

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

MARIANA MEYER

**APLICAÇÃO DO TEOREMA DO PONTO FIXO NA ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA
DE SEQUÊNCIAS**

CURITIBA

2018

MARIANA MEYER

**APLICAÇÃO DO TEOREMA DO PONTO FIXO NA ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA
DE SEQUÊNCIAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao
Curso de Licenciatura em Matemática da Univer-
sidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba
como requisito parcial para obtenção do grau de Li-
cenciado em Matemática.

Orientador(a): Denise de Siqueira

Coorientador(a): Nara Bobko

CURITIBA

2018

TERMO DE APROVAÇÃO

“APLICAÇÃO DO TEOREMA DO PONTO FIXO NA ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS”

por

“**MARIANA MEYER**”

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 11 horas do dia 17 de maio de 2018 na sala A202 como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba. A aluna foi arguida pela Banca de Avaliação de Defesa abaixo assinados. Após deliberação, de acordo com o parágrafo 1º do art. 37 do Regulamento Específico do Trabalho de Conclusão de Curso para o Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR do Câmpus Curitiba, a Banca de Avaliação considerou o trabalho APROVADO.

<hr/> <p>Profa. Dra. Denise de Siqueira (Presidente - UTFPR/Curitiba)</p>	<hr/> <p>Prof. Dr. Mateus Bernardes (Avaliador 1 – UTFPR/Curitiba)</p>
<hr/> <p>Prof. Dr. Andres David Baez Sanches (Avaliador 2 – UTFPR/Curitiba)</p>	<hr/> <p>Profa. Ms. Violeta Maria Estephan (Professora Responsável pelo TCC – UTFPR/Curitiba)</p>
<hr/> <p>Profa. Dra. Neusa Nogas Tocha (Coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática – UTFPR/Curitiba)</p>	

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.”

Porque Dele, por Ele e para Ele são todas as coisas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, porque até aqui me ajudou o Senhor.

À minha mãe, por toda dedicação, apoio, carinho e por ser meu porto seguro.

Ao meu noivo, por toda paciência, carinho e palavras de encorajamento.

À minha vó, pelas orações incessantes.

Às minhas irmãs, Marina e Vanessa, pelo constante apoio e encorajamento.

Agradeço aos meus colegas de curso, pelas ajudas prestadas, conversas e risadas.

Às minhas orientadoras, por toda paciência, dedicação, correções e incentivo, mulheres que se tornaram exemplo para mim.

Aos professores do curso de Licenciatura em Matemática que exercem a docência com dedicação.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigada.

RESUMO

MEYER, Mariana. **Aplicação do Teorema do Ponto Fixo na Análise de Convergência de Sequências**. 47 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

Sequências numéricas representam uma parte muito importante de estudo na Matemática, sendo estudadas desde o ensino fundamental até níveis avançados de pesquisas. Uma importante aplicação de sequências pode ser encontrada em modelos biológicos de crescimento populacional, em que é possível fazer previsões do tamanho de uma população a partir de uma população inicial. Neste contexto, existem diversas formas para analisar sua convergência. Quando a sequência está definida em forma de recorrência, ou seja, um termo depende de seus antecessores ($x_{n+1} = f(x_n)$), esta análise pode não ser tão simples. Estratégias, como por exemplo, encontrar o termo geral de uma recorrência ser ineficientes. Neste sentido, o Teorema do Ponto fixo pode ser uma alternativa para que esta análise seja bem sucedida, além de dar condições para, em caso de convergência, caracterizar o comportamento do ponto limite. Sendo assim, este trabalho busca aplicar a teoria de ponto fixo no contexto de convergência de sequência definidas em forma de recorrência, e aplicá-la no estudo de alguns modelos de dinâmica populacional.

Palavras-chave: Convergência de sequências, sequência recorrentes, Teorema do Ponto Fixo.

ABSTRACT

MEYER, Mariana. **Application of the Fixed-Point Theorem in the Analysis of Sequence Convergence**. 47f. Contraining of Course-Licenciatura in Mathematics, Federal Technological University of Paraná. Curitiba, 2018.

Numerical sequences represent a very important part of study in Mathematics, being studied from elementary school to advanced levels of research. An important application of sequences can be found in biological models of population growth, where it is possible to predict the size of a population from an initial population. In this context, there are several ways to analyze its convergence. When the sequence is defined as recurrence, that is, a term depends on its predecessors ($x_{n+1} = f(x_n)$), this analysis may not be as simple. Strategies such as finding the general term of a recurrence are inefficient. In this sense, the Fixed Point Theorem can be an alternative for this analysis to be successful, besides giving conditions for, in case of convergence, to characterize the behavior of the limit point. Thus, this work seeks to apply the fixed-point theory in the context of convergence of defined sequences in the form of recurrence, and to apply it in the study of some models of population dynamics.

Keywords: Convergence of sequences, recurrent sequence, Fixed-Point Theorem.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Sequência $x_n = 2 + n$	13
Figura 2 – Sequência $x_n = 2 - n$	14
Figura 3 – Sequência $x_n = \frac{1}{n}$	14
Figura 4 – Sequência $x_n = (-1)^n \cdot n^2$	15
Figura 5 – Sequência $x_n = n^2$	16
Figura 6 – Sequência $x_n = \frac{n-1}{5^n+1}$	17
Figura 7 – Sequência $x_n = \frac{1}{n!}$	18
Figura 8 – Sequência $x_n = n + \frac{1}{n}$	20
Figura 9 – Sequência $x_n = \sin(n)$	20
Figura 10 – Sequência $x_n = \frac{\sin n}{n}$	21
Figura 11 – Sequência $x_n = 2^n$	22
Figura 12 – Sequência $x_n = (-2)^n$	22
Figura 13 – Sequência $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$	23
Figura 14 – Sequência $x_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n$ com $b = \frac{1}{3}$	24
Figura 15 – Sequência de Fibonacci $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$	26
Figura 16 – Espiral de Fibonacci	26
Figura 17 – Ponto fixo de $f(x) = -x$	35
Figura 18 – Ponto fixo de $f(x) = x^2$	36
Figura 19 – Pontos fixos de $f(x) = x + \sin(x)$	36
Figura 20 – $f(x) = x$ e $g(x) = x + 5$	37
Figura 21 – $f(x) = 2x(1-x)$ e $g(x) = x$	38
Figura 22 – $f(x) = \cos(x)$	42
Figura 23 – Cobweb da recorrência $x_{n+1} = 2x_n(1-x_n)$	44
Figura 24 – Pontos fixos de $f(x) = \frac{3x-x^3}{2}$	46
Figura 25 – $x_{n+1} = \frac{3x_n-x_n^3}{2}$	47
Figura 26 – $f(x) = \frac{3x-x^3}{2}$, $x_1 = 0, 2$	47
Figura 27 – $f(x) = \frac{3x-x^3}{2}$, $x_1 = -0, 35$	48
Figura 28 – $f(x) = \frac{3x-x^3}{2}$, $x_1 = -1, 82$	48
Figura 29 – $f(x) = \frac{3x-x^3}{2}$, $x_1 = 2, 14$	49
Figura 30 – $f(x) = \frac{3x-x^3}{2}$, $x_1 = 2, 16$	49
Figura 31 – $f(x) = \frac{3x-x^3}{2}$, $x_1 = \sqrt{5}$	49

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	11
1	PRELIMINARES	13
1.1	Definições	13
1.2	Convergência de sequência	18
1.3	Recorrência	25
2	UM ESTUDO SOBRE PONTO FIXO	35
2.1	Conceitos gerais	35
2.2	Contrações	38
2.3	Estabilidade de ponto fixo	43
3	SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS	55
3.1	Modelo Logístico	55
3.2	Curva de Beverton-Holt	61
3.3	Curva de Ricker	65
	CONCLUSÃO	69
	REFERÊNCIAS	71

INTRODUÇÃO

O presente trabalho busca apresentar uma teoria alternativa para o estudo de sequências recursivas.

As recorrências modelam alguns fenômenos naturais e também sistemas de dinâmica populacional, tornando necessário o seu estudo. Elas também podem ser alvos de brincadeiras matemáticas para crianças, que ao pegarem uma calculadora repetem a mesma operação constantemente.

Apesar das recorrências serem abordadas em disciplinas da graduação em Matemática, busca-se neste trabalho aprofundar este assunto e encontrar outras teorias que permitam o estudo de sua convergência. Assim, encontramos na teoria do ponto fixo e no Teorema do ponto fixo um atalho para esta análise.

Desta forma o trabalho estrutura-se da seguinte maneira: no Capítulo 1 revisamos alguns resultados de sequências numéricas e convergência, bem como as definições de recorrência e algumas maneiras de encontrar o seu termo geral para calcular sua convergência; no Capítulo 2 realizamos um estudo sobre ponto fixo e contrações para utilizarmos o Teorema do Ponto Fixo e, em seguida, estudamos as classificações de um ponto fixo de acordo com a sua estabilidade; no Capítulo 3 utilizamos a teoria vista na investigação de sistemas de dinâmica populacional, sendo estudado três modelos: Logístico, Beverton-Holt e Ricker.

1 PRELIMINARES

Ao longo deste capítulo são apresentados resultados básicos a respeito de seqüências, convergência de seqüência e equações de diferenças. Os resultados aqui apresentados foram baseados em (LIMA, 2013a), (RUDIN, 1971), (STEWART, 2011), (LIMA, 2013b) e (LIMA et al., 2006).

1.1 DEFINIÇÕES

Definição 1.1. *Uma seqüência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida no conjunto dos números naturais e tomando valores no conjunto dos números reais. O valor $x(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, será representado por x_n e chamado de termo de ordem n ou termo geral da seqüência. Os termos da seqüência são a imagem da função $x(n)$, ou seja,*

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto x(n) = x_n$$

Existem diferentes formas de denotar uma seqüência de números reais, como por exemplo, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, (x_n) e $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Ao longo deste texto denotaremos por $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

A seguir são apresentados alguns exemplos de seqüência bem como suas representações gráficas.

Exemplo 1.2. *Considere a seqüência dada por $x_n = 2 + n$. Neste caso seus termos são $\{3, 4, 5, \dots\}$ e sua representação gráfica esta na Figura 1.*

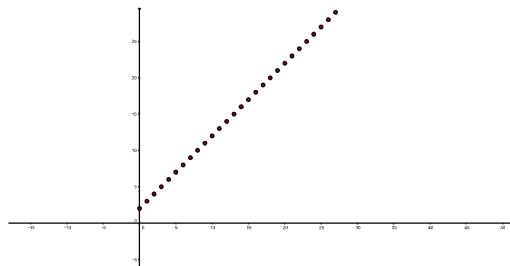


Figura 1 – Seqüência $x_n = 2 + n$

Exemplo 1.3. Considere $x_n = 2 - n$, os termos desta sequência são $\{1, 0, -1, -2, \dots\}$, estão representados na Figura 2.

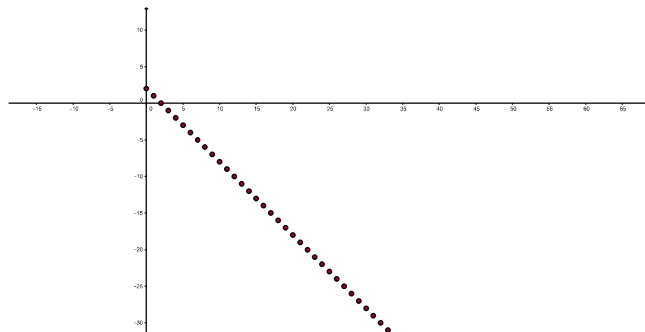


Figura 2 – Sequência $x_n = 2 - n$

Observe que no Exemplo 1.2 todos os termos da sequência são maiores que 2, neste caso dizemos que a sequência está **limitada inferiormente** por 2, já no Exemplo 1.3 todos os termos da sequência são menores que 2, neste caso dizemos que a sequência é **limitada superiormente** por 2. Este tipo de comportamento é definido a seguir.

Definição 1.4. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é denominada de limitada

- (i) inferiormente, se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq a$.
- (ii) superiormente, se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq b$

Caso a sequência seja limitada superiormente e inferiormente diremos apenas que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Exemplo 1.5. Considere a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n = \frac{1}{n}$. Os termos desta sequência são dados por $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ e estão representados na Figura 3.

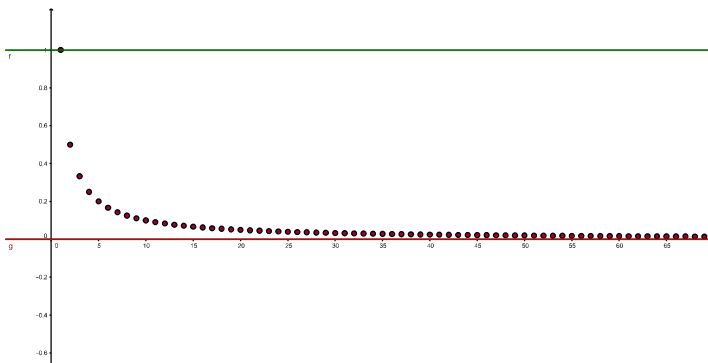


Figura 3 – Sequência $x_n = \frac{1}{n}$

Observe que neste caso todos os termos da sequência estão limitados entre 0 e 1, isto é, $0 < x_n \leq 1$ e portanto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada.

Podem existir ainda sequências que não são limitadas nem superiormente e nem inferiormente como o apresentado a seguir.

Exemplo 1.6. Considere a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em que $x_n = (-1)^n \cdot n^2$. Seus termos são dados por $\{-1, 4, 9, -16, 25, \dots\}$ e estão representados na Figura 4.

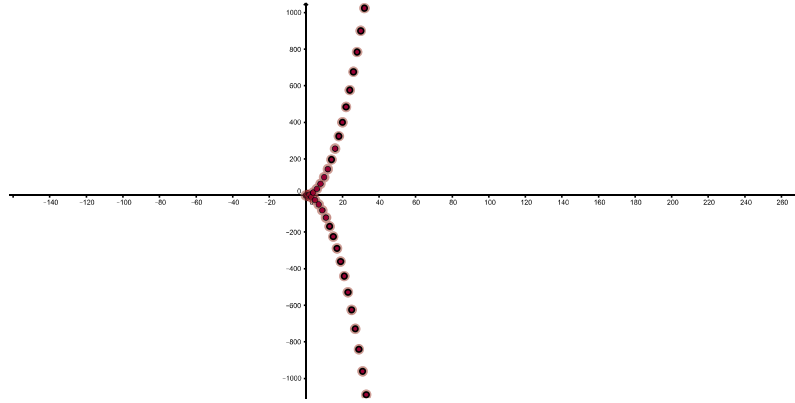


Figura 4 – Sequência $x_n = (-1)^n \cdot n^2$

Observe que, a medida que n cresce assumindo valores pares seus termos crescem arbitrariamente e a medida que n cresce assumindo valores ímpares seus termos decrescem. Neste caso a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não é nem crescente e nem decrescente.

Proposição 1.7. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada se, e somente se, $(|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada, assim temos que $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \leq x_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Note que $(|x_n|)$ é sempre limitada inferiormente, pois

$$|x_n| \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Defina $c = \max\{|a|, b\}$. Temos dois casos a considerar:

Caso 1: Se $x_n \geq 0$ para algum n , então por (1.1)

$$|x_n| = x_n \leq b \leq c \quad (1.3)$$

Caso 2: Se $x_n \leq 0$ para algum n , então por (1.1) $a \leq x_n \leq 0$, assim

$$|x_n| = -x_n \leq -a = |a| \leq c. \quad (1.4)$$

Portanto de (1.3) e (1.4) segue que $0 \leq |x_n| \leq c$.

(\Leftarrow) Seja $(|x_n|)$ limitada, isto é, existe um $b \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq |x_n| \leq b$, assim temos que $|x_n| \leq b$, logo $-b \leq x_n \leq b$, e isto significa que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

□

Definição 1.8. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é denominada de monótona

i) *crescente (estritamente)*, se $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n < x_{n+1}$), para todo $n \in \mathbb{N}$

ii) *decrecente (estritamente)*, se $x_n \geq x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$), para todo $n \in \mathbb{N}$

Afim de verificar a monotonicidade de uma sequência, algumas estratégias podem ser adotadas, tais como:

- Diferença:** Mostrar que $x_n - x_{n+1} \leq 0$, caso crescente (ou $x_n - x_{n+1} \geq 0$, caso decrescente).
- Razão:** Em alguns casos podemos usar a razão para facilitar os cálculos e mostrarmos que $\frac{x_n}{x_{n+1}} \leq 1$, caso crescente (ou $\frac{x_n}{x_{n+1}} \geq 1$, caso decrescente).
- Indução:** Mostrar através da indução sobre n .
- Derivada:** E, por fim, podemos associar a sequência a uma função contínua e derivar. Isto é, seja $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em \mathbb{R} tal que $a_n = f(n)$, $\forall n$. Assim
 - se $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [1, +\infty[$, então (x_n) é crescente;
 - se $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in [1, +\infty[$ então a sequência (x_n) é decrescente.

Os exemplos a seguir ilustram as diferentes formas de verificar a monotonicidade de uma sequência.

Exemplo 1.9. Seja $x_n = n^2$, cujos termos são $\{1, 4, 9, \dots\}$

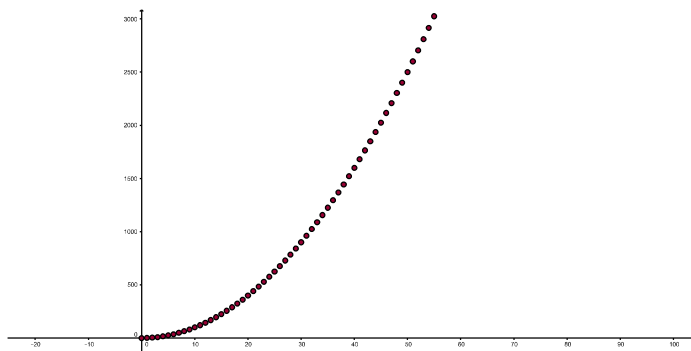


Figura 5 – Sequência $x_n = n^2$

Observando o comportamento dos primeiros termos da sequência, temos que a sequência parece ser estritamente crescente. De fato, note que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned}
 x_n = n^2 &< n^2 + 1 \\
 &< n^2 + 2n + 1 \\
 &< (n + 1)^2 = x_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 1.10. Seja $x_n = \frac{1}{n}$. Observando os primeiros termos temos que $x_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. A sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é estritamente decrescente. De fato,

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{n} &> 1 \\
 \frac{n+1}{n} &> 1 \\
 (n+1) &> n \\
 \frac{1}{n} &> \frac{1}{n+1},
 \end{aligned}$$

ou seja, $x_n > x_{n+1}$.

Exemplo 1.11. Seja $x_n = \frac{n-1}{n+1}$. Seus termos são $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \dots\}$.

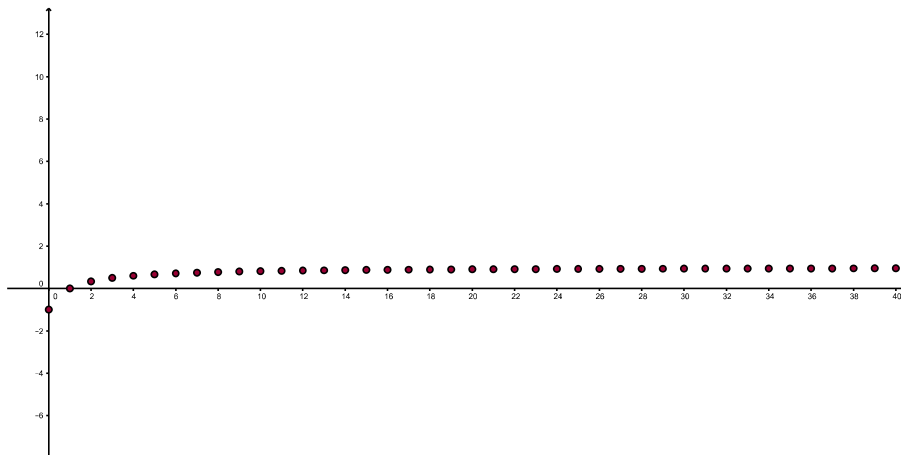


Figura 6 – Sequência $x_n = \frac{n-1}{n+1}$

Neste caso iremos utilizar a estratégia do item (d).

Seja $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ e $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Derivando f obtemos que $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$, ou seja, $f'(x) > 0, \forall x \in [1, +\infty[$. Assim temos que x_n é crescente.

Exemplo 1.12. Seja $x_n = \frac{5^n}{n!}$. Observando os termos desta sequência temos

$$\begin{aligned}x_1 &= 5 \\x_2 &= 12,5 \\x_3 &= 20,83 \\x_4 &= 26,4 \\x_5 &= 26,4 \\x_6 &= 21,7 \\x_7 &= 15,5\end{aligned}$$

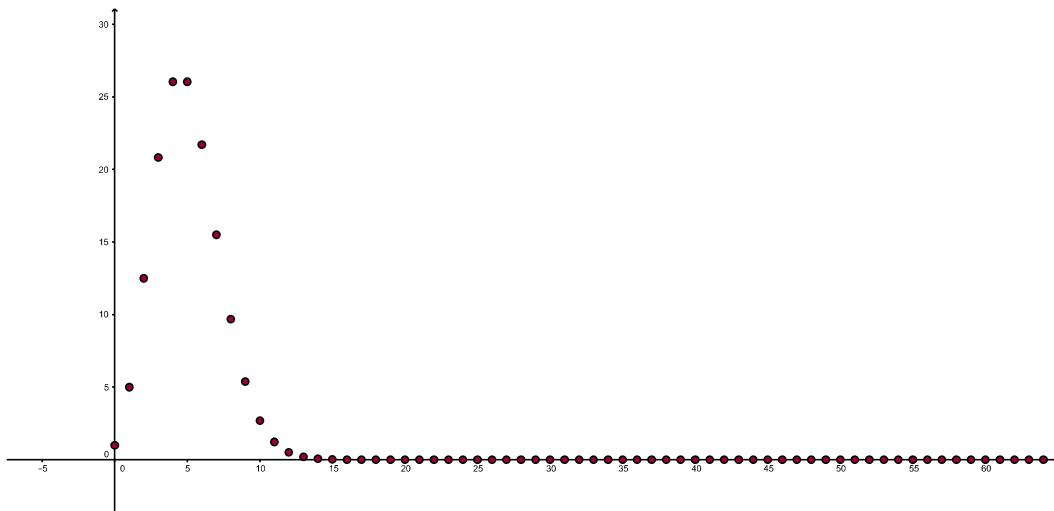


Figura 7 – Sequência $x_n = \frac{5^n}{n!}$

Apenas observando os 7 primeiros termos dessa sequência vemos que até $n = 5$ a sequência se comporta de forma crescente, no entanto, a partir de $n = 6$ a sequência se comporta de forma decrescente. Neste caso, de acordo com a Definição 1.8, a sequência não é considerada uma sequência monótona.

A próxima sessão tem por objetivo estudar o comportamento das sequências a medida que n torna-se suficientemente grande.

1.2 CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIA

Definição 1.13. Dada uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$, se para cada número real $\varepsilon > 0$, existe um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$. Neste caso dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é **convergente**, caso contrário é **divergente**.

Exemplo 1.14. Mostremos que a sequência dada no Exemplo 1.5 é convergente. De fato, dado um $\varepsilon > 0$, tomando $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ temos que $\forall n > n_0, n > \frac{1}{\varepsilon}$, logo $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$, ou seja, $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$ e assim $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$, o que conclui o resultado.

Teorema 1.15. Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração. Seja $\lim x_n = L$. Então, escolhendo $\varepsilon > 0$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0, x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Portanto a partir de n_0 a sequência é limitada. Agora consideremos o conjunto finito $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, L + \varepsilon\}$ e defina $c = \min\{A\}$ e $d = \max\{A\}$. Neste caso tem-se que $\forall n, c \leq x_n \leq d$, ou seja, (x_n) é convergente. \square

Observe que este Teorema apresenta uma forma de verificar se uma sequência é limitada. Para isso basta verificar se ela é convergente, no entanto a recíproca é falsa, ou seja, nem toda sequência limitada é convergente, para ver isso basta tomar a a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cujos termos são $\{0, 1, 0, 1, \dots\}$. Esta sequência é limitada no entanto não é convergente.

Teorema 1.16. Toda sequência monótona limitada é convergente.

Demonstração. Seja $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$ uma sequência monótona crescente e limitada. Tome $a = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, logo tem-se que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, como $a - \varepsilon < a$, segue que $a - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto dos x_n , uma vez que a é a menor das cotas superiores. Logo existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0}$. Como a sequência é monótona crescente tem-se que para todo $n > n_0, x_{n_0} \leq x_n$ e portanto, $a - \varepsilon < x_n$. Por outro lado, $x_n \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo para todo $n > n_0$ tem-se que $a - \varepsilon < x_n \leq a < a + \varepsilon$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ como queríamos demonstrar.

O caso em que a sequência é monótona decrescente é análogo, para isso basta tomar $b = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, e tem-se $\lim x_n = b$ \square

A seguir são apresentados alguns exemplos que ilustram os Teoremas 1.15 e 1.16.

Exemplo 1.17. Considere a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em que $x_n = n + \frac{1}{n}$, cujos termos estão ilustrados na Figura 8. Observe que esta é uma sequência monótona crescente, pois

$$\begin{aligned} n &> \frac{1}{n} \\ n + 2 &> \frac{1}{n} + 1 \\ n + 2 &> \frac{n + 1}{n} \\ \frac{n + 2}{n + 1} &> \frac{1}{n} \\ 1 + \frac{1}{n + 1} &> \frac{1}{n} \\ (n + 1) + \frac{1}{n + 1} &> n + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

ou seja, $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Porém não é limitada, pois dado $\varepsilon > 0$ não existe n_0 a partir do qual $|n + \frac{1}{n}| < \varepsilon$. Logo pelo Teorema 1.15 a sequência não converge.

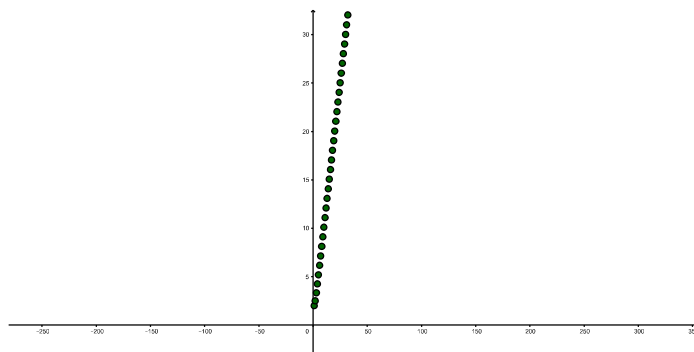


Figura 8 – Sequência $x_n = n + \frac{1}{n}$

Exemplo 1.18. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência cujos termos são $x_n = \sin n$. Como $|\sin(n)| \leq 1, \forall n$, segue que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada. Porém não é monótona, pois não é crescente e nem decrescente, portanto não é convergente.

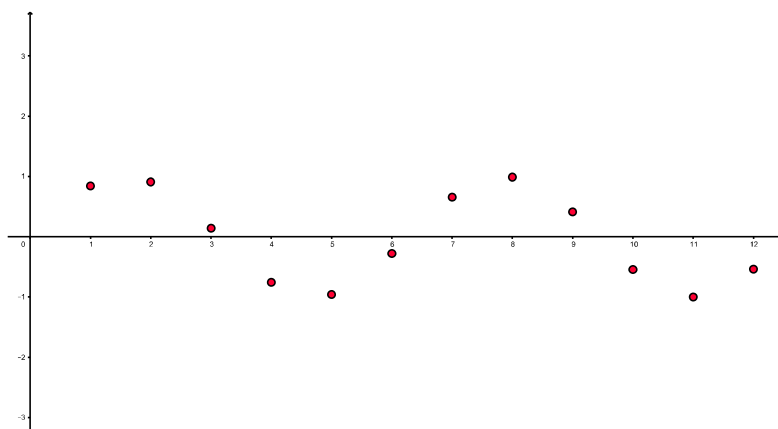


Figura 9 – Sequência $x_n = \sin(n)$

Vale observar que, a recíproca do Teorema 1.16 não é verdadeira, ou seja, nem toda sequência convergente será monótona e limitada, como ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 1.19. Considere a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em que $x_n = \frac{\sin n}{n}$. Neste caso tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, ou seja, é uma sequência convergente. No entanto, apesar de ser uma sequência limitada, pois $\frac{1}{n}$ e $\sin n$ são limitadas, não é uma sequência monótona. Assim podemos observar que o Teorema 1.16 garante uma condição suficiente mas não necessária para a convergência.

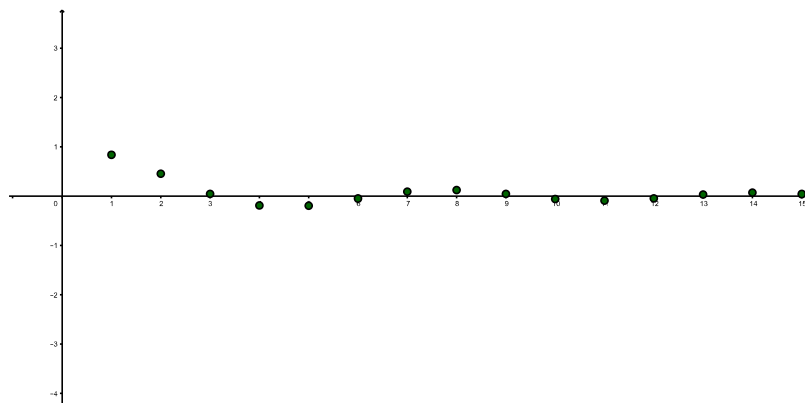


Figura 10 – Sequência $x_n = \frac{\sin n}{n}$

Exemplo 1.20. Considere a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $x_n = a^n$ para diferentes valores de a . Neste caso temos que:

- (a) Para $a = 0$ ou $a = 1$ a sequência é constante, logo é convergente.
- (b) Para $a = -1$, então os seus termos são $a_n = \{-1, +1, -1, +1, \dots\}$ e portanto divergente.
- (c) Para $a > 1$ a sequência é monótona crescente, pois a medida que n aumenta, o termo anterior, que é inteiro positivo, é multiplicado por a que também é um termo inteiro positivo resultando em termos cada vez maiores, isto é,

$$a^n < a^n \cdot a = a^{n+1}$$

assemelhando-se com uma progressão geométrica de razão positiva, sendo ilimitada. De fato, dado $c \in \mathbb{R}$ tal que para algum n temos que $a^n < c$, como $a > 1$ logo, $a^n < c < c \cdot a < a^n \cdot a = a^{n+1}$, isto é, $c < a^{n+1}$, portanto a sequência é ilimitada. Pelo Teorema 1.16, a sequência é divergente. A Figura 11 ilustra o caso em que $a = 2 > 1$.

- (d) Para $a < -1$, os termos dessa sequência variam entre valores positivos e negativos, pois quando n é par a_n admite um valor positivo, e quando n é ímpar a_n é negativo, assim temos uma sequência que não é monótona e também é ilimitada, pelos mesmos motivos do item anterior, então diverge pelo Teorema 1.16. A Figura 12 ilustra essa situação, em que $a = -2 < -1$

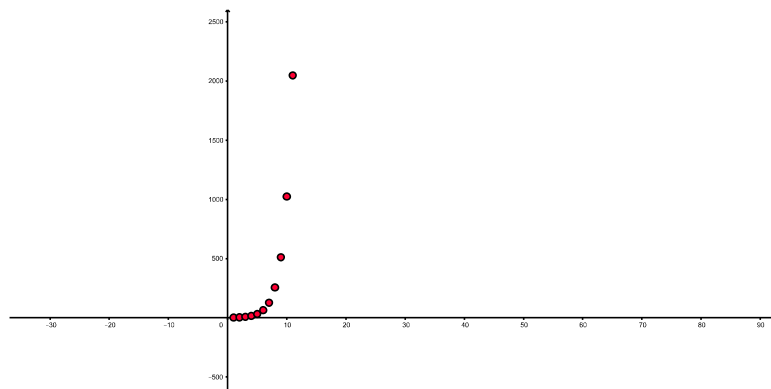


Figura 11 – Sequência $x_n = 2^n$

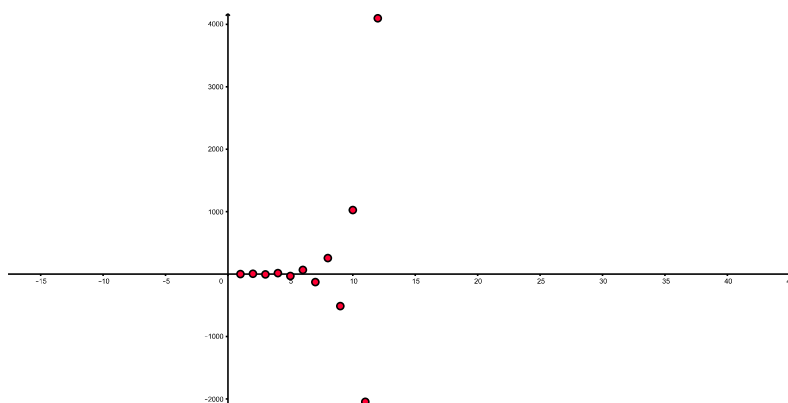


Figura 12 – Sequência $x_n = (-2)^n$

(e) quando $0 < a < 1$ a sequência é limitada pois, $0 < a^n \leq 1, \forall n$. Também é monótona decrescente pois, como $a \leq 1$ então $\left(\frac{1}{a}\right) \geq 1$, logo,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{a}\right) > \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

e portanto $a^{n+1} < a^n$. Logo, pelo Teorema 1.16, converge.

Afirmamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. De fato, como $\frac{1}{a} > 1$, temos que $\frac{1}{a^n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}$, e portanto $\left(\frac{1}{a^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ forma uma sequência crescente ilimitada. Assim, dado $\varepsilon > 0$ tome n_0 tal que $\left(\frac{1}{a}\right)^{n_0} < \frac{1}{\varepsilon}$. Logo, $\forall n > n_0$ temos que $\frac{1}{a^{n_0}} < \frac{1}{a^n}$, pois $0 < a < 1$, consequente-

mente $\frac{1}{a^n} > \frac{1}{\varepsilon}$. Então, $a^n < \varepsilon$. Assim, para $n > n_0$ implica que $|a^n - 0| < \varepsilon$, portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.

A Figura (13) ilustra a sequência no caso em que $a = \frac{1}{2}$.

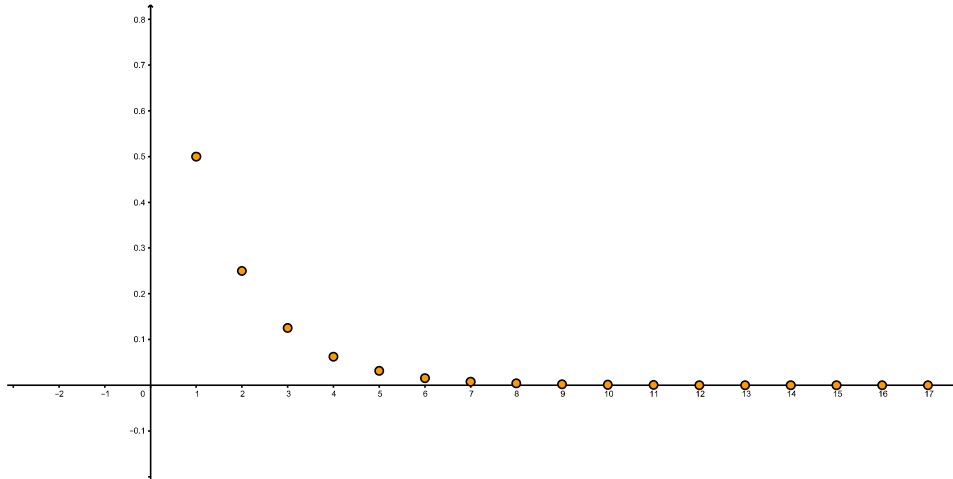


Figura 13 – Sequência $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(f) Quando $-1 < a < 0$ temos que $0 < |a| < 1$ e pela Proposição 1.7 sabemos que a sequência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada usando o item (e). No entanto não é monótona, pois seus termos variam em termos positivos e negativos. Porém a sequência é convergente. De fato, se obtermos duas subsequências tais que:

(i) Se n é par, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sequência apresentada em (e), e portanto convergente, com $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(ii) Se n é ímpar, ou seja, $n = 2k + 1$ então $a^{2n+1} = a^{2n} a < a^{2n} a^3 = a^{2n+3}$. Logo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona crescente e limitada e portanto convergente. Além disso, temos que converge para zero, de acordo com o item (e).

Exemplo 1.21. Seja $0 < b < 1$, e defina a sequência cujo n -ésimo termo é $x_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n$. Observe que

a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente pois como $x_n > 0$ para todo n , segue que

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + b + b^2 + \dots + b^n + b^{n+1} \\ &\geq 1 + b + b^2 + \dots + b^n \\ &= x_n \end{aligned}$$

b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. De fato, como cada termo x_n é soma de uma progressão geométrica dos $n + 1$ primeiros termos, tem-se que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b} \\ &< \frac{1}{1 - b}. \end{aligned}$$

Logo pelo Teorema 1.15 a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente e além disso, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{1 - b}$.

De fato, note inicialmente que $\left| x_n - \frac{1}{1 - b} \right| = \frac{b^{n+1}}{1 - b}$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$ e escolhendo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$, $b^{n+1} < \varepsilon(1 - b)$, tem-se que $\frac{b^{n+1}}{1 - b} < \varepsilon$, ou seja, $\left| x_n - \frac{1}{1 - b} \right| < \varepsilon$ e portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{1 - b}$.

A Figura (14) ilustra uma sequência do tipo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para quando $b = \frac{1}{3}$. Neste caso $x_n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

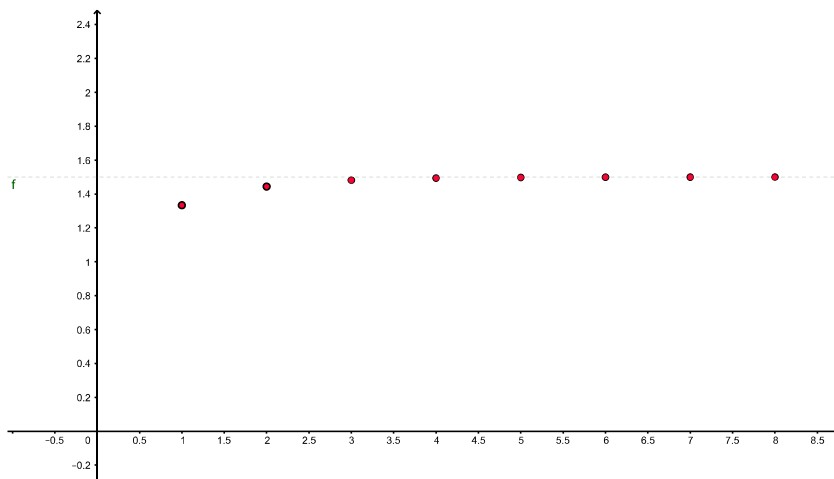


Figura 14 – Sequência $x_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n$ com $b = \frac{1}{3}$.

Na próxima seção trataremos de sequências definidas recursivamente que é o ponto chave para este trabalho.

1.3 RECORRÊNCIA

Uma relação de recorrência é uma regra em que cada termo é definido por seus antecessores, sendo assim podemos estabelecer uma relação de recorrência com sendo uma função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que,

$$x_{n+1} = f(n, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \quad (1.5)$$

em que as características de f definem o tipo de recorrência, como veremos mais adiante.

Muitas vezes a equação (1.5) é chamada de **equação de diferenças** por envolver diferenças entre os termos desta equação.

Com isso em mãos é possível definir uma sequência por recorrência, estabelecendo o seu primeiro termo (ou **condição inicial**), ou seja, uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ esta na forma de recorrência se puder ser escrita como:

$$\begin{cases} x_n = f(n, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}) \\ x_1 = a \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Observe que, uma relação de recorrência por si só não define uma sequência, para isso é necessário o conhecimento de seu primeiro termo. Além disso uma mesma recorrência pode definir diferentes sequências, bastando para isso alterar o termo x_1 .

Exemplo 1.22. *Considere a sequência definida por*

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2 \\ x_1 = 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Neste caso os termos da sequência são $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$. Tomando $x_1 = 2$ a mesma recorrência daria origem à sequência cujos termos são $\{4, 6, 8, \dots\}$.

Observe que o exemplo anterior descreve uma progressão aritmética (PA) de razão $r = 2$ e primeiro termo $x_1 = 1$. Em geral uma progressão aritmética é uma sequência escrita recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n + r, \quad (1.8)$$

em que a razão é r e o primeiro termo é x_1 .

Agora se considerarmos $x_{n+1} = 2 \cdot x_n$ obtemos uma progressão geométrica (PG) de razão $r = 2$ e primeiro termo $x_1 = 1$.

Em geral as progressões geométricas de razão r podem ser definidas recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n \cdot r. \quad (1.9)$$

Exemplo 1.23. Outro exemplo bem conhecido é a sequência de Fibonacci (F_n) em que cada termo é a soma dos dois termos anteriores, isto é,

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \end{cases} \quad (1.10)$$

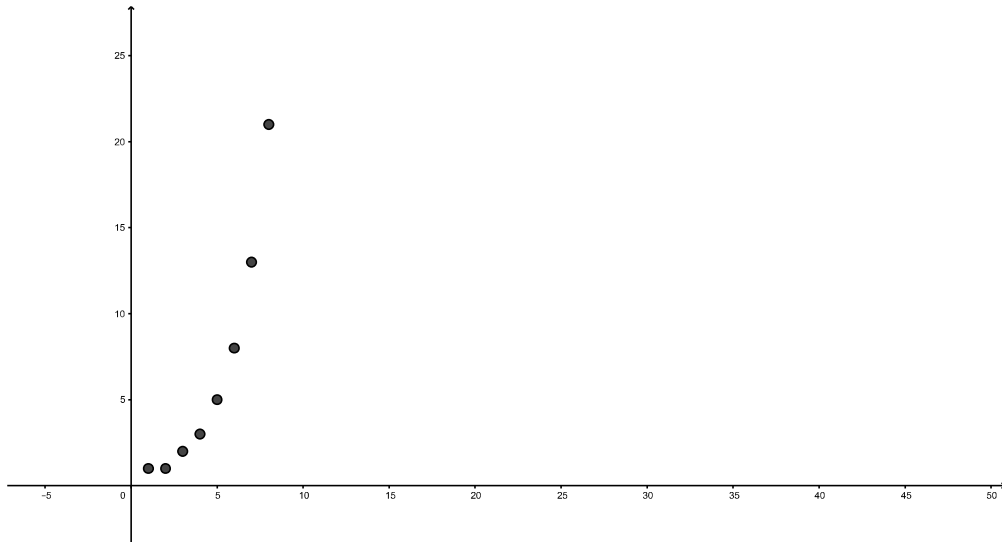


Figura 15 – Sequência de Fibonacci $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Esta recorrência é bem conhecida por possuir inúmeras curiosidades relacionadas a ela. Essa sequência surgiu com um problema proposto em 1202 por Leonardo de Pisa (1175–1250) um matemático italiano conhecido como Fibonacci que buscou descrever o crescimento de uma população de coelhos. Uma das propriedades que a tornam interessante é que ao dividirmos dois de seus termos, quanto maior o valor de n , mais a razão se aproxima da razão áurea, isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ e transformando os termos da sequência em quadrados podemos obter uma espiral perfeita, conhecida como **Espiral de Fibonacci** e ilustrada na Figura (16). Este fato torna a sequência conhecida na arquitetura, na arte e na biologia.

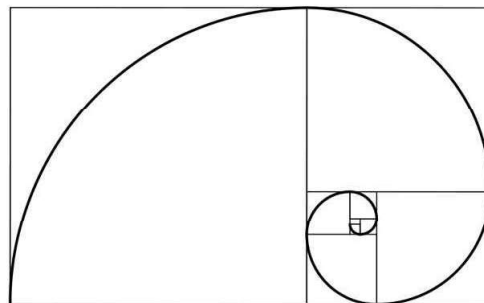


Figura 16 – Espiral de Fibonacci

As sequências definidas recursivamente podem ainda ser classificadas quanto a sua ordem e linearidade.

Definição 1.24. Uma recorrência da forma (1.5) é dita **linear** quando a função f é linear em termos das variáveis x_1, x_2, \dots, x_n .

Definição 1.25. Uma recorrência da forma (1.5) é dita de **ordem** k , quando cada termo dependem de k termos anteriores, ou seja,

$$x_{n+k} = f(n, x_n, \dots, x_{n+k-2}, x_{n+k-1}) \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} x_{n+k} = f(n, x_n, \dots, x_{n+k-2}, x_{n+k-1}) \\ x_1 = a_1 \in \mathbb{R}. \\ \vdots \\ x_k = a_k \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.12)$$

Observe que para definir uma sequência na forma de recorrência de ordem k é necessário estabelecer os k primeiros termos da sequência, que usualmente são chamados de condições iniciais.

Assim temos que uma **recorrência de primeira ordem** ocorre quando cada termo é expresso em função do seu antecessor imediato, sendo escrita da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(n, x_n) \\ x_1 = a \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Já uma **recorrência de segunda ordem** é escrita em função de seus dois antecessores imediatos, ou seja,

$$\begin{cases} x_{n+2} = f(n, x_n, x_{n+1}) \\ x_1 = a_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 = a_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.14)$$

Neste contexto a recorrência

$$x_{n+1} = 2x_n - n^2 \quad (1.15)$$

é linear, pois a função $f(n, x_n) = 2x_n - n^2$ é uma função linear em x_n e de primeira ordem.

Agora

$$x_{n+1} = (x_n)^2 \quad (1.16)$$

não é linear pois a função $f(n, x_n) = (x_n)^2$ não é linear em x_n .

São ainda exemplos de recorrência de primeira ordem as progressões aritméticas (1.8) e as progressões geométricas (1.9). A sequência de Fibonacci dada em (1.10) é uma recorrência de segunda ordem.

No Capítulo 1 apresentamos diversos resultados que nos auxiliam a estabelecer a convergência de seqüências, no entanto eram casos em que conhecíamos o termo geral da seqüência, mas como poderíamos encontrar a convergência de uma seqüência na forma recursiva?

Foi esta a pergunta que motivou este trabalho. Em linhas gerais, é de se esperar que para analisar a convergência da seqüência, devêssemos encontrar, primeiro o termo geral da seqüência, e então utilizar os resultados clássicos abordados no capítulo anterior. No entanto, esta tarefa pode não ser tão simples, como veremos mais adiante.

A seguir, veremos alguns exemplos em que, sem muito esforço, é possível encontrar o termo geral de uma seqüência escrita na forma recursiva, e a análise de convergência se dá através dos resultados já conhecidos. Mas iremos ver também, casos onde isto não é possível.

Exemplo 1.26. *Dada a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em que $x_{n+1} = n x_n$ e $x_1 = 1$. É possível determinar x_n somente em termos de n ?*

Observe inicialmente que esta é uma recorrência linear e de primeira ordem linear. Agora

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 \cdot 1 \cdot x_1, \\ x_4 &= 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x_1, \\ &\vdots \\ x_n &= (n-1)! \cdot x_1, \end{aligned}$$

como $x_1 = 1$. Logo os termos da seqüência são dados por $x_n = (n-1)!$.

Exemplo 1.27. *Considere a recorrência linear de primeira ordem definida por $x_{n+1} = 2 \cdot x_n$. Note que*

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 x_1, \\ x_3 &= 2 x_2 = 2 \times 2 x_1, \\ x_4 &= 2 x_3 = 2 \times 2 \times 2 x_1, \\ &\vdots \\ x_n &= 2 x_{n-1} = \underbrace{2 \times 2 \cdots \times 2}_{n-1 \text{ vezes}} x_1 = 2^{n-1} x_1. \end{aligned}$$

Logo os termos da seqüência são dados por $x_n = 2^{n-1} x_1$.

De forma geral podemos resolver os casos em que as recorrências de primeira ordem são da forma

$$x_{n+1} = x_n + g(n), \tag{1.17}$$

em que $g(n)$ é uma função qualquer em termos de n . De fato, observe que

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + g(1), \\x_3 &= x_2 + g(2), \\&\vdots = \vdots \\x_n &= x_{n-1} + g(n-1).\end{aligned}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, e assim sucessivamente, temos que o termo geral da sequência pode ser escrita como,

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g(k). \quad (1.18)$$

Exemplo 1.28. *Seja $x_{n+1} = x_n + 2^n$, com $x_1 = 1$, uma sequência de primeira ordem e linear. De acordo com (1.18) temos que $g(n) = 2^n$ e assim*

$$\begin{aligned}x_n &= x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\&= \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\&= \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\&= 2^n - 1.\end{aligned}$$

Portanto a sequência em questão é a sequência cujo termo geral é dado por $x_n = 2^n - 1$.

Considere toda recorrência linear de segunda ordem na forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0, \quad (1.19)$$

com $p, q \in \mathbb{R}$ e não nulos.

Estamos interessados em encontrar uma forma de escrever o termo geral da sequência associada à recorrência (1.19). Para isso, baseado na teoria de Equações Diferenciais Ordinárias, buscaremos sequências cujo termo geral possa ser escrito da $x_n = r^n$ com $r \in \mathbb{R}$.

Supondo que $x_n = r^n$ satisfaça (1.19) temos que,

$$\begin{aligned}0 &= r^{n+2} + pr^{n+1} + qr^n \\&= r^n \cdot r^2 + r^n \cdot pr + r^n \cdot q \\&= r^n \cdot (r^2 + pr + q).\end{aligned}$$

Considerando $r^n \neq 0$, obtemos a equação:

$$r^2 + pr + q = 0. \quad (1.20)$$

A equação (1.20) é usualmente denominada de **equação característica** e suas raízes determinam o termo geral da sequência, associado a forma de recorrência (1.19). Temos três casos a considerar:

1. Quando (1.20) tem duas raízes reais e distintas, digamos, r_1 e r_2 . Neste caso $x_n = r_1^n$ e $x_n = r_2^n$ são soluções da recorrência (1.19). Mais ainda, $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes, também é solução. De fato,

$$\begin{aligned} x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n &= C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + p \cdot (C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}) + q \cdot (C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) \\ &= C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois r_1 e r_2 satisfazem (1.20). Portanto, neste caso, o termo geral da sequência de recorrência (1.19) é dada por

$$x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n. \quad (1.21)$$

2. Quando (1.20) tem uma raiz com multiplicidade dois, neste caso, $r = -\frac{p}{2}$ e $x_n = r^n$ e $x_n = nr^n$ satisfazem a equação de diferença (1.19) e portanto $x_n = C_1 r^n + C_2 nr^n$ também. De fato,

$$\begin{aligned} x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n &= (C_1 + C_2(n+2))r^{n+2} + p(C_1 + C_2(n+1))r^{n+1} + q(C_1 + C_2n)r^n \\ &= C_1 r^n (r^2 + pr + q) + C_2 nr^n (r^2 + pr + q) + C_2 r^n r(2r + p) \\ &= C_1 r^n 0 + C_2 nr^n 0 + C_2 r^n r 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, neste caso, o termo geral da sequência de recorrência (1.19) é dada por

$$x_n = C_1 r^n + C_2 nr^n. \quad (1.22)$$

3. Quando a equação característica (1.20) possui raízes complexas, neste caso $r_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ e $r_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$. Usando a forma polar para tais raízes temos que,

$$\begin{aligned} r_1 &= \rho(\cos \theta + i \sin \theta) & r_2 &= \rho(\cos \theta - i \sin \theta) \\ r_1^n &= \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) & r_2^n &= \rho^n(\cos n\theta - i \sin n\theta) \end{aligned}$$

Portanto, o termo geral da de recorrência (1.19) é dada por

$$x_n = \rho^n (C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta). \quad (1.23)$$

Assim, ao encontrarmos as raízes de uma equação característica podemos identificar uma forma de escrever o termo geral da sequência de recorrência de segunda ordem. As constantes C_1 e C_2 são determinadas a partir das condições iniciais da recorrência.

Exemplo 1.29. *Seja a recorrência*

$$\begin{aligned}x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n &= 0, \\x_0 &= 3, \\x_1 &= -9.\end{aligned}$$

Neste caso a equação característica é $r^2 + 3r - 4 = 0$, e as raízes dessa equação são $r_1 = -1$ e $r_2 = -4$. Logo por (1.21), o termo geral da sequência associado à recorrência é $x_n = C_1(-1)^n + C_2(-4)^n$.

Para encontrarmos as constantes C_1 e C_2 iremos usar as condições iniciais, $x_0 = 3$ e $x_1 = -9$, isto é,

$$\begin{cases}x_0 = C_1(-1)^0 + C_2(-4)^0 = C_1 + C_2 = 3 \\x_1 = C_1(-1)^1 + C_2(-4)^1 = -C_1 - 4C_2 = -9\end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que $C_1 = 1$ e $C_2 = 2$, e portanto o termo geral da sequência é $x_n = (-1)^n + 2(-4)^n$.

O próximo exemplo, mostra como escrever a sequência de Fibonacci, vista no Exemplo 1.23, na forma do termo geral.

Exemplo 1.30. *A equação característica associada à sequência de Fibonacci $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com $F_0 = F_1 = 1$, é dada por $r^2 - r + 1 = 0$. Suas raízes são, $r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Logo o termo geral da sequência é escrito por,*

$$F_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Afim de encontrarmos o valor de C_1 e C_2 , usaremos as condições iniciais, $F_0 = F_1 = 1$. Neste caso o sistema resultante é

$$\begin{cases}C_1 + C_2 = 1, \\C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1.\end{cases}$$

Resolvendo esse sistema encontramos que

$$C_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \quad e \quad C_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}},$$

e portanto o termo geral da sequência de Fibonacci é

$$\begin{aligned}F_n &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \\&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Exemplo 1.31. Seja $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$. Queremos encontrar o termo geral dessa recorrência.

A equação característica é $r^2 + r + 1 = 0$ e as raízes são:

$$r_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Colocando na forma trigonométrica, temos que $\rho = 1$, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$. Logo a sequência tem como termo geral,

$$x_n = C_1 \cos \frac{n\pi}{3} + C_2 \sin \frac{n\pi}{3},$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Exemplo 1.32. Considere a recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$. Neste caso a equação característica é $r^2 - 4r + 4 = 0$, e suas raízes são $r_1 = r_2 = 2$. Portanto, de acordo com (1.22), o termo geral da sequência é dado por, $x_n = C_1 2^n + C_2 n2^n$.

Observe que, em todos os exemplos apresentados acima a equação de recorrência era homogênea, ou seja, nenhum termo da equação (1.19) dependia somente do termo n . Suponha, por exemplo, que no Exemplo 1.32, somássemos o termo n , ou seja, considerássemos a equação teríamos

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n + n = 0.$$

Neste caso, a estratégia da equação característica não poderia ser aplicada. O próximo resultado, trata deste tipo de recorrência, as chamadas recorrências, **não homogêneas**. O resultado garante que, o termo geral de uma recorrência não-homogênea é a soma da solução da recorrência homogênea associada com uma solução particular da recorrência não-homogênea.

Teorema 1.33. Se a_n é uma solução particular da equação

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n). \quad (1.24)$$

Então a substituição $x_n = a_n + y_n$, sendo y_n uma sequência, transforma a equação (1.24) na equação homogênea

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0.$$

. Ou seja, y_n é solução da equação homogênea associada a (1.24).

Demonstração. Substituindo x_n por $a_n + y_n$ em (1.24) e usando o fato de que a_n é uma solução particular de (1.24) temos que,

$$\begin{aligned} f(n) &= a_{n+2} + y_{n+2} + p(a_{n+1} + y_{n+1}) + q(a_n + y_n) \\ &= (a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) + (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) \\ &= f(n) + y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n, \end{aligned}$$

ou seja,

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$$

□

O próximo exemplo ilustra a aplicação deste Teorema.

Exemplo 1.34. *Considere a recorrência*

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n. \quad (1.25)$$

A equação homogênea associada é $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$, cuja equação característica é dada por $r^2 - 6r + 8 = 0$. As raízes desta equação são $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$, portanto, o termo geral associado à sequência de recorrência homogênea é $a_n = C_1 + C_2 4^n$. Afim de encontrar uma solução particular, y_n , da recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$, observe que, substituirmos y_n em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n$ devemos encontrar $n + 3^n$. Isto nos sugere que, y_n seja um polinômio do primeiro grau, em n somado com um termo exponencial de base 3.

Suponha portanto que

$$y_n = An + B + C 3^n. \quad (1.26)$$

Substituindo na recorrência em (1.25), obtemos $3An + 3B - 4A - C 3^n = n + 3^n$: y_n terá solução se $3A = 1$, $3B - 4A = 0$ e $-C = 1$. Logo,

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{4}{9}, \quad C = -1,$$

e assim, a solução particular da equação não homogênea é $y_n = \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n$. Portanto o termo geral da forma de recorrência não homogênea (1.25) é dado por

$$x_n = C_1 + C_2 4^n + \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n.$$

Note que conseguimos solucionar alguns casos de recorrências não-homogêneas. No entanto, encontrar uma solução particular muitas vezes não é tão simples.

Não apenas as recorrências não-homogêneas, como as recorrências que possuem termos não lineares são difíceis de encontrar o seu termo geral. Muitas vezes, esta é uma tarefa excessivamente trabalhosa e sem muito êxito, como ilustra os exemplos a seguir. Estes exemplos tem por finalidade ilustrar que as técnicas desenvolvidas nesta seção podem não ser suficientes para encontrarmos o termo geral da sequência.

Exemplo 1.35. *Considere a recorrência $x_{n+1} = \frac{3x_n - x_n^3}{2}$. Observe que temos uma recorrência de primeira ordem, uma vez que depende apenas de um termo anterior, porém define uma recorrência não linear. Uma tentativa de encontrarmos o termo geral é observando os primeiros*

termos, vejamos:

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{3x_1 - (x_1)^3}{2} \\x_3 &= \frac{3x_2 - (x_2)^3}{2} = \frac{3\left(\frac{3x_1 - (x_1)^3}{2}\right) - \left(\frac{3x_1 - (x_1)^3}{2}\right)^3}{2} \\&\vdots\end{aligned}$$

Observe que apenas calculando os dois primeiros termos, chegamos em uma expressão para a qual não é nada elementar encontrarmos o termo geral, e por hora não temos muito o que fazer.

O mesmo ocorre com a recorrência $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Novamente temos uma recorrência não linear. Neste caso os primeiros termos da recorrência são,

$$\begin{aligned}x_2 &= \sqrt{2 + x_1}, \\x_3 &= \sqrt{2 + \sqrt{2 + x_1}}, \\x_4 &= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + x_1}}}, \\x_5 &= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + x_1}}}}.\end{aligned}$$

Observe que não é possível, facilmente, encontrar uma regra geral para esta sequência.

Logo, precisamos de uma estratégia melhor para encontrarmos a convergência de sequências recursivas. Neste trabalho abordaremos apenas recorrências de primeira ordem. Iremos estudar outra teoria que nos possibilite analisar a convergência dessas sequências sem ter a necessidade de calcular o termo geral.

2 UM ESTUDO SOBRE PONTO FIXO

Vimos no capítulo anterior que encontrar o termo geral de uma recorrência não é uma tarefa simples e, por isso, iremos abordar neste capítulo resultados que nos auxiliarão a analisar a convergência de sequência na forma de recorrência sem a necessidade de conhecer seu termo geral. Para isso estudaremos conceitos gerais sobre pontos fixos, suas caracterizações, principais resultados e como estes podem nos auxiliara a encontrar o comportamento das sequências definidas por recorrência. O estudo aqui apresentado teve como referências (LIMA, 2013b), (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996) e (HOLMGREN, 1994)

2.1 CONCEITOS GERAIS

Nesta seção iremos estudar algumas definições e resultados envolvendo pontos fixos de funções e, mais adiante, relacionaremos estes resultados com recorrências.

Definição 2.1. Dados $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ e $x^* \in [a, b]$, diz-se que x^* é um ponto fixo de f se $f(x^*) = x^*$.

Observe que, de acordo com a definição acima encontrar um ponto fixo de f é o mesmo que encontrar os pontos de f que interceptam a reta $y = x$.

Os exemplos seguir ilustram a presença de ponto fixo de algumas funções.

Exemplo 2.2. A função $f(x) = -x$ possui um único ponto fixo, neste caso $x^* = 0$. A Figura 17 ilustra o ponto fixo de f .

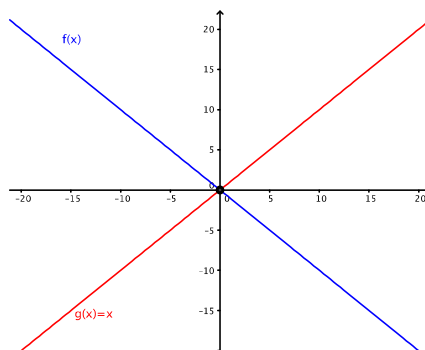


Figura 17 – Ponto fixo de $f(x) = -x$

Exemplo 2.3. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ possui 0 e 1 como pontos fixos, como podemos observar na figura abaixo.

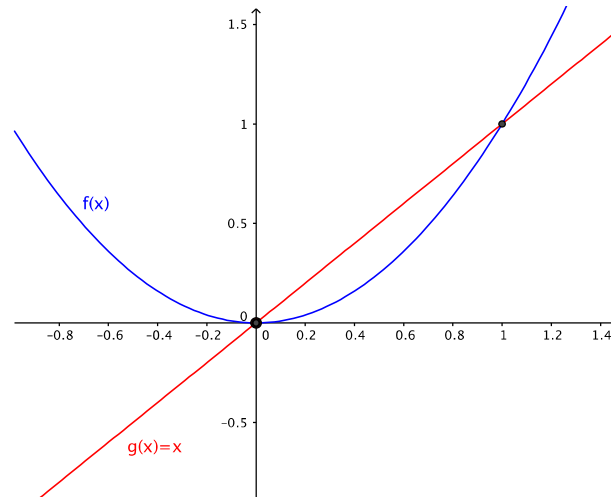


Figura 18 – Ponto fixo de $f(x) = x^2$

Exemplo 2.4. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + \sin(x)$. Neste caso os pontos fixos são dados por

$$\begin{aligned} f(x^*) &= x^* \\ x^* + \sin x^* &= x^* \\ \sin x^* &= 0 \end{aligned}$$

Neste caso $x^* = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, logo temos infinitos pontos fixos ilustrados na Figura 19.

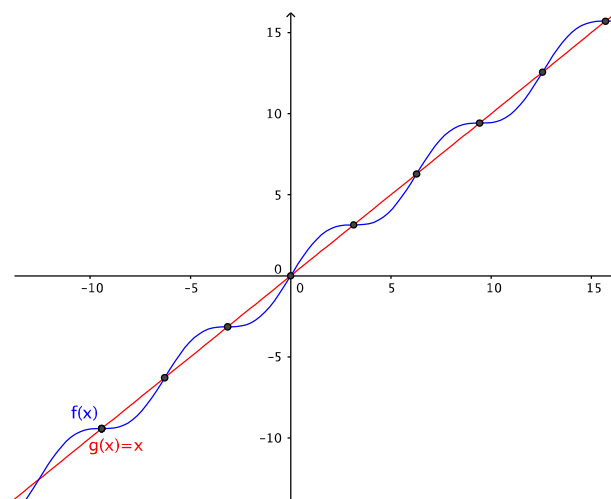


Figura 19 – Pontos fixos de $f(x) = x + \sin(x)$

Agora, para uma função afim da forma $f(x) = x + a$, em que $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, esta não possui pontos fixos. Geometricamente, podemos visualizar que para qualquer função afim dessa forma o seu gráfico é paralelo à reta $y = x$.

O Teorema a seguir nos garante a existência do ponto fixo para funções contínuas.

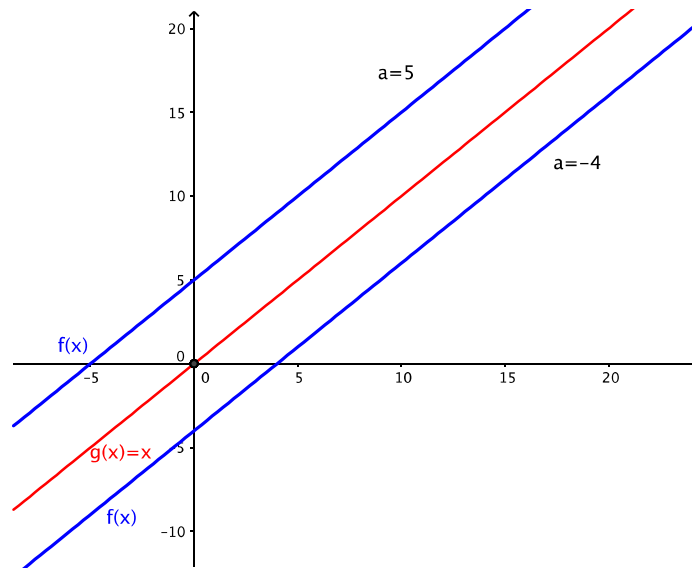


Figura 20 – $f(x) = x$ e $g(x) = x + 5$

Teorema 2.5. (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) Toda função $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, contínua possui (pelo menos) um ponto fixo.

Demonstração. Considere $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = f(x) - x$. Temos que f é contínua e além disso, como $a \leq f(x) \leq b, \forall x \in [a, b]$, segue que

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= f(a) - a \geq 0 \\ \varphi(b) &= f(b) - b \leq 0.\end{aligned}$$

Logo pelo Teorema do Valor Intermediário ¹ existe $x^* \in [a, b]$ tal que $\varphi(x^*) = 0$, ou seja, $f(x^*) - x^* = 0$, logo $f(x^*) = x^*$. \square

Exemplo 2.6. Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 2x(1 - x)$. Observe pelo gráfico da Figura (21) que f é uma função contínua e aplica o intervalo $[0, 1]$ em um intervalo $[0, 1]$. Logo, pelo Teorema 2.5, possui, pelo menos um ponto fixo. Neste caso a função possui dois pontos fixos que são $x^* = 0$ e $x^* = 1/2$, ilustrados na Figura (21).

¹ Dados $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$

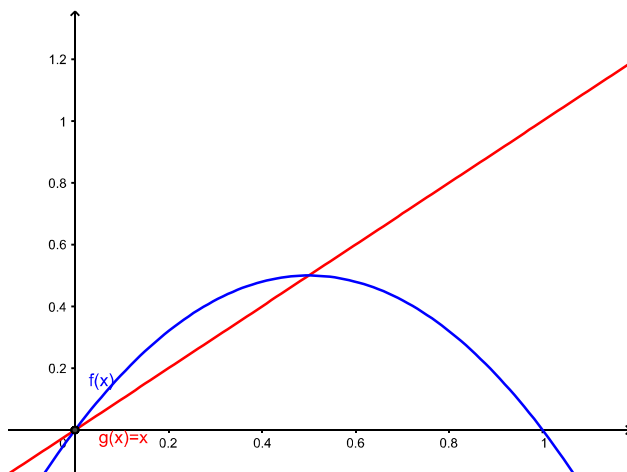


Figura 21 – $f(x) = 2x(1 - x)$ e $g(x) = x$

Exemplo 2.7. Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, 1/2[\\ 0, & \text{se } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Note que a função f aplica o intervalo $[0, 1]$ em $[0, 1]$, no entanto a função não é contínua e além disso não possui ponto fixo, pois os únicos candidatos são $x^* = 0$ e $x^* = 1$, no entanto $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$.

Exemplo 2.8. Seja $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log(1 + e^x)$. Neste caso f é contínua porém f não mapeia $[1, 2]$ em $[1, 2]$ e além disso não possui ponto fixo, pois, caso contrário,

$$\begin{aligned} \log(1 + e^{x^*}) &= x^* (\Leftrightarrow) \\ 1 + e^{x^*} &= e^{x^*} (\Leftrightarrow) \\ 1 &= 0 \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

2.2 CONTRAÇÕES

No Teorema 2.5 vimos condições que garantem que a função tenha pelo menos um ponto fixo. Nesta seção são apresentados resultados que garantem a unicidade do ponto fixo.

Definição 2.9. Sejam M, N intervalos de \mathbb{R} . Uma função $f : M \rightarrow N$ chama-se contração quando existe uma constante c , com $0 \leq c < 1$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq c |x - y|$ para quaisquer $x, y \in M$.

De acordo com a definição, em uma contração a inclinação das retas tangentes a curva gerada pela função f é sempre menor do que 1 em módulo, visto que $\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq c < 1$.

Exemplo 2.10. Seja $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $f(x) = \sqrt{x}$. Temos que f é uma contração. De fato, para todo $x, y \in [1, \infty)$ tem-se que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \\ &= |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \cdot \frac{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \\ &= \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} |x - y|, \end{aligned}$$

como $\sqrt{x} \geq 1$ e $\sqrt{y} \geq 1$ segue que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2$, logo $\frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \leq \frac{1}{2}$ e portanto,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|.$$

Proposição 2.11. Toda contração $f : M \rightarrow N$ é contínua em M .

Demonstração. Como f é uma contração, segue que existe $0 \leq c < 1$ tal que $|f(x) - f(y)| < c \cdot |x - y|$. Seja $a \in M$, devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$ implica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. De fato, como $0 \leq c < 1$ tem-se que

$$|f(x) - f(a)| \leq c |x - a| < |x - a|.$$

Logo, tomando $\delta = \varepsilon$ tem-se que $\forall x$ tal que $|x - a| < \delta$, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ como queríamos demonstrar. \square

A proposição anterior afirma que toda contração é contínua no entanto é possível encontrar funções contínuas que não sejam contrações. É o que ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 2.12. Seja $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua definida por $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Temos que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| 1 + \frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{y} \right| \\ &= \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \\ &= \left| \frac{x - y}{xy} \right|, \end{aligned}$$

logo, $\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \frac{1}{|xy|}$. Note que para x, y arbitrariamente próximos de zero $\frac{1}{|xy|}$ é maior do que 1 e portanto, f não é uma contração.

O próximo resultado relaciona a definição de contração com a derivada de uma função, o que pode facilitar a análise de contrações.

Proposição 2.13. Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, f é uma contração se, e somente se, f é diferenciável e se existe $K \in \mathbb{R}$, com $0 \leq K < 1$, tal que $|f'(x)| \leq K$, $\forall x \in [a, b]$.

Demonstração. Como f é diferenciável tem-se pelo Teorema do Valor Médio² que existe $c \in [a, b]$ tal que $\forall x, y \in [a, b]$

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Como $|f'(x)| < K$ para todo $x \in [a, b]$ segue que

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(c)| \leq K,$$

ou seja, $|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|$, o que caracteriza a contração de f . \square

Aplicando a Proposição 2.13 no Exemplo 2.10, temos que $|f'(x)| = \left| \frac{1}{2\sqrt{x}} \right|$. Como, para todo $x \in [1, \infty)$, $2\sqrt{x} \geq 2$, segue que $\left| \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{2} < 1$, ou seja, f é uma contração.

Observe que, neste caso, a aplicação da Proposição 2.13 facilitou a análise de contração de f .

Exemplo 2.14. Seja $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, definida por $f(x) = \cos(x)$. Temos que f é uma função contínua para todo $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, no entanto, a função cosseno não é uma contração. De fato, $|f'(x)| = |\sin(x)|$, em particular para $x = \frac{\pi}{2}$, $|f'(x)| = 1$, porém a constante K na hipótese da Proposição 2.13 é sempre menor do que 1. Mas se considerarmos o domínio como sendo o intervalo $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, então $|f'(x)| = |\sin(x)| < 1$, então teremos uma contração.

O próximo teorema é de fundamental importância para este trabalho pois relaciona a existência de ponto fixo para contrações e além disso estabelece a convergência de sequência na forma de recorrência por meio de estudo de pontos fixo.

Teorema 2.15. (Teorema de Banach) Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ uma contração. Então f possui um único ponto fixo $x^* \in [a, b]$ e além disso, se dado $x_0 \in [a, b]$ definirmos $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n)$, tem-se que $\lim x_n = x^*$.

Demonstração. Afim de mostrar a convergência da sequência (x_n) , observe que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &= |f(x_1) - f(x_0)| \leq c \cdot |x_1 - x_0| \\ |x_3 - x_2| &= |f(x_2) - f(x_1)| \leq c \cdot |x_2 - x_1| \leq c^2 |x_1 - x_0| \\ &\vdots \leq \vdots \\ |x_{n+1} - x_n| &= |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq c^n |x_1 - x_0|. \end{aligned} \tag{2.1}$$

² Dado $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e diferenciável em $]a, b[$ existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Logo, para $k \in \mathbb{N}$, usando (2.1), tem-se que

$$\begin{aligned} |x_{n+k} - x_n| &\leq |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \dots + |x_{n+k} - x_{n+k-1}| \\ &\leq [c^n + c^{n+1} + \dots + c^{n+p-1}]|x_1 - x_0| \\ &= c^n[1 + c + \dots + c^{p-1}]|x_1 - x_0| \\ &\leq \frac{c^n}{1-c}|x_1 - x_0| \end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$ segue que, dado $\epsilon > 0$ existe N_0 tal que para todo $n \geq N_0$, $|c^n| < \epsilon$. Escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$c^N < \frac{\epsilon}{|x_1 - x_0|}(1-c). \quad (2.2)$$

Logo para $n, n+k \geq N$, segue de (2.2) que

$$\begin{aligned} |x_{n+k} - x_n| &\leq \frac{c^n}{1-c}|x_1 - x_0| \\ &\leq \frac{c^N}{1-c}|x_1 - x_0| \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

ou seja, (x_n) é uma sequência de Cauchy em $[a, b]^3$ e portanto convergente⁴. Ou seja, existe $x^* \in [a, b]$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. Mostremos que x^* é ponto fixo de f . De fato, como f é contração segue da Proposição 2.11 que f é contínua, logo

$$f(x^*) = f(\lim x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*.$$

Mostremos que f não admite dois pontos fixos. Para isso suponha que existam dois pontos fixos, digamos $x^* = p$ e $x^* = q$, logo $f(p) = p$ e $f(q) = q$ e como f é contração segue que existe $0 \leq c < 1$, tal que

$$\begin{aligned} |q - p| &= |f(q) - f(p)| \leq c|q - p| \\ |q - p| - c \cdot |q - p| &\leq 0 \\ (1 - c)|q - p| &\leq 0. \end{aligned}$$

Como $(1 - c) > 0$ segue que $|q - p| = 0$, ou seja, $q = p$.

□

Se olharmos o exemplo anterior em que $f(x) = \cos(x)$, vimos que f é uma contração se for uma função de $f :] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Logo pelo Teorema 2.15 possui um único ponto fixo e, para qualquer condição inicial tomada no domínio, a recorrência associada converge para o ponto fixo.

³ Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita de Cauchy quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > n_0$ implica em $|x_n - x_m| < \epsilon$

⁴ Uma sequência é convergente se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.

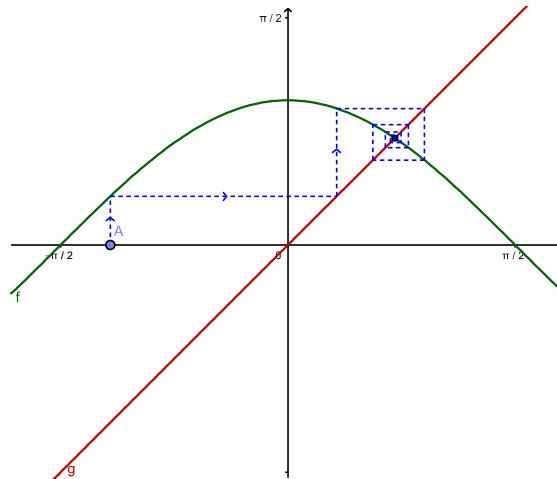


Figura 22 – $f(x) = \cos(x)$

No entanto, observe que se tomarmos o domínio da função como o intervalo fechado $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, a função cosseno continua assumindo um único ponto fixo, mas não é contração. Portanto, a volta do Teorema de Banach não é válida, isto é, se uma função possui somente um ponto fixo, isso não garante que ela seja uma contração.

Contudo, podemos utilizar o Teorema de Banach para provar que uma função não é contração, basta mostrarmos que ela não possui pontos fixos, ou que assume dois ou mais pontos fixos.

Exemplo 2.16. Seja $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $f : [1, \infty[\rightarrow [1, \infty[$. Observe que esta função não possui pontos fixos. De fato,

$$\begin{aligned} f(p) &= p \\ \sqrt{1+p^2} &= p \\ 1+p^2 &= p^2 \\ 1 &= 0 \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Logo, f não é uma contração.

Os exemplos a seguir têm por objetivo ilustrar a aplicação do Teorema de Banach.

Exemplo 2.17. Fixe um número $c > 1$ e suponha que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência definida recursivamente por $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{c+x_n}$.

A tabela abaixo apresenta os oito primeiros termos quando $c = 3$.

Repare que os termos dessa recorrência aparentemente acumulam-se em torno de 2,30. A seguir vamos utilizar o Teorema de Banach para verificar a convergência dessa sequência e seu ponto limite. Para isso, considere a função $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida por $f(x) =$

x_1	1
x_2	2
x_3	2,236068
x_4	2,288246
x_5	2,299619
x_6	2,30209
x_7	2,302627
x_8	2,302743
\vdots	\vdots

Tabela 1 – Termos da sequência $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$

$\sqrt{c+x}$. Temos que

$$f'(x) = [(c+x)^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{c+x}}$$

Como $c > 1$, para todo $x > 0$ temos que $|f'(x)| < \frac{1}{2}$, logo f é uma contração, e portanto, pelo Teorema 2.15 f tem um único ponto fixo e é dado por:

$$\begin{aligned}\sqrt{c+p} &= p \\ c+p &= p^2 \\ p^2 - p - c &= 0\end{aligned}$$

$$p = \frac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$$

Como $f(x) > 0$ o único ponto fixo de f é $\frac{1 + \sqrt{1+4c}}{2}$ e portanto, $\lim x_n = \frac{1 + \sqrt{1+4c}}{2}$.

No caso de $c = 3$, temos que $\lim x_n = \frac{1 + \sqrt{1+4 \cdot 3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} = 2.302776$, como verificamos na tabela acima.

2.3 ESTABILIDADE DE PONTO FIXO

No Capítulo 1 vimos como determinar o termo geral de uma recorrência e então verificar sua convergência e calcular seu limite. Na seção anterior estudamos como encontrar o ponto fixo dessa recorrência e verificar se determina uma contração ou não. Nesta seção iremos classificar cada ponto fixo de acordo com sua estabilidade. Sendo assim, podemos associar uma recorrência da forma $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$ a uma função f . Para ilustrar a recorrência iremos utilizar o gráfico chamado de Cobweb, no qual definimos uma condição inicial, por exemplo, $x_1 = 0,05$ e representamos a reta da função identidade e a função f associada a recorrência.

Em seguida traçamos uma reta ortogonal ao eixo X em direção ao gráfico da função f e obtemos o valor de x_2 . A partir deste ponto traçamos uma reta paralela ao eixo X em direção á reta $g(x) = x$ e obtemos x_3 . Repetindo esse processo iremos encontrar os valores da recorrência x_{n+1} . Como ilustrado abaixo:

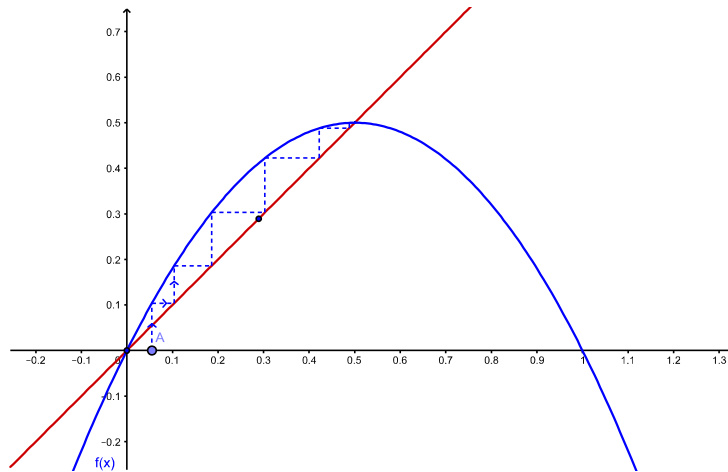


Figura 23 – Cobweb da recorrência $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$

Note que a medida que calculamos os valores de x_n , os termos da recorrência aproximam-se do ponto fixo $x^* = 0,5$ e afastam-se do ponto fixo $x^* = 0$ para esta condição inicial.

Teorema 2.18. *Seja f uma função em \mathbb{R} , e assuma que p é um ponto fixo de f .*

- (i) *Se $|f'(p)| < 1$, então p é dito atrator.*
- (ii) *Se $|f'(p)| > 1$, então p é dito repulsor.*

Observe que quando $|f'(p)| = 1$ não podemos concluir nada. Iremos considerar que quando p não é repulsor, nem atrator, será dito estável.

Demonstração. (i) Suponha que $|f'(p)| < 1$ e seja a um número real entre $|f'(p)|$ e 1. Temos que

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} = |f'(p)|$$

portanto existe um $\varepsilon > 0$ em que $|x - p| < \delta$ implica que

$$\left| \frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} - |f'(p)| \right| < \varepsilon$$

Portanto,

$$-\varepsilon + |f'(p)| < \frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} < \varepsilon + |f'(p)|$$

Seja $\varepsilon = a - |f'(p)|$, como $|f'(p)| < a < 1$, isso garante que $\varepsilon > 0$. Logo,

$$\frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} < a$$

Como $a < 1$, temos que $|f(x) - f(p)| < |x - p|$, ou seja, quanto mais x se aproxima de p mais $f(x)$ se aproxima de $f(p) = p$, isto é, $f(x)$ é atraído a p .

(ii) Suponha que $|f'(p)| > 1$ e seja a um número real entre 1 e $|f'(p)|$. Analogamente chegamos que

$$-\varepsilon + |f'(p)| < \frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} < \varepsilon + |f'(p)|$$

Tomando $\varepsilon = a + |f'(p)|$. Temos que

$$a < \frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|}$$

Logo, $|f(x) - f(p)| > |x - p|$, isto é, quanto mais x se aproxima de p mais $f(x)$ se afasta de $f(p) = p$.

□

Exemplo 2.19. Seja $x_{n+1} = 2x_n$, temos que a função associada á esta recorrência é $f(x) = 2x$, seu único ponto fixo é $p = 0$. Sabemos que $f'(p) = 2 > 1$, portanto pelo Teorema (2.18) p é repulsor. É possível observarmos isto na tabela 2, em que tomando um ponto inicial próximo de p , vemos que a sequência tende a se afastar do valor de $f(p) = p$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0,1	0,2
1	0,2	0,4
2	0,4	0,8
3	0,8	1,6
4	1,6	3,2

Tabela 2 – $x_{n+1} = 2x_n$ com $x_0 = 0,1$

Exemplo 2.20. Seja $f(x) = \frac{3x - x^3}{2}$. Seus pontos fixos são $p_1 = -1$, $p_2 = 0$ e $p_3 = 1$. Temos que $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}$, logo

$$a) |f'(p_1)| = \left| -\frac{3}{2}(-1)^2 + \frac{3}{2} \right| = 0 < 1$$

$$b) |f'(p_2)| = \left| -\frac{3}{2}(0)^2 + \frac{3}{2} \right| = \frac{3}{2} > 1$$

$$c) |f'(p_3)| = \left| -\frac{3}{2}(1)^2 + \frac{3}{2} \right| = 0 < 1$$

Portanto, p_2 é repulsor e p_1 e p_3 são atratores.

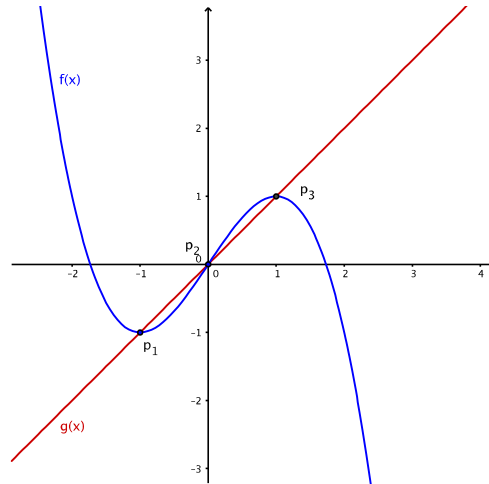


Figura 24 – Pontos fixos de $f(x) = \frac{3x - x^3}{2}$

Associando essa função com uma sequência recursiva, teremos uma recorrência não linear de primeira ordem.

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{3x_n - x_n^3}{2} \\ x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Como visto no Capítulo 1, a escolha da condição inicial determina sequências diferentes e portanto a análise de convergência da sequência está intimamente ligada a escolha da condição inicial. Mostramos também no Exemplo 1.35 que encontrar a convergência desta sequência não é uma tarefa simples se a estratégia utilizada for encontrar o termo geral.

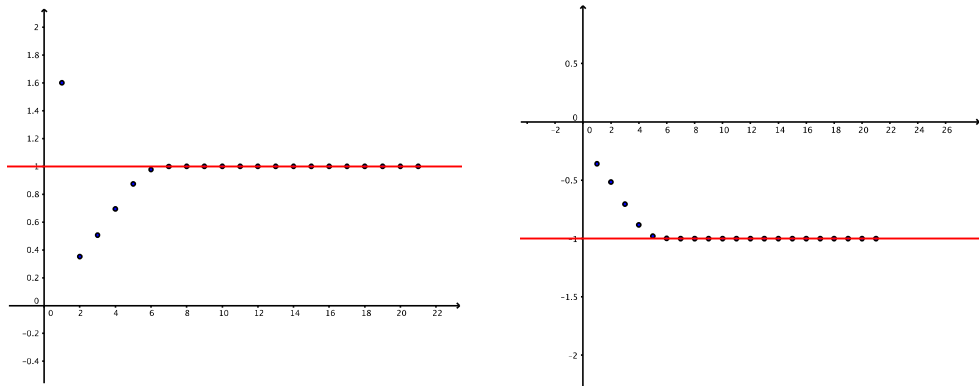
A Figura 25(a) ilustra o comportamento dos termos da sequência quando a condição inicial é $x_1 = 1,61$. Observe que a sequência converge para $p_3 = 1$. Porém se tomarmos a condição inicial como $x_1 = -0,36$, a sequência irá aproximar-se de $p_1 = -1$, como ilustrado na Figura 25(b).

Estes exemplos nos indicam que a escolha da condição inicial interfere diretamente na convergência da sequência, pois ao alterarmos a condição inicial de uma recorrência estamos alterando completamente a sequência e portanto sua convergência.

Neste caso precisamos analisar quais condições iniciais estamos tomando para verificar se a sequência recursiva é convergente ou não.

Para tais conclusões, podemos analisar a escolha da condição inicial de duas formas: algebricamente ou geometricamente.

Observe que no Exemplo 2.20 podemos buscar condições iniciais observando o comportamento da função e analisando geometricamente o seu gráfico. Ou seja, usaremos fortemente



(a) $x_1 = 1,61$

(b) $x_1 = -0,36$

Figura 25 – $x_{n+1} = \frac{3x_n - x_n^3}{2}$

o gráfico Cobweb para fazermos uma análise geométrica da escolha da condição inicial.

As raízes da função f são $r_1 = 0$ e $r_2 = \pm\sqrt{3}$ e usando isto iremos separar o domínio em intervalos para verificarmos o que ocorre com as sequências que possuem condições iniciais nestes intervalos. Note que observando apenas geometricamente é possível perceber que para qualquer condição inicial pertencente ao intervalo $I_1 = (0, \sqrt{3})$ a sequência converge para $p_3 = 1$ (Figura 26). Porém o intervalo é aberto, pois para $x = \sqrt{3}$, temos que $f(\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}) = f(0) = 0$, logo para estas condições iniciais, a sequência assume o valor de $p_2 = 0$, que é um ponto fixo, ou seja, qualquer outro valor da sequência será igual a zero. Observe também que p_2 é um ponto fixo repulsor então para qualquer outra condição inicial diferente, a sequência afasta-se de p_2 . Agora, para uma condição inicial em $I_2 = (-\sqrt{3}, 0)$ a sequência converge para $p_1 = -1$ (Figura 27).

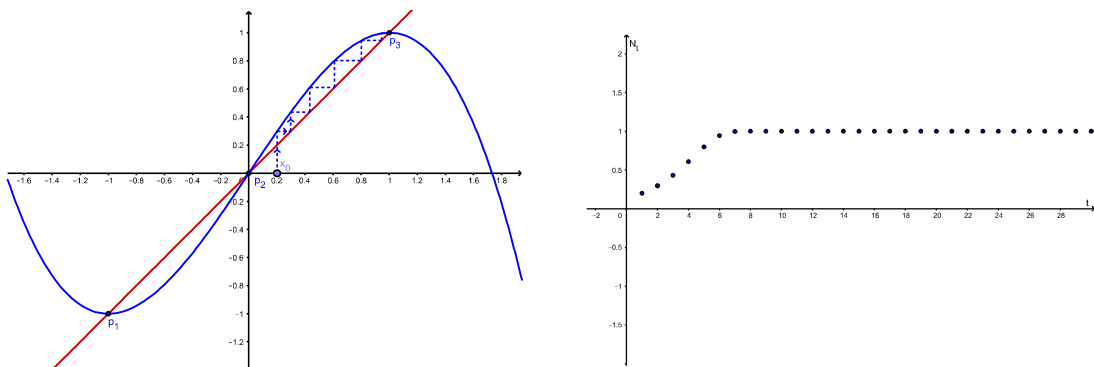


Figura 26 – $f(x) = \frac{3x - x^3}{2}$, $x_1 = 0,2$

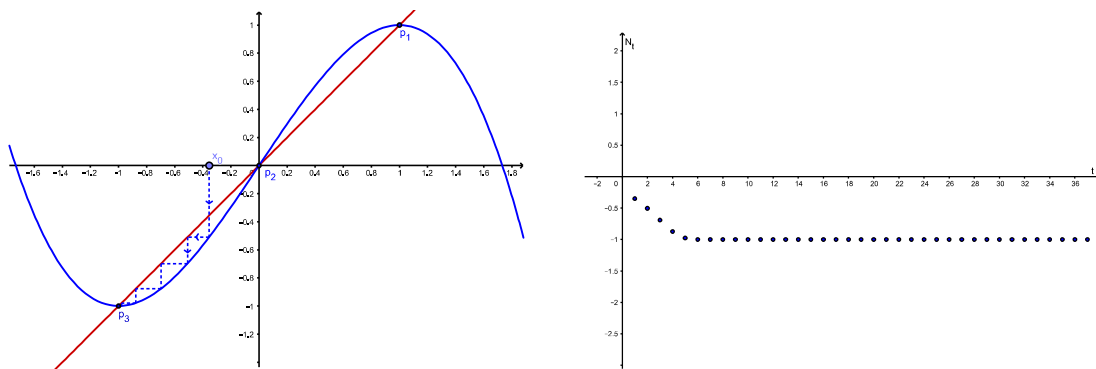


Figura 27 – $f(x) = \frac{3x_n - x_n^3}{2}$, $x_1 = -0,35$

Contudo, não podemos assumir que todo o intervalo de inteiros negativos converge para p_1 , pois note que para condições no intervalo $I_3 = [-2, -\sqrt{3})$ a sequência converge para $p_3 = 1$, como ilustrado abaixo.

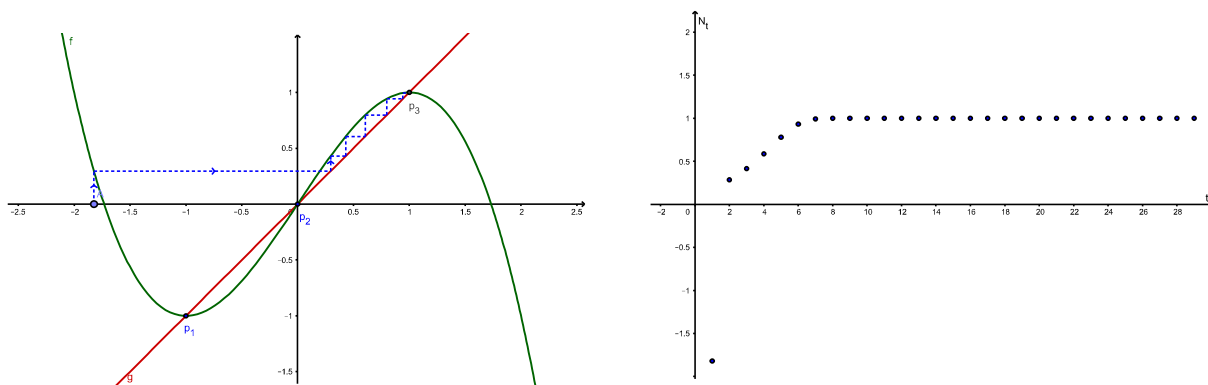


Figura 28 – $f(x) = \frac{3x_n - x_n^3}{2}$, $x_1 = -1,82$

O conjunto $[-2, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}]$ é chamado de **bacia de atração**⁵ de $p_3 = 1$, isto é, o conjunto de condições iniciais que são atraídas ao ponto $p_3 = 1$ como nas Figuras 26 e 28.

Este processo de encontrar toda a bacia de atração de um ponto fixo, pode ser uma tarefa um pouco complicada. Note que existe um intervalo I_4 bem pequeno, á direita de $x = 2$ que converge para o ponto p_1 .

Aumentando em 0,02 a condição inicial, isto é, de $x_1 = 2,14$, para $x_1 = 2,16$, muda-se a bacia de atração de p_1 para p_3 .

Os intervalos I_n tornam-se cada vez menores a medida que aumentamos o valor de n , além disso, nesta função temos que os pontos $x = \sqrt{5}$ e $x = -\sqrt{5}$ não estão em nenhuma bacia

⁵ Este termo pode ser compreendido ao pensarmos na bacia de uma pia, na qual, se jogarmos uma bolinha nesta bacia, ela é atraída ao ralo. Sendo assim, o "ralo" é o ponto fixo atrator, e a bacia são as condições iniciais que geram uma sequência convergente ao ponto fixo.

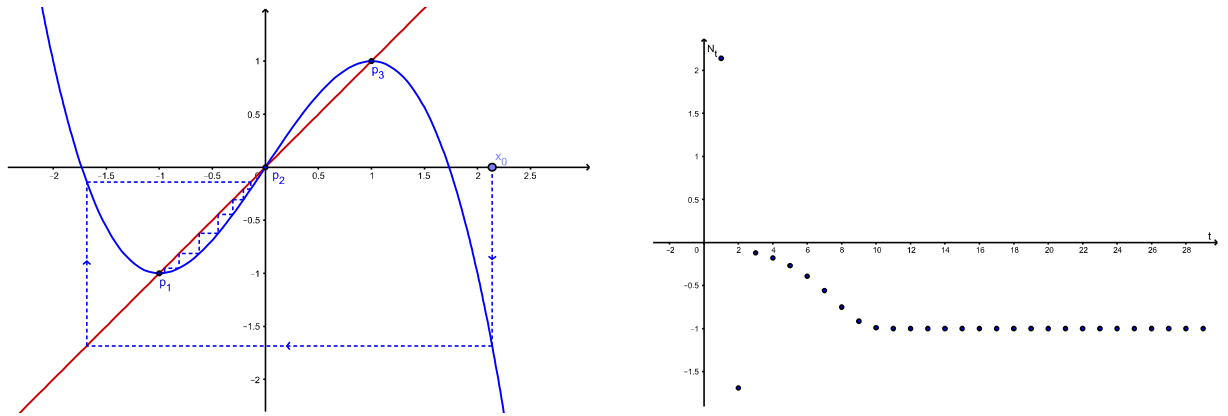


Figura 29 – $f(x) = \frac{3x_n - x_n^3}{2}$, $x_1 = 2, 14$

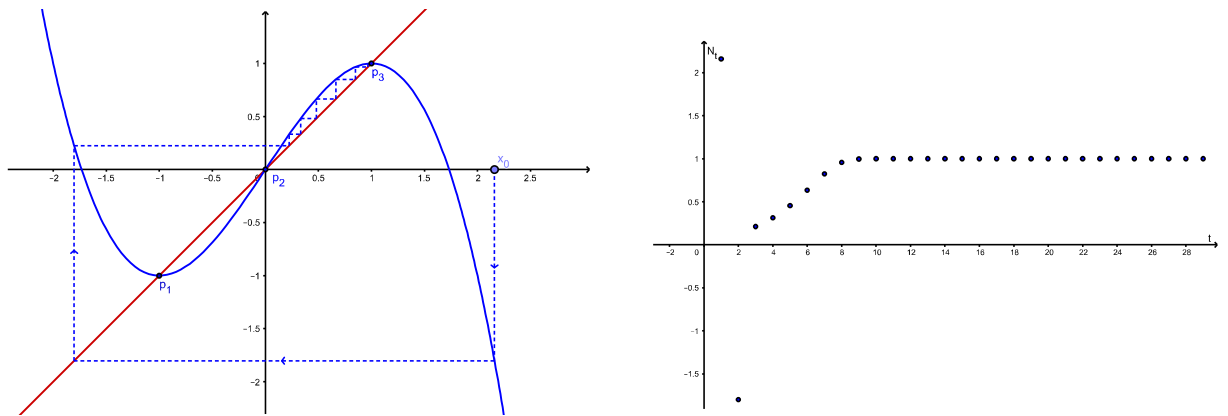


Figura 30 – $f(x) = \frac{3x_n - x_n^3}{2}$, $x_1 = 2, 16$

de atração, pois $f(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$ e $f(-\sqrt{5}) = \sqrt{5}$, ou seja, a recorrência fica alternando entre estes valores.

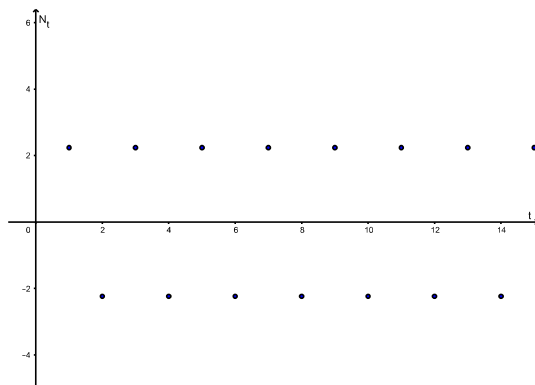


Figura 31 – $f(x) = \frac{3x_n - x_n^3}{2}$, $x_1 = \sqrt{5}$

A análise feita acima nos mostra que encontrar a bacia de atração de um ponto fixo pode ser uma tarefa árdua. No entanto, para o estudo de sequências definidas recursivamente, uma vez definida a condição inicial é possível estudar geometricamente o que ocorre no intervalo em que ela está definida.

Uma outra abordagem para determinar a bacia de atração de um ponto fixo é a abordagem algébrica, a qual será explorada no próximo exemplo.

Exemplo 2.21. *Vamos retomar a função já vista anteriormente $f(x) = 2x(1 - x)$ no Exemplo 2.6, em que encontramos seus pontos fixos $p_1 = \frac{1}{2}$ e $p_2 = 0$. Sabemos também que p_1 é atrator, enquanto p_2 é repulsor. Queremos então, encontrar a bacia de atração de $p_1 = \frac{1}{2}$. Para isso basta comparar $|f(x) - f(p_1)|$ com $|x - p_1|$, pois se $|f(x) - f(p_1)|$ for menor que $|x - p_1|$, então a sequência recursiva associada está se aproximando de $p_1 = \frac{1}{2}$. Isto é,*

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| &= \left| 2x(1 - x) - \frac{1}{2} \right| \\ &= \left| 2x - 2x^2 - \frac{1}{2} \right| \\ &= 2 \left| \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \right| \\ &= 2 \left| x - \frac{1}{2} \right| \left| x - \frac{1}{2} \right| \end{aligned}$$

Note que, para que $|f(x) - \frac{1}{2}|$ seja menor que $|x - \frac{1}{2}|$, então $2|x - \frac{1}{2}|$ deve ser menor do que 1, ou seja, x deve estar entre $(0, 1)$. Como 0 é um ponto fixo e $f(1) = 0$, então eles não pertencem a bacia de atração de p_2 . Portanto, para este caso, foi possível encontrar toda a bacia de atração, mas isto não significa que será possível para todos os casos.

Diante de tudo o que foi analisado até agora, vamos analisar a convergência de algumas recorrências a seguir utilizando a estabilidade de seus pontos fixos.

Exemplo 2.22. *Considere a sequência recursiva abaixo:*

$$\begin{cases} x_{n+1} = -2, 8x_n^2 + 2, 8x_n \\ x_1 = 0, 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Queremos encontrar qual o limite da sequência caso seja convergente. Temos aqui uma recorrência de primeira ordem, não linear, ou seja, encontrar um termo geral e depois verificar sua convergência pode ser uma tarefa bem complicada.

Portanto iremos primeiramente associar essa recorrência a uma função $f(x) = -2, 8x^2 + 2, 8x$, em seguida, encontrar seus pontos fixos, classificá-los como atrator ou repulsor e, caso tenha um ponto fixo atrator, verificar se a condição inicial pertence a bacia de atração do ponto fixo.

Inicialmente, sabemos que a função real $f(x) = -2,8x^2 + 2,8x$ possui pelo menos um ponto fixo pelo Teorema 2.5. Sendo assim, segue que

$$-2,8p^2 + 2,8p = p$$

Logo, $p_1 = 0$ e $p_2 = \frac{3,6}{5,6}$.

Calculando a derivada de f , obtemos

$$|f'(x)| = |-5,6x + 2,8|$$

Verificando a derivada nos pontos fixos, segue que

$$|f'(p_1)| = |-5,6 \cdot 0 + 2,8| = |2,8| > 1$$

$$|f'(p_2)| = |-5,6 \cdot \frac{3,6}{5,6} + 2,8| = |-0,8| < 1$$

Logo, $p_1 = 0$ é repulsor e $p_2 = \frac{3,6}{5,6}$ é atrator. Como descrito no gráfico a seguir:

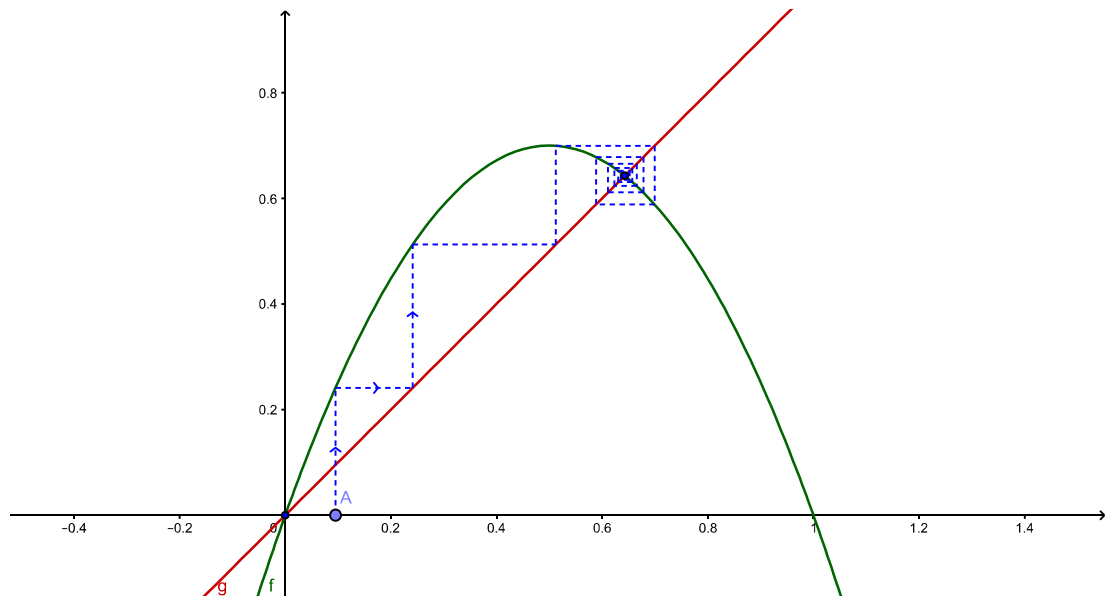


Figura 32 – $f(x) = -2,8x^2 + 2,8x$, $x_1 = 0,1$

No gráfico da Figura 32 é possível verificar (geometricamente) que a condição inicial proposta está na bacia de atração de p_2 , assim como o intervalo $I = (0,1)$. Portanto, a sequência é convergente e o $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3,6}{5,6}$.

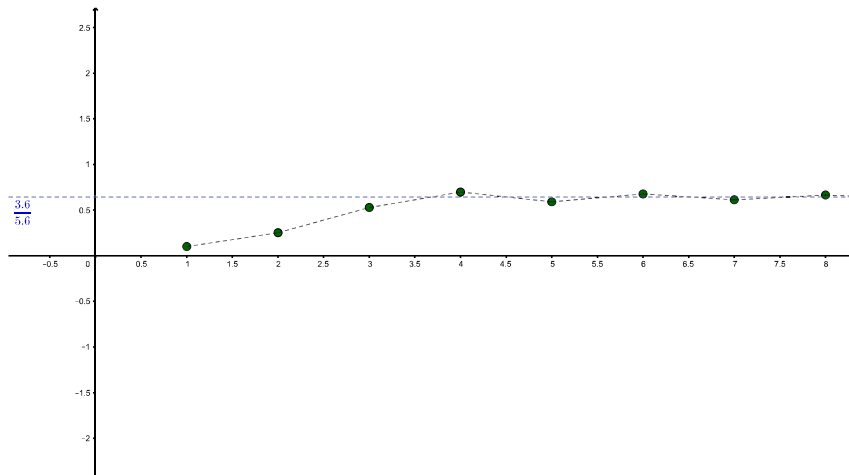


Figura 33 – $x_{n+1} = -2,8x_n^2 + 2,8x_n$, $x_1 = 0,1$

Exemplo 2.23. Considere a recorrência

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{5x_n} \\ x_1 = 16 \end{cases}$$

Primeiramente, iremos associar a uma função $f : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$, em que $f(x) = \sqrt{5x}$. Pelo Teorema 2.5 essa função admite pelo menos um ponto fixo, logo

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{5p} \\ p^2 &= 5p \\ p^2 - 5p &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $p_1 = 0$ e $p_2 = 5$

Agora, iremos caracterizar os pontos fixos.

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| \frac{\sqrt{5}x^{-1/2}}{2} \right| \\ |f'(p_2)| &= \left| \frac{\sqrt{5} \cdot (5)^{-1/2}}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

Note que a derivada de f no ponto zero não está definida. Portanto, a única conclusão que podemos obter é que $p_2 = 5$ é atrator.

Geometricamente podemos perceber que a condição inicial $x_1 = 16$ pertence a bacia de atração de $p_2 = 5$. É possível perceber que toda a bacia de atração pode ser escrita como $I = (0, 5) \cup (5, \infty)$. Logo, a sequência é convergente e seu limite é $p_2 = 5$.

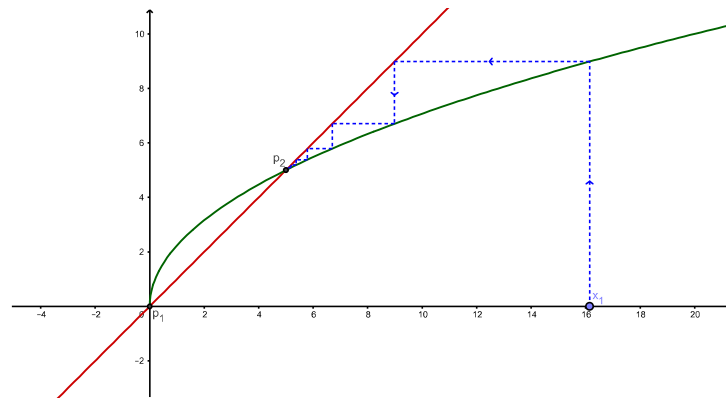


Figura 34 – $x_{n+1} = \sqrt{5x_n}$, $x_1 = 16$

Até agora, vimos que podemos sempre associar a uma recorrência de primeira ordem uma função tal que, encontrando seus pontos fixos, podemos caracterizá-los como atrator ou repulsor. Caso seja atrator, se a condição inicial da sequência recursiva estiver dentro da bacia de atração do ponto, então a sequência converge para o ponto fixo. Posteriormente vimos um outro caso, em que temos as funções ditas contrações, que assumem um único ponto fixo, o qual é o limite da sequência recursiva com condição inicial pertencente ao domínio da função. Este Teorema de Banach é o ponto principal deste trabalho, pois podemos analisar diversas funções que são contrações em um intervalo específico. Dessa forma encontramos a convergência de inúmeras sequências definidas por recorrência de forma simplificada com relação ao que foi visto no capítulo anterior. A seguir iremos estudar algumas aplicações de sequências recursivas e utilizar os resultados estudados para encontrarmos sua convergência.

3 SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS

Alguns processos biológicos podem ser modelados matematicamente como, por exemplo, o crescimento de uma população de acordo com o tempo. Alguns modelos são caracterizados por um intervalo de tempo contínuo, o que significa que podem ocorrer nascimentos e mortes a todo instante de tempo. No entanto, algumas populações podem ser modeladas por um intervalo de tempo discreto, ou seja, existem momentos específicos de tempo que um evento pode ocorrer. Por exemplo, uma população de peixes, que possui uma estação específica para nascimentos, ou até uma população de insetos. Nestes casos, o tempo pode ser medido em horas, quinzenas, meses, anos, etc.

Uma população de bactérias que dobra a sua população a cada 2 horas pode ser descrita como uma função $f(x) = 2x$. Ou seja, se temos uma cultura inicial de 10000 bactérias, duas horas depois teremos $f(10000) = 20000$, quatro horas depois teremos $f(20000) = f(f(10000)) = 40000$, e assim por diante. Mas se tivermos uma cultura com 2000 bactérias, duas horas depois teremos, 4000, quatro horas depois 8000. Note que a quantidade de bactérias num certo instante de tempo depende da quantidade de bactérias no instante de tempo anterior. Esta relação pode ser descrita por uma composição de funções f , isto é, uma recorrência da forma

$$N_{t+1} = f(N_t), f : M \rightarrow M, N_t \in M \subseteq \mathbb{R}, t \in \mathbb{Z}_+ \quad (3.1)$$

em que, N_t é o tamanho da população no instante de tempo t . Portanto temos uma sequência recursiva que modela o crescimento de uma população, ao qual damos o nome de **sistema dinâmico discreto**.

Neste capítulo estudaremos alguns modelos de crescimento populacional tais como, o clássico Modelo Logístico, modelo de crescimento Beverton-Holt, além de dos modelos Recruitment Curve e Ricker Curve. O objetivo é aplicar os estudos feitos nos capítulos anteriores para estudar o comportamento da população, de acordo com cada modelo, além de analisar a estabilidade dos modelos.

Este capítulo teve como referências (NEUHAUSER, 1962) e (MURRAY, 1993).

3.1 MODELO LOGÍSTICO

Voltando ao exemplo de crescimento de bactérias apresentado no início do capítulo, é possível descrever a dinâmica desta população de bactérias por

$$\begin{cases} N_{t+1} = RN_t, \\ N_0 = a \end{cases} \quad (3.2)$$

em que $R = 2$ e N_0 a população no instante 0. Note que para recorrências dessa forma, a população cresce indefinidamente quando $N_0 > 0$. Usualmente nos referimos à N_{t+1} como sendo a **geração de descendente** e à N_t como a **geração de pais**. Logo é possível observar que a razão pais-descendentes é sempre constante, ou seja,

$$\frac{N_t}{N_{t+1}} = \frac{1}{R}. \quad (3.3)$$

Isso significa que, independente da densidade (ou seja, o tamanho) da população em um determinado instante, o número de pais por descendentes é sempre constante. No caso das bactérias, apresentado no início deste capítulo, temos um pai para cada dois descendentes. A este crescimento nomeamos de **crescimento de densidade-independente**, pois o tamanho da geração não depende do tamanho da geração anterior proporcionalmente.

Observe no entanto que este tipo de crescimento não descreve a realidade, uma vez que pode ocorrer de alguns descendentes morrerem por falta de recursos tais como, disputa por território e escassez de comida. Afim de incluir esta falta de recursos no modelo (3.2), iremos considerar que a população não cresce mais que uma determinada quantidade K , denominada de **capacidade suporte**. Além disso vamos considerar que o crescimento de uma população dependa da sua densidade atual. À este tipo de comportamento chamamos de **crescimento de densidade-dependente**.

No caso das bactérias, temos que o modelo (3.2) apresentado é válido para uma população pequena, ou seja, se multiplica a uma determinada taxa até assumir um certo tamanho, a partir daí, pela falta de recursos, a reprodução já não é mais tão produtiva e a taxa de reprodução é influenciada pela densidade atual da população. Com isso em mente é possível estabelecer o seguinte modelo

$$N_{t+1} = RN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right). \quad (3.4)$$

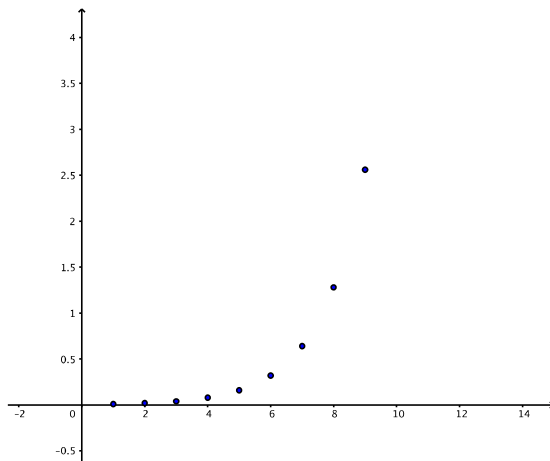
Isto significa que para populações pequenas o fator $\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$ aproxima-se de 1 e o tamanho da população se assemelha ao modelo (3.2). Enquanto que para populações maiores, seu crescimento é afetado pelo que sobrou da população, após a falta de recursos, ou seja, é afetado por $\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$.

A Tabela 3 apresenta o crescimento da população de bactérias, de acordo com o modelo logístico (3.2), na primeira coluna, e (3.4) na segunda coluna e seus respectivos gráficos são apresentados na Figura 35.

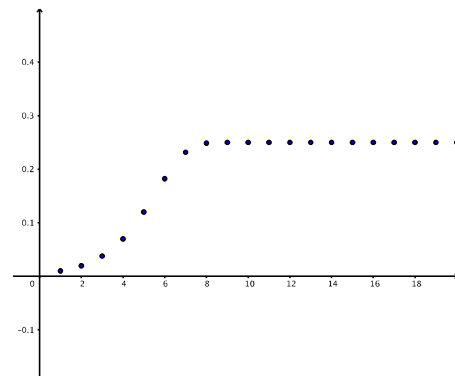
O próximo exemplo modela o crescimento de peixes de acordo com o Modelo (3.4).

t	$N_{t+1} = RN_t$	$\frac{N_t}{N_{t+1}}$	$N_{t+1} = RN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$	$\frac{N_t}{N_{t+1}}$
0	0,0100		0,0100	
1	0,0200	0,5	0,0198	0,5050505
2	0,0400	0,5	0,0388	0,5103093
3	0,0800	0,5	0,0746	0,5201072
4	0,1600	0,5	0,1381	0,5401883
5	0,3200	0,5	0,2380	0,5802521
6	0,6400	0,5	0,3627	0,6561897
7	1,2800	0,5	0,4623	0,7845555
8	2,5600	0,5	0,4971	0,929994
9	5,1200	0,5	0,49998	0,9942398
10	10,2400	0,5	0,4999	0,99998
11	20,4800	0,5	0,5000	0,99998
12	40,9600	0,5	0,5000	1

Tabela 3 – Crescimento de bactérias segundo o modelo logístico, $R = 2$, $N_0 = 0,01$ e $K = 0,5$ medidos em milhões.



(a) Densidade-independente



(b) Modelo Logístico

Figura 35 – Crescimento de bactérias de acordo com Modelo Logístico

Exemplo 3.1. Considere uma população de peixes que cresce de acordo com o modelo logístico, em que sua capacidade máxima é de 1000 peixes e cada pai gera 3 peixes. Sabendo que a população inicial de peixes é de 200, qual a quantidade de peixes daqui a 4 anos?

Para investigarmos este problema levaremos em consideração que o tempo é discreto e medido em anos. Sendo assim, temos que a cada ano, para uma pequena densidade a população triplica, o que significa que temos $R = 3$ e como a capacidade máxima é de 1000, tem-se que $K = 1000$ e portanto o modelo (3.4) é dado por

$$N_{t+1} = 3N_t \left(1 - \frac{N_t}{1000}\right). \quad (3.5)$$

Logo,

$$N_0 = 200$$

$$N_1 = 3.200(1 - 200/1000) = 480$$

$$N_2 = 3.480(1 - 480/1000) = 748,8 \approx 749$$

$$N_3 = 3.749(1 - 749/1000) = 563,997 \approx 564$$

$$N_4 = 3.564(1 - 564/1000) = 737,712 \approx 738.$$

Portanto, no quarto ano a população será de aproximadamente 738 peixes. A Figura 36 ilustra o comportamento da população de peixes ao longo do tempo.

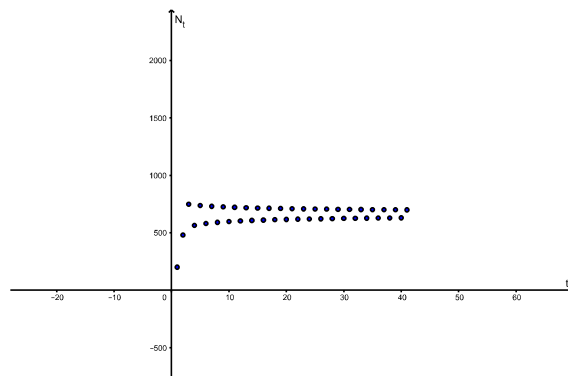


Figura 36 – Crescimento Logístico de acordo com $N_{t+1} = 3N_t \left(1 - \frac{N_t}{1000}\right)$ e $N_0 = 200$.

Ao observarmos a Figura 36, observamos que a população de peixes parece se “acomodar” em torno de algum valor entre 600 e 700 peixes. Será que é possível determinar este valor? Ou seja, é possível prever o comportamento de uma população que cresce de acordo com o modelo logístico? Será que a população assume um tamanho no qual ela se estabiliza? Afim de responder estas questões faremos uso da teoria de ponto fixo estudada no Capítulo 2.

Para isso considere a $f(x) = Rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ associada ao modelo logístico $N_{t+1} = RN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$, em que $x = N_t$ e $f(x) = N_{t+1}$. Assim, observando a função f , com o intuito de aplicar a teoria estudada no Capítulo 2, buscamos investigar para quais valores de x , R e K o modelo determina uma contração e assim utilizar o Teorema 2.15. Para isso precisamos garantir que a função f fosse determinada em um intervalo $[a, b]$ em $[a, b]$ e que $|f'(x)| < 1$. Neste propósito, durante o estudo para a escrita deste trabalho, buscamos primeiramente encontrar os valores para os quais a derivada da função é menor do que 1 e, de fato, encontramos um intervalo de valores de x em que a sentença é verdadeira sendo descrito abaixo:

$$\frac{K(R-1)}{2R} < x < \frac{K(R+1)}{2R} \quad (3.6)$$

Pensamos que, ao obtermos valores de K e R , poderíamos restringir o domínio de forma que para este intervalo a função determinasse uma contração e conseqüentemente, encontraríamos valores para os quais o modelo converge. No entanto, percebemos que ao restringirmos o domínio isto não nos garante que a função esteja determinada em um intervalo $[a, b]$ em $[a, b]$. Assim, teríamos que estudar a imagem do intervalo encontrado também. Consideramos então esta forma ineficiente para otimizar o cálculo da convergência de seqüências recursivas no Modelo Logístico.

Diante disso, decidimos analisar o modelo logístico através da estabilidade de seus pontos fixos. De forma que, na seqüência, iremos buscar quais são os pontos fixos da função associada ao Modelo Logístico e verificar para quais valores esses pontos são atratores ou não. Nos exemplos, iremos investigar a bacia de atração dos pontos atratores.

Observe que os pontos fixos de f são $p_1 = 0$ e $p_2 = \frac{K(R-1)}{R}$. Afim de analisar a atratividade dos pontos fixos, temos que $|f'(x)| = \left| R \left(1 - \frac{2x}{K} \right) \right|$, logo, de acordo com o Teorema 2.18, temos que

- (a) $p_1 = 0$ é atrator se, $|f'(p_1)| = |R| < 1$ e repulsor quando $|f'(p_1)| = |R| > 1$
- (b) $p_2 = \frac{K(R-1)}{R}$ é atrator se, $|f'(p_2)| = \left| R \left(1 - \frac{2}{K} \frac{K(R-1)}{R} \right) \right| = |2 - R| < 1$, ou seja, se $1 < R < 3$, e repulsor caso $R < 1$ ou $R > 3$.

Com isto concluímos que, independente da capacidade suporte K , para $-1 < R < 1$, p_1 é atrator e para $1 < R < 3$, p_2 é atrator.

Com estes resultados podemos concluir que se tivermos, por exemplo, $R = 2$, então o ponto fixo p_1 é repulsor e p_2 é atrator. Isto nos indica que a seqüência recursiva da forma (3.4) irá convergir para o ponto fixo não-trivial, isto é, diferente de zero. Portanto, para $R = 2$ a população que é descrita pelo modelo logístico irá se estabilizar em um determinado momento, isto significa que irá convergir para o ponto fixo p_2 .

Agora note que encontramos a estabilidade dos pontos p_1 e p_2 no modelo Logístico, no entanto, para valores de $R = -1$, $R = 1$ e $R = 3$ o teste da estabilidade é inconclusivo, pois para estes valores a derivada da função nos pontos fixos é 1 e, portanto, nada podemos concluir. Assim vamos analisar separadamente o que acontece com o modelo quando R assume estes valores.

A função logística é uma função quadrática cujas raízes são 0 e K e possui um ponto de máximo cujas coordenadas são $(\frac{K}{2}, \frac{RK}{4})$, como representado no gráfico abaixo.

Se $R = 1$ observe que o único ponto fixo do modelo é 0. Neste caso a função que está associada ao modelo pode ser descrita por $f(x) = x \left(1 - \frac{x}{K} \right)$ e a sua derivada é $f'(x) = 1 - \frac{2x}{K}$. Observe que $|f'(x)| < 1$ para $0 < x < K$, e além disso, para $x \in [0, K]$ temos que

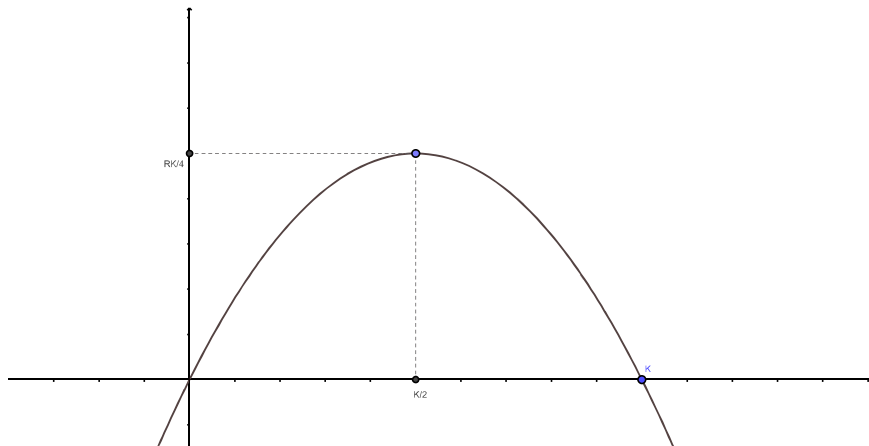


Figura 37 – Função logística

$f(x) \in [0, K]$, de fato, pois o maior valor assumido pela função é $\frac{K}{4} < K$ como vimos no gráfico acima. Ou seja, isto significa que em $f : [0, K] \rightarrow [0, K]$ a função é uma contração e pelo Teorema 2.15 converge para o ponto fixo $p = 0$. Portanto, o ponto 0 é atrator para quando a condição inicial está entre 0 e K . Para valores de x fora desse intervalo o ponto fixo é repulsor.

No contexto de crescimento populacional isto significa que, se a taxa de crescimento é 1, então a população poderá se extinguir com o tempo, independente de sua capacidade suporte.

Exemplo 3.2. *Vamos considerar então uma população de bactérias medida em milhares, cuja capacidade suporte é $K = 50$ e sua população inicial é $N_0 = 25$. Considere que a taxa de crescimento é $R = 1$, o que significa que cada bactéria produz apenas um descendente a cada período. Queremos verificar se esta população poderá se extinguir ou se estabilizará com o tempo. Temos que esta situação pode ser representada pela recorrência:*

$$\begin{cases} N_{t+1} = N_t \left(1 - \frac{N_t}{50}\right) \\ N_0 = 25 \end{cases} \quad (3.7)$$

Investigamos anteriormente que se $R = 1$, então a população tende a se extinguir, pois o a função associada $f(x) = x(1 - \frac{x}{50})$, é uma contração que converge para o ponto fixo $p = 0$. Esta situação está ilustrada na Figura 38.

Observe que a população só pode assumir valores entre 0 e 50, pois valores maiores que este ultrapassam a capacidade suporte e valores menores são negativos, o que é impossível, pois não existe população negativa.

Vamos analisar agora para $R = 3$, pois para modelos de crescimento populacional não podemos assumir $R = -1$, pois teríamos uma taxa de crescimento negativa, conflitando com o conceito de taxa de crescimento.

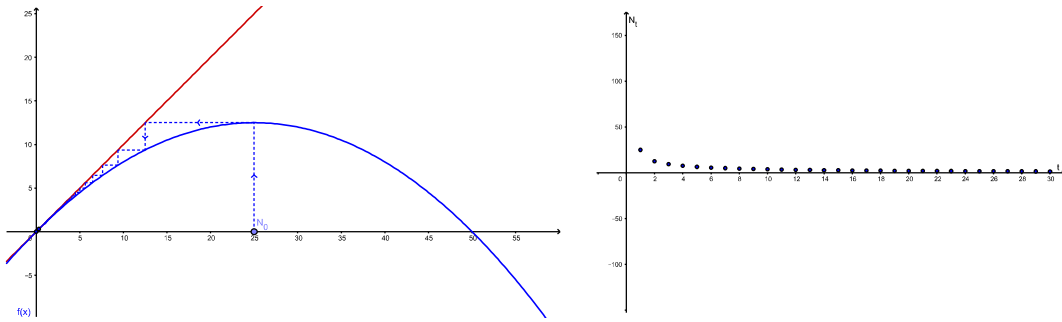


Figura 38 – $N_{t+1} = N_t(1 - \frac{N_t}{50})$ e $N_0 = 25$

Quando o modelo logístico admite $R = 3$ os pontos fixos são $p_1 = 0$ e $p_2 = \frac{2K}{3}$. Neste caso o ponto p_1 é repulsor, porém p_2 pode ser estável ou não. A seguir veremos um exemplo onde isto ocorre.

Exemplo 3.3. Considere agora uma população de peixes medida em milhões, em que a capacidade suporte seja $K = 1$, com taxa de crescimento $R = 3$ e com população inicial $N_0 = 0,1$. Novamente, queremos verificar se a população irá se estabilizar em algum valor ou se irá se extinguir. Neste caso podemos descrever a situação a através da recorrência

$$\begin{cases} N_{t+1} = 3N_t(1 - N_t) \\ N_0 = 0,1 \end{cases}$$

Neste caso os pontos fixos da função associada á recorrência são $p_1 = 0$ e $p_2 = 2/3$. Seja $f(x) = 3x(1 - x)$ a função associada á recorrência. Calculando a derivada nos pontos, obtemos

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= |3 - 6x| \\ |f'(p_1)| &= |f'(0)| = |3 - 6 \cdot 0| = |3| > 1 \\ |f'(p_2)| &= \left| f' \left(\frac{2}{3} \right) \right| = \left| 3 - 6 \cdot \left(\frac{2}{3} \right) \right| = |-1| = 1. \end{aligned}$$

Sabemos que p_1 é repulsor, mas p_2 é inconclusivo se utilizarmos o teste da estabilidade no ponto. A Figura 39 (a) apresenta o gráfico Cobweb do sistema dinâmico 3.3. Observe que, neste caso p_2 tem um comportamento estável, mas não atrator.

3.2 CURVA DE BEVERTON-HOLT

Para compreendermos melhor o modelo de Beverton-Holt vamos voltar a curva de crescimento de densidade-independente (3.3). Se construirmos um gráfico em que o eixo das ordenadas é a razão $\frac{N_t}{N_{t+1}}$ e o eixo das abscissas é N_t a função (3.3) seria uma reta paralela ao eixo das abscissas, pois é uma função constante igual a $\frac{1}{R}$.

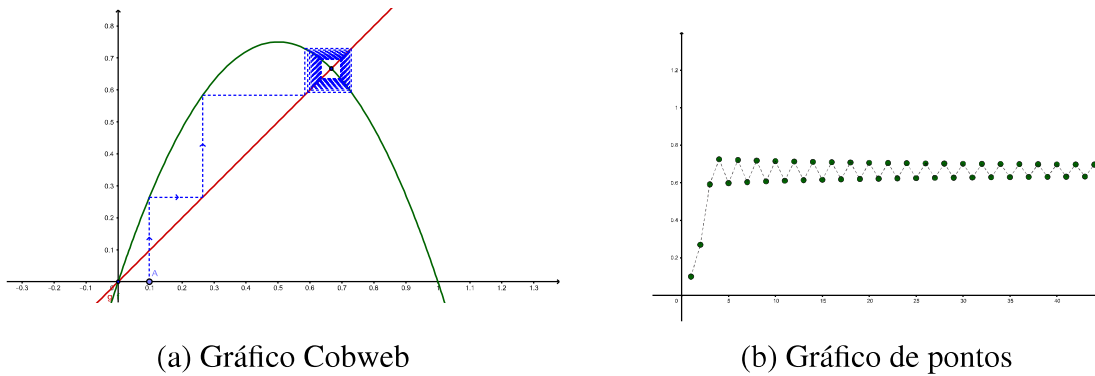


Figura 39 – $N_{t+1} = 3N_t(1 - N_t)$ e $N_0 = 0, 1$

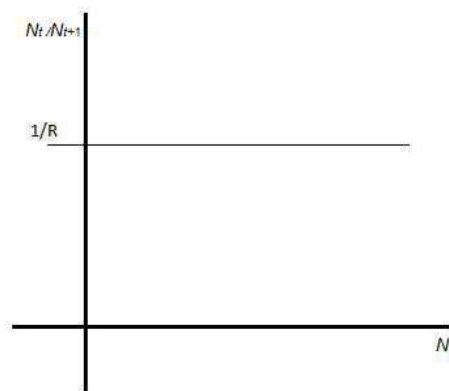


Figura 40 – $\frac{N_t}{N_{t+1}} = \frac{1}{R}$

Porém, repare que:

- a) Se $\frac{N_t}{N_{t+1}} < 1$, então existem mais descendentes do que pais, e isso significa que a população irá crescer.
- b) Se $\frac{N_t}{N_{t+1}} = 1$, então o tamanho da população permanecerá o mesmo, uma vez que existem a mesma quantidade de pais e descendentes.
- c) Se $\frac{N_t}{N_{t+1}} > 1$ existem mais pais do que descendentes, logo, a população irá decrescer.

Para modelarmos essa situação iremos assumir que a razão $\frac{N_t}{N_{t+1}}$ não é mais uma constante e sim, uma função linear crescente de N_t . Afim de determinar este tipo de comportamento, para valores muito pequenos do tamanho da população, iremos assumir que o crescimento de densidade-dependente assemelha-se ao crescimento de densidade-independente. Assim, em termos algébricos esta função a ser determinada, passa pelo ponto $(0, 1/R)$, que é o valor da densidade-independente.

Porém, para garantir que a população realmente cresce em baixas densidades também assumiremos que $R > 1$, uma vez que se R for menor do que 1, então a população irá decrescer. Quando a razão $\frac{N_t}{N_{t+1}}$ chega em 1, a partir deste momento a densidade da população não cresce mais, esta situação denominamos anteriormente de capacidade suporte e denotamos por K . Logo, sob estas considerações a função deve passar pelo ponto $(K, 1)$ e portanto a função que descreve a relação entre pais-descendentes será a reta que passa pelos pontos $(0, 1/R)$ e $(K, 1)$, ilustrada na Figura 41.

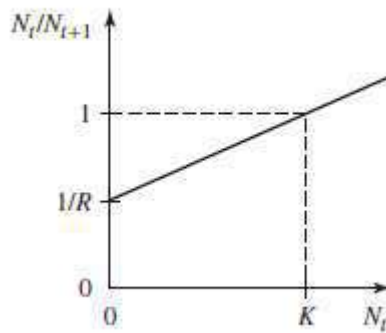


Figura 41 – Razão pais-descendentes como uma função da população N_t

O coeficiente angular dessa reta é $\frac{1}{K} \left(1 - \frac{1}{R}K\right)$ e seu termo independente é $\frac{1}{R}$. Logo podemos escrever relação de pais-descendentes por

$$\frac{N_t}{N_{t+1}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{K} \left(1 - \frac{1}{R}K\right) N_t.$$

Rearranjando os termos e isolando N_{t+1} temos que

$$N_{t+1} = \frac{RN_t}{1 + \frac{R-1}{K}N_t}. \quad (3.8)$$

Este modelo é conhecido como Modelo de Beverton-Holt ou ainda Beverton-Holt Recruitment Curve.

O modelo de Beverton-Holt e o modelo de Ricker, que será estudado mais adiante, foram muito utilizados na Engenharia da Pesca para determinarem a relação estoque-recrutamento. Essa relação determina o período em que a pesca é liberada ou proibida, de forma a garantir a reprodução dos peixes. No entanto estes modelos sofreram muitas críticas pois apesar de possuírem uma base teórica, não consideravam variáveis como mudanças climáticas, migração ou mudanças na corrente de água. Existem relatos de populações de peixes que eram controladas utilizando estes modelos, mas que foram quase extintas, pois estas variáveis não foram consideradas, como as populações de bacalhau do Atlântico, anchova e salmão.

Afim de compreendermos melhor o comportamento do modelo (3.8) vamos analisar a estabilidade dos pontos fixos da função associada, uma vez que tentar encontrar o intervalo onde

a função pode ser descrita como contração não é uma tarefa simples. Sendo assim, considere

$$f(x) = \frac{Rx}{1 + \frac{(R-1)x}{K}},$$

a função associada ao modelo discreto. Observe que, além do ponto fixo trivial $p_1 = 0$, $p_2 = K$ também é ponto fixo de f , de fato,

$$\begin{aligned} p &= \frac{Rp}{1 + \frac{R-1}{K}p} & (\Leftrightarrow) \\ 1 &= \frac{R}{1 + \frac{R-1}{K}p} & (\Leftrightarrow) \\ R &= 1 + \frac{R-1}{K}p & (\Leftrightarrow) \\ R-1 &= \frac{R-1}{K}p & (\Leftrightarrow) \\ p &= K \frac{R-1}{R-1} & (\Leftrightarrow) \\ & p = K \end{aligned}$$

Além disso

$$|f'(N_t)| = \left| \frac{RK^2}{((R-1)N_t + K)^2} \right|,$$

e portanto, pelo Teorema 2.18,

- a) $|f'(0)| = |R|$, logo $p_1 = 0$ é atrator de $|R| < 1$ e repulsor caso contrário
- b) $|f'(K)| = \left| \frac{1}{R} \right|$, logo p_2 é atrator se $\left| \frac{1}{R} \right| < 1$, ou seja, $R > 1$ ou $R < -1$.

Observe, no entanto, que assumimos durante a construção do modelo que $R > 1$, dessa forma concluímos que $p_1 = 0$ é sempre repulsor e $p_2 = K$ é sempre atrator. Ou seja, para todo $R > 1$ e para todo K que tomarmos teremos que a recorrência irá convergir para a capacidade suporte.

A Figura 42 ilustra o comportamento do modelo Beverton-Holt sob diferentes condições iniciais. Observe que em todas as situações o modelo converge para a capacidade suporte. O próximo exemplo ilustra o modelo Beverton-Holt sob condições específicas.

Exemplo 3.4. *Uma população que cresce de acordo com o modelo de Beverton-Holt, possui uma população inicial de 500, capacidade suporte igual a 1000 e possui taxa de crescimento igual a 3. Vamos calcular qual será a sua população nos próximos quatro anos.*

Obtemos que

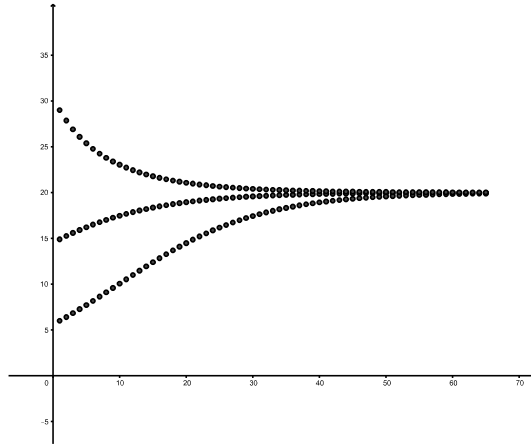


Figura 42 – Modelo Beverton-Holt com $R = 1.1$, $K = 20$ e diferentes condições iniciais sendo, 5, 15 e 30.

$$N_1 = \frac{3 \cdot 500}{1 + \frac{3-1}{1000} \cdot 500} = \frac{1500}{2} = 750$$

$$N_2 = \frac{3 \cdot 750}{1 + \frac{3-1}{1000} \cdot 750} = \frac{2250}{2,5} = 900$$

$$N_3 = \frac{3 \cdot 900}{1 + \frac{3-1}{1000} \cdot 900} = \frac{2700}{2,8} = 964,28$$

$$N_4 = \frac{3 \cdot 964,28}{1 + \frac{3-1}{1000} \cdot 964,28} = \frac{2892,85}{2,93} = 987,32$$

De fato, temos que o valor da população aproxima-se da capacidade suporte que é $K = 1000$.

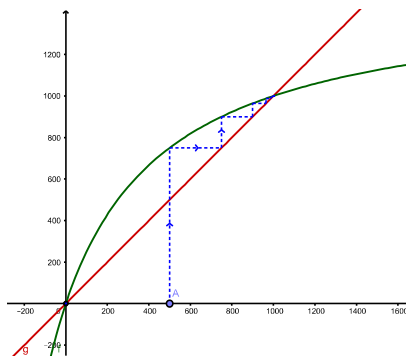


Figura 43 – Modelo Beverton-Holt com $R = 3$ e $K = 1000$

3.3 CURVA DE RICKER

O Modelo Logístico estudado anteriormente, para determinadas taxas de crescimento e capacidade suporte, pode assumir valores negativos de população fato que não pode ocorrer

pois é irreal biologicamente. Para contornar essa situação o modelo Ricker Curve ou também conhecido como equação logística de Ricker, transforma o modelo logístico em uma função exponencial, da seguinte forma,

$$N_{t+1} = N_t \exp \left[R \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right] \quad (3.9)$$

Dessa forma a população nunca irá assumir valores negativos.

Para analisar a estabilidade nos pontos fixos vamos novamente encontrar os pontos fixos da função associada e utilizar o Teorema 2.18 para verificar se os pontos são atratores ou repulsores. Calculando os pontos fixos dessa recorrência, obtemos:

$$p = p \exp \left[R \left(1 - \frac{p}{K} \right) \right]$$

Note que $p_1 = 0$ é o ponto fixo trivial, agora para $p \neq 0$, tem-se

$$1 = \exp \left[R \left(1 - \frac{p}{K} \right) \right]$$

logo,

$$\begin{aligned} \left[R \left(1 - \frac{p}{K} \right) \right] &= 0 \\ 1 - \frac{p}{K} &= 0 \\ \frac{p}{K} &= 1 \\ p &= K \end{aligned}$$

Portanto, $p_2 = K$.

Calculando a derivada nos pontos fixos, temos que:

$$|f'(N_t)| = \left| \exp \left[R \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right] + N_t \cdot \exp \left[R \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right] \cdot \left(1 - \frac{R}{K} \right) \right|$$

Assim, para $p_1 = 0$,

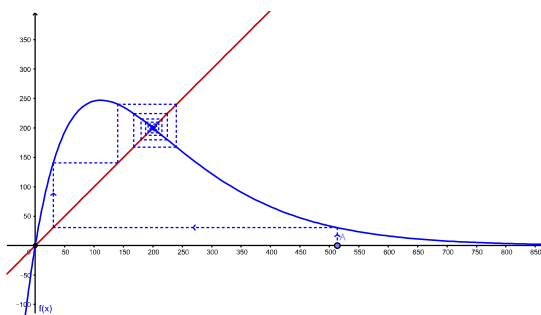
$$|f'(0)| = \left| \exp \left[R \left(1 - \frac{0}{K} \right) \right] \cdot \left(1 - \frac{R}{K} \right) + 0 \cdot \exp \left[R \left(1 - \frac{0}{K} \right) \right] \cdot \left(1 - \frac{R}{K} \right) \right| = |e^R| = e^R$$

para $p_2 = K$,

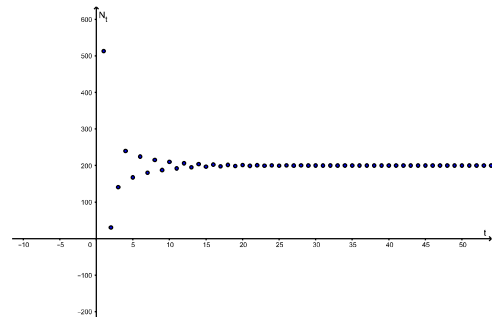
$$|f'(K)| = \left| \exp \left[R \left(1 - \frac{K}{K} \right) \right] \cdot \left(1 - \frac{R}{K} \right) \exp \left[R \left(1 - \frac{K}{K} \right) \right] \cdot \left(1 - \frac{R}{K} \right) \right| = |1 - R|$$

Observe que $|e^R| < 1$ para $R < 0$, logo o ponto fixo $p_1 = 0$ é atrator para valores negativos de R o que é absurdo, pois consideramos inicialmente que $R > 1$, portanto p_1 é repulsor. Agora, $|1 - R| < 1$, para $1 < R < 2$, neste caso p_2 é atrator.

Exemplo 3.5. Uma população de vírus se desenvolve de acordo com o modelo de Ricker com $R = 1,8$ e $K = 200$. A população inicial é de $N_0 = 513$. Como $1 < R < 2$, então a população deverá convergir para a capacidade suporte, de fato, observe o gráfico abaixo e note que a população converge para $N_t = 200$.



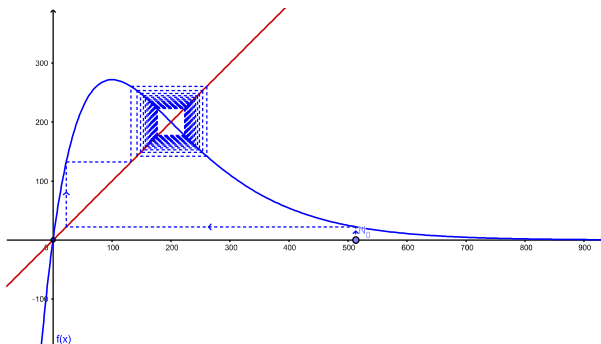
(a) Gráfico Cobweb



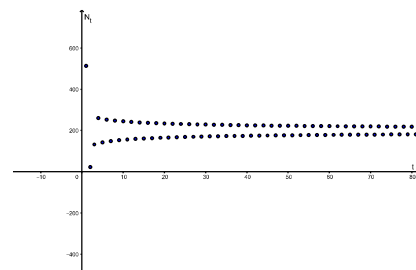
(b) Gráfico de pontos

Figura 44 – Modelo de Ricker com $R = 1,8$, $K = 200$ e $N_0 = 513$

No modelo de Ricker, para valores de $R \geq 2$ não podemos determinar analiticamente a estabilidade do ponto fixo $p_2 = K$, no entanto é possível fazer uma análise por meio do uso do gráfico Cobweb. A Figura 45 representa o modelo de Ricker quando $R = 2$ observe que o ponto fixo é estável, mas para $R = 4$ representado na Figura 46, o sistema é caótico.

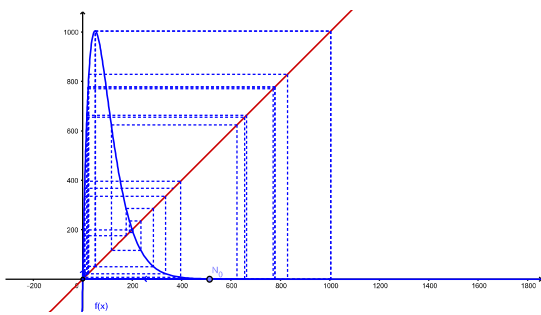


(a) Gráfico Cobweb

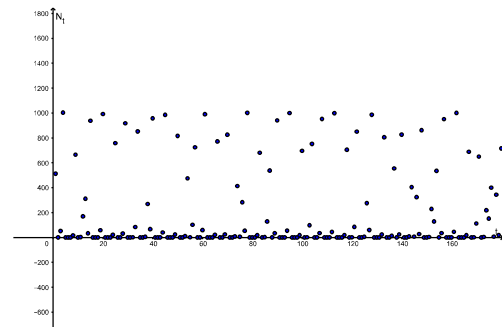


(b) Gráfico de pontos

Figura 45 – Modelo de Ricker com $K = 200$, $R = 2$ e $N_0 = 513$



(a) Gráfico Cobweb



(b) Gráfico de pontos

Figura 46 – Modelo de Ricker com $K = 200$, $R = 4$ e $N_0 = 513$

Estes experimentos nos levam a pensar que populações com taxa de crescimento $R = 2$ são mais estáveis e não possuem uma variação muito grande de indivíduos, enquanto que populações com taxa de crescimento $R = 4$ são muito variáveis.

CONCLUSÃO

Com o estudo de sequências recursivas e da teoria de ponto fixo analisamos a convergência de recorrências e desta forma concluímos que buscar o termo geral de uma sequência recursiva, nem sempre é uma boa estratégia para encontrar seu ponto limite. Neste trabalho vimos que para analisar a convergência de uma recorrência podemos verificar se a função associada é uma contração ou não. Caso seja, basta encontrar o seu ponto fixo e este será seu ponto limite, de acordo com o Teorema do Ponto Fixo. Porém, caso a função associada não seja uma contração, podemos encontrar seus pontos fixos e analisar sua estabilidade através do teste da derivada, classificando o ponto em atrator, repulsor ou estável. Feita esta análise, precisamos verificar se a condição inicial da sequência pertence a bacia de atração do ponto atrator ou não. Porém, em linhas gerais, percebemos que encontrar o ponto fixo e utilizar o Teorema do Ponto Fixo ou classificar a estabilidade do ponto, são estratégias mais eficientes.

REFERÊNCIAS

- ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T.; YORKE, J. **Chaos: an introduction to dynamical systems**. New York: Springer - Verlag, 1996.
- HOLMGREN, R. A. **A First Course in discret Dynamical System**. [S.l.]: Spinger - Verlag, 1994.
- LIMA, E. L. **Curso de Analise**. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- LIMA, E. L. et al. **A Matemática no Ensino Médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2.
- MURRAY, J. **Mathematical biology. I. An introduction**. 3ª. ed. New Yorke: Springer - Verlag, 1993.
- NEUHAUSER, C. **Calculus for Biology and Medicine**. 3ª. ed. [S.l.]: Pearson, 1962.
- RUDIN, W. **Princípios da Análise Matemática**. Rio de Janeiro: Universidade de Brasília, 1971.
- STEWART, J. **Cálculo Volume 2**. [S.l.]: Cengage Learning, 2011.