UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

EMILY REGINA BEDIN

# A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO APROVADOS NO PNLD DE 2015

CURITIBA, 2017

EMILY REGINA BEDIN

**A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO APROVADOS NO PNLD DE 2015**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Licenciatura em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Curitiba.

Prof. Dra. Maria Lucia Panossian

Curitiba

2017

Ministério da Educação
**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**
**Câmpus Curitiba**
Diretoria de Graduação e Educação Profissional
***Departamento Acadêmico de Matemática***
***Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática***

## TERMO DE APROVAÇÃO

# “A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO APROVADOS NO PNLD DE 2015”

por

**“EMILY REGINA BEDIN”**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 14h do dia 26 de junho de 2017 na sala Q309 como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba. O aluno foi arguido pela Banca de Avaliação abaixo assinados. Após deliberação, de acordo com o parágrafo 1º do art. 37 do Regulamento Específico do trabalho de Conclusão de Curso para o Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR do Câmpus Curitiba, a Banca de Avaliação considerou o trabalho aprovado.

| | |
|---|---|
| Profa. Dra. Maria Lucia Panossian<br>**(Presidente - UTFPR/Curitiba)** | Profa. Dra. Neusa Nogas Tocha<br>**(Avaliadora 1 – UTFPR/Curitiba)** |
| Profa. Dra. Luciana Schreiner de Oliveira<br>**(Avaliadora 2 – UTFPR/Curitiba)** | Profa. Dra. Angelita Minetto Araújo<br>**(Avaliadora 3 – UTFPR/Curitiba)** |
| Profa. Ms. Violeta Maria Estephan<br>**(Professora Responsável pelo TCC – UTFPR/Curitiba)** | Profa. Dra. Neusa Nogas Tocha<br>**(Coordenadora da Licenciatura em Matemática – UTFPR/Curitiba)** |

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.”

*—Eu atravesso as coisas — e no meio da travessia não vejo!*

*— só estava era entretido na ideia dos lugares de saída e de chegada.*

*Assaz o senhor sabe: a gente quer passar um rio a nado, e*

*passa; mas vai dar na outra banda é num ponto mais embaixo,*

*bem diverso do que em primeiro se pensou [...]*

*o real não está na saída nem na chegada:*

*ele se dispõe para a gente é no meio da travessia...*

**João Guimarães Rosa, Grande Sertão: Veredas.**

## AGRADECIMENTOS

Agradeço de coração as pessoas que trilharam esse longo caminho ao meu lado.

Primeiramente nos anos de Curso na Universidade Estadual do Centro Oeste do Paraná - UNICENTRO, em Guarapuava: às minhas grandes amigas e colegas de curso Adriana, Bruna e Giovana. E também às minhas queridas amigas de vida guarapuavana: Isabela, Kélin e Gizele.

Na segunda etapa de minha caminhada, na Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, em Curitiba.

À minha orientadora Maria Lucia Panossian por todo companheirismo e paciência. Por me guiar, me fortalecer e por acreditar e confiar em mim apesar de todos os obstáculos.

Às professoras Neusa e Luciana que me direcionaram e apoiaram na realização deste trabalho e durante todo o curso.

Aos colegas de UTFPR que tanto me ajudaram: Cynthia e Everson.

Aos meus amigos e colegas de trabalho também pelo companheirismo, paciência e apoio. Principalmente às amigas Marcela, Leyka, Drielly, Caroline e Betânia.

À família Melhen/Rocha que me acolheu, me ouviu e entendeu e me apoiou durante todos esses anos.

Ao meu noivo Manoel pelo incentivo, pela parceria e pelo carinho. Por não me deixar desistir. Por ser a pessoa que sempre me lembra o quanto os esforços valem a pena.

À minha família por todo o amor e confiança. Especialmente ao meu pai Senio que nunca vê um problema grande demais, que contagia com sua alegria e prestatividade. E com todo o amor à minha mãe Noeli por toda sua amizade, sua fé e sua força. Por todas as palavras de apoio, incentivo e motivação. Por não me deixar desistir. Por me lembrar que sou forte. Por todo seu amor incondicional.

Principalmente e a todo momento, à Deus!

MUITO OBRIGADA.


## RESUMO

Esse trabalho tem por objetivo analisar os Livros Didáticos do Ensino Médio aprovados no PNLD de 2015 com relação à presença de História da Matemática como recurso pedagógico para o ensino de Matemática. Inicialmente fez-se o levantamento do referencial teórico em busca de potencialidades da História da Matemática no ensino de Matemática. Posteriormente, foram analisadas as coleções de livros didáticos, extraindo os exercícios, atividades, citações, contextualizações, curiosidades e sequências didáticas em que havia presença de algum elemento relativo à História da Matemática. A partir da revisão da literatura foi possível definir as categorias de análise identificando as abordagens de História da Matemática como Estratégia Didática, Informação, Flash e Atividades. Os resultados revelam que os livros didáticos apresentam material histórico, ainda que a maior parte tenha caráter informativo e considerou-se que a abordagem da História da Matemática como Estratégia Didática tenha mais potencial para o ensino de Matemática. Os resultados mostram também a importância do papel professor de Matemática no processo de ensino de Matemática com utilização da História da Matemática.

**Palavras-chave:** História da Matemática. Lvros didáticos. Professor de matemática.

## ABSTRACT

This work has for objective to analyze the High School Textbooks of PNLD of 2015 with respect to the presence of the history of mathematics as a pedagogical resourse for teaching mathematics. Initially had made the lifting of the theoritical reference in search of potential of history of mathematics in Mathematics teaching. Later, analyzed five colections of textbooks, extracting exercises, activities, quotes, contextualizations, curiosities and didactic sequences in witch there was no presence of any element on the history of mathematics. From the literature review was possible to define the categories of analysis identifyinf the approaches of the history of mathematics as teaching strategy, information, flash and activities. The results reval that the textbooks present historical material, although most have informational character and considered that the approach of the history of mathematics as didatic strategy has more potencial for the teaching of mathematics. The results also show the importance of the role mathematics teacher in the teaching process of mathematics with use of the history of mathematics.



**Keywors**: History of Mathematics. Textbooks. Maths teacher.

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE QUADROS

## LISTA DE SIGLAS

MEC – Ministério da Educação

PNLD - Programa Nacional do Livro Didático

UNICENTRO – Universidade Estadual do Centro-Oeste do Paraná

UTFPR – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

## SUMÁRIO

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 ESCOLHA DO TEMA

O início da graduação em Licenciatura em Matemática da autora desse trabalho, deu-se na Universidade Estadual do Centro-Oeste do Paraná – UNICENTRO, câmpus Guarapuava, no ano de 2008. Período em que a Secretaria de Educação do Estado do Paraná divulgou as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008) e dentre os diversos caminhos e orientações, essa proposta curricular indicava tendências para o ensino da Matemática e em meio a elas estava a História da Matemática.

Entretanto, durante os quase quatro anos de graduação realizados na instituição, não houve nenhuma disciplina que permitiu o estudo dessa proposta. Algumas disciplinas abordaram teorias da Educação Matemática e outras a História da Matemática, no entanto, nenhuma apresentou possibilidades de unir as duas.

Em 2011, por motivos profissionais houve a necessidade de mudança de cidade de residência e em consequência realizou-se o trancamento do curso de Licenciatura em Matemática na UNICENTRO.

Em 2014, tornou-se possível a continuação do curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, câmpus Curitiba e novamente os temas da Educação Matemática e História da Matemática foram abordados sem interseção. Entretanto, no ano de 2016, na disciplina optativa Didática 2, provocou-se a investigação de alguma questão de interesse do estudante, relacionada ao ensino da Matemática, com o objetivo de realização de um estudo e elaboração de um artigo acadêmico.

A questão levantada durante essa investigação relacionou-se com a utilização da História da Matemática como recurso pedagógico e sua presença nos materiais didáticos. A pesquisa realizada então, tornou-se a base para a definição do tema deste trabalho e o levantamento da seguinte questão: Partindo da hipótese de que a História da Matemática não é só informativa, tampouco se retém nos aspectos motivacionais, então quais suas potencialidades didáticas e como abordá-la? Decorrente dessa indagação geral, pretendeu-se analisar de qual forma a História da Matemática tem sido apresentada especificamente nos livros didáticos de Ensino Médio aprovados no PNLD de 2015 e na produção de pesquisadores da Educação Matemática.

## 1.2 OBJETIVO

Analisar os Livros Didáticos do Ensino Médio aprovados no Programa Nacional do Livro Didático - PNLD de 2015 com relação à presença de História da Matemática como recurso pedagógico para o ensino de Matemática.

## 1.3 JUSTIFICATIVA

Optou-se por realizar a pesquisa nos livros didáticos tendo em vista a ampla disponibilização desse material às escolas de educação básica brasileiras. O Brasil investe em programas de incentivo à utilização de livros didáticos desde 1929. Em 1985, foi criado o PNLD.

O PNLD é constantemente aperfeiçoado e tem por objetivo prover as escolas públicas de ensino fundamental e médio com livros didáticos e acervos de obras literárias, obras complementares e dicionários, nas modalidades regular e EJA (Educação de Jovens e Adultos). O programa permite que os professores e as escolas escolham os livros que mais se adaptam aos seus objetivos e disponibiliza um Guia anual para facilitar essa decisão.

O Guia do PNLD é renovado anualmente, com disponibilização de novas obras. Somente em 2015 o programa distribuiu mais de 144 milhões de exemplares de livros didáticos para as escolas públicas (ensino fundamental e médio), segundo consulta ao site do programa (BRASIL, 2016).

O projeto para realização desse trabalho teve início em 2016 e por isso optamos pelos livros didáticos aprovados no PNLD do ano anterior. Além disso, o programa é executado em ciclos trienais alternados, ou seja, a cada três anos o MEC distribui livros para o Ensino Médio (BRASIL, 2016).

## 1.4 METODOLOGIA

Com o objetivo de responder à questão central, o trabalho foi iniciado com a leitura de obras e pesquisas de autores que estudam sobre a História da Matemática como estratégia de ensino e que entendem que ela tem um potencial que supera o caráter informativo e motivacional. Destaque para Miguel e Miorim (2011), Saito (2009; 2013; 2016) e Mendes (2009). Além disso, buscou-se identificar o posicionamento das recomendações nos Parâmetros Curriculares Nacionais e as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná sobre esse tema.

Na segunda etapa do trabalho, foram realizadas análises das coleções de livros didáticos aprovados no PNLD de 2015, de todas as séries do Ensino Médio, no total foram analisados 14 livros didáticos. Iniciou-se com leitura de reconhecimento dos livros, para posterior identificação das abordagens, citações e contextualizações que remetem à História da Matemática e baseados em Bianchi (2006), fez-se o levantamento e classificação dessas abordagens com o intuito de identificar como a História da Matemática é apresentada nos conteúdos e nas situações encontradas nos livros didáticos.

Pretendeu-se ter superado um simples relato a respeito de como a História da Matemática está ou não sendo abordada nos materiais didáticos, e sim oferecer um caminho para utilização da História da Matemática no ensino de Matemática, seja por meio da sua presença nos livros didáticos ou pelas propostas de pesquisadores da área, destacando o papel do professor e a necessidade de formação adequada.

## 1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este capítulo 1 apresenta a Introdução, contendo um pouco da trajetória acadêmica da autora do trabalho na definição do tema de pesquisa, seu objetivo e justificativa e também de forma geral a metodologia utilizada em seu desenvolvimento.

No capítulo 2 são apresentadas algumas pesquisas a respeito da utilização da História da Matemática como recurso pedagógico para o ensino de Matemática tais como Mendes (2009) e Miguel e Miorim (2011), além do posicionamento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000) e Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná para o Ensino Médio (PARANÁ, 2008).

O capítulo 3 descreve a metodologia utilizada no desenvolvimento do trabalho e as pesquisas que se tornaram referências para a análise proposta.

Já o capítulo 4 apresenta a análise dos livros didáticos do PNLD de 2015 e alguns exemplos das abordagens identificadas.

Finalmente, o capítulo 5 apresenta as considerações finais, destacando que existem muitas opções de História da Matemática nos livros didáticos, os principais resultados e relacionando esses resultados com a formação dos professores de Matemática.

## 2. A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Essa é uma pesquisa que envolve História da Matemática, Matemática e Educação. Na união desses campos surgem três áreas interligadas, mas distintas: a História da Matemática propriamente dita, a História da Educação Matemática e a História na Educação Matemática. Esse trabalho aproxima-se das pesquisas da História na Educação Matemática, onde a História é abordada na visão do educador matemático, ou seja, nos interessa a História da Matemática, mas vinculada ao trabalho do educador Matemático. Miguel e Miorim (2011) definem o objeto de investigação nessa área como sendo:

> Os problemas relativos às inserções efetivas da história na formação inicial ou continuada de professores de Matemática; na formação matemática de estudantes de quaisquer níveis; em livros de Matemática destinados ao ensino em qualquer nível e época; em programas ou propostas curriculares oficiais de ensino da Matemática; na investigação em Educação Matemática, etc. (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 11).

Tendo definido nosso campo de trabalho, iniciamos essa pesquisa com a leitura dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998; 2000), para verificar de que forma esse documento norteador da educação básica no Brasil se refere a História da Matemática. Foi possível encontrar incentivo à utilização da História em diversos trechos, em destaque:

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 43).

Faz parte dos objetivos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000), que durante o Ensino Médio os alunos compreendam o “conhecimento científico e o tecnológico como resultado de uma construção humana, inseridos em um processo histórico e social”. E defende ainda que os alunos sejam capazes de compreender sua importância nas relações sociais, como se observa:

> Compreender o desenvolvimento histórico da tecnologia associada a campos diversos da Matemática, reconhecendo sua presença e implicações no mundo cotidiano, nas relações sociais de cada época, nas transformações e na criação de novas necessidades, nas condições de vida. Por exemplo, ao se perceber a origem do uso dos logaritmos ou das razões trigonométricas como resultado do avanço tecnológico do período das grandes navegações

> do século 16, pode-se conceber a Matemática como instrumento para a solução de problemas práticos e que se desenvolve para muito além deles, ganhando a dimensão de ideias gerais para novas aplicações fora do contexto que deu origem a elas. (BRASIL, 2000, p. 118).

Os dois principais autores considerados como referências para esse trabalho também se referem aos Parâmetros Curriculares Nacionais para justificar suas pesquisas. Miguel e Miorim (2011) afirmam:

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) assumem a resolução de problemas como um de seus pilares e buscam argumentos relacionados ao desenvolvimento histórico da Matemática para justificar a importância do trabalho com problemas históricos: A própria História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigação interna à própria matemática (Brasil, 1998, 9. 40) (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 51).

Miguel e Miorim (2011), destacam nos Parâmetros Curriculares Nacionais, argumentos que exploram outras possibilidades para a abordagem pedagógica da História da Matemática:

> Os Parâmetros consideram várias outras funções que a história poderia desempenhar em situações de ensino, tais como o desenvolvimento de atitudes e valores mais favoráveis diante do conhecimento matemático, o resgate da própria identidade cultural, a compreensão das relações entre a tecnologia e herança cultural, a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos matemáticos, sugestão de abordagens diferenciadas e a compreensão de obstáculos encontrados pelos alunos (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 52).

Em complemento, Mendes (2009) afirma:

> De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000), um dos objetivos da Matemática no Ensino Médio é fazer com que os alunos passem a entende-la como um processo de raciocínio no qual eles podem produzir conclusões lógicas sobre ela a partir de modelos, fatos conhecidos, propriedades e relações explicativas do seu pensamento. Conforme o alcance desse objetivo, é possível que os alunos reconheçam e apliquem o raciocínio dedutivo e indutivo na elaboração e na avaliação de conjecturas e argumentos matemáticos, seguindo seus argumentos lógicos, visando validar seu próprio pensamento (MENDES, 2009, p. 39).

Convergente com a importância das relações entre a Matemática e a História da Matemática, verificamos diversos pesquisadores que estudam a História da Matemática como recurso ao ensino de Matemática.

Dentre eles destaca-se Miguel e Miorim (2011), que em seu livro História na Educação Matemática, discutem as propostas e desafios da utilização da História da Matemática na Educação Matemática de forma ampla e completa, apresentando as principais razões para sua utilização, os argumentos contrários às abordagens didáticas com base na história, os principais modelos teóricos atuais nesse campo de pesquisa e concluem com uma proposta pedagógica para a utilização da História da Matemática em sala de aula, orientada na formação de professores de Matemática.

Nessa obra, os autores iniciam argumentando que ainda no início do século XX já existia inserção de História da Matemática em livro didático no Brasil, a exemplo da obra Mathematica, 1º anno (1931) de Cecil Thiré e Mello e Souza, que apresenta figuras históricas, biografias, informações sobre mulheres na História e fatos históricos, que segundo os autores da época, tinham o objetivo de despertar no jovem estudante o interesse pelo conhecimento matemático.

Para Miguel e Miorim (2011, p. 24), a afirmação de que a História da Matemática é motivadora, em conjunto com o pensamento de outros diversos autores, concebe que a História da Matemática tem um papel motivador inerente ao próprio conteúdo. Mas os mesmos refutam essa hipótese argumentando que de tal forma, o estudo da própria História seria automotivador, o que não é confirmado pela maioria dos professores da disciplina.

Ainda para Miguel e Miorim (2011, p. 33), um dos argumentos para recorrer à História da Matemática é que ela "constitui uma fonte de métodos adequados para abordagem pedagógica de certos tópicos de Matemática", os autores ressaltam ainda que esse é um argumento presente na literatura desde o século XVIII. Em linhas gerais, para os autores, a História da Matemática auxilia na compreensão, significação e resolução de problemas e pode ser uma fonte de enriquecimento do processo de ensino e de aprendizagem e desmistificação da Matemática, contribuindo para a consciência de que a Matemática é uma ciência construída historicamente e não uma ciência pronta, acabada e estática.

Em Miguel e Miorim (2011, p. 45) surge a expressão, embasada na proposta curricular do Estado de São Paulo de 1998, que a história atua como "fio condutor". Nessa proposta há explicitamente o argumento de que "a história pode ser uma fonte de busca de compreensão e de significados para o ensino-aprendizagem da Matemática escolar na atualidade".

Assim como a proposta curricular do Estado de São Paulo incentiva a utilização pedagógica da História da Matemática, buscamos nas Diretrizes

Curriculares do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008), tendo em vista nossa atuação estar focada nesse Estado, direcionamento à nossa pesquisa. Nesse documento, especificamente para o Ensino Médio, encontramos duas formas de envolver a História da Matemática no ensino da Matemática: a contextualização sócio-histórica como dimensão do conhecimento e a História da Matemática como um encaminhamento metodológico.

O objetivo da contextualização sócio-histórica justifica-se no argumento de que a Matemática não foi construída com base nela mesma e sim surgiu da necessidade do homem em contar, medir, projetar, etc. naturalmente focado em outras áreas que hoje denominamos Física, Astronomia, Economia, etc. Assim, a contextualização transportada para a pedagogia “contribui para que o conhecimento ganhe significado para o aluno, de forma que aquilo que lhe parece sem sentido seja problematizado e apreendido. ” (PARANÁ, 2008, p. 28). Nesse sentido, complementase:

> O contexto, no currículo da Educação Básica, é elemento fundamental das estruturas sócio-históricas, marcadas por métodos que fazem uso, necessariamente, de conceitos teóricos precisos e claros, voltados à abordagem das experiências sociais dos sujeitos históricos produtores do conhecimento. (PARANÁ, 2008, p. 30).

A proposta curricular torna claro que nesse processo é preciso que os professores estejam atentos para que o trabalho não permaneça na “superficialidade” da contextualização, é imprescindível que as sequências pedagógicas propiciem o “desenvolvimento do pensamento abstrato e da sistematização do conhecimento”. (PARANÁ, 2008, p. 28).

Quanto à História da Matemática como encaminhamento ou tendência metodológica descrita na proposta curricular do estado do Paraná em 2008, identificase novamente a menção da História como “fio condutor” que explica os porquês da Matemática. A proposta salienta que:

> A abordagem histórica deve vincular as descobertas matemáticas aos fatos sociais e políticos, às circunstâncias históricas e às correntes filosóficas que determinaram o pensamento e influenciaram o avanço científico de cada época. A história da Matemática é um elemento orientador na elaboração de atividades, na criação das situações-problema, na busca de referências para compreender melhor os conceitos matemáticos. Possibilita ao aluno analisar e discutir razões para aceitação de determinados fatos, raciocínios e procedimentos. (PARANÁ, 2008, p. 66).

A outra principal referência desse trabalho é Mendes (2009) que propõe além de reflexões sobre a História da Matemática no ensino da Matemática, uma abordagem investigativa da história e diversas atividades e projetos para o exercício dessa prática. Por sua vez, o autor argumenta principalmente a favor do fator motivacional, conforme podemos verificar no trecho abaixo:

Com essa prática, considero ser possível imprimir maior motivação e criatividade cognitiva às atividades de sala de aula durante nossa ação docente, pois esse modo de conceber o ensino da Matemática pode constituir-se em um dos agentes provocadores de ruptura da prática tradicional vivida até hoje nas aulas de matemática. (MENDES, 2009, p. 76). Entretanto, apesar de Mendes (2009) justificar-se principalmente no fator motivacional (ao contrário de Miguel e Miorim (2011)), ele acredita que o uso da História da Matemática como recurso pedagógico tem como principal finalidade promover a ressignificação do conhecimento matemático produzido ao longo dos anos e por diferentes civilizações e culturas. Como podemos perceber no trecho abaixo:

> A história é escrita constantemente não apenas porque descobrimos fatos novos, mas também porque a nossa perspectiva sobre o que é um fato histórico muda, ou seja, sobre o que é importante do ponto de vista do processo histórico. À medida que passamos a conhecer e compreender o desenvolvimento da sociedade em sua trajetória de transformação, aprendemos novos meios de compreender e explicar um mesmo fenômeno. (MENDES, 2009, p. 71).

De maneira introdutória, Mendes (2009) afirma que quando a história é usada no ensino de matemática, normalmente ocorre de maneira superficial e muitas vezes com informações incorretas, restringindo-se a narrativas citando nomes, datas e locais. Para o autor essas abordagens não se apresentam eficazes para o ensino. Além disso há muitas lacunas na formação do professor, principalmente na formação inicial e pouco acesso do professor ao material apropriado existente. Essa problemática é relembrada em outros trechos de sua obra:

> Não é muito comum encontrarmos a história da Matemática nos livros didáticos utilizados por professores e estudantes do Ensino Fundamental ou Médio do sistema educacional brasileiro. Embora esses livros incluam, muitas vezes, certas informações históricas, tais informações geralmente falam sobre figuras históricas e acontecimentos que se constituem em algo meramente sem importância para aquisição (geração/construção) do conhecimento matemático pelo estudante. (MENDES, 2009, p. 76).

Diversos autores, pesquisadores e professores buscam justificar a importância da História da Matemática no ensino de Matemática, como podemos observar:

> Com a história da matemática, tem-se a possibilidade de buscar uma nova forma de ver e entender a matemática, tornando-a mais contextualizada, mais

> integrada com as outras disciplinas, mais agradável, mais criativa, mais humanizada. (GASPERI; PACHECO, 2007).

Há considerações também que diversos conhecimentos matemáticos construídos historicamente, desencadearam mudanças, evoluções e contribuíram para o avanço da ciência e da civilização, Mendes (2009) acredita que a investigação da História da Matemática ainda tem potencial para desencadear acontecimentos úteis à humanidade, podemos verificar:

> Um fato histórico da Matemática é digno de memória quando exerce ou exerceu na sociedade uma função desencadeadora de uma série de acontecimentos úteis à humanidade e que ainda podem gerar muito mais. O Teorema de Pitágoras é um bom exemplo de um fato memorável, visto que a partir da sua elaboração desencadeou-se o estudo da distância, levando à criação do sistema de coordenadas, até a elaboração da geometria analítica, o que nos conduziu ao cálculo diferencial, provocando assim, finalmente, o aparecimento da análise, entre outros. (MENDES, 2009, p. 72).

Santos, Thiengo e Silva (2014) salientam a importância da contextualização e significação da Matemática na formação de sujeito crítico e consciente e destacam a História da Matemática como ferramenta para auxílio no atingimento desses objetivos:

> Com vistas em uma abordagem da História da Matemática que exceda o poder exclusivo da motivação, pondero que os valores históricos realçam o papel da Matemática na sociedade, esclarecendo os motivos de sua criação, as necessidades que implicaram na busca por tal conhecimento, as continuidades e rupturas do pensamento matemático e a importância das concepções epistemológicas envolvidas, no tempo e espaço, que foram constituídas (SANTOS; THIENGO; SILVA, 2014, p. 16).

Podemos perceber que são diversos os motivos para recorrer à História da Matemática para o ensino de Matemática, todos eles congruentes à relevância da aprendizagem contextualizada e com significado e sentido para os estudantes. Contudo, Saito (2013, p.1) ressalta que conciliar o ensino de matemática com a História da Matemática “não é tarefa simples visto que tal articulação requer não só um estudo epistemológico, mas também didático-pedagógico”. Para o autor, a orientação didática nos trabalhos com utilização de História da Matemática é tão importante quanto o conhecimento relacionado ao objeto histórico.

Saito (2013, p. 3) alerta ainda, que geralmente o processo de ensino com base na História não surte o efeito desejado pois se utiliza de acontecimentos ‘pinçados’ no passado, normalmente intervalados e descontextualizados, fortalecendo a ideia de que a Matemática é uma ciência pronta e acabada, “visto que ela é tomada pelo educador matemático como um repositório fixo de informações [...] não ocorrendo assim a ressignificação dos conteúdos”.

A proposta de Saito (2016) é a construção de interfaces entre a História e a Educação Matemática e para o autor é muito importante que o educador ou estudante da Matemática veja a Matemática do passado como era no passado, para que ele se sensibilize que o contexto daquele conhecimento era único e que os matemáticos não estavam conscientes de que a Matemática que estavam desenvolvendo na época iria evoluir para o que hoje entendemos como Matemática (2016, p. 7), para ele, é dessa maneira que a História da Matemática pode ser uma ótima estratégia didática.
Segundo o autor:

> Buscamos na rica trama do tecido histórico um conjunto de ações, regras, critérios e outros conhecimentos (não necessariamente matemáticos) que possam reorientar a visão do que vem a ser matemática e conhecimento matemático. (SAITO, 2016, p. 9).

Entendemos esse posicionamento de Saito (2016) no sentido de que é muito importante trabalhar a temporalização quando da utilização da História da Matemática no ensino de Matemática. O professor deve ter sempre muito claro em suas atividades e projetos se o trabalho será feito na forma de imersão no passado ou se ele será trazido e contextualizado no presente. Corrobora Miguel e Miorim (2011):

> A concepção da relação passado-presente não deveria pautar-se em qualquer das variantes do principio recapitulacionista. Porque as histórias da matemática, da educação matemática ou, simplesmente, as histórias já constituídas ou que virão a ser constituídas não nos ensinam a agir no presente, a tomar decisões no presente, nem a minimizar as dificuldades pedagógicas ou de outra natureza que venhamos ter. (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 161).

Já para Mendes (2009), verificamos que:

> Admitir a dimensão histórica nas aulas de Matemática não pressupõe pedir que os alunos refaçam os principais passos do descobrimento (construção) de um conceito matemático conforme a formulação da época em que o mesmo foi construído. Deve, sim, aliar a história às condições reais em que os estudantes se encontram, ou seja, a partir da incorporação dos aspectos sócio-culturais pelos quais os estudantes compreendem e explicam a sua realidade (MENDES, 2009, p. 85).

Para os referidos autores é a presença do professor, sua atuação orientada que permitirá o diálogo entre a história, seus problemas e percalços, com as dificuldades e oportunidades pedagógicas no ensino de Matemática atual.

Convergindo com as ideias de Saito (2013), outros autores atuam com o intuito de desmistificar a concepção de que a Matemática é uma ciência pronta e acabada. Como podemos ver Bianchi (2006), que defende a utilização da História:

> Possibilita a desmistificação da Matemática e a desalienação de seu ensino. A Matemática é um desenvolvimento humano e não um sistema de verdades rígidas. Conhecendo um pouco da História de determinado conteúdo matemático, o estudante pode não desencorajar na falta, incerteza, ou desentendimento de uma ideia, pois se sabe que este tem sido trabalho de matemáticos anteriores. A Matemática não é fruto de uma estrutura rígida, mas um processo intelectual humano contínuo, ligado a outras ciências, culturas e sociedades. A forma lógica e emplumada que o conteúdo matemático é muitas vezes exposto, não demonstra como este foi historicamente produzido. (BIANCHI, 2006, p. 35).

Ou quando Miguel e Miorim (2011, p. 52) afirmam que a “História da Matemática possibilitaria a desmistificação da Matemática e o estímulo à não alienação do seu ensino” enquanto os cursos regulares “transmitem a falsa impressão de que a Matemática é harmoniosa, de que está pronta e acabada”.

Mendes (2009) também acredita que o uso da História da Matemática no ensino de matemática, principalmente na forma investigativa, além de permitir que o aluno atue de forma significativa na construção do conhecimento matemático, possibilita a percepção de que esse é um “processo continuamente em movimento e fomentado pela natureza, sociedade, cultura e interação dos indivíduos na busca de compreender e explicar o mundo”. Enquanto o ensino tradicional, desperta um sentimento oposto:

> A Matemática tradicional tem como prática a disseminação de um conhecimento como “verdade absoluta”, ou seja, pronta e acabada. Quando a mesma é apresentada em sala de aula, geralmente aparece sob a forma de um conhecimento linear, frio, estático e que, pela maneira na qual se mostra, abandona a criatividade humana suscitada pelo seu processo histórico e sócio-cultural de produção de tal conhecimento. (MENDES, 2009, p. 52).

Além disso, Miguel e Miorim (2009) listam diversos pontos qualificando a abordagem da História da Matemática para atingir objetivos pedagógicos no ensino da Matemática, como podemos ver:

> 1) A matemática como uma criação humana; 2) As razões pelas quais as pessoas fazem matemática; 3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; 4) As conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; 5) A curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; 6) As percepções que os matemáticos tem do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; 7) A natureza de uma

> estrutura, de uma axiomatização e de uma prova. (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 53).

Da análise desses argumentos pode-se inferir que o estudo com base na História da Matemática acima de tudo permite a contextualização cronológica, interdisciplinar, cultural e social, mas permite também perceber a evolução da Matemática como ciência pura, nos momentos de generalização e evolução das teorias. Mendes (2009, p. 50) também argumenta nesse sentido, quando afirma que a Matemática se desenvolveu em dois eixos: “o contexto sócio-cultural e a cognição humana”. O autor apresenta um bom exemplo dessa afirmação no trecho abaixo:

> A mudança efetuada entre o estudo da corda de um arco de circunferência para o estudo de metade dessa corda até a conceituação do seno. Trata-se aqui de um esquema matemático elaborado em virtude da conveniência operacional percebida pelos hindus e árabes para a construção das tábuas de cordas, úteis para à sua astronomia... Em contraponto à percepção de Euler com relação à utilização da trigonometria como elemento de apresentação das funções complexas, ou seja, manipulação das ideias matemáticas já estabelecidas socialmente como uma forma de buscar estabelecer novas ideias matemáticas... A ruptura surge no momento em que as ideias da trigonometria desvinculam-se da astronomia, criando seu espaço próprio como um tópico da Matemática, o que implicou na trigonometria desligando-se da sua origem histórica para ganhar vida própria e oportunizando, portanto, a realização de variadas aplicações inesperadas nos diversos campos do conhecimento. (MENDES, 2009, p. 50).

Com base na pesquisa realizada por Mendes (2004; 2007) na formação continuada de professores que atuam no ensino básico, quanto as potencialidades pedagógicas da utilização da História da Matemática no ensino de Matemática ele afirma “que alguns modos de usar a história na sala de aula de Matemática contribuem para o trabalho do professor e, consequentemente, da aprendizagem dos estudantes”. Para o autor, o modo mais adequado de realizar essa abordagem é por meio da investigação histórica:

> Minha concepção a respeito da investigação histórica como um modelo teórico da elaboração e do uso de atividades na sala de aula do Ensino Fundamental e Médio é favorável ao seu uso como fonte de geração da matemática escolar que contribua para a melhoria do seu ensino e sua aprendizagem. É importante, entretanto, que o professor valorize e adapte as informações históricas às suas necessidades, visando o seu melhor uso possível na sala de aula. (MENDES, 2009, p. 81).

Observando a proposta de Tzanakis e Arcavi apud Bianchi (2006) em uma aproximação pedagógica inspirada na História encontramos uma explanação de como a História da Matemática pode ser utilizada nas aulas:

> - Reconstrução de exemplos, possivelmente por estudantes, para entender a motivação realizada para a introdução de um novo conceito, teoria, método ou prova e estudos aprofundados de determinados conteúdos;
> - Incentivo para o aluno e o professor pensarem por si próprios, abraçando então suas próprias pesquisas;
> - Solução de problemas, exercícios podem tornar-se ingredientes essenciais de apresentação, ajudando na compreensão completa do sujeito. O objetivo é induzir historicamente, porém sem negligenciar o papel das técnicas matemáticas.
> - Comparação da Matemática Moderna com a forma utilizada antigamente. Por exemplo, notação, terminologia, técnica de prova. A apresentação desta comparação pode ser benéfica aos estudantes, percebendo a evolução, valoriza-se a simbologia utilizada atualmente. (TZANAKIS e ARCAVI apud BIANCHI, 2006, p. 31).

Em sua obra, Miguel e Miorim (2011) apresentam as concepções teóricas da História da Educação Matemática na Educação Matemática como um campo de pesquisa do educador matemático. Essas pesquisas resultam uma série de argumentos reforçadores das potencialidades pedagógicas da história e maioria dos pesquisadores concorda em distingui-los entre epistemológicos e éticos. Seguem argumentos apresentados:

> Argumentos epistemológicos: fonte de seleção e constituição de sequências adequadas de tópicos de ensino; fonte de seleção de métodos adequados de ensino para diferentes tópicos da Matemática escolar; fonte de seleção de objetivos adequados para o ensino-aprendizagem da Matemática escolar; fonte de seleção de tópicos, problemas ou episódios considerados motivadores da aprendizagem da Matemática escolar; fonte de busca de compreensão e de significação para o ensino-aprendizagem da Matemática escolar na atualidade; fonte de identificação de obstáculos epistemológicos de origem epistemológica para se enfrentar certas dificuldades que se manifestam entre os estudantes no processo de ensino-aprendizagem da Matemática escolar; fonte de identificação de mecanismos operatórios cognitivos de passagem a serem levados em consideração nos processos de investigação em Educação Matemática e no processo de ensinoaprendizagem da Matemática escolar.
>
> Argumentos éticos: fonte que possibilita um trabalho pedagógico no sentido de uma tomada de consciência da unidade da Matemática; fonte para a compreensão da natureza e das características distintivas e específicas do pensamento matemático em relação a outros tipos de conhecimento; fonte que possibilita a desmistificação da Matemática e a desalienação de seu ensino; fonte que possibilita a construção de atitudes academicamente valorizadas; fonte que possibilita uma conscientização epistemológica; fonte que possibilita um trabalho pedagógico no sentido da conquista da autonomia intelectual; fonte que possibilita o desenvolvimento de um pensamento crítico, de uma qualificação como cidadão e de uma tomada de consciência e de avaliação de diferentes usos sociais da Matemática; fonte que propicia uma apreciação da beleza da Matemática e da estética inerente a seus métodos de produção e validação do conhecimento; fonte que possibilita a promoção da inclusão social, via resgate da identidade cultural de grupos sociais discriminados no (ou excluídos do) contexto escolar (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 62).

Convencidos das potencialidades pedagógicas da História da Matemática no ensino de Matemática, buscamos verificar de que forma o professor acessa conteúdos/materiais/atividades nos livros didáticos para inserir esse recurso em sua prática.

Entende-se que a História da Matemática pode estar presente em diversos materiais didáticos, tais como livros paradidáticos, vídeos educativos, livros didáticos, material online, entre outros. Em sua proposta de investigação histórica na sala de aula, Mendes (2009) apresenta as seguintes possibilidades:

> Atividades manipulativas extraídas diretamente da história da Matemática; Atividades manipulativas adaptadas da história da Matemática; Investigação de problemas históricos; Estudos de textos históricos adaptados de fontes primárias; Estudos de textos históricos extraídos de fontes primárias; Investigação em livros didáticos. (MENDES, 2009, p. 105).

Além da indicação de Mendes (2009), faz sentido procurar abordagens ou até mesmo vestígios da História da Matemática nos livros didáticos, pois como já foi apontado por Bianchi (2006), esse é um dos critérios de avaliação dos livros didáticos no PNLD.

O Guia anual do PNLD disponibiliza resenhas sobre as coleções oferecidas pelo programa em cada ciclo. Essas resenhas são compostas por diversos itens que avaliam os conteúdos de cada livro. O item que qualifica a presença de História da Matemática é chamado de Contextualização, ele engloba também a contextualização social e interdisciplinar. No quesito Contextualização (BRASIL, 2015, p. 18) "avaliamse as contextualizações feitas com base na história da Matemática, com o objetivo de tornar o estudo mais significativo". Apesar de considerarmos que "tornar o estudo mais significativo" é um argumento muito amplo, a contextualização na História da Matemática está coerente ao objetivo deste trabalho.

Em Miguel e Miorim (2011) temos convicção de que os livros didáticos que dispõe da História da Matemática trazem conteúdos em diversas abordagens, como podemos ver:

> Com relação à presença de textos históricos que se propõem a fornecer ao aluno informações históricas, presentes em muitos livros didáticos atuais brasileiros, encontramos algumas diferenciações na forma como tais informações são introduzidas bem como nos objetivos da introdução. (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 58).

Para Mendes (2009), os livros didáticos não se apresentam como uma boa proposta pedagógica para o ensino de Matemática no tocante à utilização da História da Matemática, conforme segue:

> Não é muito comum encontrarmos a história da Matemática nos livros didáticos utilizados por professores e estudantes do Ensino Fundamental ou Médio do sistema educacional brasileiro. Embora esses livros incluam, muitas vezes, certas informações históricas, tais informações geralmente falam sobre figuras históricas e acontecimentos que se constituem em algo meramente sem importância para aquisição (geração/construção) do conhecimento matemático pelo estudante. (MENDES, 2009, p. 76).

Entretanto, a análise dos livros didáticos não foi o ponto focal da pesquisa desses autores. Destarte, encontrou-se motivação para investigar qualitativamente a abordagem da História da Matemática nos livros didáticos disponibilizados na rede pública de ensino no Brasil no ano de 2015. Não se tem, de maneira alguma, a intenção de determinar de que forma deve-se ensinar Matemática por meio da História, queremos identificar de que forma a História da Matemática tem sido apresentada especificamente nos livros didáticos de Ensino Médio aprovados no PNLD de 2015.

## 3. METODOLOGIA

Esse trabalho foi realizado de acordo com as seguintes etapas:

1º) Levantamento do referencial teórico: nessa fase realizamos a leitura de obras e artigos dos autores e pesquisadores da área e anais de eventos da Educação Matemática. Destaque para Miguel e Miorim (2009), Saito (2013), Mendes (2009) e Bianchi (2006), além das orientações disponíveis nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000) e nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008).

2º) Análise dos livros didáticos aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) com base no Guia do PNLD de 2015, que tem por objetivo auxiliar os professores e as escolas na escolha do livro didático. No ano de 2015, o Programa aprovou seis opções de coleções de livros para o Ensino Médio, a saber:

Coleção 1:

LEONARDO, F.M. **Conexões com a Matemática**. Editora Moderna, 2ª.ed, volume 1, 2013 a.

LEONARDO, F.M. **Conexões com a Matemática**. Editora Moderna, 2ª.ed, volume 2, 2013 b.

LEONARDO, F.M. **Conexões com a Matemática**. Editora Moderna, 2ª.ed, volume 3, 2013 c.

Coleção 2:

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. Editora Ática, 2ª. Ed, volume 1, 2013 a.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. Editora Ática, 2ª. Ed, volume 2, 2013 b.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. Editora Ática, 2ª. Ed, volume 3, 2013 c.

Coleção 3:

PAIVA, M. R. **Matemática – Paiva**. Editora Moderna. 2ª. Ed, volume 1, 2013 a.

PAIVA, M. R. **Matemática – Paiva**. Editora Moderna. 2ª. Ed, volume 2, 2013 b.

PAIVA, M. R. **Matemática – Paiva**. Editora Moderna. 2ª. Ed, volume 3, 2013 c.

Coleção 4:

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D. M.; PERIGO, R.; ALMEIDA, N. S. **Matemática Ciência e Aplicações**. Editora Saraiva. 7ª. Ed, volume 1, 2013 a.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D. M.; PERIGO, R.; ALMEIDA, N. S. **Matemática Ciência e Aplicações**. Editora Saraiva. 7ª. Ed, volume 2, 2013 b.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D. M.; PERIGO, R.; ALMEIDA, N. S. **Matemática Ciência e Aplicações**. Editora Saraiva. 7ª. Ed, volume 3, 2013 c.

Coleção 5:

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. **Matemática – Ensino Médio**. Editora Saraiva. 8ª. Ed, volume 1, 2013 a.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. **Matemática – Ensino Médio**. Editora Saraiva. 8ª. Ed, volume 2, 2013 b.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. **Matemática – Ensino Médio**. Editora Saraiva. 8ª. Ed, volume 3, 2013 c.

Coleção 6:

SOUZA, J. **Novo olhar: Matemática**. Editora FTD. 2ª. Ed, volume 1, 2013 a.

SOUZA, J. **Novo olhar: Matemática**. Editora FTD. 2ª. Ed, volume 2, 2013 b.

SOUZA, J. **Novo olhar: Matemática**. Editora FTD. 2ª. Ed, volume 3, 2013 c.

O objetivo inicial era o de analisar todas as coleções aprovadas no PNLD, totalizando 18 volumes, entretanto, não conseguimos acesso ao volume 1 da coleção *Matemática – Ensino Médio*, de Kátia Cristina Stocco Smole e Maria Ignes de Souza Vieira Diniz e a todos os volumes da coleção *Novo olhar: Matemática*, de Joamir Souza, Editora FTD, 2ª edição, 2013 (tentamos via Secretaria Regional de Educação de Curitiba (PR) e Brasília (DF) e via SAC do MEC). Sendo assim, o trabalho englobou a análise de 14 livros de 5 coleções.

Essa etapa da pesquisa pode ser classificada segundo Fiorentini e Lorenzato (2007) como sendo pesquisa bibliográfica ou estudo documental, pois realizamos a análise sobre documentação escrita.

Nessa etapa destacam-se dois momentos de leitura do material conforme já utilizado por Bianchi (2006). O primeiro foi de "leitura reflexiva" onde foi feita a leitura com o objetivo de identificar as menções, abordagens ou vestígios de História da Matemática nos livros, durante essa atividade foi produzido um catálogo dessas citações. O segundo momento foi de "leitura interpretativa", onde foi analisado o conteúdo dessas menções, abordagens ou vestígios com o objetivo de classificá-las.

Quanto a classificação, ressalta-se que foram encontrados alguns trabalhos que analisaram a presença de História da Matemática nos livros didáticos, mas dois deles destacam-se pelo alcance de suas pesquisas, que até hoje são utilizadas como referência.

O primeiro é um estudo desenvolvido por Vianna que em 1995 (apesar da data do trabalho, utilizaremos como referência uma edição do ano 2000) realizou uma análise de livros didáticos de 5º a 8º série no tocante às abordagens de História da Matemática e definiu as seguintes categorias:

1) <u>História da Matemática como Motivação</u>: Quando a presença de história consiste em uma anedota, uma lenda ou um breve texto introdutório (o autor esclarece aqui que todos os itens presentes nessa classificação poderiam estar no item 2, mas que seu critério é simples e não permite dúvidas:

considerou como motivacional, textos que estão no início de um capítulo ou de uma unidade didática).

2) História da Matemática como Informação: Essa categoria compreende as “notas históricas” que frequentemente aparecem depois de concluído um tema ou capítulo de conteúdo matemático. Tais notas são informações extras aos conteúdos estudados.
3) História da Matemática como Estratégia Didática: Nessa categoria estão as intervenções direcionadas a conduzir o aluno para um determinado tipo de procedimento que encontra alguma relação com o desenvolvimento do conteúdo.
4) História da Matemática como imbricada no conteúdo: Quando a História está presente de forma implícita. O conhecimento que permite estruturar o desenvolvimento do conteúdo de uma determinada forma em detrimento de outras formas possíveis.

O segundo estudo ao qual se faz referência nessa pesquisa servindo de orientação das análises foi o de Bianchi (2006) que em sua dissertação de mestrado, faz uma análise comparativa entre o que encontrou nos livros e a análise apresentada nos Guias do PNLD de alguns anos. Bianchi (2006) utilizou-se das categorias definidas por Vianna (1995) para aperfeiçoar sua própria classificação. Definindo primeiramente duas classificações macros: parte teórica e atividades, e dentro delas estabeleceu as seguintes subclasses:

História da Matemática na Parte Teórica:

1) Informação Geral: diversas formas de informação, tais como acontecimentos, datas, biografias de matemáticos, etc., essas informações podem estar em qualquer parte do capítulo;
2) Informação Adicional: presentes geralmente no final dos capítulos, em forma de apêndices e nenhum trabalho embasado nestas informações é proposto;
3) Estratégia Didática: as menções históricas são usadas como um recurso para o entendimento do conteúdo matemático a ser desenvolvido e este objeto histórico pode encorajar o estudante a pensar a respeito do conteúdo discutido;

4) Flash: aparece de forma sutil e não é mencionada qualquer nota sobre esta presença. Em meio a problemas e textos, insere-se discretamente alguma informação histórica.

História da Matemática nas Atividades:

1) Informação: Atividade em questão matemática na qual apresenta uma informação sobre a História da Matemática e em seguida uma tarefa com objetivos da aprendizagem da Matemática.
2) Estratégia Didática: Forma de inserir uma menção histórica na atividade e aproveitá-la para adquirir um conhecimento matemático, ajudando o estudante a deduzir o conceito em questão.
3) Atividades sobre a História da Matemática: Atividade ou exercício em que se questiona o conteúdo de História da Matemática abordado anteriormente. Geralmente vem em seguida de um texto que trata deste assunto.

Por Atividades, Bianchi (2006) entende os exercícios expostos no livro, tanto os exercícios resolvidos, quanto os exercícios propostos aos estudantes.

Em uma análise simplista pode-se dizer que ambos os critérios permitem classificações semelhantes, exceto pela nomenclatura e pela separação entre teoria/conteúdos e atividades.

Como esse trabalho pretende realizar uma análise detalhada da presença de História da Matemática nos livros didáticos escolhidos, optamos por utilizar a classificação formatada por Bianchi (2006), com duas importantes adaptações: a unificação dos itens Informação Geral e Informação Adicional, quando apresentados na parte teórica, tendo em vista não vislumbrarmos diferenças conceituais significativas entre ambos e o nosso trabalho ser focado nas abordagens que superam o caráter de informação; e a unificação das abordagens de informação nas atividades, estratégia didática nas atividades e atividades sobre a História da Matemática como sendo somente História da Matemática nas atividades (exercícios resolvidos e exercícios propostos para resolução dos estudantes).

Destarte, a classificação utilizada neste trabalho fica assim definida:

a) Informação: diversas formas de informação, tais como acontecimentos, datas, biografias de matemáticos, etc., essas informações podem estar em qualquer parte do capítulo ou em forma de apêndices;
b) Estratégia Didática: as menções históricas são usadas como um recurso para o entendimento do conteúdo matemático a ser desenvolvido e este objeto histórico pode encorajar o estudante a pensar a respeito do conteúdo discutido;
c) Flash: aparece de forma sutil e não é mencionada qualquer nota sobre esta presença. Em meio a problemas e textos, insere-se discretamente alguma informação histórica.
d) Atividades: Atividade em questão matemática na qual apresenta uma informação ou menção sobre a História da Matemática, podendo ou não ser seguida de uma tarefa com objetivos da aprendizagem da Matemática utilizando a referida informação e ainda atividades em que se questiona o conteúdo de História da Matemática abordado anteriormente.

## 4. ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

De acordo com as classes sugeridas para análise das abordagens de história nos Livros Didáticos citados, considerou-se que as classificações como Estratégia Didática e Atividades apresentam conteúdos e orientações para que o professor utilize essas abordagens para aprofundar e/ou conduzir pedagogicamente determinado conceito matemático. Enquanto as abordagens de Informação e Flash, nem sempre possibilitam que essa ação seja realizada somente com base nesta abordagem.

Essas definições não significam que as referências na forma de Informação ou Flash não sejam importantes ou pertinentes, mas neste trabalho, é importante constatar as abordagens mais completas disponíveis nos livros didáticos.

Sendo assim, de maneira geral considerou-se que as Informações e Flashs possuem conhecimento matemático, entretanto foram consideradas como caráter bibliográfico, cronológico, informativo e até motivador, mas que sem o auxílio de outros materiais/fontes para aprofundamento, não possui potencial suficiente para induzir o aluno a desenvolver/construir conhecimento de determinados conceitos com base somente nesse material. Essa escolha está evidenciada em Miguel e Miorim (2011):

> O papel da História da Matemática é de um elemento esclarecedor do sentido das teorias e dos conceitos matemáticos que deverão ser estudados. E segundo ele, esse papel não poderia ser cumprido somente através da inserção de breves informações históricas introdutórias dessas teorias e conceitos. (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 46).

Após a execução da fase 1 e 2 descritas na metodologia, podemos resumir a presença de História da Matemática nas coleções de livros didáticos indicados no Guia do PNLD de 2015 conforme Quadro 1. Os dados apresentados nos permitem fazer análises quantitativas e qualitativas a respeito da presença de História da Matemática nos livros didáticos.

Nossa primeira reflexão se dá na quantidade de abordagens identificadas, 144 no total, nas cinco coleções analisadas. Consideramos que a quantidade é satisfatória, pois não há expectativa ou intenção de que o professor aborde todos os conteúdos da Matemática sob o viés da história.

Entretanto, quando é focada a quantidade em cada coleção verificamos que a Coleção 2 concentra 36% das abordagens, enquanto a Coleção 1 responde por apenas 10% das referências. As demais coleções apresentam valores aproximados da média de 20% das abordagens totais.

A identificação relacionada às qualificações dessas abordagens, verificamos que a classificação como Informação concentra 92 abordagens, ou seja, 63,89% de todo o material identificado. Esse índice aumenta quando englobamos as abordagens classificadas como Flash, totalizando 111 referências, o equivalente a 77,08% das abordagens.

As classificações como Estratégia Didática foram 25 e representam 17,36% das abordagens, enquanto as Atividades somam 8 abordagens, atingindo 5,5% do total analisado. Sendo assim, menos de ¼ de todo material analisado foi classificado como Estratégia Didática ou Atividades, ou seja, cujas abordagens possui conteúdo/orientações suficientes para propiciar o entendimento do conteúdo matemático a ser desenvolvido e encorajar o estudante a pensar a respeito do conteúdo proposto nessas situações.

Quadro 1: Distribuição das abordagens por classificação, coleção e volume.

| COLEÇÃO | LIVRO | INFORMAÇÃO | FLASH | ESTRATÉGIA | ATIVIDADES | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Volume 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 8 |
| | Volume 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 4 |
| | Volume 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | 4 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Subtotal** | **8** | **3** | **4** | **1** | **16** |
| 2 | Volume 1 | 14 | 4 | 4 | 1 | 23 |
| | Volume 2 | 16 | 1 | 0 | 3 | 20 |
| | Volume 3 | 7 | 1 | 1 | 0 | 9 |
| | **Subtotal** | **37** | **6** | **5** | **4** | **52** |
| 3 | Volume 1 | 6 | 0 | 5 | 2 | 13 |
| | Volume 2 | 4 | 2 | 2 | 0 | 8 |
| | Volume 3 | 7 | 2 | 0 | 0 | 9 |
| | **Subtotal** | **17** | **4** | **7** | **2** | **30** |
| 4 | Volume 1 | 4 | 0 | 4 | 0 | 8 |
| | Volume 2 | 8 | 2 | 3 | 0 | 13 |
| | Volume 3 | 4 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| | **Subtotal** | **16** | **2** | **8** | **0** | **26** |
| 5 | Volume 2 | 6 | 2 | 1 | 1 | 10 |
| | Volume 3 | 8 | 2 | 0 | 0 | 10 |
| | **Subtotal** | **14** | **4** | **1** | **1** | **20** |
| **TOTAL** | | **92** | **19** | **25** | **8** | **144** |
| **%** | | **63,89%** | **13,19%** | **17,36%** | **5,56%** | **100,00%** |

Para evidenciar a análise realizada apresenta-se na sequência algumas das abordagens destacadas em cada coleção.

## 4.1 ANÁLISE DA COLEÇÃO 1

*Conexões com a Matemática*, de Fabio Martins de Leonardo, Editora Moderna, 2ª edição, 2013;

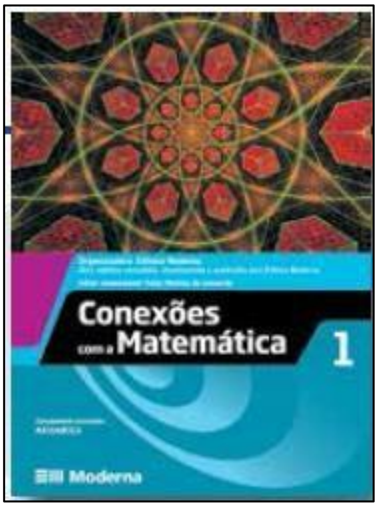
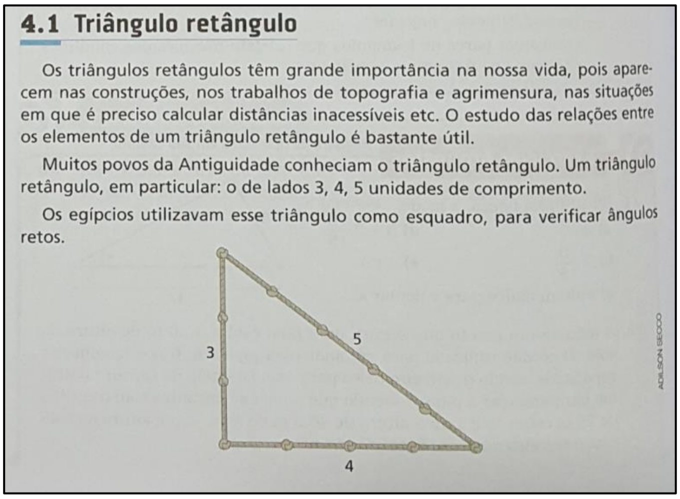



**Figura 1: Fonte: Guia do PNLD 2015**

A contextualização apresentada na avaliação do Guia do PNLD 2015 caracteriza essa coleção com abordagens de história “apenas com informações breves, sendo a ênfase na identificação dos personagens envolvidos com o desenvolvimento de um dado tema e suas localizações no tempo histórico”. (BRASIL, 2015, p. 27)

De fato, em nossa análise essa coleção apresentou a menor quantidade de abordagens dentre todas as coleções disponíveis e ainda assim a maior parte das referências foram classificadas como Informação. Mesmo assim, vejamos algumas das abordagens de todas as classes presentes nos livros desta coleção:



**4.1 Triângulo retângulo**

Os triângulos retângulos têm grande importância na nossa vida, pois aparecem nas construções, nos trabalhos de topografia e agrimensura, nas situações em que é preciso calcular distâncias inacessíveis etc. O estudo das relações entre os elementos de um triângulo retângulo é bastante útil.

Muitos povos da Antiguidade conheciam o triângulo retângulo. Um triângulo retângulo, em particular: o de lados 3, 4, 5 unidades de comprimento.

Os egípcios utilizavam esse triângulo como esquadro, para verificar ângulos retos.



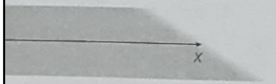
**Figura 2: Abordagem classificada como Flash (LEONARDO, 2013 a, p. 244)**

O trecho em destaque na Figura 2 cita “povos da Antiguidade” e “egípcios”, entretanto não há qualquer outra informação histórica ou aprofundamento do conteúdo utilizando-se das passagens históricas. Como as menções históricas passam quase que despercebidas no texto, classificamos a abordagem como Flash.

No século XIX, o conceito de função e sua nomenclatura já eram utilizados pelos matemáticos. Foi nesse período que o matemático suíço Jean Robert Argand (1768-1822) introduziu o conceito de módulo ou valor absoluto de um número. Mais tarde, o matemático alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) introduziu a notação $|x|$.

Atualmente, podemos encontrar o conceito de módulo aplicado em diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, na verificação e inspeção de instrumentos de pesagem não automáticos com carga máxima até 1.000 kg, o Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro) estabelece que: "A diferença entre os resultados obtidos, ao curso de várias pesagens de uma mesma carga, não pode ser superior ao *valor absoluto* [isto é, ao *módulo*] do erro máximo admissível para o instrumento nesta carga".

## 1 Módulo ou valor absoluto de um número real




Acompanhe a seguinte situação.

Na Cinemática, lidamos com problemas em que, ao calcular a velocidade de um móvel, podemos obter resultado negativo, por exemplo, −120 km/h.

**Figura 3: Abordagem classificada como Informação (LEONARDO, 2013 a, p. 146)**

A abordagem destacada acima apresenta Informações históricas a respeito das funções e módulo, entretanto na sequência didática a contextualização não recorre à História da Matemática, portanto a abordagem é Informação.

### 3.2 Comprimento da circunferência

Você conhece algum método para determinar o valor do número irracional $\pi$?

Provavelmente, os primeiros valores para $\pi$ foram obtidos por meio de medidas. Por exemplo, no papiro Rhind (documento egípcio escrito por volta de 1650 a.C.), a razão entre o comprimento e a medida do diâmetro da circunferência apresenta o valor 3,1604, que seria uma aproximação do número $\pi$.

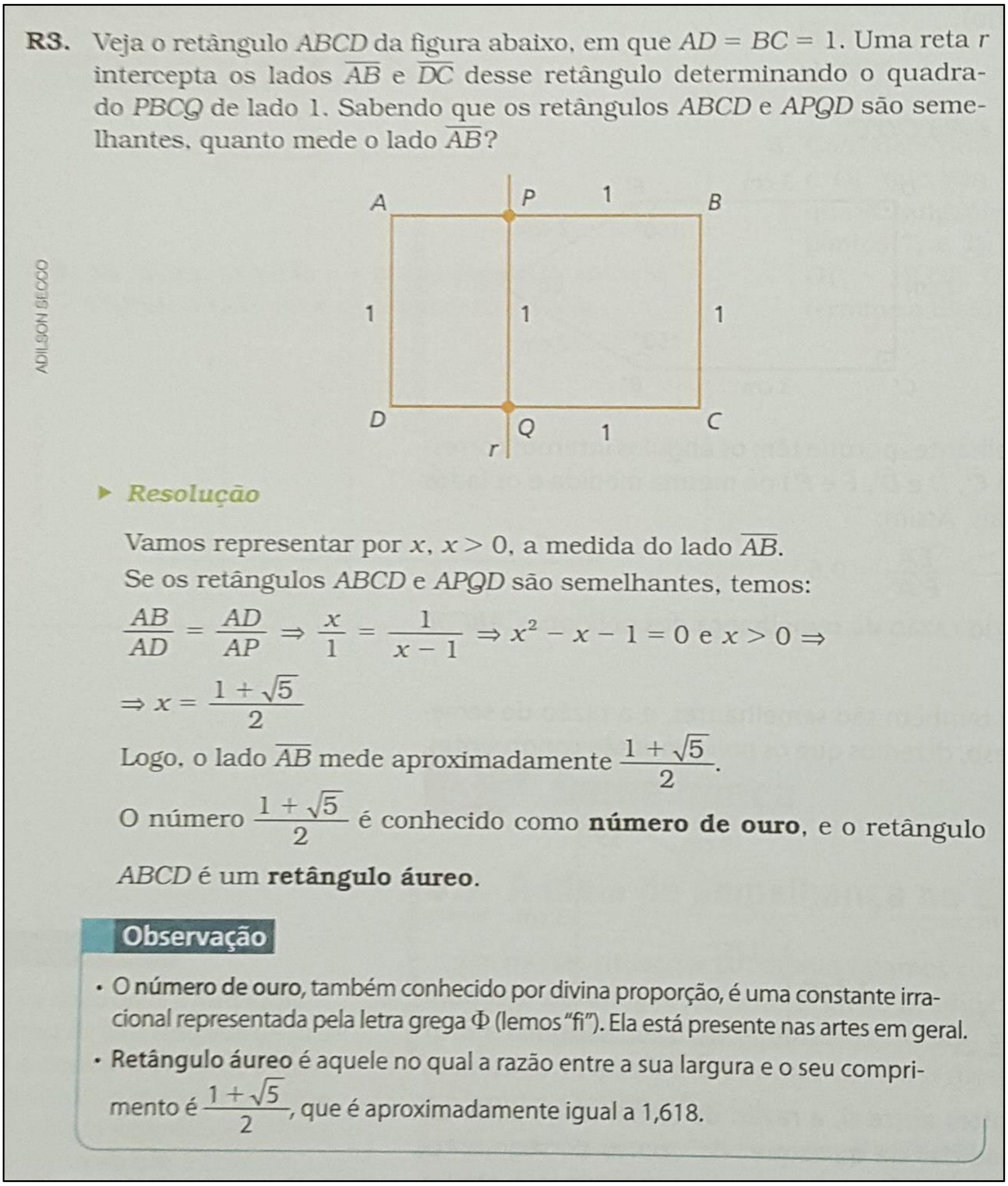
Mais tarde, o matemático grego Arquimedes (287-212 a.C.) apresentou um cálculo teórico que resultou na aproximação $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. Para isso, ele considerou uma circunferência de raio de medida 1. Então, percebeu que o comprimento da circunferência estava entre os perímetros de polígonos regulares, com $n$ lados cada um, inscrito e circunscrito à circunferência.

Hoje sabemos que a razão entre o comprimento $C$ de uma circunferência de raio $r$ e a medida do seu diâmetro é constante, ou seja, a razão é sempre a mesma, qualquer que seja a circunferência. Essa constante é denotada por $\pi$. Então o comprimento da circunferência pode ser determinado por: $\frac{C}{2r} = \pi \Rightarrow C = 2\pi r$

Arquimedes em gravura do século XVII.

**Figura 4: Abordagem classificada como Estratégia Didática (LEONARDO, 2013 b, p. 104)**

A abordagem acima foi classificada como Estratégia Didática pois há a apresentação de como pensaram alguns matemáticos para determinação do valor constante que hoje conhecemos como número π e faz um convite aos estudantes para compreender os cálculos para determinação do comprimento da circunferência na Antiguidade.



**R3.** Veja o retângulo $ABCD$ da figura abaixo, em que $AD = BC = 1$. Uma reta $r$ intercepta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ desse retângulo determinando o quadrado $PBCQ$ de lado 1. Sabendo que os retângulos $ABCD$ e $APQD$ são semelhantes, quanto mede o lado $\overline{AB}$?



▸ **Resolução**

Vamos representar por $x$, $x > 0$, a medida do lado $\overline{AB}$.

Se os retângulos $ABCD$ e $APQD$ são semelhantes, temos:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AP} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \text{ e } x > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Logo, o lado $\overline{AB}$ mede aproximadamente $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

O número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é conhecido como **número de ouro**, e o retângulo $ABCD$ é um **retângulo áureo**.

**Observação**

- **O número de ouro**, também conhecido por divina proporção, é uma constante irracional representada pela letra grega $\Phi$ (lemos "fi"). Ela está presente nas artes em geral.
- **Retângulo áureo** é aquele no qual a razão entre a sua largura e o seu comprimento é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é aproximadamente igual a 1,618.

**Figura 5: Abordagem classificada como Atividade (LEONARDO, 2013 a, p. 240)**

Apesar do exercício resolvido não fazer nenhuma menção histórica, o estudo e desdobramentos do número de ouro é marcante na História da Matemática.

## 4.2 ANÁLISE DA COLEÇÃO 2

*Matemática: Contexto e Aplicações*, de Luiz Roberto Dante, Editora Ática, 2ª edição, 2013.

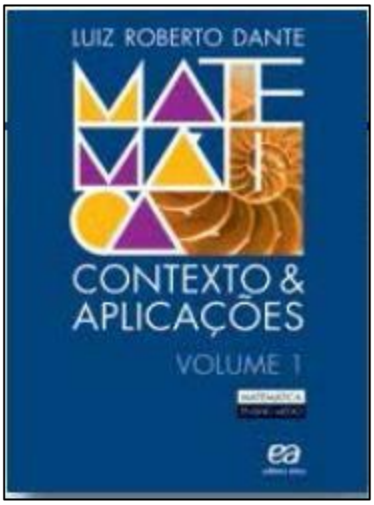


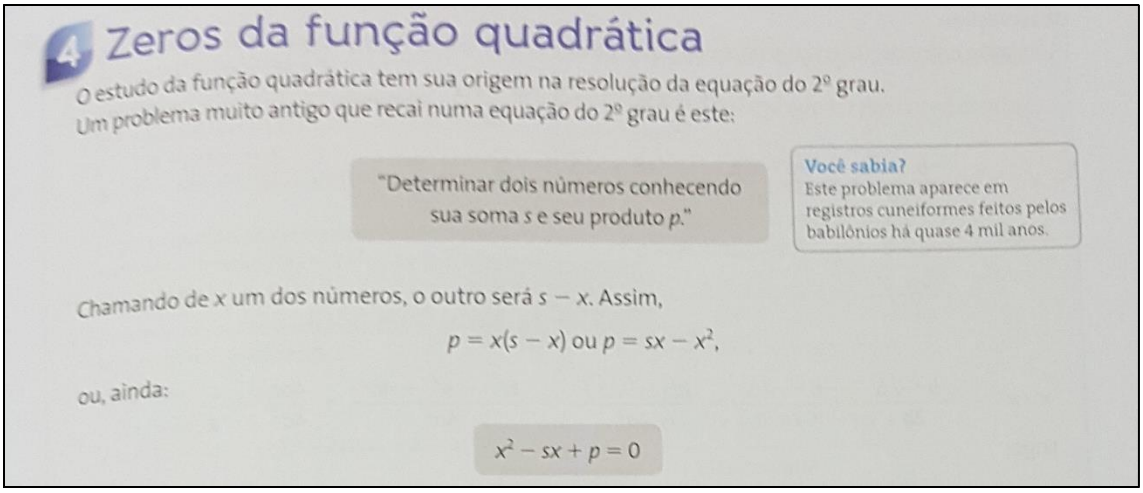

**Figura 6: Fonte: Guia do PNLD 2015**

De acordo com a contextualização apresentada no Guia do PNLD de 2015 para essa coleção, tem-se:

> Ao longo da coleção, recorre-se à história da Matemática para iniciar a discussão de um assunto ou como leitura complementar. No entanto, poucas vezes esse contexto é utilizado no desenvolvimento de conceitos. (BRASIL, 2015, p. 36).

Conforme se observa no Quadro 1 essa coleção apresenta a maior quantidade de abordagens de História da Matemática, 52 no total. Entretanto, concorda-se com a avaliação apresentada no Guia do PNLD de 2015 no sentido de que poucas vezes o recurso à história é usado no desenvolvimento de conceitos, apenas 5 abordagens são caracterizadas como Estratégia Didática.

Vejamos alguns exemplos de todas as classes destacadas no material analisado:



4 Zeros da função quadrática

O estudo da função quadrática tem sua origem na resolução da equação do 2º grau. Um problema muito antigo que recai numa equação do 2º grau é este:

"Determinar dois números conhecendo sua soma $s$ e seu produto $p$."

**Você sabia?**
Este problema aparece em registros cuneiformes feitos pelos babilônios há quase 4 mil anos.

Chamando de $x$ um dos números, o outro será $s - x$. Assim,

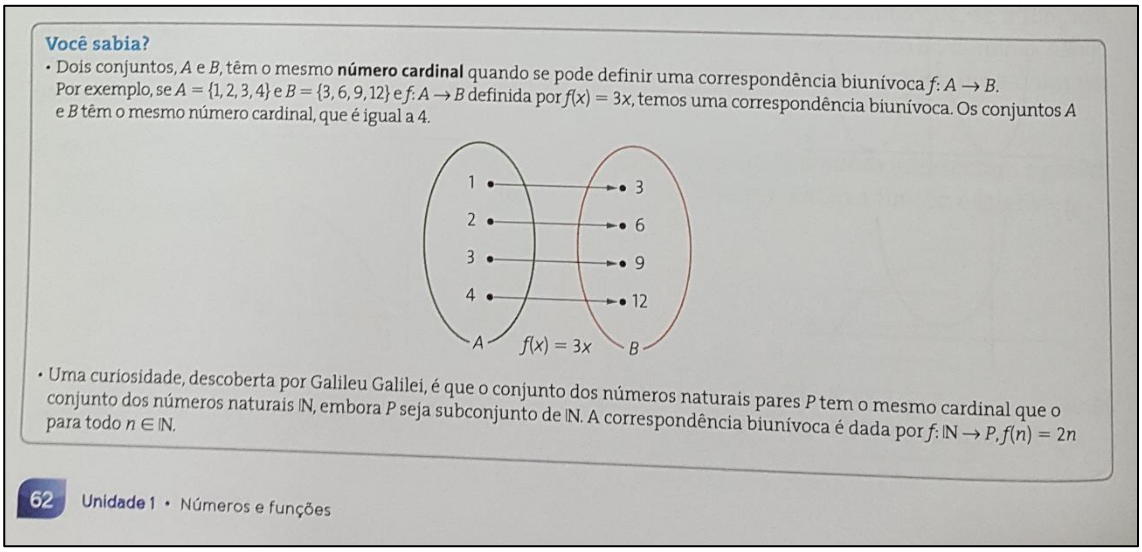
$$p = x(s - x) \text{ ou } p = sx - x^2,$$

ou, ainda:

$$x^2 - sx + p = 0$$

**Figura 7: Abordagem classificada como Estratégia Didática (DANTE, 2013 a, p. 107)**

A abordagem foi classificada como Estratégica Didática pois o estudo dos zeros da função quadrática é iniciado com base em um problema que impulsionou esse estudo no passado, permite que o aluno desenvolva esse conceito e construa o conhecimento com base em um problema histórico.



**Você sabia?**

- Dois conjuntos, $A$ e $B$, têm o mesmo **número cardinal** quando se pode definir uma correspondência biunívoca $f: A \to B$. Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 6, 9, 12\}$ e $f: A \to B$ definida por $f(x) = 3x$, temos uma correspondência biunívoca. Os conjuntos $A$ e $B$ têm o mesmo número cardinal, que é igual a 4.



- Uma curiosidade, descoberta por Galileu Galilei, é que o conjunto dos números naturais pares $P$ tem o mesmo cardinal que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, embora $P$ seja subconjunto de $\mathbb{N}$. A correspondência biunívoca é dada por $f: \mathbb{N} \to P, f(n) = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

62 **Unidade 1** • Números e funções

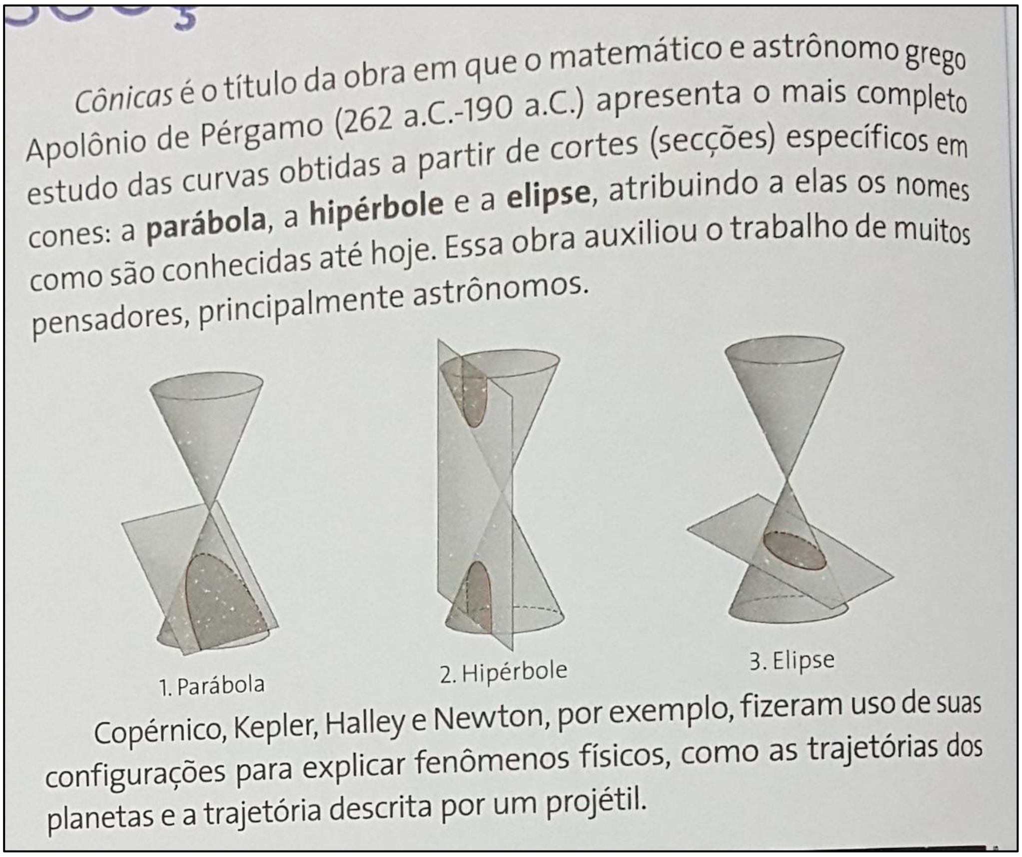
**Figura 8: Abordagem classificada como Flash (DANTE, 2013 a, p. 62)**

A citação de Galileu Galilei é feita sem qualquer destaque para a menção histórica, assim sendo a referência é tratada como Flash.

**46.** (Vunesp-SP) Certos registros históricos babilônicos indicam o uso de uma regra para o cálculo da área do círculo equivalente à fórmula (em notação atual) $A = \frac{C^2}{12}$ em que $C$ representa o comprimento da circunferência correspondente. Determine o valor de $\pi$ oculto nesses registros. 3

**Figura 9: Abordagem classificada como Atividade (DANTE, 2013 b, p. 153)**

Essa abordagem é uma Atividade proposta nos exercícios de encerramento do capítulo sobre Polígonos inscritos e áreas.



*Cônicas* é o título da obra em que o matemático e astrônomo grego Apolônio de Pérgamo (262 a.C.-190 a.C.) apresenta o mais completo estudo das curvas obtidas a partir de cortes (secções) específicos em cones: a **parábola**, a **hipérbole** e a **elipse**, atribuindo a elas os nomes como são conhecidas até hoje. Essa obra auxiliou o trabalho de muitos pensadores, principalmente astrônomos.



Copérnico, Kepler, Halley e Newton, por exemplo, fizeram uso de suas configurações para explicar fenômenos físicos, como as trajetórias dos planetas e a trajetória descrita por um projétil.

**Figura 10: Abordagem classificada como Informação (DANTE, 2013 c, p. 116)**

De forma sucinta, a introdução do conteúdo de geometria analítica no estudo das cônicas é feita com recurso à uma obra histórica e os principais matemáticos que trabalharam no desenvolvimento deste tema, entretanto, na sequência do capítulo essas informações não são resgatadas.

Desde a Antiguidade, época do auge da civilização babilônica, os cálculos relacionados à Astronomia eram muito trabalhosos. Mais adiante, quando a navegação foi intensificada entre diversos povos, os cálculos envolvidos tornaram-se um grande problema.

Até o início do século XVII, multiplicar, dividir, calcular potências e extrair raízes eram tarefas extremamente árduas, realizadas com base nos senos. Surgiram, então, as primeiras tábuas de logaritmos, criadas pelos matemáticos Jost Bürgi (1552-1632) e John Napier (1550-1617).



Reprodução/Arquivo da editora

Jost Bürgi

Science source/Photo researchers/Latinstock

Calculadora antiga criada por John Napier, também conhecido como Neper.

Photoresearchers/Latinstock

John Napier

Apesar de o logaritmo de Napier não ser exatamente como o logaritmo moderno que estudaremos neste capítulo nem ser associado ao conceito de expoente, sua essência é a mesma, e contribuiu para facilitar os cálculos, principalmente, ao transformar as operações de multiplicação em adição e as de divisão em subtração, como veremos adiante.

Atualmente, com o uso das calculadoras eletrônicas, as operações de multiplicar, dividir, calcular potências e extrair raízes não representam mais dificuldade. Mas nem por isso os logaritmos tornaram-se inúteis, pois a possibilidade de definir logaritmos como expoente (mérito do inglês John Wallis, em 1685) e a ideia de base para os logaritmos (apresentada pelo galês William Jones, em 1742) transformaram o logaritmo em um imprescindível instrumento de resolução de equações exponenciais.

Cálculos com logaritmos estão presentes em várias situações reais, como a medida da magnitude dos terremotos, feita por meio da **escala Richter**.

**Você sabia?**
Adotada em 1935, a **escala Richter** foi assim batizada em homenagem ao físico norte-americano Charles F. Richter (1900-1985). Ela não mede os efeitos do terremoto, mas indica sua força em termos de energia liberada, conforme medida por sismógrafos. A escala começa em 1 e não tem limite superior. Como tem base logarítmica, cada aumento da magnitude em um número inteiro representa um aumento de 10 vezes na amplitude do terremoto.

**Figura 11: Abordagem classificada como Informação (DANTE, 2013 a, p. 174)**

A abordagem apresentada na Figura 11 refere-se à introdução do capítulo sobre logaritmos. Além de citar os matemáticos mais importantes para o desenvolvimento do conteúdo, o autor faz uma breve comparação teórica da utilização desse conhecimento atualmente e quais foram suas motivações originais. No entanto, essas informações não são utilizadas no desenvolvimento do conteúdo apresentado na sequência. Destacamos também a informação do quadro “Você sabia? ” que apresenta uma área de aplicação nos logaritmos, mas não se constituiu como informação da História da Matemática.

## 4.3 ANÁLISE COLEÇÃO 3

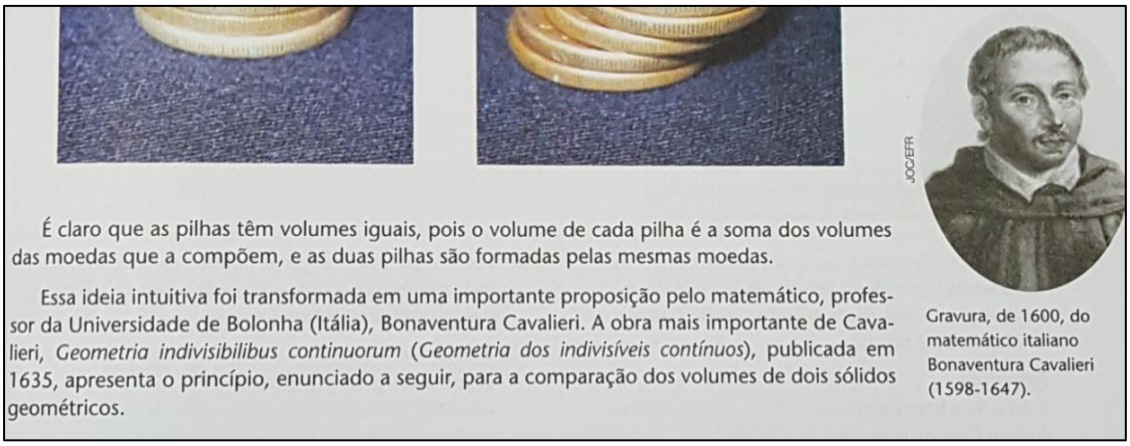
Coleção 3 - *Matemática – Paiva*, de Manoel Rodrigues Paiva, Editora Moderna, 2ª edição, 2013.


**Figura 12: Fonte: Guia do PNLD 2015**

A avaliação da contextualização apresentada no Guia do PNLD de 2015 afirma que:

> Há poucas situações em que se recorre à história da Matemática para compreensão de um determinado conteúdo. Geralmente, ela é usada apenas de modo ilustrativo, com a apresentação de personagens, fatos e datas. (BRASIL, 2015, p. 47).

De acordo com a nossa análise, conforme podemos observar no Quadro 1, essa coleção apresenta quantidade mediana de abordagens, mas chama atenção que mais da metade delas possui caráter apenas informativo. Entretanto, vejamos algumas das referências de todas as classes identificadas na coleção:



É claro que as pilhas têm volumes iguais, pois o volume de cada pilha é a soma dos volumes das moedas que a compõem, e as duas pilhas são formadas pelas mesmas moedas.

Essa ideia intuitiva foi transformada em uma importante proposição pelo matemático, professor da Universidade de Bolonha (Itália), Bonaventura Cavalieri. A obra mais importante de Cavalieri, *Geometria indivisibilibus continuorum* (*Geometria dos indivisíveis contínuos*), publicada em 1635, apresenta o princípio, enunciado a seguir, para a comparação dos volumes de dois sólidos geométricos.

Gravura, de 1600, do matemático italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647).

**Figura 13: Abordagem classificada como Estratégia Didática (PAIVA ,2013 b, p. 239)**

Apesar da apresentação sucinta, a ideia apresentada na explicação do conteúdo foi a ideia transformada em proposição pelo Matemático Cavalieri, assim sendo, a História da Matemática é intrínseca ao conteúdo matemático.

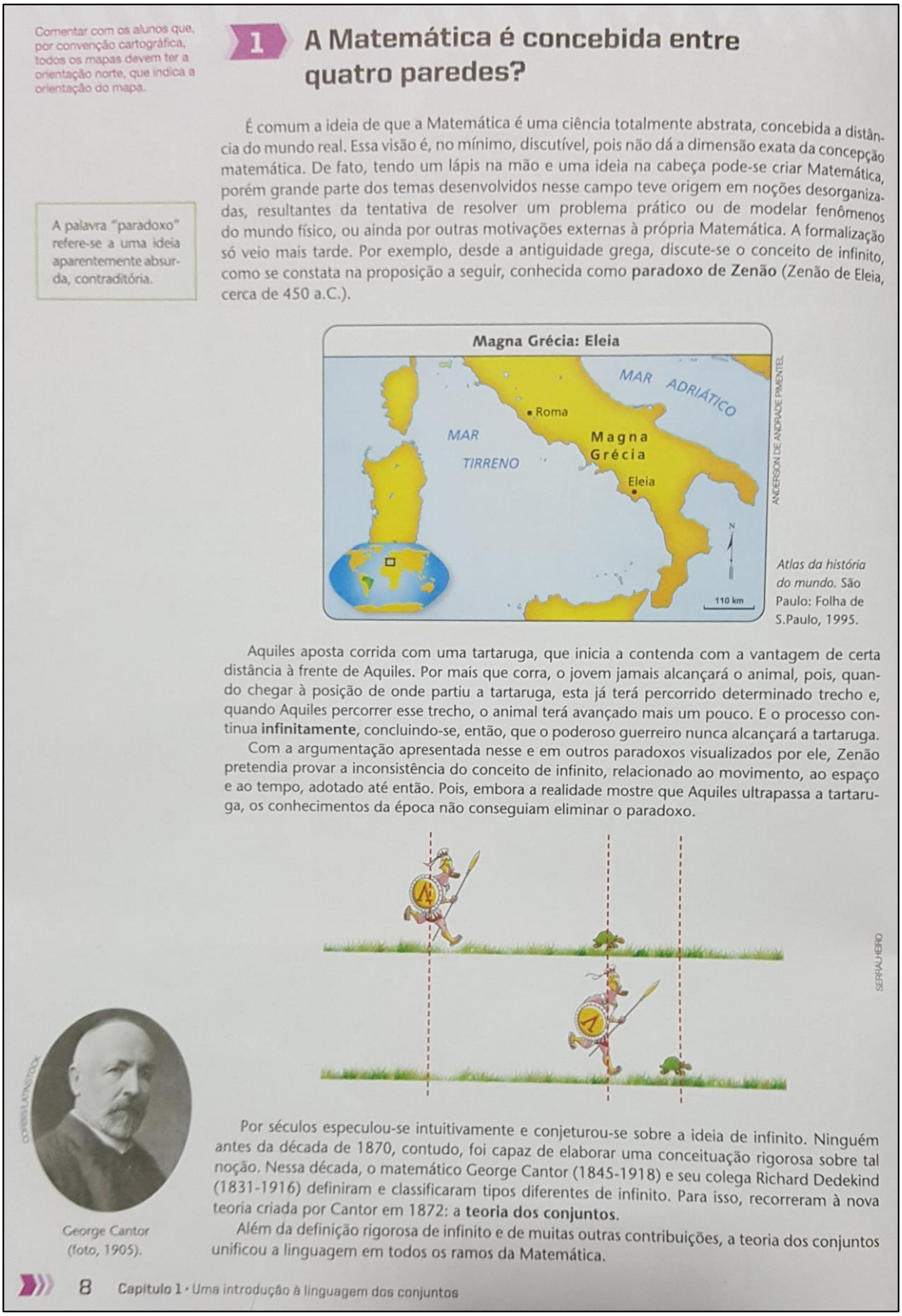
**Da origem das cônicas às suas aplicações atuais**

O mais completo tratado sobre as cônicas foi escrito pelo matemático e astrônomo grego Apolônio de Perga, por volta de 225 a.C., embora elas já tivessem sido estudadas antes dele.

A obra *As cônicas*, de Apolônio, foi duramente criticada por alguns sábios de sua época, que encaravam esse estudo como puro deleite do autor, sem nenhum interesse no mundo real. O tempo se incumbiu de mostrar que esses sábios estavam enganados: por volta de 1605, o astrônomo alemão Johannes Kepler descobriu que os planetas descrevem órbitas **elípticas** em torno do Sol; em 1632, Galileu Galilei descreveu como **parabólica** a trajetória de projéteis lançados obliquamente para cima; em 1662, Robert Boyle descobriu que, sob temperatura constante, a função que expressa a relação entre o volume de uma massa fixa de gás e a pressão exercida sobre ela é **hiperbólica**. Constatamos, ainda, a presença das cônicas em muitas outras situações do mundo real, como na construção de antenas, espelhos e lentes parabólicos ou hiperbólicos; na construção de pontes pênseis; nas trajetórias elípticas, parabólicas ou hiperbólicas de astros celestes; em Economia, no estudo da curva parabólica de possibilidades de produção etc.

**Figura 14: Abordagem classificada como Informação (PAIVA, 2013 c, p. 108)**

O texto apresenta Informações sobre as cônicas, os matemáticos que se destacaram em seus estudos e quais suas definições, entretanto a continuação do conteúdo não recorre a essas informações.



Comentar com os alunos que, por convenção cartográfica, todos os mapas devem ter a orientação norte, que indica a orientação do mapa.

# 1 A Matemática é concebida entre quatro paredes?

É comum a ideia de que a Matemática é uma ciência totalmente abstrata, concebida a distância do mundo real. Essa visão é, no mínimo, discutível, pois não dá a dimensão exata da concepção matemática. De fato, tendo um lápis na mão e uma ideia na cabeça pode-se criar Matemática, porém grande parte dos temas desenvolvidos nesse campo teve origem em noções desorganizadas, resultantes da tentativa de resolver um problema prático ou de modelar fenômenos do mundo físico, ou ainda por outras motivações externas à própria Matemática. A formalização só veio mais tarde. Por exemplo, desde a antiguidade grega, discute-se o conceito de infinito, como se constata na proposição a seguir, conhecida como **paradoxo de Zenão** (Zenão de Eleia, cerca de 450 a.C.).

A palavra "paradoxo" refere-se a uma ideia aparentemente absurda, contraditória.



*Atlas da história do mundo*. São Paulo: Folha de S.Paulo, 1995.

Aquiles aposta corrida com uma tartaruga, que inicia a contenda com a vantagem de certa distância à frente de Aquiles. Por mais que corra, o jovem jamais alcançará o animal, pois, quando chegar à posição de onde partiu a tartaruga, esta já terá percorrido determinado trecho e, quando Aquiles percorrer esse trecho, o animal terá avançado mais um pouco. E o processo continua **infinitamente**, concluindo-se, então, que o poderoso guerreiro nunca alcançará a tartaruga.

Com a argumentação apresentada nesse e em outros paradoxos visualizados por ele, Zenão pretendia provar a inconsistência do conceito de infinito, relacionado ao movimento, ao espaço e ao tempo, adotado até então. Pois, embora a realidade mostre que Aquiles ultrapassa a tartaruga, os conhecimentos da época não conseguiam eliminar o paradoxo.



George Cantor (foto, 1905).

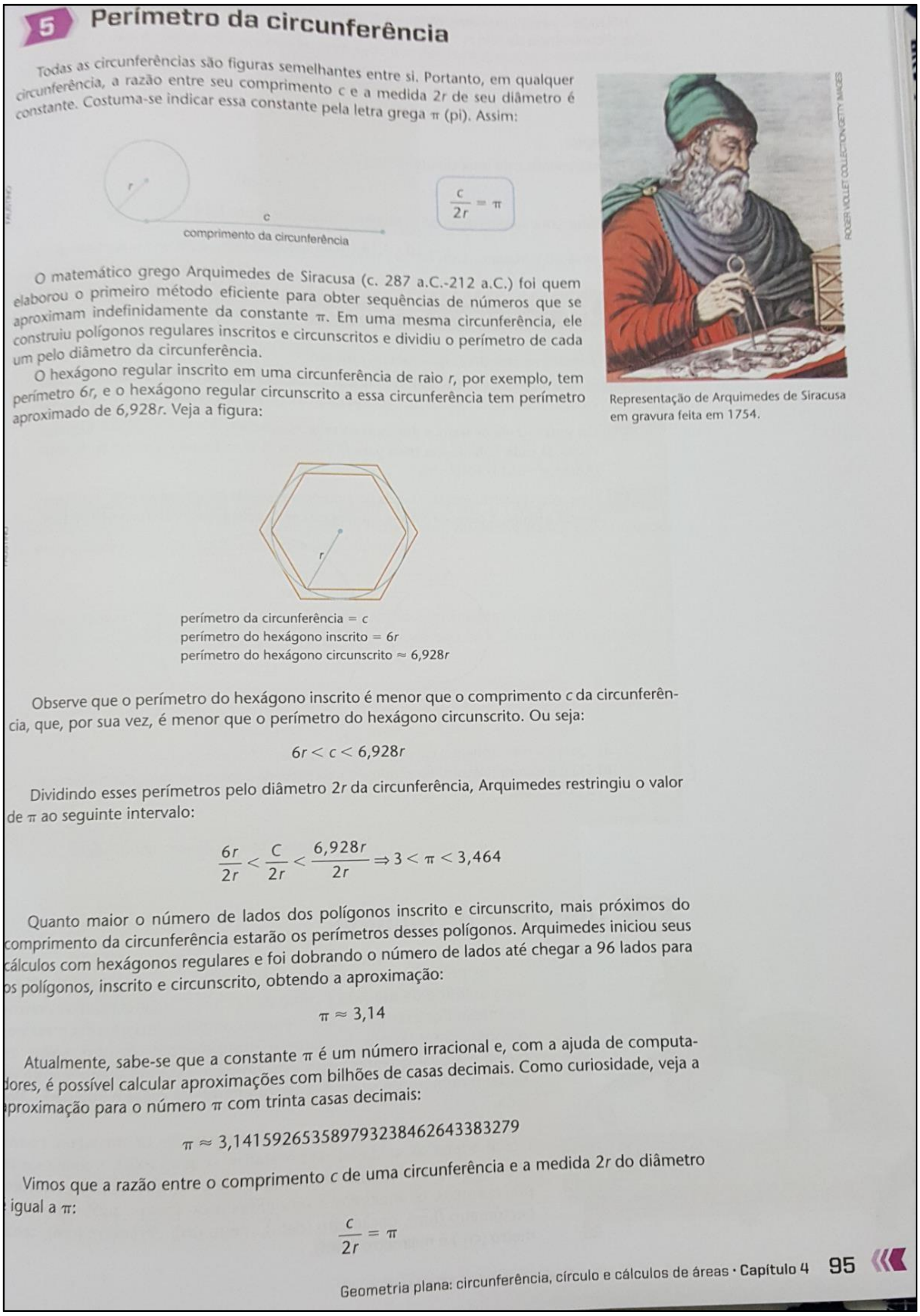
Por séculos especulou-se intuitivamente e conjeturou-se sobre a ideia de infinito. Ninguém antes da década de 1870, contudo, foi capaz de elaborar uma conceituação rigorosa sobre tal noção. Nessa década, o matemático George Cantor (1845-1918) e seu colega Richard Dedekind (1831-1916) definiram e classificaram tipos diferentes de infinito. Para isso, recorreram à nova teoria criada por Cantor em 1872: a **teoria dos conjuntos**.

Além da definição rigorosa de infinito e de muitas outras contribuições, a teoria dos conjuntos unificou a linguagem em todos os ramos da Matemática.

8 Capítulo 1 · Uma introdução à linguagem dos conjuntos

**Figura 15: Abordagem classificada como Informação (PAIVA, 2013 a, p. 8)**

Esse trecho destacado apresenta informações e concepções do próprio desenvolvimento da Matemática e apresenta um exemplo de um conhecimento abstrato que no decorrer da história foi formalizado, um texto rico em Informações.



## 5 Perímetro da circunferência

Todas as circunferências são figuras semelhantes entre si. Portanto, em qualquer circunferência, a razão entre seu comprimento $c$ e a medida $2r$ de seu diâmetro é constante. Costuma-se indicar essa constante pela letra grega $\pi$ (pi). Assim:



$$\frac{c}{2r} = \pi$$

O matemático grego Arquimedes de Siracusa (c. 287 a.C.-212 a.C.) foi quem elaborou o primeiro método eficiente para obter sequências de números que se aproximam indefinidamente da constante $\pi$. Em uma mesma circunferência, ele construiu polígonos regulares inscritos e circunscritos e dividiu o perímetro de cada um pelo diâmetro da circunferência.

O hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio $r$, por exemplo, tem perímetro $6r$, e o hexágono regular circunscrito a essa circunferência tem perímetro aproximado de $6{,}928r$. Veja a figura:

Representação de Arquimedes de Siracusa em gravura feita em 1754.



perímetro da circunferência $= c$
perímetro do hexágono inscrito $= 6r$
perímetro do hexágono circunscrito $\approx 6{,}928r$

Observe que o perímetro do hexágono inscrito é menor que o comprimento $c$ da circunferência, que, por sua vez, é menor que o perímetro do hexágono circunscrito. Ou seja:

$$6r < c < 6{,}928r$$

Dividindo esses perímetros pelo diâmetro $2r$ da circunferência, Arquimedes restringiu o valor de $\pi$ ao seguinte intervalo:

$$\frac{6r}{2r} < \frac{c}{2r} < \frac{6{,}928r}{2r} \Rightarrow 3 < \pi < 3{,}464$$

Quanto maior o número de lados dos polígonos inscrito e circunscrito, mais próximos do comprimento da circunferência estarão os perímetros desses polígonos. Arquimedes iniciou seus cálculos com hexágonos regulares e foi dobrando o número de lados até chegar a 96 lados para os polígonos, inscrito e circunscrito, obtendo a aproximação:

$$\pi \approx 3{,}14$$

Atualmente, sabe-se que a constante $\pi$ é um número irracional e, com a ajuda de computadores, é possível calcular aproximações com bilhões de casas decimais. Como curiosidade, veja a aproximação para o número $\pi$ com trinta casas decimais:

$$\pi \approx 3{,}141592653589793238462643383279$$

Vimos que a razão entre o comprimento $c$ de uma circunferência e a medida $2r$ do diâmetro é igual a $\pi$:

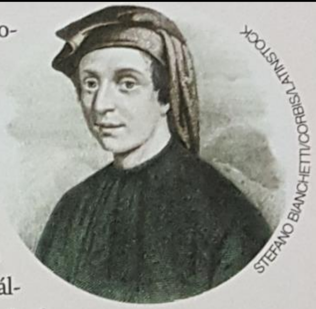
$$\frac{c}{2r} = \pi$$

Geometria plana: circunferência, círculo e cálculos de áreas · Capítulo 4 95

**Figura 16: Abordagem classificada como Estratégia Didática (PAIVA, 2013 a, p. 95)**

O trecho em destaque permite que os estudantes conheçam o método utilizado por Arquimedes para determinação de uma aproximação para o valor constante que hoje conhecemos como número π e consequentemente o comprimento da circunferência. Apesar da linguagem atual e da apresentação resumida, trata-se de utilização da história como Estratégia Didática.

**7** Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, retratado ao lado em 1200, foi um matemático italiano que viveu de 1180 a 1250, aproximadamente. Em 1202, ele propôs em sua obra *Liber abaci* (Livro dos cálculos) o problema a seguir, de grande repercussão por ter aplicações em várias áreas do conhecimento, como Economia, Biologia, Física etc.:




"Admitindo-se que cada casal de coelhos só procrie pela primeira vez aos dois meses, exatamente, após o seu nascimento e que, a partir de então, gere um casal a cada mês, quantos casais haverá ao final de doze meses, partindo-se de um único casal de coelhos recém-nascidos?"

A sequência formada pelo número de coelhos em cada mês ficou conhecida como **sequência de Fibonacci**. Agora, em grupos, resolvam os itens abaixo.

**a)** Representem os doze primeiros termos da sequência de Fibonacci. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

**b)** Considerando infinita a sequência de Fibonacci, deem sua lei de formação.

(*Curiosidade*: Na sequência $(a_n)$ de Fibonacci, a razão $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tende ao número 1,61803..., quando $n$ aumenta indefinidamente. Esse número é conhecido como número de ouro.)

**Figura 17: Abordagem classificada como Atividade (PAIVA, 2013 a, p. 257)**

Atividade sobre a sequência de Fibonacci, problema histórico abordado até os dias de hoje.

## 4.4 ANÁLISE DA COLEÇÃO 4

*Matemática Ciência e Aplicações,* de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Mauro Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze Silveira de Almeida, Editora Saraiva, 7ª edição, 2013.

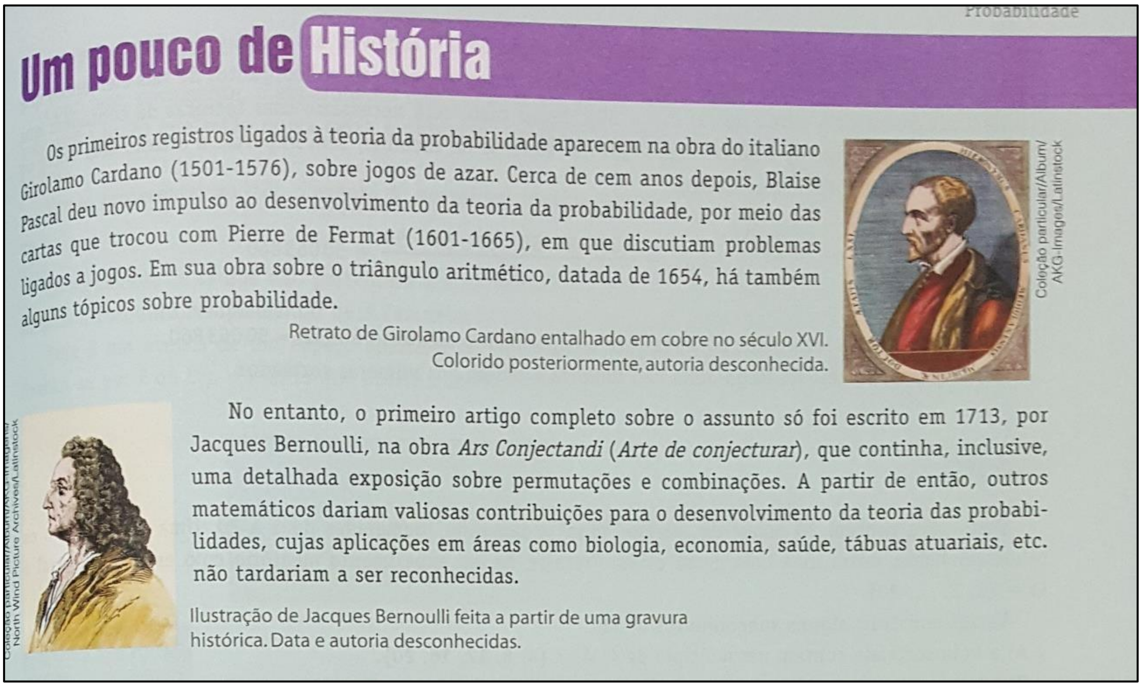

**Figura 18: Fonte: Guia do PNLD 2015**

Para essa coleção, a avaliação de contextualização do Guia do PNLD de 2015 não faz referência ao caráter das abordagens de História da Matemática, se restringe ao seguinte:

> Nos três volumes da coleção, as apresentações dos conteúdos matemáticos estão bem contextualizadas nas relações estabelecidas com a história da própria Matemática, com outras áreas do conhecimento ou com as práticas sociais. (BRASIL, 2015, p. 54).

A quantidade de abordagens presentes nessa coleção foi considerada média, entretanto, conforme podemos observar no Quadro 1, mais da metade das abordagens foi classificada como Estratégia Didática, ou seja, em uma análise qualitativa essa coleção apresenta maior potencialidade pedagógica para o ensino de Matemática com recurso da História da Matemática.

Vejamos exemplos de abordagens de todas as categorias destacadas nessa coleção:



Probabilidade

Um pouco de História

Os primeiros registros ligados à teoria da probabilidade aparecem na obra do italiano Girolamo Cardano (1501-1576), sobre jogos de azar. Cerca de cem anos depois, Blaise Pascal deu novo impulso ao desenvolvimento da teoria da probabilidade, por meio das cartas que trocou com Pierre de Fermat (1601-1665), em que discutiam problemas ligados a jogos. Em sua obra sobre o triângulo aritmético, datada de 1654, há também alguns tópicos sobre probabilidade.

Retrato de Girolamo Cardano entalhado em cobre no século XVI. Colorido posteriormente, autoria desconhecida.

Coleção particular/Album/AKG-Images/Latinstock

No entanto, o primeiro artigo completo sobre o assunto só foi escrito em 1713, por Jacques Bernoulli, na obra *Ars Conjectandi* (*Arte de conjecturar*), que continha, inclusive, uma detalhada exposição sobre permutações e combinações. A partir de então, outros matemáticos dariam valiosas contribuições para o desenvolvimento da teoria das probabilidades, cujas aplicações em áreas como biologia, economia, saúde, tábuas atuariais, etc. não tardariam a ser reconhecidas.

Ilustração de Jacques Bernoulli feita a partir de uma gravura histórica. Data e autoria desconhecidas.

Coleção particular/Album/AKG-Images/ North Wind Picture Archives/Latinstock

**Figura 19: Abordagem classificada como Informação (IEZZI; et al, 2013 b, p. 285)**

O texto se limita a descrever a origem dos estudos de probabilidades e os matemáticos que se destacaram em seu estudo, assim a classificação foi de Informação.

# Um pouco de História

## A invenção dos logaritmos

Credita-se ao escocês John Napier (1550-1617) a descoberta dos logaritmos, embora outros matemáticos da época, como o suíço Jobst Bürgi (1552-1632) e o inglês Henry Briggs (1561-1630), também tenham dado importantes contribuições.

A invenção dos logaritmos causou grande impacto nos meios científicos da época, pois eles representavam um poderoso instrumento de cálculo numérico que impulsionaria o desenvolvimento do comércio, da navegação e da Astronomia. Até então, multiplicações e divisões com números muito grandes eram feitas com auxílio de relações trigonométricas.

Basicamente, a ideia de Napier foi associar os termos da sequência ($b$; $b^2$; $b^3$; $b^4$; $b^5$; ...; $b^n$) aos termos de outra sequência (1, 2, 3, 4, 5, ..., n), de forma que o produto de dois termos quaisquer da primeira sequência ($b^x \cdot b^y = b^{x+y}$) estivesse associado à soma $x + y$ dos termos da segunda sequência.


Album/Akg Images/Latinstock

Frontispício da obra de Napier sobre logaritmos datada de 1614.

Veja um exemplo:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 2 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 | 2048 | 4096 | 8192 | 16394 | 32788 |

Para fazer $512 \cdot 64$ note que:

- o termo 512 de (2) corresponde ao termo 9 de (1);
- o termo 64 de (2) corresponde ao termo 6 de (1);
- assim, a multiplicação $512 \cdot 64$ corresponde à soma de $9 + 6 = 15$ em (1), cujo correspondente em (2) é 32788, que é o resultado procurado.

Em linguagem atual os elementos da 1ª linha da tabela correspondem ao logaritmo em base 2 dos respectivos elementos da 2ª linha da tabela.

Em seu trabalho *Descrição da maravilhosa regra dos logaritmos,* datado de 1614, Napier considerou uma outra sequência de modo que seus termos eram muito próximos uns dos outros.

Ao ter contato com essa obra, Briggs sugeriu a Napier uma pequena mudança: uso de potências de 10. Era o surgimento dos logaritmos decimais, como conhecemos até hoje.

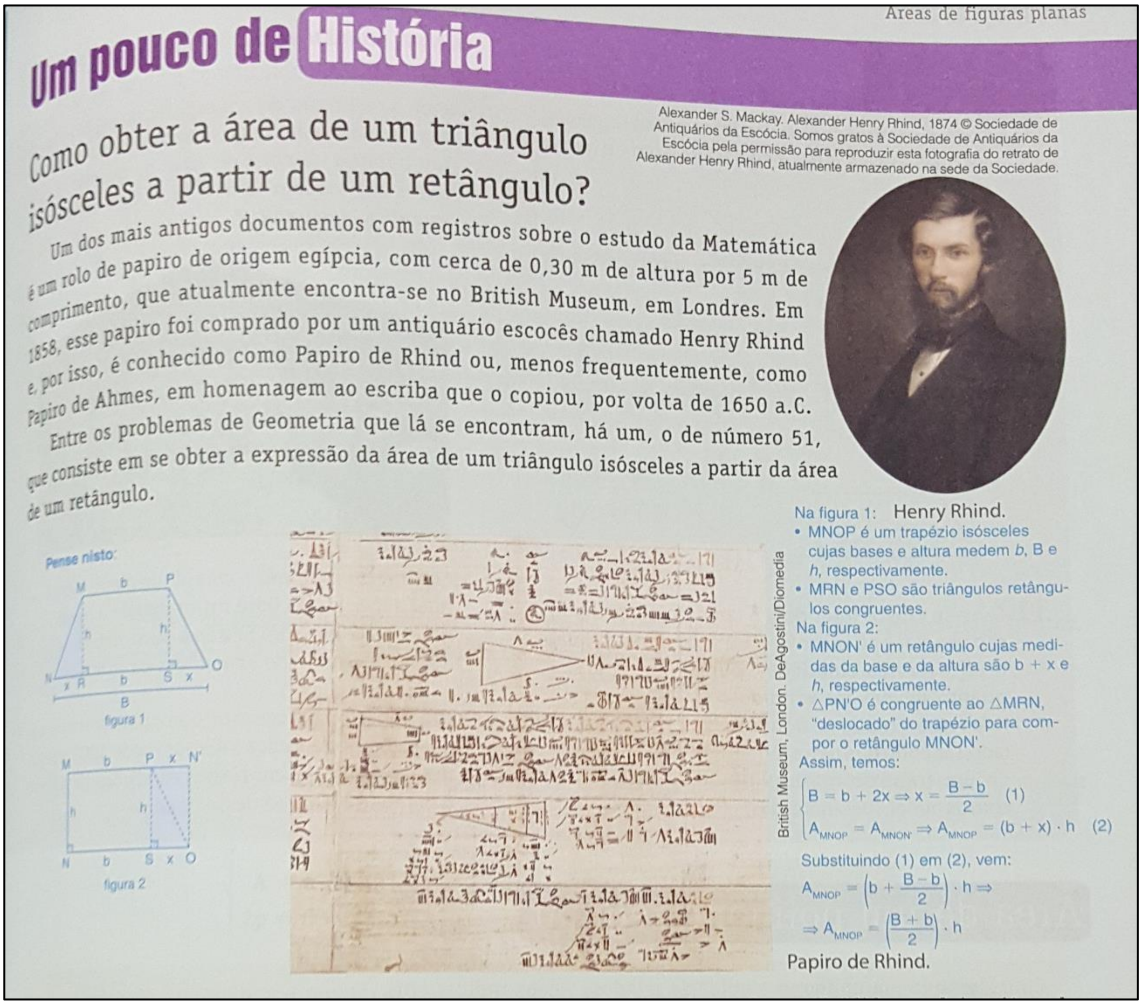
Durante um bom tempo os logaritmos prestaram-se à finalidade para a qual foram inventados: facilitar cálculos envolvendo números muito grandes (veja observação na página 167). Com o desenvolvimento tecnológico e o surgimento de calculadoras eletrônicas, computadores, etc., essa finalidade perdeu a importância.

No entanto, a função logarítmica (que estudaremos neste capítulo) e a sua inversa, a função exponencial, podem representar diversos fenômenos físicos, biológicos e econômicos (alguns exemplos serão aqui apresentados) e, deste modo, jamais perderão sua importância.

Referências bibliográficas:
- Boyer, Carl B. *História da Matemática.* 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1995.
- http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/historia/hist_log.htm (Acesso em: abr. 2013)
- http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm44/historia.htm (Acesso em: abr. 2013)

**Figura 20: Abordagem classificada como Estratégia Didática (IEZZI, et al, 2013 a, p. 164 )**

Além de ser rico em informações o texto permite que os alunos refaçam os cálculos com as tábuas de logaritmos, principal função na época de sua origem, assim a classificação é como Estratégia Didática.



Áreas de figuras planas

# Um pouco de História

## Como obter a área de um triângulo isósceles a partir de um retângulo?

Alexander S. Mackay. Alexander Henry Rhind, 1874 © Sociedade de Antiquários da Escócia. Somos gratos à Sociedade de Antiquários da Escócia pela permissão para reproduzir esta fotografia do retrato de Alexander Henry Rhind, atualmente armazenado na sede da Sociedade.

Um dos mais antigos documentos com registros sobre o estudo da Matemática é um rolo de papiro de origem egípcia, com cerca de 0,30 m de altura por 5 m de comprimento, que atualmente encontra-se no British Museum, em Londres. Em 1858, esse papiro foi comprado por um antiquário escocês chamado Henry Rhind e, por isso, é conhecido como Papiro de Rhind ou, menos frequentemente, como Papiro de Ahmes, em homenagem ao escriba que o copiou, por volta de 1650 a.C.

Entre os problemas de Geometria que lá se encontram, há um, o de número 51, que consiste em se obter a expressão da área de um triângulo isósceles a partir da área de um retângulo.



Henry Rhind.

British Museum, London. DeAgostini/Diomedia

Na figura 1:
- MNOP é um trapézio isósceles cujas bases e altura medem *b*, B e *h*, respectivamente.
- MRN e PSO são triângulos retângulos congruentes.

Na figura 2:
- MNON' é um retângulo cujas medidas da base e da altura são b + x e *h*, respectivamente.
- △PN'O é congruente ao △MRN, "deslocado" do trapézio para compor o retângulo MNON'.

Assim, temos:

$$\begin{cases} B = b + 2x \Rightarrow x = \dfrac{B-b}{2} & (1) \\ A_{MNOP} = A_{MNON'} \Rightarrow A_{MNOP} = (b+x)\cdot h & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), vem:

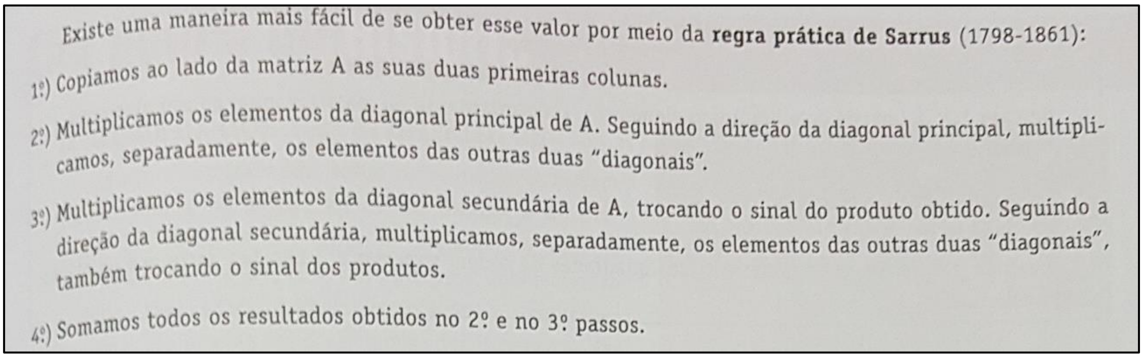
$$A_{MNOP} = \left(b + \frac{B-b}{2}\right)\cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{MNOP} = \left(\frac{B+b}{2}\right)\cdot h$$

Papiro de Rhind.

**Figura 21: Abordagem classificada como Estratégia Didática (IEZZI, et al, 2013 b, p. 149)**

O material apresenta informações disponíveis no Papiro Rhind, um documento histórico muito relevante com um problema onde é possível obter a expressão da área de um triângulo isósceles a partir de um retângulo. Ou seja, a história é usada no desenvolvimento do conhecimento dos estudantes, assim classificamos como Estratégia Didática.



Existe uma maneira mais fácil de se obter esse valor por meio da **regra prática de Sarrus** (1798-1861):

1º) Copiamos ao lado da matriz A as suas duas primeiras colunas.

2º) Multiplicamos os elementos da diagonal principal de A. Seguindo a direção da diagonal principal, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas "diagonais".

3º) Multiplicamos os elementos da diagonal secundária de A, trocando o sinal do produto obtido. Seguindo a direção da diagonal secundária, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas "diagonais", também trocando o sinal dos produtos.

4º) Somamos todos os resultados obtidos no 2º e no 3º passos.

**Figura 22: Abordagem classificada como Flash (IEZZI, et al, 2013 b, p. 125)**

Essa abordagem, apesar de apresentar referência cronológica a regra de Sarrus, não faz qualquer menção histórica sobre seu desenvolvimento.

## 4.5 ANÁLISE DA COLEÇÃO 5

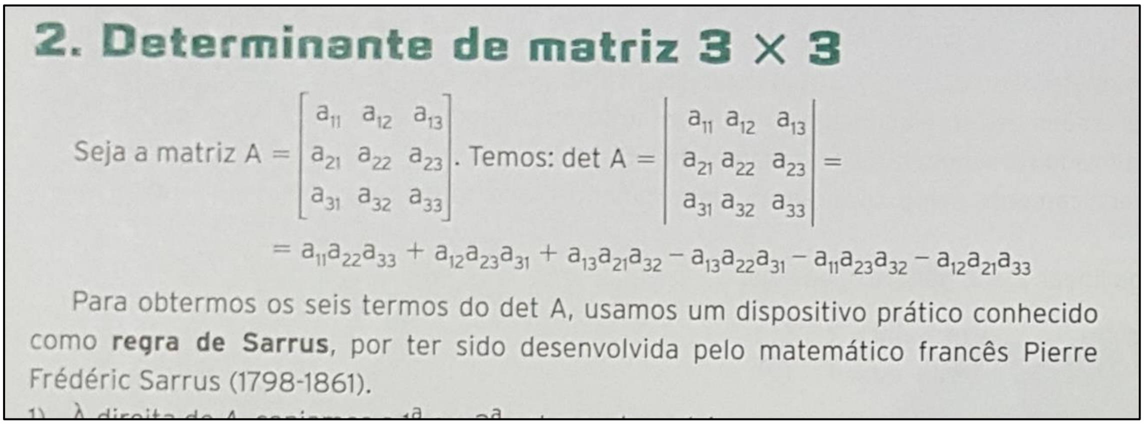
*Matemática – Ensino Médio*, de Kátia Cristina Stocco Smole e Maria Ignes de Souza Vieira Diniz, Editora Saraiva, 8ª edição, 2013.


**Figura 23: Fonte: Guia do PNLD 2015**

Dentre todas as coleções, consideramos que essa foi a contextualização do Guia do PNLD de 2015 que apresenta dados insuficientes quanto à presença de História da Matemática. A avaliação (BRASIL, 2015, p. 63) considera que "embora haja menção a fatos importantes da evolução da Matemática, não há orientações suficientes sobre seu uso como recurso pedagógico que propicie a construção do conhecimento pelo aluno".

Corroborando com essa qualificação e conforme pode ser observado no Quadro 1, identificamos apenas uma abordagem que caracteriza estratégia didática, embora as demais abordagens, maioria classificada como informações, apresentamse com bastante conteúdo e não somente dados biográficos extremamente resumidos.

Abaixo algumas das abordagens das classes destacadas nessa coleção:



## 2. Determinante de matriz 3 × 3

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Temos: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Para obtermos os seis termos do det A, usamos um dispositivo prático conhecido como **regra de Sarrus**, por ter sido desenvolvida pelo matemático francês Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861).

**Figura 24: Abordagem classificada como Flash (SMOLE; DINIZ, 2013 b, p. 272)**

A abordagem destacada na Figura 24, apesar de apresentar informação cronológica sobre o criador da regra de Sarrus, não faz qualquer menção histórica ao seu desenvolvimento ou contexto.

UNIDADE 1

# Trigonometria: arcos de circunferência e círculo trigonométrico

O texto permite explorar integração com História e Física (Astronomia). Os alunos podem realizar a leitura em duplas, fazer uma lista das aplicações da Trigonometria e pesquisar temas que envolvem cálculo de distâncias inacessíveis. O *site* da Nasa, indicado na página 12, pode auxiliar na pesquisa.

Nesta obra, optamos por desenvolver a Trigonometria nos três volumes para:
- permitir que o aluno se aproprie progressivamente dos conceitos do tema;
- favorecer as relações com funções, Geometria e números complexos;
- fazer revisões constantes sobre o tema.

A percepção da Matemática, especificamente da Trigonometria, como construção humana originada por problemas próximos das necessidades do dia a dia e depois aplicada em várias ciências permite ao aluno se identificar como parte desse processo de construção de uma ciência.

## 1. Trigonometria e Astronomia: uma só história

*"O universo é escrito em linguagem matemática."*

Galileu

Para conhecer a função do texto dirigido ao aluno, leia o **Manual do professor**, páginas 338 e 339.

A humanidade sempre foi movida pela curiosidade e pelo desejo de desvendar o desconhecido. No passado, a busca por riquezas que pudessem existir no outro lado do oceano impulsionou os europeus a empreenderem as Grandes Navegações; mais recentemente, o desejo de conquistar o espaço motivou a corrida à Lua. Hoje a humanidade vai além e utiliza cálculos e aparelhos sofisticados para desbravar outras galáxias e elementos cósmicos, como buracos negros e estrelas supermassivas.

Tony Hallas/Science Faction/Corbis/Latinstock

Parte da Via Láctea, a estrela Sirius (no canto superior direito) e a estrela Eta Carinae (nebulosa vermelha no canto inferior esquerdo) vistas de uma das ilhas da Flórida (EUA).

Conheça a seção **Para ler** no **Manual do professor**, página 347.

A Trigonometria, entre todas as áreas da Matemática que contribuem para o conhecimento científico, certamente é de fundamental importância para a Astronomia, o estudo do Universo. Essas duas áreas de conhecimento praticamente "nasceram" juntas. Registros e pesquisas arqueológicas indicam que já por volta de 4000 a.C., na região da Mesopotâmia, o céu era cuidadosamente observado para que se pudesse entender o movimento de objetos celestes visíveis a olho nu. Paralelamente às observações, as estimativas de distâncias, tamanhos e posições já eram pensadas a partir dos triângulos, e os planetas conhecidos na época eram representados em círculos fracionados em partes iguais, usando a base 60.

**PARA LER**

Nossa sugestão é que, ao longo deste ano, você leia *O jeito matemático de pensar*, de Renato J. Costa Valladares (Ed. Ciência Moderna). Nesse livro, o autor procura mostrar, em cada capítulo, o quanto esta ciência faz parte da nossa vida e está presente até mesmo em situações não matemáticas. Comece lendo os dois primeiros capítulos.

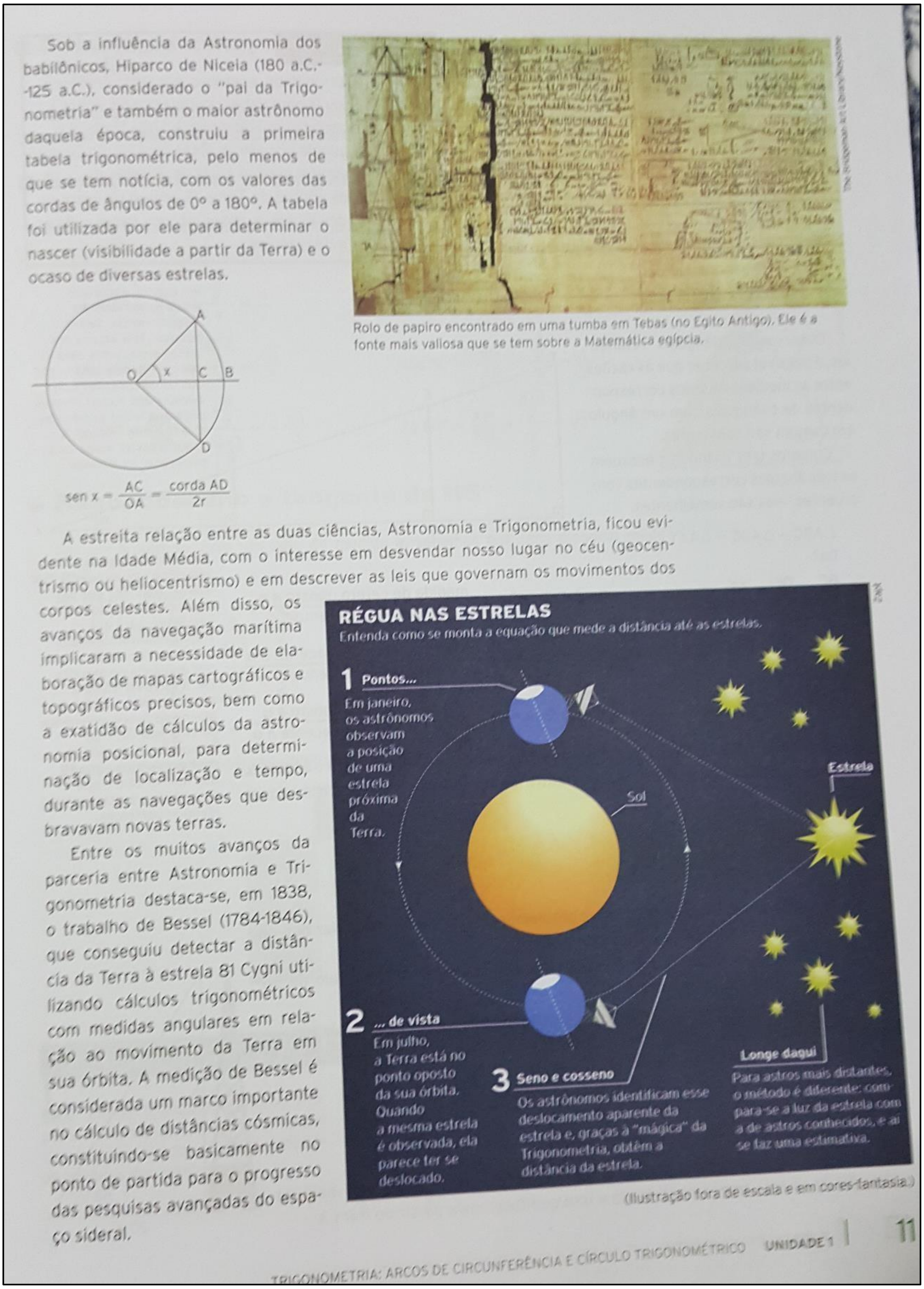
Em especial, os sacerdotes astrônomos da Babilônia conseguiram construir um conhecimento bastante acurado dos planetas, prevendo a posição deles com muita precisão, se compararmos aos dados obtidos com toda a tecnologia da atualidade. Os métodos babilônicos, principalmente para estabelecer o calendário ritualístico e agrícola e fazer previsões de natureza mística, estiveram em uso até os primeiros séculos da nossa era.

Scott Camazine/Alamy/Other Images

Imagem da galáxia espiral M81: a imagem combina dados dos telescópios Hubble e Spitzer e das missões do satélite Galaxy Evolution Explorer (GALEX).

10 | PARTE 1 TRIGONOMETRIA

**Figura 25: Abordagem classificada como Informação (SMOLE; DINIZ, 2013 b, p. 10)**


Sob a influência da Astronomia dos babilônicos, Hiparco de Niceia (180 a.C.-125 a.C.), considerado o "pai da Trigonometria" e também o maior astrônomo daquela época, construiu a primeira tabela trigonométrica, pelo menos de que se tem notícia, com os valores das cordas de ângulos de 0° a 180°. A tabela foi utilizada por ele para determinar o nascer (visibilidade a partir da Terra) e o ocaso de diversas estrelas.

Rolo de papiro encontrado em uma tumba em Tebas (no Egito Antigo). Ele é a fonte mais valiosa que se tem sobre a Matemática egípcia.

$$\text{sen } x = \frac{AC}{OA} = \frac{\text{corda } AD}{2r}$$

A estreita relação entre as duas ciências, Astronomia e Trigonometria, ficou evidente na Idade Média, com o interesse em desvendar nosso lugar no céu (geocentrismo ou heliocentrismo) e em descrever as leis que governam os movimentos dos corpos celestes. Além disso, os avanços da navegação marítima implicaram a necessidade de elaboração de mapas cartográficos e topográficos precisos, bem como a exatidão de cálculos da astronomia posicional, para determinação de localização e tempo, durante as navegações que desbravavam novas terras.

Entre os muitos avanços da parceria entre Astronomia e Trigonometria destaca-se, em 1838, o trabalho de Bessel (1784-1846), que conseguiu detectar a distância da Terra à estrela 81 Cygni utilizando cálculos trigonométricos com medidas angulares em relação ao movimento da Terra em sua órbita. A medição de Bessel é considerada um marco importante no cálculo de distâncias cósmicas, constituindo-se basicamente no ponto de partida para o progresso das pesquisas avançadas do espaço sideral.

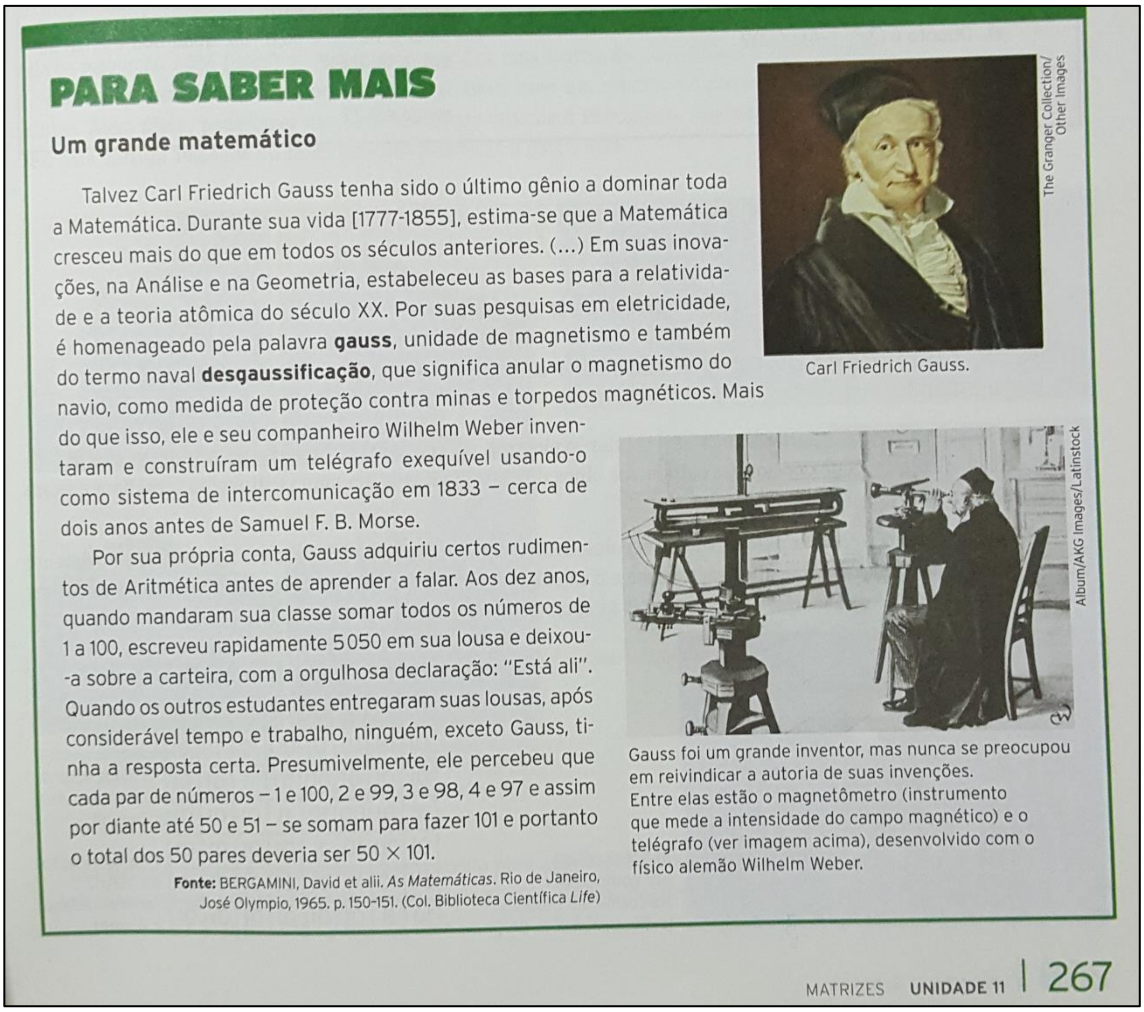


(Ilustração fora de escala e em cores-fantasia.)

TRIGONOMETRIA: ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO UNIDADE 1 11

**Figura 26: Continuação da figura 25 - Abordagem classificada como Informação (SMOLE; DINIZ, 2013 b, p. 11)**

O texto destacado nas figuras acima apresenta Informações sobre o surgimento e o desenvolvimento da trigonometria, trata-se de um texto informativo na forma de apêndice do capitulo. Em complemento, o texto traz ainda uma indicação de leitura (quadro Para Ler), o livro indicado é O Jeito Matemático de pensar de Renato J. Costa Valladares.



## PARA SABER MAIS

### Um grande matemático

Talvez Carl Friedrich Gauss tenha sido o último gênio a dominar toda a Matemática. Durante sua vida [1777-1855], estima-se que a Matemática cresceu mais do que em todos os séculos anteriores. (...) Em suas inovações, na Análise e na Geometria, estabeleceu as bases para a relatividade e a teoria atômica do século XX. Por suas pesquisas em eletricidade, é homenageado pela palavra **gauss**, unidade de magnetismo e também do termo naval **desgaussificação**, que significa anular o magnetismo do navio, como medida de proteção contra minas e torpedos magnéticos. Mais do que isso, ele e seu companheiro Wilhelm Weber inventaram e construíram um telégrafo exequível usando-o como sistema de intercomunicação em 1833 – cerca de dois anos antes de Samuel F. B. Morse.

Por sua própria conta, Gauss adquiriu certos rudimentos de Aritmética antes de aprender a falar. Aos dez anos, quando mandaram sua classe somar todos os números de 1 a 100, escreveu rapidamente 5050 em sua lousa e deixou-a sobre a carteira, com a orgulhosa declaração: "Está ali". Quando os outros estudantes entregaram suas lousas, após considerável tempo e trabalho, ninguém, exceto Gauss, tinha a resposta certa. Presumivelmente, ele percebeu que cada par de números – 1 e 100, 2 e 99, 3 e 98, 4 e 97 e assim por diante até 50 e 51 – se somam para fazer 101 e portanto o total dos 50 pares deveria ser $50 \times 101$.

**Fonte:** BERGAMINI, David et alii. *As Matemáticas*. Rio de Janeiro, José Olympio, 1965. p. 150-151. (Col. Biblioteca Científica *Life*)

The Granger Collection/Other Images

Carl Friedrich Gauss.

Album/AKG Images/Latinstock

Gauss foi um grande inventor, mas nunca se preocupou em reivindicar a autoria de suas invenções. Entre elas estão o magnetômetro (instrumento que mede a intensidade do campo magnético) e o telégrafo (ver imagem acima), desenvolvido com o físico alemão Wilhelm Weber.

MATRIZES UNIDADE 11 | 267

**Figura 27: Abordagem classificada como Informação (SMOLE; DINIZ, 2013 b, p. 267)**

O texto apresenta Informações biográficas a respeito do matemático Gauss e suas contribuições.

## 4.6 ANÁLISE DOS CONTEÚDOS

Outro viés alcançado nas análises é o dos conteúdos abrangidos nas abordagens. Distribui-se as abordagens no Quadro 2 por conteúdo ou temas identificados. Para termos uma dimensão mais apropriada dessa distribuição, identificamos em cada conteúdo/tema, a categoria identificada no livro didático. Sendo *i* para Informação, *e* para Estratégia Didática, *f* para Flash e *a* para Atividades.

Quadro 2: Distribuição dos conteúdos abordados em cada coleção

| CONTEÚDO | COLEÇÃO 1 | COLEÇÃO 2 | COLEÇÃO 3 | COLEÇÃO 4 | COLEÇÃO 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Número de ouro | a | i; i; a | | e | |
| Representação decimal dos racionais | | i | | | |
| Número irracionais – raiz de 2 | | f; i | e | | |
| Conjuntos numéricos | | i; f | | i | |
| Diagrama de Venn | | i | i | i | |
| Funções – Geral | | i | | i | |
| Descartes | | i | i | | |
| Função modular | i | i | | | |
| Função 2º grau | | f; e | | | |
| Função logarítmica e logaritmo | e | i; i | e | e | |
| Paradoxo de Zenão | | e; a | i | | |
| Sequência de Fibonacci | | e | a | e | |
| Propriedade da PA – Gauss | e | e | e | e | |
| Malthus | i | i | | | |
| Trigonometria no triangulo retângulo | e | i | i | | |
| Semelhança de triângulos | | e | | | |
| Relações métricas no triangulo – Pitágoras | f | f | | | |
| Cartografia | | i; a | | | |
| Trigonometria | | i | | e | i |
| Funções trigonométricas | | i | | | i |
| Matrizes e determinantes | i; f | i; i | i; i; f | i; f; i; i | e; i, f |
| Sistemas lineares | | i | | i | f |
| Cumprimento da circunferência | e | i; a | e | | |
| Tangram | | a | | | |
| Euler e o número *e* | f | f | f | i | |
| Princípio de Cavalieri | | i | e | i | i |
| Platão e poliedros | | i | | | |
| Geometria – Geral | | i; i | i; e; e | e; i; f | i; a; i |
| Triângulo de Pascal | | i; i | | | |
| Binômio de Newton | | i | i | | |
| Probabilidade | | i | | i | |
| Geometria analítica: ponto e reta | | i | i | i | i |
| Geometria analítica: cônicas | i | i | i | i | |
| Kepler e a elipse | | e | | i | |
| Números complexos | i; i | i; i | i | e | i |
| Números complexos - | i | i | f | | i |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Representação geométrica | | | | | |
| Números complexos – forma trigonométrica | | f | | | |
| Equações algébricas e polinômios | | i; i | f; i; i | i | f; f |
| Princípio Dirichlet | i | | | | |
| Fractais | | | a | e | |
| Matemática financeira | | | i | | i |
| Tales | | | i | | |
| Teorema D'Alembert | | | i | | |
| Relações de Girard | | | i | | |
| Programação linear | | | | | i |
| Gauss | | | | | i |
| Bernoulli | | | | | i |
| Geometrias não-euclidiana | | | | | i |

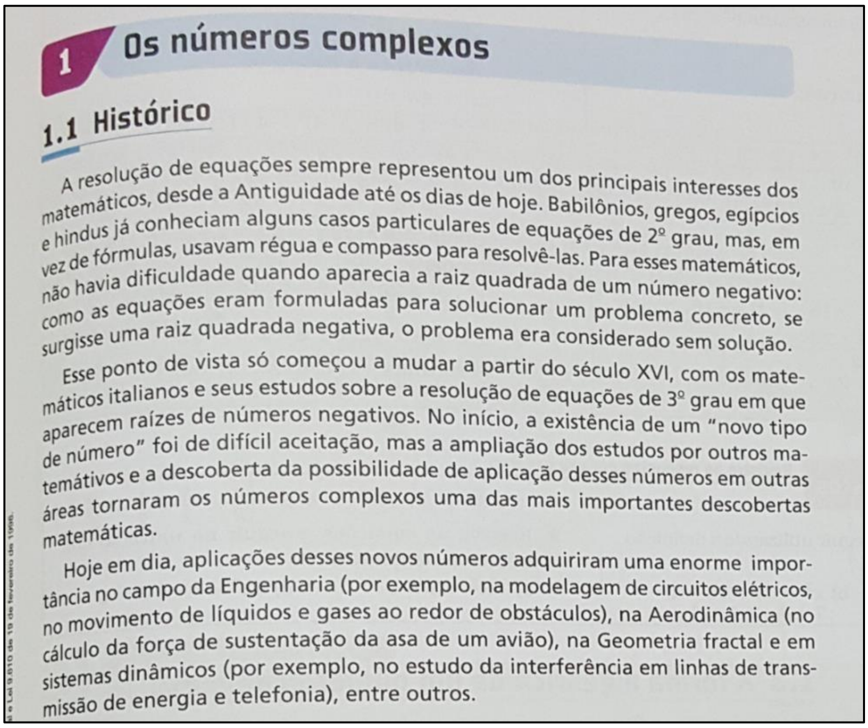
Conforme pode-se verificar na Quadro 2, algumas abordagens distintas se sobrepõem ao mesmo conteúdo/tema dentro de cada coleção. Por exemplo, para o tema Número de Ouro, a coleção 2 apresenta duas abordagens de Informação e uma Atividade. O mesmo ocorre para Matrizes e Determinantes em todas as coleções e em outros diversos conteúdos por diversas coleções.

Entretanto, em uma visão mais ampla, verifica-se sobreposições de vários conteúdos e temas dentre as coleções. De todos os 48 conteúdos/temas identificados como tendo alguma abordagem da História da Matemática, 32 deles estão presentes em pelo menos duas coleções.

Há ainda conteúdos que estão presentes em todas as coleções ou pelo menos quatro delas, ou seja, em pelo menos 80% do material analisado. São eles: função logarítmica e logaritmo, propriedade de progressão aritmética - Gauss, matrizes e determinantes (presente em todas as coleções), Euler e o número *e*, princípio de Cavalieri, geometria em geral, geometria analítica – ponto e reta e as cônicas, números complexos (presente em todas as coleções) e sua representação geométrica, equações algébricas e polinômios.

Vejamos as diferentes abordagens para Números Complexos que possuem indicações históricas em todas as coleções. Entendemos que este conteúdo, de fato, deve estar nutrido pela História da Matemática, pois desde a Antiguidade os resultados com raízes negativas na resolução de equações do 2º grau eram dispensados e/ou ignorados. No entanto, no século XVI com o desenvolvimento das equações algébricas, o “problema” das raízes negativas precisou ser enfrentado e o conjunto do trabalho dos matemáticos Girolamo Cardano (1501 - 1576) e Rafael Bombelli (1526 – 1572) propiciou o desenvolvimento e construção deste conteúdo que continuou a ser objeto de estudo e evolução no século XVIII com os trabalhos de Leonhard Euler (1707 – 1783) que introduziu a notação de i como sendo a raiz quadrada de -1 e Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) e J. E. Argand (1768 – 1822) cujos estudos permitiram avanços na aplicabilidade dos números complexos. No século XIX o matemático William R. Hamilton (1805 – 1866) desenvolveu uma teoria aritmética para operar com os números complexos.

Vejamos o que os livros didáticos trazem referente ao desenvolvimento histórico dos números complexos:



1 Os números complexos

1.1 Histórico

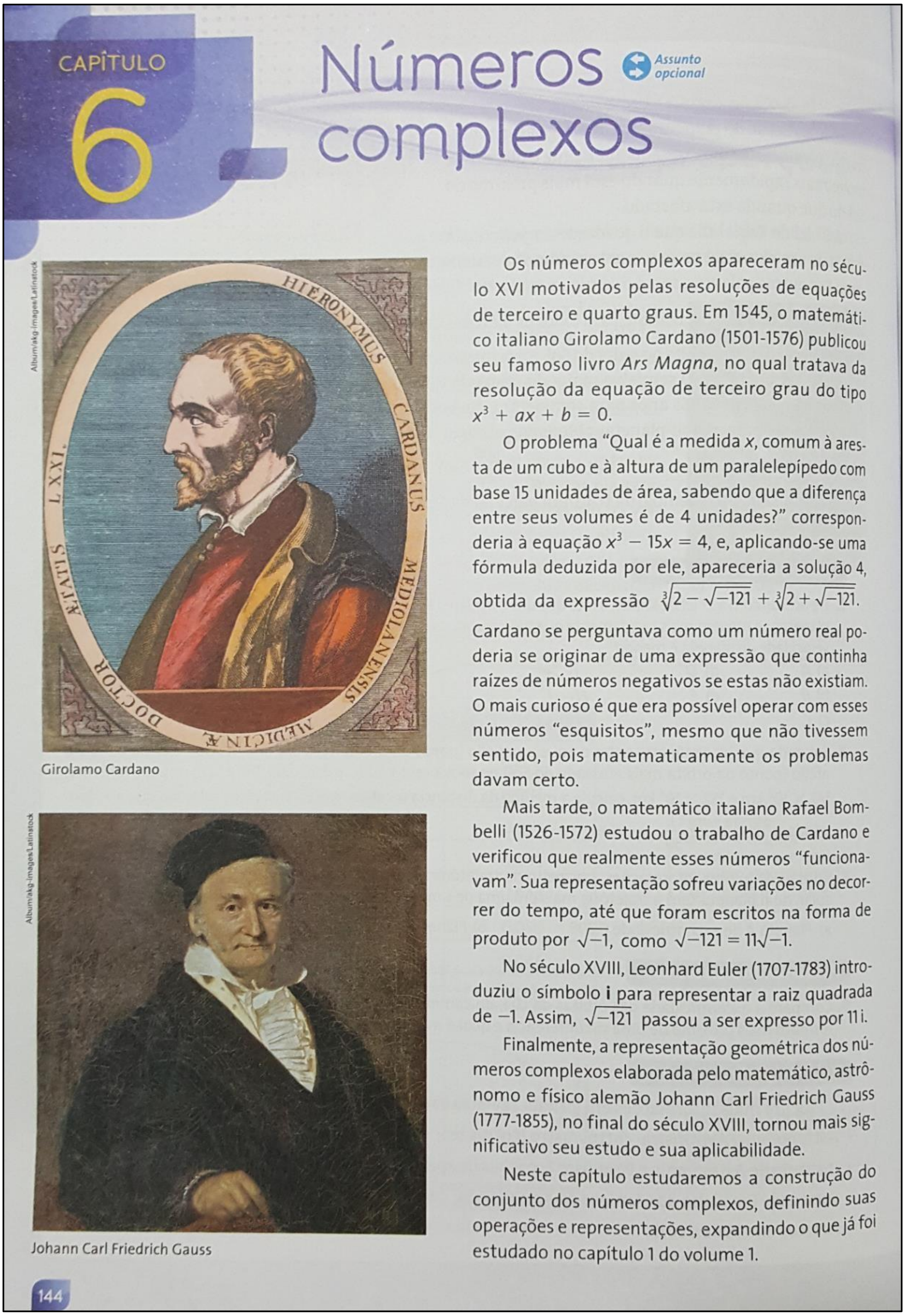
A resolução de equações sempre representou um dos principais interesses dos matemáticos, desde a Antiguidade até os dias de hoje. Babilônios, gregos, egípcios e hindus já conheciam alguns casos particulares de equações de 2º grau, mas, em vez de fórmulas, usavam régua e compasso para resolvê-las. Para esses matemáticos, não havia dificuldade quando aparecia a raiz quadrada de um número negativo: como as equações eram formuladas para solucionar um problema concreto, se surgisse uma raiz quadrada negativa, o problema era considerado sem solução.

Esse ponto de vista só começou a mudar a partir do século XVI, com os matemáticos italianos e seus estudos sobre a resolução de equações de 3º grau em que aparecem raízes de números negativos. No início, a existência de um “novo tipo de número” foi de difícil aceitação, mas a ampliação dos estudos por outros matemátivos e a descoberta da possibilidade de aplicação desses números em outras áreas tornaram os números complexos uma das mais importantes descobertas matemáticas.

Hoje em dia, aplicações desses novos números adquiriram uma enorme importância no campo da Engenharia (por exemplo, na modelagem de circuitos elétricos, no movimento de líquidos e gases ao redor de obstáculos), na Aerodinâmica (no cálculo da força de sustentação da asa de um avião), na Geometria fractal e em sistemas dinâmicos (por exemplo, no estudo da interferência em linhas de transmissão de energia e telefonia), entre outros.

**Figura 28: Abordagem classificada como Informação (LEONARDO, 2013 c, p. 163)**

A abordagem indicada na Figura 28 introduz um breve histórico do desenvolvimento dos números complexos. Entretanto, sequer indica quais foram os matemáticos mais importantes para o seu desenvolvimento.



CAPÍTULO 6

# Números complexos

Assunto opcional

Os números complexos apareceram no século XVI motivados pelas resoluções de equações de terceiro e quarto graus. Em 1545, o matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576) publicou seu famoso livro *Ars Magna*, no qual tratava da resolução da equação de terceiro grau do tipo $x^3 + ax + b = 0$.

O problema "Qual é a medida $x$, comum à aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com base 15 unidades de área, sabendo que a diferença entre seus volumes é de 4 unidades?" corresponderia à equação $x^3 - 15x = 4$, e, aplicando-se uma fórmula deduzida por ele, apareceria a solução 4, obtida da expressão $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$. Cardano se perguntava como um número real poderia se originar de uma expressão que continha raízes de números negativos se estas não existiam. O mais curioso é que era possível operar com esses números "esquisitos", mesmo que não tivessem sentido, pois matematicamente os problemas davam certo.

Mais tarde, o matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1572) estudou o trabalho de Cardano e verificou que realmente esses números "funcionavam". Sua representação sofreu variações no decorrer do tempo, até que foram escritos na forma de produto por $\sqrt{-1}$, como $\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$.

No século XVIII, Leonhard Euler (1707-1783) introduziu o símbolo **i** para representar a raiz quadrada de $-1$. Assim, $\sqrt{-121}$ passou a ser expresso por $11i$.

Finalmente, a representação geométrica dos números complexos elaborada pelo matemático, astrônomo e físico alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), no final do século XVIII, tornou mais significativo seu estudo e sua aplicabilidade.

Neste capítulo estudaremos a construção do conjunto dos números complexos, definindo suas operações e representações, expandindo o que já foi estudado no capítulo 1 do volume 1.

Album/akg-images/Latinstock

Girolamo Cardano

Album/akg-images/Latinstock

Johann Carl Friedrich Gauss

144

**Figura 29: Abordagem classificada com Informação (DANTE, 2013 c, p. 144)**

Entendemos que a abordagem apresentada na Figura 29 é completa de informações, contexto histórico, notações e problema que exemplifica questões levantadas na época. Entretanto, não consideramos que se destaca como estratégia didática pois de acordo com a sequência do livro didático os alunos não conhecem as formas de resolução de equações do 3º grau e não foram apresentadas relações com as equações do 2º grau que já são conhecidas e possibilitariam a significação desse conteúdo em um problema que fez parte do passado dos estudantes na aprendizagem da Matemática. Entretanto, a intervenção do professor no sentido de fazer a ligação entre esses conteúdos possibilitaria a utilização mais profunda das informações apresentadas.

Assim:

$$u^3 = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Nesse momento poderíamos ser levados a concluir que a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$ não possui raiz real, pois não existe no conjunto $\mathbb{R}$ o número $\sqrt{-16}$. Porém, essa conclusão é equivocada, uma vez que o número real 2 é raiz da equação, como se constata pela substituição de $x$ por 2:

$$2^3 - 6 \cdot 2 + 4 = 0$$

Essa espantosa constatação nos leva a admitir a possibilidade da existência do número **não real** $\sqrt{-16}$.

Historicamente, Gerônimo Cardano (1501-1576), médico e matemático italiano, após ter aprendido com Tartaglia o método descrito na página anterior, foi o primeiro a admitir a existência de números não reais, durante a resolução de uma equação cúbica, como essa que discutimos. Após tal descoberta, um matemático contemporâneo de Cardano, Raphael Bombelli (cerca de 1526-1573), teve o que considerou uma "ideia louca": começou a operar com os números não reais estudados por Cardano. Bombelli admitiu, por exemplo, a identidade:

$$2 + \sqrt{-1} + 3 - \sqrt{-1} = 5,$$

fornecendo, assim, subsídios para o início da construção de um novo conjunto de números: o **conjunto dos números complexos**, que veremos a seguir.

**Figura 30: Abordagem classificada como Informação (PAIVA, 2013 c, p. 142)**

Ao contrário das abordagens anteriores, esta que se apresenta na Figura 30 não faz um histórico para introdução do conteúdo, as informações históricas surgem no meio da explicação onde uma equação do 3º grau possui uma das soluções com raiz de um número negativo. Apresenta-se um breve relato histórico de como Cardano e Bombelli desenvolveram conceitos e operações para os atualmente chamados números complexos.

Introdução

## Um pouco de História

Os números complexos são usualmente apresentados a partir de uma equação do 2º grau. Por exemplo, quando resolvemos a equação $x^2 + 2x + 5 = 0$, utilizando a usual fórmula resolutiva, encontramos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Para determinar o valor de $x$ é preciso calcular a raiz quadrada de $-16$, o que em $\mathbb{R}$ é impossível, pois não existe um número real $m$ tal que $m^2 = -16$. Daí a necessidade de um novo conjunto numérico para se obter a solução para esse tipo de problema.

Primeiro objeto de uma construção abstrata, presente nos vários domínios da Matemática, os **números complexos** foram um grande desafio imposto aos matemáticos.

Como justificar sua existência e constituição?

Das tentativas de responder a essa questão nasceram novos conceitos algébricos e novas teorias, produzindo um grande desenvolvimento das pesquisas matemáticas.

Um primeiro avanço importante foi dado por Girolamo Cardano (1501-1576) ao tentar resolver o seguinte problema: "Dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40".

Chamando $x$ e $10 - x$ as partes procuradas, Cardano montou a seguinte equação:

$$x \cdot (10 - x) = 40 \Rightarrow x^2 - 10x + 40 = 0 \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{-15}$$

e, como $\sqrt{-15}$ não é um número real, para Cardano tal problema não teria solução.

Entretanto, ele trabalhou com os resultados obtidos, ou seja, com $x = 5 + \sqrt{-15}$ e $10 - x = 5 - \sqrt{-15}$,

constatando que: $\begin{cases} (5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15}) = 10 \\ \text{e} \\ (5 + \sqrt{-15}) \cdot (5 - \sqrt{-15}) = 40 \end{cases}$

Então, mesmo desconhecendo o significado dos números que havia obtido, Cardano pôde concluir que $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ eram soluções da equação.

Anos depois, o matemático Rafael Bombelli (1526-1572), ao aplicar a fórmula de Cardano para a resolução de equações do terceiro grau, obteve para a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ a solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. (*)

| 165 |

**Figura 31: Abordagem classificada como Estratégia Didática (IEZZI, et al, 2013 c, p. 165)**

Como sabia que 4 era uma raiz dessa equação, pois a sentença $4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 0$ é verdadeira, Bombelli concluiu que essa raiz poderia ser obtida pela fórmula (*), desde que se calculasse $\sqrt{-121}$.

Esse foi o mais importante passo para que fosse admitida a existência de um número da forma $a + \sqrt{-b}$, em que $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}_+^*$.

Responsáveis pela legitimação de toda teoria estudada nos dias de hoje, Johan Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e J. E. Argand (1768-1822) foram os primeiros matemáticos a terem uma ideia mais clara sobre os chamados números imaginários e a perceber as vantagens que os matemáticos do século XIX poderiam obter através do aprendizado de sua representação geométrica.

De fato, o reconhecimento desses números, com base nos estudos de Gauss, propiciou o desenvolvimento de várias teorias matemáticas, tendo sido universalmente adotados ao fim de 1840.

Em 1835, o matemático irlandês William R. Hamilton (1805-1866) elaborou uma teoria aritmética dos números complexos, a qual consistia em considerá-los como pares ordenados de números reais e em definir a soma e o produto de tais pares da maneira mostrada a seguir.

O matemático alemão Gauss também trabalhou em áreas como Geometria, Astronomia e Óptica.

**Figura 32: Continuação da figura 31 - Abordagem classificada como Estratégia Didática (IEZZI, et al, 2013 c, p. 166)**

A classificação da abordagem apresentada nas Figura 31 e 32 como Estratégia Didática se deve a apresentação mais completa de informações históricas, informações matemáticas pertinentes ao conhecimento dos alunos permitindo que fosse retomado o estudo das equações do 2º grau interrompido quando se encontrava soluções com raízes de números negativos e assim reforçar o significado do estudo dos números complexos. E ainda destaque para o problema considerado por Cardano no desenvolvimento de seus estudos e que da forma apresentada no material possibilita aos estudantes a compreensão da solução proposta. Com base no material didático é possível que o aluno compreenda a origem dos números complexos, quais foram os enfrentamentos dos matemáticos que construíram seus conceitos e o desenvolvimento histórico de sua teoria.

**Um pouco de história**

Por volta da primeira metade do século XVI, alguns matemáticos italianos (Tartaglia e Cardano) descobriram um modo para resolver equações do tipo $x^3 + ax + b = 0$.

Em sua obra *Ars magna*, Jerônimo Cardano (1501-1576) apresentou pela primeira vez a fórmula:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

como solução de uma equação do tipo $x^3 + ax + b = 0$, onde $a > 0$ e $b > 0$.

Essa fórmula só se aplicava quando $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} \geq 0$, pois na época não se extraíam raízes quadradas de números negativos.

Na mesma época, outro matemático, de nome Bombelli, resolvendo a equação $x^3 - 15x = 4$, chegou a um impasse.

Por cálculo direto, ele verificou que 4 era uma raiz do polinômio, pois $4^3 - 15 \cdot 4 = 4$, e tentou verificar se encontrava a raiz 4 aplicando a fórmula de Cardano. No entanto, para a equação $x^3 = 15x + 4$, tem-se $a = -15 < 0$ e $b = -4 < 0$, o que resultou em:

$$x = \sqrt[3]{+\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{3375}{27}}} + \sqrt[3]{+\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{3375}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{+2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{+2 - \sqrt{-121}}$$

Por causa desse resultado, Bombelli acreditava que a equação não devia ter solução, pois $\sqrt{-121}$ não é um número real. No entanto, ele sabia que $x = 4$ era uma das raízes da equação.

Jerônimo Cardano, em gravura de R. Cooper.

Mary Evans Picture Library/Diomedia/Coleção particular

224 | PARTE 5 ÁLGEBRA

**Figura 33: Abordagem classificada como Informação (SMOLE; DINIZ, 2013 c, p. 224)**

Para superar esse problema, Bombelli tentou encontrar regras para trabalhar com raízes quadradas de números negativos.

Resolveu considerar $\sqrt{-1}$ como um número qualquer e, usando as mesmas regras da Álgebra elementar, conseguiu mostrar que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ era a raiz da equação que ele estava tentando resolver.

Bombelli passou a desenvolver regras para operar com esses novos "números" chamando-os de números "fictícios", "impossíveis", "místicos" ou "imaginários".

A partir daí, os matemáticos passaram a estudar e a trabalhar com raízes quadradas de números negativos de forma cada vez mais sistematizada. Nesse trabalho, sempre que possível, usavam as mesmas propriedades dos números reais em relação à adição, à subtração, à multiplicação...

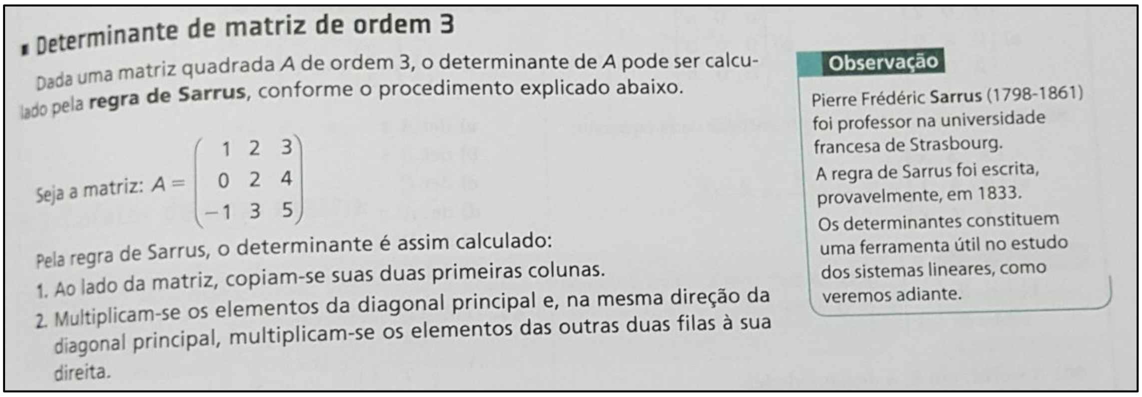
- 1629: Albert Girard (1590-1633) escreve as raízes quadradas de números negativos na forma $a + b\sqrt{-1}$; assim, $2 + \sqrt{-16} = 2 + 4\sqrt{-1}$.
- 1637: dada a notação $a + b\sqrt{-1}$, René Descartes (1596-1650) chama *a* de "parte real" e *b* de "parte imaginária".
- 1748: Leonhard Euler (1707-1783) usa a letra **i** para representar $\sqrt{-1}$. Assim, uma expressão do tipo $4 + 3\sqrt{-1}$ passou a ser escrita como $4 + 3i$.

Mas foi no final do século XVIII e início do século XIX, especialmente a partir dos trabalhos do matemático Karl Friedrich Gauss (1777-1855), que se passou a chamar os números da forma $a + bi$ de **complexos** e esses números ganharam o *status* de campo numérico, merecendo um estudo organizado em torno de suas aplicações dentro e fora do interesse da Matemática. Mas, afinal, o que são números complexos?

**Figura 34: Continuação da figura 33 - Abordagem classificada como Informação (SMOLE; DINIZ, 2013 c, p. 225)**

Entendemos que apesar de apresentar algumas passagens matemáticas que justificam o desenvolvimento construído pelos Matemáticos do século XVI e de inserir o termo "números imaginários" como os números complexos foram chamados na época, o objetivo do texto se restringe às informações cronológicas de seu desenvolvimento. Entretanto, novamente, acreditamos que a interferência do professor no tocante a organização e complementação do material permitiria a utilização como Estratégia Didática.

Outro conteúdo abordado com recorrências à história em todas as coleções é o de matrizes e determinantes, vejamos os destaques de cada livro destinado ao segundo ano do Ensino Médio:



**Determinante de matriz de ordem 3**

Dada uma matriz quadrada $A$ de ordem 3, o determinante de $A$ pode ser calculado pela **regra de Sarrus**, conforme o procedimento explicado abaixo.

Seja a matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Pela regra de Sarrus, o determinante é assim calculado:

1. Ao lado da matriz, copiam-se suas duas primeiras colunas.
2. Multiplicam-se os elementos da diagonal principal e, na mesma direção da diagonal principal, multiplicam-se os elementos das outras duas filas à sua direita.

**Observação**

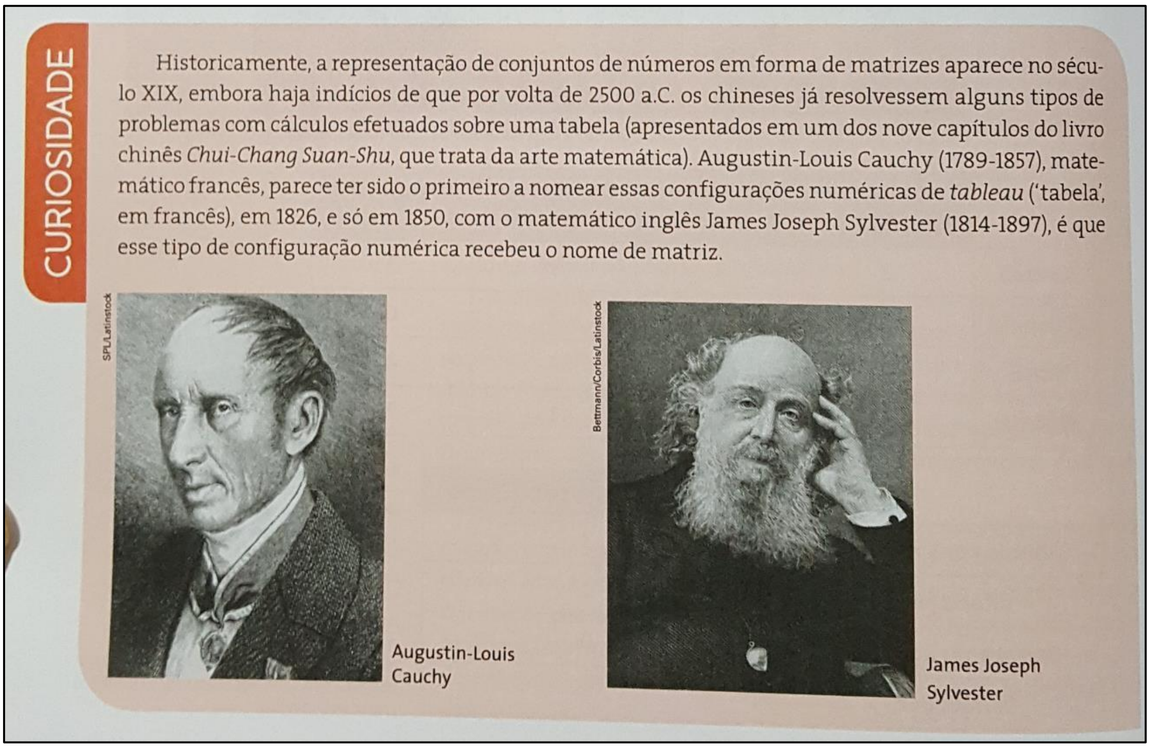
Pierre Frédéric **Sarrus** (1798-1861) foi professor na universidade francesa de Strasbourg.

A regra de Sarrus foi escrita, provavelmente, em 1833.

Os determinantes constituem uma ferramenta útil no estudo dos sistemas lineares, como veremos adiante.

**Figura 35: Abordagem classificada como Informação (LEONARDO, 2013 b, p. 211)**

Na coleção 1 não há abordagens específicas para o conteúdo de matrizes, entretanto, no trabalho com determinante de matrizes de ordem 3, há uma nota bibliográfica a respeito de Sarrus, ou seja, a abordagem tem o intuito de informar o estudante sobre o autor da regra.



CURIOSIDADE

Historicamente, a representação de conjuntos de números em forma de matrizes aparece no século XIX, embora haja indícios de que por volta de 2500 a.C. os chineses já resolvessem alguns tipos de problemas com cálculos efetuados sobre uma tabela (apresentados em um dos nove capítulos do livro chinês *Chui-Chang Suan-Shu*, que trata da arte matemática). Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), matemático francês, parece ter sido o primeiro a nomear essas configurações numéricas de *tableau* ('tabela', em francês), em 1826, e só em 1850, com o matemático inglês James Joseph Sylvester (1814-1897), é que esse tipo de configuração numérica recebeu o nome de matriz.

SPL/Latinstock

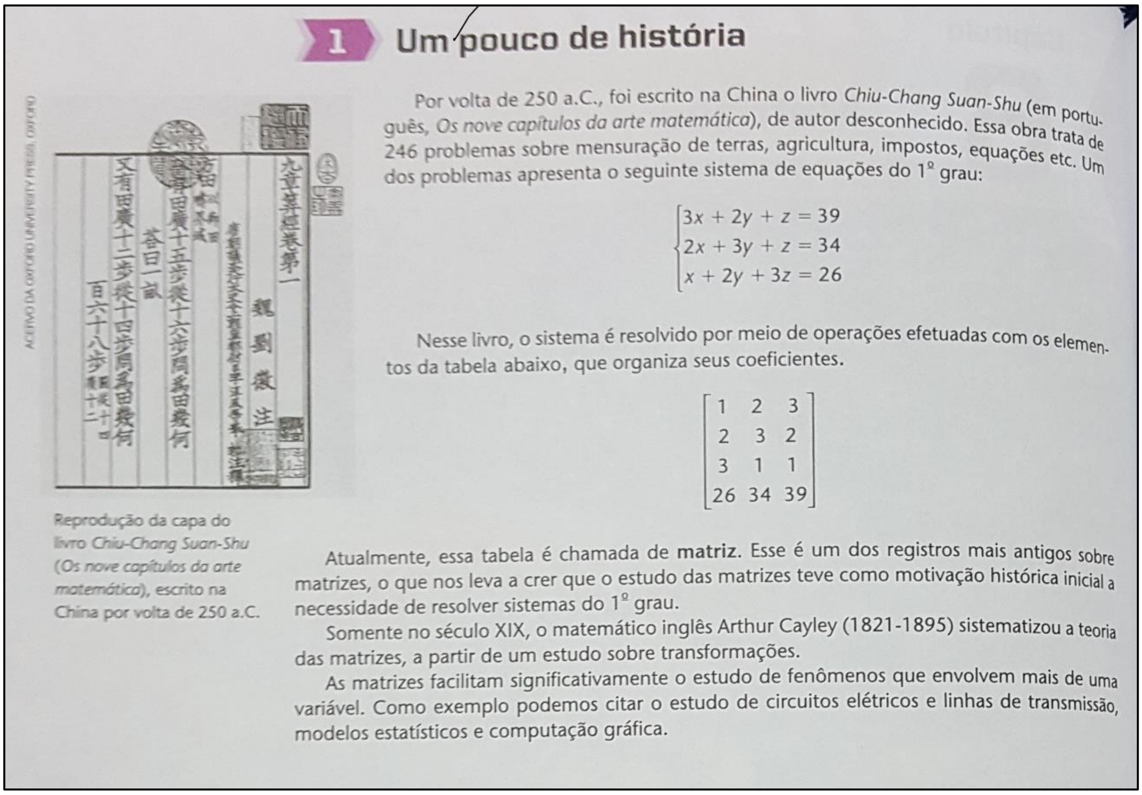
Augustin-Louis Cauchy

Bettmann/Corbis/Latinstock

James Joseph Sylvester

**Figura 36: Abordagem classificada como Informação (DANTE, 2013 b, p. 76)**

Apesar de conter informações mais completas a respeito das origens de matrizes, o trecho já foi destacado pelos autores como “curiosidade” e apresenta informações sobre matrizes e os matemáticos que iniciaram os estudos deste conteúdo no passado, sendo assim, a classificação foi como Informação.



## 1 Um pouco de história

Por volta de 250 a.C., foi escrito na China o livro *Chiu-Chang Suan-Shu* (em português, *Os nove capítulos da arte matemática*), de autor desconhecido. Essa obra trata de 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, impostos, equações etc. Um dos problemas apresenta o seguinte sistema de equações do 1º grau:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Nesse livro, o sistema é resolvido por meio de operações efetuadas com os elementos da tabela abaixo, que organiza seus coeficientes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix}$$

Reprodução da capa do livro *Chiu-Chang Suan-Shu* (*Os nove capítulos da arte matemática*), escrito na China por volta de 250 a.C.

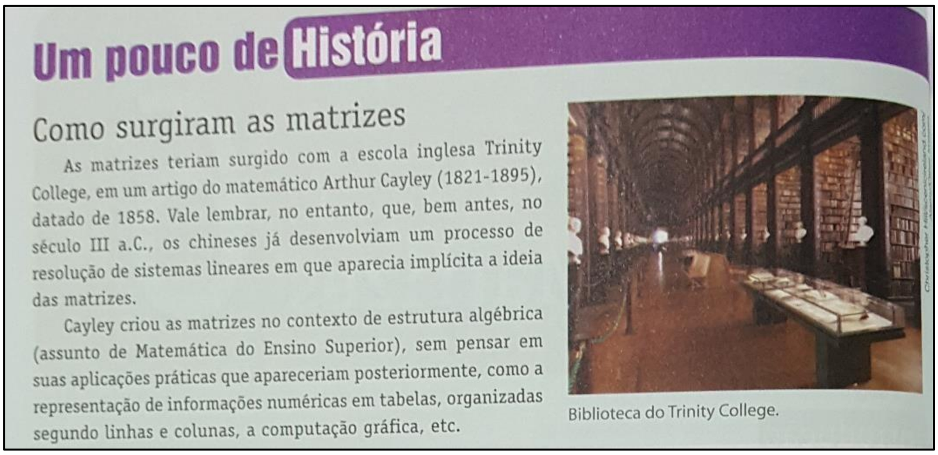
Atualmente, essa tabela é chamada de **matriz**. Esse é um dos registros mais antigos sobre matrizes, o que nos leva a crer que o estudo das matrizes teve como motivação histórica inicial a necessidade de resolver sistemas do 1º grau.

Somente no século XIX, o matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895) sistematizou a teoria das matrizes, a partir de um estudo sobre transformações.

As matrizes facilitam significativamente o estudo de fenômenos que envolvem mais de uma variável. Como exemplo podemos citar o estudo de circuitos elétricos e linhas de transmissão, modelos estatísticos e computação gráfica.

**Figura 37: Abordagem classificada como Informação (PAIVA, 2013 b, p. 94)**

Além das informações históricas de registros muito antigos de matrizes, a introdução apresenta um provável problema envolvendo matriz datado de quase 2.300 anos atrás. Entretanto, não há apresentação de como esse problema era resolvido na época. Ou seja, com base no material, temos informações históricas introdutórias, mas não temos embasamento histórico para resolver o problema. A atuação do professor no aprofundamento do conteúdo e pesquisa em outros materiais poderia complementar o material para que ele se tornasse Estratégia Didática.



## Um pouco de História

### Como surgiram as matrizes

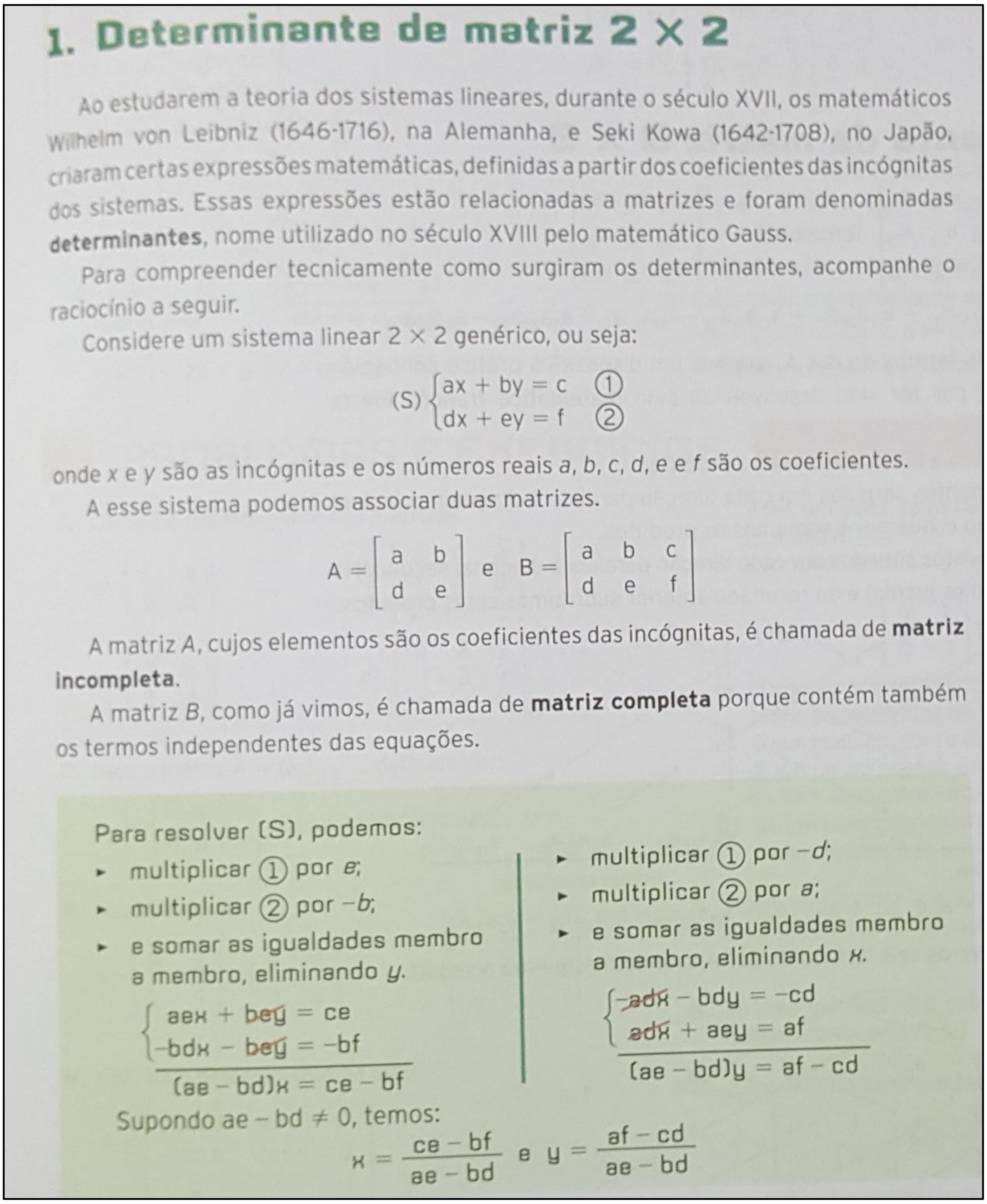
As matrizes teriam surgido com a escola inglesa Trinity College, em um artigo do matemático Arthur Cayley (1821-1895), datado de 1858. Vale lembrar, no entanto, que, bem antes, no século III a.C., os chineses já desenvolviam um processo de resolução de sistemas lineares em que aparecia implícita a ideia das matrizes.

Cayley criou as matrizes no contexto de estrutura algébrica (assunto de Matemática do Ensino Superior), sem pensar em suas aplicações práticas que apareceriam posteriormente, como a representação de informações numéricas em tabelas, organizadas segundo linhas e colunas, a computação gráfica, etc.

Biblioteca do Trinity College.

**Figura 38: Abordagem classificada como Informação (IEZZI, et al, 2013 b, p. 80)**

A abordagem destacada na Figura 38 apresenta informações históricas sobre o surgimento das matrizes, entretanto, não aparenta ter o intuito de contribuir com o estudo do conteúdo no sentido se constituir como estratégia.



# 1. Determinante de matriz 2 × 2

Ao estudarem a teoria dos sistemas lineares, durante o século XVII, os matemáticos Wilhelm von Leibniz (1646-1716), na Alemanha, e Seki Kowa (1642-1708), no Japão, criaram certas expressões matemáticas, definidas a partir dos coeficientes das incógnitas dos sistemas. Essas expressões estão relacionadas a matrizes e foram denominadas **determinantes**, nome utilizado no século XVIII pelo matemático Gauss.

Para compreender tecnicamente como surgiram os determinantes, acompanhe o raciocínio a seguir.

Considere um sistema linear 2 × 2 genérico, ou seja:

$$(S)\begin{cases} ax + by = c & ① \\ dx + ey = f & ② \end{cases}$$

onde $x$ e $y$ são as incógnitas e os números reais $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ e $f$ são os coeficientes.

A esse sistema podemos associar duas matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

A matriz $A$, cujos elementos são os coeficientes das incógnitas, é chamada de **matriz incompleta**.

A matriz $B$, como já vimos, é chamada de **matriz completa** porque contém também os termos independentes das equações.

Para resolver (S), podemos:

- multiplicar ① por $e$;
- multiplicar ② por $-b$;
- e somar as igualdades membro a membro, eliminando $y$.

$$\begin{cases} aex + \cancel{bey} = ce \\ -bdx - \cancel{bey} = -bf \end{cases}$$
$$(ae - bd)x = ce - bf$$

- multiplicar ① por $-d$;
- multiplicar ② por $a$;
- e somar as igualdades membro a membro, eliminando $x$.

$$\begin{cases} -\cancel{adx} - bdy = -cd \\ \cancel{adx} + aey = af \end{cases}$$
$$(ae - bd)y = af - cd$$

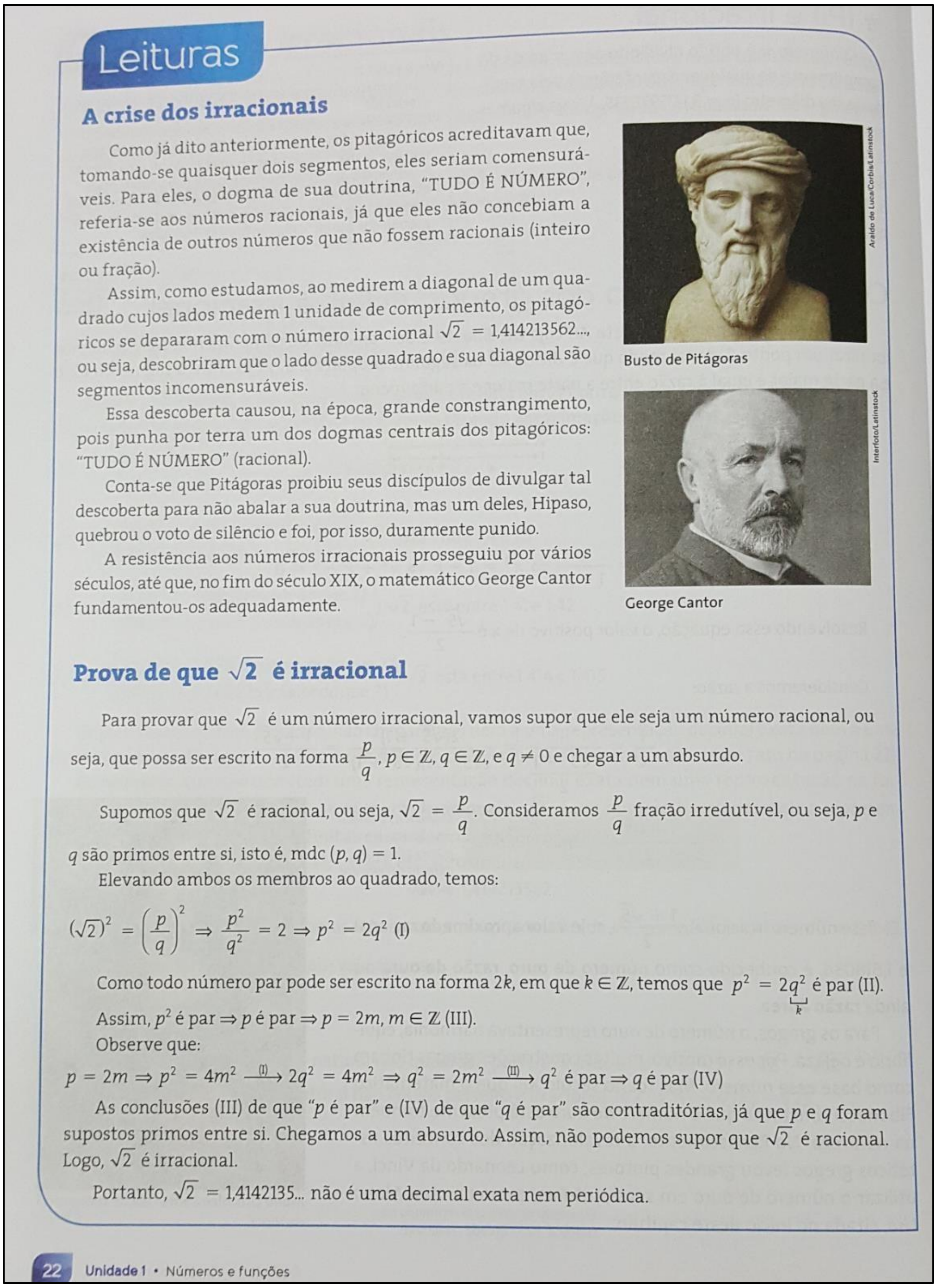
Supondo $ae - bd \neq 0$, temos:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \text{ e } y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

**Figura 39: Abordagem classificada como Estratégia Didática (SMOLE; DINIZ, 2013 b, p. 271)**

Na abordagem representada na Figura 39, verificamos poucas informações históricas. Entretanto, a contextualização com recurso à história é realizada com o objetivo de introduzir e orientar os alunos no desenvolvimento do método para cálculo de determinantes, deixando claro que a regra para resolução não foi criada da forma que conhecemos hoje e sim surgiu da solução de sistemas de equações.

Para concluir a análise das diferentes abordagens históricas para os mesmos conteúdos, faremos a comparação entre a coleção 2 e 3 para o trabalho com os números irracionais.



Leituras

**A crise dos irracionais**

Como já dito anteriormente, os pitagóricos acreditavam que, tomando-se quaisquer dois segmentos, eles seriam comensuráveis. Para eles, o dogma de sua doutrina, "TUDO É NÚMERO", referia-se aos números racionais, já que eles não concebiam a existência de outros números que não fossem racionais (inteiro ou fração).

Assim, como estudamos, ao medirem a diagonal de um quadrado cujos lados medem 1 unidade de comprimento, os pitagóricos se depararam com o número irracional $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$, ou seja, descobriram que o lado desse quadrado e sua diagonal são segmentos incomensuráveis.

Essa descoberta causou, na época, grande constrangimento, pois punha por terra um dos dogmas centrais dos pitagóricos: "TUDO É NÚMERO" (racional).

Conta-se que Pitágoras proibiu seus discípulos de divulgar tal descoberta para não abalar a sua doutrina, mas um deles, Hipaso, quebrou o voto de silêncio e foi, por isso, duramente punido.

A resistência aos números irracionais prosseguiu por vários séculos, até que, no fim do século XIX, o matemático George Cantor fundamentou-os adequadamente.

Busto de Pitágoras

Araldo de Luca/Corbis/Latinstock

George Cantor

Interfoto/Latinstock

**Prova de que $\sqrt{2}$ é irracional**

Para provar que $\sqrt{2}$ é um número irracional, vamos supor que ele seja um número racional, ou seja, que possa ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, e $q \neq 0$ e chegar a um absurdo.

Supomos que $\sqrt{2}$ é racional, ou seja, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Consideramos $\frac{p}{q}$ fração irredutível, ou seja, $p$ e $q$ são primos entre si, isto é, mdc $(p, q) = 1$.

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \text{ (I)}$$

Como todo número par pode ser escrito na forma $2k$, em que $k \in \mathbb{Z}$, temos que $p^2 = 2\underbrace{q^2}_{k}$ é par (II).

Assim, $p^2$ é par $\Rightarrow p$ é par $\Rightarrow p = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$ (III).

Observe que:

$$p = 2m \Rightarrow p^2 = 4m^2 \xrightarrow{\text{(I)}} 2q^2 = 4m^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \xrightarrow{\text{(II)}} q^2 \text{ é par} \Rightarrow q \text{ é par (IV)}$$

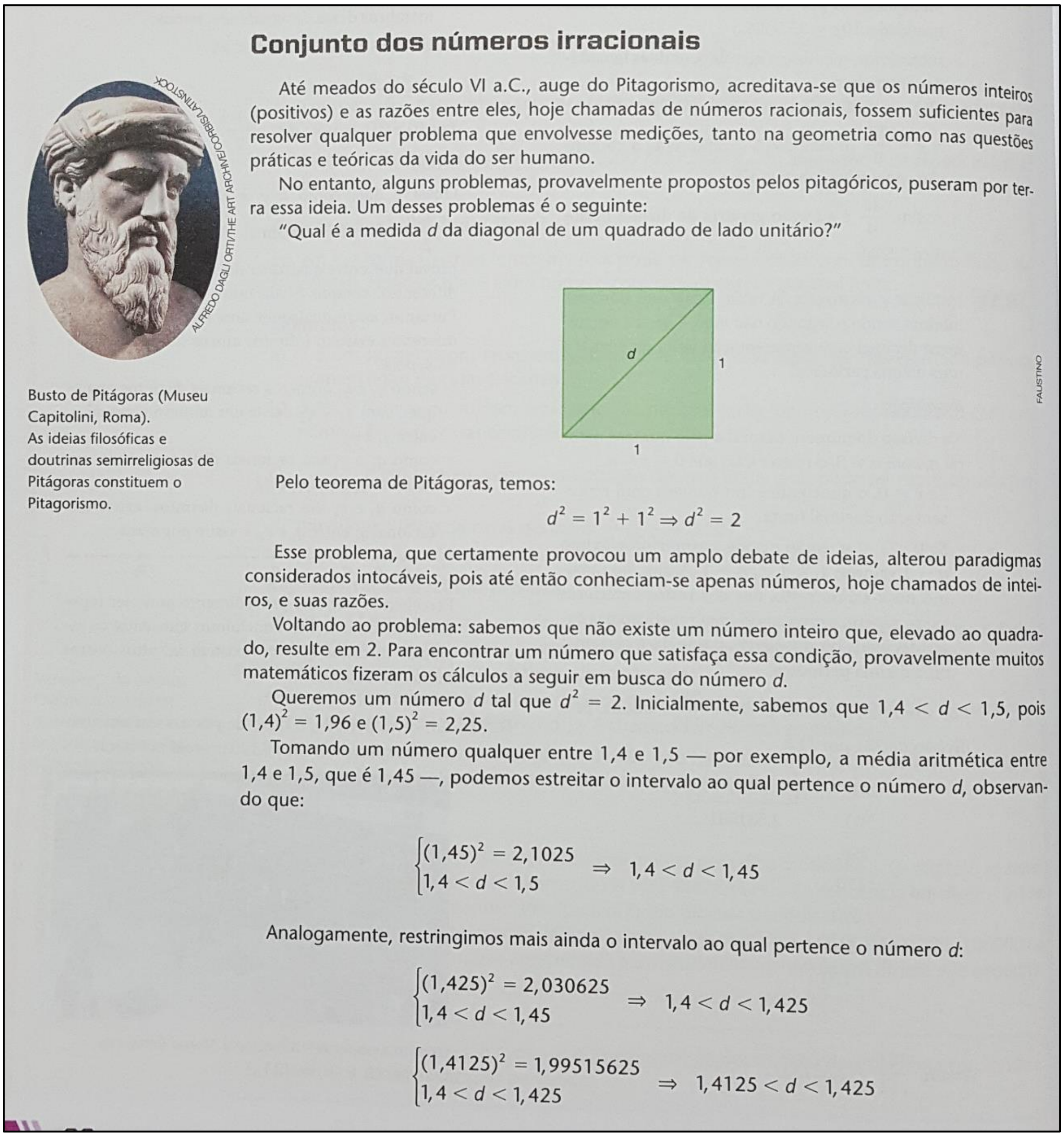
As conclusões (III) de que "$p$ é par" e (IV) de que "$q$ é par" são contraditórias, já que $p$ e $q$ foram supostos primos entre si. Chegamos a um absurdo. Assim, não podemos supor que $\sqrt{2}$ é racional. Logo, $\sqrt{2}$ é irracional.

Portanto, $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$ não é uma decimal exata nem periódica.

22 Unidade 1 • Números e funções

**Figura 40: Abordagem classificada como Informação (DANTE, 2013 a, p. 22)**

A abordagem dos irracionais na visão histórica, destacando os impactos da percepção de que nem todos os números eram racionais demonstra uma ruptura no pensamento dos Pitagóricos, entretanto, não apresenta quais foram as formas utilizadas pelos Matemáticos para tratar os irracionais até sua devida formalização concretizada somente no século XIX. Portanto, a abordagem foi classificada como Informação. Entretanto, a prova de que $\sqrt{2}$ é irracional também tem relevância histórica e sua abordagem poderia se classificar como Estratégia Didática, mas o livro didático não traz nenhuma referência histórica para a demonstração.



## Conjunto dos números irracionais

Até meados do século VI a.C., auge do Pitagorismo, acreditava-se que os números inteiros (positivos) e as razões entre eles, hoje chamadas de números racionais, fossem suficientes para resolver qualquer problema que envolvesse medições, tanto na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do ser humano.

No entanto, alguns problemas, provavelmente propostos pelos pitagóricos, puseram por terra essa ideia. Um desses problemas é o seguinte:

"Qual é a medida $d$ da diagonal de um quadrado de lado unitário?"

ALFREDO DAGLI ORTI/THE ART ARCHIVE/CORBIS/LATINSTOCK

Busto de Pitágoras (Museu Capitolini, Roma). As ideias filosóficas e doutrinas semirreligiosas de Pitágoras constituem o Pitagorismo.

$d$ 1 1 FAUSTINO

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2$$

Esse problema, que certamente provocou um amplo debate de ideias, alterou paradigmas considerados intocáveis, pois até então conheciam-se apenas números, hoje chamados de inteiros, e suas razões.

Voltando ao problema: sabemos que não existe um número inteiro que, elevado ao quadrado, resulte em 2. Para encontrar um número que satisfaça essa condição, provavelmente muitos matemáticos fizeram os cálculos a seguir em busca do número $d$.

Queremos um número $d$ tal que $d^2 = 2$. Inicialmente, sabemos que $1{,}4 < d < 1{,}5$, pois $(1{,}4)^2 = 1{,}96$ e $(1{,}5)^2 = 2{,}25$.

Tomando um número qualquer entre 1,4 e 1,5 — por exemplo, a média aritmética entre 1,4 e 1,5, que é 1,45 —, podemos estreitar o intervalo ao qual pertence o número $d$, observando que:

$$\begin{cases} (1{,}45)^2 = 2{,}1025 \\ 1{,}4 < d < 1{,}5 \end{cases} \Rightarrow 1{,}4 < d < 1{,}45$$

Analogamente, restringimos mais ainda o intervalo ao qual pertence o número $d$:

$$\begin{cases} (1{,}425)^2 = 2{,}030625 \\ 1{,}4 < d < 1{,}45 \end{cases} \Rightarrow 1{,}4 < d < 1{,}425$$

$$\begin{cases} (1{,}4125)^2 = 1{,}99515625 \\ 1{,}4 < d < 1{,}425 \end{cases} \Rightarrow 1{,}4125 < d < 1{,}425$$

**Figura 41: Abordagem classificada como Estratégia Didática (PAIVA, 2013 a, p. 30)**

Já a abordagem destacada na Figura 41, mostra que além de se preocupar com as informações históricas a respeito da ruptura causada pelo descobrimento de que nem todos os números são racionais, o autor apresenta um problema histórico que explicita essa ruptura. Além disso apresenta uma sequência de cálculos que muitos matemáticos utilizaram para encontrar aproximações de números irracionais, no exemplo apresentado, a diagonal de um quadrado de lado 1.

## 4.7 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS E O PAPEL DO PROFESSOR

Considerando o que foi constatado no material analisado, tem-se diversas possibilidades para recorrer a História da Matemática no ensino de Matemática. Entretanto, percebe-se que na maioria das vezes em que o livro didático oferece o recurso à história, ele não está apresentado de forma completa ou relevante para sua utilização didática e assim, faz-se necessária a intervenção do professor, na complementação do conteúdo e/ou no direcionamento da estratégia didática e até mesmo na identificação dos pontos potenciais que são apresentados nos livros, mas que precisam ser vislumbrados pelo professor.

Uma preocupação latente vislumbrada em Dias e Saito (2009) é a de que a História da Matemática utilizada nos materiais didáticos que os professores e discentes tem acesso, está escrita sobre uma historiografia desatualizada, que pinça alguns acontecimentos ou objetos na história e faz considerações sobre eles, comparando o que determinado matemático fez no século XV com o que outro matemático fez no século XVII, por exemplo, sem considerar as diferenças contextuais e epistemológicas entre esses momentos.

Esse tipo de abordagem não consegue desfazer o paradigma de que a Matemática não teve evolução linear e assim contribui para a falsa impressão de que o desenvolvimento da matemática "só poderia ter trilhado esse caminho histórico, que era o único que conduzia ao verdadeiro conhecimento" (DIAS; SAITO, 2009, p. 6).

De fato, após a análise dos livros didáticos, verificamos que a apresentação dos pontos históricos, sejam nas Informações ou Estratégias Didáticas, não consegue romper a impressão de que a Matemática é uma ciência "pronta e acabada". Pelo contrário, confirma a ideia de que ela seguiu uma evolução linear e que está concretizada e completa na forma que vemos hoje.

A compartimentação dos conteúdos matemáticos na forma que está organizado nas propostas curriculares e nos materiais didáticos, inclusive nos livros analisados, contribuiu para a visão de que os conteúdos evoluíram na história com encadeamento lógico acima na necessidade humana. Por exemplo, o desenvolvimento dos números complexos tem ampla relação com a construção das equações algébricas, entretanto, essa relação não é evidenciada com a devida importância nos livros didáticos analisados. Para Dias e Saito (2009) essas situações são resultantes da historiografia internalista, que valoriza os fatos que contribuíram para a evolução dos conceitos e desconsidera as intervenções externas que os influenciaram, como as sociedades em que os trabalhos foram desenvolvidos.

Dias e Saito (2009) entendem que para superar esses obstáculos faz-se necessária a construção de uma interface entre a História da Matemática e a Educação Matemática e essa interface é eficaz quando o educador matemático se aproxima do historiador e atua na elaboração de estratégias ou metodologias de trabalho que aproximem as duas áreas. Para Saito (2013):

> A história da matemática pode ser um instrumento importante para o professor que, utilizando-se de fontes adequadas e atualizadas, possa promover entre seus alunos uma visão mais crítica em relação à matemática e à construção do conhecimento matemático. Mas é importante que o educador tenha consciência de que a História da Matemática não se encontra pronta e acabada. Ela não deve ser confundida pelo educador apenas como um repositório fixo de informações onde ele poderia buscar recursos para articular história e ensino em sala de aula. (SAITO, 2013, p. 7)

A importância do professor na utilização da História da Matemática no ensino de matemática também é evidenciada no trabalho de Miguel e Miorim (2011) quando afirmam que:

> Seria necessário que evitássemos a reprodução pura e simples de propostas e práticas sem a necessária e devida reflexão e distanciamento crítico em relação a elas, quer procedam de autores de livros didáticos, de políticas públicas relativas à educação matemática, de pesquisadores em educação matemática e em história da matemática [...] É claro que é indispensável conhecer, respeitar e debater tais propostas. Mas isso não dispensa a realização de um esforço pessoal e adicional do próprio professor no sentido de transformá-las ou mesmo de produzir novas propostas personalizadas tendo em vista a natureza, as condições e os propósitos singulares da instituição escolar em cada situação concreta. (MIGUEL; MIORIM, 2011 p. 152)

Em todo trabalho de Mendes (2009) é possível perceber a importância da intervenção do professor na utilização da História da Matemática no Ensino de

Matemática. O autor destaca que é imprescindível que o professor valorize e adapte as informações históricas às suas necessidades, visando o seu melhor uso possível na sala de aula. Entretanto, para o autor “as informações históricas raramente são utilizadas como elemento gerador da aprendizagem da Matemática, quer seja na ação pedagógica do professor, quer seja nos livros didáticos adotados por ele” (Mendes, 2009, p. 5).

Para Bianchi (2006), fica claro que nem sempre o professor está preparado para intervir no material didático no trabalho com a História da Matemática:

> A História da Matemática presente nos Livros Didáticos é muitas vezes instrumento de informação para professores que não possuem conhecimentos históricos sobre os temas em questão. É mais fácil buscar informações em fontes didáticas (material produzido a partir das fontes primárias e secundárias) do que em fontes secundárias (livros textos baseados nas fontes originais). Os Livros Didáticos são utilizados para o aprendizado do aluno, mas antes disto, podem ter sido o único acesso a estas informações que o professor, leigo no assunto, obteve. (BIANCHI, 2006, p.88).

Assim, surge mais um aspecto relevante ao trabalho de aproximação da História da Matemática e Educação Matemática que é a formação de professores de matemática, seja na formação inicial ou na formação continuada.

Nesse sentido, todo trabalho de Mendes (2009) se constitui como resultado de uma trajetória de mais de 20 anos de trabalho com a formação de educadores matemáticos. Ao estabelecer sua proposta de investigação histórica, ele é convicto de que:

> O professor deve propor situações que conduzam os alunos à redescoberta do conhecimento a partir do levantamento e testagem de suas hipóteses acerca de alguns problemas investigados, pois nessa perspectiva metodológica, espera-se que eles aprendam “o que” e “porque” fazem/sabem desta ou daquela maneira, para que assim possam ser criativos, críticos, pensar com acerto, colher informações por si mesmos face à observação concreta e usar o conhecimento com eficiência na solução dos problemas do cotidiano. (MENDES, 2009, p. 83).

Miguel e Miorim (2011) também trabalham com a formação de professores de matemática, especificamente no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Campinas. Em algumas disciplinas, foram abordados estudos sobre a História da Matemática (como um todo, por civilização, por temáticas) e os futuros professores responderam positivamente a cada tentativa de abordagem e organização. Com esse trabalho, os autores conseguiram “não só despertar o interesse dos futuros professores, mas também propiciar uma compreensão mais significativa e aprofundada dos conteúdos" (Miguel; Miorim, 2011, p. 153), fatores apresentados como justificativa para utilização da história da matemática no ensino de matemática.

Entretanto, Miguel e Miorim (2011, p. 156) acreditam que a aproximação da História da Matemática e da Educação Matemática teriam um potencial ainda maior e assim apresentam a concepção teórica desenvolvida por eles que é a "concepção de história pedagogicamente vetorizada". Nessa concepção teórica a história se constitui a partir de problemas e questões que emergem das práticas sociais nas quais a cultura matemática se acha envolvida. Assim:

> Histórias da matemática pedagogicamente vetorizadas deveriam ser mais do que meramente histórias das ideias matemáticas propriamente ditas, esforçando-se por ser também histórias das diferentes culturas matemáticas que se constituíram em diferentes práticas sociais. (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 159).

Uma das características das histórias pedagogicamente vetorizadas é que "A historiografia é vista como fonte de diálogo e não como uma fonte de respostas ou fórmulas ser repetidas no presente" (Miguel e Miorim, 2011, p. 161). Desse modo é possível constituir uma nova história, pois o educador matemático faz novas perguntas, "incorpora novas fontes e novas vozes a esse diálogo". Assim, estabelecese uma relação de "homens produzindo história e sendo por ela produzidos" (Miguel e Miorim, 2011, p.179).

Essa visão também é corroborada por Saito (2013) quando discute que muitas vezes se afirma que o uso da história se justifica para desfazer a impressão de que a matemática é uma ciência pronta e acabada, entretanto, a História da Matemática também não está pronta e acabada, pois ela é sempre reinterpretada e reescrita.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização desse trabalho evidencia a premissa inicial da pesquisa de que a História da Matemática tem potencial para embasar a construção de alguns conceitos matemáticos, contribui para a compreensão de que a Matemática não é uma ciência pronta e acabada, apresenta aspectos motivacionais através de informações e curiosidades. Além disso pode contribuir para a significação de conceitos e objetos matemáticos, possibilita o levantamento e a investigação de porquês matemáticos, permite compreender as razões pelas quais as pessoas fizeram/fazem matemática (sejam elas internas ou externas), permite perceber a conexão existente entre a Matemática e outras ciências, entre outros ganhos didáticos.

Podemos dizer que o objetivo foi atingido, pois foi possível verificar como os livros didáticos analisados apresentam abordagens históricas. Entretanto, se constata que grande parte dessas abordagens é apenas informativa, trazendo elementos sobre a vida de alguns matemáticos ou técnicas matemáticas que surgiram em outras épocas.

Esse cenário já foi apontado nas dificuldades para utilização da História da Matemática no ensino de Matemática por Miguel e Miorim (2011, p. 63), como sendo: “ausência de literatura adequada; natureza imprópria da literatura disponível; a história como um fator complicador; ausência do sentido de progresso histórico”.

Outro fator dificultador apresentado por Miguel e Miorim (2011) que foi corroborado por essa pesquisa é de que é uma característica das publicações matemáticas destacar unicamente os resultados matemáticos, ocultando seu desenvolvimento. Devido a isso, o contexto epistemológico que poderia contribuir para que os estudantes compreendessem e significassem a aprendizagem de certos conceitos e contextos não é evidenciado.

Outro resultado que merece destaque é a importância do professor no trabalho de apropriação da história da matemática e sua transposição para o ensino de matemática. Muitas vezes o material apresentado nos livros didáticos pode ser utilizado de modo a conduzir o aluno em um processo de investigação histórica se houver a intervenção do professor.

Dada a importância do professor no estabelecimento de conexões entre a História da Matemática e o Ensino de Matemática, não podemos deixar de destacar a relevância da formação do professor, seja inicial ou continuada, nessa trajetória. Pois os professores só podem conduzir atividades na proposta de ensinar matemática com recurso à história se eles conhecerem história.

Os professores ou futuros professores, devem estar capacitados para investigar os conhecimentos históricos disponíveis na historiografia, aproximando-se do historiador e tendo condições de apropriar-se e conceber a história de modo a alcançar os benefícios destacados nesse trabalho.

Essas constatações nos fazem refletir quanto à formação possibilitada neste curso de Licenciatura em Matemática quanto a apropriação dos conhecimentos inerentes à história da matemática realizada na disciplina de História da Matemática e possíveis conduções realizadas nas disciplinas de didática ou laboratório. Novamente esbarramos na função dos professores possibilitarem essa interligação, que nem sempre tem acontecido.

Os cursos de Licenciatura em Matemática poderiam oferecer disciplinas vinculadas à Educação Matemática com direcionamentos para utilização da História da Matemática. Dada a restrição de carga horária e a ampla quantidade de conteúdos ou metodologias que devem ser trabalhadas, esse trabalho poderia ser realizado em projetos de extensão. Não podemos esquecer também de que esse tema pode/deve ser trabalhado na formação continuada dos professores de Matemática.

Não podemos deixar de destacar que a análise dos livros didáticos é subjetiva, ainda que constituída a partir de critérios estabelecidos, pois ela só é possível a partir dos conhecimentos de História da matemática do avaliador e remete à formação construída/adquirida durante o curso de Licenciatura em Matemática.

Outro aspecto importante a ser considerado é que a presença de História da Matemática é elemento obrigatório na avaliação realizada pelo MEC apresentada no Guia do PNLD. Ou seja, faz sentido que os livros didáticos abordem a História da Matemática. Nosso papel como educadores matemáticos é utilizar esses materiais de forma crítica, para que essas informações não se restrinjam à superficialidade.

Finalmente, entendemos que os resultados são positivos e apesar de deixar claro que é preciso avançar, principalmente na formação adequada dos professores, os materiais didáticos estão trazendo algumas possibilidades didáticas para o ensino de matemática com recurso à história da matemática.

Assim como outros diversos encaminhamentos metodológicos para o ensino de Matemática e corroborados por Miguel e Miorim (2011) fica a esperança de que o uso pedagógico da história da Matemática, venha a permear a formação dos professores e consequentemente a formação dos estudantes e em última instância promover transformação social nas comunidades onde essas práticas se constituem.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


BARBOSA, J. L. C. **A participação da História da Matemática em livros didáticos**. 2013, VII CIBEM. Disponível em: http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1285.pdf. Acesso em 10/03 as 20:00h.

BIANCHI, M. I. Z. **Uma reflexão sobre a presença da história da matemática nos livros didáticos.** Dissertação de Mestrado. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais +:** (ensino médio): matemática. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Guias de livros didáticos PNLD 2015** - Ensino Médio – Matemática. Brasília. 2015. 111 p. Disponível em: http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guias-do-pnld/item/5940-guia-pnld2015. Acesso em 10/03 as 20:10h.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. 2016. Disponível em: http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-dados-estatisticos. Acesso em 10/03 as 20:20h.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. Editora Ática, 2ª. Ed, volume 1, 2013 a.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. Editora Ática, 2ª. Ed, volume 2, 2013 b.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. Editora Ática, 2ª. Ed, volume 3, 2013 c.

GASPERI, W. N. H; PACHECO, E. R. **A História da Matemática como instrumento para interdisciplinaridade na educação básica.** PDE, 2007. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/701-4.pdf. Acesso em 10/03 as 20:30h.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D. M.; PERIGO, R.; ALMEIDA, N. S. **Matemática Ciência e Aplicações**. Editora Saraiva. 7ª. Ed, volume 1, 2013 a.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D. M.; PERIGO, R.; ALMEIDA, N. S. **Matemática Ciência e Aplicações**. Editora Saraiva. 7ª. Ed, volume 2, 2013 b.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D. M.; PERIGO, R.; ALMEIDA, N. S. **Matemática Ciência e Aplicações**. Editora Saraiva. 7ª. Ed, volume 3, 2013 c.

JUNIOR, C. L. S.; THIENGO, E. R.; SILVIA, S. A. F. **Publicações da História da Matemática em vídeos didáticos:** Uma abordagem no Ensino Médio. Série Guias Didáticos de Matemática. IFES, 2014. 62p.

LEONARDO, F.M. **Conexões com a Matemática**. Editora Moderna, 2ª.ed, volume 1, 2013 a.

LEONARDO, F.M. **Conexões com a Matemática**. Editora Moderna, 2ª.ed, volume 2, 2013 b.

LEONARDO, F.M. **Conexões com a Matemática**. Editora Moderna, 2ª.ed, volume 3, 2013 c.

MENDES, I. A. **Investigação Histórica no Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2009. 256 p.

MIGUEL, A; MIORIM, M. A. **História na educação matemática:** Propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. 205 p.

PAIVA, M. R. **Matemática – Paiva**. Editora Moderna. 2ª. Ed, volume 1, 2013 a.

PAIVA, M. R. **Matemática – Paiva**. Editora Moderna. 2ª. Ed, volume 2, 2013 b.

PAIVA, M. R. **Matemática – Paiva**. Editora Moderna. 2ª. Ed, volume 3, 2013 c.

PARANA. Secretaria da Educação do Estado do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**: Matemática. Curitiba. 2008. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf. Acesso em 10/03 as 20:40h.

DIAS, M da S; SAITO, F. **Interface entre história da Matemática e ensino**: uma aproximação entre a historiografia e a perspectiva lógica-histórica. IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2009, Brasília. Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. SBEM, 2009.

SAITO, F. **História da Matemática e Educação Matemática**: uma proposta para atualizar o diálogo entre historiadores e educadores. VII CIBEM, 2013. Disponível em: http://heema.org/wp-content/uploads/2013/09/353.pdf

SAITO, F. **Construindo interfaces entre História e ensino da Matemática**. Disponível em: revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/download/29002/20273

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. **Matemática – Ensino Médio**. Editora Saraiva. 8ª. Ed, volume 1, 2013 a.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. **Matemática – Ensino Médio**. Editora Saraiva. 8ª. Ed, volume 2, 2013 b.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. **Matemática – Ensino Médio**. Editora Saraiva. 8ª. Ed, volume 3, 2013 c.

SOUZA, J. **Novo olhar: Matemática**. Editora FTD. 2ª. Ed, volume 1, 2013 a.

SOUZA, J. **Novo olhar: Matemática**. Editora FTD. 2ª. Ed, volume 2, 2013 b.

SOUZA, J. **Novo olhar: Matemática**. Editora FTD. 2ª. Ed, volume 3, 2013 c.

VIANNA, C. R. **História da Matemática na Educação Matemática**. EPREM 2010. Anais, Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Carlos2.pdf. Acesso em 10/03 as 20:40h.