

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GABRIEL PLENTZ MOTTA

**GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NO PLANO E GEOMETRIA
ESFÉRICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2018

GABRIEL PLENTZ MOTTA

**GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NO PLANO E GEOMETRIA
ESFÉRICA**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná Câmpus Curitiba, para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Rudimar Luiz Nós, Dr.

CURITIBA

2018

TERMO DE APROVAÇÃO

“GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NO PLANO E GEOMETRIA ESFÉRICA”

por

“Gabriel Plentz Motta”

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às **14h00** do dia **3** de **dezembro** de 2018 na sala **A203** como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba. O aluno foi arguido pela Banca de Avaliação abaixo assinados. Após deliberação, de acordo com o parágrafo 1º do art. 37 do Regulamento Específico do trabalho de Conclusão de Curso para o Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR do Câmpus Curitiba, a Banca de Avaliação considerou o trabalho **aprovado**.

<hr/> <p>Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós (Presidente - UTFPR/Curitiba)</p>	<hr/> <p>Prof. Dr. Rubens Robles Ortega Júnior (Avaliador 1 - UTFPR/Curitiba)</p>
<hr/> <p>Prof. Dr. Marco Aurélio Kalinke (Avaliador 2 - UTFPR/Curitiba)</p>	<hr/> <p>Prof. Dr. Carlos Eduardo Duran Fernandez (Avaliador 3 - UTFPR/Curitiba)</p>
<hr/> <p>Profª Drª Priscila Savulski Ferreira de Miranda (Professor Responsável pelo TCC – UTFPR/Curitiba)</p>	<hr/> <p>Profª Drª Neusa Nogas Tocha (Coordenador do curso de Licenciatura em Matemática – UTFPR/Curitiba)</p>

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.”

AGRADECIMENTOS

Acima de qualquer coisa, agradeço a Deus por permitir que eu chegasse até o atual momento. De fato, a graduação em matemática foi prazerosa e desafiadora, inclusive este trabalho, porém nada disso seria alcançável sem antes confiar naquilo que o Senhor tem para mim, seja na matemática ou em qualquer outra coisa na Terra.

Em seguida, agradeço à minha família. Especialmente aos meus pais, Ana Paula Plentz Motta e Estarck Pereira Motta, por serem aqueles que me inspiram dia após dia, e ao meu irmão, Lucas Plentz Motta, meu eterno melhor amigo. Obrigado por nunca duvidarem de minha capacidade. À minha família materna e paterna, por fazer parte de meu crescimento e amadurecimento, cada um de vocês é especial para mim.

Aos meus queridos amigos (em ordem alfabética): Daniel Cunha, Diego Maia, Douglas Raupp, Fernando Leitão, Gabriel Seixas, Guilherme Barbosa, Isaque Medina, João Schmuker, Lucas Nogueira, Maurício José, Patrick Keune, Paulo Rempel e Rodrigo Avrechack. Às minhas queridas amigas (também em ordem alfabética): Amanda Castro, Ana Carolina Fontana, Fernanda Leitão, Géssica Marques e Nicole Raquel. Obrigado a todos vocês por me apoiarem, acreditarem em mim e por me oferecerem a bela amizade de vocês.

Por fim, e não menos importante, aos mestres. Em especial ao Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós, por me orientar neste trabalho, desde os conselhos até as críticas sinceras, e pelos momentos divertidos em nossas reuniões. Minha escolha deste trabalho está diretamente envolvida com o fato de você ser um exímio professor e por ter me apresentado as geometrias não-Euclidianas. E aos outros mestres do DAMAT-UTFPR (ordem alfabética) que participaram significativamente de minha trajetória: André Fabiano Steklain Lisboa, Adriano Verdério, Edna Sakon Banin, Francismar Ferreira Lima, José Carlos Coninck, Leônia Gabardo Negrelli, Luiz Cláudio Pereira, Marco Aurélio Kalinke, Nara Bobko, Neusa Nogas Tocha, Patrícia Hess, Patricia Sáñez Pacheco, Roy Wilhelm Probst e Rubens Robles Ortega Junior. Aos mestres do Sistema Colégio Militar do Brasil, em especial Alessandra Pavanelli, Galvez, Guilherme Leopoldi e Weber. Cada um de vocês, à sua maneira, é minha inspiração de como ser um bom professor.

Melhor é o homem paciente do que o guerreiro, mais vale controlar o seu espírito do que conquistar uma cidade.

Provérbios 16:32

O espaço é o objeto que o geômetra deve estudar.

Henri Poincaré (1854-1912)

RESUMO

MOTTA, Gabriel Plentz. **Geometrias não-Euclidianas no plano e geometria esférica**. 115 f. Trabalho de conclusão de curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

Discorremos neste trabalho sobre geometrias não-Euclidianas, enfatizando no plano o modelo do disco de Poincaré e, em três dimensões, a geometria esférica. Nesta geometria, determinamos alguns resultados importantes, tais como a soma dos ângulos internos e a área de um triângulo esférico, o teorema de Pitágoras esférico, a lei dos cossenos esférica e a lei dos senos esférica, relacionando-os com resultados da geometria Euclidiana. Concluímos apresentando algumas atividades lúdico-manipulativas sobre geometria esférica, as quais podem ser aplicadas em sala de aula com turmas do Ensino Médio ou do Ensino Superior.

Palavras-chave: Postulado das paralelas, o modelo do disco de Poincaré, superfície esférica, triângulos esféricos, trigonometria esférica.

ABSTRACT

MOTTA, Gabriel Plentz. **Non-Euclidean geometries in the plane and spherical geometry**. 115 f. Trabalho de conclusão de curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

We talk in this work about non-Euclidean geometries, emphasizing in the plane the Poincaré disk model and, in three dimensions, the spherical geometry. In this geometry, we determined some important results, such as the sum of the internal angles and the area of a spherical triangle, the spherical Pythagorean theorem, the spherical cosine law and the spherical sinus law, relating them to Euclidean geometry results. We conclude by presenting some ludic-manipulative activities on spherical geometry, which can be applied in the classroom with classes of High School or Higher Education.

Keywords: Parallel postulate, Poincaré disk model, spherical surface, spherical triangles, spherical trigonometry.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 – Reta r definida pelos pontos A e B	17
FIGURA 1.2 – Semirreta com origem em A e que passa por B	17
FIGURA 1.3 – Pontos colineares A , B e C	17
FIGURA 1.4 – Segmento de reta AB	18
FIGURA 1.5 – Semirretas opostas AB e AC	18
FIGURA 1.6 – Retas r e s concorrentes em P	18
FIGURA 1.7 – Circunferência de centro O e raio $R = \overline{OP}_i$, $i = 1, 2, \dots, n, \dots$	18
FIGURA 1.8 – Ângulo determinado pelas semirretas VA e VB	19
FIGURA 1.9 – Ângulos suplementares $A\hat{B}C$ e $C\hat{B}D$	19
FIGURA 1.10– Ângulo reto $C\hat{B}D$	19
FIGURA 1.11– Ângulos retos definidos pelas retas perpendiculares r e s	20
FIGURA 1.12– Reta t transversal às retas r e s	20
FIGURA 1.13– O quadrilátero de Saccheri	21
FIGURA 1.14– Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (WIKIPEDIA, 2017a)	23
FIGURA 1.15– <i>Investigações geométricas sobre a teoria das paralelas</i> (LIBRAIRIE, 2017)	24
FIGURA 1.16– Janos Bolyai (WIKIPEDIA, 2017b)	24
FIGURA 1.17– <i>Apêndice explicando a absoluta verdadeira ciência do espaço</i> (BOOKS, 2017)	25
FIGURA 1.18– Johann Carl Friedrich Gauss (WIKIPÉDIA, 2017c)	25
FIGURA 1.19– Georg Friedrich Bernhard Riemann (WIKIPÉDIA, 2017d)	26
FIGURA 1.20– Eugenio Beltrami (WIKIPÉDIA, 2017e)	26
FIGURA 1.21– Henri Poincaré (WIKIPÉDIA, 2017f)	27
FIGURA 1.22– Felix Christian Klein (WIKIPEDIA, 2017g)	27
FIGURA 1.23– Hermann Minkowski (WIKIPÉDIA, 2017h)	28
FIGURA 2.1 – Postulado das paralelas na geometria hiperbólica	32
FIGURA 2.2 – Disco de Poincaré \mathbb{D} e a fronteira \mathbb{F}	33
FIGURA 2.3 – Retas d-linhas no disco de Poincaré e pontos de fronteira	33
FIGURA 2.4 – Reta t tangente em P a uma d-linha no disco de Poincaré	34
FIGURA 2.5 – Retas paralelas à d-linha l no disco de Poincaré	35
FIGURA 2.6 – Retas ultraparalelas à d-linha l no disco de Poincaré	35
FIGURA 2.7 – Ângulo θ entre duas d-linhas que se intersectam no ponto P no disco de Poincaré	36
FIGURA 2.8 – Retas d-linhas que passam pelo ponto P no disco de Poincaré	36
FIGURA 2.9 – Triângulo hiperbólico no disco de Poincaré	38
FIGURA 2.10– Triângulo hiperbólico $\Delta_H ABC$ e triângulo Euclidiano $\Delta_E ABC$	38
FIGURA 2.11– Triângulo triplamente assintótico no disco de Poincaré	39
FIGURA 2.12– Triângulo triplamente assintótico ABC contido no triângulo triplamente assintótico DEF no disco de Poincaré	40
FIGURA 2.13– Triângulo retângulo ABC no disco de Poincaré	41
FIGURA 3.1 – Superfície esférica de centro O e raio ρ	47
FIGURA 3.2 – Polo norte N e polo sul S da esfera E_ρ^2	48

FIGURA 3.3 – Pontos P e P' diametralmente opostos	48
FIGURA 3.4 – A reta esférica: circunferência máxima de S_ρ^2	49
FIGURA 3.5 – Circunferências de longitude	50
FIGURA 3.6 – Meridiano de Greenwich	50
FIGURA 3.7 – Equador	51
FIGURA 3.8 – Circunferência de latitude	52
FIGURA 3.9 – Circunferências mínimas	52
FIGURA 3.10– Coordenadas do ponto P , pertencente à S_ρ^2 , em função de φ e ψ	53
FIGURA 3.11– Rotação de um vetor \vec{u} por um ângulo θ em \mathbb{R}^2	55
FIGURA 3.12– Transformação $L(Z, \varphi)$ que leva o ponto $A = (\rho, 0, 0)$ no ponto $P = \rho(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$	57
FIGURA 3.13– Rotações $L(Z, \varphi)$ e $L(Z, \psi')$ que levam o ponto A até o ponto P , passando pelo ponto P'	58
FIGURA 3.14– Região compreendida pela curva $f(x)$ e as retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$...	60
FIGURA 3.15– Aproximação da área da região compreendida pela curva $f(x)$ e as retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$ pela soma das áreas de n retângulos	60
FIGURA 3.16– Superfície gerada pela rotação da curva $y = f(x)$ em torno do eixo Ox ..	61
FIGURA 3.17– Superfície gerada pela rotação da curva $x = g(y)$ em torno do eixo Oy ..	62
FIGURA 3.18– Rotação de $y = \sqrt{\rho^2 - x^2}$ no intervalo $[-\rho, \rho]$ em torno do eixo Ox	63
FIGURA 3.19– Comprimento da curva descrita por uma função contínua no intervalo $[a, b]$	65
FIGURA 3.20– Aproximação do comprimento da curva $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ pela soma das n distâncias entre os pontos da partição	65
FIGURA 3.21– Uma geodésica de S_ρ^2 : $d(P, Q) = \widehat{PQ}$	68
FIGURA 3.22– Ângulo $POQ = \alpha$ de lados \vec{u} e \vec{v}	69
FIGURA 3.23– Calota esférica C	70
FIGURA 3.24– Seção da calota esférica	71
FIGURA 3.25– Zona esférica Z	72
FIGURA 3.26– Fuso esférico F	73
FIGURA 3.27– Triângulos esféricos definidos por três pontos distintos de S_ρ^2 , não pertencentes simultaneamente à mesma geodésica	75
FIGURA 3.28– Triângulo esférico ABC	76
FIGURA 3.29– Triângulo esférico triângulo	76
FIGURA 3.30– Triângulo esférico ABC , de ângulos internos α , β e γ , e os fusos esféricos F_α , F_β e F_γ	77
FIGURA 3.31– Triângulo esférico ABC retângulo em C	80
FIGURA 3.32– Triângulo ABC em S_ρ^2 : (a) retas r e s tangentes a S_ρ^2 em A e retas t e u tais que $\overline{OB} \subset t$ e $\overline{OC} \subset u$; (b) medidas de lados e ângulos de ABC	85
FIGURA 3.33– Triângulo ABC em S_ρ^2 : (a) vértices, ângulos e lados; (b) projeção ortogonal do vértice B sobre o plano definido pelo centro O de S_ρ^2 e pelos vértices A e C de ABC	90
FIGURA 4.1 – Atividade 1: a reta esférica - Tarefas 1 e 2	94
FIGURA 4.2 – Atividade 2: circunferências máximas que passam por dois pontos diametralmente opostos (antípodas) - Tarefa 2	96
FIGURA 4.3 – Atividade 3: triângulos esféricos - Tarefas 1 e 2	97
FIGURA 4.4 – Atividade 4: triângulo esférico triângulo - Tarefas 1 e 2	99
FIGURA 4.5 – Atividade 4: triângulo esférico triângulo - Tarefas 2 e 3	99

FIGURA 4.6 – Atividade 4: soma dos ângulos internos de um triângulo esférico - Tarefas 4 e 5	99
FIGURA 4.7 – Transferidor: instrumento para medir ângulos no plano	100
FIGURA 4.8 – Atividade 5: (a) tiras graduadas do transferidor esférico; (b) formato do transferidor esférico	102
FIGURA 4.9 – Colatitude ψ e longitude φ do ponto P na superfície esférica	103
FIGURA 4.10– Atividade 7: (a) área do triângulo das Bermudas; (b) vértices do triângulo das Bermudas - (EARTH, 2018)	105
FIGURA A.1 – GMT: (a) malha quadriculada; (b) pontos A e B na malha	111
FIGURA A.2– Distância entre dois pontos na geometria Euclidiana (\overline{AB}) e na GMT ($\overline{AC} + \overline{CB}$)	112
FIGURA A.3– Possíveis trajetos para ir de A a B : na geometria Euclidiana (segmento AB) e na GMT (demais trajetos)	112
FIGURA A.4 – Circunferência λ de centro O e raio R	113
FIGURA A.5– Lugar geométrico dos pontos que equidistam $3uc$ do ponto $O(0,0)$ na GMT	114

LISTA DE TABELAS

TABELA 4.1 – Coordenadas geográficas das cidades de Curitiba e de Uruma	104
TABELA 4.2 – Coordenadas geográficas do triângulo das Bermudas	106
TABELA 4.3 – Coordenadas esféricas do triângulo das Bermudas	106

LISTA DE SÍMBOLOS

S_ρ^2	superfície esférica de centro $O = (0, 0, 0)$ e raio ρ
E_ρ^2	esfera de centro $O = (0, 0, 0)$ e raio ρ
$d(P, O)$	distância do ponto P ao ponto O
$>$	maior do que
$<$	menor do que
\geq	maior ou igual do que
\leq	menor ou igual do que
$;$	tal que
\in	pertence
\cap	intersecta com
\equiv	congruente a
\approx	aproximadamente igual a
\parallel	paralela a
\perp	perpendicular a
\Rightarrow	condicional, implica, se...então
\rightarrow	tende a
\overline{AB}	segmento de reta de extremos nos pontos A e B ou comprimento do segmento AB
\widehat{AB}	arco de circunferência de extremos nos pontos A e B
\overrightarrow{AB}	semirreta de origem no ponto A e que passa pelo ponto B ou o vetor AB
\widehat{AVB}	ângulo de vértice V e lados VA e VB
$\triangle ABC$	triângulo de vértices A , B e C
$\mathcal{A}(\triangle ABC)$	área do triângulo ABC
\widehat{rs}	ângulo entre as retas r e s
φ	Latitude do ponto $P \in S_\rho^2$
ψ	Colatitude do ponto $P \in S_\rho^2$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
1.1 FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA	17
1.2 O QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES E AS NOVAS GEOMETRIAS	20
1.3 JUSTIFICATIVA	28
1.4 OBJETIVOS	29
1.4.1 Objetivo geral	29
1.4.2 Objetivos específicos	29
1.5 METODOLOGIA	30
1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO	30
2 GEOMETRIA HIPERBÓLICA	31
2.1 O DISCO DE POINCARÉ	32
2.1.1 A reta hiperbólica	33
2.1.2 Paralelismo	34
2.1.3 Distância entre dois pontos	36
2.1.4 Soma dos ângulos internos de um triângulo	37
2.1.5 Área do triângulo	39
2.1.6 Teorema de Pitágoras hiperbólico	40
2.1.7 Trigonometria hiperbólica	42
3 GEOMETRIA ESFÉRICA	46
3.1 CARACTERÍSTICAS	46
3.1.1 A reta esférica	49
3.2 COORDENADAS ESFÉRICAS	51
3.3 ROTAÇÃO EM S^2_p	54
3.4 A SUPERFÍCIE ESFÉRICA	59
3.4.1 Área	59
3.4.2 Comprimento da reta esférica	64
3.4.3 Geodésicas	68
3.4.4 Calota e zona esféricas	70
3.4.5 Fuso esférico	73
3.5 TRIÂNGULOS ESFÉRICOS	74
3.5.1 Área	77
3.5.2 Soma dos ângulos internos	79
3.5.3 Teorema de Pitágoras	79
3.6 TRIGONOMETRIA ESFÉRICA	83
3.6.1 Lei dos cossenos	84
3.6.2 Lei dos senos	89
4 ATIVIDADES LÚDICO-MANIPULATIVAS SOBRE GEOMETRIA ESFÉRICA	93
4.1 ATIVIDADE 1: A RETA ESFÉRICA	93
4.2 ATIVIDADE 2: O POSTULADO DAS PARALELAS	95
4.3 ATIVIDADE 3: TRIÂNGULO ESFÉRICO	96
4.4 ATIVIDADE 4: SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO ESFÉ-	

RICO	98
4.5 ATIVIDADE 5: CONSTRUINDO UM TRANSFERIDOR ESFÉRICO	100
4.6 ATIVIDADE 6: A CIDADE MAIS DISTANTE DE CURITIBA	103
4.7 ATIVIDADE 7: O TRIÂNGULO DAS BERMUDAS	104
5 CONCLUSÕES	107
REFERÊNCIAS	108
Apêndice A – A GEOMETRIA DO TAXISTA	111
A.1 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS	111
A.2 CIRCUNFERÊNCIA E A CONSTANTE π	113

1 INTRODUÇÃO

A civilização grega cooperou para a divulgação do conhecimento matemático de maneira singular. Muito do que sabemos sobre a matemática, atualmente, deve-se em grande parte a essa civilização que nos disponibilizou, frutiferamente, autores e trabalhos eminentes à filosofia, à arte, à escrita e à ciência durante seus períodos iniciais e, especialmente, no período de 300-100 a.C.

Como vestíbulo principal às geometrias alternativas, destaca-se o matemático Euclides de Alexandria (em torno de 300 a.C.), honrosamente conhecido como “pai da Geometria”. Infelizmente, como muitos outros gregos da antiguidade, pouco se sabe acerca de sua personalidade, isto é, quem exatamente foi Euclides. Contudo, vestígios históricos indicam que ele tenha sido um dos membros da equipe de líderes intelectuais convocados por Ptolomeu I para desenvolverem as diversas áreas do saber na então primeira instituição de ensino com cunho universitário, o *Museu*, cuja finalidade deveria convergir à definição de Burton (BURTON, 2011):

[...] o Museu foi todavia um marco na história da ciência. Deveria ser um instituto de pesquisa e busca pelo conhecimento, ao invés de educação.

A quantidade e diversidade de manuscritos presentes na instituição Museu era tão grande que sua única concorrente em termos intelectuais era a Biblioteca de Alexandria, visto que na época esta possuía um acervo com aproximadamente 200.000 manuscritos (BURTON, 2011).

Possivelmente, a formação matemática de Euclides esteja relacionada à Escola Platônica de Atenas. Apesar de não se conhecer a data exata de seu nascimento, felizmente, muito se conhece sobre sua fenomenal e mais importante obra: *Os elementos* (EUCLIDES, 2009).

A consistência na escrita é o principal motivo para haver tantas traduções e reimpressões de *Os elementos*. Escrita há mais de dois mil anos, a obra é considerada uma das mais influentes na matemática: é estudada e está presente de geração a geração, o que permite comparar sua influência com a da Bíblia. Apesar de antiga, tamanho são os aspectos lógico-dedutivos e formais de sua escrita e de suas demonstrações que levam (EVES, 2004) a afirmar:

Tão grande foi a impressão causada pelo aspecto formal de *Os Elementos* de Euclides nas gerações seguintes que a obra se tornou um paradigma de demonstração matemática rigorosa.

Euclides desenvolveu e ampliou estudos envolvendo aritmética e teoria dos números, bem como geometria plana e geometria espacial, estas consagradas e estudadas por gregos que viveram antes dele. Daí se prestigia Euclides ao se nomear tais geometrias como Euclidianas. Além disso, Burton (2011) completa a afirmação anterior de Eves (2004) ao escrever que “o trabalho de Euclides em grande parte permanece como modelo para um livro de matemática pura”, retratando sobre a obra de Adrien-Marie Legendre (1752-1833)¹.

As 465 proposições apresentadas em *Os elementos* estão distribuídas em 13 livros. As proposições geométricas são demonstradas através de cinco postulados² e de noções comuns. É evidente que a genialidade de Euclides possa ser vista como surpreendente por ele ter “escolhido” tão precisa e virtuosamente poucas noções e postulados para construir um trabalho repleto de proposições matemáticas.

As noções comuns de Euclides são, segundo a tradução de Bicudo (EUCLIDES, 2009):

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si;
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais;
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais;
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais;
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si;
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si;
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si;
8. E o todo é maior do que a parte;
9. E duas retas não contêm uma área.

Em particular, a noção 7 não é comumente aceita pelos matemáticos, devido ao fato de que a sobreposição de figuras não justifica rigorosa ou precisamente a demonstração de algum

¹*Eléments de Géométrie*: 1794-1823. Sua datação estar em período é pelo fato de, no mesmo, ter havido 12 edições da obra.

²Para a grande maioria dos matemáticos gregos antigos, havia uma distinção entre os termos “axioma” e “postulado”: o primeiro era uma suposição comum, tomada como verdade para toda e qualquer ciência, enquanto o segundo era uma verdade apenas para uma ciência específica em estudo.

teorema ou proposição. A noção 8 também pode confrontada quando se compara, por exemplo, a cardinalidade de dois conjuntos.

Analisemos agora os postulados de Euclides.

1.1 FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Euclides fundamentou sua geometria em cinco postulados. Apresentamos inicialmente os quatro primeiros, acompanhados de algumas definições, posto que o quinto foi considerado por diversos matemáticos, por séculos, como não evidente. Alguns historiadores conjecturam que o próprio Euclides não considerava o quinto postulado evidente, uma vez que o evitou até a demonstração da Proposição I 29 de *Os elementos*. A axiomatização da geometria Euclidiana proposta por David Hilbert (1862-1943) na obra *Fundamentos da Geometria* (HILBERT, 2003), publicada em 1899, está fora do escopo desta seção.

Postulado 1.1. *Dados dois pontos distintos A e B, há uma única reta $r = \overleftrightarrow{AB}$ que passa por ambos - Figura 1.1.*



Figura 1.1: Reta r definida pelos pontos A e B

Definição 1.1. *Dados dois pontos distintos A e B, pertencentes a uma reta r , a semirreta AB , denotada por \overrightarrow{AB} , é a porção de r que tem origem no ponto A e que passa por B - Figura 1.2.*



Figura 1.2: Semirreta com origem em A e que passa por B

Definição 1.2. *Sejam A, B e C pontos distintos quaisquer. Se há uma única reta r que passa pelos três pontos, A, B e C são colineares - Figura 1.3.*



Figura 1.3: Pontos colineares A , B e C

A Definição 1.2 pode ser estendida para mais do que três pontos.

Definição 1.3. Dados dois pontos distintos A e B , pertencentes a uma reta r , o segmento de reta AB , indicado por \overline{AB} , é a porção de r que tem por extremos os pontos A e B - Figura 1.4.



Figura 1.4: Segmento de reta AB

Postulado 1.2. Todo e qualquer segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente.

O Postulado 1.2 abrange as Definições 1.1, 1.2 e 1.3.

Definição 1.4. Sejam A , B e C pontos distintos pertencentes a uma reta r . As semirretas AB e AC são opostas se o único ponto comum a ambas é a origem A - Figura 1.5.



Figura 1.5: Semirretas opostas AB e AC

Definição 1.5. Se r e s são duas retas distintas com um único ponto P comum, então r e s são retas concorrentes em P , sendo P o ponto de intersecção - Figura 1.6.

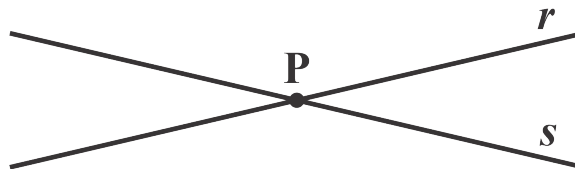


Figura 1.6: Retas r e s concorrentes em P

Definição 1.6. Dado um ponto O , o conjunto dos pontos P do plano que equidistam uma distância R de O , denominada raio, define uma figura geométrica chamada circunferência - Figura 1.7.

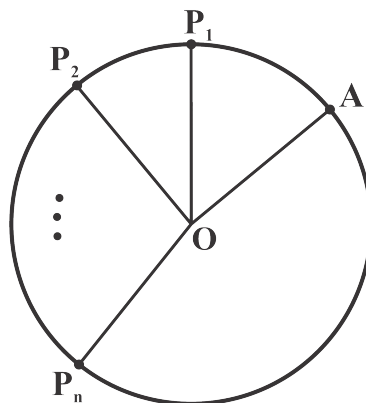


Figura 1.7: Circunferência de centro O e raio $R = \overline{OP_i}$, $i = 1, 2, \dots, n, \dots$

Postulado 1.3. *Quaisquer centro e raio definem uma circunferência.*

Definição 1.7. *Ângulo é a união de duas semirretas VA e VB de mesma origem V com a região α compreendida por ambas.*

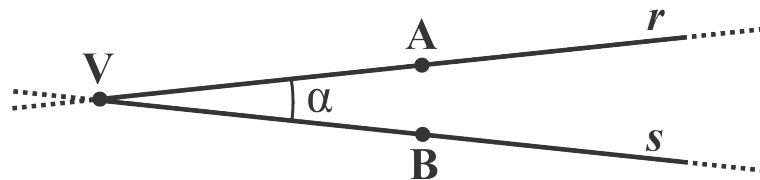


Figura 1.8: Ângulo determinado pelas semirretas VA e VB

Na Figura 1.8, o ponto V é o vértice e $\vec{VA} \subset r$ e $\vec{VB} \subset s$ são os lados do ângulo \widehat{AVB} (ou \widehat{BVA}).

Definição 1.8. *Sejam A, B e D pontos pertencentes à reta r e \vec{BC} uma semirreta concorrente a r em B . O ângulo suplementar a \widehat{CBD} é a região determinada por \vec{BA} e \vec{BC} , isto é, \widehat{ABC} - Figura 1.9.*

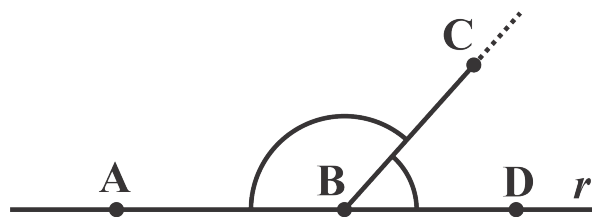


Figura 1.9: Ângulos suplementares \widehat{ABC} e \widehat{CBD}

Definição 1.9. *Sejam \vec{BA} e \vec{BD} semirretas opostas de origem B e \vec{BC} uma semirreta concorrente a ambas em B . Se o ângulo suplementar a \widehat{CBD} é congruente a ele, então \widehat{CBD} é um ângulo reto, ou seja, sua medida é 90° - Figura 1.10.*

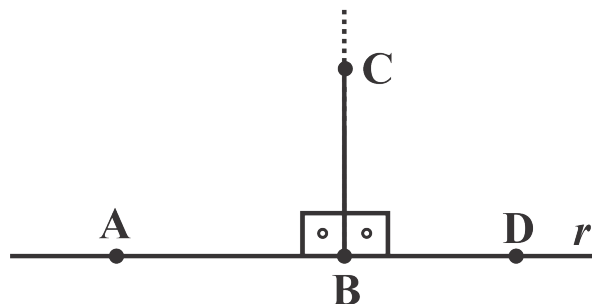


Figura 1.10: Ângulo reto \widehat{CBD}

Na Figura 1.10, \widehat{CBD} reto implica que \widehat{CBA} também é um ângulo reto.

Postulado 1.4. *Todos os ângulos retos são iguais entre si.*

Duas retas r e s concorrentes segundo um ângulo reto, denominadas retas perpendiculares, definem quatro ângulos retos, como mostra a Figura 1.11.

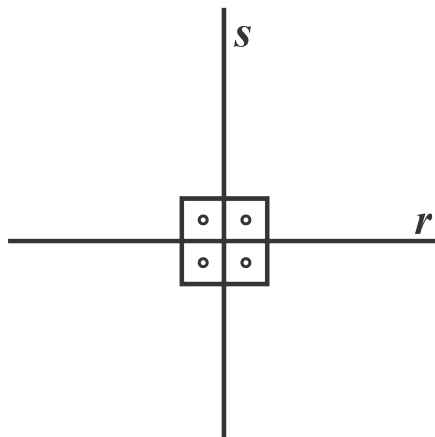


Figura 1.11: Ângulos retos definidos pelas retas perpendiculares r e s

Definição 1.10. *Sejam r e s duas retas distintas. Se uma reta t intersecta r e s em dois pontos distintos P e Q , com $P \in r$ e $Q \in s$, então t é transversal a r e s - Figura 1.12.*

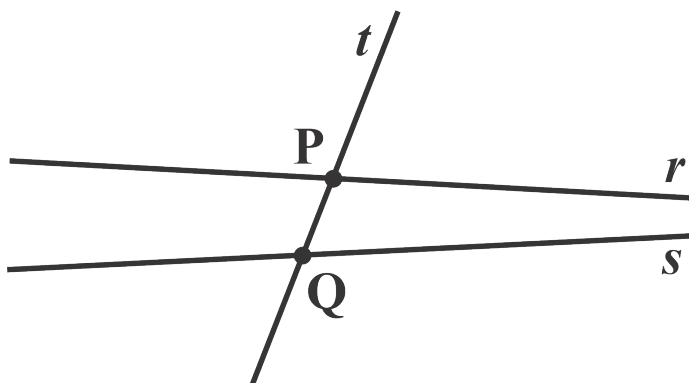


Figura 1.12: Reta t transversal às retas r e s

Podemos agora abordar o quinto postulado de Euclides.

1.2 O QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES E AS NOVAS GEOMETRIAS

Postulado 1.5 (das paralelas). *Se uma reta t corta duas outras retas r e s (no mesmo plano) de modo que a soma dos ângulos interiores de um mesmo lado de t é menor do que dois retos, então r e s , quando prolongadas suficientemente, se cortam daquele lado de t (CARMO, 1987).*

Em outras palavras, o Postulado 1.5 estabelece que *se duas retas coplanares forem prolongadas infinitamente e elas não se intersectarem em ponto algum, então elas serão paralelas*. John Playfair (1748-1819) estabeleceu uma versão equivalente para o postulado das paralelas (BURTON, 2011): *por um ponto, fora de uma reta dada, apenas uma paralela pode ser traçada em relação à reta dada*³. Existem outras maneiras para enunciar o quinto postulado (ÁVILA, 1988). Contudo, aí reside a controvérsia, a dificuldade para Euclides e os gregos antigos tratarem essa noção de paralelas como postulado, ou seja, como uma verdade evidente, diferentemente dos quatro primeiros postulados. Eves (2004) explica:

Esse postulado carece da concisão e da compreensibilidade simples dos demais, além de, em hipótese alguma, possuir a característica de ser “autoevidente”. Na verdade ele é o recíproco da Proposição I 17 e para os gregos antigos parecia mais uma proposição do que um postulado [...] Assim, era natural ter a curiosidade de saber se esse postulado era realmente necessário e cogitar que talvez ele pudesse ser deduzido, como teorema, dos outros nove “axiomas” e “postulados” ou, pelo menos, ser substituído por um equivalente mais aceitável.

Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) foi um dos primeiros matemáticos com registro histórico a se interessar pelo assunto. Sabe-se pouco sobre sua vida, tampouco sobre seus trabalhos, visto que estes tiveram pouca consideração por seus contemporâneos. Entretanto, isso não o impediu de desenvolvê-los, especialmente o decorrente do interesse pelo postulado das paralelas.

O matemático italiano Saccheri iniciou seus questionamentos acerca do postulado das paralelas com um quadrilátero $ABCD$, ilustrado na Figura 1.13, hoje conhecido como o quadrilátero de Saccheri. Neste quadrilátero, A e B são ângulos retos e os lados \overline{AC} e \overline{BD} congruentes. Saccheri conjecturou sobre três possibilidades para os ângulos \hat{C} e \hat{D} : as hipóteses dos ângulos agudo, reto e obtuso.

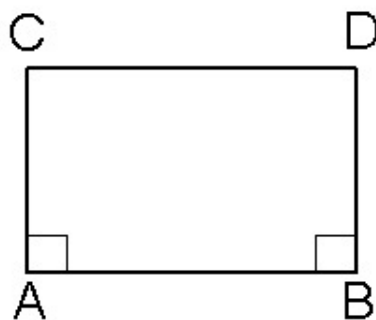


Figura 1.13: O quadrilátero de Saccheri

³A proposição I 31 de *Os elementos* garante a existência de uma única paralela passando por um ponto qualquer não pertencente a uma reta dada.

Por ter lido *Os elementos*, Saccheri aplicou, ainda quando lecionava no Colégio Jesuíta de Milão, a mesma forma de demonstração que Euclides utilizou, a *reductio ad absurdum*, ou redução ao absurdo (EVES, 2004). Se a hipótese do ângulo agudo ou a hipótese do ângulo obtuso levasse a uma contradição, a hipótese do ângulo reto se confirmaria. Saccheri provou a hipótese do ângulo obtuso como falsa e falhou ao provar a hipótese do ângulo agudo (SCRIBA et al., 2015), concluindo em sua obra *Euclides livre de toda imperfeição*⁴: “A hipótese do ângulo agudo é absolutamente falsa; porque é repugnante à natureza das linhas retas” (ROONEY, 2012).

O trabalho de Saccheri sobre a hipótese do ângulo agudo tornou-se o prelúdio para a concretização da geometria não-Euclidiana que hoje nomeamos hiperbólica. Assim, a afirmação anterior, felizmente, não colocou um ponto final na história das novas geometrias.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777), matemático suíço, também questionou o quinto postulado de Euclides. Semelhantemente a Saccheri, Lambert iniciou com um quadrilátero, este com três ângulos retos, assumindo três hipóteses possíveis para o quarto ângulo. Ele analisou, então, a soma dos ângulos internos desse quadrilátero como sendo menor, igual ou maior que dois ângulos retos. Como o matemático italiano, Lambert descartou o caso do ângulo obtuso, associando-o à geometria esférica. Já para o caso do ângulo agudo, ele considerou a possibilidade deste equivaler a uma esfera de raio imaginário (EVES, 2004). Infelizmente, não houve concretização para este caso, assim como na tentativa de Saccheri.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833), matemático francês, também tentou desbravar o quinto postulado seguindo hipóteses semelhantes às dos matemáticos anteriores. Novamente, a hipótese do ângulo agudo não foi concretizada, porém tampouco descartada (EVES, 2004). Legendre possivelmente tenha sido o último matemático a não alcançar resultados reveladores, o que tornava o drama das paralelas, gradativamente, uma história sem fim.

Entretanto, conforme afirma Burton (2011), a situação foi contornada:

Até um certo ponto, matemáticos começaram a compreender que as constantes falhas na busca por uma prova do problemático postulado não era devido à falta alguma de ingenuidade de suas partes, mas sim à independência do quinto postulado dos outros quatro. Isso significou que seria possível, ao substituir por um axioma contrário sobre paralelas, desenvolver uma geometria companheira à de Euclides, igualmente válida.

Eves (2004) complementa com: “[...] uma coleção de axiomas compreendendo um conjunto básico acrescido da hipótese do ângulo agudo é tão consistente quanto a geometria

⁴Esta obra foi publicada em 1733 em Milão, apenas alguns meses após a sua morte.

Euclidiana desenvolvida a partir do mesmo conjunto básico acrescido da hipótese do ângulo reto, isto é, o postulado das paralelas é independente dos demais postulados e devido a isso não pode ser deduzido dos demais".

Três matemáticos deram atenção ao quinto postulado dessa maneira. Mais especificamente, o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o russo Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1792-1856) e o húngaro Janos Bolyai (1802-1860). No que se tornou uma espécie de corrida armamentista, esses matemáticos se dedicaram fielmente à tentativa de finalmente resolver as pendências deixadas por Saccheri, Lambert e Legendre, o que resultaria no surgimento de uma nova geometria.



Figura 1.14: Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (WIKIPEDIA, 2017a)

Certamente Bolyai e Lobachevsky merecem a honra por desenvolverem, principalmente, as consequências lógicas desta nova geometria, visto que publicaram as descobertas de seus trabalhos oficialmente. Em especial Lobachevsky - Figura 1.14, que foi o primeiro a publicar em 1830 uma obra sobre o assunto no boletim da Universidade de Kazan. Contudo, pela dificuldade da disseminação das ideias e pela língua russa ser pouco conhecida pelos matemáticos Europa afora, Lobachevsky decidiu publicar em 1840 seu trabalho em alemão, cuja capa está ilustrada na Figura 1.15, intitulado *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (Investigações geométricas sobre a teoria das paralelas) (EVES, 2004).

Em 1873, o matemático britânico William Kingdon Clifford (1845-1879) comparou as descobertas de Lobachevsky com a teoria heliocêntrica proposta por Copérnico no século XVI, causando uma revolução científica. Ele afirmou: “*What Vesalius was to Galen, what Copernicus was to Ptolemy, that was Lobachevsky to Euclid*” (“O que Vesálio foi para Galeno⁵, o que Copérnico foi para Ptolomeu, Lobachevsky foi para Euclides”) (BURTON, 2011).

O húngaro Janos Bolyai, filho do grande matemático húngaro Farkas Wolfgang Bolyai (1775-1856), recebeu instruções de seu pai desde a tenra idade, mostrando precocidade para um exímio raciocínio matemático, tanto que substituía seu pai nas aulas que ele lecionava na Universidade de Göttingen. Wolfgang era amigo de longa data de Gauss (EVES, 2004), por terem estudado juntos em Göttingen e desde então terem discussões sobre ideias matemáticas.

⁵Aelius Galenus (130-210 d.C.), médico grego que influenciou o desenvolvimento da anatomia, em que sua concepção acerca disto foi influenciada pela teoria do humorismo, disseminando e se instaurando incontestavelmente na Europa até 1543, quando o médico belga Andreas Vesalius (1514-1564) publicou sua obra *De humani corporis fabrica* sobre dissecações humanas.

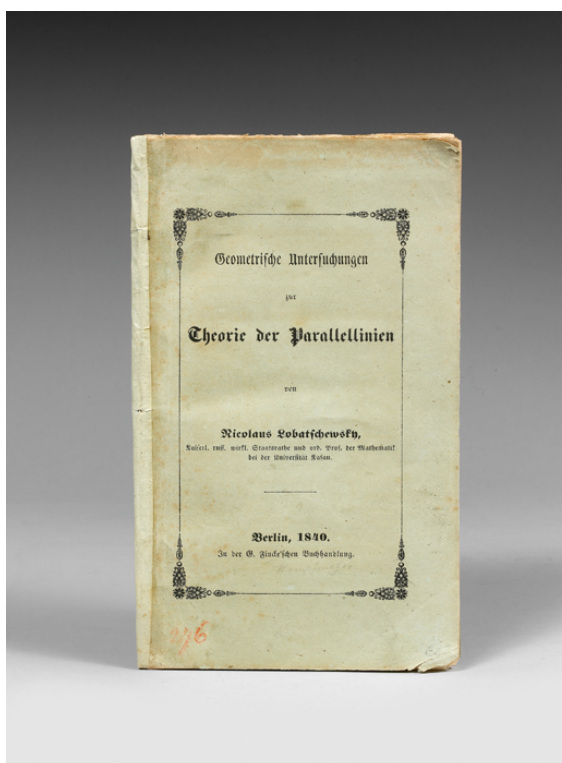


Figura 1.15: *Investigações geométricas sobre a teoria das paralelas* (LIBRAIRIE, 2017)

Assim, pela capacidade e potencialidade na matemática de Janos Bolyai - Figura 1.16, Wolfgang tentou enviá-lo em 1816 para receber instruções e treinamento de seu amigo alemão Gauss, mas não obteve resposta a seu pedido, feito através de uma carta. Janos seguiu então outro caminho, sendo admitido em 1817 na Academia Imperial de Engenharia de Viena, construindo sua reputação na matemática por 10 anos.



Figura 1.16: Janos Bolyai (WIKIPEDIA, 2017b)

As instruções de Wolfgang não incentivaram Janos a desenvolver suas ideias sobre o postulado das paralelas, pois quando buscou ajuda de seu pai ao ver a real natureza do problema, este mandou uma carta a ele dizendo (BURTON, 2011):

“Não perca tempo com este problema. Não levará a resultado algum; apenas será um veneno para sua vida... Acredito que eu já tenha pesquisado todas as ideias possíveis sobre o assunto.”

Contudo, isso não impediu o jovem matemático de persistir em novas descobertas. Diversas vezes Janos enviou suas ideias a seu pai, mas apenas depois, assim como Gauss e Lobachevsky, percebeu o postulado das paralelas como independente dos demais. Contrariamente ao

conselho de seu pai, em 1829 avisou-o após suas descobertas: “construí um estranho novo universo”. Em resposta, seu pai, surpreendido, aconselhou-o a publicar o trabalho o quanto antes possível, evitando assim que outra pessoa se apropriasse dele. Três anos mais tarde, as descobertas de Janos apareceram em 24 páginas da obra intitulada *Appendix Scientiam Spatii Absolute Veram Exhibens* (Apêndice explicando a absoluta verdadeira ciência do espaço) (BURTON, 2011), cuja capa está ilustrada na Figura 1.17.

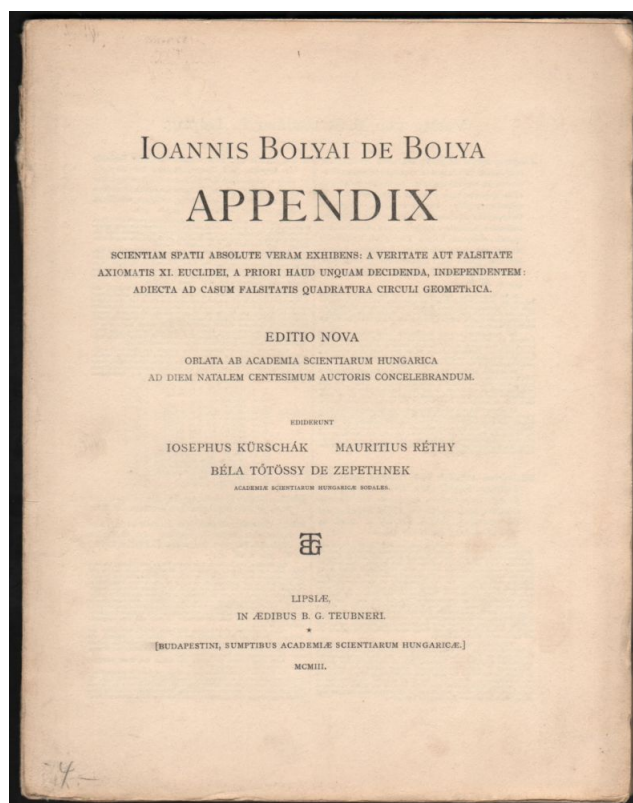


Figura 1.17: Apêndice explicando a absoluta verdadeira ciência do espaço (BOOKS, 2017)



Figura 1.18: Johann Carl Friedrich Gauss (WIKIPÉDIA, 2017c)

Há indícios de que Gauss - Figura 1.18, tenha sido o primeiro a desenvolver os trabalhos sobre esta nova geometria, antes mesmo de Janos Bolyai e Lobachevsky, visto que ele era amigo de Wolfgang Bolyai. Suas anotações em diários pessoais sugerem isto também, porém a ausência de qualquer publicação oficial sua sobre o assunto é condição suficiente para considerar isto apenas como possibilidade, até os dias de hoje (ROONEY, 2012).

Outros quatro grandes matemáticos deram atenção ao postulado das paralelas e contribuíram para o desenvolvimento de novas geometrias. Um deles desenvolveu uma própria, en-

quanto os outros três expandiram as ideias de Lobachevsky e Bolyai. Tais matemáticos foram os alemães Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) e Felix Christian Klein (1849-1925), o francês Jules Henri Poincaré (1854-1912) e o italiano Eugenio Beltrami (1835-1900).



Figura 1.19: Georg Friedrich Bernhard Riemann (WIKIPÉDIA, 2017d)

Esta afirmação apareceu pela primeira vez em uma palestra que Riemann proferiu em 1854 sobre sua obra *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sobre as hipóteses que formam a base da geometria). Tal obra é considerada um marco na história da matemática moderna. A noção de ilimitado é fundamental para a compreensão de superfícies esféricas. Assim, a geometria de Riemann se baseava na inexistência de paralelas por um ponto fora de uma reta dada, ideia totalmente oposta à geometria de Lobachevsky, uma ousadia que levou essa geometria a ser considerada tão consistente quanto à de Euclides (BURTON, 2011). A geometria esférica é uma particularidade da geometria de Riemann.

Riemann - Figura 1.19, analisou o postulado das paralelas considerando as retas como ilimitadas, e não mais a infinitude, como os trabalhos pioneiros. A percepção do matemático alemão foi importante para a construção de uma geometria não-Euclidiana distinta à de Lobachevsky. Riemann afirmava que: “Na extensão das construções espaciais para o imensuravelmente grande, devemos fazer a distinção entre o ilimitado e o infinito; o primeiro pertence às relações de grandeza e o segundo, às relações de medida” (BURTON, 2011).

Esta afirmação apareceu pela primeira vez em uma palestra que Riemann proferiu em 1854 sobre sua obra *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sobre as hipóteses que formam a base da geometria). Tal obra é considerada um marco na história da matemática moderna. A noção de ilimitado é fundamental para a compreensão de superfícies esféricas. Assim, a geometria de Riemann se baseava na inexistência de paralelas por um ponto fora de uma reta dada, ideia totalmente oposta à geometria de Lobachevsky, uma ousadia que levou essa geometria a ser considerada tão consistente quanto à de Euclides (BURTON, 2011). A geometria esférica é uma particularidade da geometria de Riemann.



Figura 1.20: Eugenio Beltrami (WIKIPÉDIA, 2017e)

Eugenio Beltrami - Figura 1.20, apresentou uma prova básica e concreta do que deveria ser, na verdade, um postulado de paralelas, em sua obra *Saggio di interpretazione della geometria non-Euclidea* (Ensaio sobre a interpretação da geometria não-Euclidiana), de 1868. Beltrami deu continuidade às ideias de Lobachevsky, desenvolvendo-as e tornando-as mais consistentes, apresentando a noção do que chamou de pseudo-esfera. O trabalho do italiano tornou "real" o que é "imaginário" na geometria de Lobachevsky, matematicamente falando, sendo, como a geometria de Riemann, tão consistente quanto a de Euclides (BURTON, 2011). Além da pseudoesfera, Beltrami desenvolveu os primeiros modelos para os atuais denominados *Modelo de Beltrami-Klein*, *Disco de Poincaré* e o *Semiplano*

de Poincaré (ROONEY, 2012). Beltrami ponderou que se o postulado das paralelas pudesse ser provado a partir dos outros postulados, isso o tornaria um teorema. E se fosse um teorema, a geometria de Lobachevsky seria inconsistente. Por isso, sua geometria seria consistente se a de Euclides também fosse (BURTON, 2011; ROONEY, 2012).



Figura 1.21: Henri Poincaré (WIKIPÉDIA, 2017f)

segunda⁶ são limitadas; a segunda, definida sobre a superfície de uma esfera, na qual as retas são circunferências denominadas círculos máximos.



Figura 1.22: Felix Christian Klein (WIKIPEDIA, 2017g)

Poincaré - Figura 1.21, considerado o último universalista, contribuiu significativamente à matemática, visto que desenvolveu estudos em quase todas as suas áreas, especialmente equações diferenciais, com uma notória reputação em seu país de origem, a França. Às geometrias não-Euclidianas, Poincaré forneceu o modelo denominado *disco de Poincaré* (BURTON, 2011).

Klein - Figura 1.22, contribuiu tanto para a geometria de Lobachevsky quanto para a de Riemann. Em relação à

segunda, ele considerou duas geometrias: a primeira, e mais simples, definida sobre a superfície de uma semiesfera, tal que duas retas são limitadas; a segunda, definida sobre a superfície de uma esfera, na qual as retas são circunferências denominadas círculos máximos.

A contribuição de Klein ao desenvolvimento das geometrias não-Euclidianas foi a união de teoria de grupos e geometria, como em seu trabalho *Erlanger Programm*, de 1872. A disseminação das ideias dessas novas geometrias ocorreu, principalmente, ao publicar duas monografias *Über die Sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* (Sobre a chamada Geometria Não-Euclidiana), em 1871 e 1873 (BURTON, 2011).

Klein nomeou as novas geometrias como são conhecidas atualmente. À de Lobachevsky, *geometria hiperbólica* e à de Riemann, *geometria elíptica*. Denominou também a geometria Euclidiana como *geometria parabólica* (EVES, 2004).

Além dessas três, há outras geometrias não-Euclidianas.

No final do século XIX, Herman Minkowski (1864-1909) - Figura 1.23, matemático alemão conhecido por trabalhos sobre geometria e teoria dos números, desenvolveu a *geometria*

⁶As descobertas de Klein expandiram a geometria de Riemann. Na geometria proposta por Klein há, para as retas, duas possibilidades: duas retas se intersectam em um único ponto (modelo semiesférico); duas retas se intersectam em dois pontos distintos, diametralmente opostos (modelo esférico).

do taxista (ou do táxi), na qual a noção de distância entre dois pontos não é mesma da geometria de Euclides (BURTON, 2011).



Figura 1.23: Hermann Minkowski (WIKIPÉDIA, 2017h)

Nessa geometria, as retas têm direção e orientação apenas vertical ou horizontal. Assim, não há segmentos de reta oblíquos. Um fato curioso da geometria do taxista é que a constante π assume um valor racional igual a 4, diferentemente do valor irracional na geometria Euclidiana. Apresentamos algumas características da geometria do taxista no Apêndice A.

1.3 JUSTIFICATIVA

Vivemos sobre uma superfície quase-esférica. A geometria Euclidiana não é suficiente para explicar o nosso mundo, muito menos o universo que o cerca. Assim, o estudo de geometrias não-Euclidianas, como a geometria esférica por exemplo, é um tema pertinente à formação do professor de matemática. Complementando com a afirmação de Rooney (2012):

A geometria euclidiana nos proporciona as ferramentas que precisamos para trabalhar com a geometria dos planos - mas planos perfeitamente planos existem somente em ambientes pequenos ou ideais. Nós vivemos em uma Terra esférica, em um universo com pelo menos três dimensões. Ao representar a superfície curva da Terra ou do céu, como o vemos em um pedaço de papel plano, nós estamos necessariamente distorcendo-a.

Ainda, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática da Secretaria de Estado da Educação do Paraná - SEED estabelecem parâmetros para o ensino de geometrias não-Euclidianas no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

O Conteúdo Estruturante Geometrias, no Ensino Fundamental, tem o espaço como referência, de modo que o aluno consiga analisá-lo e perceber seus objetos para, então,

representá-lo. Neste nível de ensino, o aluno deve compreender: noções de geometrias não-euclidianas: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais.

[...] Também, no Ensino Médio, aprofundam-se os estudos das noções de geometrias não-euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria projetiva, geometria hiperbólica e elíptica.

[...] Para abordar os conceitos elementares da geometria hiperbólica, uma possibilidade é através do postulado de Lobachevsky (partindo do conceito de pseudoesfera, pontos ideais, triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos internos). Já na apresentação da geometria elíptica, fundamentá-la através do seu desenvolvimento histórico e abordar: postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodésia; círculos máximos e círculos menores; distância na superfície esférica; ângulo esférico; triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos; classificação dos triângulos esféricos quanto à medida dos lados e dos ângulos; os conceitos referentes à superfície da Terra: polos, equador, meridianos, paralelos e as direções de movimento. (SEED, 2008)

Dessa forma, as diretrizes da SEED para o ensino de geometrias não-Euclidianas na Educação Básica e também a pequena quantidade de referências em português abordando geometria esférica nos motivaram a pesquisar sobre o tema.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 OBJETIVO GERAL

Elaborar um texto introdutório sobre geometrias não-Euclidianas, especialmente sobre geometria esférica, que possa ser utilizado na disciplina Geometria B do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, Câmpus Curitiba.

1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudar algumas aplicações das geometrias não-Euclidianas.
- Organizar material didático para os professores de matemática da Educação Básica e para os estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática.
- Propor atividades lúdico-manipulativas sobre geometria esférica para o Ensino Médio e para o Ensino Superior.
- Explorar softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra e o CorelDRAW, na construção de figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais.

1.5 METODOLOGIA

Empregamos como metodologia a pesquisa qualitativa com revisão bibliográfica. Os procedimentos metodológicos que usamos são descritos a seguir.

- Estudo de publicações sobre geometrias não-Euclidianas e história da matemática.
- Emprego de um software de geometria dinâmica, como o GeoGebra (GEOGEBRA, 2017) e o CorelDRAW® (COREL, 2018), para construir figuras planas e espaciais.
- Elaboração de material didático.
- Uso da fotografia para registrar os resultados de atividades propostas.

As referências básicas empregadas são (ANDRADE, 2013) e (BRANNAN et al., 2012).

1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está estruturado da seguinte forma:

1. no Capítulo 1, apresentamos a justificativa, os objetivos e a metodologia e dissertamos sobre geometrias não-Euclidianas, enfatizando o problema que originou as mesmas;
2. no Capítulo 2, discorremos sobre o disco de Poincaré, um modelo de geometria hiperbólica no plano, comparando conceitos e relações nessa geometria com a geometria Euclidiana;
3. no Capítulo 3, expomos a geometria esférica, comparando conceitos e relações nessa geometria com a geometria Euclidiana;
4. no Capítulo 4, propomos atividades lúdico-manipulativas sobre geometria esférica;
5. no Capítulo 5, mencionamos as conclusões;
6. no Apêndice, fazemos uma breve introdução à geometria do taxista.

2 GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Apresentamos neste capítulo o modelo do disco de Poincaré, um modelo de geometria hiperbólica no plano, e discutimos nesse modelo conceitos e relações geométricas, tais como a distância entre dois pontos, o paralelismo de retas, a soma dos ângulos internos e a área de um triângulo e o teorema de Pitágoras. Nossa principal referência neste capítulo é *Geometry* (BRANNAN et al., 2012) e no desenvolvimento do mesmo não demonstramos a maior parte das relações mencionadas, isto porque as demonstrações exigem transformações hiperbólicas que não são objeto de estudo deste trabalho.

A geometria Euclidiana está fundamentada em cinco postulados, sendo o quinto postulado de Euclides o postulado das paralelas.

Postulado 2.1 (Postulado das paralelas - Versão equivalente de Playfair¹). *Dados uma reta l e um ponto P não pertence à l , há uma única reta m que passa por P e é paralela à l .*

As geometrias não-Euclidianas, como a geometria hiperbólica e a geometria elíptica, da qual a geometria esférica é um caso particular, são oriundas da negação do Postulado 2.1. Lobachevsky, que aprofundou os trabalhos desenvolvidos por Saccheri, foi o primeiro a publicar oficialmente seus resultados sobre uma geometria não-Euclidiana, sendo considerado um dos “pais” da geometria hiperbólica (o outro é Johann Bolyai).

Na geometria hiperbólica, derivada do caso do ângulo agudo no quadrado de Saccheri, o Postulado 2.1 é substituído pelo Postulado 2.2, também denominado postulado de Lobachevsky ou postulado hiperbólico das paralelas.

Postulado 2.2 (Hiperbólico das paralelas). *Dados uma reta l e um ponto P não pertence à l , há pelo menos duas retas m que passam por P e são paralelas à l .*

A Figura 2.1 ilustra a concepção do Postulado 2.2.

Na geometria Euclidiana, o Postulado 2.1 permite estabelecer que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Na geometria hiperbólica, esse resultado precisa ser revisto.

¹A prova da versão equivalente de Playfair pode ser encontrada em (ÁVILA, 1988).

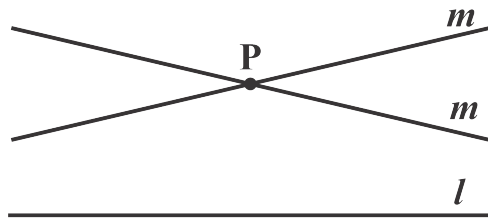


Figura 2.1: Postulado das paralelas na geometria hiperbólica

Há vários modelos para a geometria hiperbólica, como, por exemplo, o modelo em três dimensões (a pseudoesfera) de Beltrami, e os modelos de Klein e de Poincaré, ambos no plano. Na sequência, analisamos, de maneira introdutória, conceitos e relações na geometria hiperbólica através de um dos modelos idealizados pelo matemático francês Henri Poincaré.

2.1 O DISCO DE POINCARÉ

Este modelo de geometria hiperbólica é representado em uma região do plano delimitada por uma circunferência (disco) unitária. Mais especificamente, o modelo é o disco \mathbb{D} de centro $O = (0, 0)$ definido pelos pontos z que estão a uma distância de O menor do que a medida do raio unitário ($R = 1$) de \mathbb{D} , isto é,

$$\mathbb{D} = \{z; |z| < 1\}, \quad (2.1)$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}.$$

No disco unitário (2.1), os pontos que equidistam de $O = (0, 0)$, ou seja, que estão a uma distância unitária de O , constituem os pontos de fronteira \mathbb{F} de \mathbb{D} . Assim:

$$\mathbb{F} = \{z; |z| = 1\}, \quad (2.2)$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbb{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}.$$

A Figura 2.2 ilustra o disco de Poincaré \mathbb{D} e sua fronteira \mathbb{F} .

O conjunto dos pontos de fronteira (2.2) de \mathbb{D} é uma circunferência unitária de centro $O = (0, 0)$.

Estabelecida a concepção do modelo de geometria hiperbólica, precisamos agora definir o que é uma reta nessa geometria.

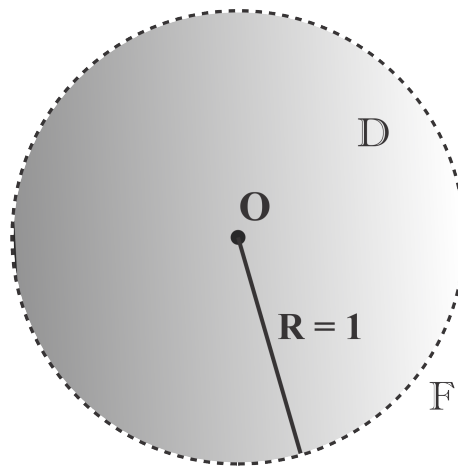


Figura 2.2: Disco de Poincaré \mathbb{D} e a fronteira \mathbb{F}

2.1.1 A RETA HIPERBÓLICA

A grande diferença em relação à geometria Euclidiana é que, no modelo do disco de Poincaré, algumas retas são curvilíneas (arcos de circunferências), enquanto outras são segmentos de reta Euclidianos. Essas retas são denominadas *d-linhas*.

Definição 2.1. *Uma d-linha é uma parte de uma circunferência Euclidiana contida no disco \mathbb{D} e que intersecta a fronteira \mathbb{F} de \mathbb{D} em dois pontos distintos determinando nesses pontos de fronteira dois ângulos retos.*

Segundo a Definição 2.1, todo diâmetro de \mathbb{D} , um segmento de reta Euclidiano, é uma d-linha. A Figura 2.3 ilustra d-linhas no disco de Poincaré.

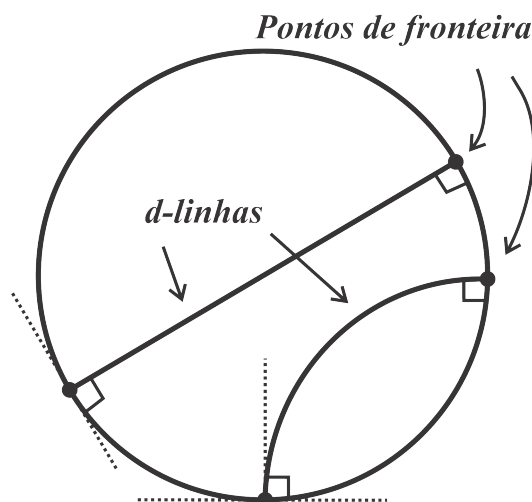


Figura 2.3: Retas d-linhas no disco de Poincaré e pontos de fronteira

Toda d-linha, distinta de um diâmetro de \mathbb{D} , não passa pelo centro O de \mathbb{D} . Uma reta

t , tangente a uma dessas d -linhas no ponto de fronteira P , é um diâmetro de \mathbb{D} , como mostra a Figura 2.4.

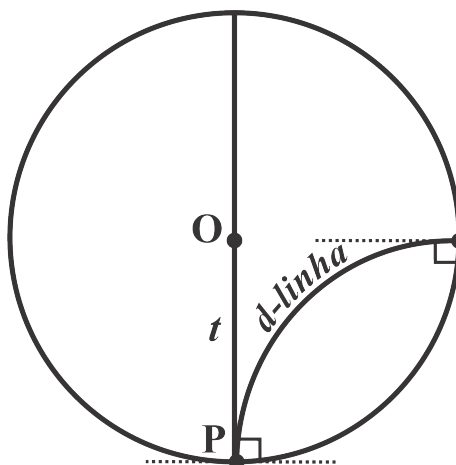


Figura 2.4: Retra t tangente em P a uma d -linha no disco de Poincaré

As d -linhas no disco de Poincaré podem ser descritas analiticamente. De acordo com (BRANNAN et al., 2012), há dois critérios para descrevê-las.

Teorema 2.1. *Se l é uma d -linha contida em \mathbb{D} , então ela é descrita por uma das equações abaixo:*

$$ax + by = 0, \text{ com } a, b \neq 0; \quad (2.3)$$

$$x^2 + y^2 + fx + gy + 1 = 0, \text{ com } f^2 + g^2 > 4. \quad (2.4)$$

O critério (2.3) descreve um diâmetro de \mathbb{D} ; o critério (2.4), um arco de circunferência Euclidiana. A demonstração do Teorema 2.1 pode ser encontrada em (BRANNAN et al., 2012).

Caracterizada a reta no disco de Poincaré, precisamos agora estabelecer a condição para o paralelismo de retas.

2.1.2 PARALELISMO

Definição 2.2. *Duas d -linhas são paralelas se não se intersectam em \mathbb{D} e se as circunferências Euclidianas das quais são uma parte se intersectam em um ponto de \mathbb{F} .*

A Figura 2.5 ilustra duas retas paralelas à reta l no disco de Poincaré.

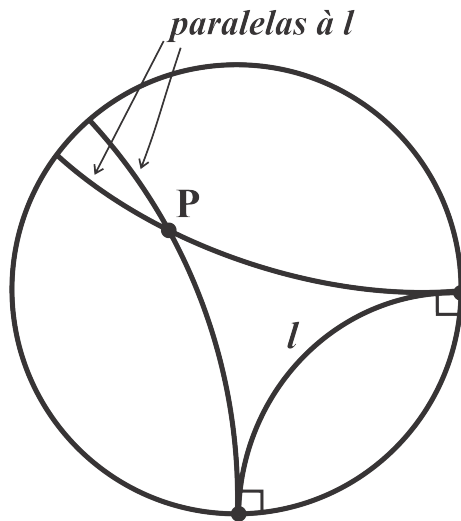


Figura 2.5: Retas paralelas à d-linha l no disco de Poincaré

Definição 2.3. Duas d-linhas são ultraparalelas se não se intersectam em \mathbb{D} e se as circunferências Euclidianas das quais são uma parte não se intersectam em \mathbb{F} .

A Figura 2.6 ilustra ultraparalelas à d-linha l , que passam pelo ponto P , no disco de Poincaré.

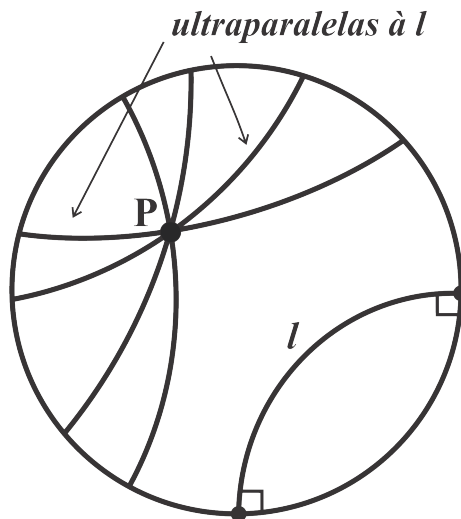


Figura 2.6: Retas ultraparalelas à d-linha l no disco de Poincaré

Duas d-linhas não paralelas determinam um ângulo quando se intersectam.

Definição 2.4. O ângulo hiperbólico entre duas d-linhas distintas que se intersectam no ponto $P \in \mathbb{D}$ é o ângulo Euclidiano θ determinado pelas tangentes às d-linhas em P .

A Figura 2.7 mostra o ângulo θ determinado por duas d-linhas que se intersectam.

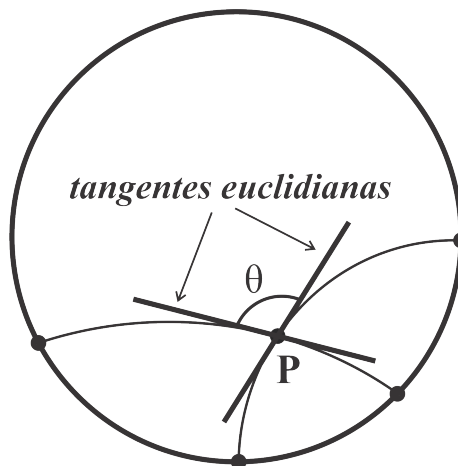


Figura 2.7: Ângulo θ entre duas d-linhas que se intersectam no ponto P no disco de Poincaré

2.1.3 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Na geometria Euclidiana, há uma única reta que passa por dois pontos distintos (postulado de determinação) e, por um ponto, passam infinitas retas. Na geometria hiperbólica, temos os seguintes resultados.

Teorema 2.2. *Se P é um ponto pertencente a \mathbb{D} , então há infinitas d-linhas que passam por P .*

A Figura 2.8 mostra várias d-linhas que passam por $P \in \mathbb{D}$.

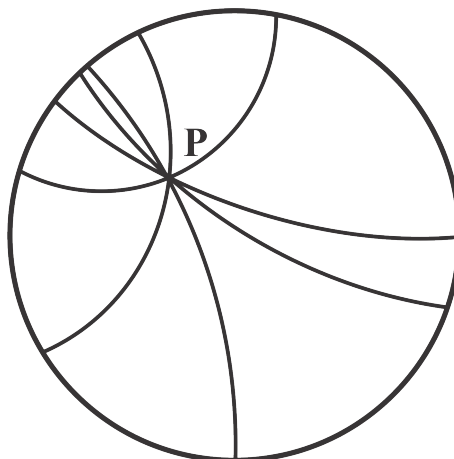


Figura 2.8: Retas d-linhas que passam pelo ponto P no disco de Poincaré

Teorema 2.3. *Se P e Q são dois pontos distintos pertencentes a \mathbb{D} , então existe uma única d-linha que passa por P e Q .*

A demonstração dos Teoremas 2.2 e 2.3 envolve transformações hiperbólicas e pode ser encontrada em (BRANNAN et al., 2012).

Precisamos agora determinar a distância entre dois pontos distintos que definem uma única d -linha em \mathbb{D} . Para tanto, devemos considerar \mathbb{D} no plano complexo, ou seja, $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, onde \mathbb{C} é o conjunto dos números complexos. Neste conjunto, um número z é representado como $z = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, $a = \text{Re}(z)$ é a parte real de z , $b = \text{Im}(z)$ é a parte imaginária de z , $i = \sqrt{-1}$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o módulo de z e $\bar{z} = a - bi$ é o conjugado de z . Dessa forma, a distância Euclidiana d entre dois pontos complexos distintos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ é dada, segundo (PALIOURAS, 1975), por:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} = d(\bar{z}_1, \bar{z}_2). \quad (2.5)$$

No disco de Poincaré, a distância (2.5) é definida por uma transformação hiperbólica.

Definição 2.5. A distância hiperbólica $d(z_1, z_2)$ entre os pontos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ é dada por

$$d(z_1, z_2) = \tanh^{-1} \left(\left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| \right),$$

onde \tanh é a função tangente hiperbólica definida por

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{(e^x - e^{-x})/2}{(e^x + e^{-x})/2} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}},$$

sendo $\sinh x$ e $\cosh x$ as funções seno e cosseno hiperbólicos, respectivamente, no conjunto dos números reais.

Na Definição 2.5, se um dos pontos for a origem do plano complexo, como por exemplo $z_1 = 0$, então a distância $d(z_1, z_2)$ é dada por $d(0, z_2) = \tanh^{-1}(|z_2|)$.

A distância entre dois pontos distintos de \mathbb{D} define a medida do lado de um polígono contido em \mathbb{D} . Essa medida é importante à caracterização de triângulos hiperbólicos, denominados d -triângulos, e à determinação da soma dos ângulos internos desses triângulos.

2.1.4 SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO

Definição 2.6. Um triângulo hiperbólico ou um d -triângulo é a região de \mathbb{D} delimitada por três arcos de circunferência (partes de três d -linhas) que têm, dois a dois, um extremo comum.

Segundo a Definição 2.6, um triângulo hiperbólico ou um d -triângulo é determinado por três pontos distintos de \mathbb{D} que não pertencem simultaneamente à mesma d -linha. Esses três pontos definem, dois a dois, três arcos de circunferências Euclidianas, os quais têm, dois a dois, um extremo comum. Esses arcos são os lados do d -triângulo. A Figura 2.9 ilustra um d -triângulo no disco de Poincaré.



Figura 2.9: Triângulo hiperbólico no disco de Poincaré

Teorema 2.4. *A soma dos ângulos internos de um d-triângulo é menor do que π .*

Demonstração.

Sem perda de generalidade, seja $\Delta_H ABC$ um d-triângulo tal que os lados AB e AC estão contidos em diâmetros de \mathbb{D} e o lado BC é um arco de circunferência, como na Figura 2.10.

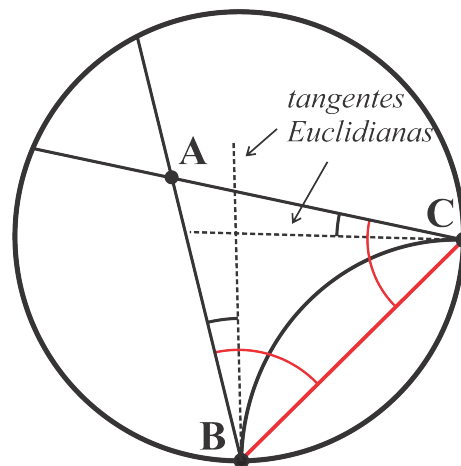


Figura 2.10: Triângulo hiperbólico $\Delta_H ABC$ e triângulo Euclidiano $\Delta_E ABC$

Seja ainda $\Delta_E ABC$ o triângulo Euclidiano no qual o lado \overline{BC} é um segmento de reta. Da Definição 2.1, sabemos que a d-linha definida pelos pontos B e C é um arco de circunferência e, portanto, \overline{BC} é uma corda da circunferência na qual a d-linha está contida.

Dessa forma e usando a Definição 2.4, podemos afirmar que os ângulos definidos pela d-linha com os lados AB e AC no $\Delta_H ABC$ são menores do que os ângulos definidos por \overline{BC} com os lados AB e AC no $\Delta_E ABC$.

Como \widehat{BAC} é o mesmo ângulo para $\Delta_H ABC$ e $\Delta_E ABC$ e a soma dos ângulos internos

do $\Delta_E ABC$ é igual a π , concluímos que a soma dos ângulos internos do $\Delta_H ABC$ é menor do que π .

□

O Teorema 2.4 nos possibilita provar outros teoremas, como a soma dos ângulos internos de um d-quadrilátero contido em \mathbb{D} .

Teorema 2.5. *A soma dos ângulos internos de um d-quadrilátero é menor do que 2π .*

A prova do Teorema 2.5 pode ser encontrada em (BRANNAN et al., 2012).

2.1.5 ÁREA DO TRIÂNGULO

Definição 2.7. *Um d-triângulo é triplamente assintótico quando seus três vértices pertencem à fronteira \mathbb{F} do disco \mathbb{D} .*

A Figura 2.11 mostra um d-triângulo triplamente assintótico em \mathbb{D} .

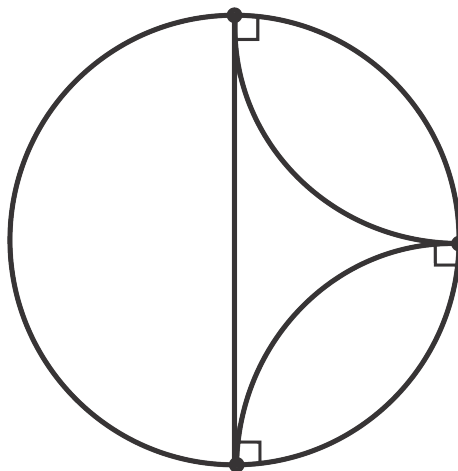


Figura 2.11: Triângulo triplamente assintótico no disco de Poincaré

Teorema 2.6. *Se ABC é um d-triângulo, então existe um d-triângulo triplamente assintótico DEF que contém ABC .*

A Figura 2.12 ilustra um d-triângulo contido em um d-triângulo triplamente assintótico.

Teorema 2.7. *Todos os d-triângulos triplamente assintóticos têm a mesma área hiperbólica, cujo valor é um número finito.*

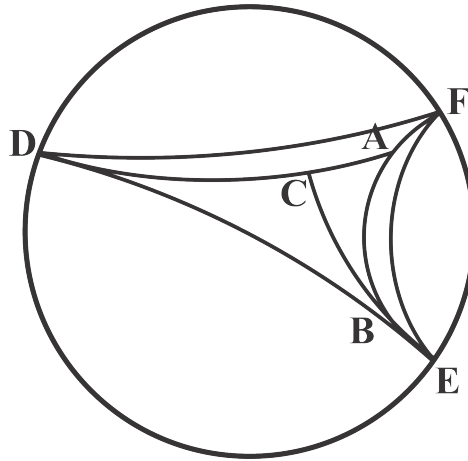


Figura 2.12: Triângulo triplamente assintótico ABC contido no triângulo no triângulo triplamente assintótico DEF no disco de Poincaré

Teorema 2.8. *Se ABC é um d -triângulo, com ângulos internos α, β e γ , então a área $\mathcal{A}(\Delta ABC)$ de ABC é dada por*

$$\mathcal{A}(\Delta ABC) = K [\pi - (\alpha + \beta + \gamma)], \quad (2.6)$$

onde $K = \frac{k}{\pi}$ é uma constante comum a todos os d -triângulos, sendo k a área de um d -triângulo triplamente assintótico.

Na relação (2.6), é usual considerar $K = 1$, sendo a expressão $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ a *deficiência* do d -triângulo ABC , isto é, o quanto a soma dos ângulos internos de ABC fica aquém de π .

Os Teoremas 2.6 e 2.7 possibilitam demonstrar o Teorema 2.8. A demonstração desses teoremas envolve transformações hiperbólicas e pode ser encontrada em (BRANNAN et al., 2012).

2.1.6 TEOREMA DE PITÁGORAS HIPERBÓLICO

Teorema 2.9 (Teorema de Pitágoras hiperbólico). *Se ABC é um d -triângulo, retângulo no vértice C e de lados a, b e c , com c oposto a \hat{C} , então*

$$\cosh 2c = \cosh 2a \cdot \cosh 2b. \quad (2.7)$$

A Figura 2.13 ilustra um d -triângulo ABC , retângulo em C , no disco de Poincaré.

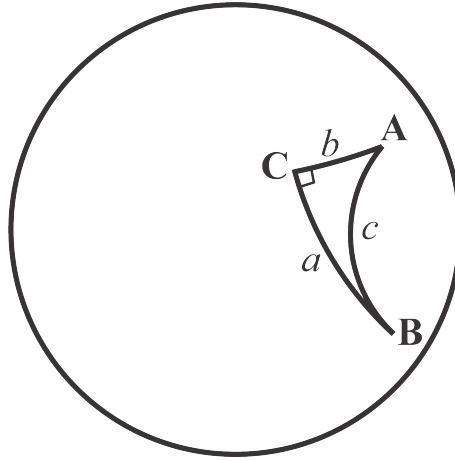


Figura 2.13: Triângulo retângulo ABC no disco de Poincaré

A demonstração do Teorema 2.9 envolve transformações hiperbólicas e pode ser encontrada em (BRANNAN et al., 2012). Contudo, podemos demonstrar que a relação (2.7) se aproxima do caso Euclidiano quando consideramos em \mathbb{D} um d -triângulo retângulo de lados muito pequenos.

Corolário 2.1. *Se ABC é um d -triângulo, retângulo em C e de lados a , b e c , com c oposto a \hat{C} , então a relação*

$$\cosh 2c = \cosh 2a \cdot \cosh 2b \quad (2.8)$$

tende ao caso Euclidiano, ou seja, $c^2 = a^2 + b^2$, quando consideramos a , b e c muito pequenos.

Demonstração.

Toda função $f(x) \in C^\infty$ (infinitamente diferenciável) pode ser expandida em uma série de Taylor (STEWART, 2017a), da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n,$$

a qual se reduz a uma série de Maclaurin quando $a = 0$.

A série de Maclaurin da função $\cosh x$ é dada por (STEWART, 2017b):

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots \quad (2.9)$$

Expandindo $\cosh 2c$, $\cosh 2a$ e $\cosh 2b$ em série de Maclaurin por intermédio de (2.9), obtemos:

$$\cosh 2c = 1 + \frac{(2c)^2}{2!} + \frac{(2c)^4}{4!} + \frac{(2c)^6}{6!} + \frac{(2c)^8}{8!} + \dots; \quad (2.10)$$

$$\cosh 2a = 1 + \frac{(2a)^2}{2!} + \frac{(2a)^4}{4!} + \frac{(2a)^6}{6!} + \frac{(2a)^8}{8!} + \dots; \quad (2.11)$$

$$\cosh 2b = 1 + \frac{(2b)^2}{2!} + \frac{(2b)^4}{4!} + \frac{(2b)^6}{6!} + \frac{(2b)^8}{8!} + \dots. \quad (2.12)$$

Considerando a , b e c muito pequenos, podemos desprezar em (2.10), (2.11) e (2.12) as potências com expoente maior do que dois, pois estas são muito menores do que a , b e c . Assim, podemos reescrever (2.10), (2.11) e (2.12), respectivamente, como:

$$\cosh 2c \approx 1 + \frac{(2c)^2}{2!}; \quad (2.13)$$

$$\cosh 2a \approx 1 + \frac{(2a)^2}{2!}; \quad (2.14)$$

$$\cosh 2b \approx 1 + \frac{(2b)^2}{2!}. \quad (2.15)$$

Substituindo (2.13), (2.14) e (2.15) em (2.8), obtemos:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{(2c)^2}{2!} &\approx \left(1 + \frac{(2a)^2}{2!}\right) \left(1 + \frac{(2b)^2}{2!}\right); \\ 1 + \frac{(2c)^2}{2!} &\approx 1 + \frac{(2a)^2}{2!} + \frac{(2b)^2}{2!} + 4a^2b^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Em (2.16), a^2b^2 também é muito menor do que a , b e c . Dessa forma, concluímos que:

$$\begin{aligned} (2c)^2 &\approx (2a)^2 + (2b)^2 \\ c^2 &\approx a^2 + b^2. \end{aligned}$$

□

2.1.7 TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA

Teorema 2.10 (Fórmula de Lobachevski). *Se ABC é um d -triângulo, retângulo no vértice C e de lados a , b e c , com c oposto a \hat{C} e a oposto a \hat{A} , então*

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tgh} 2a}{\operatorname{senh} 2b}. \quad (2.17)$$

A demonstração do Teorema 2.10 envolve transformações hiperbólicas e pode ser encontrada em (BRANNAN et al., 2012). Entretanto podemos provar que a relação (2.17) se aproxima do caso Euclidiano quando consideramos em \mathbb{D} um d -triângulo retângulo de lados muito pequenos.

Corolário 2.2. *Se ABC é um d -triângulo, retângulo em C e de lados a , b e c , com c oposto a \hat{C} e a oposto a \hat{A} , então a relação*

$$tgA = \frac{tgh2a}{senh2b} \quad (2.18)$$

tende ao caso Euclidiano, ou seja, $tgA = \frac{a}{b}$, quando consideramos a , b e c muito pequenos.

Demonstração.

De acordo com (STEWART, 2017b), a série de Maclaurin para as funções $senhx$ e $coshx$ é dada, respectivamente, por:

$$senhx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad (2.19)$$

$$coshx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (2.20)$$

Usando (2.19) e (2.20) para expandir $senh2a$, $senh2b$ e $cosh2a$ em série de Maclaurin, obtemos:

$$senh2a = 2a + \frac{(2a)^3}{3!} + \frac{(2a)^5}{5!} + \frac{(2a)^7}{7!} + \frac{(2a)^9}{9!} + \dots; \quad (2.21)$$

$$senh2b = 2b + \frac{(2b)^3}{3!} + \frac{(2b)^5}{5!} + \frac{(2b)^7}{7!} + \frac{(2b)^9}{9!} + \dots; \quad (2.22)$$

$$cosh2a = 1 + \frac{(2a)^2}{2!} + \frac{(2a)^4}{4!} + \frac{(2a)^6}{6!} + \frac{(2a)^8}{8!} + \dots. \quad (2.23)$$

Considerando a , b e c muito pequenos, podemos desprezar em (2.21), (2.22) e (2.23) as potências com expoente maior do que dois, pois estas são muito menores do que a , b e c . Assim, podemos reescrever (2.21), (2.22) e (2.23), respectivamente, como:

$$senh2a \approx 2a; \quad (2.24)$$

$$senh2b \approx 2b; \quad (2.25)$$

$$cosh2a \approx 1 + 2a^2. \quad (2.26)$$

Substituindo agora (2.24), (2.25) e (2.26) em (2.18), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} A &= \frac{\operatorname{tanh} 2a}{\operatorname{senh} 2b} \\
 &= \frac{\operatorname{senh} 2a}{\operatorname{cosh} 2a} \cdot \frac{1}{\operatorname{senh} 2b} \\
 &\approx \frac{2a}{1+2a^2} \cdot \frac{1}{2b} \\
 &\approx \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1+2a^2}.
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Em (2.27), $1+2a^2$ é aproximadamente 1 para um a pequeno. Dessa forma, concluímos que:

$$\operatorname{tg} A \approx \frac{a}{b}.$$

□

Teorema 2.11 (Fórmula do seno). *Se ABC é um d -triângulo, retângulo no vértice C e de lados a , b e c , com a oposto a \hat{A} e b oposto a \hat{B} , então*

$$\operatorname{sen} A = \frac{\operatorname{senh} 2a}{\operatorname{senh} 2c}. \tag{2.28}$$

A demonstração do Teorema 2.11 pode ser encontrada em (BRANNAN et al., 2012). Podemos mostrar que a relação (2.28) se aproxima do caso Euclidiano, ou seja, $\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$, quando consideramos em \mathbb{D} um d -triângulo retângulo de lados muito pequenos.

Teorema 2.12 (Lei dos cossenos hiperbólica). *Se ABC é um d -triângulo de ângulos internos α , β e γ opostos, respectivamente, aos lados a , b e c , então*

$$\operatorname{cosh} c = \operatorname{cosh} a \cdot \operatorname{cosh} b - \operatorname{senh} a \cdot \operatorname{senh} b \cdot \cos \gamma. \tag{2.29}$$

Teorema 2.13 (Lei dos senos hiperbólica). *Se ABC é um d -triângulo de ângulos internos α , β e γ opostos, respectivamente, aos lados a , b e c , então*

$$\frac{\operatorname{senh} a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{senh} b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{senh} c}{\operatorname{sen} \gamma}. \tag{2.30}$$

A demonstração dos Teoremas 2.12 e 2.13 pode ser encontrada em (ANDRADE,

2013). Podemos mostrar que as relações (2.29) e (2.30) se aproximam dos casos Euclidianos quando consideramos em \mathbb{D} um d-triângulo de lados muito pequenos.

3 GEOMETRIA ESFÉRICA

Neste capítulo, caracterizamos a geometria esférica como uma geometria não-Euclidiana e apresentamos nessa geometria algumas relações importantes da geometria Euclidiana, tais como o teorema de Pitágoras, a lei dos senos e a lei dos cossenos. Denotamos a superfície esférica de raio ρ , $\rho > 0$, por S_ρ^2 e a esfera de raio ρ , por E_ρ^2 . O principal referencial teórico deste capítulo é *Geometry* (BRANNAN et al., 2012), com a seguinte ressalva: (BRANNAN et al., 2012) utiliza sempre $\rho = 1$ (esfera unitária), enquanto utilizamos um raio de medida arbitrária ρ , com $\rho > 0$.

Definição 3.1 (Superfície esférica como lugar geométrico). *A superfície esférica S_ρ^2 de centro O e raio ρ é o lugar geométrico dos pontos de \mathbb{R}^3 que equidistam de O , ou seja,*

$$S_\rho^2 = \{P \in \mathbb{R}^3; d(P, O) = \rho\},$$

onde $d(P, O)$ denota a distância entre os pontos P e O .

Definição 3.2 (Superfície esférica como superfície de revolução). *A superfície esférica S_ρ^2 é a superfície obtida pela rotação (giro de 360°) de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém o diâmetro da semicircunferência.*

Definição 3.3 (Esfera como lugar geométrico). *A esfera E_ρ^2 de centro O e raio ρ é o lugar geométrico dos pontos de \mathbb{R}^3 que estão a uma distância menor ou igual do que ρ de O , isto é,*

$$E_\rho^2 = \{P \in \mathbb{R}^3; d(P, O) \leq \rho\}.$$

Definição 3.4 (Esfera como sólido de revolução). *A esfera E_ρ^2 é o sólido obtido pela rotação (giro de 360°) de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro do semicírculo.*

3.1 CARACTERÍSTICAS

A geometria esférica é uma particularidade da geometria elíptica, ambas desenvolvidas por Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866); é uma Geometria não-Euclidiana porque

não satisfaz o postulado das paralelas da geometria Euclidiana. Segundo (BRANNAN et al., 2012), a geometria esférica satisfaz o Postulado 3.1 (postulado elíptico das paralelas).

Postulado 3.1 (Elíptico das paralelas). *Dados uma reta l e um ponto P não pertencente à l , toda reta que passa por P intersecta l .*

De acordo com o Postulado 3.1, na geometria esférica não há reta que passe pelo ponto P e seja paralela à reta l .

A geometria esférica é a geometria definida sobre a superfície S_ρ^2 de uma esfera E_ρ^2 , de centro $O = (x_0, y_0, z_0)$ e raio ρ , ilustrada na Figura 3.1.

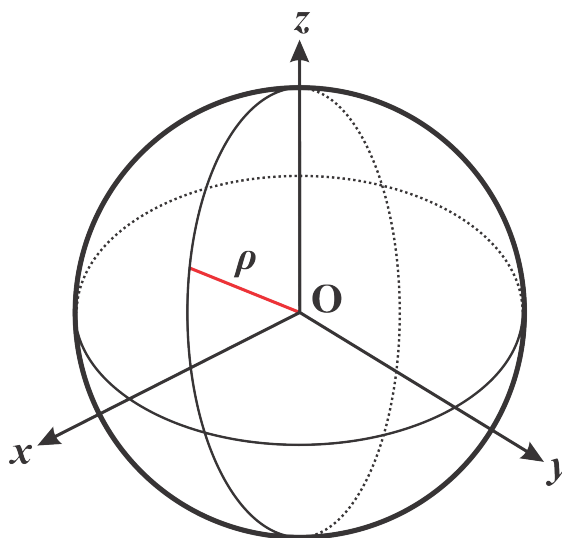


Figura 3.1: Superfície esférica de centro O e raio ρ

A equação reduzida da superfície esférica é dada por (BOULOS, 2004)

$$S_\rho^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \rho^2. \quad (3.1)$$

Isto significa que todo ponto $P = (x, y, z)$, de abscissa x , ordenada y e cota z , pertencente à superfície esférica, satisfaz à equação (3.1). Neste trabalho, o centro de S_ρ^2 e de E_ρ^2 é sempre a origem do sistema de eixos coordenados $xOyOz$, ou seja, $O = (0, 0, 0)$. Assim, a equação da superfície esférica (3.1) se reduz a $S_\rho^2 : x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$.

A intersecção da superfície esférica com o eixo de revolução define dois pontos importantes da esfera: os polos norte N e sul S , indicados na Figura 3.2. Conforme (BRANNAN et al., 2012), as coordenadas desses pontos são dadas por:

$$N = (0, 0, \rho);$$

$$S = (0, 0, -\rho).$$

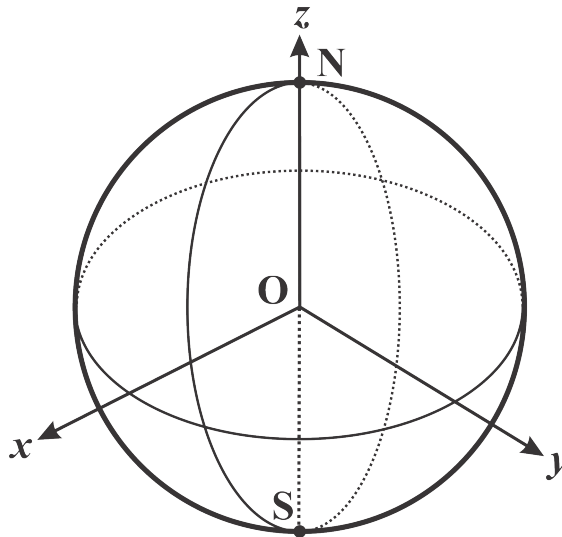


Figura 3.2: Polo norte N e polo sul S da esfera E_ρ^2

Pontos com coordenadas simétricas, como os polos N e S , são denominados *diametralmente opostos*. A Figura 3.3 mostra dois pontos diametralmente opostos.

Definição 3.5. Dado um ponto $P = (x, y, z)$ pertencente à S_ρ^2 , dizemos que o ponto P' é diametralmente oposto a P , ou *antípoda* a P , quando $P' = (-x, -y, -z)$.

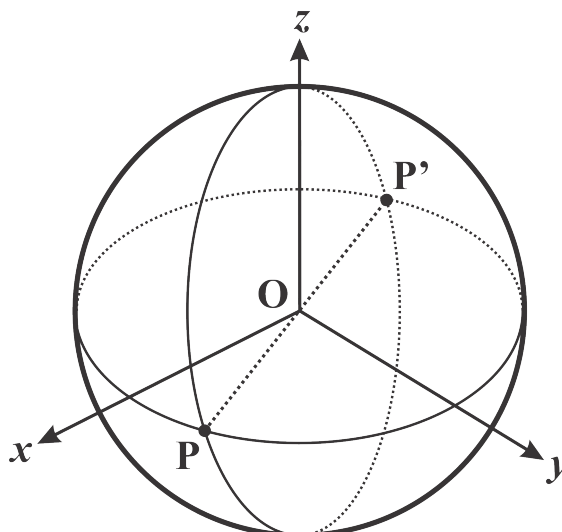


Figura 3.3: Pontos P e P' diametralmente opostos

Pela Definição 3.5, o segmento de reta PP' na Figura 3.3 é um diâmetro da esfera.

3.1.1 A RETA ESFÉRICA

A reta esférica é uma circunferência máxima de S^2_ρ (BRANNAN et al., 2012).

Riemann afirmava que:

Na extensão das construções espaciais para o imensuravelmente grande, devemos fazer a distinção entre o ilimitado e o infinito; o primeiro pertence às relações de grandeza e o segundo, às relações de medida.

Dessa forma, diferentemente da reta Euclidiana, que é infinita, a reta esférica é finita, porém ilimitada. Duas retas esféricas, duas circunferências máximas de S^2_ρ , sempre se intersectam em dois pontos diametralmente opostos. A Figura 3.4 ilustra a reta esférica.

Definição 3.6. *Uma circunferência máxima de S^2_ρ é a circunferência obtida pela intersecção da superfície esférica com um plano α que passa pelo centro O da superfície.*

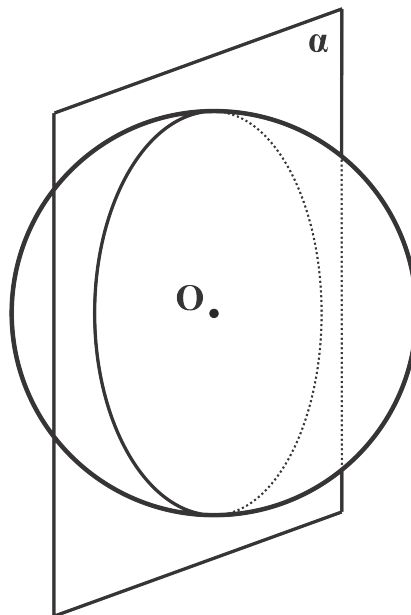


Figura 3.4: A reta esférica: circunferência máxima de S^2_ρ

Uma circunferência máxima de S^2_ρ não é única. Algumas circunferências máximas recebem denominações específicas, como as *circunferências de longitude* e o *equador*. Além das circunferências máximas, há em S^2_ρ *circunferências mínimas*.

Definição 3.7. *Toda circunferência máxima que passa pelo polo N é denominada circunferência de longitude.*

A Figura 3.5 mostra circunferências de longitude em S_ρ^2 .

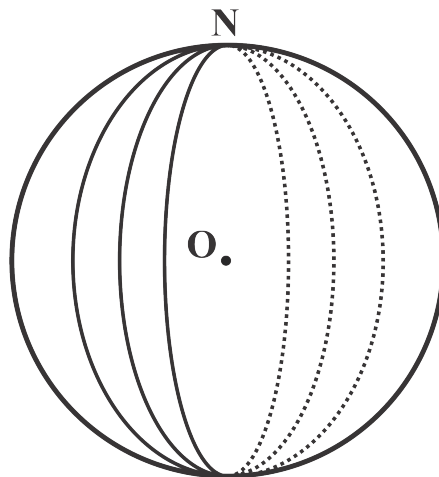


Figura 3.5: Circunferências de longitude

Definição 3.8. Dada uma circunferência máxima que passa pelo polo norte $N = (0,0,\rho)$, a parte dessa circunferência com coordenadas positivas no eixo x e que passa pelo ponto $A = (\rho,0,0)$ é denominada meridiano de Greenwich.

Em Cartografia¹, considera-se o meridiano de Greenwich como sendo aquele que passa pela cidade inglesa de Greenwich, sendo este meridiano o marco 0 para se determinar a *longitude* de um ponto na superfície esférica, pois divide a mesma em ocidente (*W*) e oriente (*E*). A longitude é a coordenada esférica de um ponto $P \in S_\rho^2$ dada pela distância entre esse ponto e o meridiano de Greenwich. A Figura 3.6 ilustra o meridiano de Greenwich em S_ρ^2 segundo a Definição 3.8.

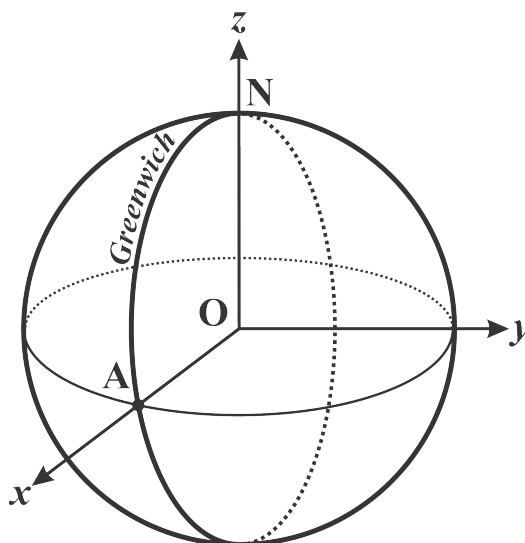


Figura 3.6: Meridiano de Greenwich

¹Ciência que se ocupa do traçado de mapas geográficos ou topográficos.

Definição 3.9. A circunferência máxima que passa pelos pontos $A = (\rho, 0, 0)$ e $B = (0, \rho, 0)$ é denominada equador.

Em Cartografia, o equador divide a superfície terrestre em norte (N) e sul (S). A *latitude* é a coordenada esférica de um ponto $P \in S_\rho^2$ dada pela distância entre esse ponto e o equador, ou, é a medida do ângulo entre o plano do equador e o plano que contém o menor arco de circunferência máxima que tem por extremos P e um ponto do equador. A Figura 3.7 mostra o equador em S_ρ^2 .

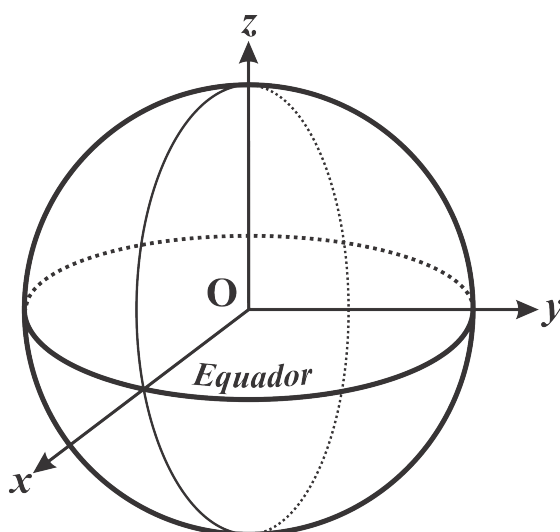


Figura 3.7: Equador

Definição 3.10. A intersecção entre S_ρ^2 e um plano secante a S_ρ^2 , paralelo ao equador, é uma curva denominada circunferência de latitude. Em particular, o equador é uma circunferência de latitude.

A Figura 3.8 mostra uma circunferência de latitude em S_ρ^2 .

Definição 3.11. A intersecção da superfície esférica com um plano secante que não passa pelo centro O da superfície é uma curva denominada circunferência mínima.

A Figura 3.9 ilustra algumas circunferências mínimas em S_ρ^2 .

3.2 COORDENADAS ESFÉRICAS

As coordenadas de um ponto P pertencente à S_ρ^2 , denominadas coordenadas esféricas de P , são de grande importância não apenas para a comprovação de resultados na geometria

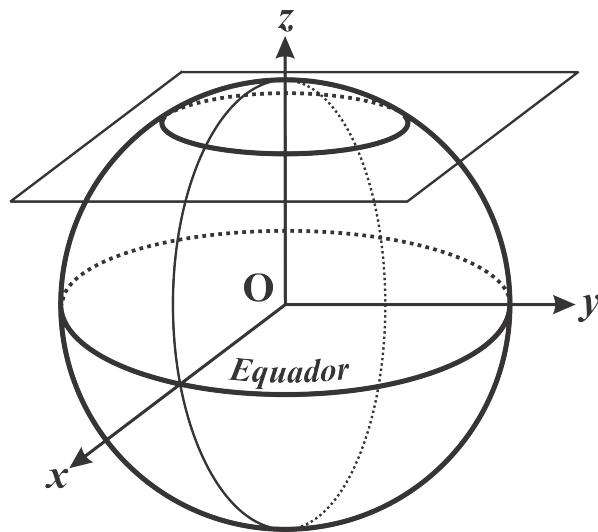


Figura 3.8: Circunferência de latitude

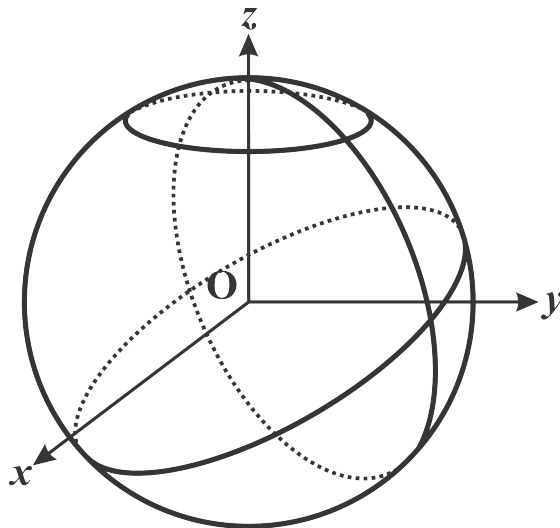


Figura 3.9: Circunferências mínimas

esférica, como também no cálculo integral, no qual são utilizadas para determinar o volume de sólidos tridimensionais ou, ainda, o *hipervolume* de um sólido n-dimensional.

Para todo ponto $P = (x, y, z)$ pertencente à S_ρ^2 , há dois ângulos ψ e φ delimitados pelos eixos ortogonais $xOyOz$. Esses dois ângulos são suficientes para definirmos as coordenadas esféricas de P .

Consideremos o plano equatorial de E_ρ^2 , ilustrado na Figura 3.10, no qual os pontos P_1 e $A = (\rho, 0, 0)$ pertencem ao equador.

Denotamos $\widehat{AOP_1} = \varphi$, o qual rotaciona em torno do eixo z , ou seja, $0 \leq \varphi < 2\pi$, e $\widehat{NOP} = \psi$, onde $P \in S_\rho^2$ e ψ não excede uma medida angular de π radianos, ou seja, $0 \leq \psi \leq \pi$. O sentido positivo para φ e ψ é sempre o sentido anti-horário.

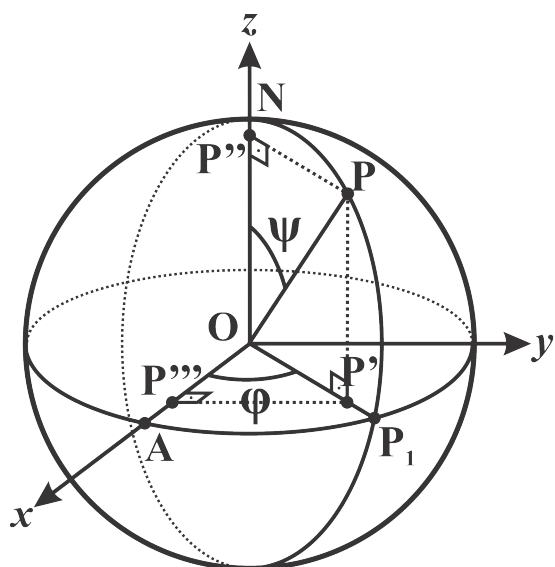


Figura 3.10: Coordenadas do ponto P , pertencente à S^2_ρ , em função de φ e ψ

Para definirmos as coordenadas esféricas de P em função dos ângulos φ e ψ , devemos construir uma circunferência máxima C que passe por P_1 , P e pelo polo N .

Teorema 3.1. Se $P = (x, y, z)$ é um ponto pertencente à S^2_ρ , com $0 \leq \varphi < 2\pi$ e $0 \leq \psi \leq \pi$, então as coordenadas esféricas de P são dadas por:

$$P = \rho (\cos\varphi \sin\psi, \sin\varphi \sin\psi, \cos\psi).$$

Demonstração.

Sejam $P' = \text{proj}_{\overline{OP_1}}P$, onde $\text{proj}_{\overline{OP_1}}P$ é projeção ortogonal de P sobre o segmento OP_1 , e $P'' = \text{proj}_{\overline{ON}}P$, onde $\text{proj}_{\overline{ON}}P$ é projeção ortogonal de P sobre o segmento ON , como na Figura 3.10. Dessa forma:

$$\begin{aligned} \overline{PP'} &\parallel \overline{OP''}; \\ \overline{PP''} &\parallel \overline{OP'}; \\ \overline{PP'} &\equiv \overline{OP''} = z; \\ \overline{PP''} &\equiv \overline{OP'}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Primeiramente, como os triângulos retângulos $P''PO$ e $P'OP$ são congruentes (caso *ALA* - ângulo-lado-ângulo), podemos determinar a cota z de P . Assim:

$$\cos\psi = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} = \frac{z}{\rho} \Rightarrow z = \rho \cos\psi. \tag{3.3}$$

No triângulo retângulo $PP'O$, temos que:

$$\operatorname{sen}\psi = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP'}}{\rho} \Rightarrow \overline{OP'} = \rho \operatorname{sen}\psi. \quad (3.4)$$

Seja agora $P''' = \operatorname{proj}_{\overline{OA}}P'$, onde $\operatorname{proj}_{\overline{OA}}P'$ é projeção ortogonal de P' sobre o segmento OA . Como $\overline{OP'''} = x$, $\overline{P'P'''} = y$, temos no triângulo $OP'''P'$, retângulo em P''' , que:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{OP'''}}{\overline{OP'}} = \frac{x}{\overline{OP'}}; \quad (3.5)$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\overline{P'P'''}}{\overline{OP'}} = \frac{y}{\overline{OP'}}. \quad (3.6)$$

Substituindo (3.4) em (3.5) e (3.6), concluímos que:

$$x = \rho \cos\varphi \operatorname{sen}\psi; \quad (3.7)$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi. \quad (3.8)$$

Portanto, de (3.7), (3.8) e (3.4), colocando-se ρ em evidência, temos que as coordenadas esféricas de um ponto P pertencente à S_ρ^2 são dadas por:

$$P = \rho (\cos\varphi \operatorname{sen}\psi, \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi, \cos\psi).$$

□

3.3 ROTAÇÃO EM S_ρ^2

A rotação de um vetor $u = (x \ y)^T$ em \mathbb{R}^2 , por um ângulo θ , depende de um *rotator* definido como sendo a matriz R de ordem 2×2 (WATKINS, 2002):

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Assim, rotacionar o vetor $u = (x \ y)^T$ significa aplicar uma transformação linear L definida por:

$$\begin{aligned} L: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2; \\ \vec{u} &\mapsto R\vec{u}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

A transformação linear (3.9), aplicada a um vetor qualquer de \mathbb{R}^2 , preserva o comprimento desse vetor e rotaciona suas coordenadas segundo um ângulo θ . A Figura 3.11 ilustra a transformação linear aplicada a um vetor u .

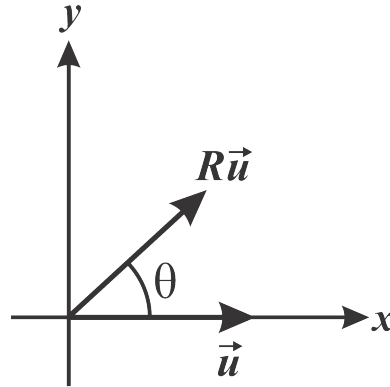


Figura 3.11: Rotação de um vetor \vec{u} por um ângulo θ em \mathbb{R}^2

Vamos agora expandir a transformação linear (3.9) para \mathbb{R}^3 , especificamente para a geometria esférica.

Definição 3.12. Uma isometria em S_ρ^2 é uma transformação da esfera em si mesma que preserva a distância entre seus pontos.

Sejam os eixos ortogonais Ox , Oy e Oz e os pontos $\{X\} = Ox \cap S_\rho^2$, $\{Y\} = Oy \cap S_\rho^2$ e $\{Z\} = Oz \cap S_\rho^2$. As rotações de um vetor $\xi = (x, y, z)^T$ em torno de \overline{OX} , \overline{OY} e \overline{OZ} , onde O é o centro de S_ρ^2 , estão definidas por rotatores R_x , R_y e R_z , respectivamente, sendo cada rotação no sentido anti-horário.

Rotacionar o vetor \mathbf{x} em torno de \overline{OX} por um ângulo α significa manter o eixo Ox fixo e rotacionar o plano yz . Essa rotação é definida pela isometria

$$\begin{aligned} L(X, \alpha) : S_\rho^2 &\rightarrow S_\rho^2, \\ \mathbf{x} &\mapsto R_x \mathbf{x}, \end{aligned}$$

onde

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

De maneira análoga, rotacionar o vetor \mathbf{x} em torno de \overline{OY} por um ângulo β significa

manter o eixo Oy fixo e rotacionar o plano xz . Essa rotação é definida pela isometria

$$\begin{aligned} L(Y, \beta) : S_\rho^2 &\rightarrow S_\rho^2, \\ \mathbf{x} &\mapsto R_y \mathbf{x}, \end{aligned}$$

sendo

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Ainda de forma similar, rotacionar o vetor \mathbf{x} em torno de \overline{OZ} por um ângulo γ significa manter o eixo Oz fixo e rotacionar o plano xy . Essa rotação é definida pela isometria

$$\begin{aligned} L(Z, \gamma) : S_\rho^2 &\rightarrow S_\rho^2, \\ \mathbf{x} &\mapsto R_z \mathbf{x}, \end{aligned}$$

onde

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplificando, para rotacionarmos o ponto $A = (\rho, 0, 0)$ até o ponto

$$P = \rho (\cos\varphi, \sin\varphi, 0),$$

pertencente ao equador de S_ρ^2 , temos que aplicar a transformação $L(Z, \varphi)$ porque apenas as coordenadas x e y são alteradas, o que significa que o plano xy foi rotacionado e o eixo Oz foi mantido fixo. A Figura 3.12 ilustra a rotação que leva o ponto A no ponto P .

Analicamente, temos que:

$$R_z A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = P.$$

Agora, precisamos definir a rotação que leva o ponto $A = (\rho, 0, 0)$ para um ponto P não pertencente ao equador de S_ρ^2 .

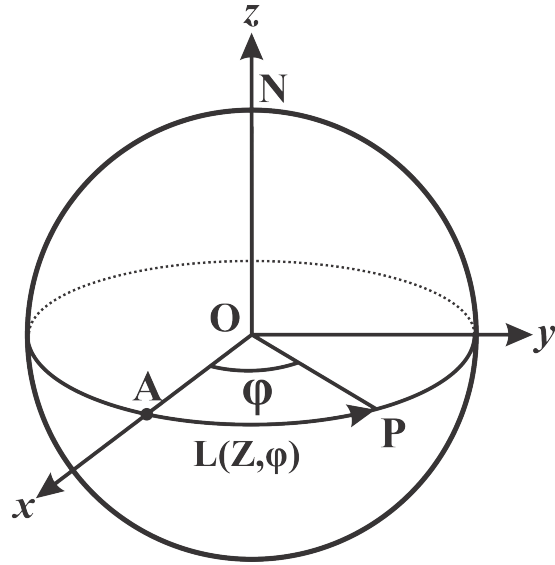


Figura 3.12: Transformação $L(Z, \varphi)$ que leva o ponto $A = (\rho, 0, 0)$ no ponto $P = \rho (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$

Definição 3.13. Seja $L(X, \alpha)$ uma rotação de S^2_ρ . A rotação inversa, isto é, na direção oposta, é definida pelo ângulo $-\alpha$ e denotada por $L(X, -\alpha)$ ou $L(X, \alpha)^{-1}$.

Definição 3.14. Seja φ um ângulo de rotação. O ângulo complementar a φ é $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$ e a direção oposta é $-\varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2}$.

Definição 3.15. O produto entre duas ou mais rotações elementares é uma composição de rotações.

O produto entre duas matrizes é comutativo quando uma matriz é a inversa da outra. Nesse caso, o produto é igual à matriz identidade I . Assim, se $L(X, \alpha)$ e $L(Y, \beta)$ são duas rotações, então $R_x R_y$ é igual a:

$$\begin{aligned}
 R_x \cdot R_y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\sin \beta \cos \alpha & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \neq I_3, \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

onde I_3 é a matriz identidade de ordem 3.

Em (3.10), $R_x \neq R_y^{-1}$ e vice-versa, o que garante que o produto $R_x R_y$ não é comutativo. O mesmo se verifica para $R_x R_z$ e $R_y R_z$. Ainda, para que $L(X, \alpha)L(Y, \beta) = L(Y, \beta)L(X, \alpha)$,

$\alpha = \beta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Contudo, pelo Teorema 3.1, $0 \leq \beta \leq \pi$. Logo, $\alpha = \beta = 0$, o que significa que S_ρ^2 não sofre rotação. Portanto, o produto entre duas matrizes de rotação não é comutativo.

A rotação do ponto A para o ponto P_1 pertencente ao equador é elementar, ou seja, $L(Z, \varphi)$. Entretanto, não podemos afirmar o mesmo para a rotação de P_1 para o ponto P não pertencente ao equador. No entanto, essa é uma rotação que passa pelo polo N através do ângulo $\psi' = \frac{\pi}{2} - \psi$, como ilustra a Figura 3.13. Assim, essa rotação é dada por $L(Y, -\psi')$ ou por $L\left(Y, \psi - \frac{\pi}{2}\right)$.

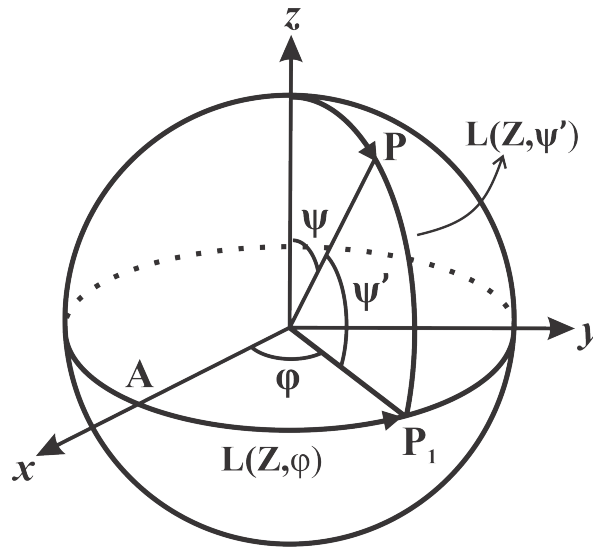


Figura 3.13: Rotações $L(Z, \varphi)$ e $L(Z, \psi')$ que levam o ponto A até o ponto P , passando pelo ponto P'

Portanto, a rotação de $A = (\rho, 0, 0)$ para $P = \rho(\cos\varphi\sin\psi, \sin\varphi\sin\psi, \cos\psi)$ é composta pela primeira rotação, $L(Z, \varphi)$, e pela segunda, $L(Y, -\psi')$.

Teorema 3.2. Se os pontos $A = (\rho, 0, 0)$, e $P = \rho(\cos\varphi\sin\psi, \sin\varphi\sin\psi, \cos\psi)$ pertencem à S_ρ^2 , então a rotação de A para P é dada pela composição $L(Z, \varphi)L(Y, -\psi')$, sendo $\psi' = \frac{\pi}{2} - \psi$.

Demonstração.

A primeira rotação pode ser efetuada pela composição

$$L(Z, \varphi)L(Y, -\psi')L(Z, -\varphi). \quad (3.11)$$

Pela Definição 3.13, a rotação (3.11) equivale a

$$L(Z, \varphi)L(Y, -\psi')L(Z, \varphi)^{-1}.$$

Assim, a segunda rotação é dada por:

$$[L(Z, \varphi)L(Y, -\psi')L(Z, \varphi)^{-1}]L(Z, \varphi) = L(Z, \varphi)L(Y, -\psi').$$

□

Corolário 3.1. $(L(Z, \varphi)L(Y, \psi))^{-1} = L(Y, \psi)^{-1}L(Z, \varphi)^{-1}$

Demonstração.

A rotação $L(Z, \varphi)L(Y, \psi)$ é a composição que leva o ponto $A = (\rho, 0, 0)$ para um ponto P qualquer de S_ρ^2 . Então, a rotação $L(Y, -\psi)L(Z, -\varphi) = L(Y, \psi)^{-1}L(Z, \varphi)^{-1}$ leva o ponto P para o ponto A , ou seja, é a composição inversa.

□

3.4 A SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Diferentemente da infinitude do plano Euclidiano, a superfície esférica é finita e sua limitação é imposta pela medida do raio ρ . Isto garante resultados interessantes e fundamentais, como a área da superfície esférica e o comprimento de uma reta esférica, ou seja, o comprimento de uma circunferência máxima de S_ρ^2 . Medidas como essas são importantes porque a esfera ainda é o melhor modelo para descrever o planeta Terra.

3.4.1 ÁREA

Para determinarmos a área de uma superfície esférica, precisamos empregar conceitos de cálculo integral. A noção de integral está diretamente ligada à noção de derivada: para calcular a integral é necessário determinar a *antiderivada* ou a *primitiva* $F(x)$ de uma função contínua $f(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. A integral foi pensada primeiramente para calcular áreas de regiões delimitadas por uma curva, descrita por uma função contínua $f(x)$ ($f(x) \geq 0$), e as retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$ (STEWART, 2017a). A Figura 3.14 ilustra uma dessas regiões.

Riemann desenvolveu um método para determinar a medida da área de regiões como a ilustrada na Figura 3.14. Nesse método, o intervalo fechado $[a, b]$ é particionado em n subintervalos de amplitude $x_i - x_{i-1}$ e a região é dividida em n retângulos de base $x_i - x_{i-1}$ e altura $f(x_i)$, com $i = 1, 2, \dots, n$. Assim, a área da região é aproximada pela soma das áreas dos n retângulos, como mostra a Figura 3.15.

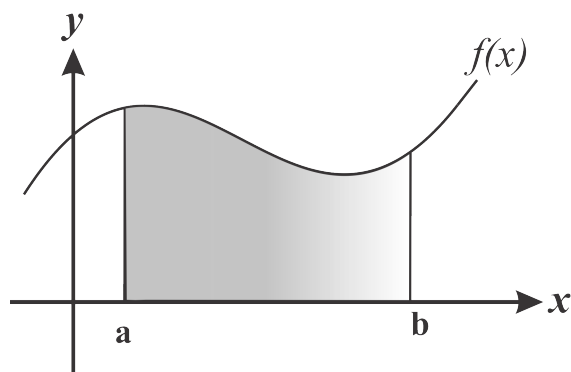


Figura 3.14: Região compreendida pela curva $f(x)$ e as retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$

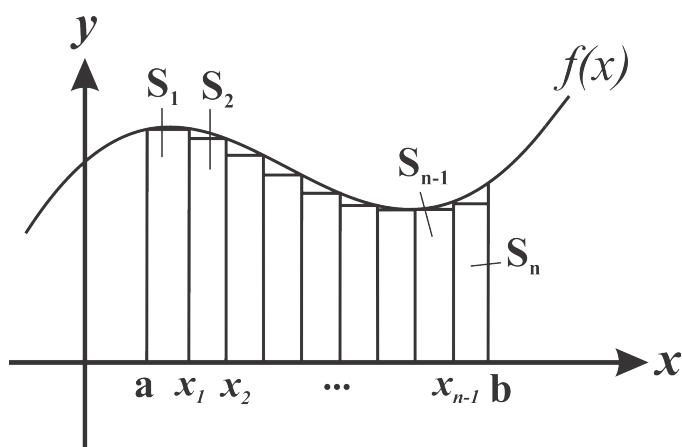


Figura 3.15: Aproximação da área da região compreendida pela curva $f(x)$ e as retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$ pela soma das áreas de n retângulos

Denotando a área de cada retângulo por S_i e a soma das áreas dos n retângulos por S_R , temos que:

$$S_R = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n f(x_i) (x_i - x_{i-1}). \quad (3.12)$$

Em (3.12), um número finito de subintervalos fornece apenas uma aproximação numérica para a medida da área da região. Aplicando o conceito de limite a (3.12), com $x_i - x_{i-1} = \Delta x$, temos que:

$$S_R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) (\Delta x). \quad (3.13)$$

Ainda, ao invés de operarmos com os extremos x_i em (3.13), podemos determinar a altura de cada i -ésimo retângulo empregando o valor de $f(x)$ em pontos amostrais x_i^* , $i = 1, 2, \dots, n$ de cada subintervalo, de modo a minimizar as faltas ou excessos no cálculo da área de cada retângulo. Dessa forma, (3.13) pode ser reescrita como:

$$S_R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) (\Delta x). \quad (3.14)$$

O limite (3.14) corresponde à integral definida da função $f(x)$, representada matematicamente como:

$$S_R = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) (\Delta x). \quad (3.15)$$

O cálculo do limite em (3.15) pode ser trabalhoso. O Teorema Fundamental do Cálculo facilita o cálculo desse limite.

Teorema 3.3 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Se $f(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

onde $F'(x) = f(x)$, ou seja, $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$.

A demonstração do Teorema 3.3 pode ser encontrada em (SPIVAK, 2008) e (STEWART, 2017a). O Teorema 3.3 é empregado no cálculo da área de *superfícies de revolução*. Essas superfícies são geradas pela rotação (giro de 360°) de uma curva em torno de um eixo (eixo de revolução). Por exemplo, a superfície esférica S_ρ^2 é gerada pela rotação da curva $y = \sqrt{\rho^2 - x^2}$ em torno dos eixos ortogonais Ox ou Oy .

Analisemos inicialmente o caso em que uma curva $y = f(x)$ é rotacionada em torno do eixo Ox . Cada ponto de $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$ descreve na rotação uma circunferência, sendo $y = f(x)$ o raio de cada uma das circunferências, como mostra a Figura 3.16.

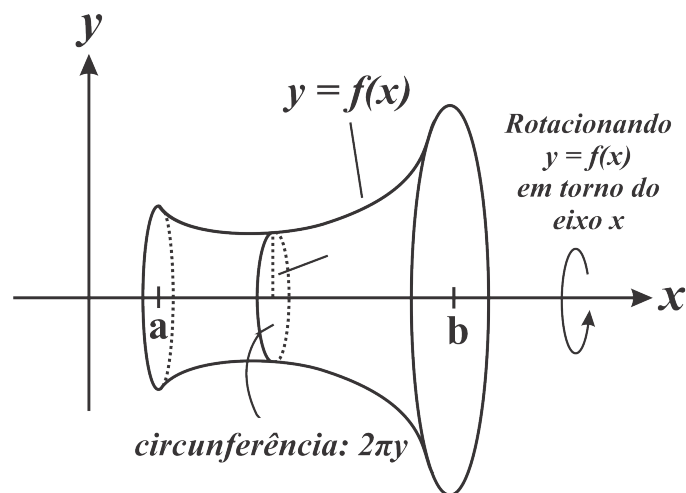


Figura 3.16: Superfície gerada pela rotação da curva $y = f(x)$ em torno do eixo Ox

Logo, para calcular a área S da superfície de revolução devemos calcular uma integral em $[a, b]$ (limite da soma dos comprimentos das circunferências). A área S é dada por (STEWART, 2017a):

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad (3.16)$$

onde $\frac{dy}{dx}$ é a derivada da curva $y = f(x)$ em relação à variável independente x , na notação de Leibniz.

Por outro lado, se queremos calcular a área da superfície gerada pela rotação em torno do eixo Oy , é necessário variar os parâmetros. ou seja, o raio de cada circunferência passa a ser $x = g(y)$ e o intervalo de integração, $c \leq y \leq d$, onde $c = f(a)$ e $d = f(b)$, como mostra a Figura 3.17.

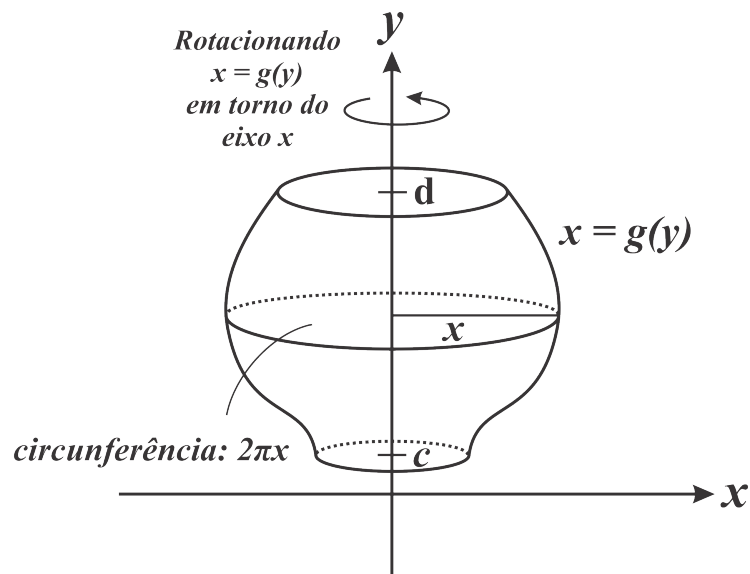


Figura 3.17: Superfície gerada pela rotação da curva $x = g(y)$ em torno do eixo Oy

Neste caso, a área S da superfície de revolução é dada por:

$$S = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy. \quad (3.17)$$

Com os conceitos já apresentados nesta seção, podemos agora provar a área da superfície esférica.

Teorema 3.4. A área S da superfície esférica S_ρ^2 é igual a $4\pi\rho^2$.

Demonstração.

A equação de uma circunferência C em \mathbb{R}^2 , centrada na origem, é dada por

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad (3.18)$$

onde $(x, y) \in C$ e ρ é o raio de C .

De (3.18), temos que:

$$y^2 = \rho^2 - x^2 \Rightarrow y = f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2}. \quad (3.19)$$

A superfície esférica S_ρ^2 pode ser gerada pela rotação da curva (3.19), com $-\rho \leq x \leq \rho$ e $0 \leq y \leq \rho$, em torno do eixo Ox , como ilustra a Figura 3.18.

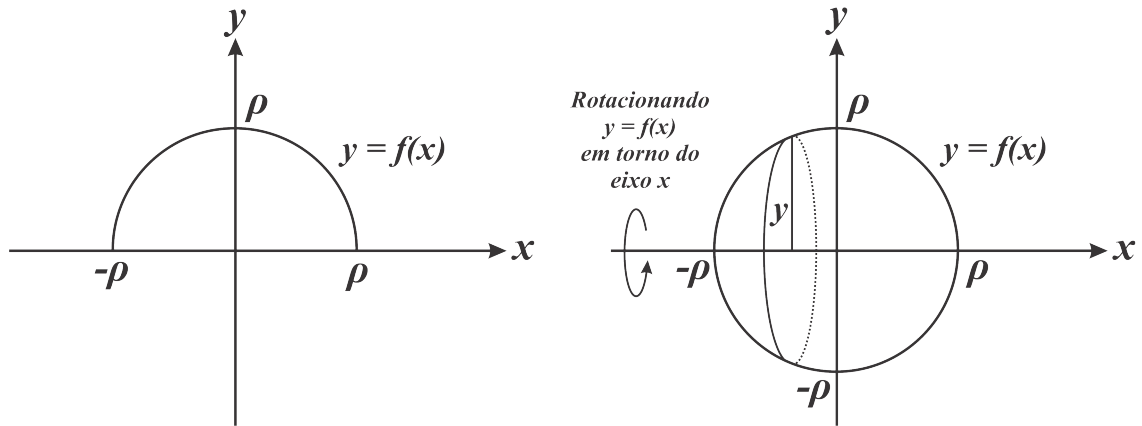


Figura 3.18: Rotação de $y = \sqrt{\rho^2 - x^2}$ no intervalo $[-\rho, \rho]$ em torno do eixo Ox

Calculando a derivada primeira da função (3.19), esta contínua em $[-\rho, \rho]$, obtemos:

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\rho^2 - x^2} \right) = \frac{d}{dx} (\rho^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\rho^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}. \quad (3.20)$$

Elevando (3.20) ao quadrado, temos que:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \left(-\frac{x}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \right)^2 = \frac{x^2}{\rho^2 - x^2}. \quad (3.21)$$

Substituindo (3.21) em (3.16), obtemos:

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_{-\rho}^{\rho} f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\
&= 2\pi \int_{-\rho}^{\rho} f(x) \sqrt{1 + \frac{x^2}{\rho^2 - x^2}} dx \\
&= 2\pi \int_{-\rho}^{\rho} f(x) \sqrt{\frac{\rho^2 - x^2 + x^2}{\rho^2 - x^2}} dx \\
&= 2\pi \int_{-\rho}^{\rho} f(x) \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} dx. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Substituindo agora (3.19) em (3.22), concluímos que:

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{\rho^2 - x^2} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} dx \\
&= 2\pi \int_{-\rho}^{\rho} \rho dx \\
&= 2\pi\rho \int_{-\rho}^{\rho} dx \\
&= 2\pi\rho x \Big|_{-\rho}^{\rho} \\
&= 2\pi\rho [\rho - (-\rho)] \\
&= 2\pi\rho 2\rho \\
&= 4\pi\rho^2. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

□

3.4.2 COMPRIMENTO DA RETA ESFÉRICA

Também podemos empregar a integral para calcular o comprimento da reta esférica, isto é, o comprimento de uma circunferência máxima de S_{ρ}^2 . Para tanto, precisamos de uma relação para calcular o comprimento de uma curva em um intervalo, como na Figura 3.19.

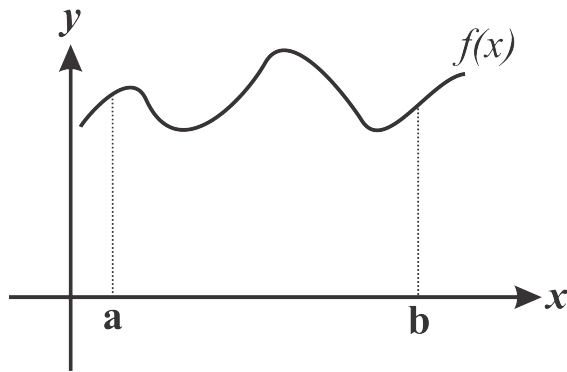


Figura 3.19: Comprimento da curva descrita por uma função contínua no intervalo $[a, b]$

A distância entre dois pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ de \mathbb{R}^2 é igual a (BOULOS, 2004):

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (3.24)$$

Para calcular o comprimento da curva $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, particionamos $[a, b]$ em n subintervalos de amplitude $x_i - x_{i-1}$. Assim, o comprimento da curva é aproximado pela soma das distâncias entre os pontos (x_i, x_{i-1}) de cada i -ésimo subintervalo (comprimento da poligonal), com $i = 1, 2, \dots, n$, como ilustrado na Figura 3.20.

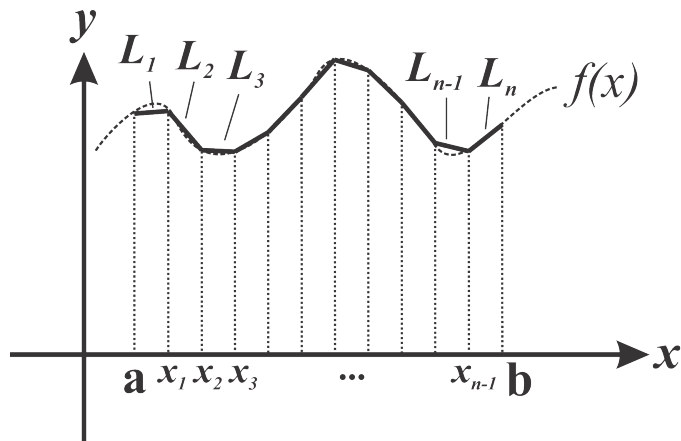


Figura 3.20: Aproximação do comprimento da curva $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ pela soma das n distâncias entre os pontos da partição

Denotando o comprimento da curva por L e empregando (3.24), temos que:

$$L = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}, \quad (3.25)$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$.

Conforme o Teorema do Valor Médio (STEWART, 2017a), existe $x_i^* \in [x_i, x_{i-1}]$ tal

que:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \Delta y_i = f'(x_i^*) \Delta x_i, \quad (3.26)$$

sendo $f'(x) = \frac{df}{dx}$ e x_i^* um ponto amostral em cada subintervalo da partição.

Substituindo (3.26) em (3.25), obtemos:

$$L = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + [f'(x_i^*)]^2 \Delta x_i^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \sqrt{\Delta x_i^2} = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x_i. \quad (3.27)$$

Em (3.27), um número finito de subintervalos fornece apenas uma aproximação numérica para a medida da do comprimento L da curva. Aplicando o conceito de limite a (3.27), temos que:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x_i. \quad (3.28)$$

O limite em (3.28) corresponde à integral definida:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (3.29)$$

A relação (3.29) permite provar o comprimento da reta esférica.

Teorema 3.5. *Se C é uma circunferência máxima de S_ρ^2 , então o comprimento L de C é igual a $2\pi\rho$.*

Demonstração.

Consideremos a equação da circunferência $f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2}$ no primeiro quadrante ($0 \leq x \leq \rho$). Dessa forma, conforme (3.29), o comprimento L da circunferência C é dado por:

$$L = 4 \int_0^\rho \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (3.30)$$

De (3.21), sabemos que $[f'(x)]^2 = \frac{x^2}{\rho^2 - x^2}$. Substituindo esta igualdade em (3.30), obtemos:

$$L = 4 \int_0^\rho \sqrt{1 + \frac{x^2}{\rho^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^\rho \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} dx = 4\rho \int_0^\rho \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} dx. \quad (3.31)$$

Efetando em (3.31) a substituição de variáveis

$$\begin{aligned}x &= \rho \operatorname{sen} \theta \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{x}{\rho} \Rightarrow \theta = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{x}{\rho} \right), \\x \rightarrow 0 &\Rightarrow \theta \rightarrow 0; \quad x \rightarrow \rho \Rightarrow \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}, \\ \frac{dx}{d\theta} &= \rho \cos \theta \Rightarrow dx = \rho \cos \theta d\theta,\end{aligned}$$

obtemos:

$$\begin{aligned}L &= 4\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - (\rho \operatorname{sen} \theta)^2}} \rho \cos \theta d\theta \\ &= 4\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \cos \theta}{\sqrt{\rho^2 - \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} d\theta \\ &= 4\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \cos \theta}{\sqrt{\rho^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta)}} d\theta.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Em (3.32), $1 - \operatorname{sen}^2 \theta = \cos^2 \theta$. Assim, concluímos que:

$$\begin{aligned}L &= 4\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \cos \theta}{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta}} d\theta \\ &= 4\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \cos \theta}{\rho \cos \theta} d\theta \\ &= 4\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= 4\rho \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\rho \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] \\ &= 2\pi\rho.\end{aligned}$$

□

Determinado o comprimento de uma circunferência máxima de S_ρ^2 , podemos agora determinar o comprimento de um arco da circunferência máxima.

3.4.3 GEODÉSICAS

Uma geodésica de S_ρ^2 é um arco de circunferência máxima. Mais especificamente, é o menor dos arcos que tem por extremos dois pontos quaisquer pertencentes à superfície esférica. A Figura 3.21 ilustra uma geodésica de S_ρ^2 .

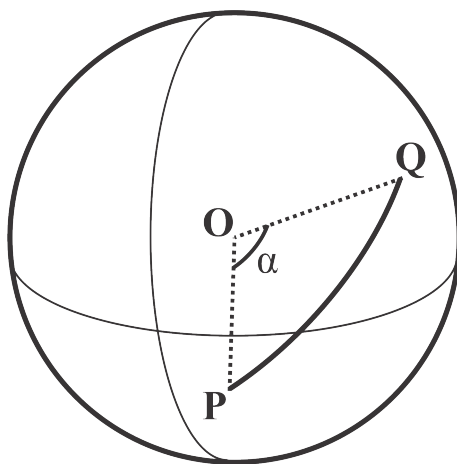


Figura 3.21: Uma geodésica de S_ρ^2 : $d(P, Q) = \widehat{PQ}$

Dados dois pontos $P, Q \in S_\rho^2$ - Figura 3.21, o arco PQ é definido pelo ângulo $POQ = \alpha$, onde O é o centro de S_ρ^2 e $0 < \alpha \leq \pi$. Dessa forma, o comprimento da geodésica \widehat{PQ} é a distância entre os pontos P e Q na superfície esférica.

Teorema 3.6. Se $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$ são dois pontos pertencentes à S_ρ^2 e α é o ângulo central correspondente ao arco de circunferência máxima \widehat{PQ} , então a distância $d_{S_\rho^2}(P, Q)$ de P a Q é igual a²

$$d_{S_\rho^2}(P, Q) = \rho \alpha = \rho \arccos \left(\frac{p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3}{\rho^2} \right). \quad (3.33)$$

Demonstração.

O Teorema 3.5 estabelece que o comprimento de uma circunferência máxima de S_ρ^2 é $2\pi\rho$. Logo, o comprimento L da geodésica \widehat{PQ} de ângulo central correspondente α é dado por:

$$L = d_{S_\rho^2}(P, Q) = 2\pi\rho \frac{\alpha}{2\pi} = \rho \alpha. \quad (3.34)$$

²Se a superfície esférica for unitária ($\rho = 1$), a tese do Teorema 3.6 se reduz a

$$d_{S_\rho^2}(P, Q) = \arccos(p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) \text{ ou } \cos d = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3.$$

O comprimento L em (3.34) é justamente a distância entre dois pontos de S_ρ^2 . Contudo, precisamos especificar o ângulo α em função das coordenadas dos pontos extremos da geodésica \widehat{PQ} . Para tanto, vamos empregar conceitos de geometria analítica e álgebra vetorial.

Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, tais que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ são os lados de $\widehat{POQ} = \alpha$, ilustrado na Figura 3.22. O comprimento de \overline{OP} e \overline{OQ} é a medida do raio de S_ρ^2 , ou seja, ρ .

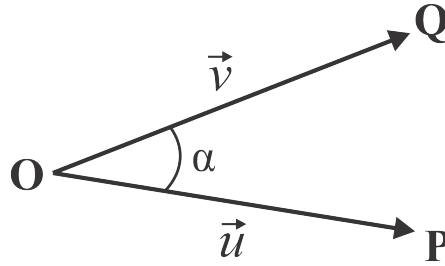


Figura 3.22: Ângulo $POQ = \alpha$ de lados \vec{u} e \vec{v}

A medida do ângulo α determinado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} é dada por (BOULOS, 2004):

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \right), \quad (3.35)$$

onde $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ é o produto interno entre \vec{u} e \vec{v} , e $\|\vec{u}\|$ é a *norma* de \vec{u} , a qual define seu comprimento (ou módulo).

Sendo

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} = (p_1, p_2, p_3); \quad \vec{v} = \overrightarrow{OQ} = (q_1, q_2, q_3) \quad \text{e} \quad \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \rho,$$

temos que:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3; \quad (3.36)$$

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| = \rho \cdot \rho = \rho^2. \quad (3.37)$$

Substituindo (3.36) e (3.37) em (3.35), obtemos:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3}{\rho^2} \right). \quad (3.38)$$

Substituindo agora (3.38) em (3.34), concluímos que:

$$L = d_{S_\rho^2}(P, Q) = \rho \arccos \left(\frac{p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3}{\rho^2} \right).$$

□

Provados a área da superfície esférica e o comprimento de uma circunferência máxima, calculamos a seguir a área de algumas regiões de S_ρ^2 importantes à cartografia: a calota esférica, a zona esférica e o fuso esférico.

3.4.4 CALOTA E ZONA ESFÉRICAS

Definição 3.16. *Denomina-se calota esférica a intersecção entre a superfície esférica e um plano secante a ela.*

A calota esférica também pode ser definida como sendo a região de S_ρ^2 compreendida entre um polo e uma circunferência de latitude (ou um trópico em cartografia), ou então como a superfície gerada pela rotação em torno de um eixo de um arco de circunferência máxima que tem um extremo pertencente ao eixo. A Figura 3.23 ilustra uma calota de S_ρ^2 .

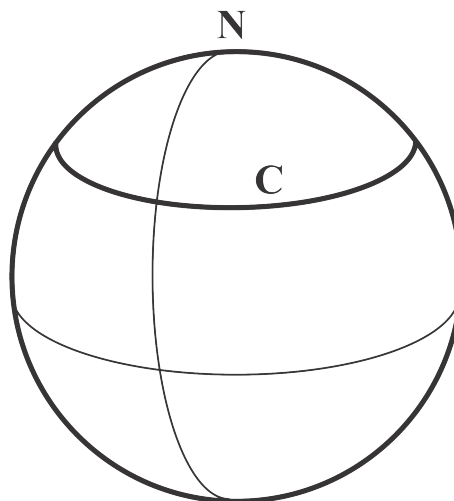


Figura 3.23: Calota esférica C

Teorema 3.7. *Se C é uma calota esférica, compreendida entre um dos polos N ou S e uma circunferência de latitude qualquer, de altura h , então a área $A(C)$ de C é igual a*

$$A(C) = 2\pi\rho h.$$

Demonstração.

Sejam

$$x = g(y) = \sqrt{\rho^2 - y^2} \tag{3.39}$$

a equação de uma circunferência máxima, e

$$\rho - d = h \quad (3.40)$$

a altura da calota esférica, como mostra a Figura 3.24.

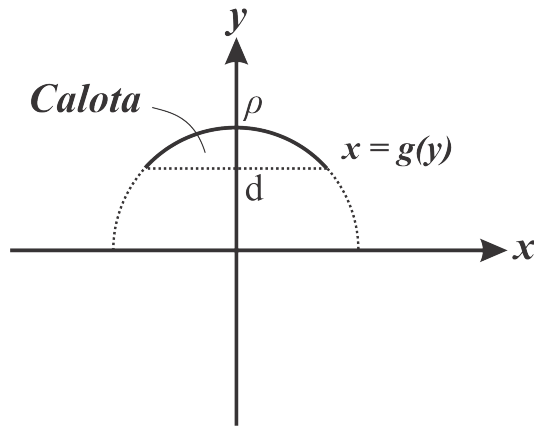


Figura 3.24: Seção da calota esférica

Rotacionando (3.39) em torno do eixo Oy , com $d \leq y \leq \rho$, temos que a área da calota esférica C é dada, segundo (3.17), por:

$$\mathcal{A}(C) = 2\pi \int_d^\rho g(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy. \quad (3.41)$$

Derivando (3.39) em relação a y , temos que:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{\sqrt{\rho^2 - y^2}}. \quad (3.42)$$

Substituindo (3.39) e (3.42) em (3.41), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(C) &= 2\pi \int_d^\rho \sqrt{\rho^2 - y^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{y}{\sqrt{\rho^2 - y^2}}\right)^2} dy \\ &= 2\pi \int_d^\rho \sqrt{\rho^2 - y^2} \sqrt{\left(\frac{\rho^2}{\rho^2 - y^2}\right)} dy \\ &= 2\pi \int_d^\rho \sqrt{\rho^2 - y^2} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - y^2}} dy \\ &= 2\pi \int_d^\rho \rho dy; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(C) &= 2\pi\rho \int_d^\rho dy \\
&= 2\pi\rho y \Big|_d^\rho \\
&= 2\pi\rho [\rho - d].
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Substituindo agora (3.40) em (3.43), concluímos que:

$$\mathcal{A}(C) = 2\pi\rho h. \tag{3.44}$$

□

Definição 3.17. *Denomina-se zona esférica a intersecção entre a superfície esférica e dois planos secantes a ela, paralelos entre si.*

A zona esférica também pode ser definida como sendo a região de S_ρ^2 compreendida entre duas circunferências de latitude que estão a distâncias d_1 e d_2 do centro de S_ρ^2 , ou então como a região de S_ρ^2 compreendida entre duas calotas disjuntas (sem regiões comuns) de alturas h_1 e h_2 , sendo $2\rho - h_1 - h_2$ a altura da zona esférica. Ainda, podemos definir a zona esférica como sendo a superfície gerada pela rotação em torno de um eixo de um arco de circunferência máxima que não tem pontos comuns com o eixo. A Figura 3.25 ilustra uma zona de S_ρ^2 .

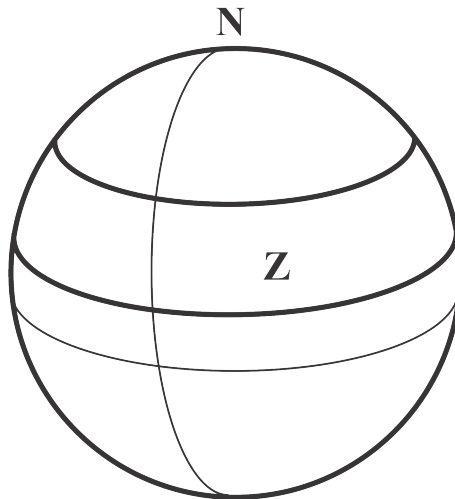


Figura 3.25: Zona esférica Z

Teorema 3.8. *Se Z é uma zona esférica, compreendida entre duas circunferências de latitude, de altura h , então a área $\mathcal{A}(Z)$ de Z é igual a*

$$\mathcal{A}(Z) = 2\pi\rho h.$$

Demonstração.

Sejam C_1 e C_2 duas calotas esféricas disjuntas de alturas h_1 e h_2 , respectivamente, S a área de S_ρ^2 e $h = 2\rho - h_1 - h_2$ a altura da zona esférica Z compreendida entre C_1 e C_2 . Assim, usando (3.23) e (3.44), temos que a área $\mathcal{A}(Z)$ de Z é dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(Z) &= \mathcal{A}(S) - (\mathcal{A}(C_1) + \mathcal{A}(C_2)) \\ &= 4\pi\rho^2 - (2\pi\rho h_1 + 2\pi\rho h_2) \\ &= 4\pi\rho^2 - 2\pi\rho(h_1 + h_2) \\ &= 2\pi\rho(2\rho - h_1 - h_2) \\ &= 2\pi\rho h.\end{aligned}$$

□

Pelos Teoremas 3.7 e 3.8, concluímos que as áreas da calota e da zona esféricas são dadas pela mesma relação.

3.4.5 FUSO ESFÉRICO

Definição 3.18. *Denomina-se fuso esférico a região da superfície esférica definida pela rotação de uma semicircunferência máxima segundo um ângulo θ .*

Em cartografia, um fuso esférico com $\theta = 15^\circ$ equivale a um fuso horário. A Figura 3.26 ilustra um fuso esférico de S_ρ^2 .

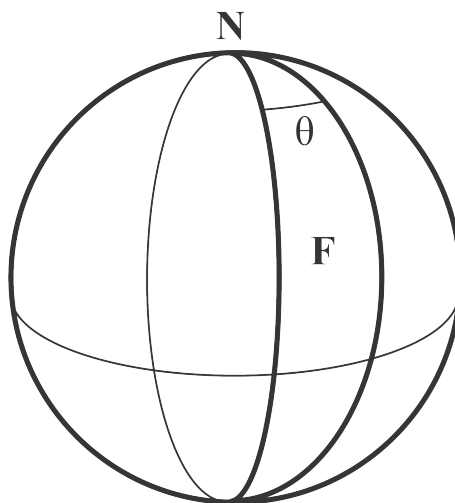


Figura 3.26: Fuso esférico F

Teorema 3.9. *Se F é um fuso esférico cuja abertura é um ângulo θ , então a área $\mathcal{A}(F)$ de F é igual a*

$$\mathcal{A}(F) = 2\theta\rho^2.$$

Demonstração.

A rotação de uma semicircunferência máxima, segundo um ângulo $\theta = 2\pi$, gera uma superfície esférica S de área $\mathcal{A}(S) = 4\pi\rho^2$, onde ρ é o raio da semicircunferência máxima e da superfície esférica.

Dessa forma, comparando a área $\mathcal{A}(S)$ da superfície esférica com a área $\mathcal{A}(F)$ do fuso esférico, temos que:

$$\frac{\mathcal{A}(S)}{2\pi} = \frac{\mathcal{A}(F)}{\theta} \Rightarrow \frac{4\pi\rho^2}{2\pi} = \frac{\mathcal{A}(F)}{\theta}. \quad (3.45)$$

Isolando $\mathcal{A}(F)$ em (3.45), concluímos que:

$$\mathcal{A}(F) = \frac{4\pi\rho^2\theta}{2\pi} = 2\theta\rho^2. \quad (3.46)$$

□

Usaremos a relação (3.46) para determinar a área de um triângulo esférico. É importante destacar que, no fuso esférico F da Figura 3.26, o ângulo θ no polo N é congruente ao ângulo no ponto antípoda (polo S).

3.5 TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

Definição 3.19. *Triângulo esférico é a região de S_ρ^2 delimitada por três geodésicas de S_ρ^2 que têm, duas a duas, um extremo comum.*

Na geometria Euclidiana, três pontos distintos, dois a dois não colineares, definem um único triângulo; na superfície esférica, três pontos distintos, não pertencentes simultaneamente à mesma geodésica, definem oito triângulos esféricos, uma vez que, dados dois pontos distintos $A, B \in S_\rho^2$, temos:

1. uma única circunferência máxima passando por A e B , se A e B não forem diametralmente opostos;

2. uma infinidade de circunferências máximas passando por A e B , se A e B forem diametralmente opostos.

Mais especificamente, sejam P , Q e R pontos pertencentes à S_ρ^2 , não pertencentes simultaneamente à mesma geodésica, e P' , Q' e R' pontos diametralmente opostos a P , Q e R , respectivamente. As circunferências máximas que passam por P e P' , por Q e Q' , e por R e R' , determinam os seguintes triângulos esféricos: ΔPQR , $\Delta PRQ'$, $\Delta PR'Q'$, $\Delta PR'Q$, $\Delta P'R'Q$, $\Delta P'RQ$, $\Delta P'Q'R$ e $\Delta P'Q'R'$, como mostra a Figura 3.27.

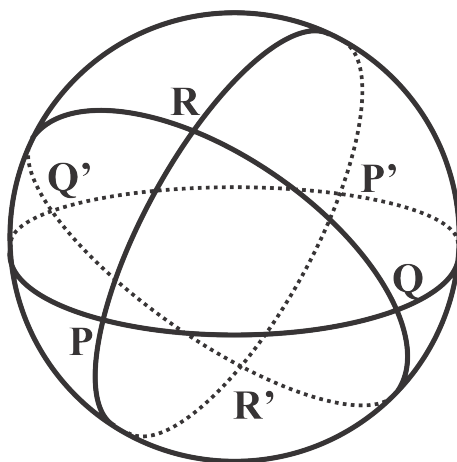


Figura 3.27: Triângulos esféricos definidos por três pontos distintos de S_ρ^2 , não pertencentes simultaneamente à mesma geodésica

Assim, a Definição 3.19 pode ser reescrita da forma que segue.

Definição 3.20. *Sejam C_1 , C_2 e C_3 três circunferências máximas distintas de S_ρ^2 , e os pontos A , B e C três das seis intersecções de C_1 , C_2 e C_3 . Dessa forma, A , B e C definem três geodésicas e os ângulos $\widehat{AB} = \gamma$, $\widehat{AC} = \beta$ e $\widehat{BC} = \alpha$. Os pontos A , B e C e os ângulos α , β e γ determinam o triângulo esférico ABC , sendo:*

- i) os pontos A , B e C os vértices de ABC ;
- ii) as geodésicas \widehat{AB} , \widehat{AC} e \widehat{BC} os lados de ABC ;
- iii) os ângulos α , β e γ os ângulos internos de ABC .

A Figura 3.28 ilustra o triângulo esférico ABC .

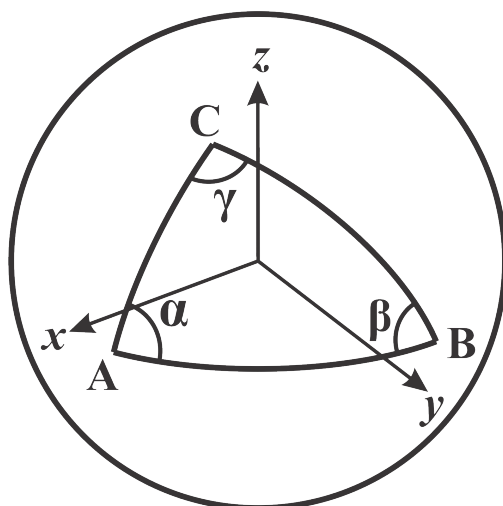


Figura 3.28: Triângulo esférico ABC

Seja agora o triângulo esférico ABC tal que:

$$A = (1, 0, 0);$$

$$B = (0, 1, 0);$$

$$C = (0, 0, 1),$$

ilustrado na Figura 3.29.

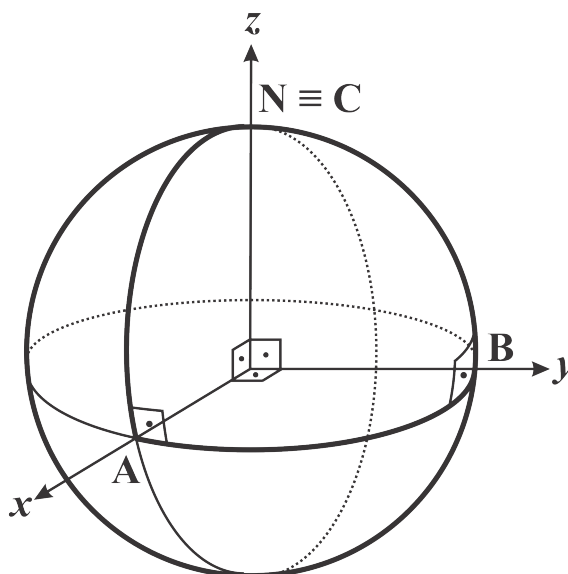


Figura 3.29: Triângulo esférico trirretângulo

O triângulo esférico ABC tem área equivalente a um oitavo da superfície esférica. Mais, seus ângulos internos são todos retos, ou seja, iguais a $\frac{\pi}{2}$, pois os eixos Ox , Oy e Oz são ortogonais e cada uma das geodésicas \widehat{AB} , \widehat{AC} e \widehat{BC} está contida em um único plano que é

ortogonal aos planos que contêm as outras duas.

Este é um resultado interessante, visto que, diferentemente da geometria Euclidiana, o triângulo esférico ABC têm ângulos internos cuja soma é maior do que π .

3.5.1 ÁREA

Teorema 3.10. *Se ABC é um triângulo em S_ρ^2 , cujos ângulos internos medem α , β e γ , então a área $\mathcal{A}(\Delta ABC)$ de ABC é igual a*

$$\mathcal{A}(\Delta ABC) = \rho^2 [(\alpha + \beta + \gamma) - \pi].$$

Demonstração.

Os vértices A , B e C do ΔABC definem com os pontos A' , B' e C' , diametralmente opostos a A , B e C , respectivamente, três fusos esféricos.

Sejam $\widehat{BC} = \alpha$, $\widehat{AC} = \beta$, $\widehat{AB} = \gamma$, F_α o fuso esférico de abertura α em A e que contém as geodésicas \widehat{AB} e \widehat{AC} , F_β o fuso esférico de abertura β em B e que contém as geodésicas \widehat{AB} e \widehat{BC} , e F_γ o fuso esférico de abertura γ em C e que contém as geodésicas \widehat{AC} e \widehat{BC} , como na Figura 3.30.

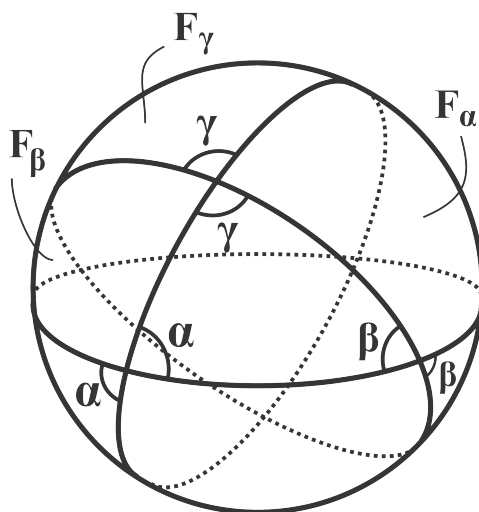


Figura 3.30: Triângulo esférico ABC , de ângulos internos α , β e γ , e os fusos esféricos F_α , F_β e F_γ

A área $\mathcal{A}(F_\alpha)$ do fuso esférico F_α é igual à soma entre as áreas $\mathcal{A}(\Delta ABC)$ do triângulo esférico ABC e $\mathcal{A}(C_\alpha)$ da região complementar C_α de ABC em relação à F_α , o mesmo valendo para os fusos esféricos F_β e F_γ . Assim, empregando (3.46), temos que:

$$\mathcal{A}(F_\alpha) = \mathcal{A}(\Delta ABC) + \mathcal{A}(C_\alpha) \Rightarrow \mathcal{A}(C_\alpha) = 2\alpha\rho^2 - \mathcal{A}(\Delta ABC); \quad (3.47)$$

$$\mathcal{A}(F_\beta) = \mathcal{A}(\Delta ABC) + \mathcal{A}(C_\beta) \Rightarrow \mathcal{A}(C_\beta) = 2\beta\rho^2 - \mathcal{A}(\Delta ABC); \quad (3.48)$$

$$\mathcal{A}(F_\gamma) = \mathcal{A}(\Delta ABC) + \mathcal{A}(C_\gamma) \Rightarrow \mathcal{A}(C_\gamma) = 2\gamma\rho^2 - \mathcal{A}(\Delta ABC). \quad (3.49)$$

Analogamente, podemos pensar a área S de S_ρ^2 como sendo o dobro da soma das áreas $\mathcal{A}(F_\alpha)$, $\mathcal{A}(F_\beta)$ e $\mathcal{A}(F_\gamma)$ das superfícies dos fusos esféricos F_α , F_β e F_γ , respectivamente. Contudo, como os triângulos esféricos ABC e $A'B'C'$ são congruentes, estaremos contando nesse cálculo a área $\mathcal{A}(\Delta ABC)$ do ΔABC quatro vezes a mais. Assim, utilizando (3.23), temos que:

$$\begin{aligned} S &= 2(\mathcal{A}(F_\alpha) + \mathcal{A}(F_\beta) + \mathcal{A}(F_\gamma)) - 4\mathcal{A}(\Delta ABC) \\ 4\pi\rho^2 &= 2(\mathcal{A}(F_\alpha) + \mathcal{A}(F_\beta) + \mathcal{A}(F_\gamma)) - 4\mathcal{A}(\Delta ABC) \\ 2\pi\rho^2 &= \mathcal{A}(F_\alpha) + \mathcal{A}(F_\beta) + \mathcal{A}(F_\gamma) - 2\mathcal{A}(\Delta ABC). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Substituindo (3.47), (3.48) e (3.49) em (3.50), concluímos que:

$$\begin{aligned} 2\pi\rho^2 &= \mathcal{A}(\Delta ABC) + \mathcal{A}(C_\alpha) + \mathcal{A}(\Delta ABC) + \mathcal{A}(C_\beta) + \mathcal{A}(\Delta ABC) + \mathcal{A}(C_\gamma) - 2\mathcal{A}(\Delta ABC) \\ 2\pi\rho^2 &= \mathcal{A}(\Delta ABC) + \mathcal{A}(C_\alpha) + \mathcal{A}(C_\beta) + \mathcal{A}(C_\gamma) \\ 2\pi\rho^2 &= \mathcal{A}(\Delta ABC) + 2\alpha\rho^2 - \mathcal{A}(\Delta ABC) + 2\beta\rho^2 - \mathcal{A}(\Delta ABC) + 2\gamma\rho^2 - \mathcal{A}(\Delta ABC) \\ 2\pi\rho^2 &= 2\rho^2(\alpha + \beta + \gamma) - 2\mathcal{A}(\Delta ABC) \\ \pi\rho^2 &= \rho^2(\alpha + \beta + \gamma) - \mathcal{A}(\Delta ABC) \\ \mathcal{A}(\Delta ABC) &= \rho^2(\alpha + \beta + \gamma) - \pi\rho^2 \\ \mathcal{A}(\Delta ABC) &= \rho^2[(\alpha + \beta + \gamma) - \pi]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

□

A medida (3.51) é estritamente positiva. Essa medida pode ser reescrita como:

$$\mathcal{A}(\Delta ABC) = \rho^2 E; \quad (3.52)$$

$$E = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

onde E é a *deficiência* (excesso) do triângulo esférico ABC , isto é, o quanto a soma dos ângulos internos de ABC excede π . A relação (3.52) viabiliza a demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.

3.5.2 SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS

Teorema 3.11. *Se ABC é um triângulo esférico de ângulos internos α , β e γ , então a soma dos ângulos internos de ABC é dada por:*

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi.$$

Demonstração.

O maior triângulo esférico que podemos construir em S_ρ^2 tem área tendendo à metade da área da superfície esférica, ou seja, $2\pi\rho^2$, uma vez que um triângulo esférico de área $2\pi\rho^2$ é um triângulo degenerado em uma circunferência máxima.

Dessa forma, temos em (3.52) que:

$$\mathcal{A}(\Delta ABC) \rightarrow 0 \Rightarrow E \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma \rightarrow \pi; \quad (3.53)$$

$$\mathcal{A}(\Delta ABC) \rightarrow 2\pi\rho^2 \Rightarrow E \rightarrow 2\pi \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma \rightarrow 3\pi. \quad (3.54)$$

De (3.53) e (3.54), concluímos que:

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi.$$

□

Das relações (3.53) e (3.54), concluímos que as medidas dos lados de um triângulo esférico (e conseqüentemente dos ângulos internos) são maiores do que 0 e menores do que π .

Para concluir esta seção, usaremos a rotação em S_ρ^2 e coordenadas esféricas para demonstrar o *teorema de Pitágoras esférico*. Este teorema tem uma relação interessante com o teorema de Pitágoras da geometria Euclidiana (BRANNAN et al., 2012).

3.5.3 TEOREMA DE PITÁGORAS

Teorema 3.12 (Teorema de Pitágoras esférico). *Se ABC é um triângulo em S_ρ^2 , retângulo no vértice C , e a , b e c são os comprimentos dos lados \widehat{BC} , \widehat{AC} e \widehat{AB} , respectivamente, então³*

$$\cos\left(\frac{c}{\rho}\right) = \cos\left(\frac{a}{\rho}\right) \cos\left(\frac{b}{\rho}\right).$$

³Se a superfície esférica for unitária ($\rho = 1$), a tese do Teorema 3.12 se reduz a $\cos c = \cos a \cdot \cos b$.

Demonstração.

Apliquemos uma rotação em S_ρ^2 de tal forma que o vértice C do ΔABC ocupe a posição do polo N , isto é, $C = \rho(0, 0, 1)$, o vértice A pertença ao meridiano de Greenwich (Definição 3.8) e tenha coordenadas $\rho(\text{sen}\beta, 0, \text{cos}\beta)$, e o vértice B possua coordenadas $\rho(0, \text{sen}\gamma, \text{cos}\gamma)$, como mostra a Figura 3.31.

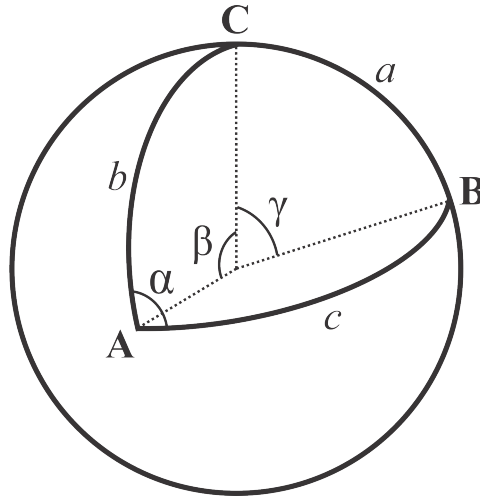


Figura 3.31: Triângulo esférico ABC retângulo em C

Ao aplicarmos uma rotação $R(Y, -\beta)$ em S_ρ^2 , levamos A em C , C em algum $C' \in S_\rho^2$ e B em algum $B' \in S_\rho^2$.

Seja $\widehat{CAB} = \alpha$. A rotação $R(Y, -\beta)$ leva \widehat{CAB} em $\widehat{C'CB'}$. Assim, $\widehat{C'CB'} = \alpha$. Ainda, $\widehat{ACB'} = \pi - \alpha$, pois $\widehat{ACB'} + \widehat{B'CC'} = \pi$, a longitude do ponto B' é igual a $\pi - \alpha$ e a colatitude⁴ é $\frac{c}{\rho}$. Isto implica que as coordenadas de B' são iguais a:

$$\rho \left(\cos(\pi - \alpha) \text{sen} \left(\frac{c}{\rho} \right), \text{sen}(\pi - \alpha) \text{sen} \left(\frac{c}{\rho} \right), \cos \left(\frac{c}{\rho} \right) \right). \quad (3.55)$$

Pelo Teorema 3.6, temos que o comprimento do arco AC é igual a $\beta\rho$. Logo:

$$\widehat{AC} = b = \beta\rho \Rightarrow \beta = \frac{b}{\rho}. \quad (3.56)$$

Analogamente, temos para o arco BC que:

$$\widehat{BC} = \gamma\rho = a \Rightarrow \gamma = \frac{a}{\rho}. \quad (3.57)$$

⁴Complemento da latitude.

Dessa forma, devido à rotação do ponto B em S_ρ^2 , as coordenadas do ponto B' também são dadas por:

$$R(Y, -\beta)(B) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\text{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \rho \begin{pmatrix} 0 \\ \text{sen}\gamma \\ \cos\gamma \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Substituindo (3.56) e (3.57) em (3.58), obtemos:

$$\begin{aligned} R(Y, -\beta)(B) &= \begin{pmatrix} \cos(b/\rho) & 0 & -\text{sen}(b/\rho) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(b/\rho) & 0 & \cos(b/\rho) \end{pmatrix} \cdot \rho \begin{pmatrix} 0 \\ \text{sen}(a/\rho) \\ \cos(a/\rho) \end{pmatrix} \\ &= \rho \begin{pmatrix} -\text{sen}(b/\rho) \cos(a/\rho) \\ \text{sen}(a/\rho) \\ \cos(b/\rho) \cos(a/\rho) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Igualando (3.55) e (3.59), temos que:

$$\rho \left(\cos(\pi - \alpha) \text{sen} \left(\frac{c}{\rho} \right), \text{sen}(\pi - \alpha) \text{sen} \left(\frac{c}{\rho} \right), \cos \left(\frac{c}{\rho} \right) \right) = \rho \begin{pmatrix} -\text{sen}(b/\rho) \cos(a/\rho) \\ \text{sen}(a/\rho) \\ \cos(b/\rho) \cos(a/\rho) \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

Em (3.60), a comparação da terceira coordenada estabelece que:

$$\cos \left(\frac{c}{\rho} \right) = \cos \left(\frac{a}{\rho} \right) \cos \left(\frac{b}{\rho} \right). \quad (3.61)$$

□

Se aplicarmos a relação (3.61) em uma superfície esférica cujo raio ρ tende ao infinito, a tese do Teorema 3.12 se reduz ao caso Euclidiano, ou seja, $c^2 = a^2 + b^2$.

Corolário 3.2. *Se ABC é um triângulo em S_ρ^2 , retângulo no vértice C , e a , b e c são os comprimentos dos lados \widehat{BC} , \widehat{AC} e \widehat{AB} , respectivamente, então a relação*

$$\cos \left(\frac{c}{\rho} \right) = \cos \left(\frac{a}{\rho} \right) \cos \left(\frac{b}{\rho} \right)$$

se reduz ao caso Euclidiano $c^2 = a^2 + b^2$ quando $\rho \rightarrow \infty$.

Demonstração.

Toda função $f(x) \in C^\infty$ (infinitamente diferenciável) pode ser expandida em uma série de Taylor (STEWART, 2017a), da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n,$$

a qual se reduz a uma série de Maclaurin quando $a = 0$.

A série de Maclaurin da função $\cos(x)$ é dada por:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \quad (3.62)$$

Assim, segundo (3.62), a expansão em série de Maclaurin de $\cos(c/\rho)$, $\cos(a/\rho)$ e $\cos(b/\rho)$ é dada, respectivamente, por:

$$\cos\left(\frac{c}{\rho}\right) = 1 - \frac{(c/\rho)^2}{2!} + \frac{(c/\rho)^4}{4!} - \frac{(c/\rho)^6}{6!} + \frac{(c/\rho)^8}{8!} - \dots; \quad (3.63)$$

$$\cos\left(\frac{a}{\rho}\right) = 1 - \frac{(a/\rho)^2}{2!} + \frac{(a/\rho)^4}{4!} - \frac{(a/\rho)^6}{6!} + \frac{(a/\rho)^8}{8!} - \dots; \quad (3.64)$$

$$\cos\left(\frac{b}{\rho}\right) = 1 - \frac{(b/\rho)^2}{2!} + \frac{(b/\rho)^4}{4!} - \frac{(b/\rho)^6}{6!} + \frac{(b/\rho)^8}{8!} - \dots. \quad (3.65)$$

Substituindo (3.63), (3.64) e (3.65) em (3.61) e lembrando que

$$\begin{aligned} (a+b+c)(x+y+z) &= [a+(b+c)][x+(y+z)], \\ (a+b+c)(x+y+z) &= ax+a(y+z)+x(b+c)+(b+c)(y+z), \\ (a+b+c)(x+y+z) &= ax+ay+az+xb+xc+(b+c)(y+z), \end{aligned} \quad (3.66)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{c}{\rho}\right) &= \cos\left(\frac{a}{\rho}\right) \cdot \cos\left(\frac{b}{\rho}\right) \\ 1 - \frac{(c/\rho)^2}{2!} + \frac{(c/\rho)^4}{4!} - \dots &= \left(1 - \frac{(a/\rho)^2}{2!} + \frac{(a/\rho)^4}{4!} - \dots\right) \cdot \left(1 - \frac{(b/\rho)^2}{2!} + \frac{(b/\rho)^4}{4!} - \dots\right) \\ 1 - \frac{(c/\rho)^2}{2!} + \frac{(c/\rho)^4}{4!} - \dots &= 1 - \frac{(b/\rho)^2}{2!} + \frac{(b/\rho)^4}{4!} - \dots - \frac{(a/\rho)^2}{2!} + \frac{(a/\rho)^4}{4!} - \dots + \\ &\quad + \left(-\frac{(a/\rho)^2}{2!} + \frac{(a/\rho)^4}{4!} - \dots\right) \cdot \left(-\frac{(b/\rho)^2}{2!} + \frac{(b/\rho)^4}{4!} - \dots\right). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Cancelando 1 e colocando $\frac{1}{\rho^2}$ em evidência em ambos os lados de (3.67), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} \left(-\frac{c^2}{2!} + \frac{c^4/\rho^2}{4!} - \dots \right) &= \frac{1}{\rho^2} \left(-\frac{b^2}{2!} + \frac{b^4/\rho^2}{4!} - \dots \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(-\frac{a^2}{2!} + \frac{a^4/\rho^2}{4!} - \dots \right) + \\ &+ \frac{1}{\rho^2} \left(-\frac{a^2}{2!} + \frac{a^4/\rho^2}{4!} - \dots \right) \cdot \left(-\frac{(b/\rho)^2}{2!} + \frac{(b/\rho)^4}{4!} - \dots \right). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Simplificando $\frac{1}{\rho^2}$ em (3.68), obtemos:

$$\begin{aligned} -\frac{c^2}{2!} + \frac{c^4/\rho^2}{4!} - \dots &= -\frac{b^2}{2!} + \frac{b^4/\rho^2}{4!} - \dots - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4/\rho^2}{4!} - \dots + \\ &+ \left(-\frac{a^2}{2!} + \frac{a^4/\rho^2}{4!} - \dots \right) \cdot \left(-\frac{(b/\rho)^2}{2!} + \frac{(b/\rho)^4}{4!} - \dots \right). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Como

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

aplicando o limite com $\rho \rightarrow \infty$ a ambos os lados de (3.69), concluímos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(-\frac{c^2}{2!} \right) &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(-\frac{b^2}{2!} - \frac{a^2}{2!} \right) \\ -\frac{c^2}{2!} &= -\frac{b^2}{2!} - \frac{a^2}{2!} \\ c^2 &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

□

Não apenas o *teorema de Pitágoras esférico* converge para o caso Euclidiano quando o raio da superfície esférica tende ao infinito, como também a *lei dos cossenos esférica* e a *lei dos senos esférica*. Na próxima seção, analisamos essas duas convergências.

3.6 TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

Na geometria Euclidiana, a lei dos cossenos estabelece que, em um triângulo de lados de medidas a , b e c , vale a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \quad (3.70)$$

onde α é o ângulo oposto ao lado de comprimento a . Quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$, a relação (3.70) equivale ao teorema de Pitágoras.

Por outro lado, a lei dos senos estabelece que nesse mesmo triângulo também vale a relação:

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma}, \quad (3.71)$$

onde α , β e γ são os ângulos internos opostos, respectivamente, aos lados de medidas a , b e c . Quando um dos ângulos internos é igual a $\frac{\pi}{2}$, a relação (3.71) fornece a razão trigonométrica *seno* para os dois ângulos agudos do triângulo retângulo.

3.6.1 LEI DOS COSSENOS

Teorema 3.13 (Lei dos cossenos esférica). *Se ABC é um triângulo em S_ρ^2 , cujos ângulos internos são α , β e γ e cujos lados opostos a esses ângulos medem, respectivamente, a , b e c , então⁵:*

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\cos\left(\frac{a}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{b}{\rho}\right)\cos\left(\frac{c}{\rho}\right)}{\text{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right)\text{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)}; \\ \cos\beta &= \frac{\cos\left(\frac{b}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{a}{\rho}\right)\cos\left(\frac{c}{\rho}\right)}{\text{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right)\text{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)}; \\ \cos\gamma &= \frac{\cos\left(\frac{c}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{a}{\rho}\right)\cos\left(\frac{b}{\rho}\right)}{\text{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right)\text{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right)}. \end{aligned}$$

Demonstração.

Sem perda de generalidade, consideremos inicialmente o ângulo α .

Sejam r e s retas tangentes à superfície esférica no ponto A , tais que $\widehat{rs} = \alpha$, e t e u retas que contém os segmentos \overline{OB} e \overline{OC} , respectivamente, de tal forma que, ao prolongarmos r ,

⁵Se a superfície esférica for unitária ($\rho = 1$), a tese do Teorema 3.13 se reduz a:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cdot \cos c + \text{sen} b \cdot \text{sen} c \cdot \cos \alpha; \\ \cos b &= \cos a \cdot \cos c + \text{sen} a \cdot \text{sen} c \cdot \cos \beta; \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \text{sen} a \cdot \text{sen} b \cdot \cos \gamma. \end{aligned}$$

s, t e $u, r \cap t = \{D\}$ e $s \cap u = \{E\}$, como na Figura 3.32(a). Sejam ainda $C\hat{O}B = \alpha_1$, $A\hat{O}C = \beta_1$ e $A\hat{O}B = \gamma_1$, como na Figura 3.32(b).

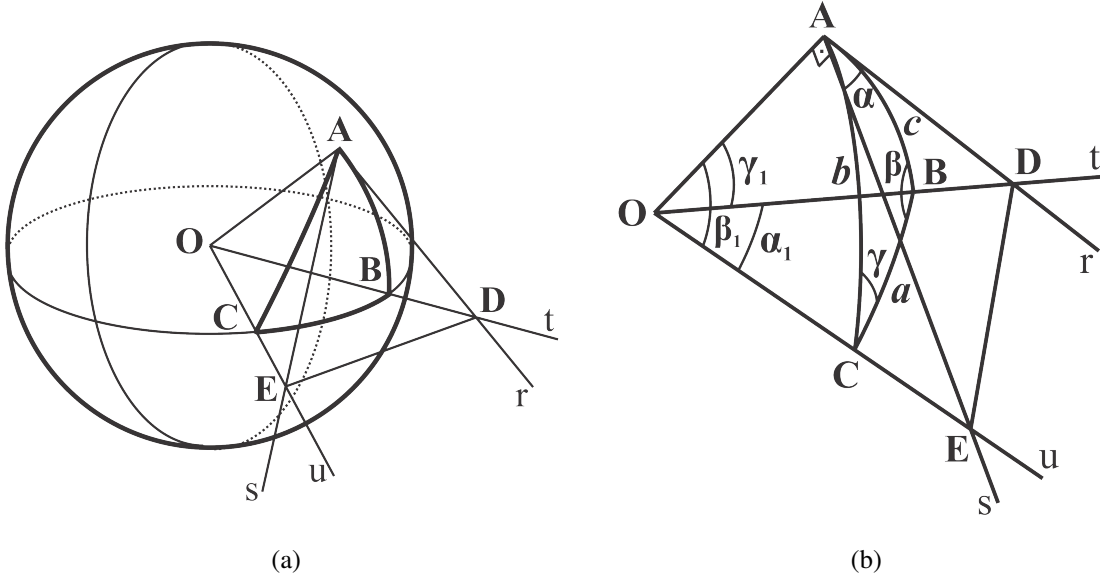


Figura 3.32: Triângulo ABC em S_ρ^2 : (a) retas r e s tangentes a S_ρ^2 em A e retas t e u tais que $\overline{OB} \subset t$ e $\overline{OC} \subset u$; (b) medidas de lados e ângulos de ABC

Segundo o Teorema 3.6, temos que:

$$a = \alpha_1 \rho \Rightarrow \alpha_1 = \frac{a}{\rho}; \quad (3.72)$$

$$b = \beta_1 \rho \Rightarrow \beta_1 = \frac{b}{\rho}; \quad (3.73)$$

$$c = \gamma_1 \rho \Rightarrow \gamma_1 = \frac{c}{\rho}. \quad (3.74)$$

Como r e s são tangentes a S_ρ^2 em A , os triângulos OAD e OAE são retângulos uma vez que $O\hat{A}D \equiv O\hat{A}E = \frac{\pi}{2}$ (as retas são perpendiculares ao raio da superfície esférica no ponto de tangência). Assim, calculando razões trigonométricas nos triângulos OAD e OAE e empregando (3.73) e (3.74), temos que:

$$\cos(\beta_1) = \cos\left(\frac{b}{\rho}\right) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OE}}; \quad (3.75)$$

$$\text{sen}(\beta_1) = \text{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right) = \frac{\overline{AE}}{\overline{OE}}; \quad (3.76)$$

$$\cos(\gamma_1) = \cos\left(\frac{c}{\rho}\right) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OD}}; \quad (3.77)$$

$$\text{sen}(\gamma_1) = \text{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right) = \frac{\overline{AD}}{\overline{OD}}. \quad (3.78)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras da geometria Euclidiana nos triângulos retângulos OAD e OAE , obtemos, respectivamente:

$$\overline{OD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AD}^2; \quad (3.79)$$

$$\overline{OE}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AE}^2. \quad (3.80)$$

Somando (3.79) e (3.80), temos que:

$$\overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 = 2\overline{OA}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2. \quad (3.81)$$

O segmento DE é comum aos triângulos ODE e ADE e $\widehat{DAE} = \alpha$. Dessa forma, aplicando a lei dos cossenos da geometria Euclidiana nesses dois triângulos, obtemos:

$$\overline{DE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2 \cdot \overline{OD} \overline{OE} \cos \alpha_1; \quad (3.82)$$

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2\overline{AD} \overline{AE} \cos \alpha. \quad (3.83)$$

Igualando (3.82) e (3.83), temos que:

$$\overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2\overline{OD} \overline{OE} \cos \alpha_1 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2\overline{AD} \overline{AE} \cos \alpha. \quad (3.84)$$

Substituindo (3.81) em (3.84), obtemos:

$$\begin{aligned} 2\overline{OA}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2\overline{OD} \overline{OE} \cos \alpha_1 &= \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2\overline{AD} \overline{AE} \cos \alpha \\ 2\overline{OA}^2 - 2\overline{OD} \overline{OE} \cos \alpha_1 &= -2\overline{AD} \overline{AE} \cos \alpha \\ 2\overline{OD} \overline{OE} \cos \alpha_1 &= 2\overline{OA}^2 + 2\overline{AD} \overline{AE} \cos \alpha \\ \overline{OD} \overline{OE} \cos \alpha_1 &= \overline{OA}^2 + \overline{AD} \overline{AE} \cos \alpha \\ \cos \alpha_1 &= \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OD} \overline{OE}} + \frac{\overline{AD} \overline{AE}}{\overline{OD} \overline{OE}} \cos \alpha \\ \cos \alpha_1 &= \frac{\overline{OA}}{\overline{OD}} \frac{\overline{OA}}{\overline{OE}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{OD}} \frac{\overline{AE}}{\overline{OE}} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Substituindo agora (3.75), (3.76), (3.77) e (3.78) em (3.85), concluímos que:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \cos \beta_1 \cos \gamma_1 + \sin \beta_1 \sin \gamma_1 \cos \alpha_1 \\ \cos \left(\frac{a}{\rho} \right) &= \cos \left(\frac{b}{\rho} \right) \cos \left(\frac{c}{\rho} \right) + \sin \left(\frac{b}{\rho} \right) \sin \left(\frac{c}{\rho} \right) \cos \alpha \\ \cos \left(\frac{a}{\rho} \right) - \cos \left(\frac{b}{\rho} \right) \cos \left(\frac{c}{\rho} \right) &= \sin \left(\frac{b}{\rho} \right) \sin \left(\frac{c}{\rho} \right) \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos\left(\frac{a}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{b}{\rho}\right)\cos\left(\frac{c}{\rho}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)}. \quad (3.86)$$

Analogamente, considerando os ângulos β e γ , podemos provar, respectivamente, que:

$$\cos\beta = \frac{\cos\left(\frac{b}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{a}{\rho}\right)\cos\left(\frac{c}{\rho}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)}; \quad (3.87)$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos\left(\frac{c}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{a}{\rho}\right)\cos\left(\frac{b}{\rho}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right)}. \quad (3.88)$$

□

Corolário 3.3. *Se ABC é um triângulo em S_ρ^2 , cujos ângulos internos são α , β e γ e cujos lados opostos a esses ângulos medem, respectivamente, a , b e c , então a lei dos cossenos esférica*

$$\cos\alpha = \frac{\cos\left(\frac{a}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{b}{\rho}\right)\cos\left(\frac{c}{\rho}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)} \quad (3.89)$$

tende ao caso Euclidiano⁶ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$ quando $\rho \rightarrow \infty$.

Demonstração.

A série de Maclaurin para as funções $\cos(x)$ e $\operatorname{sen}(x)$ é dada, respectivamente, por:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots; \quad (3.90)$$

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots. \quad (3.91)$$

Assim, empregando (3.90) e (3.91) para expandir as funções $\cos(a/\rho)$, $\cos(b/\rho)$,

⁶O mesmo ocorre para $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ dados, respectivamente, por (3.87) e (3.88).

$\cos(c/\rho)$, $\sen(b/\rho)$ e $\sen(c/\rho)$ em série de Maclaurin, podemos reescrever (3.89) como:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\cos\left(\frac{a}{\rho}\right) - \cos\left(\frac{b}{\rho}\right)\cos\left(\frac{c}{\rho}\right)}{\sen\left(\frac{b}{\rho}\right)\sen\left(\frac{c}{\rho}\right)} \\ &= \frac{1 - \frac{(a/\rho)^2}{2!} + \frac{(a/\rho)^4}{4!} - \dots - \left(1 - \frac{(b/\rho)^2}{2!} + \frac{(b/\rho)^4}{4!} - \dots\right) \left(1 - \frac{(c/\rho)^2}{2!} + \frac{(c/\rho)^4}{4!} - \dots\right)}{\left(\frac{b}{\rho} - \frac{(b/\rho)^3}{3!} + \frac{(b/\rho)^5}{5!} - \dots\right) \left(\frac{c}{\rho} - \frac{(c/\rho)^3}{3!} + \frac{(c/\rho)^5}{5!} - \dots\right)}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Utilizando (3.66), podemos reescrever (3.92) como:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{1 - \frac{(a/\rho)^2}{2!} + \frac{(a/\rho)^4}{4!} - \dots}{\frac{bc}{\rho^2} + \frac{b}{\rho} \left(-\frac{(c/\rho)^3}{3!} + \dots\right) + \frac{c}{\rho} \left(-\frac{(b/\rho)^3}{3!} + \dots\right) + \left(-\frac{(b/\rho)^3}{3!} + \dots\right) \left(-\frac{(c/\rho)^3}{3!} + \dots\right)} + \\ &+ \frac{-1 + \frac{(c/\rho)^2}{2!} - \dots + \frac{(b/\rho)^2}{2!} - \dots + \left(\frac{(b/\rho)^2}{2!} - \frac{(b/\rho)^4}{4!} + \dots\right) \left(-\frac{(c/\rho)^2}{2!} + \frac{(c/\rho)^4}{4!} - \dots\right)}{\frac{bc}{\rho^2} + \frac{b}{\rho} \left(-\frac{(c/\rho)^3}{3!} + \dots\right) + \frac{c}{\rho} \left(-\frac{(b/\rho)^3}{3!} + \dots\right) + \left(-\frac{(b/\rho)^3}{3!} + \dots\right) \left(-\frac{(c/\rho)^3}{3!} + \dots\right)}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Em (3.93), cancelando 1 no numerador e colocando $\frac{1}{\rho^2}$ em evidência no numerador e no denominador, obtemos:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{-\frac{a^2}{2!} + \left(\frac{a^4/\rho^2}{4!} - \dots\right) + \frac{c^2}{2!} + \left(-\frac{c^4/\rho^2}{4!} + \dots\right) + \frac{b^2}{2!} + \left(-\frac{b^4/\rho^2}{4!} + \dots\right)}{bc + b \left(-\frac{c^3/\rho^2}{3!} + \dots\right) + c \left(-\frac{b^3/\rho^2}{3!} + \dots\right) + \left(-\frac{b^3/\rho}{3!} + \dots\right) \left(-\frac{(c/\rho)^3}{3!} + \dots\right)} + \\ &+ \frac{\left(\frac{b^2}{2!} - \frac{b^4/\rho^2}{4!} + \dots\right) \left(-\frac{(c/\rho)^2}{2!} + \frac{(c/\rho)^4}{4!} - \dots\right)}{bc + b \left(-\frac{c^3/\rho^2}{3!} + \dots\right) + c \left(-\frac{b^3/\rho^2}{3!} + \dots\right) + \left(-\frac{b^3/\rho}{3!} + \dots\right) \left(-\frac{(c/\rho)^3}{3!} + \dots\right)}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Como

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

aplicando o limite com $\rho \rightarrow \infty$ a ambos os lados de (3.94), concluímos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \cos\alpha &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\frac{-\frac{a^2}{2!} + \frac{c^2}{2!} + \frac{b^2}{2!}}{bc} \right] \\ \cos\alpha &= \frac{-\frac{a^2}{2!} + \frac{c^2}{2!} + \frac{b^2}{2!}}{bc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
bc \cos \alpha &= -\frac{a^2}{2!} + \frac{c^2}{2!} + \frac{b^2}{2!} \\
\frac{a^2}{2!} &= \frac{b^2}{2!} + \frac{c^2}{2!} - bc \cos \alpha \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.
\end{aligned}$$

□

3.6.2 LEI DOS SENOS

Teorema 3.14 (Lei dos senos esférica). *Se ABC é um triângulo em S_ρ^2 , cujos ângulos internos são α , β e γ e cujos lados opostos a esses ângulos medem, respectivamente, a , b e c , então⁷:*

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \left(\frac{a}{\rho} \right)} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \left(\frac{b}{\rho} \right)} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \left(\frac{c}{\rho} \right)}.$$

Demonstração.

No triângulo ABC em S_ρ^2 , ilustrado na Figura 3.33(a), seja B' a projeção ortogonal do vértice B sobre o plano definido pelos vértices A e C e pelo centro O de S_ρ^2 . Assim, $\widehat{DB'B}$ e $\widehat{EB'B}$ são ângulos retos. Sejam ainda \overline{BD} , com $D \in \overline{OA}$, e \overline{BE} , com $E \in \overline{OC}$, de tal maneira que \widehat{ODB} e \widehat{OEB} sejam ângulos retos, como mostra a Figura 3.33(b).

Iniciemos provando que $\widehat{B'DB} = \alpha$. Sejam r e s retas tangentes a S_ρ^2 no vértice A de ABC , tais que $\widehat{rs} = \alpha$, e B_1 e C_1 as projeções ortogonais dos vértices B e C de ABC , respectivamente, sobre o plano π definido por r e s . Desse modo, temos que $r \perp \overline{OA}$, $\overline{DB} \parallel \overline{AB_1}$, $AADB_1$ é um retângulo, $s \perp \overline{OA}$ e $\overline{AC_1} \parallel \overline{DB'}$.

Assim, temos que $\widehat{B'DB} \equiv \widehat{C_1AC} \equiv \widehat{rs} = \alpha$. Analogamente, podemos mostrar que $\widehat{B'EB} = \gamma$.

Denotando $\widehat{COB} = \alpha_1$ e $\widehat{AOB} = \gamma_1$, temos, segundo o Teorema 3.6, que:

$$a = \alpha_1 \rho \Rightarrow \alpha_1 = \frac{a}{\rho}; \quad (3.95)$$

$$c = \gamma_1 \rho \Rightarrow \gamma_1 = \frac{c}{\rho}. \quad (3.96)$$

⁷Se a superfície esférica for unitária ($\rho = 1$), a tese do Teorema 3.14 se reduz a:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} c}.$$

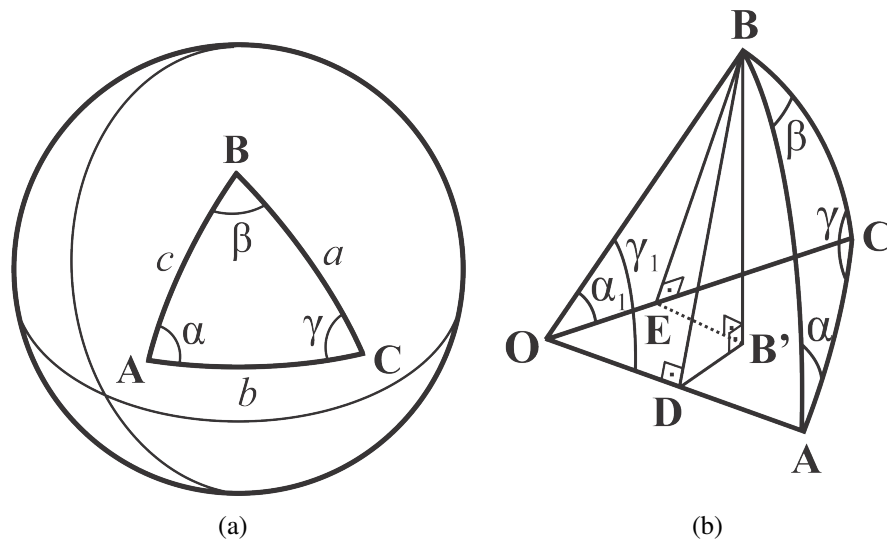


Figura 3.33: Triângulo ABC em S_ρ^2 : (a) vértices, ângulos e lados; (b) projeção ortogonal do vértice B sobre o plano definido pelo centro O de S_ρ^2 e pelos vértices A e C de ABC

Calculando razões trigonométricas nos triângulos retângulos BEO , BDO , $BB'D$ e $BB'E$, obtemos, utilizando (3.95) e (3.96):

$$\text{sen}\alpha_1 = \text{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right) = \frac{\overline{BE}}{\overline{OB}} \Rightarrow \overline{BE} = \overline{OB} \text{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right); \quad (3.97)$$

$$\text{sen}\gamma_1 = \text{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right) = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} \Rightarrow \overline{BD} = \overline{OB} \text{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right); \quad (3.98)$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{\overline{B'B}}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{B'B} = \overline{BD} \text{sen}\alpha; \quad (3.99)$$

$$\text{sen}\gamma = \frac{\overline{B'B}}{\overline{BE}} \Rightarrow \overline{B'B} = \overline{BE} \text{sen}\gamma. \quad (3.100)$$

Substituindo (3.97) em (3.100) e (3.98) em (3.99), temos que:

$$\overline{B'B} = \overline{OB} \text{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right) \text{sen}\gamma; \quad (3.101)$$

$$\overline{B'B} = \overline{OB} \text{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right) \text{sen}\alpha. \quad (3.102)$$

Igualando (3.101) e (3.102), concluímos que:

$$\overline{OB} \text{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right) \text{sen}\gamma = \overline{OB} \text{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right) \text{sen}\alpha$$

$$\text{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right) \text{sen}\gamma = \text{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right) \text{sen}\alpha$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)}. \quad (3.103)$$

Analogamente, podemos demonstrar que:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right)} \quad (3.104)$$

De (3.103) e (3.104), estabelecemos que:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)}.$$

□

Corolário 3.4. *Se ABC é um triângulo em S_ρ^2 , cujos ângulos internos são α , β e γ e cujos lados opostos a esses ângulos medem, respectivamente, a , b e c , então a lei dos senos esférica*

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{\rho}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{\rho}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\left(\frac{c}{\rho}\right)} \quad (3.105)$$

tende ao caso Euclidiano

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

quando $\rho \rightarrow \infty$.

Demonstração.

A série de Maclaurin para a função $\operatorname{sen}(x)$ é dada por:

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \quad (3.106)$$

Assim, empregando (3.106) para expandir as funções $\operatorname{sen}(a/\rho)$, $\operatorname{sen}(b/\rho)$ e $\operatorname{sen}(c/\rho)$ em série de Maclaurin, podemos reescrever (3.105) como:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\frac{a}{\rho} - \frac{(a/\rho)^3}{3!} + \frac{(a/\rho)^5}{5!} - \dots} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\frac{b}{\rho} - \frac{(b/\rho)^3}{3!} + \frac{(b/\rho)^5}{5!} - \dots} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\frac{c}{\rho} - \frac{(c/\rho)^3}{3!} + \frac{(c/\rho)^5}{5!} - \dots}. \quad (3.107)$$

Colocando $\frac{1}{\rho}$ em evidência nos denominadores de (3.107), obtemos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a - \frac{a^3/\rho^2}{3!} + \frac{a^5/\rho^4}{5!} - \dots} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b - \frac{b^3/\rho^2}{3!} + \frac{b^5/\rho^4}{5!} - \dots} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c - \frac{c^3/\rho^2}{3!} + \frac{c^5/\rho^4}{5!} - \dots}. \quad (3.108)$$

Como

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

aplicando o limite com $\rho \rightarrow \infty$ a (3.108), concluímos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \\ \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} &= \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}. \end{aligned}$$

□

4 ATIVIDADES LÚDICO-MANIPULATIVAS SOBRE GEOMETRIA ESFÉRICA

Neste capítulo, propomos atividades lúdico-manipulativas sobre geometria esférica que podem ser aplicadas em turmas do Ensino Médio ou da Licenciatura em Matemática que estejam estudando geometrias não-Euclidianas. As atividades utilizam materiais didáticos diferenciados, instigam a investigação e abrangem a compreensão intuitiva, a comparação de conceitos com a geometria Euclidiana, resultados de teoremas abordados no terceiro capítulo deste trabalho e aplicações em cartografia. Os textos de (ABRANTES, 2018), (ALVES, 2009), (FILHO et al., 2018) e (JAHN; BONGIOVANNI, 2016) podem ser lidos e analisados antes da aplicação das atividades.

Nas atividades propostas, conduzimos a discussão sobre os seguintes conceitos/temas: a reta esférica; pontos diametralmente opostos (antípodas); o postulado das paralelas; triângulos esféricos; o transferidor esférico; coordenadas esféricas. A aplicação das cinco atividades iniciais não depende de uma abordagem prévia da geometria esférica. A ideia é que os conceitos sejam estabelecidos/incorporados no decorrer dessas atividades.

4.1 ATIVIDADE 1: A RETA ESFÉRICA

A reta Euclidiana é infinita, ou seja, dados uma reta r e um ponto $P \in r$, quando percorremos r a partir de P , seja à direita ou à esquerda de P , não retornamos mais à posição de P .

Qual é a concepção de reta na geometria esférica? Essa reta, como a Euclidiana, é infinita?

Nível: Ensino Médio ou Ensino Superior.

Material didático: esfera de isopor de 10cm de diâmetro; alfinete de cabeça; caneta hidrográfica.

Duração: 30 (trinta) minutos.

Desenvolvimento

Os estudantes são divididos em grupos, sendo que cada estudante recebe os materiais didáticos. Com esses materiais, os estudantes devem ser orientados a executar as tarefas listadas a seguir.

1. Sobre a superfície da esfera de isopor, marcar um ponto com um alfinete.
2. Com a caneta hidrográfica, traçar enquanto for possível, a partir do alfinete, uma linha “localmente reta” sobre a superfície da esfera de isopor.

O que se espera da atividade é um traçado como o ilustrado na Figura 4.1, ou seja, o traçado começa e termina no alfinete e descreve uma circunferência máxima da superfície esférica. Contudo, isso não será observado no traçado de todos os estudantes, uma vez que alguns (quem sabe muitos) não respeitaram o “localmente reta” e traçaram uma circunferência de latitude.

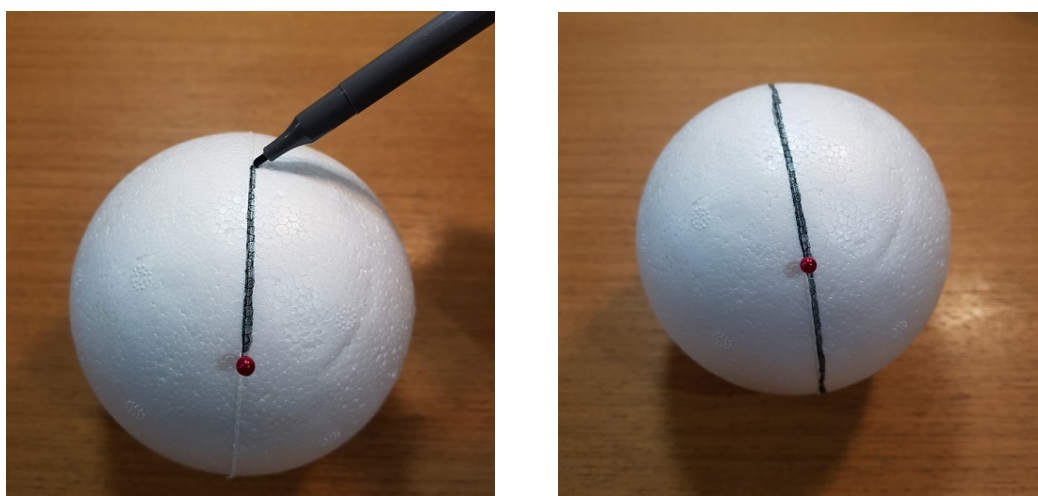


Figura 4.1: Atividade 1: a reta esférica - Tarefas 1 e 2

Após a execução das duas tarefas, os estudantes devem ser instigados a discutir as seguintes afirmações:

1. a reta esférica é uma circunferência máxima da superfície esférica;
2. a reta esférica é finita, porém ilimitada.

Após os grupos finalizarem as discussões ou findar o tempo estipulado para a atividade, cada grupo apresentará seus argumentos ao restante da classe.

4.2 ATIVIDADE 2: O POSTULADO DAS PARALELAS

Na geometria Euclidiana:

- dois pontos distintos A e B determinam uma única reta;
- dados uma reta r e um ponto $P \notin r$, há uma única reta s tal que $P \in s$ e $s \parallel r$ (quinto postulado de Euclides ou postulado das paralelas).

Dados dois pontos distintos pertencentes à superfície esférica, quantas circunferências máximas passam por esses dois pontos?

Nível: Ensino Médio ou Ensino Superior.

Material didático: esfera de isopor de 10cm de diâmetro; alfinetes de cabeça; elásticos coloridos.

Duração: 30 (trinta) minutos.

Desenvolvimento

Os estudantes são divididos em grupos, sendo que cada estudante recebe os materiais didáticos. Com esses materiais, os estudantes devem ser orientados a executar as tarefas listadas a seguir.

1. Sobre a superfície da esfera de isopor, usar alfinetes para marcar dois pontos quaisquer. Em seguida, passar pelos dois pontos marcados um elástico colorido de modo que ele descreva uma circunferência máxima.
2. Sobre a superfície da esfera de isopor, usar alfinetes para marcar dois pontos diametralmente opostos. Logo após, passar pelos dois pontos marcados quatro elásticos coloridos, de maneira que eles não sejam coincidentes.

A Figura 4.2 ilustra uma construção possível para a segunda tarefa.

Após a execução das duas tarefas, os estudantes devem ser instigados a discutir as seguintes afirmações:

1. dois pontos distintos da superfície esférica, não diametralmente opostos, definem uma única circunferência máxima;

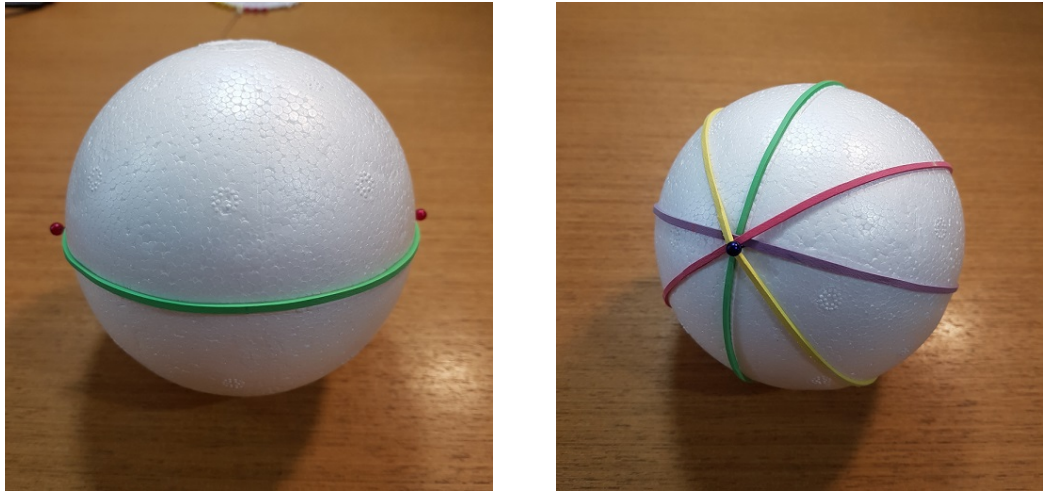


Figura 4.2: Atividade 2: circunferências máximas que passam por dois pontos diametralmente opostos (antípodas) - Tarefa 2

2. dois pontos diametralmente opostos da superfície esférica definem uma infinidade de circunferências máximas;
3. duas circunferências máximas sempre se intersectam em dois pontos diametralmente opostos.

Após os grupos concluírem as discussões ou acabar o tempo estipulado para a atividade, cada grupo apresentará seus argumentos para o restante da classe. Para finalizar, os estudantes podem ser motivados a discutir o paralelismo de retas e a formular o quinto postulado de Euclides na geometria esférica:

Dados uma circunferência máxima λ e um ponto P da superfície esférica tal que $P \notin \lambda$, não há circunferência máxima que passe por P e não intersecte λ .

4.3 ATIVIDADE 3: TRIÂNGULO ESFÉRICO

Na geometria Euclidiana, três pontos não colineares determinam um único triângulo.

Dados três pontos distintos pertencentes à superfície esférica e não pertencentes simultaneamente à mesma circunferência máxima, quantos triângulos esféricos esses pontos determinam?

Nível: Ensino Médio ou Ensino Superior.

Material didático: esfera de isopor de 10cm de diâmetro; alfinetes de cabeça; elásticos coloridos.

Duração: 20 (vinte) minutos.

Desenvolvimento

Os estudantes são divididos em grupos, sendo que cada estudante recebe os materiais didáticos. Com esses materiais, os estudantes devem ser orientados a executar as tarefas listadas a seguir.

1. Sobre a superfície da esfera de isopor, usar alfinetes para marcar três pontos distintos quaisquer, não pertencentes simultaneamente à mesma circunferência máxima.
2. Passar um elástico colorido pelos três pontos, formando um triângulo esférico.

A Figura 4.2 ilustra uma construção possível para as duas tarefas.

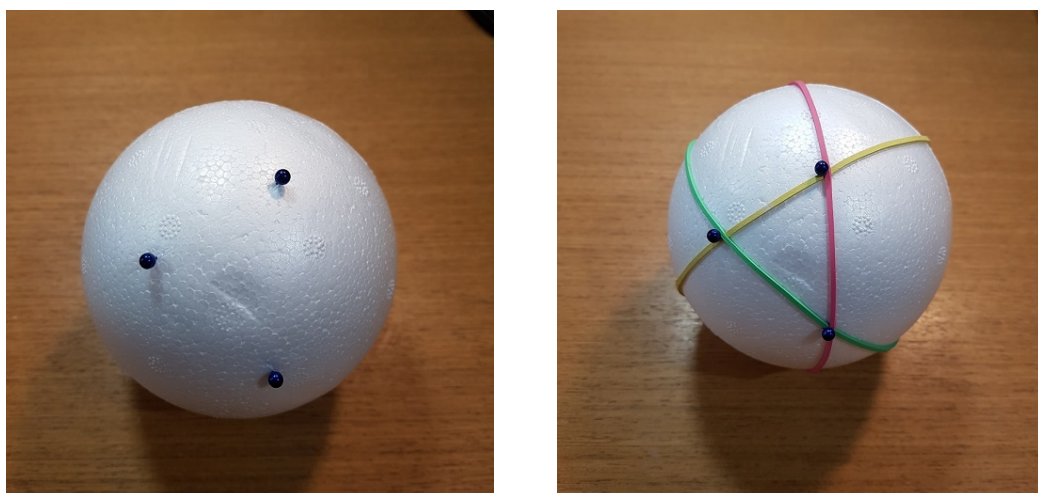


Figura 4.3: Atividade 3: triângulos esféricos - Tarefas 1 e 2

Após a execução das duas tarefas, os estudantes devem ser instigados a discutir a seguinte afirmação:

1. três pontos distintos da superfície esférica, não pertencentes simultaneamente à mesma circunferência máxima, definem oito triângulos esféricos. Os três pontos são os vértices do triângulo, os três arcos de circunferência máxima definidos pelos três pontos são os lados do triângulo e os ângulos entre os lados, dois a dois, são os ângulos internos do triângulo.

Após os grupos concluírem as discussões ou findar o tempo estipulado para a atividade, cada grupo apresentará seus argumentos para o restante da classe.

4.4 ATIVIDADE 4: SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO ESFÉRICO

Na geometria Euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Quanto mede a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico?

Nível: Ensino Médio ou Ensino Superior.

Material didático: esfera de isopor de 10cm de diâmetro; alfinetes de cabeça; elásticos coloridos.

Duração: 45 (quarenta e cinco) minutos.

Desenvolvimento

Os estudantes são divididos em grupos, sendo que cada estudante recebe os materiais didáticos. Com esses materiais, os estudantes devem ser orientados a executar as tarefas listadas a seguir.

1. Sobre a superfície da esfera de isopor, marcar com alfinetes dois pontos diametralmente opostos e passar um elástico colorido por eles, definindo uma circunferência máxima.
2. Pelos dois pontos marcados inicialmente, passar outro elástico colorido, definindo uma segunda circunferência máxima, de forma que a interseção com o primeiro elástico forme ângulos retos (em relação ao centro da esfera).
3. Passar um terceiro elástico colorido, definindo uma terceira circunferência máxima, de maneira que este intersecte os outros dois formando com ambos ângulos retos (em relação ao centro da esfera).
4. Escolha três intersecções das três circunferências máximas construídas, de modo a definir um triângulo esférico trirretângulo, e marque esses três pontos com alfinetes. Mantendo dois fixos, aproxime gradativamente o terceiro alfinete do lado do triângulo definido pelos dois alfinetes fixos. A cada aproximação (faça pelo menos três), use um elástico colorido para definir o novo triângulo esférico.
5. Da mesma forma que na tarefa 4, aproxime o terceiro alfinete da circunferência máxima definida pelos dois alfinetes fixos, na direção contrária ao lado do triângulo esférico determinado pelos dois alfinetes fixos. A cada aproximação (faça pelos menos três), use um elástico colorido para definir o novo triângulo esférico.

As Figuras 4.4, 4.5 e 4.6 ilustram possíveis construções para as cinco tarefas.

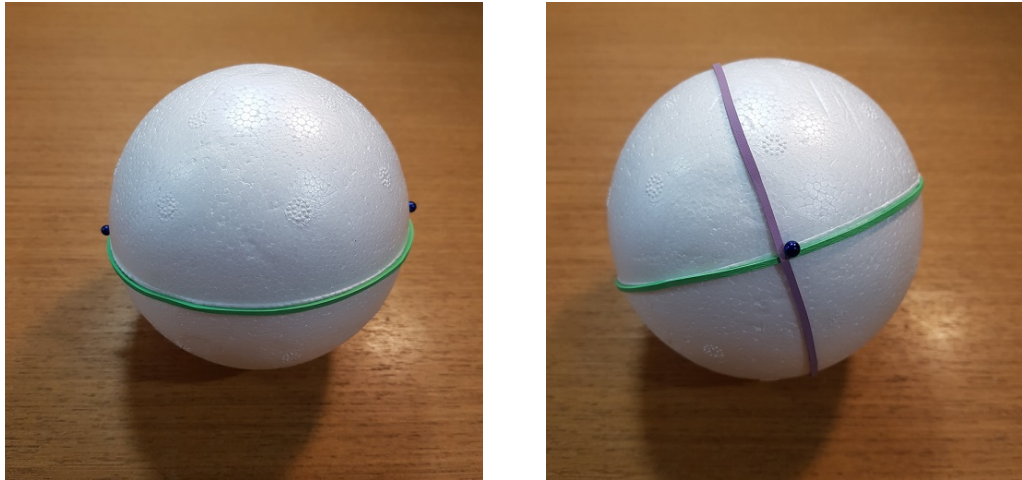


Figura 4.4: Atividade 4: triângulo esférico trirretângulo - Tarefas 1 e 2

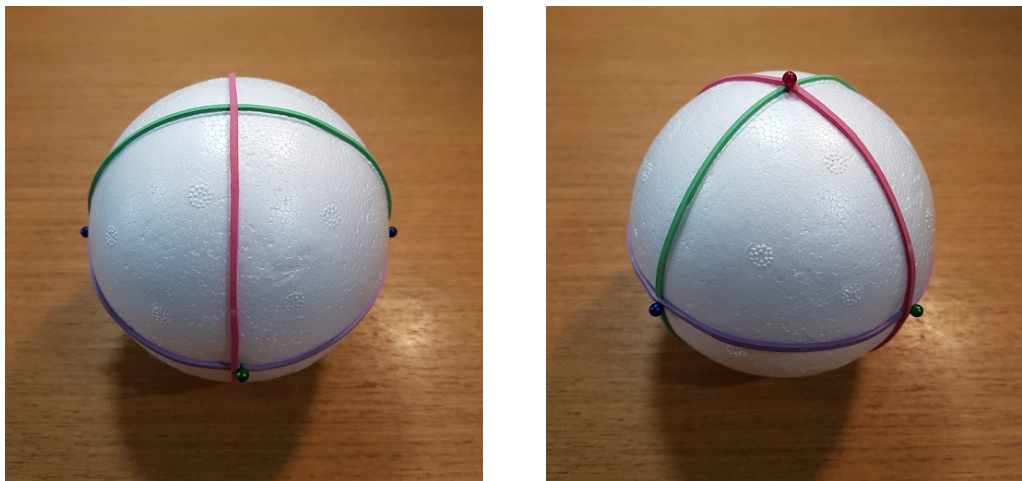


Figura 4.5: Atividade 4: triângulo esférico trirretângulo - Tarefas 2 e 3

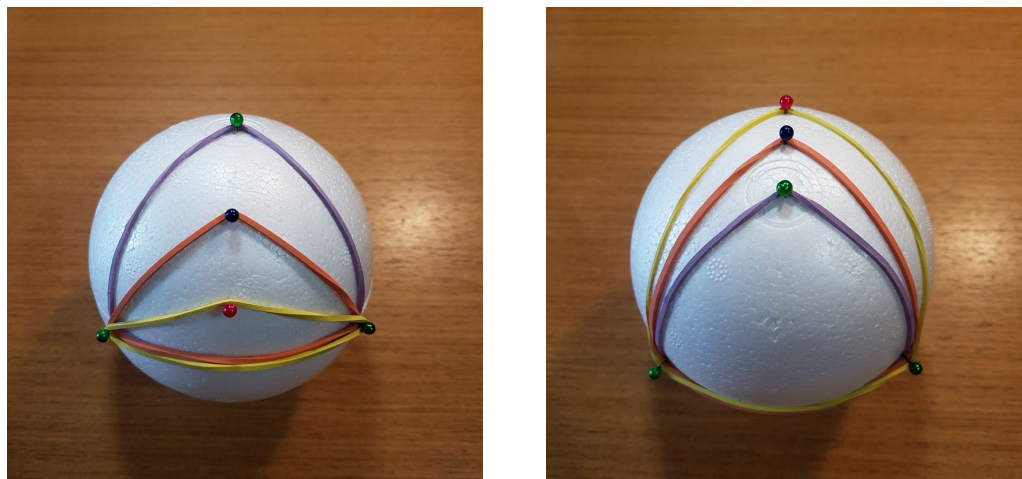


Figura 4.6: Atividade 4: soma dos ângulos internos de um triângulo esférico - Tarefas 4 e 5

Após a execução das tarefas, os estudantes devem ser instigados a discutir as seguintes afirmações:

1. em um triângulo esférico trirretângulo, a soma dos ângulos internos mede 270° ;
2. a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior do que 180° e menor do que 540° .

Após os grupos concluírem as discussões ou acabar o tempo estipulado para a atividade, cada grupo apresentará seus argumentos para o restante da classe. Para finalizar, os estudantes podem ser motivados a discutir a ideia de triângulo esférico degenerado em um arco de circunferência máxima ou em uma circunferência máxima, estabelecendo uma comparação com o triângulo Euclidiano degenerado em um segmento de reta.

4.5 ATIVIDADE 5: CONSTRUINDO UM TRANSFERIDOR ESFÉRICO

Na geometria Euclidiana, empregamos o transferidor, ilustrado na Figura 4.7, para medir ângulos no plano.

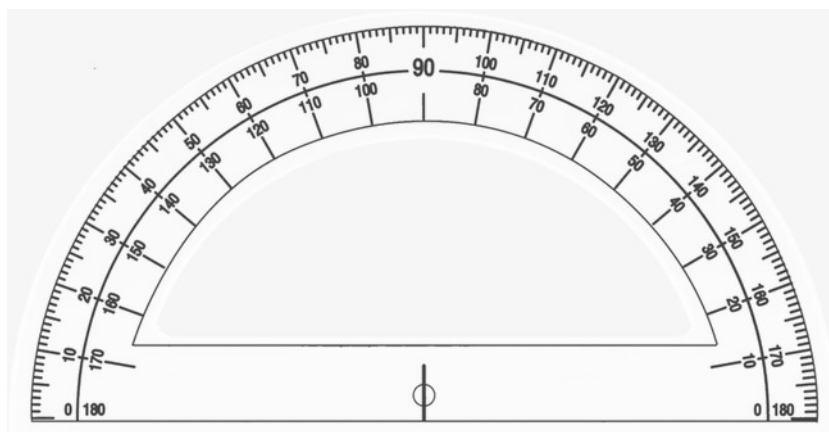


Figura 4.7: Transferidor: instrumento para medir ângulos no plano

É possível construir um aparato para medir ângulos na superfície esférica?

Nível: Ensino Médio ou Ensino Superior.

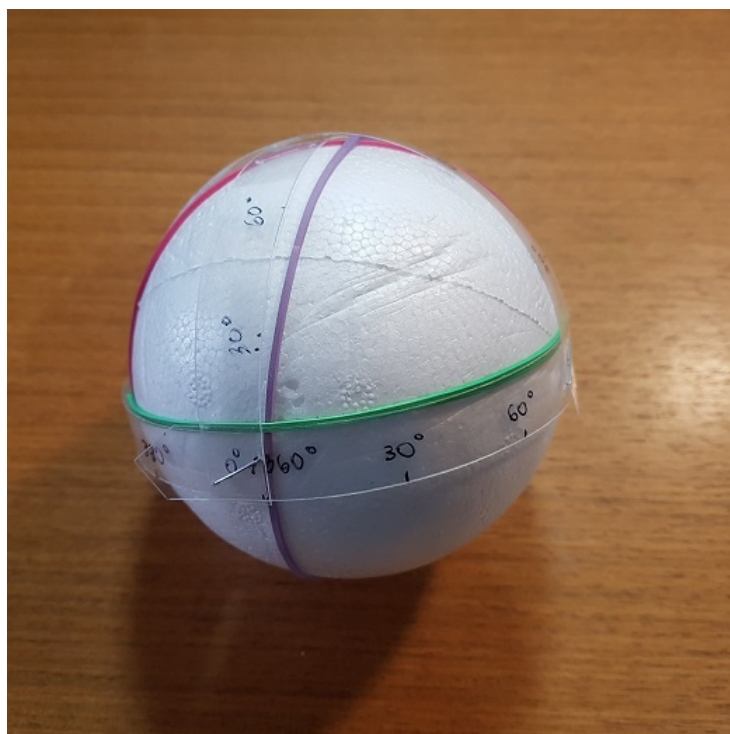
Material didático: esfera de isopor de 10cm de diâmetro; alfinetes de cabeça; elásticos coloridos; folha transparência de tamanho A3; tesoura; régua; caneta permanente para lâminas transparentes; fita adesiva dupla face.

Duração: 50 (cinquenta) minutos.

Desenvolvimento

Os estudantes são divididos em grupos, sendo que cada estudante recebe os materiais didáticos. Com esses materiais, os estudantes devem ser orientados a executar as tarefas listadas a seguir.

1. Recortar na folha transparência três tiras com largura de $1,5\text{cm}$, sendo o comprimento de uma delas um pouco maior do que o comprimento de uma circunferência máxima na esfera de diâmetro 10cm . As outras duas tiras devem ser cortadas da mesma maneira, contudo com a metade do comprimento da primeira. Essas três tiras servirão para demarcar os ângulos na superfície esférica. A tira mais comprida dará a volta no equador da esfera e será graduada de 0° a 360° . As outras duas tiras serão graduadas de 0° a 180° .
2. Na tira mais comprida, demarcar o comprimento da circunferência máxima da esfera de isopor de 10cm de diâmetro, deixando um pequeno espaço entre a margem esquerda e o ponto inicial. Em seguida, dividir o comprimento da circunferência máxima em doze (12) partes iguais (deve sobrar um pequeno espaço entre a margem direita e o ponto final) e marcar os ângulos, a partir de 0° , de 30° em 30° , determinando a sequência $\{0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, \dots, 360^\circ\}$, como ilustrado na Figura 4.8(a).
3. Proceder da mesma forma nas duas tiras de comprimento menor, dividindo o comprimento de meia circunferência máxima em seis (6) partes iguais e marcando os ângulos, a partir de 0° , de 30° em 30° , determinando a sequência $\{0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, \dots, 180^\circ\}$, como ilustrado na Figura 4.8(a).
4. Usando a fita dupla face, colar: na tira maior, a extremidade 0° com a extremidade 360° ; em uma das tiras menores, a extremidade 0° na marcação de 0° na tira maior, e a extremidade 180° na marcação de 180° na tira maior; na outra tira menor, a extremidade 0° na marcação de 90° na tira maior, e a extremidade 180° na marcação de 270° na tira maior. Após este procedimento, o transferidor esférico terá o formato de uma “coroa” que se ajusta à metade da superfície esférica, como ilustrado na Figura 4.8(b).
5. Usando alfinetes de cabeça e elásticos coloridos, construir um triângulo esférico na esfera de isopor de 10cm de diâmetro e empregar o transferidor esférico construído para determinar a medidas dos ângulos internos do triângulo.



(a)



(b)

Figura 4.8: Atividade 5: (a) tiras graduadas do transferidor esférico; (b) formato do transferidor esférico

Uma descrição detalhada do transferidor esférico está disponível em (UNIVESP, 2014a). É importante destacar que esse instrumento de medida não é preciso. Portanto, determinamos

com ele medidas aproximadas para ângulos em uma superfície esférica.

4.6 ATIVIDADE 6: A CIDADE MAIS DISTANTE DE CURITIBA

Nesta atividade, relacionamos as coordenadas geográficas de um ponto na superfície terrestre às coordenadas esféricas desse ponto, e empregamos as coordenadas esféricas para calcular a distância entre as cidades de Curitiba, no Brasil, e de Uruma, no Japão. Para tanto, os estudantes devem ser capazes de transformar coordenadas cartesianas em \mathbb{R}^3 em coordenadas esféricas e de calcular o comprimento de uma geodésica.

A cidade mais próxima do ponto antípoda a Curitiba na superfície terrestre é, segundo (CITY, 2014), a cidade de Uruma no Japão. Conforme (WIKIPÉDIA, 2018i), as coordenadas geográficas de Uruma são:

$$26^{\circ}22'45''N; \quad (4.1)$$

$$127^{\circ}51'27''E. \quad (4.2)$$

A coordenada geográfica (4.1) é a latitude de Uruma, que está ao norte do equador; a coordenada (4.2), é a longitude de Uruma, que está a leste do meridiano de Greenwich. Em Cartografia, a latitude (N ou S) e a longitude (E ou W) de um ponto P são dadas, respectivamente, pelos ângulos $\psi' = \frac{\pi}{2} - \psi$ e ϕ , onde ψ é a colatitude (ângulo complementar da latitude) de P . A Figura 4.9 ilustra os ângulos ψ e ϕ , os quais determinam, juntamente com a medida do raio da superfície esférica, as coordenadas esféricas do ponto P .

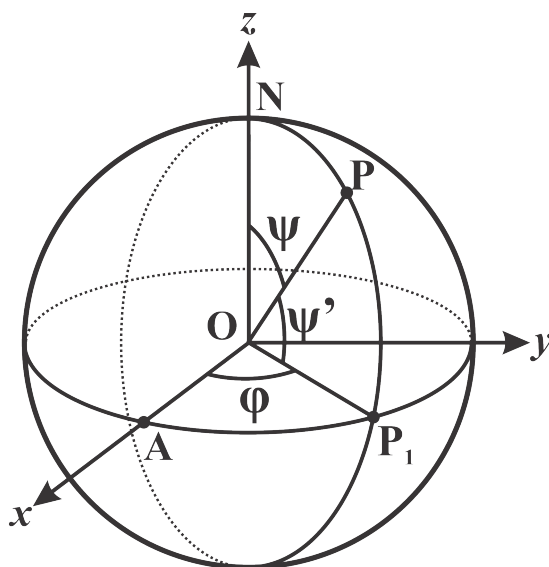


Figura 4.9: Colatitude ψ e longitude ϕ do ponto P na superfície esférica

Nível: Ensino Superior.

Material didático: folha de papel A4 contendo a Tabela 4.1; máquina calculadora; lápis ou caneta.

Duração: 50 (cinquenta) minutos.

Desenvolvimento

Os estudantes são divididos em grupos, sendo que cada estudante recebe os materiais didáticos. Com esses materiais, os estudantes devem ser orientados a executar as tarefas listadas a seguir.

1. Empregando o Teorema 3.1 e $\rho = 6371km$ como medida do raio médio da Terra, transformar as coordenadas geográficas de Curitiba e de Uruma, presentes na Tabela 4.1, em coordenadas esféricas.

Cidade	Latitude	Colatitude	Colatitude (rad)	Longitude	Longitude (rad)
Curitiba	25°25'47''S	64°34'13''S	1,117	49°16'19''W	0,8552
Uruma	26°22'45''N	63°37'15''N	1,0996	27°51'27''E	0,4712

Tabela 4.1: Coordenadas geográficas das cidades de Curitiba e de Uruma

2. Utilizando o Teorema 3.6 (relação 3.33), calcular a distância, em km, entre as cidades de Curitiba e Uruma.

Após os grupos concluírem as tarefas ou acabar o tempo estipulado para a atividade, cada grupo apresentará seus cálculos para o restante da classe. Para finalizar, os estudantes podem ser motivados a:

- usar o *Google Earth* (GOOGLE, 2018) para localizar na superfície terrestre Curitiba e Uruma, e verificar a distância entre as duas cidades;
- comparar a distância fornecida pelo *Google Earth* com a distância previamente calculada.

4.7 ATIVIDADE 7: O TRIÂNGULO DAS BERMUDAS

Nesta atividade, empregamos as coordenadas esféricas para calcular a distância entre as três cidades que definem o triângulo das Bermudas e a área do triângulo esférico que tem por vértices essas três cidades. Para tanto, os estudantes devem ser capazes de calcular o comprimento de uma geodésica e a área de um triângulo esférico.

O triângulo das Bermudas, ilustrado na Figura 4.10(a), talvez seja um dos assuntos mais icônicos em termos de eventos desastrosos para a aviação e a navegação, afinal diversos aviões, barcos e navios desapareceram de forma misteriosa ao trafegarem por sua área, determinada por Fort Lauderdale - EUA, San Juan – Porto Rico e Hamilton – Bermudas, como mostra a Figura 4.10(b).

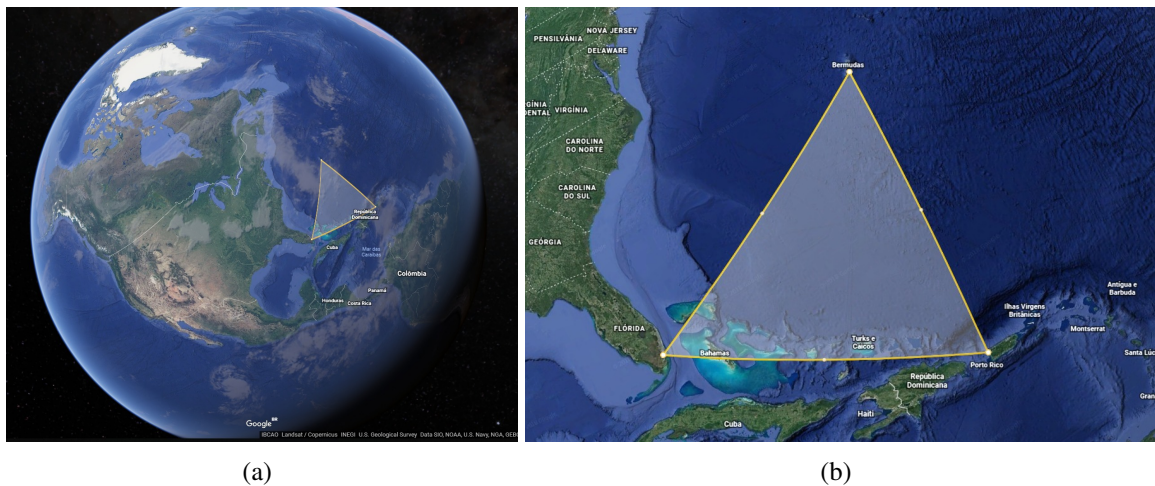


Figura 4.10: Atividade 7: (a) área do triângulo das Bermudas; (b) vértices do triângulo das Bermudas - (EARTH, 2018)

Há explicações científicas para os desaparecimentos, tais como aquelas baseadas no campo magnético da região, eventos climáticos como terremotos e redemoinhos, correntes marítimas etc. Mas também há explicações sensacionalistas, baseadas em conspirações, e até mesmo sobrenaturais. Os mistérios do triângulo das Bermudas passaram a ser popularmente conhecidos através do livro *Invisible Horizons: True Mysteries of The Sea*, do escritor sensacionalista americano Vincent Gaddis (1913-1997).

Nível: Ensino Superior.

Material didático: folha de papel A4 contendo as Tabelas 4.2 e 4.3; máquina calculadora; lápis ou caneta.

Duração: 50 (cinquenta) minutos.

Desenvolvimento

Os estudantes são divididos em grupos, sendo que cada estudante recebe os materiais didáticos. Com esses materiais, os estudantes devem ser orientados a executar as tarefas listadas a seguir.

1. Utilizando o Teorema 3.1, $\rho = 6371km$ como medida do raio médio da Terra e os da-

dos das Tabelas¹ 4.2 e 4.3, transformar as coordenadas geográficas das cidades de Fort Lauderdale, San Juan e Hamilton em coordenadas esféricas.

- Empregando o Teorema 3.6 (relação 3.33) e as coordenadas esféricas determinadas na Tarefa 1, calcular a distância, em *km*, entre cada uma das localidades do triângulo das Bermudas, ou seja, a distância entre as cidades de Fort Lauderdale e San Juan, San Juan e Hamilton e Hamilton e Fort Lauderdale.

Local	Latitude	Colatitude (ψ)	Longitude (φ)
Fort Lauderdale	26°8'N	63°52'N	80°8'W
San Juan	18°28'N	71°32'N	66°4'W
Hamilton	32°18'N	57°42'N	64°47'W

Tabela 4.2: Coordenadas geográficas do triângulo das Bermudas

Coordenada geográfica	Coordenada esférica	seno	cosseno
63°52'N	+63°52'	0,8978	0,4405
71°32'N	+71°32'	0,9272	0,3168
57°42'N	+57°42'	0,8453	0,5344
80°8'W	-80°8'	-0,9844	0,1759
66°4'W	-66°4'	-0,9131	0,4708
64°47'W	-64°47'	-0,8927	0,4506

Tabela 4.3: Coordenadas esféricas do triângulo das Bermudas

- Utilizando o Teorema 3.10 e as distâncias calculadas na Tarefa 2, determinar a área, em km^2 , do triângulo das Bermudas.
- Um navio está navegando na região interior do triângulo das Bermudas. Repentinamente, o combustível acaba e o sistema de comunicação da embarcação não funciona. Nesse momento, a localização do navio é dada pelas coordenadas $23^\circ 46'N$ e $71^\circ 35'W$. Determinar para qual das três localidades do triângulo das Bermudas o comandante do navio deve enviar um barco para pedir ajuda, levando-se em conta a distância do navio até cada uma das três cidades.

Após os grupos concluírem as tarefas ou findar o tempo estipulado para a atividade, cada grupo apresentará seus cálculos para o restante da classe. Para finalizar, os estudantes podem ser motivados a usar o *Google Earth* para localizar outros triângulos esféricos na superfície terrestre e a calcular a área desses triângulos.

¹Coordenadas geográficas *N* e *E* são positivas em coordenadas esféricas; coordenadas geográficas *S* e *W* são negativas em coordenadas esféricas.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho, discorreremos sobre o problema que originou geometrias distintas da Euclidiana, as denominadas geometrias não-Euclidianas, e também sobre duas geometrias não-Euclidianas em particular: no plano, o modelo do disco de Poincaré e, em três dimensões, a geometria esférica. Nesta última, apresentamos relações geométricas importantes, tais como a soma dos ângulos internos e a área de um triângulo esférico, o teorema de Pitágoras esférico, a lei dos cossenos esférica e a lei dos senos esférica, associando-as a relações da geometria Euclidiana. Ainda, propomos algumas atividades lúdico-manipulativas para explorar conceitos de geometria esférica, as quais podem ser aplicadas em turmas do Ensino Médio ou do Ensino Superior.

As principais dificuldades enfrentadas na elaboração deste trabalho foram a escassa bibliografia em Língua Portuguesa sobre geometria esférica e a definição do software a ser empregado para construir as imagens tridimensionais da esfera, seus elementos e seções. Quanto à primeira, nossa referência básica foi *Geometry* (BRANNAN et al., 2012). Contudo, o autor desta obra demonstra resultados de geometria esférica somente na esfera unitária, isto é, na esfera de raio $R = 1$. Dessa forma, demonstrar esses resultados em uma esfera qualquer, de raio $R = \rho$, $\rho > 0$, revelou-se um desafio interessante. Quanto à segunda, optamos pelo CorelDRAW® (COREL, 2018).

Esperamos que este trabalho seja útil aos estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, Câmpus Curitiba, principalmente na disciplina de geometria espacial, que tem na ementa uma introdução às geometrias não-Euclidianas, e também aos professores de matemática da Educação Básica. Em termos de continuidade, o autor deste trabalho pretende continuar estudando geometrias não-Euclidianas em um curso de pós-graduação.

REFERÊNCIAS

- ABRANTES, W. G. B. Matemática, cartografia e navegação: uma história que deu certo. **Revista do Professor de Matemática**, n. 96, p. 56–62, 2018.
- ALVES, S. **A geometria do globo terrestre**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- ANDRADE, P. F. **Introdução à geometria hiperbólica - o modelo de Poincaré**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- ÁVILA, G. Legendre e o postulado das paralelas. **Revista do Professor de Matemática**, n. 22, 1988.
- BOOKS, F. **Apêndice explicando a absoluta verdadeira ciência do espaço**. 2017. Disponível em: <https://www.foldvaribooks.com/pages/books/85/ioannis-bolyai-janos-de-bolya-johannes/appendix-scientiam-spatii-absolute-veram-exhibens-a-veritate-aut-falsitate-axiomatis-xi>. Acesso em: 02 de novembro de 2017.
- BOULOS, P. **Geometria analítica: um tratamento vetorial**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2004.
- BRANNAN, D. A.; ESPLEN, M. F.; GRAY, J. J. **Geometry**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
- BURTON, D. M. **History of mathematics**. 7. ed. New York: McGraw-Hill, 2011.
- CARMO, M. P. do. Geometrias não-euclidianas. **Matemática Universitária**, n. 6, p. 25–48, 1987.
- CITY, F. **Furthest point from Curitiba, Brazil**. 2014. Disponível em: http://furthestcity.com/city.php?ID=CURITIBA_BRAZIL. Acesso em: 22 de outubro de 2018.
- COREL. **CorelDRAW**. 2018. Disponível em: <https://www.coreldraw.com/br/>. Acesso em: 25 de outubro de 2018.
- EARTH, G. **Triângulo das Bermudas**. 2018. Disponível em: <https://earth.google.com/web/>. Acesso em: 19 de outubro de 2018.
- EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Unesp, 2009.
- EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. 1. ed. Campinas: Unicamp, 2004.
- FILHO, A. E. P. da S.; FERREIRA, F. D.; BRAGA, F. V. Revisitando a geometria esférica. **Revista do Professor de Matemática**, n. 95, p. 42–45, 2018.
- GEOGEBRA. **Discover math with geogebra**. 2017. Disponível em: https://www.geogebra.org/?lang=pt_BR. Acesso em: 08 de novembro de 2017.

GOOGLE. **Google earth**. 2018. Disponível em: <<https://www.google.com/earth/>>. Acesso em: 22 de outubro de 2018.

HILBERT, D. **Fundamentos da geometria**. 1. ed. Portugal: Gradiva, 2003.

JAHN, A. P.; BONGIOVANNI, V. Distância entre dois pontos na geometria esférica. **Revista do Professor de Matemática**, n. 91, p. 45–51, 2016.

LIBRAIRIE, C. S. **Geometrische untersuchungen zur theorie der parallellinien**. 2017. Disponível em: <<https://camillesourget.com/en-210-lobachevski-geometrische-untersuchungen-zur-theorie-der-rare-edition-originale-de-ce.html>>. Acesso em: 02 de novembro de 2017.

LIMA, R. R. de. **Geometria do taxista**. Monografia (Especialização em Matemática) — UTFPR, Campo Mourão, 2012.

OLIVEIRA, V. T. P. de. **Geometria do táxi: pelas ruas de uma cidade aprende-se uma geometria diferente**. Dissertação (Mestrado) — Unicamp, 2014.

PALIOURAS, J. D. **Complex variables for scientists and engineers**. 1. ed. New York: Macmillan Publishing Co., 1975.

ROONEY, A. **A história da matemática**. 1. ed. São Paulo: M. Books, 2012.

SCRIBA, C. J. et al. **5000 years of geometry**. 1. ed. Basel: Springer Basel, 2015.

SEED, S. de Estado da Educação do P. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática**. Governo do Paraná, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 25 de outubro de 2018.

SPIVAK, M. **Calculus**. 4. ed. [S.l.]: Publish or Perish, 2008.

STEWART, J. **Cálculo**. v. 1. 8. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2017a.

STEWART, J. **Cálculo**. v. 2. 8. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2017b.

UNIVESP. **Geometrias não Euclidianas: Aula 23 - Parte 1**. 2014a. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=rMUIzmZsYuM>>. Acesso em: 22 de outubro de 2018.

UNIVESP. **Geometrias não Euclidianas: Aula 23 - Parte 2**. 2014b. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=XtHQfW01ERY>>. Acesso em: 25 de outubro de 2018.

WATKINS, D. S. **Fundamentals of matrix computations**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 2002.

WIKIPEDIA. **Nicolai Ivanovitch Lobachevsky**. 2017a. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Nikolai_Lobachevsky>. Acesso em: 02 de novembro de 2017.

WIKIPEDIA. **János Bolyai**. 2017b. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Jnos_Bolyai>. Acesso em: 02 de novembro de 2017.

WIKIPÉDIA. **Carl Friedrich Gauss**. 2017c. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss>. Acesso em: 02 de novembro de 2017.

WIKIPÉDIA. **Bernhard Riemann**. 2017d. Disponível em: [<https://pt.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann>](https://pt.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann). Acesso em: 02 de novembro de 2017.

WIKIPÉDIA. **Eugenio Beltrami**. 2017e. Disponível em: [<https://pt.wikipedia.org/wiki/Eugenio_Beltrami>](https://pt.wikipedia.org/wiki/Eugenio_Beltrami). Acesso em: 02 de novembro de 2017.

WIKIPÉDIA. **Henri Poincaré**. 2017f. Disponível em: [<https://pt.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincar>](https://pt.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincar). Acesso em: 02 de novembro de 2017.

WIKIPEDIA. **Felix Klein**. 2017g. Disponível em: [<https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Klein>](https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Klein). Acesso em: 02 de novembro de 2017.

WIKIPÉDIA. **Hermann Minkowski**. 2017h. Disponível em: [<https://pt.wikipedia.org/wiki/Hermann_Minkowski>](https://pt.wikipedia.org/wiki/Hermann_Minkowski). Acesso em: 02 de novembro de 2017.

WIKIPÉDIA. **Cidade de Uruma**. 2018i. Disponível em: [<https://en.wikipedia.org/wiki/Uruma>](https://en.wikipedia.org/wiki/Uruma). Acesso em: 19 de outubro de 2018.

APÊNDICE A – A GEOMETRIA DO TAXISTA

Enquanto na geometria Euclidiana a menor distância entre dois pontos é um segmento de reta, na geometria do taxista, ou geometria do táxi (do inglês *taxicab geometry*), doravante denotada por GMT, essa distância não é necessariamente uma linha reta. Na GMT, a distância entre dois pontos é informalmente denominada *distância de Manhattan*¹.

A GMT é uma geometria não-Euclidiana no plano, na qual a métrica² Euclidiana para a distância entre dois pontos é substituída por uma nova métrica.

A.1 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

A GMT é definida sobre uma malha quadriculada determinada por dois eixos ortogonais, como na Figura A.1(a). Nessa malha, os quadrados representam, por exemplo, as quadras de uma cidade e, as linhas verticais e horizontais, as ruas. Sejam A e B dois pontos quaisquer pertencentes ao plano da malha, como na Figura A.1(b). Qual é a métrica na GMT que define a distância entre A e B ?

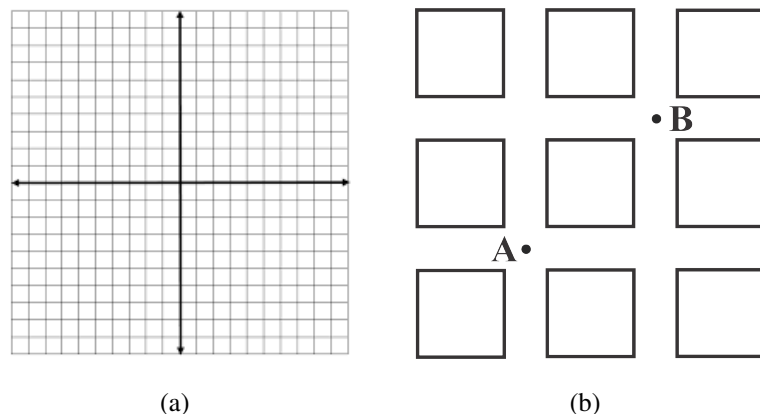


Figura A.1: GMT: (a) malha quadriculada; (b) pontos A e B na malha

¹Tal nome é devido às ruas da cidade de Nova Iorque, Estados Unidos da América, que possui quase todas as suas quadras retangulares.

²Conjunto de regras que presidem a medida; conceito que generaliza a ideia geométrica de distância.

Na geometria Euclidiana, a distância entre dois pontos é a menor distância possível, ou seja, um segmento de reta que tem por extremos os dois pontos. Na GMT, são permitidos apenas deslocamentos à direita ou à esquerda, para cima ou para baixo (a direção é apenas horizontal e vertical). Assim, a distância entre dois pontos é dada pela soma dos comprimentos de segmentos horizontais e verticais, nunca oblíquos. A Figura A.2 ilustra a distância Euclidiana e a distância na GMT entre dois pontos A e B .

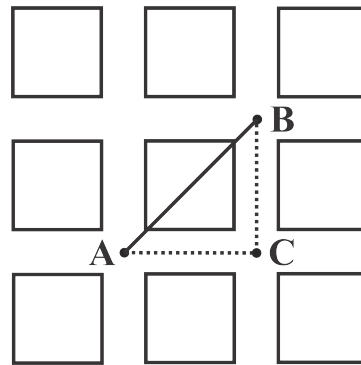


Figura A.2: Distância entre dois pontos na geometria Euclidiana (\overline{AB}) e na GMT ($\overline{AC} + \overline{CB}$)

Na GMT, a distância (medida) entre dois pontos é única. Contudo, há geralmente mais de um trajeto possível para ir de um ponto a outro, mantendo-se constante a medida da distância, como mostra a Figura A.3.

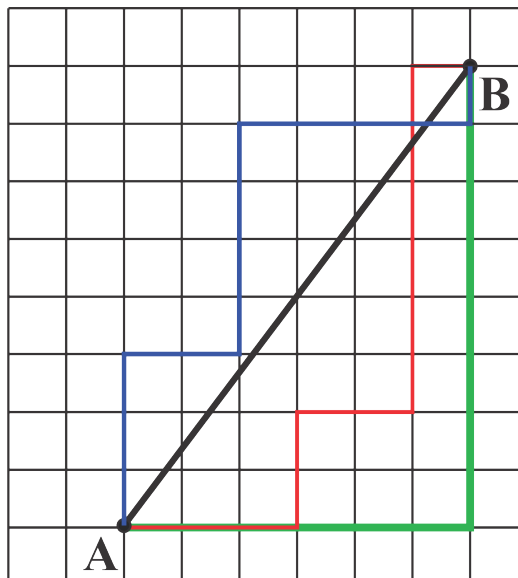


Figura A.3: Possíveis trajetos para ir de A a B : na geometria Euclidiana (segmento AB) e na GMT (demais trajetos)

Analiticamente, podemos expressar a distância $d(A, B)$ entre os pontos A e B em função das coordenadas cartesianas desses pontos. Dessa forma, a distância entre $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$

é, na geometria Euclidiana (BOULOS, 2004), dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2},$$

enquanto que na GMT (LIMA, 2012) é dada por

$$d(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|. \quad (\text{A.1})$$

Exemplo A.1. Sejam $A(2, 1)$ e $B(8, 9)$, representados na Figura A.3. Na geometria Euclidiana, temos que $d(A, B) = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10uc$, onde uc representa uma unidade de comprimento. Já na GMT, temos que $d(A, B) = |8 - 2| + |9 - 1| = 14uc$.

Devido à métrica para a distância entre dois pontos, precisamos rever conceitos e relações da geometria Euclidiana na GMT. Exemplificamos discutindo o conceito de circunferência nessa geometria.

A.2 CIRCUNFERÊNCIA E A CONSTANTE π

Na geometria Euclidiana, a circunferência é o lugar geométrico dos pontos P do plano que equidistam de um ponto O dado, sendo a distância $d(P, O)$ o raio da circunferência. Assim, a circunferência λ de centro O e raio R , ilustrada na Figura A.4, é definida como:

$$\lambda(O; R) = \{P \in \mathbb{R}^2; d(P, O) = R\}.$$

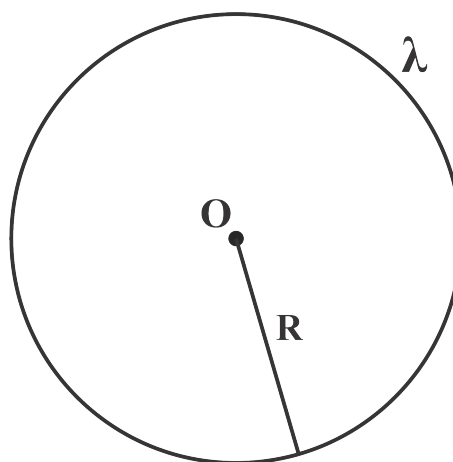


Figura A.4: Circunferência λ de centro O e raio R

E na GMT, qual seria o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto dado?

Como o raio é uma distância, na GMT essa medida será dada pela soma dos compri-

mentos de segmentos horizontais e verticais. Dessa forma, o lugar geométrico é um quadrado (linha poligonal fechada que define o perímetro do quadrado) centrado no ponto considerado.

Exemplo A.2. Na GMT, o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam $3uc$ do ponto $O(0,0)$ é o quadrado de centro em O e vértices $A(0,3)$, $B(3,0)$, $C(0,-3)$ e $D(-3,0)$, como mostra a Figura A.5.

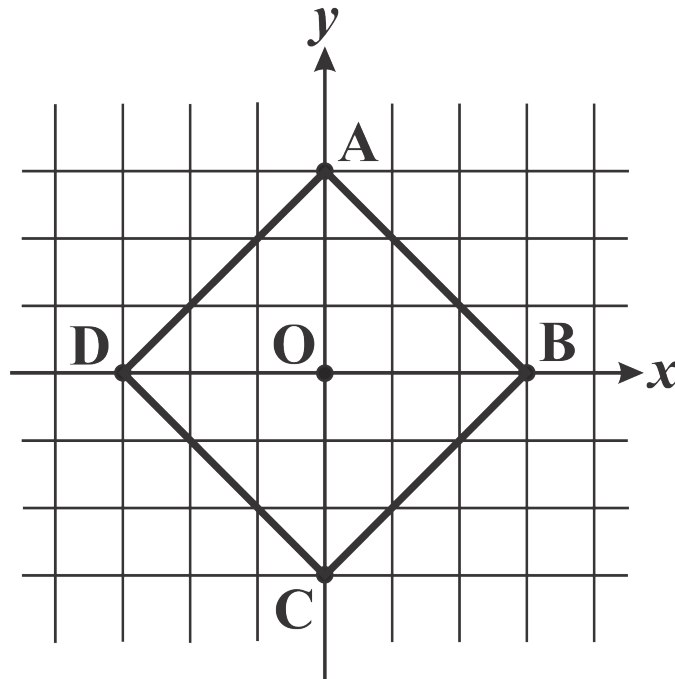


Figura A.5: Lugar geométrico dos pontos que equidistam $3uc$ do ponto $O(0,0)$ na GMT

E qual seria o valor da constante π na GMT?

Considerando que, na geometria Euclidiana, π é a razão entre o comprimento C da circunferência e a medida $2R$ do diâmetro, temos que na GMT o valor dessa constante é igual a:

$$\frac{8R}{2R} = 4. \quad (\text{A.2})$$

Para justificar a relação (A.2), consideremos, sem perda de generalidade, um quadrado centrado na origem $O(0,0)$ e de raio R . Dessa forma, os vértices do quadrado são os pontos $A(0,R)$, $B(R,0)$, $C(0,-R)$ e $D(-R,0)$. A medida do diâmetro é a distância entre dois vértices opostos do quadrado, ou seja, $2R$. Já o comprimento C é o perímetro do quadrado, isto é, $4\overline{AB}$, onde \overline{AB} é a medida do lado do quadrado. Empregando (A.1), temos que:

$$\begin{aligned}d(A, B) &= |x_A - x_B| + |y_A - y_B| \\ &= |0 - R| + |R - 0| \\ &= 2R,\end{aligned}$$

e, conseqüentemente, $4\overline{AB} = 8R$.

Assim, π é na GMT um número racional, enquanto que na geometria Euclidiana é um número irracional.

Mais informações sobre a geometria do taxista podem ser encontradas em (LIMA, 2012), (OLIVEIRA, 2014) e (UNIVESP, 2014b).