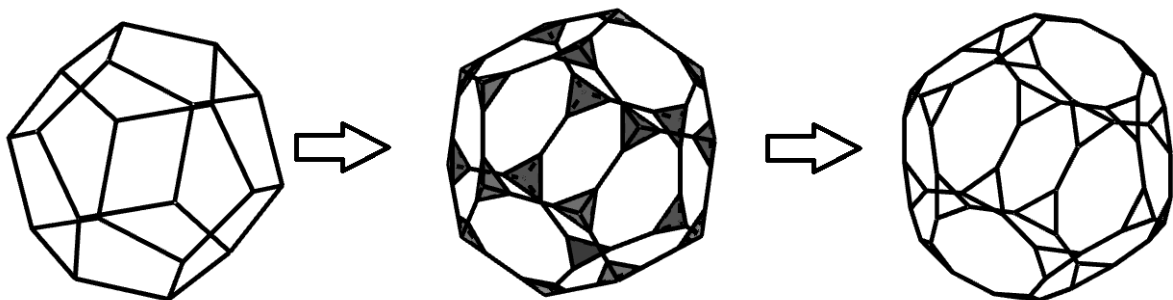


Figura 4.8: Truncamento do dodecaedro regular

Dessa maneira, o volume V_{dt} do dodecaedro truncado é dado por

$$V_{dt} = V_d - 20V_p, \quad (4.6)$$

sendo V_d o volume do dodecaedro regular e, V_p , o volume de cada uma das pirâmides retiradas a partir dos vinte vértices.

Para determinar as dimensões dessas pirâmides, consideramos primeiramente o polígono das faces do dodecaedro regular. Sabemos que esse polígono é um pentágono regular. Assim, quando truncamos o dodecaedro regular, a face decagonal do dodecaedro truncado é definida como na Figura 4.9(a), onde as partes sombreadas são as partes que serão removidas.

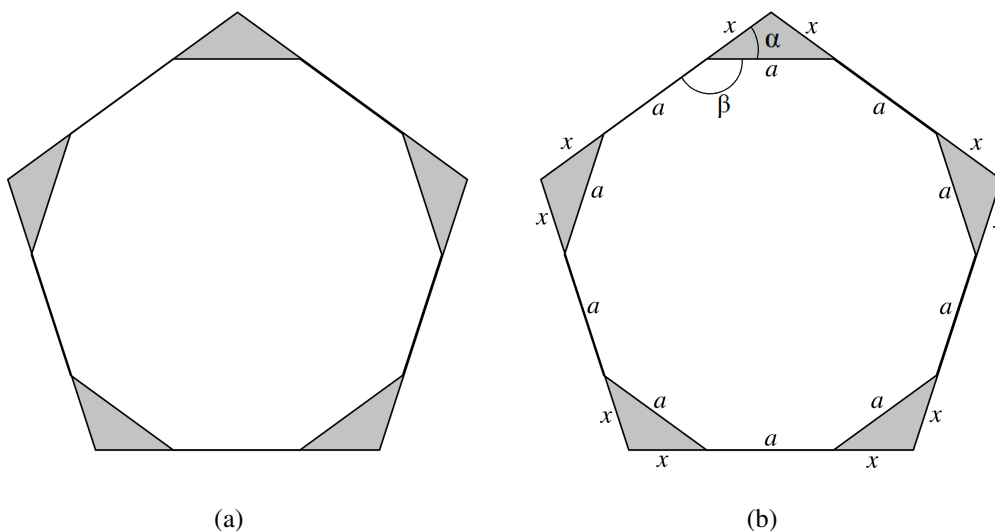


Figura 4.9: (a) Face decagonal do dodecaedro truncado a partir da face pentagonal do dodecaedro regular; (b) ângulos e medidas na face pentagonal do dodecaedro regular e na face decagonal do dodecaedro truncado

Denotando a aresta da face decagonal do dodecaedro truncado por a , devemos calcular o valor da medida x e dos ângulos α e β , ilustrados na Figura 4.9(b), para que possamos determinar o volume das pirâmides que serão removidas.

Sabemos que α e β são ângulos suplementares. Logo,

$$\alpha + \beta = 180^\circ. \quad (4.7)$$

Como β é um ângulo interno do decágono regular, que define uma das faces do dodecaedro truncado, temos que:

$$\beta = \frac{180^\circ(10-2)}{10}$$

$$\beta = \frac{1440^\circ}{10}$$

$$\beta = 144^\circ. \quad (4.8)$$

Substituindo (4.8) em (4.7), obtemos $\alpha = 36^\circ$.

Denominando γ a medida dos ângulos internos do pentágono regular, temos que:

$$\gamma = \frac{180^\circ(5-2)}{5}$$

$$\gamma = \frac{540^\circ}{5}$$

$$\gamma = 108^\circ. \quad (4.9)$$

Dessa maneira, a face lateral das pirâmides a serem removidas é um triângulo isósceles, ilustrado na Figura 4.10(a).

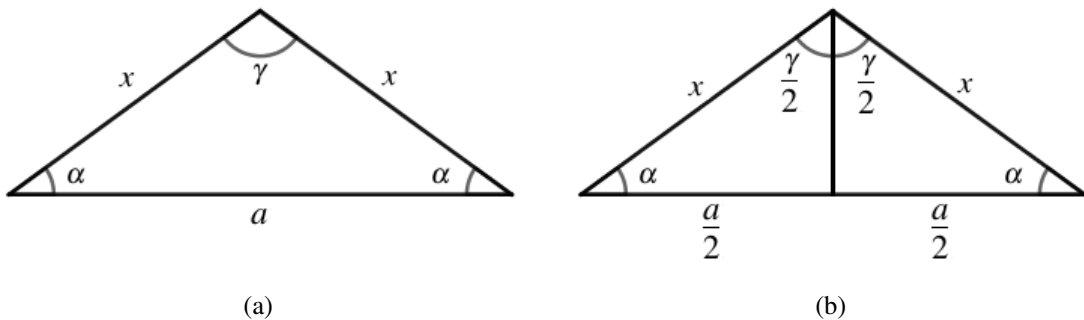


Figura 4.10: Pirâmide removida do vértice do dodecaedro regular: (a) face lateral; (b) divisão da face lateral

Precisamos agora determinar o valor de x em função de a . Para tanto, dividimos o triângulo isósceles em dois triângulos retângulos, como na Figura 4.10(b). Sabendo que

$$\cos(36^\circ) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

(NÓS et al., 2017), temos que:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{x}$$

$$x = \frac{a}{2\cos(36^\circ)}$$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a}{2 \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} \right)} \\
x &= \frac{a}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \\
x &= \frac{2a}{\sqrt{5}+1} \\
x &= \frac{2a}{\sqrt{5}+1} \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} \\
x &= \frac{2a(\sqrt{5}-1)}{4} \\
x &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} a.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Para calcular o volume das pirâmides triangulares regulares removidas a partir dos vértices do dodecaedro regular, devemos determinar a medida da altura H , ilustrada na Figura 4.11.

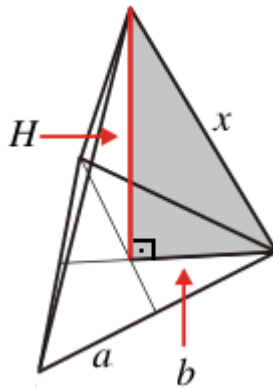


Figura 4.11: Pirâmide removida a partir dos vértices do dodecaedro regular

Nessas pirâmides, a base é um triângulo equilátero e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano dessa base é o baricentro do triângulo (como no caso do tetraedro). Dessa forma, temos por (3.11) que

$$b = \frac{\sqrt{3}}{3} a. \tag{4.11}$$

Assim, aplicando o teorema de Pitágoras e empregando (4.10) e (4.11), obtemos:

$$x^2 = H^2 + b^2$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}\right)^2 &= H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\
H^2 &= \frac{a^2}{4}(6-2\sqrt{5}) - \frac{a^2}{3} \\
H^2 &= \frac{3a^2(6-2\sqrt{5}) - 4a^2}{12} \\
H^2 &= \frac{a^2(14-6\sqrt{5})}{12} \\
H^2 &= \frac{a^2(7-3\sqrt{5})}{6} \\
H &= \frac{a}{\sqrt{6}}\sqrt{7-3\sqrt{5}} \\
H &= \frac{a}{\sqrt{6}}\sqrt{7-3\sqrt{5}}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\
H &= \frac{\sqrt{42-18\sqrt{5}}}{6}a. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

O radical duplo em (4.12) pode ser escrito como

$$\sqrt{42-18\sqrt{5}} = \sqrt{42-\sqrt{1620}}. \tag{4.13}$$

Empregando a relação (3.36) para transformar o radical duplo (4.13), onde $A = 42$ e $B = 1620$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{42-\sqrt{1620}} &= \sqrt{\frac{42+\sqrt{42^2-1620}}{2}} - \sqrt{\frac{42-\sqrt{42^2-1620}}{2}} \\
\sqrt{42-\sqrt{1620}} &= \sqrt{\frac{42+\sqrt{144}}{2}} - \sqrt{\frac{42-\sqrt{144}}{2}} \\
\sqrt{42-\sqrt{1620}} &= \sqrt{\frac{42+12}{2}} - \sqrt{\frac{42-12}{2}} \\
\sqrt{42-\sqrt{1620}} &= \sqrt{\frac{54}{2}} - \sqrt{\frac{30}{2}} \\
\sqrt{42-\sqrt{1620}} &= \sqrt{27} - \sqrt{15} \\
\sqrt{42-\sqrt{1620}} &= 3\sqrt{3} - \sqrt{15}. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Substituindo (4.14) em (4.12), temos que

$$H = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{15}}{6}a. \quad (4.15)$$

No cálculo do volume das pirâmides removidas, precisamos da área A_b da base da pirâmide. Como essa base é um triângulo equilátero, temos por (3.10) que $A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Dessa forma, utilizando (3.10) e (4.15), concluímos que:

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{1}{3}A_bH \\ V_p &= \frac{1}{3} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \frac{a}{6} (3\sqrt{3} - \sqrt{15}) \\ V_p &= \frac{a^3}{72} (9 - 3\sqrt{5}) \\ V_p &= \frac{3 - \sqrt{5}}{24}a^3. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Como são retiradas 20 pirâmides a partir dos vértices do dodecaedro regular, temos, por (4.16), que:

$$\begin{aligned} 20V_p &= 20 \frac{3 - \sqrt{5}}{24}a^3 \\ 20V_p &= \frac{5(3 - \sqrt{5})}{6}a^3. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Por fim, precisamos estabelecer a medida do lado do dodecaedro regular, ilustrado na Figura 4.8. Como as arestas do dodecaedro truncado têm medida a e as arestas laterais das pirâmides removidas têm medida x , a aresta d do dodecaedro regular possui medida $a + 2x$. Dessa forma, empregando (4.10), estabelecemos que:

$$\begin{aligned} d &= a + 2x \\ d &= a + 2 \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1) \\ d &= a + a(\sqrt{5} - 1) \\ d &= \sqrt{5}a. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Assim, por (3.32), o volume do dodecaedro original é dado por

$$V_d = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4}d^3. \quad (4.19)$$

Substituindo (4.18) em (4.19), temos que:

$$\begin{aligned}
V_d &= \frac{(a\sqrt{5})^3}{4} (15 + 7\sqrt{5}) \\
V_d &= \frac{5a^3\sqrt{5}}{4} (15 + 7\sqrt{5}) \\
V_d &= \frac{5a^3}{4} (15\sqrt{5} + 35) \\
V_d &= \frac{25(3\sqrt{5} + 7)}{4} a^3.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Finalizando, substituindo (4.17) e (4.20) em (4.6), concluímos que:

$$\begin{aligned}
V_{dt} &= V_d - 20V_p \\
V_{dt} &= \frac{25a^3}{4} (3\sqrt{5} + 7) - \frac{5a^3}{6} (3 - \sqrt{5}) \\
V_{dt} &= \frac{75a^3 (3\sqrt{5} + 7) - 10a^3 (3 - \sqrt{5})}{12} \\
V_{dt} &= \frac{a^3 (225\sqrt{5} + 525) - a^3 (30 - 10\sqrt{5})}{12} \\
V_{dt} &= \frac{a^3 (225\sqrt{5} + 525 - 30 + 10\sqrt{5})}{12} \\
V_{dt} &= \frac{a^3 (235\sqrt{5} + 495)}{12} \\
V_{dt} &= \frac{5(47\sqrt{5} + 99)}{12} a^3.
\end{aligned}$$

Portanto, o volume V_{dt} do dodecaedro truncado é dado por

$$\boxed{V_{dt} = \frac{5(47\sqrt{5} + 99)}{12} a^3,}$$

sendo a a medida da aresta do poliedro.

4.3.3 ICOSAEDRO TRUNCADO

O icosaedro truncado é composto por 60 vértices, 90 arestas e 32 faces regulares, sendo 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, como ilustra a Figura 4.12.

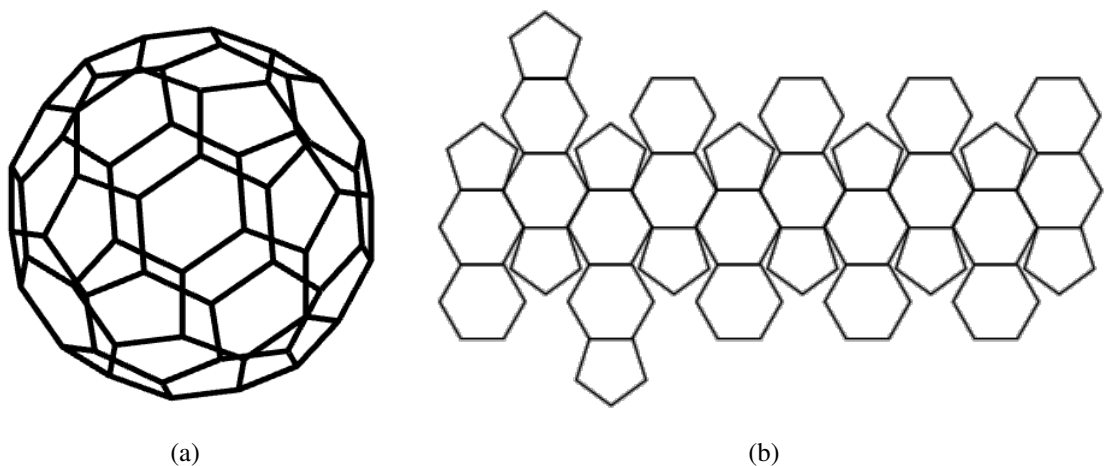


Figura 4.12: Icosaedro truncado: (a) sólido; (b) planificação

No processo de truncamento do icosaedro regular, são removidas a partir de cada um dos 12 vértices pirâmides congruentes regulares de base pentagonal, como mostra a Figura 4.13.

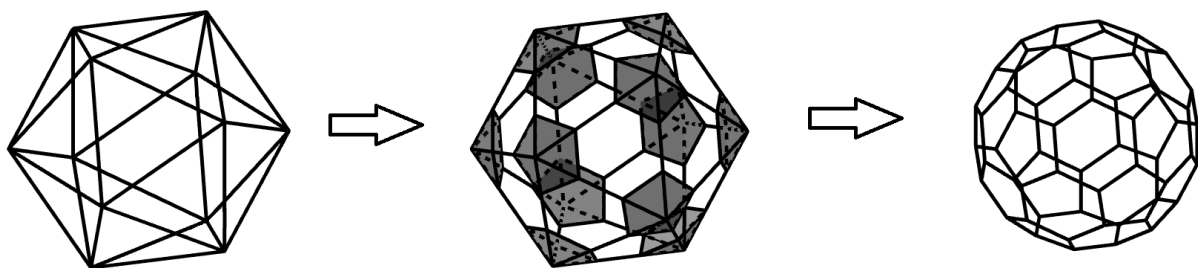


Figura 4.13: Truncamento do icosaedro regular

Dessa forma, o volume V_{it} do icosaedro truncado é dado por

$$V_{it} = V_i - 12V_p, \quad (4.21)$$

sendo V_i o volume do icosaedro regular e, V_p , o volume de cada uma das pirâmides retiradas a partir dos doze vértices.

Para estabelecer as dimensões dessas pirâmides, consideramos inicialmente o polígono das faces do icosaedro regular. Sabemos que esse polígono é um triângulo equilátero. Assim, quando truncamos o icosaedro regular, a face hexagonal do icosaedro truncado é definida como na Figura 4.4(a), onde as partes sombreadas são as partes que serão removidas. Calculando a medida de x e dos ângulos α e β , ilustrado na Figura 4.4(b), concluímos que as arestas laterais das pirâmides removidas têm a mesma medida a das arestas do icosaedro truncado. Portanto, a pirâmide removida é como na Figura 4.14.

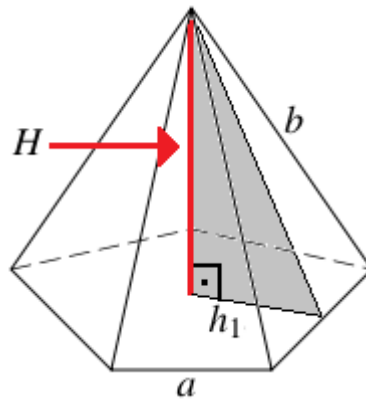


Figura 4.14: Pirâmide removida a partir dos vértices do icosaedro regular

Para calcular o volume dessa pirâmide, temos que calcular primeiramente a área do pentágono regular. Para tanto, dividimos o pentágono regular, a partir do centro, em 5 triângulos isósceles congruentes, ilustrados na Figura 4.15(a). No cálculo da área desse triângulo isósceles, precisamos determinar a medida da altura h_1 , ilustrada na Figura 4.15(b). No cálculo de h_1 , podemos utilizar $tg(36^\circ)$ ou $cos(54^\circ)$.

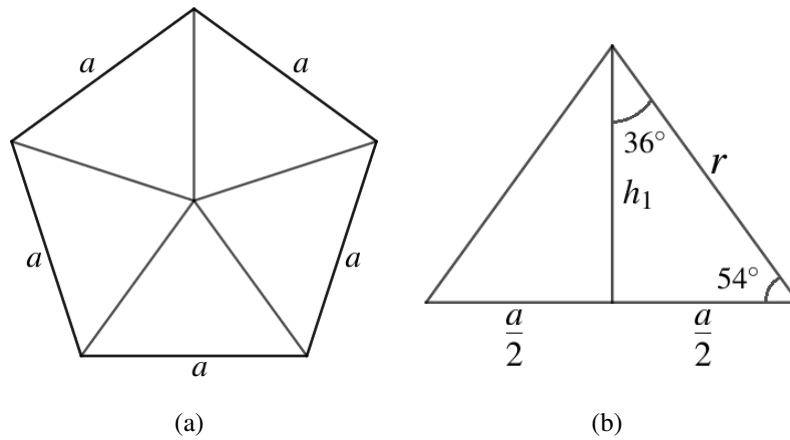


Figura 4.15: Pirâmide removida do vértice do icosaedro regular: (a) base pentagonal; (b) triângulo isósceles que compõe a base

Sabendo que

$$\cos(36^\circ) = \frac{\sqrt{5} + 1}{4},$$

e que, conseqüentemente,

$$\sin(36^\circ)^2 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}},$$

temos que:

$$2\sin^2(36^\circ) + \cos^2(36^\circ) = 1$$

$$\begin{aligned}
tg(36^\circ) &= \frac{\text{sen}(36^\circ)}{\text{cos}(36^\circ)} \\
tg(36^\circ) &= \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}{\frac{1+\sqrt{5}}{4}} \\
tg(36^\circ) &= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \frac{4}{1+\sqrt{5}} \\
tg(36^\circ) &= \frac{2}{1+\sqrt{5}} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \\
tg(36^\circ) &= \sqrt{\frac{4}{6+2\sqrt{5}} \frac{5-\sqrt{5}}{2}} \\
tg(36^\circ) &= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} \\
tg(36^\circ) &= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} \\
tg(36^\circ) &= \sqrt{\frac{20-8\sqrt{5}}{4}} \\
tg(36^\circ) &= \sqrt{5-2\sqrt{5}}. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Empregando (4.22), obtemos para h_1 :

$$\begin{aligned}
tg(36^\circ) &= \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{h_1} \\
\sqrt{5-2\sqrt{5}} &= \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{h_1} \\
h_1 &= \frac{a}{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}} \\
h_1 &= \frac{a}{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}} \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \\
h_1 &= \frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{25-20}} \\
h_1 &= \frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\
h_1 &= \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10} a. \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Como a área A_p do pentágono regular, base da pirâmide removida dos vértices do icosaedro regular, é dada por $5A_t$, sendo A_t a área de cada um dos cinco triângulos isósceles nos quais o pentágono foi decomposto a partir do centro, obtemos com (4.23):

$$\begin{aligned} A_p &= 5 \frac{1}{2} a h_1 \\ A_p &= 5 \frac{1}{2} a \frac{a \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{10} \\ A_p &= \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4} a^2. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Falta-nos ainda determinar a altura H da pirâmide. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de catetos H e h_1 e cuja hipotenusa h_2 é a altura da face lateral da pirâmide - Figura 4.14, que por (3.9) é $h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a$, temos, utilizando (4.23), que:

$$\begin{aligned} h_2^2 &= H^2 + h_1^2 \\ \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= H^2 + \left(\frac{a\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{10}\right)^2 \\ H^2 &= \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2(25 + 10\sqrt{5})}{100} \\ H^2 &= \frac{a^2(75 - 25 - 10\sqrt{5})}{100} \\ H^2 &= \frac{a^2(50 - 10\sqrt{5})}{100} \\ H &= \frac{\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{10} a. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Agora, podemos determinar com (4.24) e (4.25) o volume da pirâmide. Logo:

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{1}{3} A_p H \\ V_p &= \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4} \frac{a \sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{10} \\ V_p &= \frac{a^3 \sqrt{(25 + 10\sqrt{5})(50 - 10\sqrt{5})}}{120} \\ V_p &= \frac{a^3 \sqrt{750 + 250\sqrt{5}}}{120} \\ V_p &= \frac{5a^3 \sqrt{30 + 10\sqrt{5}}}{120} \end{aligned}$$

$$V_p = \frac{\sqrt{30 + 10\sqrt{5}}}{24} a^3. \quad (4.26)$$

Temos um radical duplo em (4.26), o qual pode ser escrito como $\sqrt{30 + 10\sqrt{5}} = \sqrt{30 + \sqrt{500}}$. Aplicando a transformação (3.36), com $A = 30$ e $B = 500$, obtemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{30 + \sqrt{500}} &= \sqrt{\frac{30 + \sqrt{30^2 - 500}}{2}} + \sqrt{\frac{30 - \sqrt{30^2 - 500}}{2}} \\ \sqrt{30 + \sqrt{500}} &= \sqrt{\frac{30 + \sqrt{400}}{2}} + \sqrt{\frac{30 - \sqrt{400}}{2}} \\ \sqrt{30 + \sqrt{500}} &= \sqrt{\frac{30 + 20}{2}} + \sqrt{\frac{30 - 20}{2}} \\ \sqrt{30 + \sqrt{500}} &= \sqrt{\frac{50}{2}} + \sqrt{\frac{10}{2}} \\ \sqrt{30 + \sqrt{500}} &= \sqrt{25} + \sqrt{5} \\ \sqrt{30 + \sqrt{500}} &= 5 + \sqrt{5}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Substituindo (4.27) em (4.26), temos que o volume da pirâmide removida é dado por:

$$V_p = \frac{\sqrt{5} + 5}{24} a^3. \quad (4.28)$$

Para calcularmos o volume V_{it} do icosaedro truncado, devemos determinar o volume V_i do icosaedro regular. Como as arestas do icosaedro truncado têm medida a e as arestas das pirâmides removidas também medem a , então a aresta do icosaedro regular tem medida $3a$ e, por (3.40), o volume do icosaedro regular é igual a:

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{5a(3a)^3}{12} (3 + \sqrt{5}) \\ V_i &= \frac{45(3 + \sqrt{5})}{4} a^3. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Assim, substituindo (4.28) e (4.29) em (4.21), podemos finalmente deduzir o volume do icosaedro truncado:

$$\begin{aligned} V_{it} &= V_i - 12V_p \\ V_{it} &= \frac{45a^3}{4} (3 + \sqrt{5}) - 12 \frac{a^3}{24} (5 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

$$V_{it} = \frac{a^3}{4} (135 + 45\sqrt{5}) - \frac{a^3}{2} (5 + \sqrt{5})$$

$$V_{it} = \frac{a^3 (135 + 45\sqrt{5} - 2(5 + \sqrt{5}))}{4}$$

$$V_{it} = \frac{(43\sqrt{5} + 125)}{4} a^3.$$

Logo, o volume V_{it} do icosaedro truncado é dado por

$$V_{it} = \frac{(43\sqrt{5} + 125)}{4} a^3,$$

onde a é a medida da aresta do poliedro.

5 POLIEDROS DE CATALAN

5.1 DEFINIÇÃO

Os poliedros de Catalan são duais dos poliedros Arquimedianos. Foram nomeados pelo matemático belga Eugene Catalan (1814-1894), que descreveu o conjunto completo pela primeira vez em 1865. Dos 13 poliedros, dois deles, o dodecaedro rômbo e o triacontaedro rômbo, foram descritos em 1611 por Johannes Kepler. Os poliedros de Catalan têm apenas um tipo de face, o ângulo diedro constante e a mesma simetria que seu dual (MCCOOEY, 2015).

5.2 TIPOS

Segundo (LOPES, 2012), os poliedros de Catalan são duais dos poliedros de Arquimedes. Logo, são treze poliedros uma vez que há treze poliedros de Arquimedes. A Figura 5.1 mostra os treze poliedros de Catalan, enquanto a Tabela 5.1 relaciona cada poliedro de Catalan ao seu dual Arquimediano. Os poliedros de Arquimedes são ilustrados na Figura 4.1 presente no Capítulo 4.

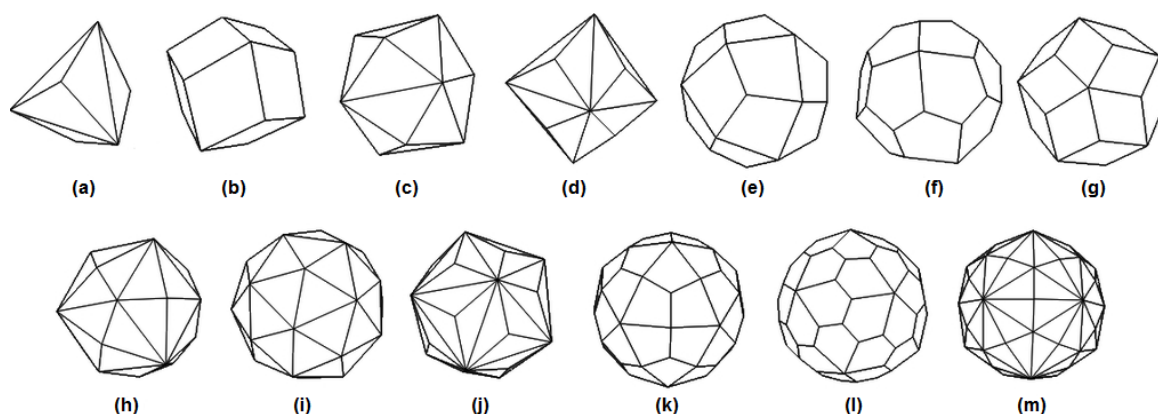


Figura 5.1: Poliedros de Catalan: (a) tetraedro triakis; (b) dodecaedro rômbo; (c) hexaedro tetrakis; (d) octaedro triakis; (e) icositetraedro deltoidal; (f) icositetraedro pentagonal; (g) triacontaedro rômbo; (h) dodecaedro disdiakis; (i) dodecaedro pentakis; (j) icosaedro triakis; (k) hexecontaedro deltoidal; (l) hexecontaedro pentagonal; (m) triacontaedro disdiakis

Tabela 5.1: Poliedros de Catalan e seus duais

Poliedro de Catalan	Poliedro Arquimediano dual
Tetraedro triakis	Tetraedro truncado
Dodecaedro rômico	Cuboctaedro
Hexaedro tetrakis	Octaedro truncado
Octaedro triakis	Cubo truncado
Icositetraedro deltoidal	Rombicuboctaedro
Icositetraedro pentagonal	Cubo snub
Triacontaedro rômico	Icosidodecaedro
Dodecaedro disdiakis	Cuboctaedro truncado
Dodecaedro pentakis	Icosaedro truncado
Icosaedro triakis	Dodecaedro truncado
Hexecontaedro deltoidal	Rombicosidodecaedro
Hexecontaedro pentagonal	Icosidodecaedro snub
Triacontaedro disdiakis	Icosidodecaedro truncado

5.3 VOLUME

Calcularemos o volume de três poliedros de Catalan obtidos por acumulação de poliedros Platônicos regulares: o tetraedro triakis, o dodecaedro rômico e o octaedro triakis. Como estratégia para o cálculo do volume, somaremos ao volume desses sólidos Platônicos, deduzidos no Capítulo 3, o volume das pirâmides acrescentadas no processo de acumulação.

5.3.1 TETRAEDRO TRIAKIS

O tetraedro triakis pode ser obtido por acumulação do tetraedro regular ao acoplarmos uma pirâmide triangular em cada face, como na Figura 5.2.

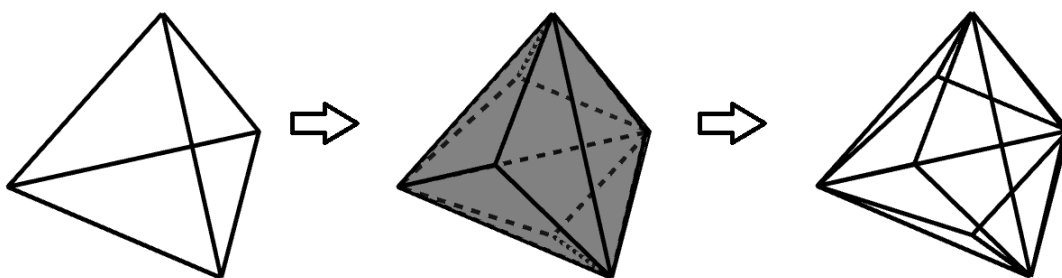


Figura 5.2: Acumulação do tetraedro regular

O tetraedro triakis é composto por 12 faces, 18 arestas e 8 vértices. Suas faces são formadas por triângulos isósceles e suas arestas têm dois comprimentos:

1. as 6 maiores são as arestas do tetraedro regular sobre cujas faces se faz a acumulação;
2. as 12 menores são as arestas laterais das pirâmides acopladas às faces do tetraedro regular na acumulação.

A Figura 5.3 ilustra o tetraedro triakis e sua planificação.

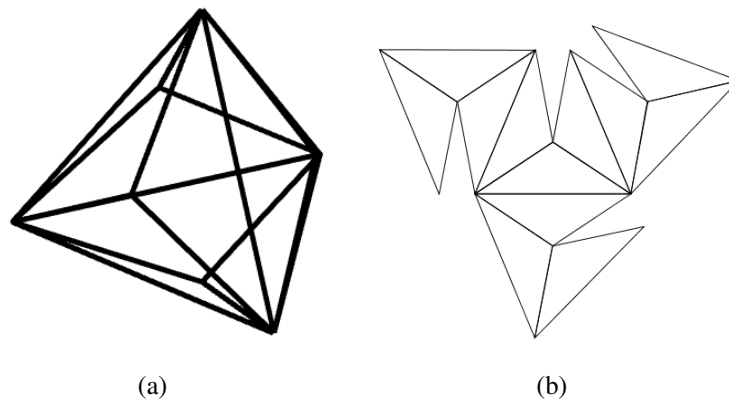


Figura 5.3: Tetraedro triakis: (a) sólido; (b) planificação

Dessa forma, o volume V_{tt} do tetraedro triakis é dado por

$$V_{tt} = V_t + 4V_p, \quad (5.1)$$

onde V_t é o volume do tetraedro regular e V_p é o volume da pirâmide acoplada. Essa pirâmide tem a forma e as dimensões daquela ilustrada na Figura 5.4, onde a é a medida da aresta do tetraedro regular e x é a medida da aresta lateral da pirâmide acoplada.

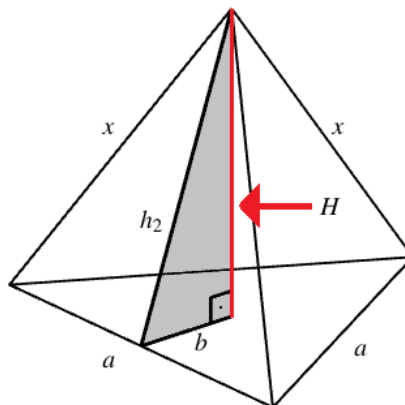


Figura 5.4: Pirâmide da acumulação do tetraedro regular

Sabemos que a base da pirâmide é um triângulo equilátero. A medida b equivale a $\frac{1}{3}$ da altura h_1 desse triângulo, ou seja:

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ b &= \frac{\sqrt{3}}{6} a. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Para calcular o volume das pirâmides, precisamos estabelecer uma relação entre as arestas curtas e as longas. Segundo (RESEARCH, 2018), ao formarmos o tetraedro triakis a partir de seu dual, o tetraedro truncado, com aresta unitária, obtemos um tetraedro triakis com a maior aresta $a = 3$ e a menor aresta $x = \frac{9}{5}$.

Considerando a maior aresta com medida arbitrária a , temos, por semelhança de triângulos, que:

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} &= \frac{3}{\left(\frac{9}{5}\right)} \\ \frac{9a}{5} &= 3x \\ x &= \frac{3a}{5}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

A face do tetraedro triakis tem dimensões como na Figura 5.5.

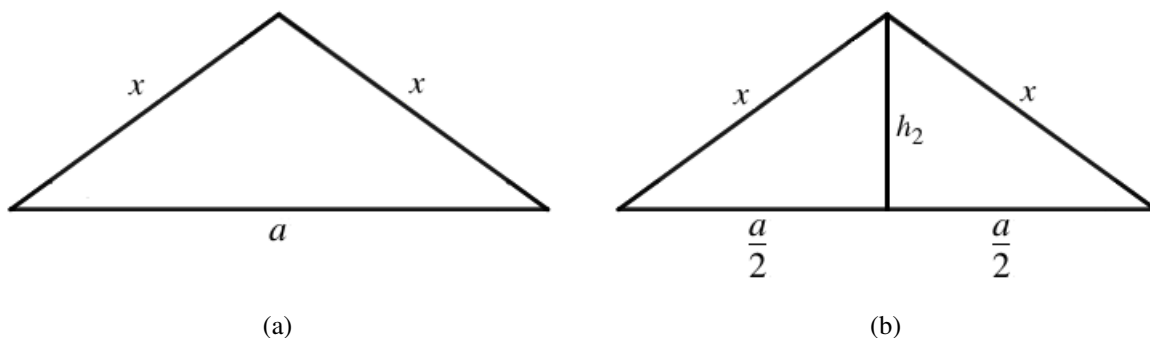


Figura 5.5: Face do tetraedro triakis: (a) lados (b) altura

Podemos determinar a altura h_2 da face do tetraedro triakis aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de hipotenusa x e catetos h_2 e $\frac{a}{2}$. Assim, usando (5.3), temos que:

$$\begin{aligned}
x^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_2^2 \\
h_2^2 &= \frac{9a^2}{25} - \frac{a^2}{4} \\
h_2^2 &= \frac{36a^2 - 25a^2}{100} \\
h_2^2 &= \frac{11a^2}{100} \\
h_2 &= \frac{\sqrt{11}}{10}a.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Para calcular a altura H da pirâmide, destacada na Figura 5.4, aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de hipotenusa h_2 e catetos H e b . Logo, empregando (5.2) e (5.4), obtemos:

$$\begin{aligned}
h_2^2 &= H^2 + b^2 \\
H^2 &= \left(\frac{\sqrt{11}}{10}a\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \\
H^2 &= \frac{11a^2}{100} - \frac{a^2}{12} \\
H^2 &= \frac{33a^2 - 25a^2}{300} \\
H^2 &= \frac{8a^2}{300} \\
H &= \frac{2a\sqrt{2}}{10\sqrt{3}} \\
H &= \frac{2a\sqrt{6}}{30} \\
H &= \frac{\sqrt{6}}{15}a.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

A área A_b da base da pirâmide é a área (3.10) do triângulo equilátero. Dessa maneira, por (3.10) e (5.5), temos que:

$$\begin{aligned}
V_p &= \frac{1}{3}A_bH \\
V_p &= \frac{1}{3} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \frac{a\sqrt{6}}{15} \\
V_p &= \frac{3a^3\sqrt{2}}{180}
\end{aligned}$$

$$V_p = \frac{\sqrt{2}}{60} a^3. \quad (5.6)$$

O volume V_t do tetraedro regular de aresta a é dado por (3.13). Substituindo (3.13) e (5.6) em (5.1), concluímos que o volume V_{tt} do tetraedro triakis é dado por:

$$\begin{aligned} V_{tt} &= V_t + 4V_p \\ V_{tt} &= \frac{a^3\sqrt{2}}{12} + \frac{4a^3\sqrt{2}}{15} \\ V_{tt} &= \frac{5a^3\sqrt{2} + 4a^3\sqrt{2}}{60} \\ V_{tt} &= \frac{9a^3\sqrt{2}}{60} \\ V_{tt} &= \frac{3\sqrt{2}}{20} a^3. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Logo, o volume V_{tt} do tetraedro triakis é dado por

$$V_{tt} = \frac{3\sqrt{2}}{20} a^3,$$

onde a é a medida da maior aresta do poliedro (ou a medida da aresta do tetraedro regular).

Podemos também determinar o volume do tetraedro triakis a partir da medida de sua menor aresta x . Para tanto, expressamos a em função de x . Por (5.3), temos que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3a}{5} \\ a &= \frac{5x}{3}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Substituindo (5.8) em (5.7), temos que:

$$\begin{aligned} V_{tt} &= \frac{3a^3\sqrt{2}}{20} \\ V_{tt} &= \frac{3\left(\frac{5x}{3}\right)^3\sqrt{2}}{20} \\ V_{tt} &= \frac{125x^3\sqrt{2}}{180} \\ V_{tt} &= \frac{25\sqrt{2}}{36} x^3. \end{aligned}$$

Logo, o volume V_{tt} do tetraedro triakis é dado por

$$V_{tt} = \frac{25\sqrt{2}}{36}x^3,$$

onde x é a medida da menor aresta do poliedro (ou a aresta lateral da pirâmide acoplada na acumulação do tetraedro regular).

5.3.2 DODECAEDRO RÔMBICO

O dodecaedro rômbo é composto por 12 faces, 24 arestas e 14 vértices. Suas faces são losangos e suas arestas são congruentes, como ilustra a Figura 5.6.

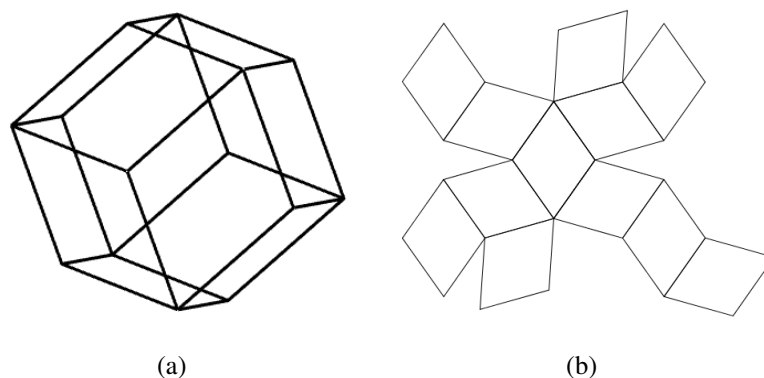


Figura 5.6: Dodecaedro rômbo: (a) sólido; (b) planificação

O dodecaedro rômbo pode ser obtido por acumulação do cubo ao acoplarmos uma pirâmide em cada face, como na Figura 5.7.

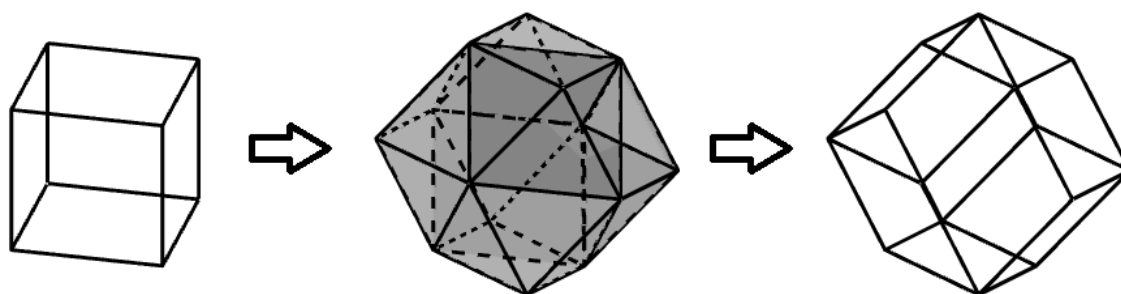


Figura 5.7: Acumulação do cubo

Podemos também obter o dodecaedro rômbo por meio do truncamento das arestas do cubo, como ilustra a Figura 5.8.

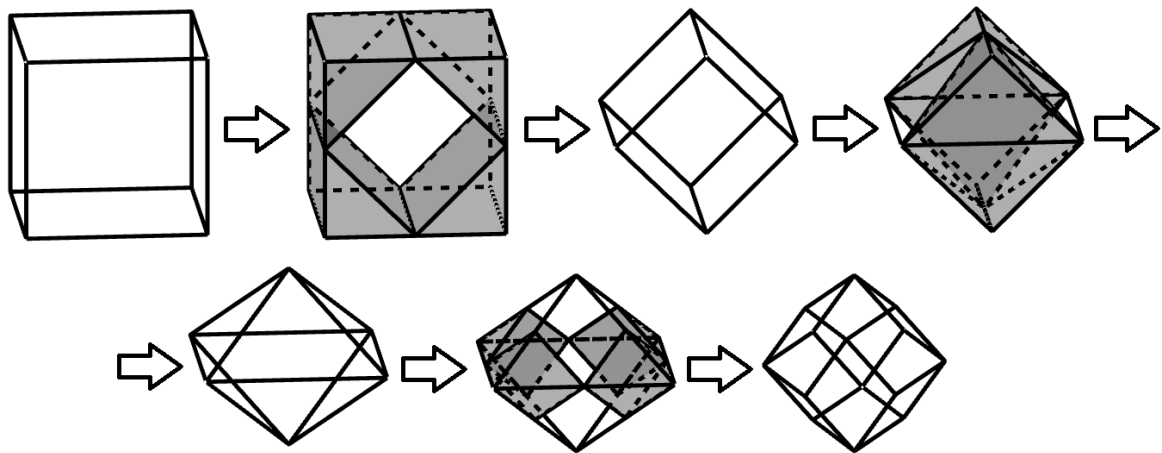


Figura 5.8: Truncamento das arestas do cubo

Dessa forma, o volume V_{dr} do dodecaedro rômbo é dado por

$$V_{dr} = V_c - (4V_{p1} + 4V_{p2} + 4V_{p3}), \quad (5.9)$$

onde V_c é o volume do cubo, V_{p1} é o volume do prisma removido, V_{p2} é o volume da primeira pirâmide removida e V_{p3} é o volume da segunda pirâmide removida.

Considerando ℓ a medida da aresta do cubo, removemos primeiramente 4 prismas de base triangular ao truncarmos 4 pares de arestas paralelas do cubo, como na Figura 5.9.

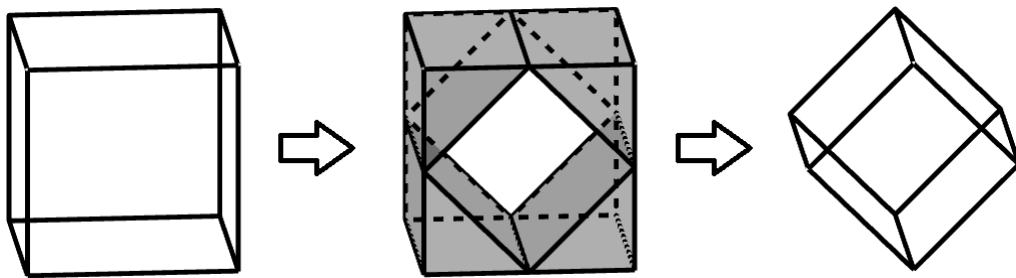


Figura 5.9: Primeiro truncamento das arestas do cubo

Temos então a face do cubo com as medidas indicadas na Figura 5.10, onde b é a medida de 8 arestas do paralelepípedo reto retângulo obtido no truncamento.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da Figura 5.10, de hipotenusa b e catetos $\frac{\ell}{2}$, temos que:

$$b^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$b^2 = \frac{2\ell^2}{4}$$

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2} \ell. \quad (5.10)$$

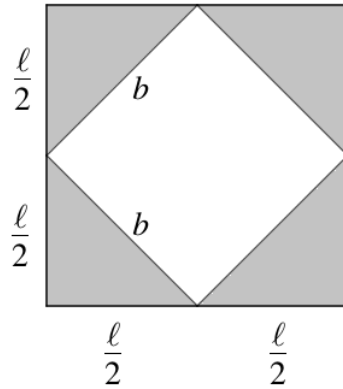


Figura 5.10: Face do cubo após o truncamento: a parte cinza é a parte removida

Dessa forma, o prisma triangular removido no primeiro truncamento das arestas do cubo tem forma e dimensões como na Figura 5.11.

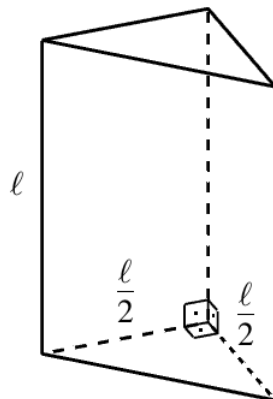


Figura 5.11: Prisma removido no primeiro truncamento das arestas do cubo

Como a base do prisma triangular é um triângulo retângulo, o volume do prisma é dado por:

$$V_{p1} = \frac{\frac{\ell}{2} \frac{\ell}{2}}{2} \ell$$

$$V_{p1} = \frac{\ell^3}{8}. \quad (5.11)$$

Agora, truncamos 2 arestas paralelas do paralelepípedo reto retângulo do primeiro truncamento (essas arestas também são arestas do cubo inicial), removendo 4 pirâmides e obtendo um octaedro não regular, como ilustra a Figura 5.12.

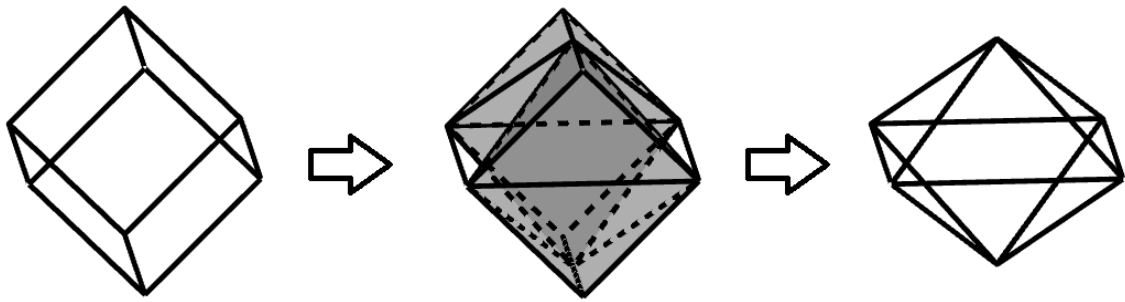


Figura 5.12: Segundo truncamento das arestas do cubo

Temos assim a face lateral do paralelepípedo reto retângulo com as medidas indicadas na Figura 5.13, sendo c a medida de 8 arestas do octaedro não regular obtido no truncamento.

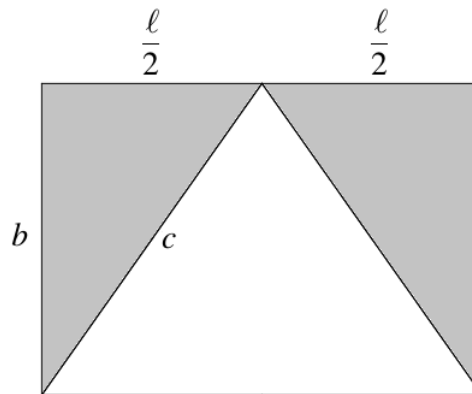


Figura 5.13: Face lateral do paralelepípedo reto retângulo após o truncamento: a parte cinza é a parte removida

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da Figura 5.13, de hipotenusa c e catetos b e $\frac{\ell}{2}$, temos, usando (5.10), que:

$$\begin{aligned}
 c^2 &= \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + b^2 \\
 c^2 &= \frac{\ell^2}{4} + \frac{2\ell^2}{4} \\
 c^2 &= \frac{3\ell^2}{4} \\
 c &= \frac{\sqrt{3}}{2}\ell.
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

A pirâmide removida no segundo truncamento das arestas do cubo tem um ângulo triedro trirretângulo, como mostra a Figura 5.14. Logo, o volume dessa pirâmide, utilizando (5.10), é igual a:

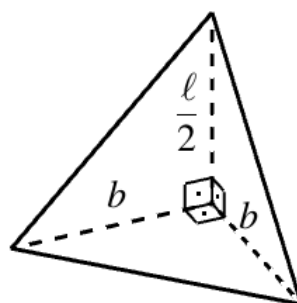


Figura 5.14: Pirâmide removida no segundo truncamento das arestas do cubo

$$\begin{aligned}
 V_{p2} &= \frac{1}{3} \frac{bb}{2} \frac{l}{2} \\
 V_{p2} &= \frac{l}{6} \frac{\frac{l\sqrt{2}}{2} \frac{l\sqrt{2}}{2}}{2} \\
 V_{p2} &= \frac{\ell^3}{24}.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Para finalizar, truncamos o octaedro não regular pelas duas últimas arestas paralelas do cubo inicial, como na Figura 5.15.

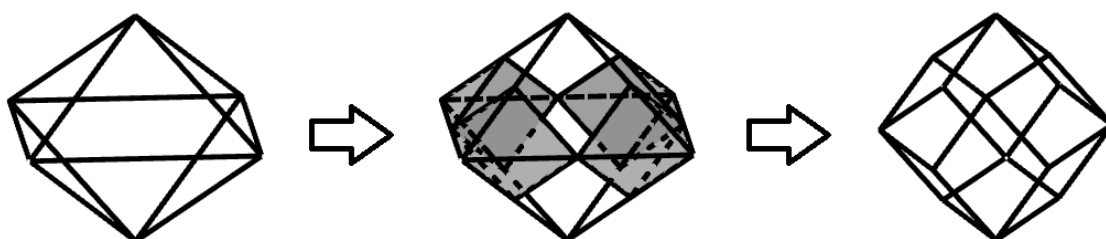


Figura 5.15: Terceiro truncamento das arestas do cubo

Temos então a face lateral do octaedro não regular com as medidas indicadas na Figura 5.16, onde a é a medida da aresta do dodecaedro rômboico.

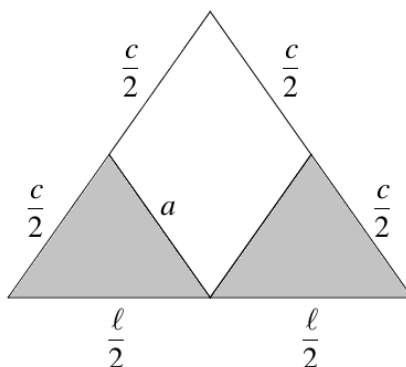


Figura 5.16: Face lateral do octaedro não regular após o truncamento: a parte cinza é a parte removida

Na Figura 5.16, $a = \frac{c}{2}$ pelo teorema da base média do triângulo. Logo, por (5.12), temos que:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{c}{2} \\
 &= \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} \\
 a &= \frac{\sqrt{3}}{4}\ell.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Dessa forma, a pirâmide removida no terceiro truncamento das arestas do cubo tem forma e dimensões como na Figura 5.17, onde D é a medida da diagonal maior do losango que define a base da pirâmide.

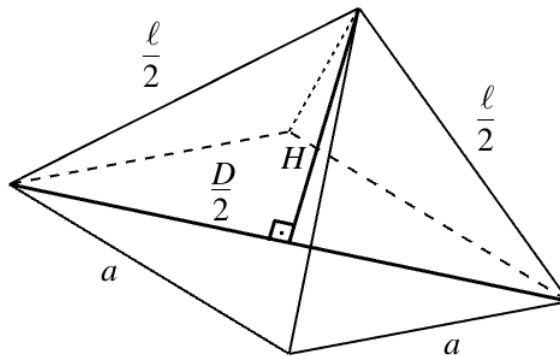


Figura 5.17: Pirâmide removida no terceiro truncamento das arestas do cubo

Na Figura 5.16, D é a altura do triângulo relativa à base ℓ . Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de hipotenusa c e catetos D e $\frac{\ell}{2}$, temos, com (5.12), que:

$$\begin{aligned}
 c^2 &= D^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \\
 D^2 &= \frac{3\ell^2}{4} - \frac{\ell^2}{4} \\
 D^2 &= \frac{2\ell^2}{4} \\
 D &= \frac{\sqrt{2}}{2}\ell.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Aplicando agora o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da Figura 5.17, de hipotenusa $\frac{\ell}{2}$ e catetos H e $\frac{D}{2}$, obtemos, usando (5.15):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 &= H^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \\
H^2 &= \frac{\ell^2}{4} - \frac{2\ell^2}{16} \\
H^2 &= \frac{2\ell^2}{16} \\
H &= \frac{\sqrt{2}}{4}\ell.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Para determinar o volume da pirâmide, resta apenas calcularmos a área da base. Como esta é um losango, a área equivale à metade do produto das diagonais. Falta-nos a medida d da diagonal menor, ilustrada na Figura 5.18.

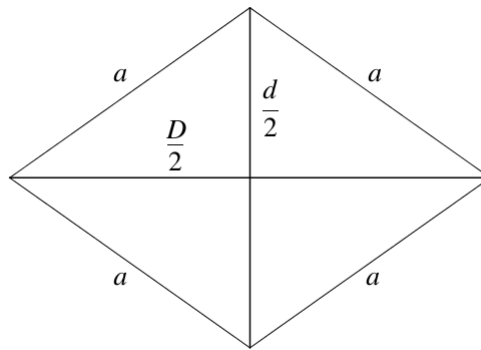


Figura 5.18: Base da pirâmide removida no terceiro truncamento das arestas do cubo

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da Figura 5.18, de hipotenusa a e catetos $\frac{D}{2}$ e $\frac{d}{2}$, obtemos, por meio de (5.14) e de (5.15):

$$\begin{aligned}
a^2 &= \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\
\frac{3\ell^2}{16} &= \frac{2\ell^2}{16} + \frac{d^2}{4} \\
\frac{d^2}{4} &= \frac{3\ell^2}{16} - \frac{2\ell^2}{16} \\
\frac{d^2}{4} &= \frac{\ell^2}{16} \\
\frac{d}{2} &= \frac{\ell}{4} \\
d &= \frac{\ell}{2}.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Portanto, por (5.15) e (5.17), a área A_b da base da pirâmide é igual a:

$$\begin{aligned} A_b &= \frac{Dd}{2} \\ &= \frac{\ell\sqrt{2}\ell}{2} \\ A_b &= \frac{\sqrt{2}}{8}\ell^2, \end{aligned} \tag{5.18}$$

e, por (5.16) e (5.18), o volume V_{p3} da pirâmide é dado por:

$$\begin{aligned} V_{p3} &= \frac{1}{3}A_bH \\ V_{p3} &= \frac{1}{3}\frac{\ell^2\sqrt{2}\ell\sqrt{2}}{8}\frac{\ell\sqrt{2}}{4} \\ V_{p3} &= \frac{\ell^3}{48}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Substituindo (5.11), (5.13) e (5.19) em (5.9), concluímos que o volume V_{dr} do dodecaedro rômbo é igual a:

$$\begin{aligned} V_{dr} &= V_c - (4V_{p1} + 4V_{p2} + 4V_{p3}) \\ V_{dr} &= \ell^3 - \left(\frac{\ell^3}{2} + \frac{\ell^3}{6} + \frac{\ell^3}{12} \right) \\ V_{dr} &= \ell^3 - \frac{3\ell^3}{4} \\ V_{dr} &= \frac{\ell^3}{4}, \end{aligned} \tag{5.20}$$

onde ℓ é a medida da aresta do cubo inicial.

Podemos determinar o volume do dodecaedro rômbo em função da medida de sua aresta a . Empregando (5.14), temos que:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\ell\sqrt{3}}{4} \\ \ell &= \frac{4\sqrt{3}}{3}a. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Substituindo (5.21) em (5.20), obtemos para o volume V_{dr} do dodecaedro rômbo:

$$V_{dr} = \frac{\ell^3}{4}$$

$$V_{dr} = \frac{\left(\frac{4a\sqrt{3}}{3}\right)^3}{4}$$

$$V_{dr} = \frac{192a^3\sqrt{3}}{4}$$

$$V_{dr} = \frac{16\sqrt{3}}{9}a^3.$$

Logo, o volume V_{dr} do dodecaedro rômbo é dado por

$$V_{dr} = \frac{16\sqrt{3}}{9}a^3,$$

onde a é a medida da aresta do poliedro.

5.3.3 OCTAEDRO TRIAKIS

O octaedro triakis pode ser obtido por acumulação do octaedro regular ao acoplarmos uma pirâmide triangular em cada face, como na Figura 5.19.

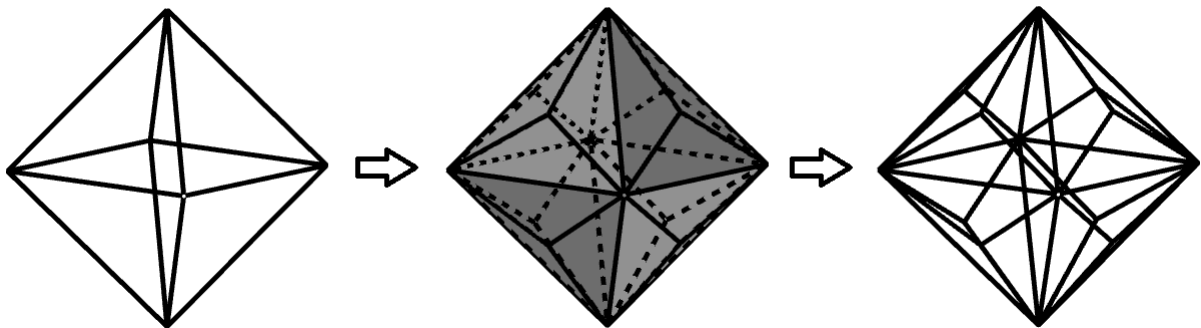


Figura 5.19: Acumulação do octaedro regular

O octaedro triakis é composto por 24 faces, 36 arestas e 14 vértices. Suas faces são formadas por triângulos isósceles e suas arestas têm dois comprimentos:

1. as 12 maiores são as arestas do octaedro regular sobre cujas faces se faz a acumulação;
2. as 24 menores são as arestas laterais das pirâmides acopladas às faces do octaedro regular na acumulação.

A Figura 5.3 ilustra o octaedro triakis e sua planificação.

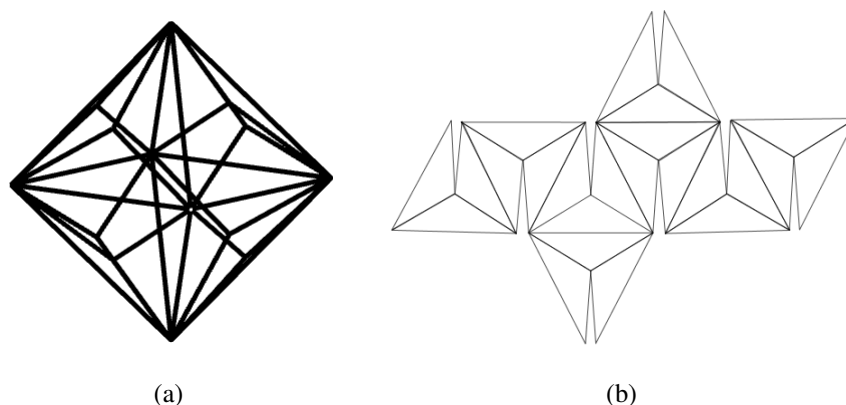


Figura 5.20: Octaedro triakis: (a) sólido; (b) planificação

Dessa forma, o volume V_{otk} do octaedro triakis é dado por

$$V_{otk} = V_o + 8V_p, \quad (5.22)$$

onde V_o é o volume do octaedro regular e V_p é o volume da pirâmide acoplada. Essa pirâmide tem a forma e as dimensões daquela ilustrada na Figura 5.21, onde a é a medida da aresta do octaedro regular e x é a medida da aresta lateral da pirâmide acoplada.

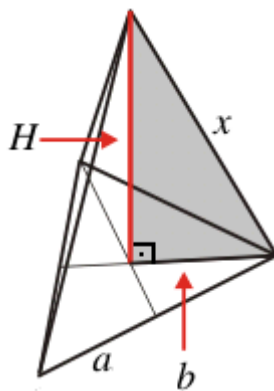


Figura 5.21: Pirâmide da acumulação do octaedro regular

Para calcular o volume das pirâmides, precisamos estabelecer uma relação entre as arestas curtas e as longas. Segundo (RESEARCH, 2018), ao formarmos o octaedro triakis a partir de seu dual, o cubo truncado, com aresta unitária, obtemos um octaedro triakis com a maior aresta $a = 2 + \sqrt{2}$ e a menor aresta $x = 2$.

Considerando a aresta maior com medida arbitrária a , temos, por semelhança de triângulos, que:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{x} &= \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \\
2a &= x(2 + \sqrt{2}) \\
x &= \frac{2a}{2 + \sqrt{2}} \\
x &= \frac{2a}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \\
x &= \frac{2a(2 - \sqrt{2})}{2} \\
x &= (2 - \sqrt{2})a.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Sabemos que a base da pirâmide é um triângulo equilátero. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da Figura 5.21, de hipotenusa x e catetos b e H , obtemos, usando (3.11) e (5.23):

$$\begin{aligned}
x^2 &= H^2 + b^2 \\
(a(2 - \sqrt{2}))^2 &= H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\
H^2 &= a^2(6 - 4\sqrt{2}) - \frac{a^2}{3} \\
H^2 &= \frac{a^2}{3}(17 - 12\sqrt{2}) \\
H &= \frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} \\
H &= \frac{\sqrt{51 - 36\sqrt{2}}}{3}a.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

O radical duplo em (5.24) pode ser escrito como

$$\sqrt{51 - 36\sqrt{2}} = \sqrt{51 - \sqrt{2592}}. \tag{5.25}$$

Empregando a relação (3.36) para transformar o radical duplo (5.25), com $A = 51$ e $B = 2592$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{51 - \sqrt{2592}} &= \sqrt{\frac{51 + \sqrt{51^2 - 2592}}{2}} - \sqrt{\frac{51 - \sqrt{51^2 - 2592}}{2}} \\
\sqrt{51 - \sqrt{2592}} &= \sqrt{\frac{51 + \sqrt{9}}{2}} - \sqrt{\frac{51 - \sqrt{9}}{2}} \\
\sqrt{51 - \sqrt{2592}} &= \sqrt{\frac{51 + 3}{2}} - \sqrt{\frac{51 - 3}{2}} \\
\sqrt{51 - \sqrt{2592}} &= \sqrt{\frac{54}{2}} - \sqrt{\frac{48}{2}} \\
\sqrt{51 - \sqrt{2592}} &= \sqrt{27} - \sqrt{24} \\
\sqrt{51 - \sqrt{2592}} &= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Substituindo (5.26) em (5.24), temos que:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{a}{3} (3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}) \\
H &= \left(\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{6}}{3} \right) a.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

A área A_b da base da pirâmide é a área (3.10) do triângulo equilátero. Assim, por (3.10) e (5.27), temos que:

$$\begin{aligned}
V_p &= \frac{1}{3} A_b H \\
V_p &= \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} a \left(\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{6}}{3} \right) \\
V_p &= \frac{a^3}{36} (9 - 6\sqrt{2}) \\
V_p &= \frac{3 - 2\sqrt{2}}{12} a^3.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

O volume do octaedro regular é dado por (3.17). Substituindo (3.17) e (5.28) em (5.22), concluímos que o volume V_{otk} do octaedro triakis é igual a:

$$\begin{aligned}
V_{otk} &= V_o + 8V_p \\
V_{otk} &= \frac{a^3 \sqrt{2}}{3} + 8 \frac{a^3}{12} (3 - 2\sqrt{2}) \\
V_{otk} &= (2 - \sqrt{2}) a^3.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Logo, o volume V_{otk} do octaedro triakis é dado por

$$V_{otk} = (2 - \sqrt{2}) a^3,$$

onde a é a medida da maior aresta do poliedro (ou a medida da aresta do octaedro regular).

Podemos também determinar o volume do octaedro triakis a partir da medida de sua menor aresta x . Para tal, expressamos a em função de x . Por (5.23), temos que:

$$\begin{aligned} x &= a(2 - \sqrt{2}) \\ a &= \frac{x}{2 - \sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Substituindo (5.30) em (5.29), obtemos:

$$\begin{aligned} V_{otk} &= a^3 (2 - \sqrt{2}) \\ V_{otk} &= \left(\frac{x}{2 - \sqrt{2}} \right)^3 (2 - \sqrt{2}) \\ V_{otk} &= \frac{x^3}{(2 - \sqrt{2})^2} \\ V_{otk} &= \frac{x^3}{2(3 - 2\sqrt{2})} \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} \\ V_{otk} &= \frac{x^3}{2} (3 + 2\sqrt{2}) \\ V_{otk} &= \frac{2\sqrt{2} + 3}{2} x^3. \end{aligned}$$

Logo, o volume V_{otk} do octaedro triakis é dado por

$$V_{otk} = \frac{2\sqrt{2} + 3}{2} x^3,$$

onde x é a medida da menor aresta do poliedro (ou a aresta lateral da pirâmide acoplada na acumulação do octaedro regular).

6 POLIEDROS DE JOHNSON

6.1 DEFINIÇÃO

Segundo (LOPES, 2012), "um sólido de Johnson é um poliedro cujas faces são polígonos regulares e não são sólidos Platônicos, nem sólidos Arquimedianos, nem prismas e nem antiprismas". Muitos dos poliedros de Johnson "são derivados dos Platônicos, dos Arquimedianos, dos prismas e antiprismas, por adição ou remoção de partes" (BATISTA; BARCELOS, 2017).

Norman W. Johnson (1930 - 2017), matemático estadunidense, enumerou, em 1966, 92 poliedros convexos não-uniformes de faces regulares. Victor A. Zalgaller (1920 -), matemático russo, provou, em 1969, que a lista de Johnson estava completa, ou seja, são somente 92 poliedros com as características supracitadas.

6.2 TIPOS

Os 92 poliedros de Johnson podem ser encontrados em (BATISTA; BARCELOS, 2017) e em (RESEARCH, 2018). Apresentamos a seguir alguns deles.

1. Pirâmides

As pirâmides quadrada e pentagonal são poliedros de Johnson com numeração J1 e J2, respectivamente. A pirâmide triangular de faces regulares é um poliedro Platônico.

2. Cúpulas

As cúpulas são "sólidos que têm duas faces paralelas (bases), de forma que a base menor é formada por um polígono de n lados e a base maior por um polígono de $2n$ lados. Lateralmente, as cúpulas possuem n triângulos e n quadrados" (BATISTA; BARCELOS, 2017). Há a cúpula triangular (J3), a cúpula quadrada (J4) e a cúpula pentagonal (J5), esta última ilustrada na Figura 6.1.

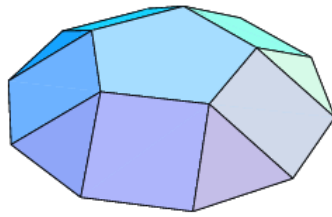


Figura 6.1: Cúpula pentagonal (J5) (RESEARCH, 2018)

3. Rotunda pentagonal

Segundo (BATISTA; BARCELOS, 2017), a rotunda pentagonal (J6) tem a base menor pentagonal, a base maior decagonal e as faces laterais são triângulares e pentagonais, como ilustra a Figura 6.2.

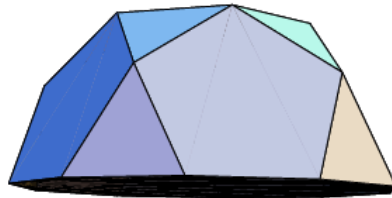


Figura 6.2: Rotunda pentagonal (J6) (RESEARCH, 2018)

4. Esfenocorona

Conforme (BATISTA; BARCELOS, 2017), a esfenocorona (J86), é um poliedro formado por um esfeno e por uma corona. Uma corona é uma composição de 8 triângulos, enquanto um esfeno é uma composição de duas lunas adjacentes, sendo que uma luna é uma composição de dois triângulos e um quadrado, onde os triângulos são anexados em lados opostos do quadrado.

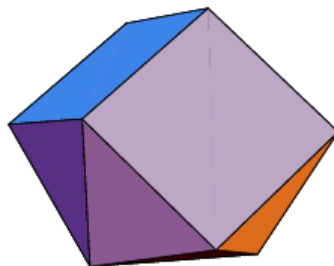


Figura 6.3: Esfenocorona (RESEARCH, 2018)

6.2.1 OPERAÇÕES DE TRANSFORMAÇÃO

A maior parte dos poliedros de Johnson pode ser obtida através da combinação de outros poliedros. Assim, podemos duplicar, aumentar, diminuir, girar ou alongar poliedros Platônicos, Arquimedianos e os poliedros de Johnson dos quatro tipos mencionados anteriormente.

1. Duplicar

Podemos duplicar pirâmides, obtendo bipirâmides, como a bipirâmide pentagonal (J13) e a bipirâmide triangular (J12); as cúpulas, obtendo a ortobicúpula triangular (J27), a ortobicúpula quadrada (J28) e a ortobicúpula pentagonal (J30); a rotunda pentagonal, obtendo a ortobirrotunda pentagonal (J34), ilustrada na Figura 6.4.

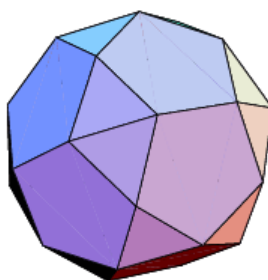


Figura 6.4: Ortobirrotunda pentagonal (J34) (RESEARCH, 2018)

2. Diminuir e/ou aumentar

Na operação de diminuir, removemos cúpulas ou pirâmides do icosaedro regular e do rombicosidodecaedro, um poliedro Platônico e um poliedro Arquimediano, respectivamente. Na Figura 6.5, ilustramos o processo de diminuir o icosaedro regular.

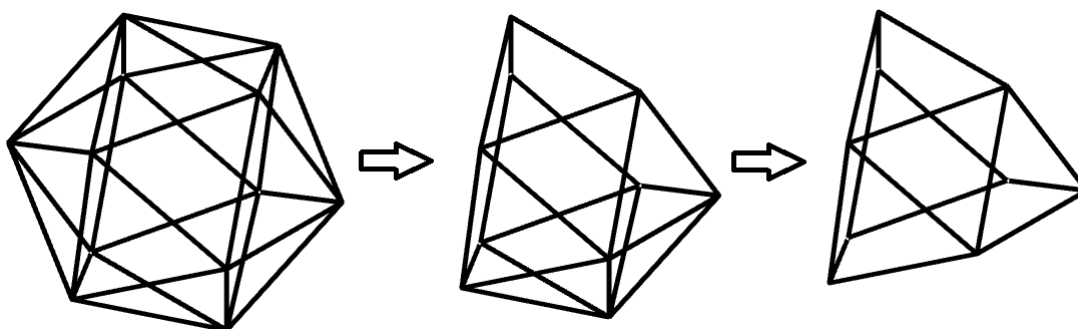


Figura 6.5: Processo de diminuir o icosaedro regular, obtendo o icosaedro metabidiminuído (J62) e o icosaedro tridiminuído (J63)

Na operação de aumentar, acoplamos a uma, duas ou três faces de um poliedro pirâmides ou cúpulas. Esse poliedro pode ser um prisma triangular, pentagonal ou hexagonal (J49 a J57), o dodecaedro regular, o tetraedro regular, o cubo truncado e o dodecaedro regular truncado (J58 a J61 e J66 a J71), e a rotunda pentagonal (J32). A Figura 6.6 mostra o acoplamento de pirâmides sobre as faces de um prisma triangular.

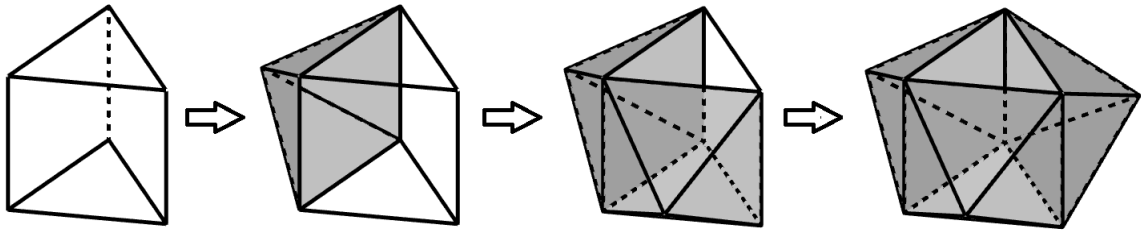


Figura 6.6: Processo de aumentar o prisma triangular, obtendo o prisma triangular aumentado (J49), o prisma triangular biaumentado (J50) e o prisma triangular triaumentado (J51)

3. Alongar e/ou girar

Na operação de alongar, acoplamos um prisma ao poliedro ou inserimos um prisma após a separação de partes do poliedro, como por exemplo, a separação das duas pirâmides de um bipirâmide. Podemos alongar pirâmides, bipirâmides, cúpulas, a rotunda pentagonal e alguns poliedros aumentados. Na Figura 6.7, ilustramos a bipirâmide quadrada alongada (J15).

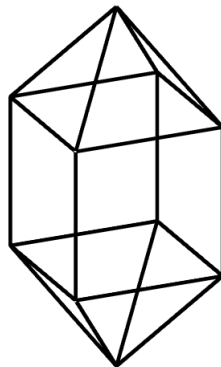


Figura 6.7: Bipirâmide quadrada alongada (J15)

Podemos também giroalongar poliedros. Para tanto, empregamos a operação de alongar substituindo o prisma por um antiprisma, como na Figura 6.8.

Alguns poliedros de Johnson, como o disfenóide achatado (J84) e o antiprisma quadrado achatado (J85), não podem ser obtidos a partir das operações descritas anteriormente.

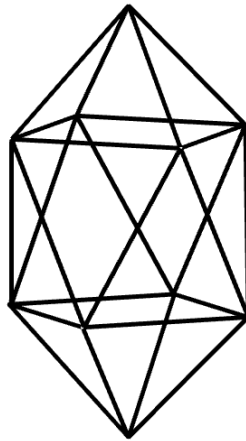


Figura 6.8: Bipirâmide quadrada giroalongada (J17)

6.3 VOLUME

Calcularemos o volume de três poliedros de Johnson: a rotunda pentagonal, a girobicúpula quadrada e o cubo truncado aumentado. Como estratégia para o cálculo do volume, decomponemos cada sólido em prismas e pirâmides ou em um sólido Arquimediano e outro sólido de Johnson.

6.3.1 ROTUNDA PENTAGONAL (J6)

A rotunda pentagonal é composta por 17 faces, 35 arestas e 20 vértices. Suas faces são polígonos regulares, sendo 10 triângulos, 6 pentágonos e um 1 decágono, como ilustra a Figura 6.9.

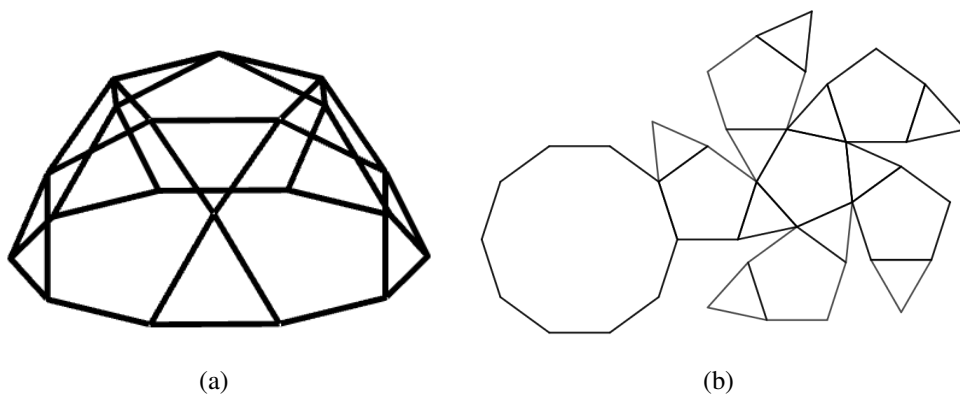


Figura 6.9: Rotunda pentagonal (J6): (a) sólido; (b) planificação

A rotunda pentagonal pode ser obtida pela decomposição do icosidodecaedro, um poliedro Arquimediano, como ilustra a Figura 6.10.

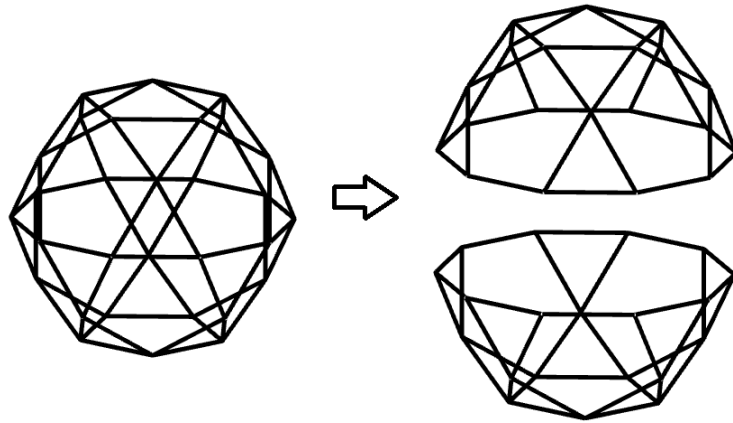


Figura 6.10: Rotunda pentagonal (J6): metade do icosidodecaedro

Podemos também decompor a rotunda pentagonal em pirâmides cujas bases são as faces triangulares e as faces pentagonais da rotunda pentagonal e cuja aresta lateral é o raio da esfera circunscrita ao icosidodecaedro, como ilustra a Figura 6.11.

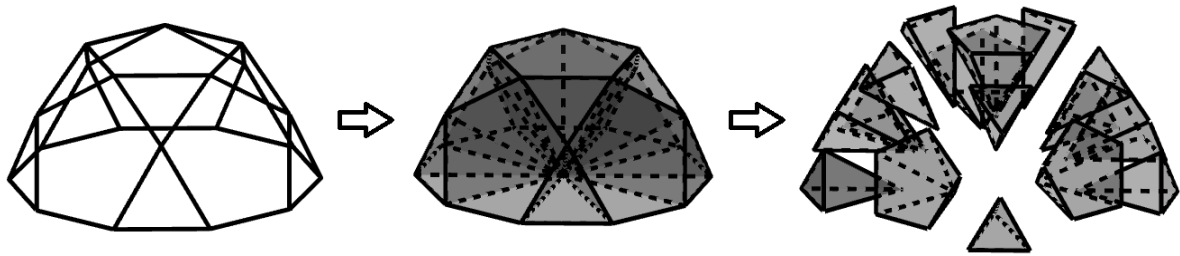


Figura 6.11: Decomposição da rotunda pentagonal (J6) em pirâmides triangulares e pentagonais

Dessa forma, o volume V_{rp} da rotunda pentagonal é dado por

$$V_{rp} = 6V_{p1} + 10V_{p2}, \quad (6.1)$$

onde V_{p1} é o volume da pirâmide pentagonal e V_{p2} é o volume da pirâmide triangular.

Para calcular os volumes V_{p1} e V_{p2} , precisamos determinar a medida do raio da circunferência circunscrita ao icosidodecaedro. A Figura 6.12 mostra a base maior da rotunda pentagonal após a decomposição da mesma em pirâmides triangulares e pentagonais.

Na Figura 6.12(b), α é igual a $\frac{1}{20}$ do ângulo central. Logo,

$$\alpha = \frac{360^\circ}{20} = 18^\circ, \quad (6.2)$$

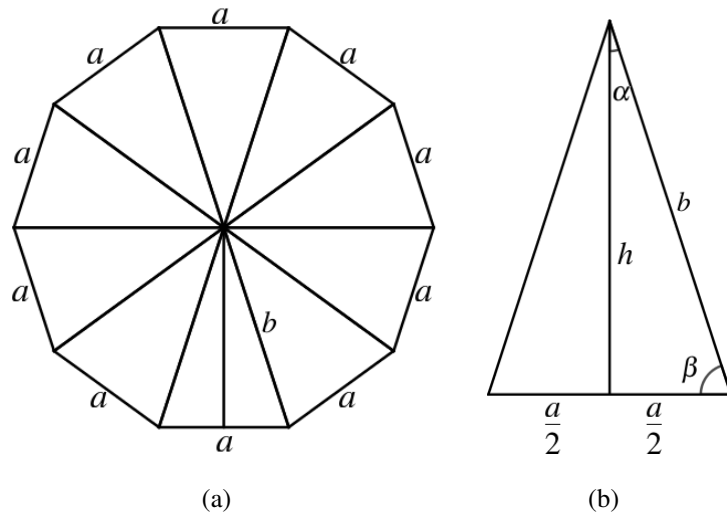


Figura 6.12: Base maior da rotunda pentagonal (J6): (a) medidas no decágono regular; (b) medidas no triângulo isósceles que compõe o decágono regular

e

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 72^\circ. \quad (6.3)$$

Sabendo que

$$\text{sen}(18^\circ) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

(NÓS et al., 2017), obtemos no triângulo isósceles da Figura 6.12(b):

$$\begin{aligned} \text{sen}(18^\circ) &= \frac{\frac{a}{2}}{b} \\ \frac{\sqrt{5} - 1}{4} &= \frac{a}{2b} \\ b &= \frac{2a}{\sqrt{5} - 1} \\ b &= \frac{2a}{\sqrt{5} - 1} \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 1} \\ b &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2} a, \end{aligned} \quad (6.4)$$

sendo a a medida da aresta da rotunda pentagonal e b a medida do raio da esfera circunscrita ao icosidodecaedro.

Precisamos agora calcular as alturas H_1 e H_2 das pirâmides pentagonal e triangular, respectivamente, ilustradas na Figura 6.13. Na Figura 6.13(a), r é a medida do raio da circunferência circunscrita ao pentágono regular, base da pirâmide pentagonal. Esse pentágono regular pode ser decomposto em triângulos isósceles, como mostra a Figura 6.14.

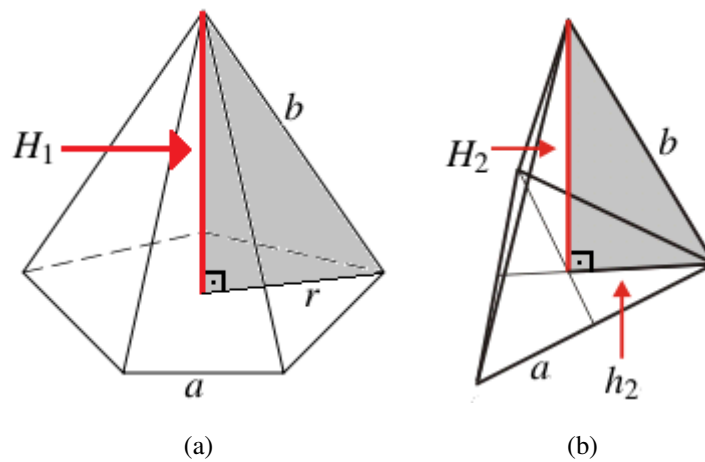


Figura 6.13: Medidas nas pirâmides da decomposição da rotunda pentagonal (J6): (a) pirâmide pentagonal; (b) pirâmide triangular

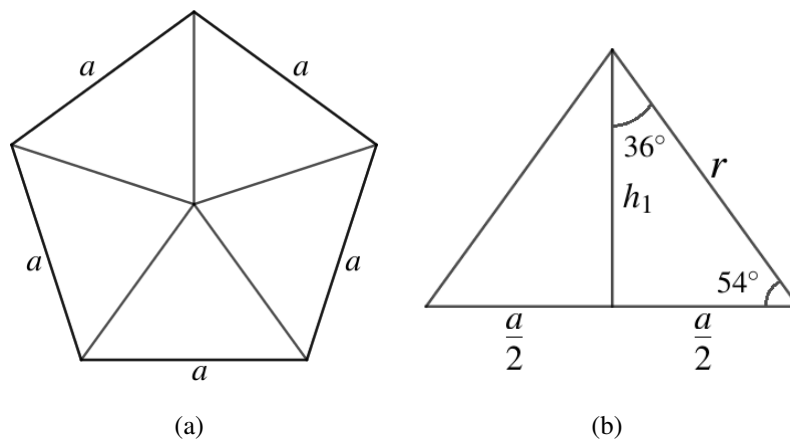


Figura 6.14: Base da pirâmide pentagonal: (a) medidas no pentágono regular; (b) medidas no triângulo isósceles que compõe o pentágono regular

A medida de h_1 , no triângulo da Figura 6.14(b), é dada por (4.23). Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de catetos h_1 e $\frac{a}{2}$ e hipotenusa r , obtemos:

$$\begin{aligned}
 r^2 &= h_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
 r^2 &= \frac{(25 + 10\sqrt{5})a^2}{100} + \frac{a^2}{4} \\
 r^2 &= \frac{a^2}{100} (50 + 10\sqrt{5}) \\
 r &= \frac{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{10} a.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Dessa forma, podemos calcular a altura H_1 aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de catetos H_1 e r e hipotenusa b da Figura 6.13(a). Assim, empregando (6.4) e (6.5), temos que:

$$\begin{aligned}
 b^2 &= r^2 + H_1^2 \\
 H_1^2 &= \frac{a^2}{4} (6 + 2\sqrt{5}) - \frac{a^2}{100} (50 + 10\sqrt{5}) \\
 H_1^2 &= \frac{100 + 40\sqrt{5}}{100} a^2 \\
 H_1^2 &= \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} a^2 \\
 H_1 &= \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{5} a.
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Para determinar o volume V_{p1} da pirâmide pentagonal, precisamos da área do pentágono regular de aresta a , dada por (4.24). Logo, usando (4.24) e (6.6), obtemos:

$$\begin{aligned}
 V_{p1} &= \frac{1}{3} A_b H_1 \\
 V_{p1} &= \frac{1}{3} \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4} a^2 \frac{a}{5} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \\
 V_{p1} &= \frac{a^3}{60} (25 + 10\sqrt{5}) \\
 V_{p1} &= \frac{2\sqrt{5} + 5}{12} a^3.
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Falta-nos, portanto, o volume da pirâmide de base triangular. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de catetos h_2 e H_2 e hipotenusa b da Figura 6.13(b), temos, utilizando (3.11) e (6.4), que:

$$\begin{aligned}
 b^2 &= h_2^2 + H_2^2 \\
 H_2^2 &= \frac{a^2}{4} (6 + 2\sqrt{5}) - \frac{a^2}{3} \\
 H_2^2 &= \frac{a^2}{36} (42 + 18\sqrt{5}) \\
 H_2 &= \frac{\sqrt{42 + 18\sqrt{5}}}{6} a.
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Há um radical duplo em (6.8), o qual pode ser escrito, com o emprego de (3.36), como

$$\sqrt{42 + 18\sqrt{5}} = \sqrt{42 + \sqrt{1620}} = 3\sqrt{3} + \sqrt{15}. \tag{6.9}$$

Substituindo (6.9) em (6.8), temos para a altura da pirâmide triangular

$$H_2 = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{6}a. \quad (6.10)$$

A área da base da pirâmide triangular é dada por (3.10). Assim, utilizando (3.10) e (6.10), o volume V_{p2} da pirâmide triangular é igual a:

$$\begin{aligned} V_{p2} &= \frac{1}{3}A_b H_2 \\ V_{p2} &= \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \frac{a}{6} (3\sqrt{3} + \sqrt{15}) \\ V_{p2} &= \frac{a^3}{72} (9 + 3\sqrt{5}) \\ V_{p2} &= \frac{\sqrt{5} + 3}{24} a^3. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Substituindo (6.7) e (6.11) em (6.1), concluímos que o volume V_{rp} da rotunda pentagonal é igual a:

$$\begin{aligned} V_{rp} &= 6V_{p1} + 10V_{p2} \\ V_{rp} &= 6 \frac{a^3}{12} (5 + 2\sqrt{5}) + 10 \frac{a^3}{24} (3 + \sqrt{5}) \\ V_{rp} &= \frac{6a^3}{12} (5 + 2\sqrt{5}) + \frac{5a^3}{12} (3 + \sqrt{5}) \\ V_{rp} &= \frac{17\sqrt{5} + 45}{12} a^3. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Logo, o volume V_{rp} da rotunda pentagonal é dado por

$$\boxed{V_{rp} = \frac{17\sqrt{5} + 45}{12} a^3,}$$

onde a é a medida da aresta do poliedro.

6.3.2 GIROBICÚPULA QUADRADA (J29)

A girobicúpula quadrada é composta por 18 faces, 32 arestas e 16 vértices. Suas faces são polígonos regulares, sendo 8 faces triangulares e 10 faces quadrangulares, como ilustra a Figura 6.15.

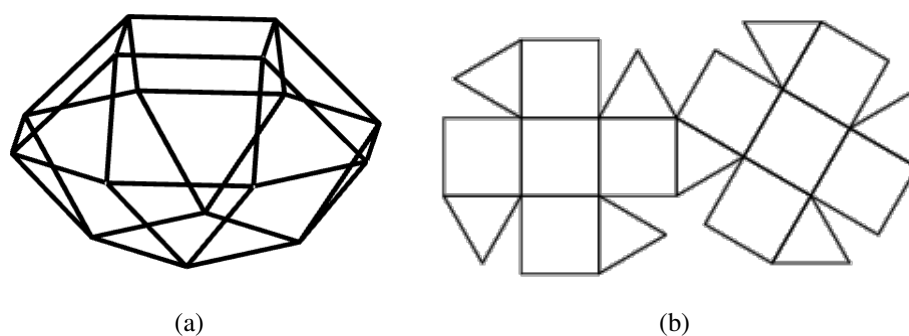


Figura 6.15: Girobicúpula quadrada (J29): (a) sólido; (b) planificação

Podemos decompor a girobicúpula quadrada em duas cúpulas quadradas, que também são poliedros de Johnson (J4), como ilustra a Figura 6.16.

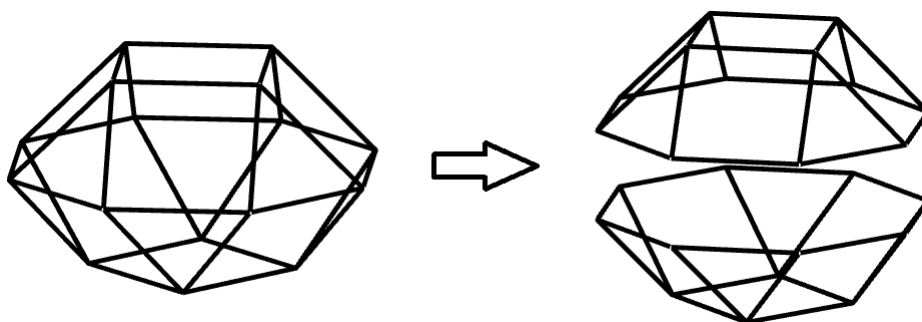


Figura 6.16: Girobicúpula quadrada (J29): decomposição em duas cúpulas quadradas

Dessa forma, o volume V_{gq} da girobicúpula quadrada é dado por

$$V_{gq} = 2V_{cq}, \quad (6.13)$$

sendo V_{cq} o volume da cúpula quadrada.

Ao projetarmos ortogonalmente as arestas das faces triangulares e das faces quadrangulares da cúpula quadrada sobre o plano da base octogonal, temos o octógono dividido com dimensões como na Figura 6.17, onde a é a medida da aresta da cúpula quadrada, e, consequentemente, da girobicúpula quadrada.

Para determinar a medida x na Figura 6.17, aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de catetos x e hipotenusa a . Assim:

$$\begin{aligned} a^2 &= 2x^2 \\ x &= \frac{\sqrt{2}}{2}a. \end{aligned} \quad (6.14)$$

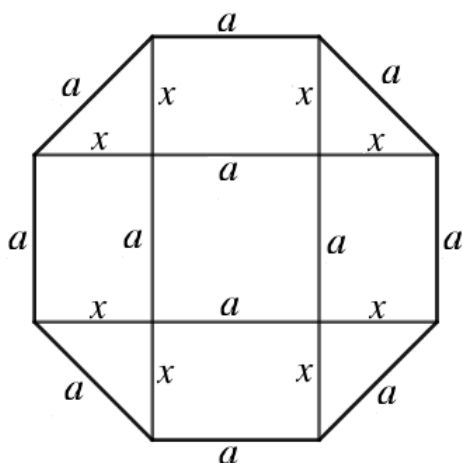


Figura 6.17: Projeção ortogonal das arestas das faces triangulares e das faces quadrangulares da cúpula quadrada sobre o plano da base octogonal

Dividimos a cúpula quadrada seccionando-a segundo as projeções da Figura 6.17, obtendo prismas e pirâmides como na Figura 6.18.

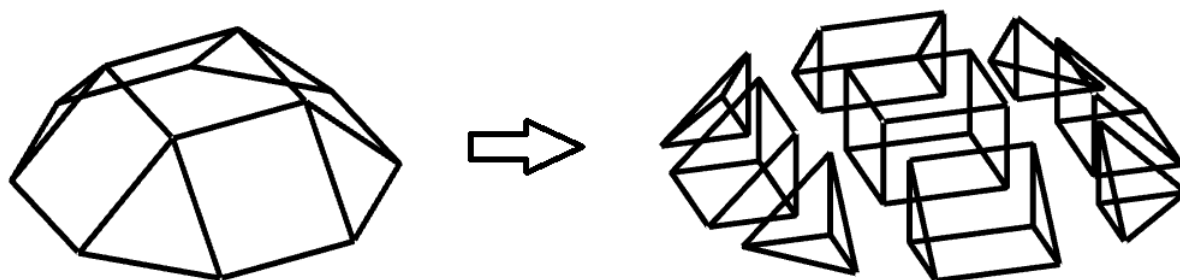


Figura 6.18: Decomposição da cúpula quadrada (J4) em prismas e pirâmides

Na decomposição da cúpula quadrada, obtemos um prisma reto de base quadrada, 4 prismas retos de base triangular e 4 pirâmides retas de base triangular, com dimensões como na Figura 6.19.

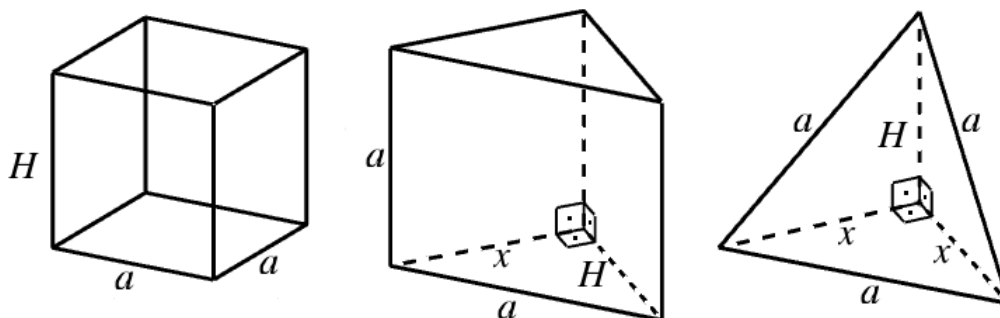


Figura 6.19: Poliedros obtidos na decomposição da cúpula quadrada

Dessa maneira, o volume V_{cq} da cúpula quadrada é dado por

$$V_{cq} = V_{pq} + 4V_{pt} + 4V_p, \quad (6.15)$$

sendo V_{pq} o volume do prisma reto de base quadrada, V_{pt} o volume do prisma reto triangular e V_p o volume da pirâmide.

Como conhecemos as dimensões das bases de cada poliedro da Figura 6.19, resta-nos calcular a medida H . Para tanto, aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de catetos x e H e hipotenusa a . Usando (6.14), obtemos:

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + H^2 \\ a^2 &= \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + H^2 \\ H^2 &= a^2 - \frac{2a^2}{4} \\ H^2 &= \frac{2a^2}{4} \\ H &= \frac{\sqrt{2}}{2}a. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Agora temos condições de calcular o volume dos poliedros obtidos na decomposição da cúpula quadrada. Iniciamos pelo volume V_{pq} do prisma de base quadrada. Como a área A_b da base do prisma é $A_b = a^2$, empregando (6.16), temos que:

$$\begin{aligned} V_{pq} &= A_b H \\ V_{pq} &= a^2 \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ V_{pq} &= \frac{\sqrt{2}}{2} a^3. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Para calcular o volume do prisma triangular, precisamos determinar a medida A_b da área da base. Empregando (6.14) e (6.16), obtemos:

$$\begin{aligned} A_b &= \frac{1}{2}xH \\ A_b &= \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{2}}{2} \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ A_b &= \frac{a^2}{4}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Assim, por (6.18), o volume V_{pt} do prisma triangular é igual a:

$$\begin{aligned} V_{pt} &= A_b a \\ V_{pt} &= \frac{a^2}{4} a \\ V_{pt} &= \frac{a^3}{4}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Para finalizar, falta-nos o volume da pirâmide triangular. A área A_b da base dessa pirâmide é dada, com o uso de (6.14), por:

$$\begin{aligned} A_b &= \frac{1}{2} x x \\ A_b &= \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{2}}{2} \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ A_b &= \frac{a^2}{4}. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Logo, utilizando (6.16) e (6.20), temos que o volume V_p da pirâmide triangular é igual a:

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{1}{3} A_b H \\ V_p &= \frac{1}{3} \frac{a^2}{4} \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ V_p &= \frac{\sqrt{2}}{24} a^3. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Substituindo (6.17), (6.19), (6.21) em (6.15), obtemos para o volume V_{cq} da cúpula quadrada:

$$\begin{aligned} V_{cq} &= V_{pq} + 4V_{pt} + 4V_p \\ V_{cq} &= \frac{a^3\sqrt{2}}{2} + 4\frac{a^3}{4} + 4\frac{a^3\sqrt{2}}{24} \\ V_{cq} &= \frac{a^3\sqrt{2}}{2} + a^3 + \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \\ V_{cq} &= \frac{a^3}{3} (3 + 2\sqrt{2}) \\ V_{cq} &= \frac{2\sqrt{2} + 3}{3} a^3. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Substituindo agora (6.22) em (6.13), concluímos que o volume V_{gq} da girobicúpula quadrada é igual a:

$$\begin{aligned}
 V_{gq} &= 2V_{cq} \\
 V_{gq} &= 2a^3 \frac{2\sqrt{2} + 3}{3} \\
 V_{gq} &= \frac{4\sqrt{2} + 6}{3} a^3.
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Logo, o volume V_{gq} da girobicúpula quadrada é dado por

$$V_{gq} = \frac{4\sqrt{2} + 6}{3} a^3,$$

onde a é a medida da aresta do poliedro.

6.3.3 CUBO TRUNCADO AUMENTADO (J66)

O cubo truncado aumentado é composto por 22 faces, 48 arestas e 28 vértices. Suas faces são polígonos regulares, sendo 12 faces triangulares, 5 faces quadradas e 5 faces octogonais, como ilustra a Figura 6.20.

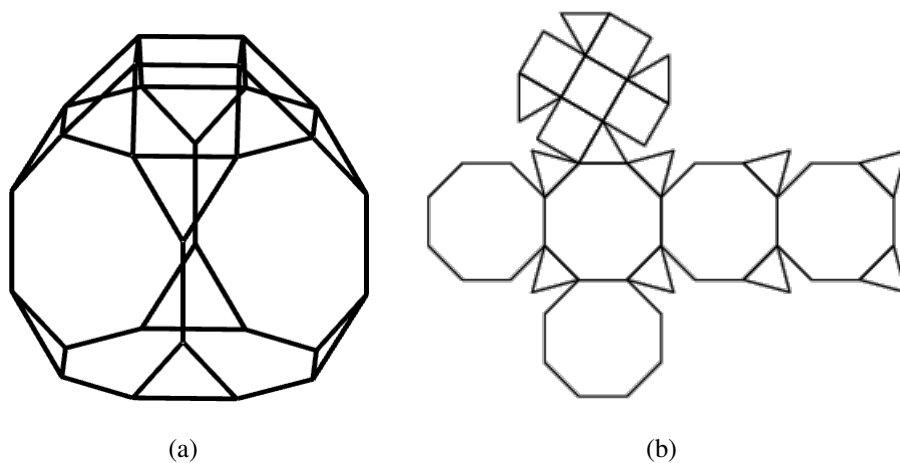


Figura 6.20: Cubo truncado aumentado (J66): (a) sólido; (b) planificação

Podemos decompor o cubo truncado aumentado em um cubo truncado e uma cúpula quadrada, um poliedro Arquimediano e um poliedro de Johnson (J4), respectivamente, como ilustra a Figura 6.21.

Dessa forma, o volume V_{cta} do cubo truncado aumentado é dado por

$$V_{cta} = V_{ct} + V_{cq}, \tag{6.24}$$

onde V_{ct} é o volume do cubo truncado e V_{cq} é o volume da cúpula quadrada.

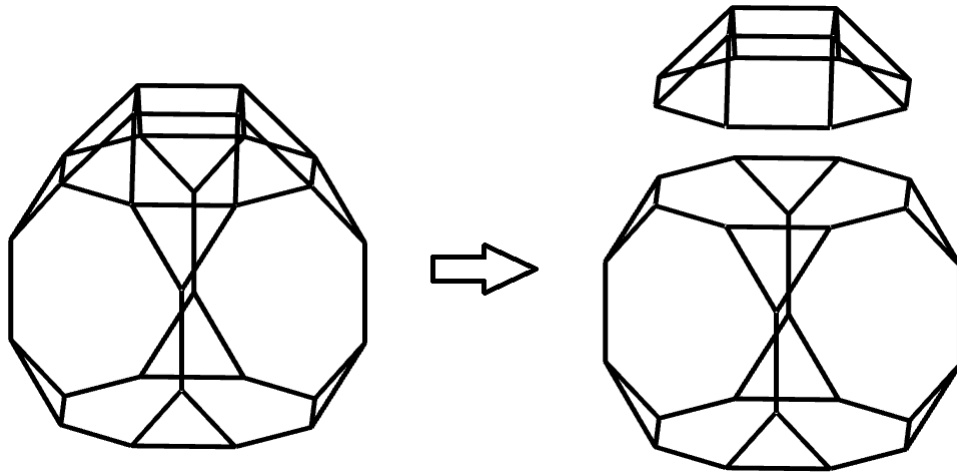


Figura 6.21: Cubo truncado aumentado (J66): decomposição em um cubo truncado e uma cúpula quadrangular

O volume da cúpula quadrada já foi calculado, sendo dado por (6.22). Assim, precisamos somente determinar o volume do cubo truncado. Ao truncarmos o cubo, removemos 8 pirâmides triangulares, uma de cada vértice, como na Figura 6.22.

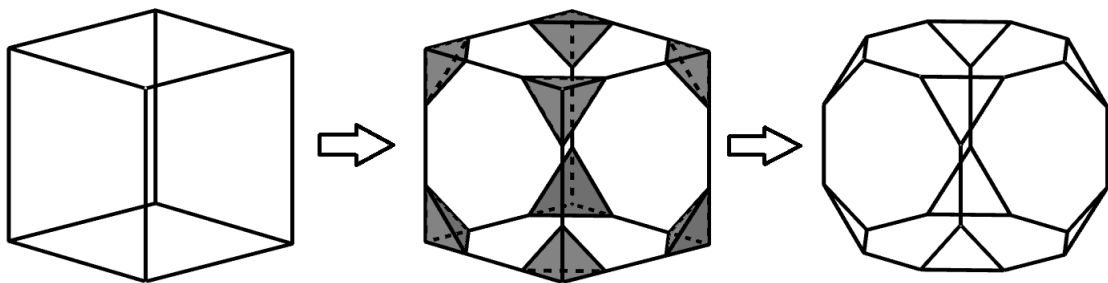


Figura 6.22: Troncamento do cubo

Dessa forma, o volume V_{ct} do cubo truncado é dado por

$$V_{ct} = V_c - 8V_p, \quad (6.25)$$

sendo V_c o volume do cubo e V_p o volume da pirâmide removida a partir do vértice do cubo.

Para determinar as dimensões dessas pirâmides, consideramos inicialmente a face quadrada do cubo. Ao truncarmos o cubo, a face octogonal do cubo truncado é definida como na Figura 6.23(a), onde as partes sombreadas são as partes que serão removidas no troncamento.

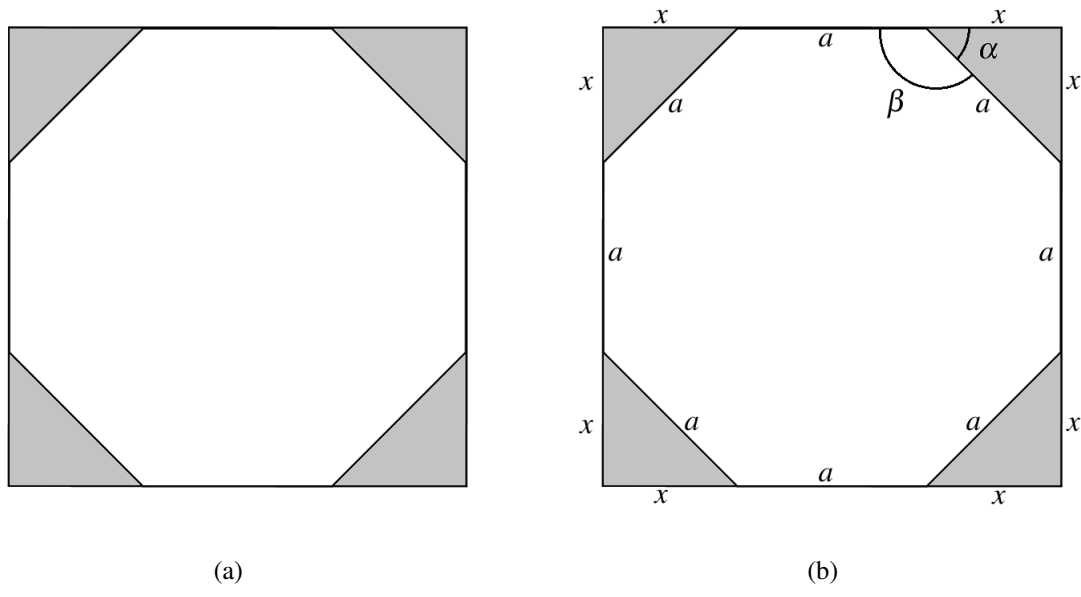


Figura 6.23: (a) Face octogonal do cubo truncado a partir da face quadrada do cubo; (b) ângulos e medidas na face quadrada do cubo e na face octogonal do cubo truncado

Considerando a como medida da aresta do cubo truncado, precisamos determinar o valor da medida x , indicada na Figura 6.23(b), para calcular o volume das pirâmides removidas. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de catetos x e hipotenusa a , obtemos:

$$a^2 = 2x^2$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}a. \tag{6.26}$$

Dessa forma, a pirâmide removida possui forma e medidas como na Figura 6.24.

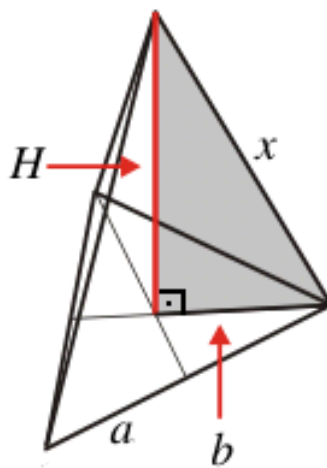


Figura 6.24: Pirâmide removida a partir dos vértices do cubo

Na Figura 6.24, a medida b é dada por (3.11), ou seja, $b = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. Aplicando o teorema

de Pitágoras no triângulo retângulo de catetos b e H e hipotenusa x , temos, por meio de (3.11) e (6.26), que:

$$\begin{aligned}
 x^2 &= H^2 + b^2 \\
 \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 &= H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\
 H^2 &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3} \\
 H^2 &= \frac{3a^2 - 2a^2}{6} \\
 H^2 &= \frac{a^2}{6} \\
 H &= \frac{\sqrt{6}}{6}a.
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Como a base da pirâmide é um triângulo equilátero de lado a , temos por (3.10) que a área A_b da mesma é igual $A_b = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Dessa forma, usando (3.10) e (6.27), obtemos para o volume da pirâmide:

$$\begin{aligned}
 V_p &= \frac{1}{3}A_bH \\
 V_p &= \frac{1}{3} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \frac{a\sqrt{6}}{6} \\
 V_p &= \frac{a^3\sqrt{18}}{72} \\
 V_p &= \frac{\sqrt{2}}{24}a^3.
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

Por fim, falta-nos calcular o volume do cubo original. Para tanto, determinamos primeiramente a medida de sua aresta. Na Figura 6.23(b), percebemos facilmente que a aresta c do cubo possui medida $a + 2x$. Logo, por (6.26), temos que:

$$\begin{aligned}
 c &= a + 2x \\
 c &= a + 2\frac{a\sqrt{2}}{2} \\
 c &= a + a\sqrt{2} \\
 c &= (\sqrt{2} + 1)a.
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Dessa forma, utilizando (6.29), obtemos para o volume do cubo original:

$$\begin{aligned}
V_c &= c^3 \\
V_c &= \left(a(1 + \sqrt{2})\right)^3 \\
V_c &= \left(5\sqrt{2} + 7\right) a^3.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Substituindo (6.28) e (6.30) em (6.25), temos que o volume do cubo truncado é igual a:

$$\begin{aligned}
V_{ct} &= V_c - 8V_p \\
V_{ct} &= a^3(7 + 5\sqrt{2}) - 8 \frac{a^3\sqrt{2}}{24} \\
V_{ct} &= a^3 \left(7 + \frac{14\sqrt{2}}{3}\right) \\
V_{ct} &= \frac{7(2\sqrt{2} + 3)}{3} a^3.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Finalmente, substituindo (6.22) e (6.31) em (6.24), concluímos que o volume V_{cta} do cubo truncado aumentado é igual a:

$$\begin{aligned}
V_{cta} &= V_{ct} + V_{cq} \\
V_{cta} &= 7a^3 \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + a^3 \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \\
V_{cta} &= \frac{16\sqrt{2} + 24}{3} a^3.
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Logo, o volume V_{cta} do cubo truncado aumentado é dado por

$$\boxed{V_{cta} = \frac{16\sqrt{2} + 24}{3} a^3,}$$

onde a é a medida da aresta do poliedro.

7 ATIVIDADES COM O GEOGEBRA

Como forma de aplicar os conhecimentos adquiridos neste trabalho, propomos para o curso de Licenciatura em Matemática atividades para explorar o cálculo do volume de poliedros convexos por meio de sua composição/decomposição através do GeoGebra 3D. As atividades propostas também podem ser adaptadas para o Ensino Médio.

Para executar as atividades, o estudante precisa de um computador com o software GeoGebra 3D instalado, ou com acesso à internet para utilizar o GeoGebra 3D online (GEOGEBRA, 2018a). O download do software pode ser feito no site oficial do GeoGebra (GEOGEBRA, 2018b) e é gratuito. Antes de propor as atividades, descrevemos um roteiro para utilização do software.

7.1 GEOGEBRA 3D

Ao abrir o Geobegra, a tela inicial será a da Figura 7.1.

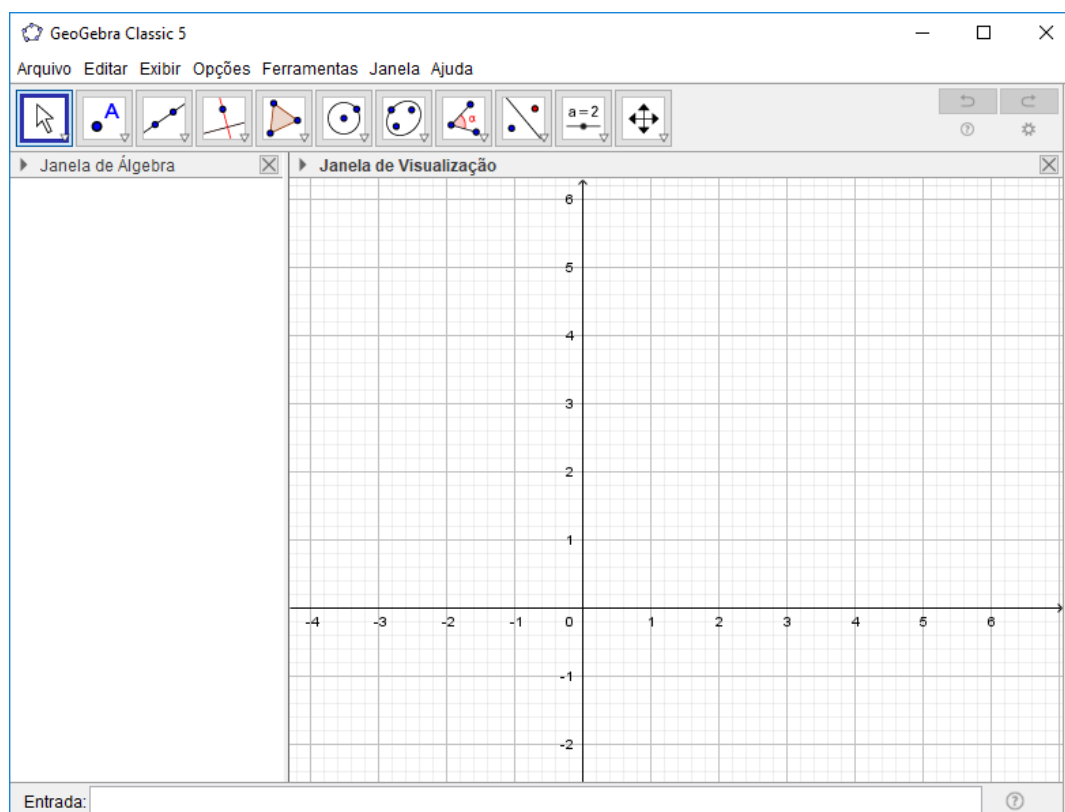


Figura 7.1: Tela inicial do GeoGebra - Janela de Visualização 2D

Nessa tela, é possível construir polígonos, curvas e funções. Podemos remover a malha quadriculada e/ou os eixos clicando com o botão direito do mouse na opção "Malha" ou "Eixos". Essa janela será útil quando criarmos uma vista 2D de um plano para visualizarmos as faces de um poliedro após truncamentos. Há nela ícones importantes, destacados na Figura 7.2, aos quais recorreremos em muitas ocasiões.



Figura 7.2: Ícones da tela inicial do GeoGebra

O primeiro deles, com o ícone do mouse, é referente à seleção. Com ele, podemos mover a tela ou selecionar um ponto, segmento, curva ou polígono. É importante voltar a ele sempre que se queira mexer na tela ou o programa continuará construindo, a cada clique, o que o ícone selecionado anteriormente determinar. Podemos voltar a essa opção apertando a tecla ESC do teclado.

O segundo ícone é referente ao ponto. Nele podemos definir pontos, intersecções entre dois objetos ou o ponto médio entre dois pontos. O terceiro ícone é referente à reta. Nele podemos construir retas, semirretas, segmentos e vetores. O quarto ícone é referente ao que se pode fazer com as retas. Nele, podemos construir retas perpendiculares ou paralelas a outras retas e segmentos, passando por um ponto existente, assim como mediatrizes e bissetrizes.

O quinto ícone é referente aos polígonos. Nele podemos definir polígonos a partir de pontos existentes ou polígonos regulares a partir de dois pontos. O sexto ícone é referente aos círculos. Nele podemos construir círculos por dois ou três pontos, semicírculos, arcos e setores circulares. O sétimo ícone é referente às cônicas. Nele é possível construir elipses, hipérbolas e parábolas ou cônicas por meio de cinco pontos dados.

O oitavo ícone é referente aos ângulos. Nele podemos determinar o ângulo entre duas retas ou construir uma reta a partir de outra com uma declividade fixa. O nono ícone é referente às operações com entes geométricos. Nele podemos transladar, rotacionar ou refletir objetos, assim como criar homotetias.

O décimo ícone é referente aos controles. Nele podemos atribuir valores a controles deslizantes e utilizá-los em objetos, assim como criar caixas de texto e inserir imagens. O décimo primeiro e último ícone é voltado ao controle dos objetos. Nele podemos mover a janela, ampliar, reduzir e esconder objetos ou seus rótulos. Podemos fazer isso tudo sem precisar desse ícone, por meio do mouse.

Para construir poliedros, precisamos da "Janela de Visualização 3D", que pode ser aberta pelo comando Ctrl+Shift+3 ou clicando em Exibir > Janela de Visualização 3D. Ela surgirá como na Figura 7.3.

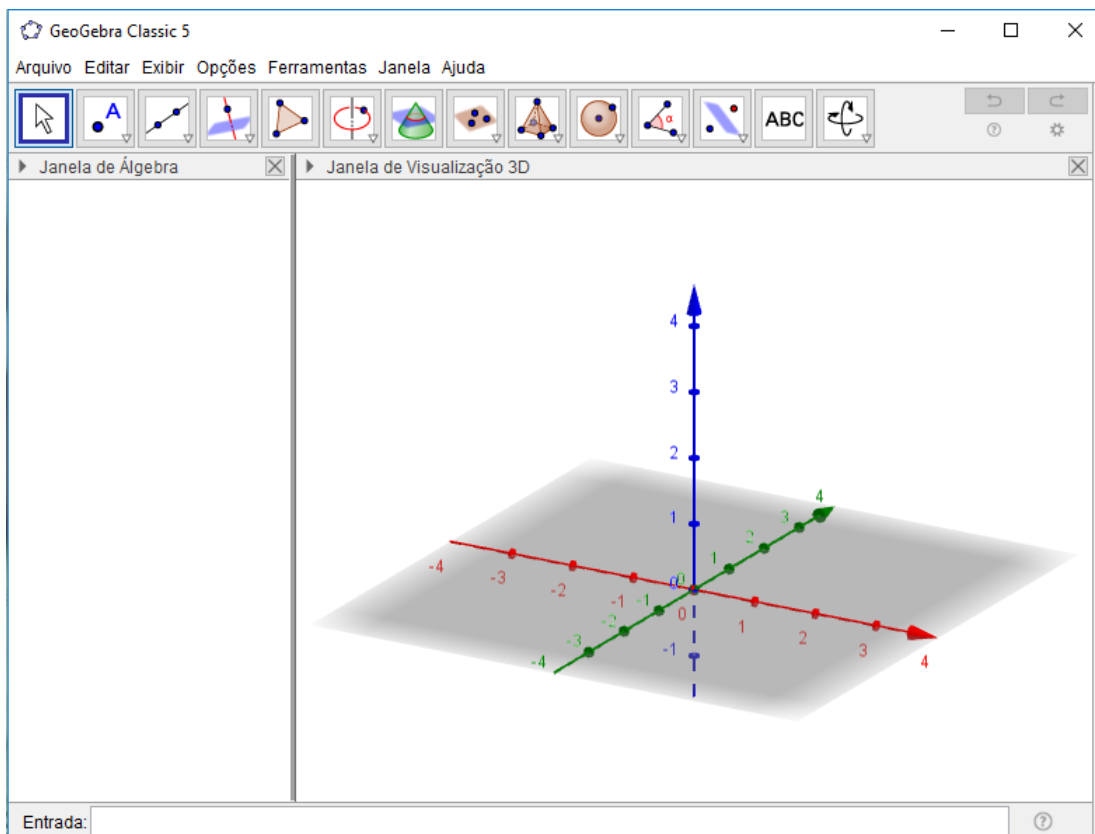


Figura 7.3: Tela do GeoGebra com a Janela de Visualização 3D

Podemos remover o plano e/ou os eixos da mesma forma que removemos a malha e os eixos na janela 2D da Figura 7.1. A janela 3D possui alguns ícones diferentes da janela 2D, como ilustra a Figura 7.4.



Figura 7.4: Ícones da tela do GeoGebra com a Janela de Visualização 3D

Os três primeiros ícones, assim como o décimo primeiro, não contêm outros elementos em relação à janela 2D, porém os demais contêm. No quarto ícone, podemos determinar uma reta perpendicular a um plano passando por um ponto existente. O quinto ícone apenas constrói polígonos com os pontos definidos, não dando a possibilidade de construir polígonos regulares a partir de dois vértices.

O sexto ícone nos dá a possibilidade de construir círculos dados um eixo e um ponto ou dados um centro, um raio e uma direção. O sétimo ícone é referente à intersecção de superfícies. O oitavo ícone é referente ao plano. Nele podemos determinar planos a partir de três pontos, um ponto e uma reta, duas retas ou um polígono, assim como determinar planos paralelos e perpendiculares a planos existentes.

O nono ícone é referente aos poliedros. Nele podemos construir prismas e pirâmides a partir de seus vértices, assim como podemos fazer a extrusão de um prisma ou de uma pirâmide a partir de uma base e de uma altura. Essa opção nos dá apenas prismas e pirâmides retos, ou seja, prismas e pirâmides nos quais a projeção ortogonal do vértice sobre a base é o centro da mesma.

O décimo ícone é referente às esferas. Nele podemos construir esferas a partir de dois pontos ou um ponto e um raio. O décimo segundo ícone permite refletir um objeto a partir de um plano. O décimo terceiro ícone nos dá apenas a possibilidade de inserir caixas de texto. Para criar controles deslizantes, é preciso retornar à janela 2D. O décimo quarto ícone permite rotacionar a janela para termos vistas diferentes dos objetos construídos.

Além dos ícones, temos na parte inferior das janelas 2D e 3D uma tela de Entrada. Nela podemos declarar objetos por meio de comandos e até mesmo criar poliedros Platônicos por meio de dois pontos. Ela será útil na construção de poliedros, pois precisaremos definir valores para depois utilizá-los nas coordenadas dos vértices. Como os poliedros possuem muitas faces, utilizamos a janela de entrada 2D para definir polígonos a partir dos vértices.

Na janela de Entrada, devemos digitar um comando e pressionar a tecla Enter. O software não aceita declarações simultâneas.

Para as coordenadas dos vértices e das faces, utilizaremos o site *Visual Polyhedra* (MCCOOEY, 2015). Neste, há uma lista de poliedros e, ao selecionarmos um, teremos uma vista 3D do mesmo com a opção de rotacioná-lo. Existem também algumas informações sobre o poliedro, como número de vértices, faces e arestas, ângulo diedro, poliedro dual, os raios das esferas inscrita e circunscrita (se o poliedro é regular) e o volume quando a aresta é unitária. Logo abaixo, há a opção "coordinates", que nos fornece um arquivo de texto com as coordenadas dos vértices e das faces, como ilustra a Figura 7.5.

Para utilizarmos as coordenadas para as faces, devemos digitar na tela de Entrada Polígono() e entre parênteses devemos colocar os pontos separados por vírgulas. No arquivo de texto, ilustrado na Figura 7.5, as coordenadas estão apenas com o número. Devemos então acrescentar a letra V antes de cada número para obter cada face.

Triakis Tetrahedron

$$C0 = 0.6363961030678927771960759925894 = 9 * \text{sqrt}(2) / 20$$

$$C1 = 1.06066017177982128660126654316 = 3 * \text{sqrt}(2) / 4$$

$$V0 = (C1, C1, C1)$$

$$V1 = (C1, -C1, -C1)$$

$$V2 = (-C1, -C1, C1)$$

$$V3 = (-C1, C1, -C1)$$

$$V4 = (C0, -C0, C0)$$

$$V5 = (C0, C0, -C0)$$

$$V6 = (-C0, C0, C0)$$

$$V7 = (-C0, -C0, -C0)$$

Faces:

$$\{ 4, 0, 2 \}$$

$$\{ 4, 2, 1 \}$$

$$\{ 4, 1, 0 \}$$

$$\{ 5, 0, 1 \}$$

$$\{ 5, 1, 3 \}$$

$$\{ 5, 3, 0 \}$$

$$\{ 6, 0, 3 \}$$

$$\{ 6, 3, 2 \}$$

$$\{ 6, 2, 0 \}$$

$$\{ 7, 1, 2 \}$$

$$\{ 7, 2, 3 \}$$

$$\{ 7, 3, 1 \}$$

Figura 7.5: Coordenadas do tetraedro triakis (MCCOOEY, 2015)

7.2 ATIVIDADES DE COMPOSIÇÃO/DECOMPOSIÇÃO DE POLIEDROS CONVEXOS

O objetivo das atividades é estabelecer uma estratégia para calcular o volume de um poliedro convexo decompondo-o em (ou compo-o a partir de) poliedros convexos de volume conhecido, como prismas e pirâmides convexos.

Como proposta de atividades, comporemos/decomporemos três poliedros convexos:

1. o cuboctaedro, um poliedro Arquimediano com 14 faces (8 triangulares e 6 quadrangulares), 24 arestas e 12 vértices;
2. o hexaedro tetrakis, um poliedro de Catalan com 24 faces triangulares, 36 arestas e 14 vértices;
3. o icosaedro tridiminuído (J63), um poliedro de Johnson com 8 faces (5 triangulares e 3 pentagonais), 15 arestas e 9 vértices.

A Figura 7.6 ilustra os três poliedros.

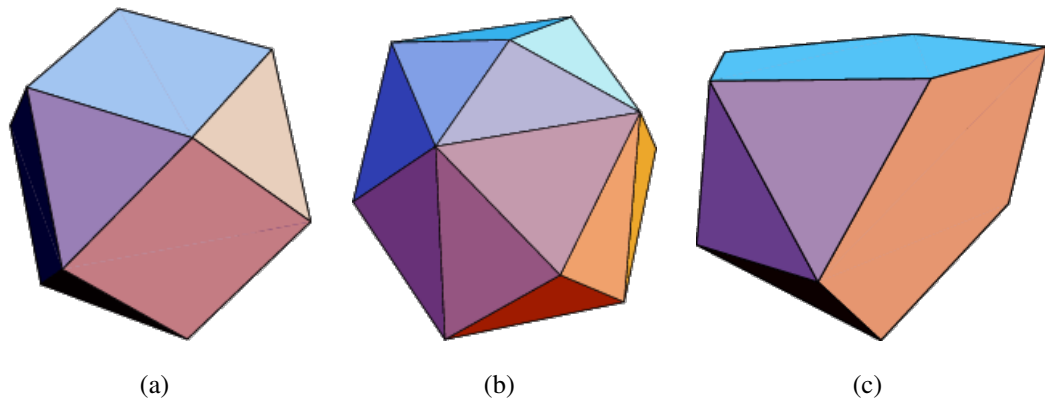


Figura 7.6: Poliedros para as atividades: (a) cuboctaedro; (b) hexaedro tetrakis; (c) icosaedro tridiminuído(J63) (RESEARCH, 2018)

Nas atividades, descreveremos o processo de construção e os passos para decompor e afastar os poliedros obtidos, porém não efetuaremos o cálculo do volume.

7.2.1 CUBOCTAEDRO

Na janela de Entrada, definimos o valor $C0 = \text{sqrt}(2)/2$ e depois os pontos (vértices) como abaixo. A Figura 7.7 ilustra a visualização dos pontos no GeoGebra.

$$\begin{aligned}V0 &= (C0, 0.0, C0) \\V1 &= (C0, 0.0, -C0) \\V2 &= (-C0, 0.0, C0) \\V3 &= (-C0, 0.0, -C0) \\V4 &= (C0, C0, 0.0) \\V5 &= (C0, -C0, 0.0) \\V6 &= (-C0, C0, 0.0) \\V7 &= (-C0, -C0, 0.0) \\V8 &= (0.0, C0, C0) \\V9 &= (0.0, C0, -C0) \\V10 &= (0.0, -C0, C0) \\V11 &= (0.0, -C0, -C0)\end{aligned}$$

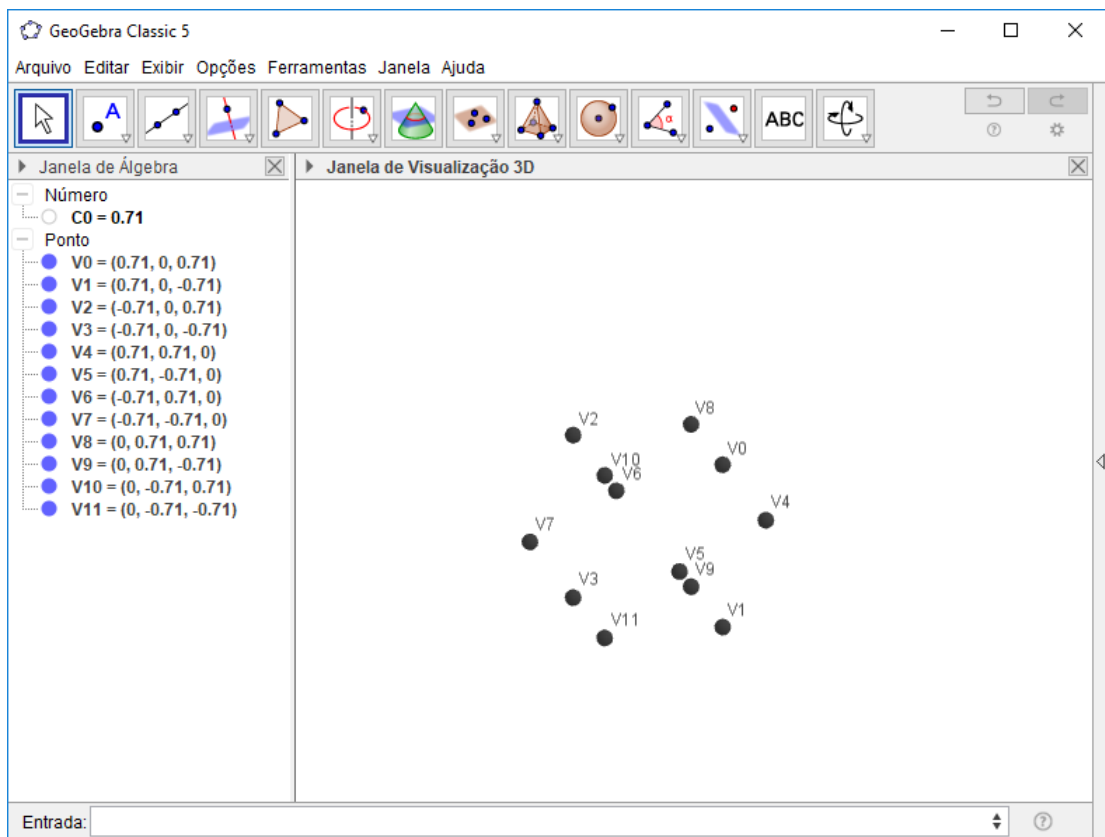


Figura 7.7: Tela do GeoGebra após a inserção dos pontos

Em seguida, formamos as faces do cuboctaedro digitando-as uma a uma na janela de Entrada. A visualização do cuboctaedro será como na Figura 7.8.

Polígono($V0, V5, V1, V4$)

Polígono($V0, V8, V2, V10$)

Polígono($V7, V2, V6, V3$)

Polígono($V7, V11, V5, V10$)

Polígono($V9, V1, V11, V3$)

Polígono($V9, V6, V8, V4$)

Polígono($V0, V4, V8$)

Polígono($V1, V5, V11$)

Polígono($V2, V7, V10$)

Polígono($V3, V6, V9$)

Polígono($V4, V1, V9$)

Polígono($V5, V0, V10$)

Polígono(V_6, V_2, V_8)

Polígono(V_7, V_3, V_{11})

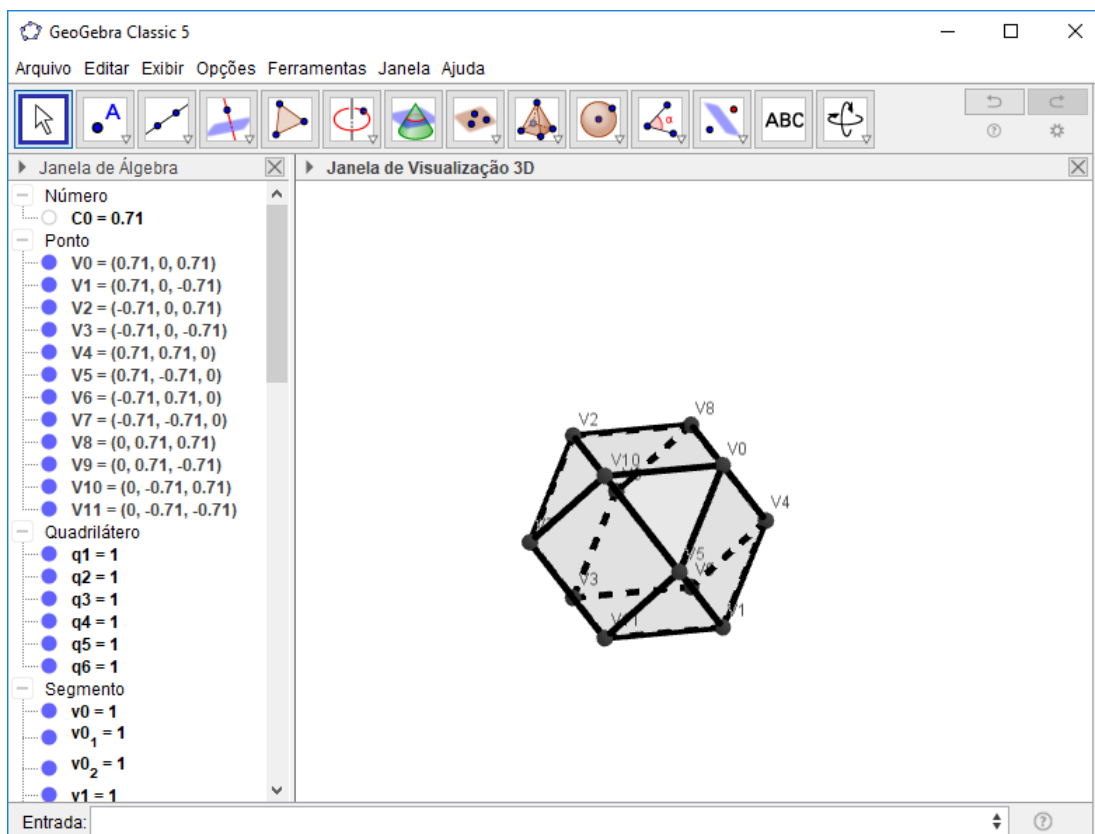


Figura 7.8: Tela do GeoGebra após a inserção das faces

Podemos remover os rótulos dos pontos clicando com o botão direito do mouse sobre a palavra Ponto na Janela de Álgebra e selecionando a opção "Exibir Rótulo". Para mudar a cor das faces e dos segmentos, clicamos sobre o nome Quadriláteros ou Triângulos e selecionamos a opção Propriedades. Nela, na aba Cor, escolhemos uma cor. Caso queiramos deixar os segmentos mais grossos ou mais finos, na aba Estilo podemos alterar a Espessura da Linha.

O cuboctaedro pode ser obtido por meio do truncamento dos vértices do cubo ou do octaedro. Exploraremos o caso do cubo e deixaremos o caso do octaedro a cargo do leitor.

Para definir o cubo original, primeiro determinamos segmentos que são as diagonais das faces quadradas do cuboctaedro, porém apenas de quatro das seis faces quadradas, como ilustra a Figura 7.9. Para isso, utilizamos o terceiro ícone na opção "Segmento" e depois clicamos nos pontos que devem ser as extremidades do segmento. Caso seja necessário, rotacionamos a tela.

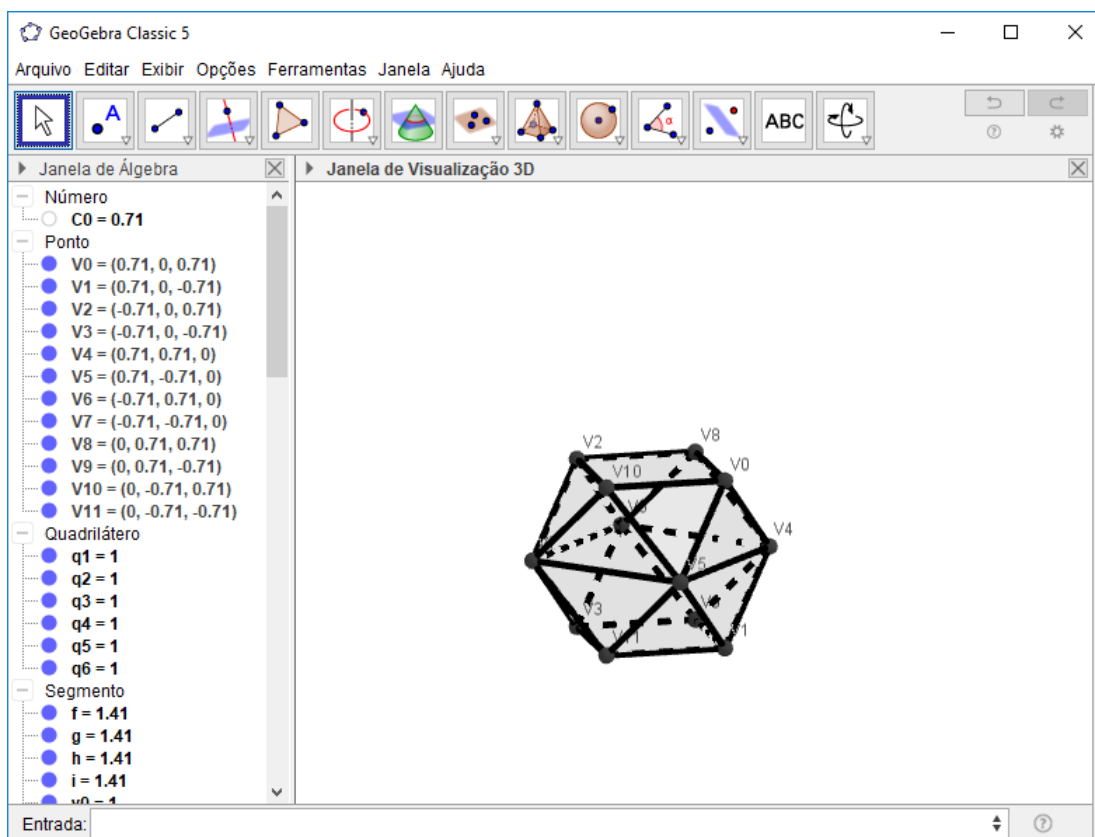


Figura 7.9: Tela do GeoGebra após a inserção dos segmentos

Após isso, traçamos retas paralelas aos segmentos passando pelos outros dois vértices da face e marcamos os pontos de intersecção das retas, como mostra a Figura 7.10. Para tanto, utilizamos o quarto ícone na opção "Reta Paralela". Depois clicamos no segmento desejado e no ponto pelo qual desejamos que a reta passe. Para determinar os pontos das intersecções, utilizamos o segundo ícone na opção "Intersecção de Dois Objetos" e selecionamos as duas retas que se intersectam.

Ocultamos as retas clicando sobre a palavra Reta na Janela de Álgebra com o botão direito do mouse e selecionando a opção "Exibir Rótulo". Em seguida, construímos pirâmides cujas bases são as faces triangulares do cuboctaedro e cujo vértice é o ponto de intersecção das retas definidas na Figura 7.10. Para tal, utilizamos o nono ícone na opção "Pirâmide" e selecionamos os vértices do polígono da base e depois o ponto da intersecção definido no passo anterior. Para que a pirâmide seja construída, é preciso selecionar os pontos formando o caminho poligonal e depois o ponto inicial para fechar a superfície poligonal. Por uma questão visual, os pontos foram ocultados, como ilustra a Figura 7.11.

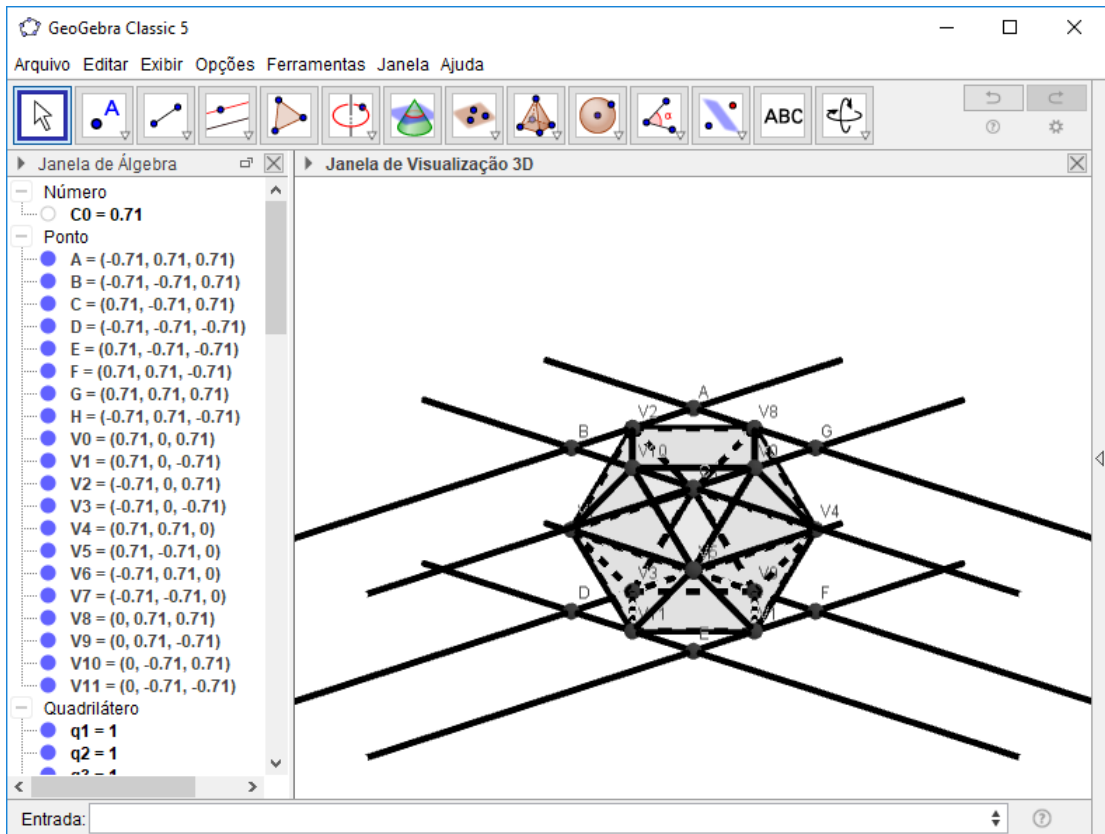


Figura 7.10: Tela do GeoGebra após a inserção das retas paralelas aos segmentos

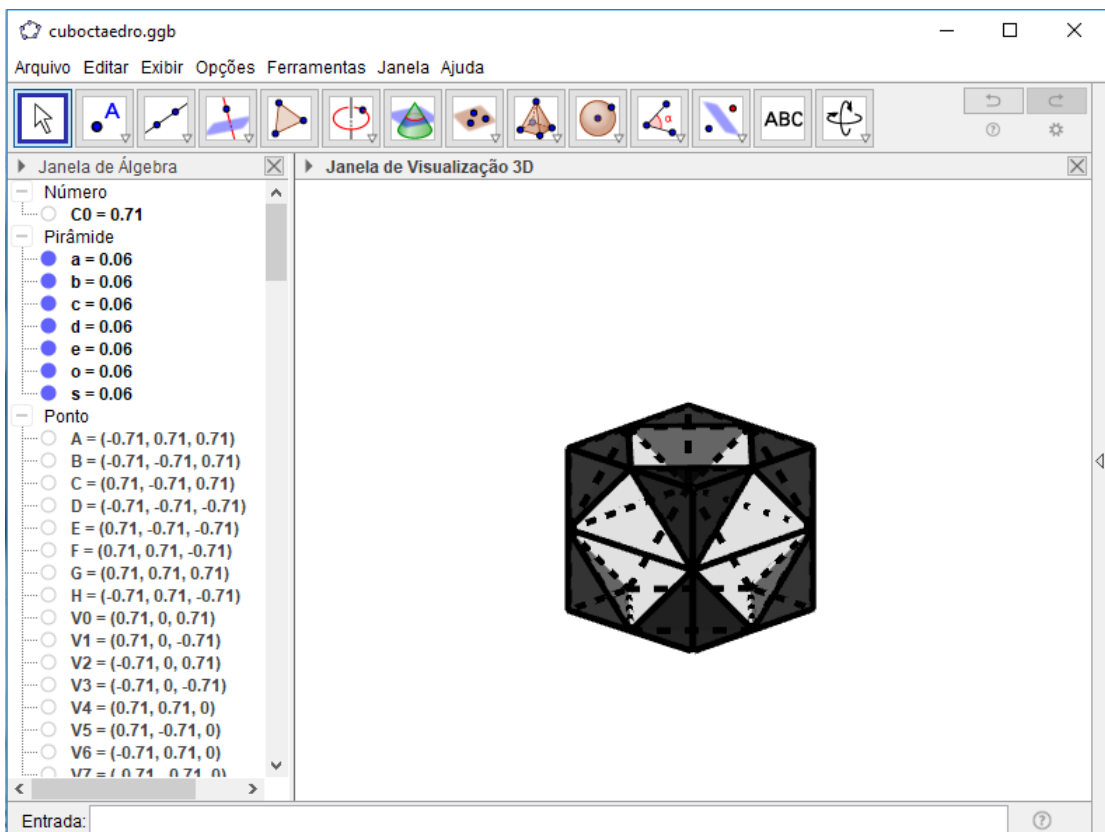


Figura 7.11: Tela do GeoGebra após a inserção das pirâmides

Temos assim o cubo original. Podemos agora determinar a medida da aresta do cubo, ou considerar para a mesma uma medida arbitrária a , e remover o volume das oito pirâmides construídas na Figura 7.11 do volume do cubo.

Para determinar uma relação entre a aresta do cubo e a aresta do cuboctaedro, utilizamos o oitavo ícone para criar um plano que passe por uma das faces do cubo, selecionando três pontos ou dois segmentos da face quadrada. Depois, clicamos sobre o plano com o botão direito do mouse e selecionamos a opção "Criar vista 2D de t", onde t é o nome do plano. Será aberta uma janela de visualização como na Figura 7.12.

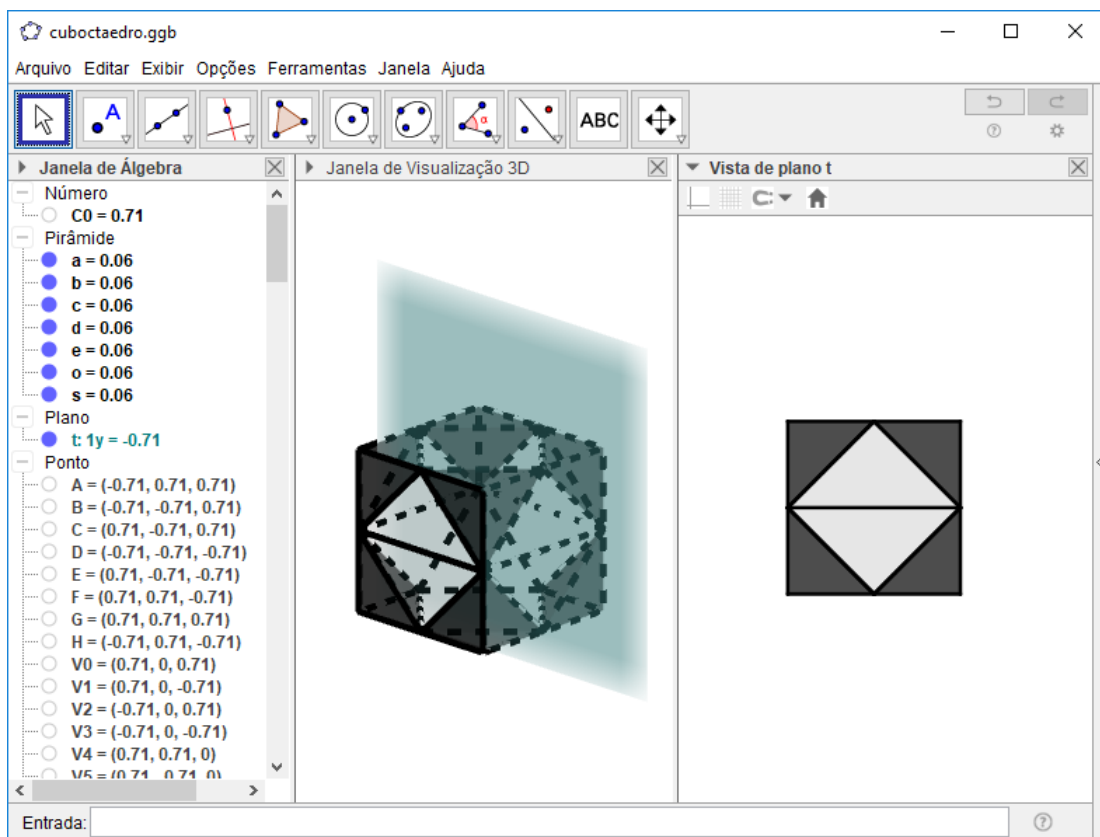


Figura 7.12: Tela do GeoGebra com a vista 2D do plano da face do cubo

Nessa janela 2D, podemos constatar que a diagonal da face quadrada do cuboctaedro é a aresta do cubo original. Dessa forma, obtemos também a medida das arestas laterais das pirâmides.

7.2.2 HEXAEDRO TETRAKIS

Na janela de Entrada, definimos os valores $C0 = 3 * \text{sqrt}(2)/4$ e $C1 = 9 * \text{sqrt}(2)/8$ e logo após os pontos como abaixo. A Figura 7.13 ilustra a visualização dos pontos no GeoGebra.

$$\begin{aligned}V0 &= (0,0,0,C1) \\V1 &= (0,0,0,-C1) \\V2 &= (C1,0,0,0) \\V3 &= (-C1,0,0,0) \\V4 &= (0,0,C1,0) \\V5 &= (0,0,-C1,0) \\V6 &= (C0,C0,C0) \\V7 &= (C0,C0,-C0) \\V8 &= (C0,-C0,C0) \\V9 &= (C0,-C0,-C0) \\V10 &= (-C0,C0,C0) \\V11 &= (-C0,C0,-C0) \\V12 &= (-C0,-C0,C0) \\V13 &= (-C0,-C0,-C0)\end{aligned}$$

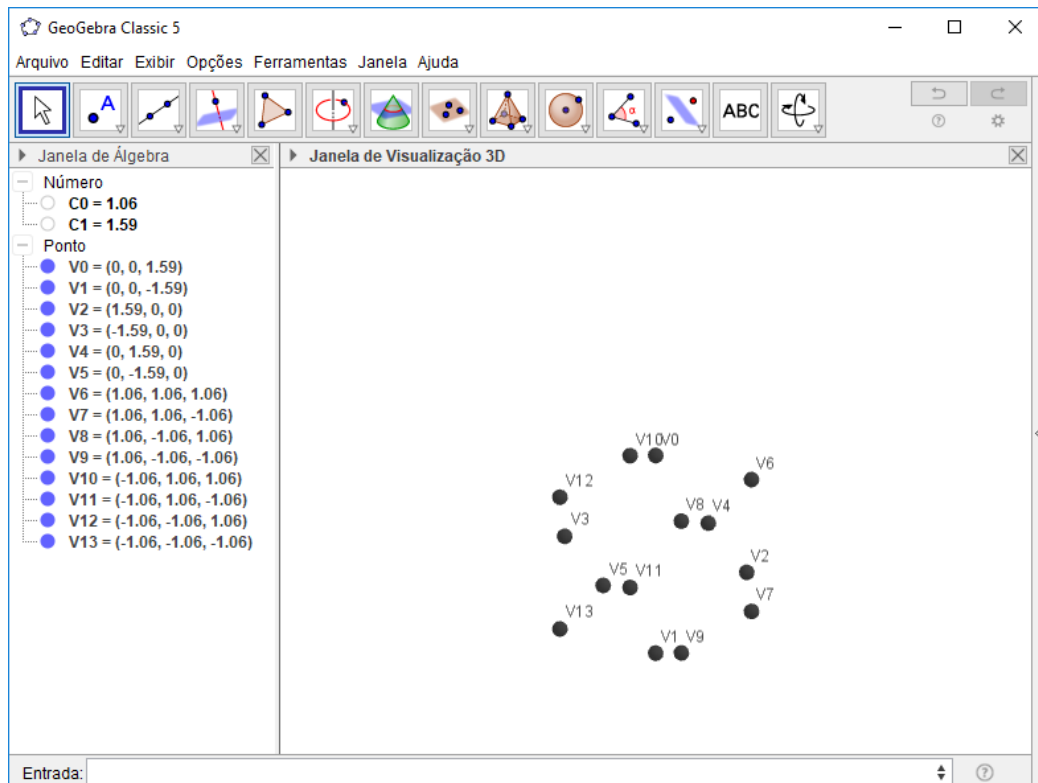


Figura 7.13: Tela do GeoGebra após a inserção dos pontos

Na próxima etapa, formamos as faces do hexaedro tetrakis digitando-as uma a uma na janela de Entrada. A visualização do hexaedro tetrakis será como na Figura 7.14.

Polígono(V0, V6, V10)
Polígono(V0, V10, V12)
Polígono(V0, V12, V8)
Polígono(V0, V8, V6)
Polígono(V1, V7, V9)
Polígono(V1, V9, V13)
Polígono(V1, V13, V11)
Polígono(V1, V11, V7)
Polígono(V2, V6, V8)
Polígono(V2, V8, V9)
Polígono(V2, V9, V7)
Polígono(V2, V7, V6)
Polígono(V3, V10, V11)
Polígono(V3, V11, V13)
Polígono(V3, V13, V12)
Polígono(V3, V12, V10)
Polígono(V4, V6, V7)
Polígono(V4, V7, V11)
Polígono(V4, V11, V10)
Polígono(V4, V10, V6)
Polígono(V5, V8, V12)
Polígono(V5, V12, V13)
Polígono(V5, V13, V9)
Polígono(V5, V9, V8)

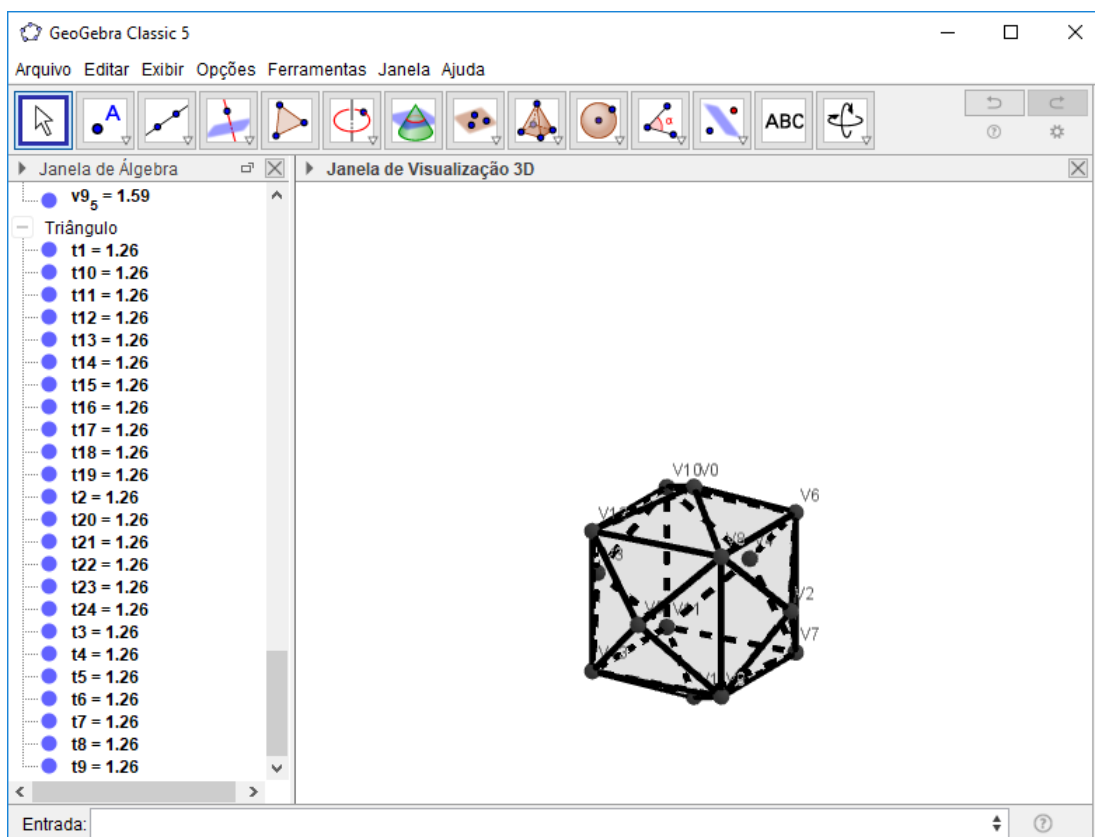


Figura 7.14: Tela do GeoGebra após a inserção das faces

Como o hexaedro tetrakis é obtido pela acumulação de uma pirâmide sobre cada uma das faces de um cubo, podemos afastar essas pirâmides para mostrar a decomposição do hexaedro tetrakis em seis pirâmides congruentes e um cubo.

Para isso, determinamos inicialmente o centro do hexaedro tetrakis. Utilizamos o segundo ícone na opção "Ponto Médio ou Centro" e selecionamos dois vértices de duas pirâmides de bases paralelas. Depois, selecionamos a opção Exibir > Janela de Visualização ou Ctrl+Shift+1 e criamos um controle deslizante por meio do décimo ícone. O valor mínimo desse controle será 0 e o valor máximo será 15. Esse controle será o raio da esfera com centro no centro do hexaedro tetrakis.

Para criar essa esfera, utilizamos o décimo ícone da Janela de Visualização 3D na opção "Esfera dados Centro e Raio". Selecionamos o ponto definido como centro e uma tela surgirá solicitando a medida do raio. Nela, devemos digitar o nome do controle deslizante e confirmar. Teremos então a tela como na Figura 7.15.

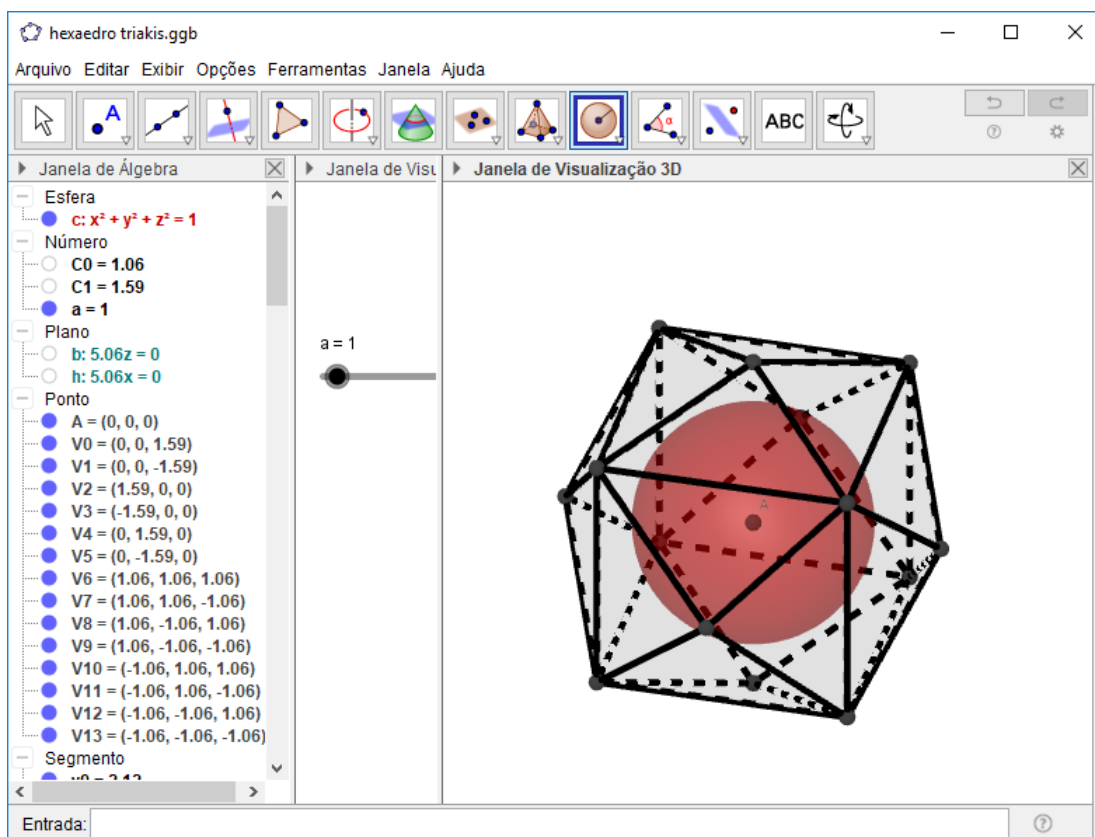


Figura 7.15: Tela do GeoGebra após a construção da esfera

Ao mover o controle deslizante, ilustrado na coluna central da Figura 7.15, percebemos que o raio da esfera aumenta ou diminui de acordo com o valor do controle. Em seguida, por meio do oitavo ícone, definimos dois planos que passam pelo centro do hexaedro tetrakis e pelos dois vértices das pirâmides selecionados anteriormente, e aumentamos o raio da esfera por meio do controle deslizante. Depois, utilizamos o sétimo ícone para determinar a intersecção da esfera com cada um dos planos. como ilustra a Figura 7.16.

Na sequência, ocultamos os planos e a esfera da tela e construímos, por meio do terceiro ícone, retas que unem os vértices das pirâmides de bases paralelas. Depois, com o segundo ícone, definimos a intersecção dessas retas com as circunferências determinadas pela intersecção da esfera com os planos - Figura 7.16. Após isso, construímos vetores cuja origem é o centro do hexaedro tetrakis e cujas extremidades são os pontos das intersecção das retas com as circunferências, como ilustra a Figura 7.17.

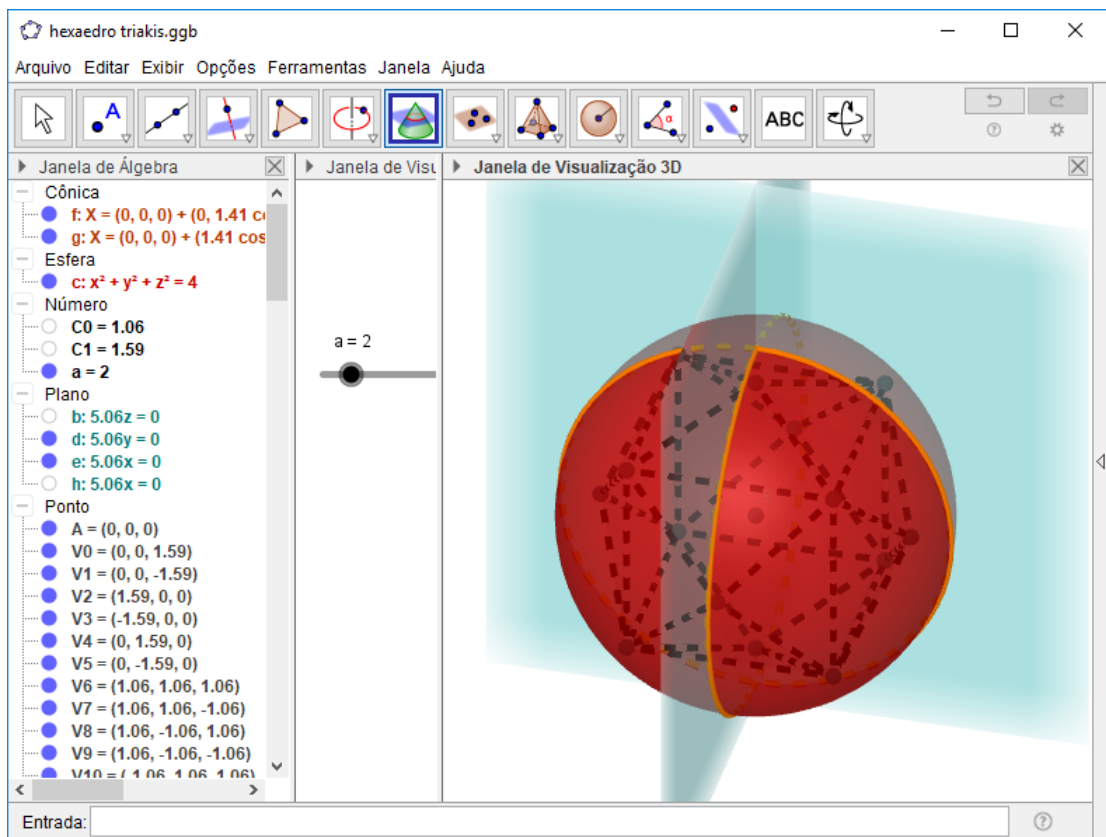


Figura 7.16: Tela do GeoGebra após a intersecção das superfícies

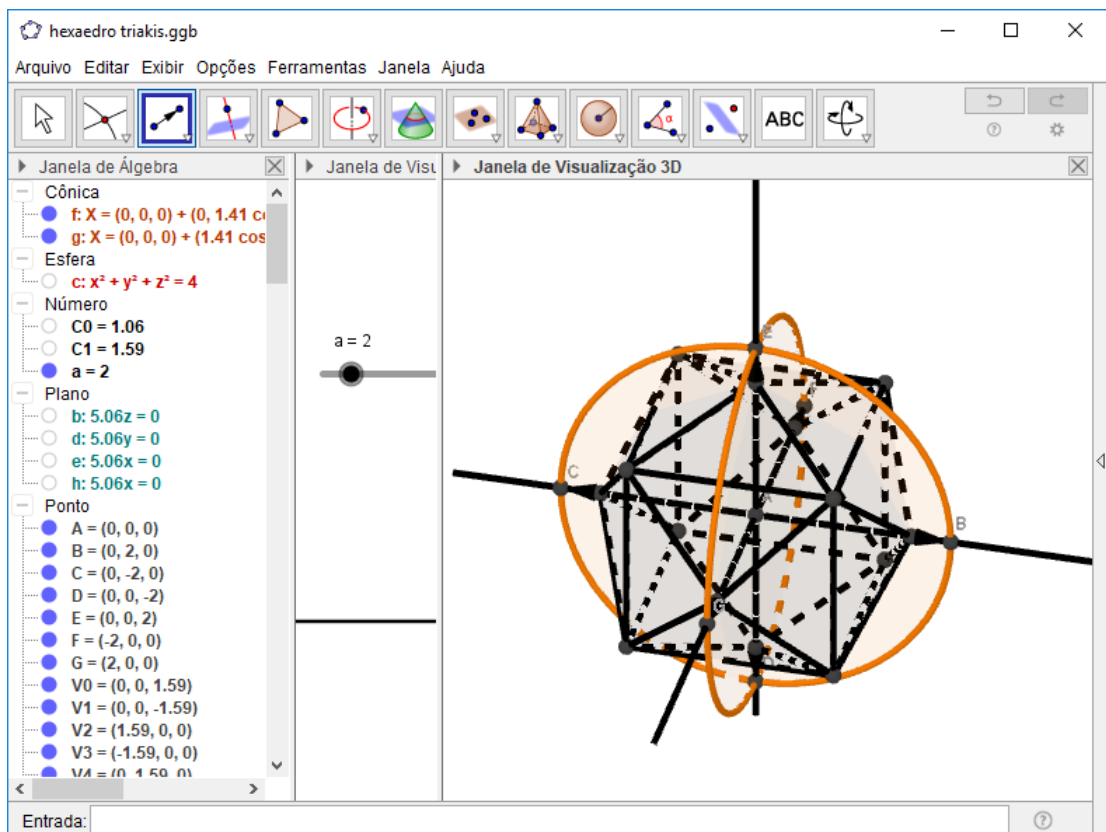


Figura 7.17: Tela do GeoGebra após a construção dos vetores

Em seguida, ocultamos as retas e as circunferências e construímos as pirâmides por meio do nono ícone na opção "Pirâmide". Depois utilizamos o comando `Transladar()` na janela de Entrada. Nele, digitamos o nome da pirâmide e do vetor, separados por vírgula, dentro dos parênteses. Caso persistam dúvidas sobre qual pirâmide transladar por cada vetor, usamos a Janela de Álgebra e selecionamos cada pirâmide e cada vetor e eles aparecerão na Janela de Visualização com uma cor diferente, até que sejam encontrados os vetores correspondentes a cada pirâmide.

Logo após, ocultamos as pirâmides cujo nome não possui o símbolo ' (como m') clicando na bolinha azul ao lado do nome da pirâmide, na Janela de Álgebra. Teremos assim a tela como na Figura 7.18.

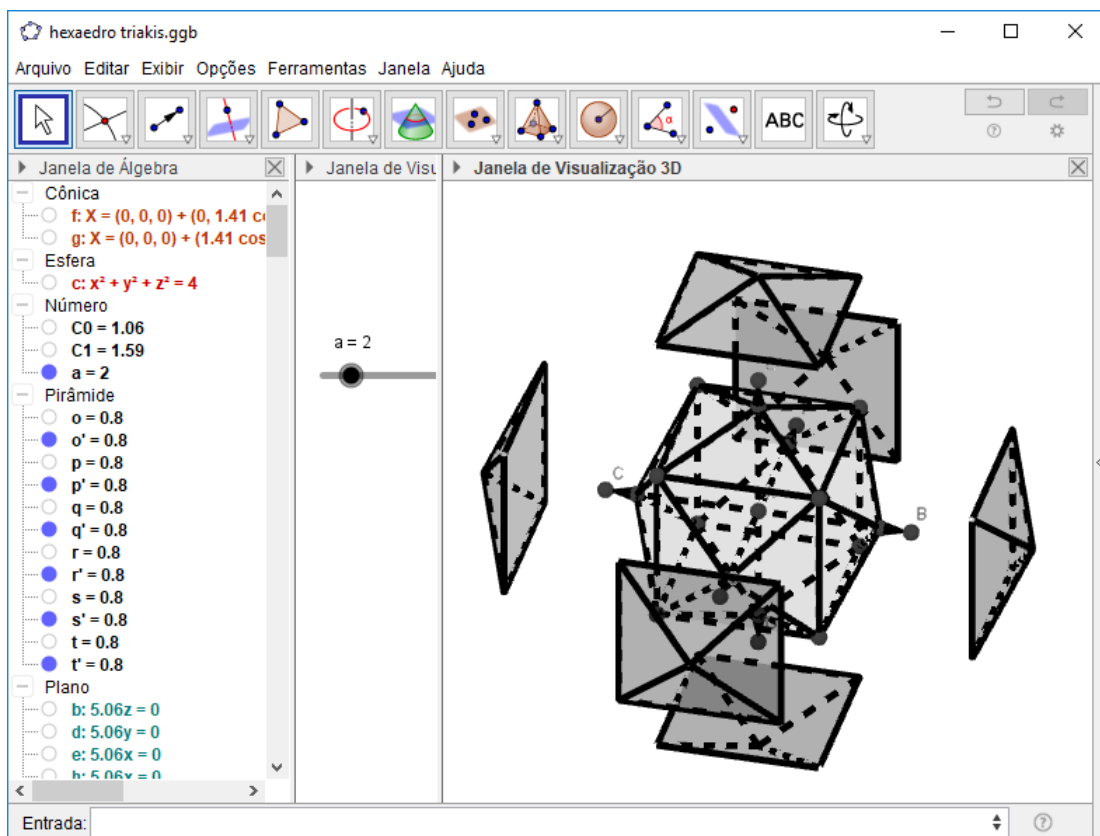


Figura 7.18: Tela do GeoGebra após a translação das pirâmides

Por fim, definimos o cubo central por meio do nono ícone na opção "Prisma". Depois, ocultamos os vetores, os segmentos e os triângulos. Caso as pirâmides não apareçam, clicamos, na Janela de Álgebra, nas bolinhas azuis das pirâmides cujo nome possuem um '. Caso o cubo não apareça, devemos fazer o mesmo. Teremos então o hexaedro tetrakis decomposto como na Figura 7.19. Podemos mover o controle deslizante para obter o poliedro original, quando o seu valor for 0, ou sua decomposição.

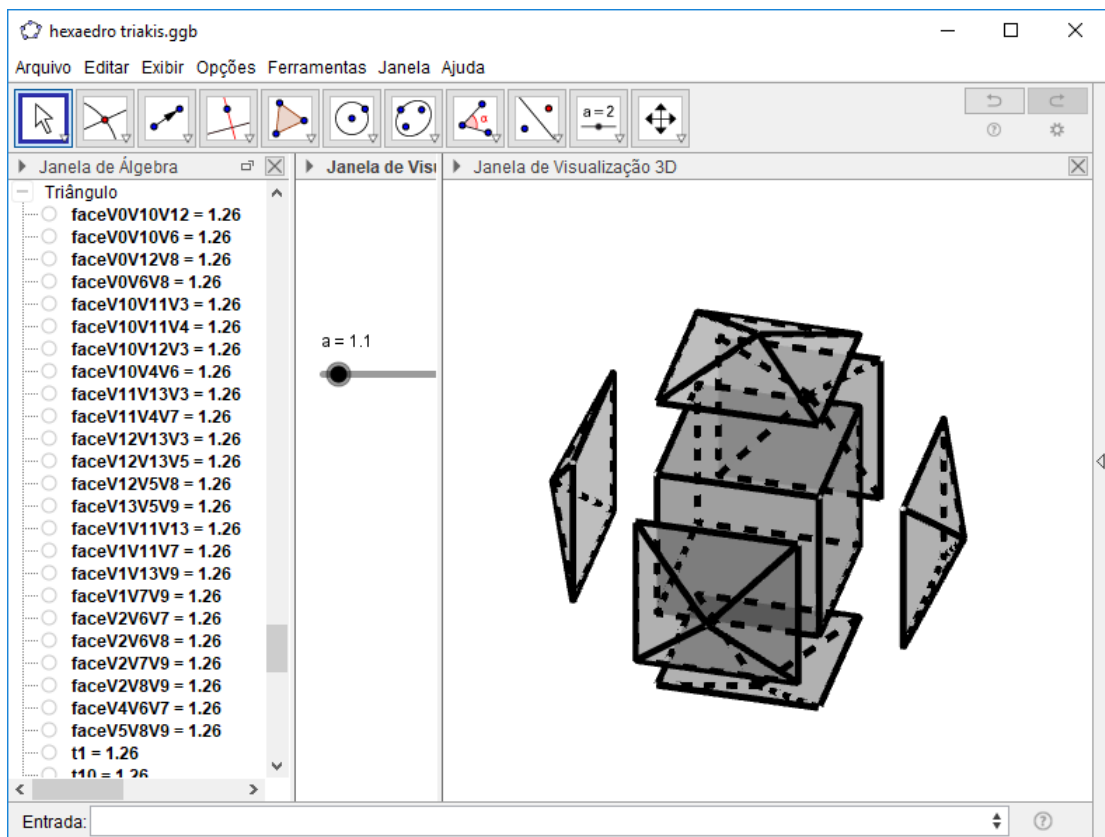


Figura 7.19: Tela do GeoGebra após as ocultações

O hexaedro tetrakis possui arestas curtas e arestas longas. Por meio de (MCCOOEY, 2015), podemos obter o valor de cada aresta e generalizá-lo, como fizemos no Capítulo 5. Logo, teremos um cubo de aresta a , onde a é a maior aresta do hexaedro tetrakis, e seis pirâmides de base quadrada de arestas laterais de medida x , onde x é a menor aresta do hexaedro tetrakis.

7.2.3 ICOSAEDRO TRIDIMINUÍDO (J63)

Definimos dois pontos arbitrários A e B. Depois, na janela de Entrada, digitamos Icosaedro(A, B) e pressionamos a tecla Enter. O icosaedro regular será construído como na Figura 7.20.

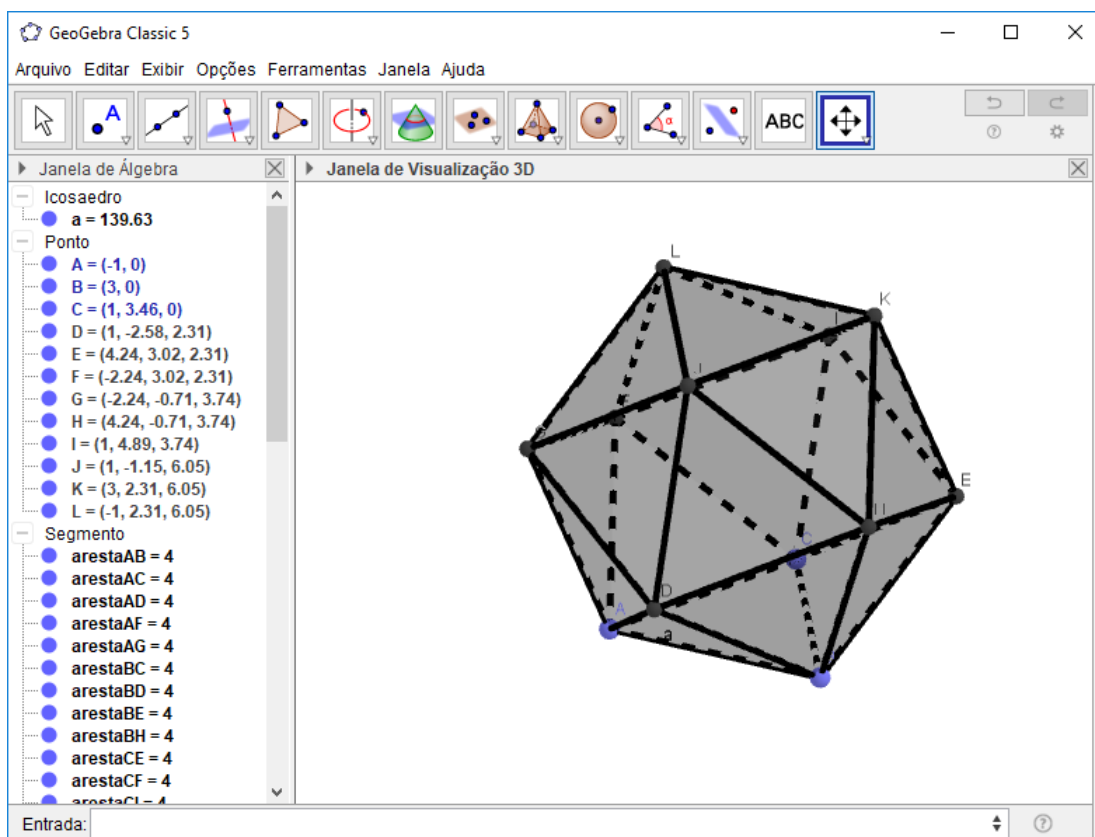


Figura 7.20: Tela do GeoGebra após a construção do icosaedro regular

Selecionando os vértices da maior diagonal do icosaedro regular, definimos, por meio do segundo ícone, o ponto médio dessa diagonal, obtendo o centro do icosaedro regular. Selecionamos então a opção Exibir > Janela de Visualização ou $\text{Ctrl}+\text{Shift}+1$ e criamos um controle deslizante por meio do décimo ícone. O valor mínimo desse controle será 0 e o valor máximo será 15. Esse controle será o raio da esfera com centro no centro do icosaedro regular.

O icosaedro tridiminuído é o icosaedro regular do qual são removidas três pirâmides de base pentagonal. Determinamos os vértices dessas três pirâmides e traçamos três retas com o terceiro ícone, na opção "Reta". Cada reta deve passar por um dos três vértices e pelo centro do icosaedro regular. Depois, determinamos a intersecção da esfera com cada reta por meio do segundo ícone, na opção "Intersecção de Dois Objetos", para obtermos os pontos que serão as extremidades dos vetores, como ilustra a Figura 7.21.

Construímos então os vetores por meio do segundo ícone na opção "Vetor". Antes, aumentamos o raio da esfera por meio do controle deslizante para não selecionar os pontos do icosaedro regular ao invés dos pontos das intersecções. Caso isso aconteça, o controle deslizante não unirá os poliedros para formar o icosaedro regular. Logo após, ocultamos as retas e a esfera e obtemos o icosaedro como na Figura 7.22.

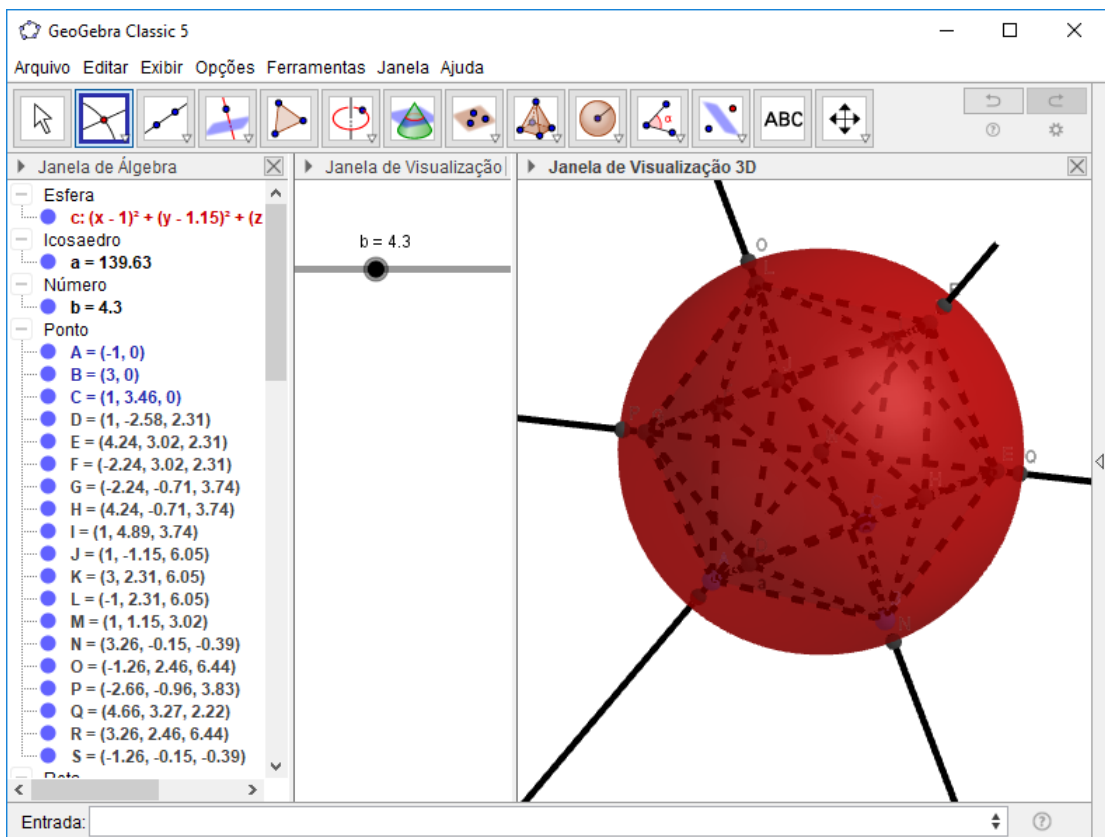


Figura 7.21: Tela do GeoGebra após construção da esfera e das retas

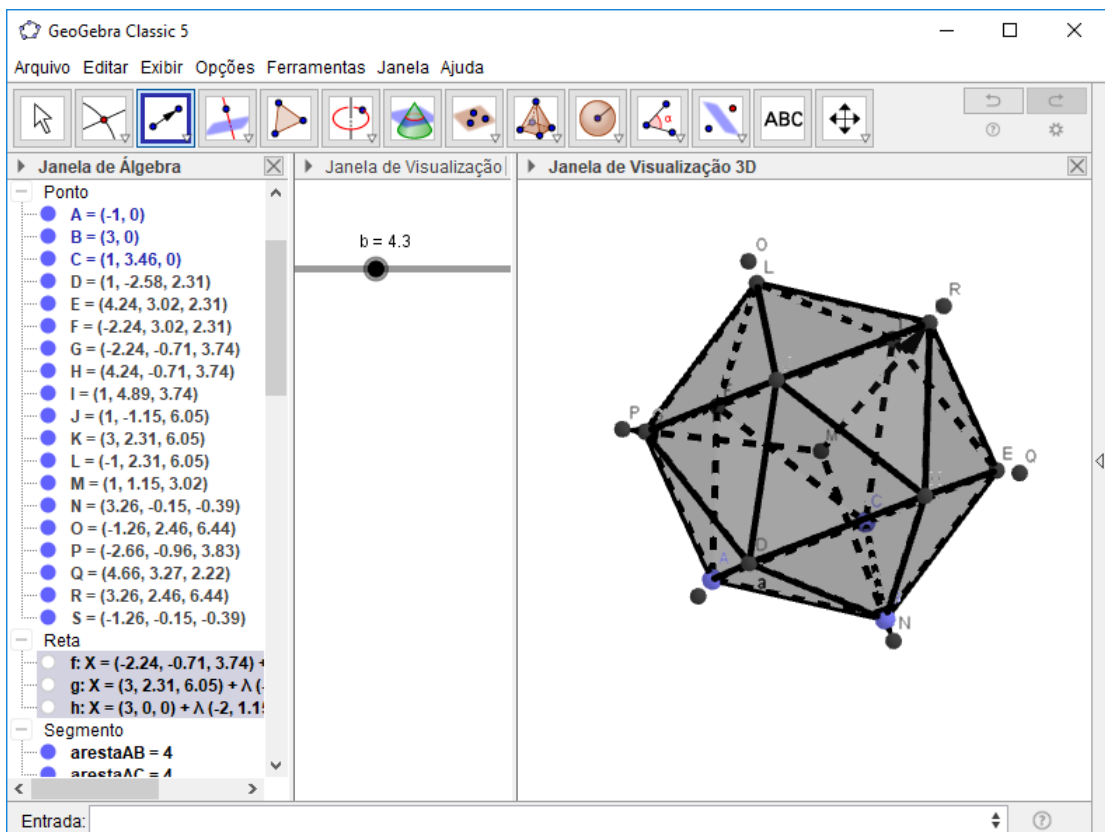


Figura 7.22: Tela do GeoGebra após a construção dos vetores

Definimos então as pirâmides que serão removidas por meio do nono ícone, na opção "Pirâmide". Teremos a tela como na Figura 7.23.

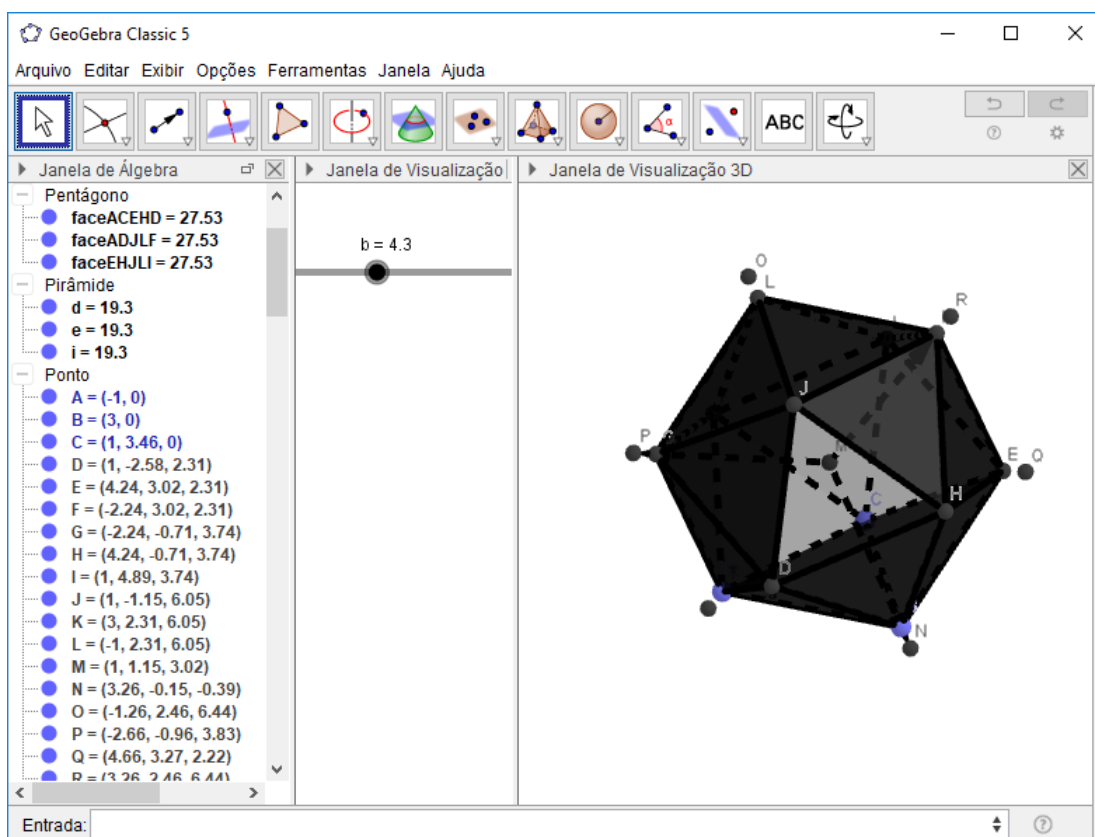


Figura 7.23: Tela do GeoGebra após a definição das pirâmides a serem removidas

Utilizamos agora o comando `Transladar()` na janela de Entrada. Nele, digitamos o nome da pirâmide e do vetor, separados por vírgula, dentro dos parênteses. Assim, obtemos as translações como na Figura 7.24.

Por fim, ocultamos as pirâmides cujos nomes não possuem '. Depois, ocultamos os vértices das pirâmides que transladamos, pois os mesmos fazem parte do icosaedro e não das pirâmides, assim como os triângulos que eram faces do icosaedro.

Devemos ter cuidado ao selecionar os segmentos e polígonos, pois o software considera o que está mais próximo. Caso seja necessário, utilizamos o zoom e/ou rotacionamos a tela. Obtemos assim o icosaedro tridiminuído e as três pirâmides, como na Figura 7.25.

Como o icosaedro regular tem todas as arestas de mesma medida, as arestas das pirâmides removidas também têm essa medida. Dessa forma, podemos calcular o volume do icosaedro tridiminuído multiplicando o volume da pirâmide removida por três e diminuindo esse volume do volume do icosaedro regular, determinado no Capítulo 3.

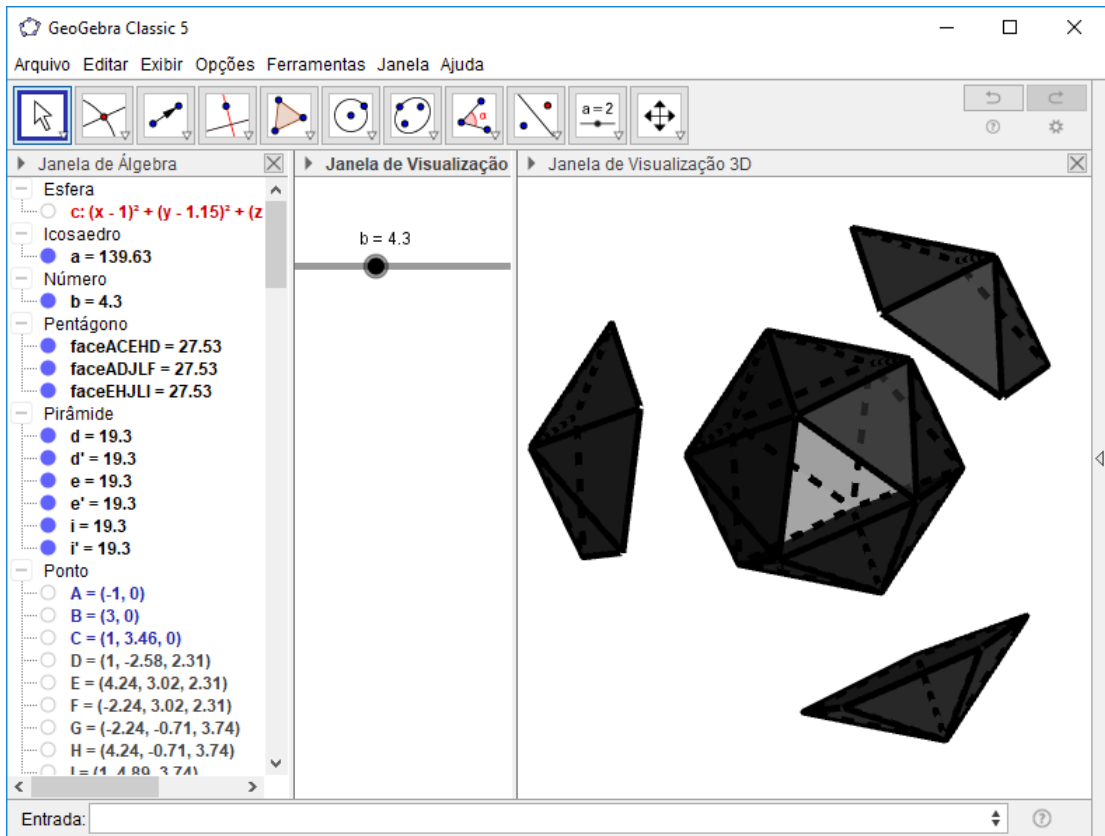


Figura 7.24: Tela do GeoGebra após a translação

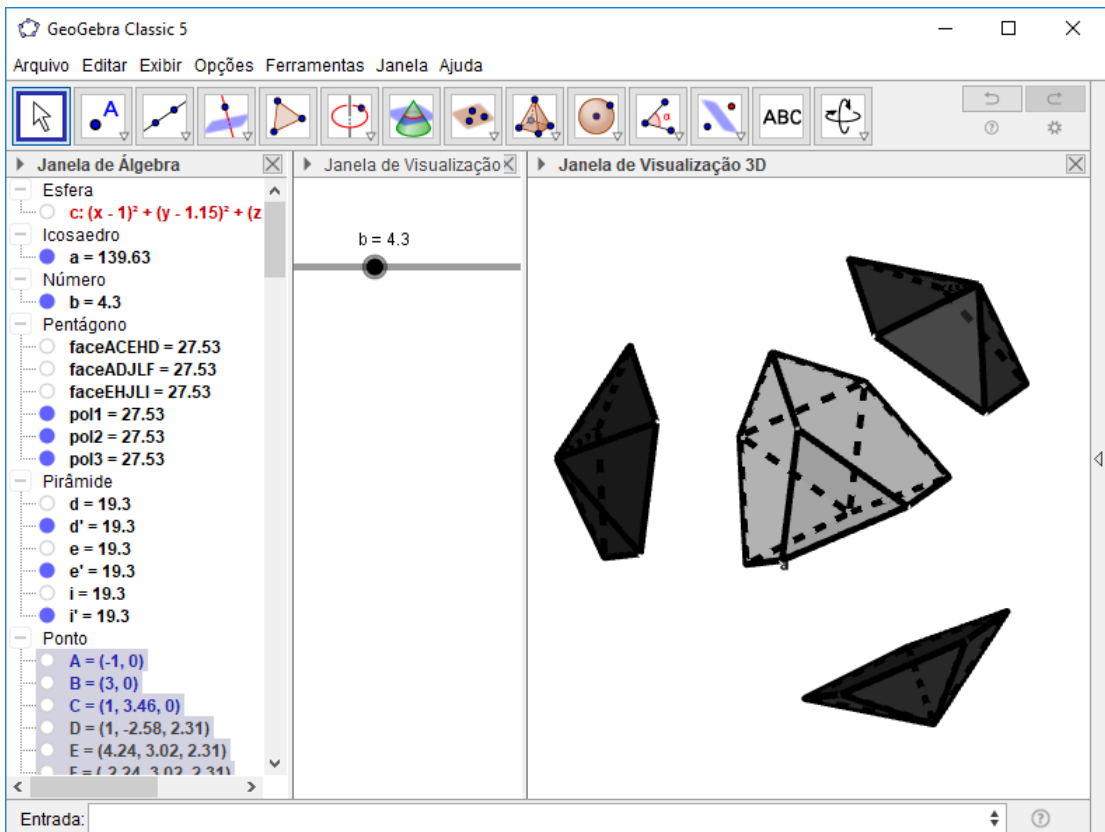


Figura 7.25: Tela do GeoGebra após as ocultações

8 CONCLUSÕES

Apresentamos neste trabalho duas estratégias para calcular o volume de poliedros convexos: a decomposição do poliedro em poliedros de volume conhecido; a eliminação de poliedros de volume conhecido de um poliedro de volume também conhecido. Aplicamos as estratégias para calcular o volume de alguns poliedros de cada uma das seguintes classes: poliedros Platônicos, poliedros Arquimedianos, poliedros de Catalan e poliedros de Johnson. Utilizamos o software GeoGebra 3D para a construção dos poliedros e também para as composições/decomposições. No Capítulo 2, as imagens de algumas operações sobre poliedros também foram construídas com o GeoGebra 3D, uma vez que não encontramos tais imagens na literatura.

Ao construir a maior parte das figuras deste trabalho no GeoGebra 3D, motivamo-nos a propor atividades para explorar o aplicativo na composição/decomposição de poliedros com o objetivo de estabelecer estratégias para o cálculo do volume. Essas atividades são propostas no capítulo final e foram pensadas para o Curso de Licenciatura em Matemática, podendo ser adaptadas para o Ensino Médio.

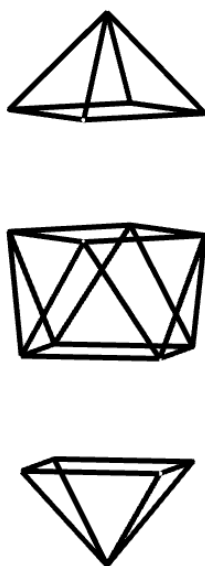


Figura 8.1: Bipirâmide quadrada giroalongada (J17): decomposição em duas pirâmides quadrangulares e um antiprisma

terminar a medida da altura.

As principais dificuldades enfrentadas na elaboração deste trabalho foram a escassa bibliografia em Língua Portuguesa, a obtenção das coordenadas dos vértices e das faces de alguns poliedros, uma vez que o *Visual Polyhedra* não forneceu essas coordenadas para todos os poliedros pesquisados, e o cálculo da altura de pirâmides em algumas decomposições, como a do poliedro de Johnson J17, a bipirâmide quadrada giroalongada. A decomposição desse poliedro, ilustrada na Figura 8.1, gera duas pirâmides quadrangulares e um antiprisma. Em todas as tentativas de decompor o antiprisma, deparamo-nos com pirâmides sem dados suficientes para de-

Esperamos que este trabalho seja útil aos estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática, principalmente na disciplina de geometria espacial, e também aos professores de matemática da Educação Básica. Como sugestão de continuidade, propomos o cálculo do volume dos poliedros de Kepler-Poinsot e dos antiprismas, poliedros que não são abordados no Ensino Médio e nos cursos de Licenciatura em Matemática.

REFERÊNCIAS

- AURÉLIO, D. do. **Dicionário de Português**. 2016. Disponível em: <<https://dicionariodoaurelio.com/>>. Acesso em: 13 de maio de 2017.
- BALDOR, A. **Vector: adenovirus**. 2016. Disponível em: <<http://www.anthonymbaldor.com/vector-adenovirus/>>. Acesso em: 17 de maio de 2017.
- BAPTISTA, M. M. **O primeiro livro escrito e impresso no Brasil**. 2011. Disponível em: <<https://bibliotecaucs.wordpress.com/2011/05/02/o-primeiro-livro-escrito-e-impresso-no-brasil/>>. Acesso em: 27 de maio de 2017.
- BATALHA, E.; BENTO, S. **Arquimedes e a coroa**. 2007. Disponível em: <<http://www.invivo.fiocruz.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?infoid=946&sid=7>>. Acesso em: 23 de junho de 2017.
- BATISTA, S.; BARCELOS, G. **TIC no processo de ensino e aprendizagem de matemática**. 2017. Disponível em: <<http://www.es.ifp.edu.br/poliedros/>>. Acesso em: 20 de março de 2017.
- BIANCHI, O. **Preparação e caracterização de nanocompósitos de poliestireno e poliedros oligoméricos silsesquioxanos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Ciência dos Materiais, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10183/35101>>. Acesso em: 27 de abril de 2017.
- BONADIO, A. **Favo de mel**. 2017. Disponível em: <<http://www.apiariosbonadio.com.br/favo-de-mel/>>. Acesso em: 30 de maio de 2017.
- BUSKE, N. **Uma contribuição para o ensino de geometria utilizando origami e caleidoscópio**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Rio Claro, 2007. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91082/buske_n_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 26 de dezembro de 2017.
- COXETER, H. S. M. **Regular polytopes**. New York: Dover, 1973.
- CURIOSO, S. **15 lugares famosos mostrados ao lado de seus verdadeiros arredores**. 2017. Disponível em: <<http://seucurioso.com.br/15-lugares-famosos-mostrados-ao-lado-de-seus-verdadeiros-arredores/>>. Acesso em: 30 de maio de 2017.
- DATABASE, M. 2000. Disponível em: <<https://www.mindat.org/>>. Acesso em: 30 de abril de 2017.
- DESIGN, A. A. **Top 10 places you must see in town of love - Paris, France**. 2013. Disponível em: <<http://www.architectureartdesigns.com/top-10-places-you-must-see-in-town-of-love-paris-france/>>. Acesso em: 4 de maio de 2017.

DIAS, D. L. **Cloreto de sódio**. 2017. Disponível em: <http://escolakids.uol.com.br/cloreto-de-sodio.htm>. Acesso em: 24 de abril de 2017.

DIAS, M. **Revisão de química: substâncias moleculares, vamos lembrar?** 2017. Disponível em: <https://blogdoenem.com.br/quimica-substancias-moleculares/>. Acesso em: 24 de abril de 2017.

DOLCE, O.; POMPEU, J. N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial**. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

DOLVEN, J. K.; SKJERPEN, H. **Radiolaria database**. 2000. Disponível em: <http://www.radiolaria.org/index.htm>. Acesso em: 21 de maio de 2017.

FERNANDES, F. M. **Polígonos e poliedros equidecomponíveis**. Dissertação (Mestrado) — UTFPR, Câmpus Curitiba, 2018.

GEOGEBRA. **GeoGebra 3D graphing calculator**. 2018a. Disponível em: <https://www.geogebra.org/3d?lang=pt-BR>. Acesso em: 18 de maio de 2018.

GEOGEBRA. **Download GeoGebra apps**. 2018b. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download>. Acesso em: 18 de maio de 2018.

GEOTECNIA, N. de. **Geologia: Capítulo 3 - Minerais**. 2009. Disponível em: <http://www.ufjf.br/nugeo/files/2009/11/Geologia-Cap3.pdf>. Acesso em: 8 de maio de 2017.

IAVE, B. de I. **Cubo truncado**. 2017. Disponível em: <http://bi.iave.pt/bi/es/880/2842>. Acesso em: 01 de agosto de 2017.

JOSÉ, N. M.; PRADO, L. A. S. de A. Materiais híbridos orgânicos-inorgânicos: preparação e algumas aplicações. **Química Nova**, v. 28, n. 2, p. 281–288, 2005. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/qn/v28n2/23651.pdf>. Acesso em: 28 de abril de 2017.

KANSO, M. A. **Fulerenos - Da promessa à realidade**. 2012. Disponível em: <http://hypescience.com/fulerenos-da-promessa-a-realidade/>. Acesso em: 17 de maio de 2017.

KOCHHANN, K. G. D. Radiolários: estado do conhecimento e aplicações às geociências. **Terrae Didática**, v. 7, n. 1, p. 18–28, 2011. Disponível em: https://www.ige.unicamp.br/terraedidatica/v7_1/pdf-v7_1/TD_7-1_2_kochhan.pdf. Acesso em: 21 de maio de 2017.

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 1991. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMEIRA, L. **Slide para aula de geometria**. 2014. Disponível em: https://pt.slideshare.net/luka_ka/slide-para-aula-de-geometria. Acesso em: 30 de julho de 2017.

LOCCI, V. **Minicurso: utilização do software winggeom no ensino fundamental, médio e superior: apostila para o ERMAC**. 2011. Disponível em: <http://www.fc.unesp.br/valocci/UtilizandoWinggeom.pdf>. Acesso em: 21 de julho de 2017.

- LOPES, T. I. D. **Trabalho 4: os sólidos geométricos**. 2012. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/mat0717/public_html/Cadeiras/2Semestre/trabalho%204%20CasadasCiencias_TANIALOPES.pdf>. Acesso em: 01 de agosto de 2017.
- MACHADO, F. B. **Silicatos**. 2017. Disponível em: <<http://www.rc.unesp.br/museudpm/banco/silicatos/silicatos.html>>. Acesso em: 28 de abril de 2017.
- MCCOOEY, D. I. **Visual polyhedra**. 2015. Disponível em: <<http://dmccooey.com/polyhedra/>>. Acesso em: 29 de novembro de 2017.
- MICHENER, J. A. **Herpes simplex virus pictures**. 2013. Disponível em: <<http://bryanmbrandenburg.com/herpes-simplex-virus-3d-animation/>>. Acesso em: 21 de maio de 2017.
- MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT, v. 9).
- NEVES, P. C. P. **Introdução à mineralogia prática**. 2. ed. Canoas: Editora da ULBRA, 2008.
- NÓS, R. L.; SAITO, O. H.; SANTOS, M. A. dos. Geometria, radicais duplos e a raiz quadrada de números complexos. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 11, n. 2, p. 48–64, 2017. Disponível em: <<http://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v11a03-geometria-radicaais-duplos-e-a-raiz.pdf>>. Acesso em: 27 de fevereiro de 2018.
- OBJETIVO. **Módulo 52 - Produtos notáveis: cubo da soma e da diferença de dois termos**. 2017. Disponível em: <<http://conteudoonline.objetivo.br/Conteudo/Index/2299?token=5%2F2Yd2%2Bzzv%2F29umTApxi0Q%3D%3D>>. Acesso em: 27 de maio de 2017.
- OLIVEIRA, C. O. **Carbono**. 2017. Disponível em: <<http://quimicafv.blogspot.com.br/2012/02/carbono.html>>. Acesso em: 26 de abril de 2017.
- PALAVRA, O. da. **Parâmetros geométricos**. 2017. Disponível em: <<http://origemdapalavra.com.br/site/artigo/parametros-geometricos/>>. Acesso em: 27 de maio de 2017.
- REIS, V. M. S. dos. **Herpes simples: sintomas, tratamentos e causas**. 2012. Disponível em: <<http://www.minhavidacom.br/saude/temas/herpes-simples>>. Acesso em: 21 de maio de 2017.
- RESEARCH, W. **Wolfram MathWorld: the web's most expensive mathematics resource**. 2018. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/>>. Acesso em: 08 de abril de 2018.
- SANTOS, M. da C. A. dos. **Poliedros duais**. 1999. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm21/duais.htm>>. Acesso em: 01 de agosto de 2017.
- SCHOOL, A. V. **Poliedros GEO10**. 2017. Disponível em: <<http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/10483/open/file/geo1001.htm>>. Acesso em: 30 de julho de 2017.
- SIMOES, D. G.; BUENO, J. C. **Relação de Euler**. 2008. Disponível em: <<http://matematicos.no.comunidades.net/relacao-de-euler>>. Acesso em: 01 de agosto de 2017.

SOPHIA, M. **Herpes-Zoster**. 2014. Disponível em: <<http://www.artecor.com.br/blog/herpes-zoster/>>. Acesso em: 21 de maio de 2017.

TARINGA. **Como medir el volumen de un solido en una probeta: parte 1**. 2012. Disponível em: <<http://www.taringa.net/posts/ciencia-educacion/11031631/Como-medir-el-volumen-de-un-solido-en-una-probeta-PARTE-1.html>>. Acesso em: 29 de maio de 2017.

UFC. **Jardins de silicatos**. 2017. Disponível em: <<http://www.seara.ufc.br/sugestoes/quimica/quimica027.htm>>. Acesso em: 28 de abril de 2017.