

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FELIPE DE JESUS KUTZ

**RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS POR SÉRIES DE
POTÊNCIAS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2017

FELIPE DE JESUS KUTZ

**RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS POR SÉRIES DE
POTÊNCIAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Licenciatura em Matemática da Universi-
dade Tecnológica Federal do Paraná como requisito
parcial para a disciplina Trabalho de Conclusão de
Curso 2.

Orientador: Márcio Rostirolla Adames

CURITIBA

2017

TERMO DE APROVAÇÃO

“Resoluções de Equações Diferenciais Ordinárias por Séries de Potências”

por

“Felipe de Jesus Kutz”

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 13h50 do dia 30 de junho de 2017 na sala Q-305 como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba. O aluno foi arguido pela Banca de Avaliação abaixo assinados. Após deliberação, de acordo com o parágrafo 1º do art. 37 do Regulamento Específico do trabalho de Conclusão de Curso para o Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR do Câmpus Curitiba, a Banca de Avaliação considerou o trabalho aprovado.

<p>_____ Prof. Márcio Rostirolla Adames (Presidente - UTFPR/Curitiba)</p>	<p>_____ Prof. Rubens Robles Ortega Junior (Avaliador 1 – UTFPR/Curitiba)</p>
<p>_____ Prof. André Fabiano Steklain Lisbôa (Avaliador 2 – UTFPR/Curitiba)</p>	<p>_____ Profª. Violeta Maria Estephan (Professora Responsável pelo TCC – UTFPR/Curitiba)</p>
<p>_____ Profª. Neusa Nogas Tocha (Coordenadora do curso de Licenciatura em Matemática – UTFPR/Curitiba)</p>	

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.”

RESUMO

JESUS KUTZ, Felipe. RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS POR SÉRIES DE POTÊNCIAS. 51 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017.

Neste trabalho estudo a solução de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes não constantes. Para resolver problemas deste tipo utilizo métodos de séries de potências, em particular o método das derivadas sucessivas. Também estudei o método de Frobenius em seus diversos casos. Por fim estudei uma aplicação alternativa do método de derivadas sucessivas para equações não-homogêneas. Comparei os resultados obtidos com métodos já conhecidos, obtendo resultados consistentes. O trabalho ainda contém uma demonstração da convergência do método das derivadas sucessivas alternativo baseada no teorema da Convergência Forte de Operadores.

Palavras-chave: E.D.O., P.V.I., Convergência Forte de Operador

ABSTRACT

JESUS KUTZ, Felipe. SOLVING ORDINARY DIFERENTIAL EQUATIONS BY POWER SERIES. 51 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017.

In this work I study solutions of Second Order Linear Differential Equations with non-constant coefficients. In order to solve these kinds of problems I use power series methods, in particular the Sucessive Differentiations method. Also I studied the Frobenius method and its cases. Finally I studied an alternative application of Sucessive Differentiations method for non-homogeneous equations. I compared the obtained results with known methods in order to get consistent results. This work also has a proof of the convergence of alternative Sucessive Differentiations method based in Theorem of the Strong Operator Convergence.

Keywords: O.D.E., I.V.P., Strong Operator Convergence.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Relação de recorrência (azul), e a solução encontrada pela rotina interna do Matlab ODE45 (vermelho).	11
Figura 2	– Relação de recorrência (em azul), e a solução encontrada pela rotina interna do Matlab ODE45 (em vermelho)	12
Figura 3	– Plot da solução com $c_1 = 1, c_2 = 0$	21
Figura 4	– Fórmula de recorrência (em azul), solução da rotina ODE45(em vermelho).	30
Figura 5	– Fórmula de recorrência (em azul), solução da rotina ODE45(em vermelho).	31
Figura 6	– Fórmula de recorrência (em azul), solução da rotina ODE45(em vermelho).	32
Figura 7	– Relação de recorrência, para as escolhas $y_2 = \delta = 1$ (azul), $y_2 = \delta = 2$ (vermelho), $y_2 = \delta = 3$ (vermelho).	37
Figura 8	– Relação de recorrência para as escolhas $y_2 = \delta = 0$ (azul), $y_2 = \delta = 1$ (vermelho), $y_2 = \delta = 2$ (verde).	38
Figura 9	– $y_3 = \delta = 1$ (azul), $y_3 = \delta = 10$ (vermelho) e $y_3 = \delta = 50$ (verde).	42

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
2	DERIVADAS SUCESSIVAS	9
3	MÉTODO DE FROBENIUS	13
3.1	Caso 1. As raízes m_1, m_2 da equação indicial são distintas e sua diferença não é inteira	18
3.2	Caso 2. As raízes m_1, m_2 da equação indicial diferem por um número inteiro	21
3.3	Caso 2A. O coeficiente de a_n em (39) é zero e os termos restantes do coeficiente de x^{m+n} se anulam.	22
3.4	Caso 2B. O Coeficiente de a_n na equação (39) é zero, mas os termos restantes no coeficiente de x^{m+n} não se anulam.	23
3.5	Caso 3. As raízes da equação indicial são iguais.	25
4	FÓRMULA RECURSIVA GERAL	28
5	CONVERGÊNCIA DO MÉTODO	40
6	CONCLUSÃO	49
	REFERÊNCIAS	50

1 INTRODUÇÃO

O uso de séries infinitas para resolver equações diferenciais é um método clássico para resolver equações diferenciais ordinárias explicitamente que continua sendo ensinado até hoje em muitos cursos de ciências exatas e engenharia. O motivo para isso é que as equações diferenciais ordinárias desempenham um papel importante nessas áreas. Também funções que possuem grande importância na área de física matemática são soluções de equações diferenciais de segunda ordem como por exemplo as funções de Bessel, que são as soluções da equação:

$$x^2 y'' + xy + (x^2 - \alpha^2)y = 0, \alpha \in \mathbb{C} \quad (1.1)$$

A equação (1.1) é uma equação diferencial de segunda ordem homogênea, onde seus coeficientes são polinômios e portanto podem ser considerados como funções analíticas. Para esses tipos de problemas existem diversos métodos para os solucionar usando séries de potências, que podem ser encontrados, por exemplo, em STEWART(2006), (POLLARD; TENENBAUM, 1985) e (BOYCE; DIPRIMA, 2002). Entre todos os métodos que estudamos, destacamos dois deles nesse trabalho, o método das derivadas sucessivas e o método de Frobenius.

O método das derivadas sucessivas, encontrado em (POLLARD; TENENBAUM, 1985), é o método onde conhecemos 2 valores iniciais, para então assumirmos a existência de uma solução analítica e a derivarmos, então substituir os valores iniciais nas derivadas da solução com intuito de descobrir os valores dos próximos coeficientes da solução em série de potências.

O método de Frobenius, encontrado em (POLLARD; TENENBAUM, 1985) e também (BOYCE; DIPRIMA, 2002), considera uma equação diferencial linear e homogênea que possui um ponto singular. O método consiste em buscar soluções da forma (3.12), chamadas de séries de Frobenius. Para isso utilizamos o teorema 3.7 que define as condições para que exista uma solução em forma de série de Frobenius, onde essa solução pode ser analítica ou não. Em seguida chegaremos que as soluções em série de Frobenius, dependerão das raízes de uma equação quadrática, essa equação é conhecida como equação indicial (3.19), e essa dependência das raízes da equação indicial, gera 3 possíveis casos diferentes para o estudo das soluções por meio do método de Frobenius.

Em seguida continuamos o estudo das equações diferenciais lineares não-homogêneas (4.1), onde nos embasamos no método das derivadas sucessivas para então chegarmos numa fórmula recursiva geral (4.12), a qual implementamos no Matlab/Octave e exibimos alguns exemplos, comparando as soluções do nosso método com as soluções geradas rotina ODE45 do Matlab.

Também estudamos os tipos de problemas que podemos encontrar ao admitirmos que toda equação do tipo (4.1) admite soluções analíticas, onde chegamos em algumas contradições

e com essas definimos um P.V.I admissível, definição 4.8.

Por fim no teorema 5.13 demonstramos a convergência do método de série de potências com base no Teorema da Convergência de operador forte em (KREYSZIG, 1978).

2 DERIVADAS SUCESSIVAS

O método das derivadas sucessivas é um dos métodos que busca resolver equações diferenciais lineares com coeficientes não constantes, ou seja equações do seguinte tipo

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_1(x)y' + f_0(x)y = Q(x) \quad (2.1)$$

O seguinte teorema, enunciado e demonstrado no teorema 65.2 em (POLLARD; TENENBAUM, 1985, p. 783-785), que não iremos demonstrar¹, enuncia uma condição suficiente para existência de uma solução em série de potências da equação (2.1)

Teorema 2.1. *Se cada função $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x), Q(x)$ da equação (2.1) for analítica em $x = x_0$, isto é, se cada função admitir uma expansão em série de Taylor em potências de $(x - x_0)$ que converge para valor da função, para todo x pertencente a uma vizinhança de x_0 , então existe uma única solução $y(x)$ da equação (2.1) que também é analítica em $x = x_0$ satisfazendo as n condições iniciais*

$$y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}, \quad (2.2)$$

isto é, a solução admite uma expansão em série de Taylor em potências de $(x - x_0)$ que também é válida numa vizinhança de x_0 .

Observação 2.2. *Um polinômio é uma série finita, portanto a sua expansão em série de Taylor é convergente para todo x . Portanto se as funções $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x), Q(x)$ da equação (2.1) forem polinômios, então, pelo teorema 2.1, toda solução da equação terá expansão em série de Taylor.*

Para apresentar o método das derivadas sucessivas iremos partir diretamente para os exemplos

Exemplo 2.3. *Utilizando o método das derivadas sucessivas vamos encontrar uma solução particular para seguinte equação diferencial linear*

$$y'' - (x + 1)y' + x^2y = x \quad (2.3)$$

com as seguintes condições iniciais $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Comparando (2.3) com (2.1), conclui-se que $f_0(x) = x^2, f_1(x) = -x - 1$ e $Q(x) = x$. Como todas as funções são polinômios, temos que (2.3) admite solução em série de Taylor válida para todo x , pela observação 2.2 e pelo teorema 2.1.

¹ Omitiremos a demonstração, pois ela se baseia em temas distantes da nossa discussão.

Como foram dados os valores iniciais de quando $x = 0$, iremos procurar uma solução na forma de uma série de Maclaurin.

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots \quad (2.4)$$

Usando as condições iniciais, em $x = 0$ temos $y = 1$, $y' = 1$, substituindo esses valores em (2.3), teremos o seguinte

$$y''(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow y''(0) = 1 \quad (2.5)$$

Logo pelas condições iniciais e pela equação (2.5) sabemos os valores de $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$. Para encontrar os próximos valores, usaremos as derivadas sucessivas da equação (2.3) e as aplicaremos em $x = 0$. Derivando a equação (2.3) temos que as próximas duas derivadas são

$$\begin{aligned} y''' - (x+1)y'' - y' + x^2y' + 2xy &= 1 \\ y^{(4)} - (x+1)y''' - 2y'' + x^2y'' + 4xy' + 2y &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

quando $x = 0$, temos $y = 1$, $y' = 1$, $y'' = 1$, substituindo em (2.6)

$$\begin{aligned} y'''(0) &= 3 \\ y^{(4)}(0) &= 3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Substituindo em (2.4) as condições iniciais, e os resultados obtidos em (2.5) e (2.7), teremos a seguinte série

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{8} + \dots, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.8)$$

que representa os cinco primeiros termos da solução em série da equação (2.3), satisfazendo as condições iniciais. A figura 1 compara a solução obtida por meio da relação de recorrência (4.12) (em azul), e a solução encontrada pela rotina interna do Matlab ODE45² (em vermelho).

Exemplo 2.4. Utilizando o método das derivadas sucessivas vamos encontrar uma solução particular para seguinte equação diferencial linear

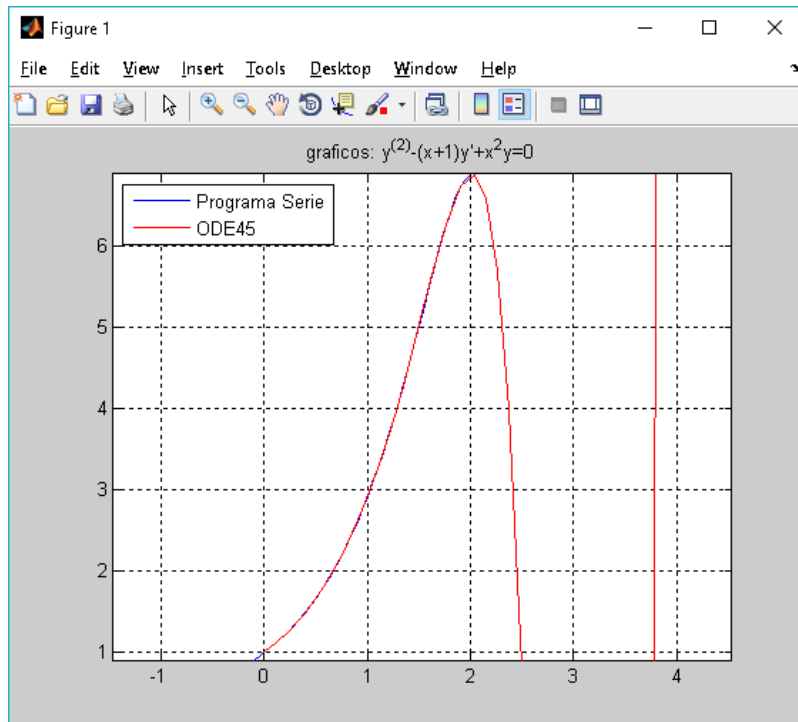
$$y'' + \frac{x}{1-x^2}y' - \frac{1}{1-x^2}y = 0, \quad |x| \neq 1 \quad (2.9)$$

com as seguintes condições iniciais $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Como as condições iniciais foram dadas quando $x = 0$, vamos procurar uma solução em série de potências de x da forma (2.4). Comparando a equação (2.9) com a equação (2.1),

² Esta função implementa o método de Runge-Kutta com um passo de tempo variável para resolver sistemas de primeira ordem. Transformamos as E.D.O.s de segunda ordem em um sistema de duas equações de primeira ordem.

Figura 1 – Relação de recorrência (azul), e a solução encontrada pela rotina interna do Matlab ODE45 (vermelho).



Fonte: Autoria própria / criada no Matlab.

temos que $f_0(x) = -\frac{1}{(1-x^2)}$, $f_1(x) = \frac{x}{(1-x^2)}$, $Q(x) = 0$. As séries de Maclaurin de $f_0(x)$ e $f_1(x)$ são as seguintes

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(1-x^2)} &= -(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots), \quad |x| < 1. \\ \frac{x}{(1-x^2)} &= x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots, \quad |x| < 1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Então pelo teorema 2.1, cada solução de (2.9) tem uma expansão em série de Taylor que é válida para $|x| < 1$. Agora substituindo as condições iniciais em $x = 0$, $y = 1$, $y' = 1$ na equação (2.9), temos

$$y''(0) = 1. \quad (2.11)$$

Pelas condições iniciais e pelo resultado em (2.11), conhecemos os valores de $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$. Para encontrar os valores dos próximos coeficientes vamos multiplicar a equação (2.9) por $(1-x^2)$ para então deriva-la sucessivamente e calcular seu valor em $(0, 1)$. Temos que as próximas duas derivadas são

$$\begin{aligned} (1-x^2)y''' - xy'' &= 0 \\ (1-x^2)y^{(4)} - 3xy''' - y'' &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Substituindo em (2.12) os valores das condições iniciais e o resultado obtido em (2.11) temos

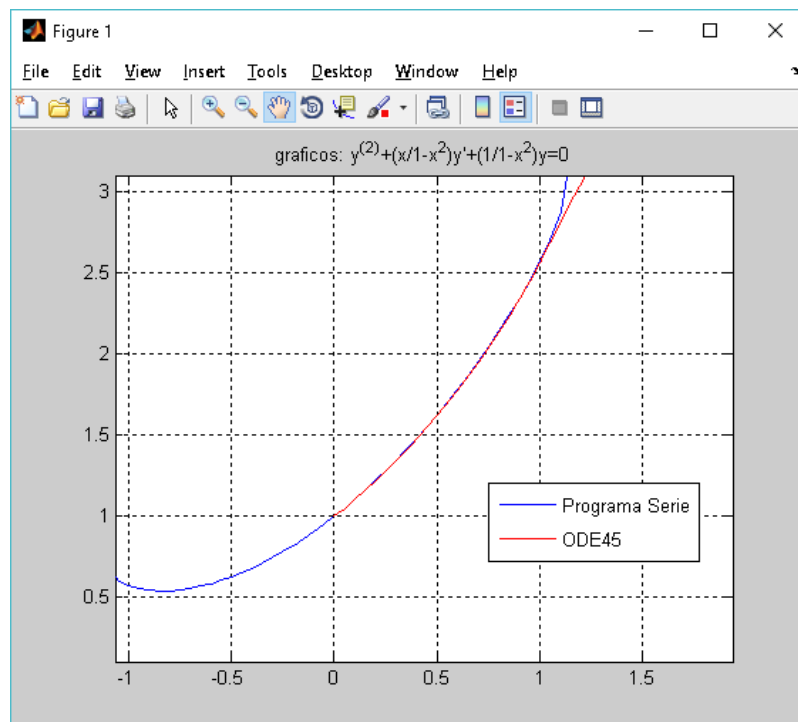
$$\begin{aligned} y'''(0) &= 0, \\ y^{(4)}(0) &= 1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por fim basta substituir os valores das condições iniciais e os resultados obtidos em (2.11) e (2.13) na série de Maclaurin (2.4), para então chegar na seguinte solução em série

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots, \quad |x| < 1 \quad (2.14)$$

que representa os primeiros cinco termos da solução em série da equação (2.9) e que satisfaz as condições iniciais. A figura 2 compara a solução obtida por meio da relação de recorrência (4.12) (em azul), e a solução encontrada pela rotina interna do Matlab ODE45 (em vermelho). As soluções afastam-se após $x > 1$ devido as funções em (2.9) apresentarem singularidades em $x = \pm 1$. E, portanto, a aproximação vale apenas para $|x| < 1$.

Figura 2 – Relação de recorrência (em azul), e a solução encontrada pela rotina interna do Matlab ODE45 (em vermelho)



Fonte: Autoria própria / criada no Matlab.

3 MÉTODO DE FROBENIUS

Devido ao método das Derivadas Sucessivas não tratar de soluções de E.D.O.'s em singularidades, estudamos também o Método de Frobenius, o qual nos permite estudar as soluções em pontos singulares. Como esclarecem os autores de um livro popular sobre o assunto:

Uma vez que os pontos singulares de uma equação diferencial são usualmente em pequeno número, poderíamos perguntar se não seria possível, simplesmente, ignorá-los, especialmente uma vez que já sabemos contruir soluções nas vizinhanças dos pontos ordinários. Isto, porém, não é possível pois os pontos singulares determinam as características principais da solução da equação numa medida muito maior da que se pensar à primeira vista. Na vizinhança de um ponto singular, a solução, muitas vezes, assume módulo muito grande ou então sofre rápidas variações de módulo. Assim o comportamento de um sistema físico modelado por equação diferencial, frequentemente, é mais interessante nas vizinhanças de um ponto singular. É freqüente que singularidades geométricas de um problema físico, como vértices ou arestas agudas, proporcionem pontos singulares na equação diferencial correspondente. Assim, embora à primeira vista possamos querer evitar os poucos pontos onde uma equação diferencial seja singular, é precisamente nestes pontos que precisamos estudar, com maior cuidado, a solução da equação. (BOYCE; DIPRIMA, 2002, pg. 177.)

Definição 3.1. Um ponto $x = x_0$ é chamado de **ponto ordinário** da equação diferencial linear

$$y^n + F_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + F_1(x)y' + F_0(x)y = Q(x) \quad (3.1)$$

se cada função F_0, F_1, \dots, F_{n-1} e Q for analítica em $x = x_0$.

Pelo Teorema 2.1, se $x = x_0$ for um ponto ordinário, então (3.1) possui uma solução que também é analítica em $x = x_0$, isto é, a solução possui uma representação em séries de Taylor em potências de $(x - x_0)$ válidas em uma vizinhança de x_0 .

Definição 3.2. Um ponto $x = x_0$ é dito uma **singularidade** de (3.1), se uma ou mais funções $F_0(x), F_1(x), \dots, F_{n-1}(x), Q(x)$ não forem analíticas em $x = x_0$.

Agora vamos focar nas equações diferenciais lineares de segunda ordem

$$y'' + F_1(x)y' + F_2(x)y = 0, \quad (3.2)$$

onde F_1 e F_2 são funções contínuas de x em um intervalo comum I .

Se (3.2) possuir singularidades essas são divididas em dois tipos, singularidades regulares e irregulares.

Definição 3.3. Se $x = x_0$ é uma singularidade de (3.2) e se a multiplicação de $F_1(x)$ por $(x - x_0)$ e de $F_2(x)$ por $(x - x_0)^2$ resultar em funções que são analíticas em $x = x_0$ então esse ponto é chamado de **singularidade regular**.

Exemplo 3.4. Vamos mostrar que $x = 0$ e $x = 1$ são singularidades regulares de

$$(x - 1)y'' + \frac{1}{x}y' - 2y = 0 \quad (3.3)$$

Dividindo (3.3) por $(x - 1)$, obtemos a equação equivalente

$$y'' + \frac{1}{x(x - 1)}y' - \frac{2}{(x - 1)}y = 0 \quad (3.4)$$

Comparando (3.4) com (3.2), podemos ver que

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{1}{x(x - 1)} \\ F_2(x) &= -\frac{2}{(x - 1)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Pela definição 3.2, $x = 0$ e $x = 1$ são singularidades de (3.4). Consideremos primeiro o ponto $x = 0$. Multiplicaremos F_1 por $(x - 0)$ e F_2 por $(x - 0)^2$. Resultará respectivamente em duas novas funções

$$\begin{aligned} xF_1 &= \frac{1}{(x - 1)} \\ x^2F_2 &= \frac{-2x^2}{(x - 1)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

que são analíticas em $x = 0$ e suas expansões em séries de Taylor são:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x - 1)} &= -(1 + x + x^2 + \dots), \\ \frac{-2x^2}{(x - 1)} &= 2(x^2 + x^3 + x^4 + \dots), \quad |x| < 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Então pela definição 3.3, $x = 0$ é uma singularidade regular de (3.4).

Agora considerando o segundo ponto $x = 1$, multiplicaremos F_1 por $(x - 1)$ e F_2 por $(x - 1)^2$. Teremos respectivamente

$$\begin{aligned} (x - 1)F_1 &= \frac{1}{x} \\ (x - 1)^2F_2 &= -2(x - 1) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ambas são analíticas em $x = 1$ e suas expansões em séries de Taylor são

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{1 - (1 - x)} = 1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3 + \dots \\ -2(x - 1) &= -2x + 2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Então pela definição 3.3, $x = 1$ é uma singularidade regular de (3.4) e, por causa disso, dizemos que $x = 1$ é uma singularidade regular de (3.3).

Definição 3.5. Se $x = x_0$ é uma singularidade de (3.2) e se a multiplicação de $F_1(x)$ por $(x - x_0)$ e $F_2(x)$ por $(x - x_0)^2$ resulta em funções em que uma delas ou ambas não são analíticas em $x = x_0$ então o ponto $x = x_0$ é dito uma **singularidade irregular** de (3.2).

Exemplo 3.6. Vamos mostrar que $x = 0$ e $x = 1$ são singularidades irregulares de

$$(x - 1)^2 y'' + \frac{1}{x^2} y' + 2y = 0 \quad (3.10)$$

Dividindo (3.10) por $(x - 1)^2$ obtemos a equação equivalente

$$y'' + \frac{1}{x^2(x - 1)^2} y' + \frac{2}{(x - 1)^2} y = 0 \quad (3.11)$$

Pela definição 3.2, $x = 0$ e $x = 1$ são singularidades de (3.11). Considerando o primeiro ponto $x = 0$, multiplicando $F_1 = \frac{1}{x^2(x - 1)^2}$ por $(x - 0)$ resulta em $x F_1 = \frac{1}{x(x - 1)^2}$, que não é analítica em $x = 0$. Então pela definição 3.5, $x = 0$ é uma singularidade irregular de (3.11) e por causa disso, dizemos que $x = 0$ é uma singularidade irregular de (3.10).

Agora consideramos o ponto $x = 1$, multiplicando F_1 por $(x - 1)$ resulta em $(x - 1) F_1 = \frac{1}{x^2(x - 1)}$ que não é analítica em $x = 1$. Então $x = 1$ é uma singularidade irregular de (3.11) e por causa disso dizemos $x = 1$ é uma singularidade irregular de (3.10).

Se a equação diferencial linear (3.2) possuir uma singularidade irregular em $x = x_0$, nesse caso F_1 ou F_2 não têm expansão em séries de potências. E de acordo com (POLLARD; TENENBAUM, 1985, p. 572) e (BOYCE; DIPRIMA 2002, p. 178) o problema de encontrar a solução da equação se torna muito difícil. No entanto, se (3.2) tiver uma singularidade regular em $x = x_0$, então podemos descrever um método para encontrar soluções em séries válidas numa vizinhança de x_0 . Este método é conhecido como **Método de Frobenius** e consiste em buscar uma solução da forma

$$y = (x - x_0)^m [a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots], \quad \text{com } a_0 \neq 0 \quad (3.12)$$

Note que quando $m = 0$ ou inteiro positivo, então a série se torna uma série de Taylor, no entanto, para valores inteiros negativos e não inteiros de m , (3.12) não será uma série de Taylor. A série de Frobenius, portanto, possui a série de Taylor como um caso especial.

Vamos assumir que x_0 é uma singularidade regular de (3.2). Assim pela definição 3.2 e 3.3 temos que F_1 ou F_2 , ou ambas, não são analíticas em $x = x_0$, mas que $(x - x_0)F_1$ e $(x - x_0)^2 F_2$ são analíticas. Isso significa que, frequentemente, F_1 tem como denominador $(x - x_0)$ e/ou F_2 tem $(x - x_0)^2$ em seu denominador. Contudo esse resultado não é necessariamente, sempre o caso pois funções como $F_1(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$ não são analíticas em $x = 0$, enquanto $x F_1(x) = \frac{x}{\text{sen}(x)}$ são. Multiplicando (3.2) por $(x - x_0)^2$ vamos ter a seguinte equação

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0) f_1(x) y' + f_2(x) y = 0 \quad (3.13)$$

onde f_1 e f_2 são analíticas em $x = x_0$.

O seguinte teorema vai nos assegurar a existência de uma solução em série de Frobenius (3.12) da equação (3.2).

Teorema 3.7. *Seja x_0 uma singularidade regular da equação (3.13), então essa equação tem pelo menos uma solução em série de Frobenius da forma (3.12). Isto é válido em um intervalo comum de convergência de $f_1(x)$ e $f_2(x)$ de (3.13) exceto talvez em $x = x_0$, isto é, se cada expansão em série de Taylor for válida em um intervalo $I = |x - x_0| < r$ então pelo menos uma solução em série de Frobenius é válida em $I = |x - x_0| < r$ exceto talvez para $x = x_0$*

Este teorema pode ser encontrado em POLLARD, TENENBAUM(1985, p.573). Uma demonstração da versão mais geral desse teorema, que é conhecida como Teorema de Fuchs, pode ser encontrada em TESCHL(2011, p. 117 e 118).

Agora iremos desenvolver o método de Frobenius, visto que o teorema anterior nos garante a existência de uma solução do tipo (3.12).

Sem perda de generalidade podemos tomar $x_0 = 0$ em (3.13), já que por uma translação de eixos nós podemos sempre substituir uma expansão em potências de $(x - x_0)$ por uma expansão em potências de x . Com isso podemos rescrever a equação (3.13) como

$$x^2 y'' + x f_1(x) y' + f_2(x) y = 0, \quad (3.14)$$

onde f_1 e f_2 são analíticas em $x = 0$. Assim cada função tem uma expansão em série de Taylor em potências de x válida numa vinhança de $x = 0$.

Sendo

$$\begin{aligned} f_1(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots, \\ f_2(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots, \end{aligned} \quad (3.15)$$

suas respectivas expansões em séries de Taylor.

A série de Frobenius (3.12) e suas duas derivadas em $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} y &= x^m (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \dots) \\ &= a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + a_2 x^{m+2} + \dots + a_n x^{m+n} + \dots, a_0 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= a_0 m x^{m-1} + a_1 (m+1) x^m + a_2 (m+2) x^{m+1} + \dots \\ &+ a_n (m+n) x^{m+n-1} + \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} y'' &= a_0 m(m-1) x^{m-2} + a_1 m(m+1) x^{m-1} \\ &+ a_2 (m+1)(m+2) x^m + \dots \\ &+ a_n (m+n-1)(m+n) x^{m+n-2} + \dots \end{aligned}$$

A função $y(x)$ será uma solução de (3.14) se ao substituirmos as derivadas (3.16) em (3.14) obtivermos uma equação verdadeira, assim fazendo essa substituição e também f_1 e f_2 por suas respectivas expansões em séries (3.15), obtemos

$$\begin{aligned}
& x^2[a_0m(m-1)x^{m-2} + a_1m(m+1)x^{m-1} + \dots \\
& + a_n(m+n-1)(m+n)x^{m+n-2} + \dots] \\
& + x(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) \\
& \times [a_0mx^{m-1} + a_1(m+1)x^m + \dots + a_n(m+n)x^{m+n-1} + \dots] \\
& + (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots) \\
& \times (a_0x^m + a_1x^{m+1} + \dots + a_nx^{m+n} + \dots) = 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Expandindo (3.17) e reagrupando os coeficientes das potências de x , teremos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
& a_0[m(m-1) + b_0m + c_0]x^m \\
& + \{a_1[(m+1)m + b_0(m+1) + c_0] + a_0[b_1m + c_1]\}x^{m+1} \\
& + \{a_2[(m+2)(m+1) + b_0(m+2) + c_0] + a_1[b_1(m+1) + c_1] + a_0[b_2m + c_2]\}x^{m+2} \\
& \dots \\
& + \{a_n[(m+n)(m+n-1) + b_0(m+n) + c_0] \\
& + a_{n-1}[b_1(m+n-1) + c_1] \\
& + a_{n-2}[b_2(m+n-2) + c_2] + \dots \\
& + a_0[b_nm + c_n]\}x^{m+n} + \dots = 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

A equação (3.18) será válida, se cada um dos coeficientes de x^k for zero, com $k \in \{m, \dots, m+n\}$. Já que assumimos $a_0 \neq 0$, o primeiro coeficiente em (3.18) será igual a zero, se, e somente se,

$$m(m-1) + b_0m + c_0 = 0. \tag{3.19}$$

Essa equação recebe um nome especial, é chamada de **equação indicial**, e devido ser uma equação quadrática em m , tem duas raízes m_1 e m_2 . Essas raízes podem ser:

1. Distintas, e sua diferença não é um número inteiro.
2. Distintas, e sua diferença é igual a um número inteiro.
3. Iguais.

Para a maioria das aplicações estamos interessados em soluções reais; contudo a equação indicial também pode ter raízes complexas. Uma teoria aplicando o Método de Frobenius para funções complexas pode ser encontrada em TESCHL(2011), mas não consideraremos este caso neste trabalho.

3.1 CASO 1. AS RAÍZES m_1, m_2 DA EQUAÇÃO INDICIAL SÃO DISTINTAS E SUA DIFERENÇA NÃO É INTEIRA

Cada uma das raízes $m = m_1$ e $m = m_2$ da equação indicial (3.19) farão o primeiro coeficiente da equação (3.18) igual a zero. Primeiramente vamos tratar da raiz m_1 , substituindo-a no lugar de m na equação (3.18) e pondo cada coeficiente de x^k , com $k \in \{m, \dots, m+n\}$, igual a zero, isso nos permite resolver recursivamente as equações geradas pelo último passo, ou seja, determinar os valores de $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, em termos de a_0 . Portanto a substituição de m_1 e o conjunto de valores $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, na equação (3.16) fará de $y(x)$ uma solução de (3.14) para x no intervalo de convergência de $y(x)$.

Seguindo o mesmo procedimento só que desta vez usando a raiz m_2 , obteremos um segundo conjunto de valores $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, em termos de a_0 , de modo que obtemos uma segunda solução $y(x)$ determinada por m_2 e $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.

Observação 3.8. *Nem toda equação da forma (3.14) tem duas soluções em séries de Frobenius independentes. Algumas possuem apenas uma solução. Se, no entanto, (3.14) tiver duas soluções em séries de Frobenius, então o seguinte teorema completa o teorema 3.7.*

Teorema 3.9. *As duas soluções em série de Frobenius de (3.14) são linearmente independentes, pois nem todas as equações indiciais incluem-se no presente caso. Cada solução é válida para todo x no intervalo de convergência comum de $f_1(x)$ e $f_2(x)$ exceto talvez para $x = 0$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrado em em TESCHL(2011, p. 117 e 118)

Observação 3.10. *Adicionalmente ao teorema 3.9.*

Cada solução em série de Frobenius vai convergir para todo x , exceto talvez para $x = 0$, em um círculo no plano complexo x , cujo o centro está em 0 e cujo o raio se estende pelo menos até a singularidade mais próxima de (3.14), isto é, cada solução é válida pelo menos para $0 < |x| < a$, onde a é a singularidade mais próxima ao 0.

Exemplo 3.11. *Vamos encontrar o intervalo de convergência da solução em série de*

$$x^2 y'' + \frac{x}{1+x^2} y' - 3y = 0 \quad (3.20)$$

Inicialmente dividimos (3.20) por x^2 e aplicando as definições 3.2 e 3.3 chegamos que $x = 0$ é uma singularidade regular de (3.20), comparando essa equação com (3.14), vemos que

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots, \quad |x| < 1 \\ f_2(x) &= -3, \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (3.21)$$

Então pelo teorema 3.9, cada uma das soluções em série de Frobenius de (3.20) é válida para $|x| < 1$, exceto talvez para $x = 0$.

Exemplo 3.12. Agora vamos encontrar a solução em série de Frobenius de

$$x^2 y'' + x(x + \frac{1}{2})y' - (x^2 + \frac{1}{2})y = 0 \quad (3.22)$$

Se dividirmos (3.22) por x^2 e aplicarmos as definições 3.2 e 3.3, podemos ver que $x = 0$ é uma singularidade regular de (3.22). Buscamos uma solução da forma (3.12) com $x_0 = 0$, ou seja

$$y = x^m(a_0 + a_1(x) + a_2(x)^2 + \dots), \text{ com } a_0 \neq 0 \quad (3.23)$$

Vamos calcular os coeficientes de y usando a equação (3.18). Para isso precisamos conhecer os coeficientes das representações em séries de $f_1(x)$ e $f_2(x)$. Comparando (3.22) com (3.14) temos

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} + x \\ f_2(x) &= -\frac{1}{2} - x^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Por $f_1(x)$ e $f_2(x)$ serem polinômios, já se encontram representadas por séries e suas representações são válidas para todo x . Então comparando (3.24) com (3.15), temos que

$$b_0 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = 1, \quad c_0 = -\frac{1}{2}, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = -1 \quad (3.25)$$

todos os outros b 's e c 's são iguais a zero.

Portanto temos que a equação indicial (3.19) assume a seguinte forma

$$m(m-1) + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - m - 1 = 0 \quad (3.26)$$

onde as raízes são $m = 1$, $m = -\frac{1}{2}$.

Já que as raízes são distintas e não diferem por número um inteiro, podemos aplicar o método de Frobenius. Para isso, igualamos a zero o coeficiente de x^{m+n} da equação (3.18). Lembrando que $m = 1$, e em (3.25) temos os valores de b_0, b_1, c_0, c_1, c_2 , portanto substituindo esses valores no coeficiente de x^{m+n} , vamos obter a seguinte equação

$$\begin{aligned} a_n[(1+n)(1+n-1) + \frac{1}{2}(1+n) - \frac{1}{2}] \\ + a_{n-1}[1(1+n-1) + 0] + a_{n-2}[0-1] = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Isolando a_n da equação, temos o seguinte

$$\frac{2n^2 + 3n}{2}a_n = -na_{n-1} + a_{n-2} \quad (3.28)$$

A equação (3.28) é a fórmula de recursão que nos permite calcular a_n para todo $n \geq 2$. Portanto antes de aplicar a recursão devemos calcular o valor de a_1 em função de a_0 . Para isso

podemos o coeficiente de x^{m+1} igual a zero, como $m = 1$ e os valores de b_0, b_1, c_0, c_1, c_2 dados em (3.25), temos que

$$a_1[(2)(1) + \frac{1}{2}(1+1) - \frac{1}{2}] + a_0[1+0] = 0 \Leftrightarrow a_1 = -\frac{2}{5}a_0 \quad (3.29)$$

Agora podemos então usar a fórmula de recursão

$n = 2$:

$$7a_2 = -2a_1 + a_0 = \frac{4}{5}a_0 + a_0 = \frac{9}{5}a_0 \Leftrightarrow a_2 = \frac{9}{35}a_0$$

$n = 3$:

$$\frac{27}{2}a_3 = -3a_2 + a_1 = -\frac{27}{35}a_0 - \frac{2}{5}a_0 = -\frac{41}{35}a_0 \Leftrightarrow a_3 = -\frac{82}{945}a_0 \quad (3.30)$$

$n = 4$:

$$22a_4 = -4a_3 + a_2 = \frac{328}{945}a_0 + \frac{9}{35}a_0 = \frac{571}{945}a_0 \Leftrightarrow a_4 = \frac{571}{20790}a_0$$

Substituindo o valor $m = 1$, e os valores dos a 's obtidos acima em (3.23) temos

$$y_1 = a_0x(1 - \frac{2}{5}x + \frac{9}{35}x^2 - \frac{82}{945}x^3 + \frac{571}{20790}x^4 - \dots), \quad (3.31)$$

que são os cinco primeiros termos de uma solução em série de Frobenius de (3.22).

Para achar a outra solução basta substituir $m = -\frac{1}{2}$ e repetir os mesmos passos para assim chegar na seguinte solução em série

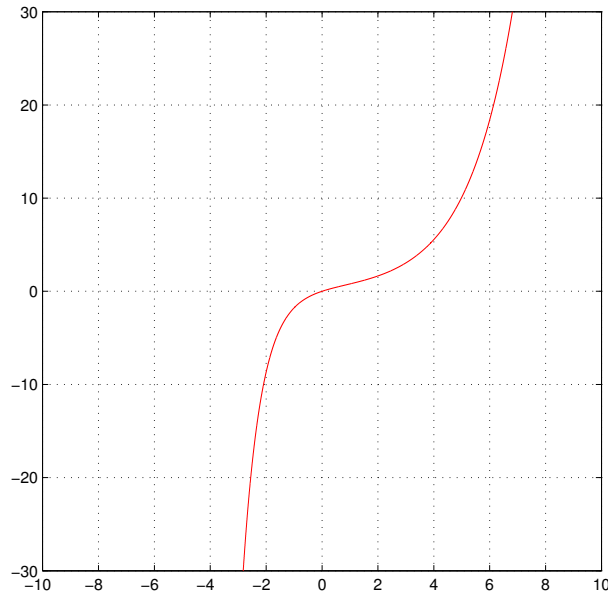
$$y_2 = a_0x^{-\frac{1}{2}}(1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{18}x^3 + \frac{119}{360}x^4 - \dots) \quad (3.32)$$

Pelo Teorema 3.9, as duas soluções obtidas são linearmente independentes, portanto a solução geral de (3.22) é uma combinação linear de (3.31) e (3.32), ou seja

$$y = c_1x(1 - \frac{2}{5}x + \frac{9}{35}x^2 - \frac{82}{945}x^3 + \frac{571}{20790}x^4 - \dots) + c_2x^{-\frac{1}{2}}(1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{18}x^3 + \frac{119}{360}x^4 - \dots) \quad (3.33)$$

onde a_0 foi substituído por constantes arbitrárias c_1 e c_2 . Como em (3.24) $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são polinômios então suas representações são válidas para todo x . Assim pelo teorema 3.9, cada solução em série de Frobenius é válida para todo x exceto talvez para $x = 0$. Nesse exemplo a solução (3.31) é válida para todo x . A segunda solução (3.32), pela presença de $x^{-\frac{1}{2}}$ é válida para todo x exceto $x = 0$. Então a solução geral (3.33) é válida para $0 < |x| < \infty$.

Note que para $x < 0$, a segunda série em (3.33) é imaginária. Podemos torna-lá real escolhendo $c_2 = ci$, onde $c \in \mathbb{R}$. Na Figura 3 plotamos a solução $y(x) = x(1 - \frac{2}{5}x + \frac{9}{35}x^2 - \frac{82}{945}x^3 + \frac{571}{20790}x^4 - \dots$

Figura 3 – Plot da solução com $c_1 = 1, c_2 = 0$ 

Fonte: Autoria própria / criada no Matlab.

3.2 CASO 2. AS RAÍZES m_1, m_2 DA EQUAÇÃO INDICIAL DIFEREM POR UM NÚMERO INTEIRO

Se as raízes da equação indicial (3.19) diferem por um inteiro, então podemos reescrevê-las como m e $m + N$, onde N é um inteiro positivo. Já que $m + N$ é uma raiz de (3.19), então satisfaz a seguinte equação,

$$(m + N)(m + N - 1) + b_0(m + N) + c_0 = 0 \quad (3.34)$$

Comparando o lado esquerdo da equação (3.34) com o coeficiente de a_n no último termo da equação (3.18), serão iguais se substituirmos n por N . Portanto se usarmos a menor raiz m em (3.19) para encontrar o conjunto de valores dos a 's que vão zerar o coeficiente de cada x^k , com $k \in \{m, \dots, m + n\}$, vamos parar quando o termo em que a_N aparecer, já que seu coeficiente será zero. Então não podemos resolver esta equação para a_N em função dos a 's anteriores, a menos que os termos restantes na equação se anulem. Nesse caso, a equação será satisfeita por qualquer valor arbitrário de a_N , assim podemos continuar a determinar os valores dos próximos a 's, isto é, de a_{N+1}, a_{N+2}, \dots em função de a_0 e a_N .

Portanto pelo que consta acima, se as raízes da equação indicial (3.19) diferem por um número inteiro positivo N , existem duas possibilidades que podem ocorrer, e essas serão discutidas separadamente.

3.3 CASO 2A. O COEFICIENTE DE a_n EM (39) É ZERO E OS TERMOS RESTANTES DO COEFICIENTE DE x^{m+n} SE ANULAM.

Nesse caso a maior raiz $m + N$ determinará um conjunto de valores dos coeficientes da solução $y(x)$ em função de a_0 , e a menor raiz m vai determinar dois conjuntos de valor de a'_s , um dos conjuntos será em função de a_0 e outro em função de a_N . No entanto, a solução em série de Frobenius obtida pela maior raiz em função de a_0 , não será linearmente independente da outra obtida em função de a_0 pela menor raiz. Então a menor raiz dará, nesse caso, duas soluções independentes, em que a combinação linear será a solução geral da equação (3.14) e essa terá duas constantes arbitrárias a_0 e a_N . Essas soluções serão válidas em um mesmo intervalo dado pelo Teorema 3.9.

Exemplo 3.13. *Vamos encontrar a solução da seguinte equação*

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{2^2}\right)y = 0 \quad (3.35)$$

Pelas definições de singularidade 3.2 e singularidade regular 3.3, temos que $x = 0$ é um singularidade regular de (3.35). Então vamos procurar por uma solução em série de Frobenius como (3.23)

Comparando (3.35) com a equação (3.14), concluímos que

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 \\ f_2(x) &= -\frac{1}{4} + x^2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Como as duas funções são polinômios, ambas já estão representadas em forma de séries. Agora podemos comparar (3.36) com (3.15) para assim obter os seguintes coeficientes

$$b_0 = 1, c_0 = -\frac{1}{4}, c_1 = 0, c_2 = 1 \quad (3.37)$$

todos os outros b'_s e c'_s são zero.

Substituindo os valores de (3.37) na equação indicial (3.19), temos

$$m(m-1) + m - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow m^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad (3.38)$$

Assim temos que as raízes da equação indicial serão $m = \frac{1}{2}$ e $m = -\frac{1}{2}$. A diferença entre elas é 1 que é um número inteiro. Então nesse caso temos que $N = 1$. Quando $m = -\frac{1}{2}$, que é a menor raiz, obtemos a seguinte equação envolvendo a_1 .

$$a_1 \left[\left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right] + a_0(0) = 0 \Leftrightarrow 0a_1 + 0a_0 = 0 \quad (3.39)$$

O coeficiente de a_1 é zero, no entanto, o outro termo da equação também é zero, logo podemos aplicar o método do caso 2A. Nesse caso $N = 1$ então podemos encontrar os demais

coeficientes a 's em função de a_0 e $a_N = a_1$, para isso basta pegar o coeficiente de x^{m+n} da equação (3.18) e igualar a zero. Como $m = -\frac{1}{2}$, teremos a seguinte fórmula de recursão

$$a_n \left[\left(-\frac{1}{2} + n \right) \left(-\frac{3}{2} + n \right) + \left(-\frac{1}{2} + n \right) - \frac{1}{4} \right] + a_{n-1}(0) + a_{n-2}(1) = 0 \quad (3.40)$$

Simplificando (3.40), temos

$$(n^2 - n)a_n = -a_{n-2}, \quad n \geq 2. \quad (3.41)$$

Agora basta variar n , lembrando que a_0 e a_1 são arbitrários

$$\begin{aligned} n = 2 : a_2 &= -\frac{1}{2}a_0 \\ n = 3 : a_3 &= -\frac{1}{6}a_1 \\ n = 4 : a_4 &= -\frac{1}{12}a_2 = \frac{1}{24}a_0 \\ n = 5 : a_5 &= -\frac{1}{20}a_3 = \frac{1}{120}a_1 \\ n = 6 : a_6 &= -\frac{1}{30}a_4 = -\frac{1}{720}a_0 \\ n = 7 : a_7 &= -\frac{1}{42}a_5 = -\frac{1}{5040}a_1 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Substituindo $m = -\frac{1}{2}$ e os valores obtidos pela recursão (3.42) na série de Frobenius, teremos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} y &= a_0 x^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \dots \right) \\ &+ a_1 x^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6 + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

que são primeiros oito termos da solução geral representados por y . Como $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são polinômios, sua representação em séries é válida para todo x portanto pelo teorema 3.9 a solução em série de Frobenius converge para todo x , exceto talvez para $x = 0$. A primeira série converge para todo x exceto para $x = 0$ e a segunda converge para todo x . Então a solução geral (3.43) converge para $0 < |x| < \infty$. Note que para $x < 0$, ambas séries são imaginárias, no entanto a primeira delas não está definida para $x = 0$ e poderíamos tomar constantes distintas, por exemplo $a_0 \in \mathbb{R}$ no ramo $x > 0$ e ia_0 no ramo $x < 0$, obtendo uma solução real.

3.4 CASO 2B. O COEFICIENTE DE a_n NA EQUAÇÃO (39) É ZERO, MAS OS TERMOS RESTANTES NO COEFICIENTE DE x^{m+n} NÃO SE ANULAM.

Nesse caso apenas a maior raiz $m + N$ da equação indicial (3.19) determinará um conjunto de valores dos a 's em função do a_0 . Portanto existirá apenas uma solução em série de

Frobenius da equação (3.14).

Observação 3.14. *A segunda solução independente da equação (3.14) será da forma*

$$y_2 = u(x) - b_N y_1(x) \log(x), \quad x > 0 \quad (3.44)$$

onde N é a diferença inteira positiva entre as raízes da equação indicial (3.19), y_1 é uma solução em série de Frobenius da equação (3.14) obtida com a maior raiz $m + N$, e $u(x)$ é uma solução em série de Frobenius da equação

$$x^2 u'' + x f_1 u' + f_2 u = b_N [2x y_1' + (f_1 - 1) y_1] \quad (3.45)$$

da forma

$$u(x) = x^m (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots), \quad (3.46)$$

com f_1 e f_2 como na equação (3.13).

Se, em (3.45), substituirmos u e suas respectivas derivadas, e a solução em série de Frobenius y_1 e sua derivada, então o resultado da equação nos permitirá encontrar os valores dos b 's em (3.46). Não deduziremos este resultado aqui. Mais informações podem ser encontradas em (POLLARD; TENENBAUM, 1985).

Exemplo 3.15. *Vamos encontrar a solução da seguinte equação*

$$x^2 y'' - x(2 - x)y' + (2 + x^2)y = 0 \quad (3.47)$$

Dividindo a equação por x^2 e aplicando as definições de singularidade 3.2 e singularidade regular 3.3, temos que $x = 0$ é uma singularidade regular de (3.47). Portanto vamos procurar pela série de Frobenius da forma (3.23)

Comparando (3.47) com a equação (3.14), temos que

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -2 + x \\ f_2(x) &= 2 + x^2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Como as duas funções são polinômios, ambas já estão representadas em forma de séries. Agora podemos comparar (3.48) com (3.15) para assim obter os seguintes coeficientes

$$b_0 = -2, \quad b_1 = 1, \quad c_0 = 2, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 1 \quad (3.49)$$

todos os outros b 's e c 's são zero.

Substituindo os valores de (3.49) na equação indicial teremos a seguinte equação

$$m(m - 1) - 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \quad (3.50)$$

Assim temos que as raízes da equação indicial serão $m = 1$ e $m = 2$. A diferença entre elas é $N = 1$ que é um número inteiro. Usando a menor raiz $m = 1$ e os valores em (3.49), igualando a zero o coeficiente de x^{m+1} da equação (3.18), teremos o seguinte

$$a_1(2 - 4 + 2) + a_0(1 + 0) = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot 0 + a_0 = 0 \quad (3.51)$$

Logo o coeficiente $a_N = a_1$ é zero, no entanto, o coeficiente a_0 não é igual a zero. Portanto a raiz $m = 1$ não levará a uma solução, e por isso usaremos a maior raiz $m = 2$, vamos igualar a zero o coeficiente de x^{m+1} da equação (3.18), obteremos

$$a_1(3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 2) + 2a_0 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -a_0 \quad (3.52)$$

E para obter a fórmula de recursão, vamos igualar a zero o coeficiente de x^{m+n} da equação (3.18)

$$\begin{aligned} a_n[(2+n)(1+n) - 2(2+n) + 2] + (1+n)a_{n-1} + a_{n-2} &= 0 \Leftrightarrow \\ (n^2 + n)a_n &= -(n+1)a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Usando a fórmula de recursão, teremos o seguinte

$$\begin{aligned} n = 2 : 6a_2 &= -3a_1 - a_0 = 3a_0 - a_0 \Leftrightarrow a_2 = \frac{a_0}{3} \\ n = 3 : 12a_3 &= -4a_2 - a_1 = -\frac{4}{3}a_0 + a_0 \Leftrightarrow a_3 = -\frac{a_0}{36} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Substituindo na série de Frobenius $m = 2$ e os valores obtidos com a fórmula de recursão, chegamos na seguinte expressão

$$y_1 = a_0 x^2 \left(1 - x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{36} - \dots \right) \quad (3.55)$$

onde y_1 representa os quatro primeiros termos da solução em série de Frobenius da equação (3.47). Como f_1 e f_2 são polinômios suas representações em séries são válidas para todo x . Então, pelo teorema 3.7, y_1 é também válida para todo x exceto talvez para $x = 0$.

3.5 CASO 3. AS RAÍZES DA EQUAÇÃO INDICIAL SÃO IGUAIS.

Se as raízes da equação indicial são iguais, teremos apenas um conjunto de valores dos a 's e portanto apenas uma solução em série de Frobenius da equação (3.14) que será obtida da equação (3.18).

Exemplo 3.16. Vamos encontrar a solução geral da seguinte equação

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0 \quad (3.56)$$

Dividindo a equação por x^2 e aplicando as definições de singularidade 3.2 e singularidade regular 3.3, temos que $x = 0$ é uma singularidade regular de (3.56). Portanto vamos procurar pela série de Frobenius da forma (3.23)

Comparando (3.56) com a equação (3.14), temos que

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 \\ f_2(x) &= x^2 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Como ambas funções são polinômios, temos que ambas já estão representadas em forma de séries. Agora podemos comparar (3.57) com (3.15) para assim obter os seguintes coeficientes

$$b_0 = 1, \quad c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 1 \quad (3.58)$$

Todos os outros b 's e c 's são zero. Substituindo os valores de (3.58) na equação indicial teremos a seguinte equação

$$m(m-1) + m = 0 \Leftrightarrow m^2 = 0 \quad (3.59)$$

Logo ambas raízes são iguais $m = 0$. Portanto haverá apenas uma solução em série de Frobenius. Usando a raiz $m = 0$, e igualando zero o coeficiente de x^{m+1} da equação (3.18), obteremos

$$a_1(1+0) + a_0(0) = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0 \quad (3.60)$$

Agora podemos obter a fórmula de recursão, para isso vamos igualar a zero o coeficiente de x^{m+n} da equação (3.18)

$$\begin{aligned} a_n[(n)(n-1) + (1)(n)] + a_{n-1}(0) + a_{n-2}(1) &= 0 \Leftrightarrow \\ n^2 a_n = -a_{n-2} \Leftrightarrow a_n &= -\frac{a_{n-2}}{n^2}, \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Usando a fórmula de recursão, teremos o seguinte

$$\begin{aligned} n = 2 : a_2 &= -\frac{1}{2^2} a_0, \\ n = 3 : a_3 &= -\frac{1}{3^2} a_1 = 0, \\ n = 4 : a_4 &= -\frac{1}{4^2} a_2 = \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} a_0, \\ n = 5 : a_5 &= -\frac{1}{5^2} a_3 = 0, \\ n = 6 : a_6 &= -\frac{1}{6^2} a_4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} a_0, \end{aligned} \quad (3.62)$$

Substituindo na série de Frobenius $m = 0$ e os valores obtidos com a fórmula de recursão, chegamos na seguinte solução

$$y_1 = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \right) \quad (3.63)$$

Pelo teorema 3.7 essa série é válida para todo x . Uma segunda solução para equação (3.56) pode ser encontrada, pela substituição da equação (3.44) pois duas raízes iguais podem ser vistas como o caso das raízes que diferem por um inteiro N , com $N = 0$ e com o coeficiente $a_0 \neq 0$. Assim reduz-se ao caso anterior. Então a solução geral de (3.56) é dada por

$$y = c_1 y_1 + c_2 \left(\frac{x^2}{2^2} - \frac{1 + \frac{1}{2}}{2^2 \cdot 4^2} x^4 + \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} x^6 + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{n+1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2} x^{2n} + \dots + y_1 \log(x) \right), \quad x > 0. \quad (3.64)$$

Onde y_1 é dado em (3.63).

4 FÓRMULA RECURSIVA GERAL

Neste capítulo consideramos a equação

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x) \quad (4.1)$$

sujeita às condições iniciais $y(x_0) = k_1$ e $y'(x_0) = k_2$, com k_1 e $k_2 \in \mathbb{R}$ e onde $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ são funções analíticas em $x = x_0$, ou seja, podem ser representadas, em uma vizinhança de x_0 , da seguinte forma

$$\begin{aligned} a(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \\ b(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n \\ c(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \\ g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x - x_0)^n \end{aligned} \quad (4.2)$$

Vamos admitir que a equação (4.1) possua uma solução analítica em $x = x_0$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x - x_0)^n, \quad (4.3)$$

utilizaremos o método das derivadas sucessivas para obter uma fórmula recursiva geral e encontrar os coeficientes y_n 's da solução em série de potências.

Como $y(x)$ e os coeficientes $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ são funções analíticas podemos derivar a equação (4.1) quanta vezes queiramos, logo derivando-a $n - 2$ vezes termo a termo, e aplicando a regra geral de Leibniz temos

$$(ay'')^{(n-2)} = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} a^{(i)} y^{(n-i)} \quad (4.4)$$

$$(by')^{(n-2)} = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} b^{(i)} y^{(n-1-i)} \quad (4.5)$$

$$(cy)^{(n-2)} = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} c^{(i)} y^{(n-2-i)} \quad (4.6)$$

Visando igualar os índices das derivadas de y vamos fazer as seguintes mudanças de variável $i = n - j$, $i = n - j - 1$ e $i = n - j - 2$, então substituir nas equações (4.4) (4.5) e (4.6) respectivamente, obtendo

$$(ay'')^{(n-2)} = \sum_{j=2}^n \binom{n-2}{n-j} a^{(n-j)} y^{(j)} = \sum_{i=0}^n \binom{n-2}{n-i} a^{(n-i)} y^{(i)} \quad (4.7)$$

$$(\overline{by}')^{(n-2)} = \sum_{j=2}^n \binom{n-2}{n-j-1} b^{(n-j-1)} y^{(j)} = \sum_{i=0}^n \binom{n-2}{n-i-1} b^{(n-i-1)} y^{(i)} \quad (4.8)$$

$$(cy)^{(n-2)} = \sum_{j=2}^n \binom{n-2}{n-j-2} c^{(n-j-2)} y^{(j)} = \sum_{i=0}^n \binom{n-2}{n-i-2} c^{(n-i-2)} y^{(i)}, \quad (4.9)$$

onde consideramos como zero todas as combinações fora do Triângulo de Pascal.

Derivando a equação (4.1) $n - 2$ vezes para então substituir as equações (4.7), (4.8) e (4.9) em (4.1) obtemos:

$$\begin{aligned} g(x)^{n-2} &= (a(x)y'')^{(n-2)} + (b(x)y')^{(n-2)} + (c(x)y)^{(n-2)} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n-2}{n-i} a^{(n-i)} y^{(i)} + \sum_{i=0}^n \binom{n-2}{n-i-1} b^{(n-i-1)} y^{(i)} + \sum_{i=0}^n \binom{n-2}{n-i-2} c^{(n-i-2)} y^{(i)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Usando o fato, que para uma função analítica temos, $f(x) = \sum f_n(x - x_0)^n$ obtemos $f^{(n)}(x_0) = n! f_n$; de modo que:

$$g_{n-2}(n-2)! = \sum_{i=0}^n (n-2)! i(i-1) a_{n-i} y_i + (n-2)! i b_{n-1-i} y_i + (n-2)! c_{n-2-i} y_i \quad (4.11)$$

onde consideramos $a^{(i)} = 0, b^{(i)} = 0, c^{(i)} = 0$ para $i < 0$, teremos a seguinte equação

$$\sum_{i=0}^n (i(i-1)a_{n-i} + i b_{n-1-i} + c_{n-2-i}) y_i = g_{n-2} \quad (4.12)$$

Se tivermos $g(x) = 0$, teremos o caso homogêneo, também se $a_0 \neq 0$ podemos isolar y_n em termos de y_0, y_1, \dots, y_{n-1} obtendo

$$y_n = \frac{-1}{a_0} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i(i-1)a_{n-i}}{n(n-1)} + i \frac{b_{n-1-i}}{n(n-1)} + \frac{c_{n-2-i}}{n(n-1)} \right) y_i \quad (4.13)$$

Essa fórmula nos permite encontrar os valores de y_n em função de y_0, y_1, \dots, y_{n-1} . Note que inicialmente conhecemos os valores de y_0 e y_1 portanto nesse caso a recursão terá início em $n = 2$.

Fizemos a implementação da fórmula (4.13) no MATLAB, os exemplos abaixo mostra a comparação entre as soluções da nossa implementação com as soluções da rotina ODE45 rotina padrão do Matlab para resolver equações diferenciais.

Exemplo 4.1. Dada a seguinte E.D.O

$$e^x y'' + \sin(x) y' + \cos(x) y = 0 \quad (4.14)$$

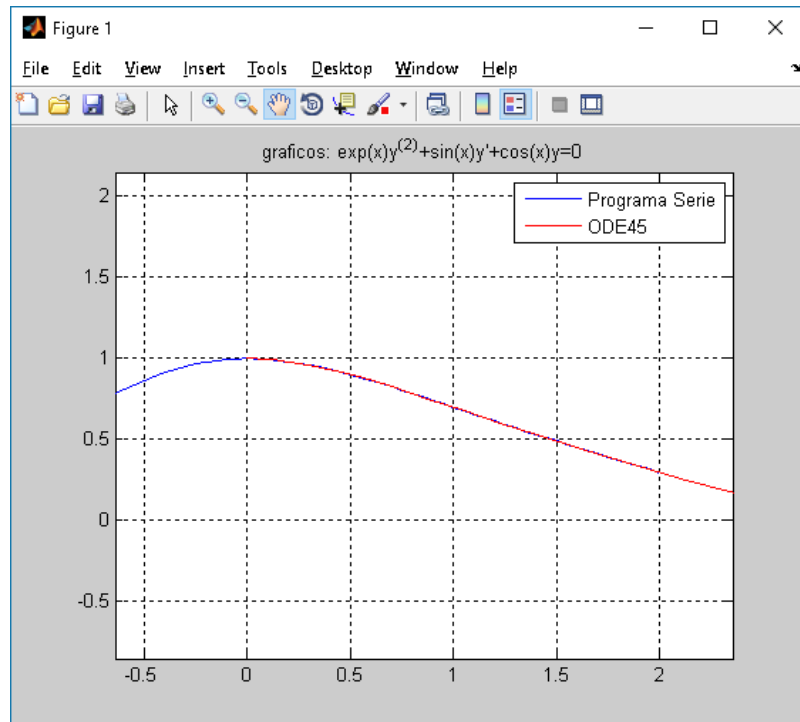
com $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$

Aplicando a fórmula (4.12) obteremos a seguinte solução em série

$$y(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{36}x^3 + \frac{1}{192}x^4 + \dots \quad (4.15)$$

Agora vamos comparar o resultado gerado pela nossa fórmula recursiva implementada no MATLAB com a solução da rotina ODE45.

Figura 4 – Fórmula de recorrência (em azul), solução da rotina ODE45(em vermelho).



Fonte: Autoria própria / criada no Matlab.

Exemplo 4.2. Dada a seguinte E.D.O

$$\frac{1}{1-x}y'' + \cos(x)y' + e^x y = 0 \quad (4.16)$$

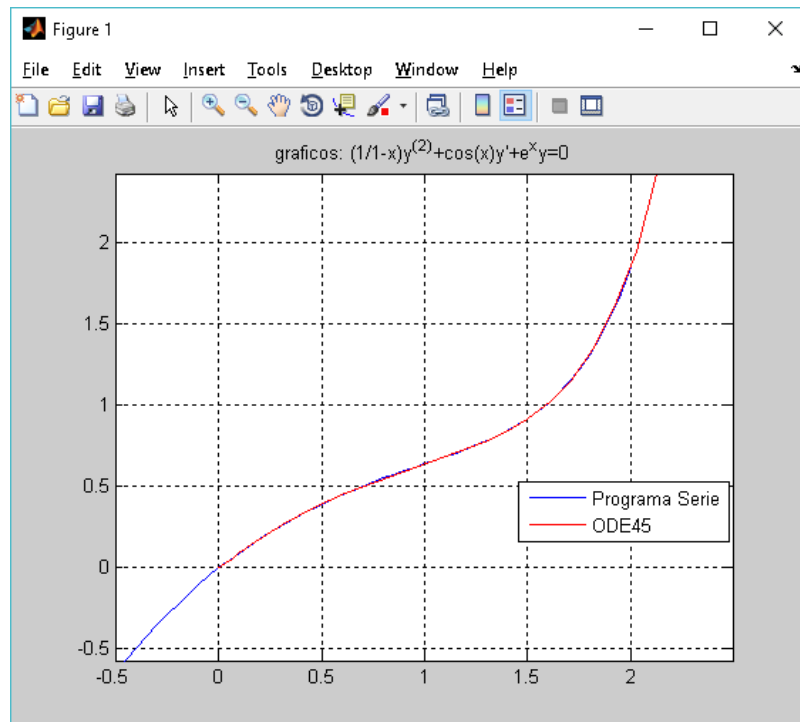
com $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$

Aplicando a fórmula (4.12) obteremos a seguinte solução em série

$$y(x) = x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{36}x^3 - \frac{1}{576}x^4 + \dots \quad (4.17)$$

Agora vamos comparar o resultado gerado pela nossa fórmula recursiva implementada no MATLAB com a solução da rotina ODE45.

Figura 5 – Fórmula de recorrência (em azul), solução da rotina ODE45(em vermelho).



Fonte: Autoria própria / criada no Matlab.

Exemplo 4.3. Dada a seguinte E.D.O

$$\frac{1}{1-x}y'' + e^x y' + \cos(x)y = 0 \quad (4.18)$$

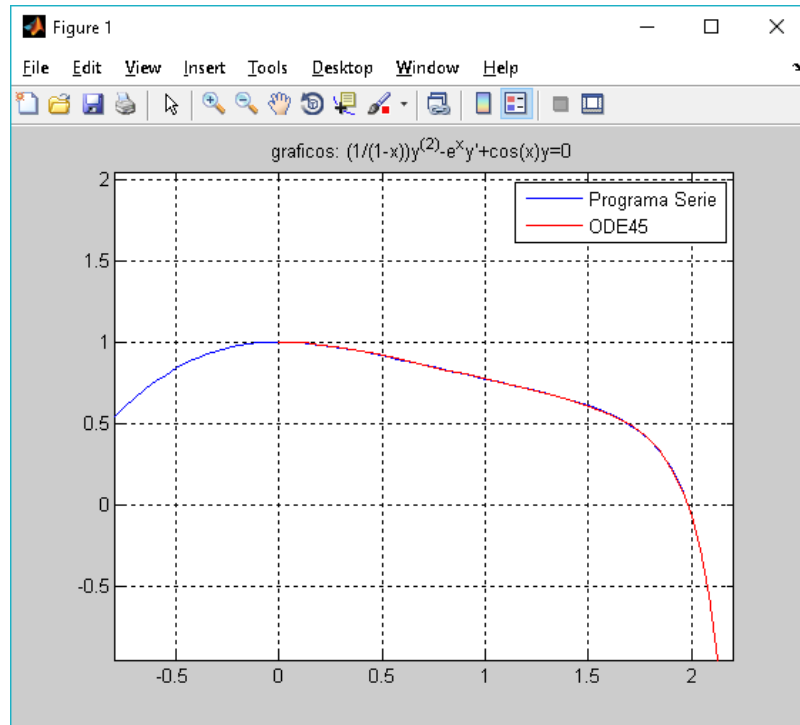
com $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$

Aplicando a fórmula (4.12) obteremos a seguinte solução em série

$$y(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{18}x^3 - \frac{11}{19200}x^5 + \dots \quad (4.19)$$

Agora vamos comparar o resultado gerado pela nossa fórmula recursiva implementada no MATLAB com a solução da rotina ODE45.

Figura 6 – Fórmula de recorrência (em azul), solução da rotina ODE45(em vermelho).



Fonte: Autoria própria / criada no Matlab.

Nos exemplos vistos anteriormente $a_0 \neq 0$, se $a_0 = 0$ precisamos diferenciar entre diversas situações. Agora estamos interessados em estudar as condições para quais a equação (4.1) vai admitir uma solução analítica.

Quando procuramos soluções da forma de Frobenius

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{i=0}^{\infty} y_i (x - x_0)^i \quad (4.20)$$

com $y_0 \neq 0$, $r \in \mathbb{R}$, para o P.V.I (4.1), obtemos as seguintes restrições para as condições iniciais

Tabela 1 – Tabela de restrições.

	$y(x_0)$	$y'(x_0)$
$r < 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$r = 0$	$y_0 \in \mathbb{R}$	$y_1 \in \mathbb{R}$
$0 < r < 1$	0	$\pm\infty$
$r = 1$	0	$y_1 \in \mathbb{R}$
$r > 0$	0	0

Autoria própria.

Então existirá uma solução em série de potências para o P.V.I (4.1) para qualquer valor inicial se $y(x)$ for analítica e de ordem 0, como enunciado no 4.5. Para os casos particulares com $y_0 = 0$ as possíveis soluções teriam que satisfazer $r \geq 1$.

Definição 4.4. Seja $y(x)$ uma função da forma

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{i=0}^{\infty} y_i (x - x_0)^i \quad (4.21)$$

com $y_0 \neq 0$ e tal que $\sum y_i (x - x_0)^i$ converge para x numa vizinhança de x_0 . Definimos a ordem de y em x_0 como

$$o(y) := r \quad (4.22)$$

Se a função y é analítica em x_0 , então sua ordem é o índice do primeiro coeficiente não nulo de sua expansão em série de potências em x_0 .

Lema 4.5. As soluções do P.V.I (4.1) da forma $y(x) = (x - x_0)^r \sum_{i=0}^{\infty} y_i (x - x_0)^i$ devem ter $r \in \mathbb{Z}$ se $g \neq 0$.

Demonstração:

Para tal solução teríamos, $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y$ ou é igual a zero ou tem ordem $r + n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Mas g tem ordem m , $m \in \mathbb{Z}$, que faz com que (4.1) seja impossível de ser satisfeita se r não for inteiro.

□

Por conveniência vamos fazer a seguinte substituição $i \rightarrow n - i$, para então podermos escrever a equação (4.12) da seguinte forma

$$\sum_{i=0}^n ((n - i)(n - i - 1)a_i + (n - i)b_{i-1} + c_{i-2}) y_{n-i} = g_{n-2} \quad (4.23)$$

Definição 4.6. Dizemos que a equação (4.1) tem um ponto k -singular x_0 se existir $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \text{ com } n \in \{0, \dots, k - 1\} \\ b_n &= 0, \text{ com } n \in \{0, \dots, k - 2\} \\ c_n &= 0, \text{ com } n \in \{0, \dots, k - 3\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde pelos um dos termos a_k , b_{k-1} e c_{k-2} é diferente de zero.

Observação 4.7. Para o ponto k -singular x_0 o lado esquerdo da equação (4.23) será igual a zero para $n = 2, \dots, k - 1$. Logo isto vai implicar em uma restrição para a função $g(x)$

$$g_0 = g_1 = \dots = g_{k-3} = 0$$

Além disso, se $k = 1$, a equação (4.23) nos dá para $n = 2$

$$c_0 y_0 + b_0 y_1 = g_0 \quad (4.25)$$

para essa equação temos três possibilidades:

- Se $c_0 = b_0$, então $g_0 = 0$.
- Se $b_0 \neq 0$, então $y_1 = \frac{(g_0 - c_0 y_0)}{b_0}$.
- Se $c_0 \neq 0$ e $b_0 = 0$, então $y_0 = \frac{g_0}{c_0}$.

Logo pode não ser possível resolver o P.V.I para qualquer condição inicial.

Além disso, se $k \geq 2$, para $n = k$ e para $n = k + 1$, a equação (4.23) retorna

$$c_{k-2}y_0 = g_{k-2} \quad (4.26)$$

$$c_{k-1}y_0(b_{k-1} + c_{k-2})y_1 = g_{k-1} \quad (4.27)$$

Considerando y_0 e y_1 como variáveis livres no sistema acima, então teremos uma das seguintes possibilidades

- Se as equações são L.I. então y_0 e y_1 são determinados pelos coeficientes $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ e $g(x)$, então o P.V.I. pode ser resolvido apenas para esses valores iniciais específicos. Além disso qualquer mudança em y_0 e y_1 implica em uma impossibilidade para a existência de uma solução analítica, mostrando assim uma instabilidade na regularidade da solução.
- Se $c_{k-2} = c_{k-1} = b_{k-1} = 0$, então $g(x)$ tem outras duas restrições em seus coeficientes $g_{k-1} = g_{k-2} = 0$.
- Se as equações são L.D. mas nem todos são zero, então um dos seguintes casos ocorre:
 1. $c_{k-2} = 0$, então y_0 e y_1 estão relacionados pela equação (4.27), determinando uma reta e \mathbb{R}^2 das condições iniciais admissíveis (y_0, y_1) .
 2. $c_{k-2} \neq 0$ e $b_{k-1} = -c_{k-2}$ então o sistema admitirá solução apenas se $\frac{c_{k-1}g_{k-2}}{c_{k-2}} = g_{k-1}$, caso em que $y_0 = \frac{g_{k-2}}{c_{k-2}}$

Definição 4.8. O P.V.I (4.1) é dito ser admissível em um ponto k -singular x_0 se

$$g_0 = g_1 = \dots = g_{k-3} = 0 \quad (4.28)$$

e um dos itens abaixo se verifica:

1. $k = 0$;
2. $k = 1$ e
 - a) $c_0 = b_0 = 0$ e $g_0 = 0$;

$$b) \ b_0 \neq 0 \ e \ y_1 = \frac{(g_0 - c_0 y_0)}{b_0}$$

$$c) \ c_0 \neq 0, \ b_0 = 0 \ e \ y_0 = \frac{g_0}{c_0}$$

3. $k \geq 2$ e

$$a) \ c_{k-2}(b_{k-1} + c_{k-2}) \neq 0 \ e$$

$$y_0 = \frac{g_{k-2}}{c_{k-2}}, \ y_1 = \frac{g_{k-1} - c_{k-1}g_{k-2}/c_{k-2}}{b_{k-1} + c_{k-2}}$$

$$b) \ c_{k-2} = c_{k-1} = b_{k-1} = 0 \ e \ g_{k-1} = g_{k-2} = 0.$$

$$c) \ c_{k-2} = 0, \ g_{k-2} = 0 \ e \ c_{k-1}y_0 + b_{k-1}y_1 = g_{k-1}$$

$$d) \ c_{k-2} \neq 0, \ b_{k-1} = -c_{k-2}, \ c_{k-1}g_{k-2}/c_{k-2} = g_{k-1} \ e \ y_0 = g_{k-2}/c_{k-2}$$

Teorema 4.9. *Se o P.V.I (4.1) não é admissível em um ponto k -singular x_0 , então não existe solução analítica para problema centrado em x_0 .*

Demonstração:

Se o P.V.I (4.1) não for admissível em um ponto k -singular x_0 , então existe uma contradição na observação 4.7, no entanto, as restrições partem da hipótese que existe solução analítica para o P.V.I (4.1) centrado em x_0 e, assim, contradizem essa hipótese.

□

Observação 4.10. *Se o P.V.I (4.1) for admissível em um ponto k -singular x_0 então ambos lados da equação (4.1) podem ser divididos por $(x - x_0)^{k-2}$, de modo que os únicos valores de interesse para k sejam 0, 1 e 2.*

Além disso, sendo o P.V.I admissível em um ponto k -singular x_0 , a equação (4.23) pode ser usada recursivamente para calcular y_{n-k} em termos de $y_0, y_1, \dots, y_{n-k-1}$

$$\begin{aligned} & ((n-k)(n-1-k)a_k + (n-k)b_{k-1} + c_{k-2})y_{n-k} = \\ g_{n-2} - \sum_{i=1}^{n-k} & ((n-k-i)(n-1-k-i)a_{i+k} + (n-k-i)b_{i+k-1} + c_{i+k-2})y_{n-k-i} \end{aligned} \quad (4.29)$$

enquanto não for satisfeita

$$((n-k)(n-1-k)a_k + (n-k)b_{k-1} + c_{k-2})y_{n-k} = 0 \quad (4.30)$$

Se algum natural $n-k = d+1$ satisfaz (4.30), então (4.23) nos dará uma restrição sobre os coeficientes $y_1, y_2 \dots y_d$ encontrados anteriormente.

Teorema 4.11. *Suponha que o P.V.I (4.1) é admissível e os coeficientes y_1, y_2, \dots, y_d , $d \geq 1$, satisfazem a equação (4.29) e que a equação (4.30) é válida para $n - k = d + 1$. Se y_1, y_2, \dots, y_d não satisfazem*

$$\sum_{i=1}^{d+1} ((d+1-i)(d-i)a_{i+k} + (d+1-i)b_{i+k-1} + c_{i+k-2}) y_{d+1-i} = g_{d+k-1} \quad (4.31)$$

então o P.V.I (4.1) não possui solução analítica.

Demonstração:

Segue-se do fato que os coeficientes de uma solução analítica de (4.1) devem satisfazer a equação (4.29) e então a equação (4.31) que não possui incógnitas.

□

Por outro lado, se

$$(d+1)da_k + (d+1)b_{k-1} + c_{k-2} = 0 \quad (4.32)$$

e os coeficientes y_0, y_1, \dots, y_d satisfazem a equação (4.31), então o coeficiente de y_{d+1} na equação (4.29) é zero para $n - k = d + 1$. De modo que y_{d+1} não é determinado por $y_0, y_1 \dots y_d$ e portanto pode ser escolhido para assumir qualquer valor. Então, para $n - k > d + 1$, y_{n-k} depende da escolha do valor y_{d+1} .

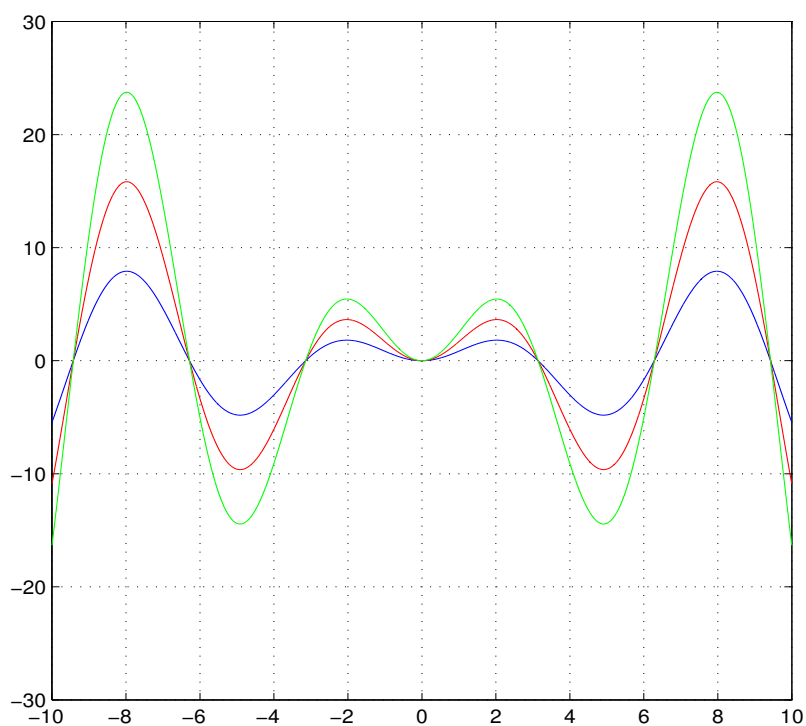
Exemplo 4.12. *O P.V.I*

$$x^2 y'' - 2xy' + (2 + x^2)y = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta \quad (4.33)$$

é 2-singular em $x_0 = 0$ e cai no caso 3, d) da definição 4.8 e então é admissível apenas se $y(0) = 0$. Além disso a equação (4.30) é válida para $n = 4$ e a restrição (4.31) é satisfeita por $y_0 = 0$ e $y_1 = \beta$. Dessa maneira podemos atribuir qualquer valor para $y_{n-k} = y_2 = \delta$.

Tomando $y_1 = \beta = 0$ encontramos as seguintes soluções usando a relação de recorrência, para as escolhas $y_2 = \delta = 1$ (azul), $y_2 = \delta = 2$ (vermelho), $y_2 = \delta = 3$ (vermelho).

Figura 7 – Relação de recorrência, para as escolhas $y_2 = \delta = 1$ (azul), $y_2 = \delta = 2$ (vermelho), $y_2 = \delta = 3$ (verde).

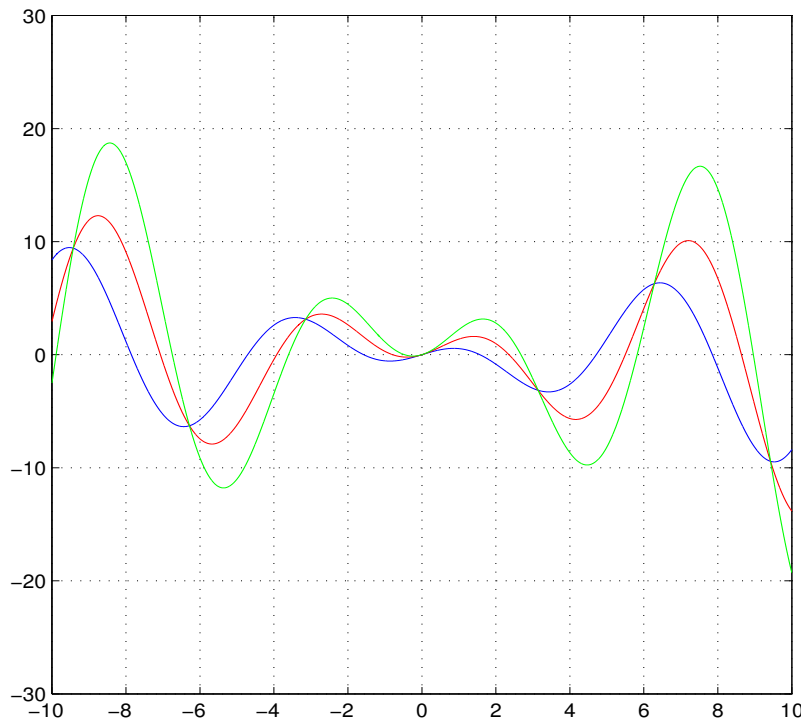


Fonte: Autoria própria / criada no Matlab.

Pode-se verificar que essas soluções estão corretas, pois $y(x) = Cx\text{sen}(x)$ resolve o P.V.I para qualquer constante C , e essas soluções estão de acordo com os resultados numéricos para $C = 1, 2, 3$ respectivamente.

Tomando $y_1 = \beta = 1$ encontramos as seguintes soluções usando a relação de recorrência para as escolhas $y_2 = \delta = 0$ (azul), $y_2 = \delta = 1$ (vermelho), $y_2 = \delta = 2$ (verde).

Figura 8 – Relação de recorrência para as escolhas $y_2 = \delta = 0$ (azul), $y_2 = \delta = 1$ (vermelho), $y_2 = \delta = 2$ (verde).



Fonte: Autoria própria / criada no Matlab.

Teorema 4.13. *Vamos supor que o P.V.I (4.1) é admissível e os coeficientes $y_0, y_1 \dots y_d, d \geq 1$, satisfazem a equação (4.29) e que $n - k = d + 1$ é a única solução natural para equação (4.30). Se $y_0, y_1 \dots y_d$ satisfizerem a equação (4.31), então o P.V.I (4.1) tem infinitas soluções analíticas em uma vizinhança de x_0 , que são determinadas por y_0, y_1 e alguma constante fixada y_{d+1} através da relação de recorrência (4.29).*

O método descrito acima implica que o coeficiente deve ser dado dessa maneira. A convergência da série então obtida em uma vizinhança de x_0 será estudado no próximo capítulo.

Observação 4.14. *Vê-se imediatamente que a equação (4.30) é quadrática, então pode ter até duas raízes. Se a menor raiz $d + 1$ for natural e satisfizer as condições do teorema 4.13 e $e + 1 \in \mathbb{N}$ for a segunda raiz, com $e > d$, então y_0, y_1, \dots, y_e estão sujeitas a restrição*

$$\sum_{i=1}^{e+1} ((e + 1 - i)(e - i)a_{i+k} + (e + 1 - i)b_{i+k-1} + c_{i+k-2}) y_{e+1-i} = g_{e+k-1} \quad (4.34)$$

Essa equação é linear em y_0, y_1, \dots, y_e e então existem três possíveis resultados:

1. *A equação (4.34) não é válida, independente do valor escolhido para y_{d+1} . Isso significa que o P.V.I (4.1) não admite solução analítica.*
2. *Existe um único valor para y_{d+1} que torna a equação (4.34) válida. Isso significa que existem infinitas soluções para o P.V.I (4.1), que dependem da variável y_{e+1} .*

3. A equação (4.34) é válida para qualquer $y_{d+1} \in \mathbb{R}$. Isso significa que existem infinitas soluções, para o P.V.I (4.1), que dependem de duas variáveis livres y_{d+1} , y_{e+1} .

Teorema 4.15. Vamos supor que o P.V.I (4.1) é admissível e que os coeficientes y_0, y_1, \dots, y_d , $d \geq 1$ satisfazem a equação (4.29) e que $n - k = d + 1$ e $n - k = e + 1$, com $d < e$ são as soluções naturais da equação (4.30). Além disso, se y_0, y_1, \dots, y_d satisfizerem

$$\sum_{i=1}^{d+1} ((d+1-i)(d-i)a_{i+k} + (d+1-i)b_{i+k-1} + c_{i+k-2}) y_{d+1-i} = g_{d+k-1} \quad (4.35)$$

então seja y_{d+1} alguma constante arbitrária e a equação (4.29) determina y_n para $n = d + 1, \dots, e$.

Então a condição

$$\sum_{i=1}^{e+1} ((e+1-i)(e-i)a_{i+k} + (e+1-i)b_{i+k-1} + c_{i+k-2}) y_{e+1-i} = g_{e+k-1} \quad (4.36)$$

tem três possíveis resultados:

1. Não é possível resolver, então o P.V.I (4.1) não tem solução analítica.
2. Existe um único valor y_{d+1} que resolve a equação (4.36), então existem infinitas soluções para o P.V.I (4.1) em uma vizinhança de x_0 , que são dadas por diferentes escolhas de y_{e+1} através da relação de recorrência (4.29).
3. A equação (4.36) é válida para qualquer y_{d+1} então existem infinitas soluções para o P.V.I (4.1) numa vizinhança de x_0 , que são dadas pelas escolhas nas constantes y_{d+1} e y_{e+1} através da relação de recorrência (4.29).

O método descrito acima implica que o coeficiente deve ser dado dessa maneira. Que a série então obtida converge em uma vizinhança de x_0 será estudado no próximo capítulo.

Definição 4.16. Seja o P.V.I (4.1) admissível em um ponto k – singular x_0 e que os coeficientes y_0, y_1, \dots, y_d satisfazem a equação (4.29) para $n - k = 2 \dots d$. Dizemos que o P.V.I é d -degenerado se

$$(d+1)da_k + (d+1)b_{k-1} + c_{k-2} = 0 \quad (4.37)$$

e

$$\sum_{i=1}^{d+1} [(d+1-i)(d-i)a_{i+k} + (d+1-i)b_{i+k-1} + c_{i+k-2}] y_{d+1-i} \neq g_{d+k-1} \quad (4.38)$$

Além disso dizemos que o P.V.I (4.1) é não-degenerado se não for d – degenerado para nenhum $d \in \mathbb{N}$.

Observação 4.17. Os teoremas 4.13 e 4.15 mostram que operadores d – degenerado não possuem soluções analíticas.

5 CONVERGÊNCIA DO MÉTODO

A principal referência para este capítulo é ADAMES(2017).

Com o objetivo de completar nossa prova da convergência do método de série de potências, será necessário realizar uma mudança de variável no problema (4.1):

Observação 5.1. *Uma função $y : (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ é solução do P.V.I (4.1) se, e somente se, a função $\tilde{y} : (\rho x_0 - \rho\alpha, \rho x_0 + \rho\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\tilde{y}(x) = y(x/\rho)$ for a solução do P.V.I*

$$\tilde{a}(x)\tilde{y}''(x) + \tilde{b}(x)\tilde{y}'(x) + \tilde{c}(x)\tilde{y}(x) = \tilde{g}(x), \quad (5.1)$$

com os valores iniciais $\tilde{y}(\tilde{x}_0) = y_0$, $\tilde{y}'(\tilde{x}_0) = y_1/\rho$ e com $\tilde{x}_0 = \rho x_0$ e

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x) &= \rho^2 a(x/\rho) = \rho^2 \sum \frac{a_n}{\rho^n} (x - \rho x_0)^n, \\ \tilde{b}(x) &= \rho b(x/\rho) = \rho \sum \frac{b_n}{\rho^n} (x - \rho x_0)^n, \\ \tilde{c}(x) &= c(x/\rho) = \sum \frac{c_n}{\rho^n} (x - \rho x_0)^n, \\ \tilde{g}(x) &= g(x/\rho) = \sum \frac{g_n}{\rho^n} (x - \rho x_0)^n, \end{aligned} \quad (5.2)$$

Note que os coeficientes da série de potências (em \tilde{x}_0) de $\tilde{a}(x)$, $\tilde{b}(x)$, $\tilde{c}(x)$ e $\tilde{g}(x)$ são respectivamente

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n(x) &= \frac{a_n}{\rho^{n-2}}, \\ \tilde{b}_n(x) &= \frac{b_n}{\rho^{n-1}}, \\ \tilde{c}_n(x) &= \frac{c_n}{\rho^n}, \\ \tilde{g}_n(x) &= \frac{g_n}{\rho^n} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Além disso o problema (4.1) é k -singular e admissível em x_0 se e somente se o problema (5.1) for k -singular e admissível em $\tilde{x}_0 = \rho x_0$.

Observação 5.2. *Devemos provar no teorema 5.13, que para ρ suficientemente grande, a série de potências obtida para o problema com a mudança de variável converge em $(\rho x_0 - 1, \rho x_0 + 1)$ e, então, é uma solução $\tilde{y}(x)$ para o P.V.I (5.1) nessa vizinhança. Isto implica, pela observação anterior, que $y(x) = \tilde{y}(x/\rho)$ resolve o P.V.I (4.1) e o seu raio de convergência é de pelo menos $1/\rho$.*

Antes de continuarmos a resolver o P.V.I (5.1), escolheremos a variável ρ de forma a garantir um pequeno valor para algumas quantidades.

Lema 5.3. *Sejam \tilde{a} , a , \tilde{b} , b , \tilde{c} , c , \tilde{g} , g definidos assim como na observação 5.1. Então existe $\rho > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica*

$$\sum_{i=1}^{n-k} \left| \frac{-(n-k-i)(n-1-k-i)\tilde{a}_{i+k} - (n-k-i)\tilde{b}_{i+k-1} - \tilde{c}_{i+k-2}}{(n-k)(n-1-k)\tilde{a}_k + (n-k)\tilde{b}_{k-1} + \tilde{c}_{k-2}} \right| < \varepsilon \quad (5.4)$$

e

$$\left| \frac{\tilde{g}_{n-2}}{(n-k)(n-1-k)\tilde{a}_k + (n-k)\tilde{b}_{k-1} + \tilde{c}_{k-2}} \right| < \varepsilon \quad (5.5)$$

Demonstração:

Note que para n suficientemente grande, temos que

$$|(n-k)(n-1-k)a_k + (n-k)b_{k-1} + c_{k-2}| > |a_k| + |b_{k-1}| + |c_{k-2}| > 0 \quad (5.6)$$

de modo que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-k} \left| \frac{-(n-k-i)(n-1-k-i)\tilde{a}_{i+k} - (n-k-i)\tilde{b}_{i+k-1} - \tilde{c}_{i+k-2}}{(n-k)(n-1-k)\tilde{a}_k + (n-k)\tilde{b}_{k-1} + \tilde{c}_{k-2}} \right| \\ &= \sum_{i=1}^{n-k} \left| \frac{-(n-k-i)(n-1-k-i)\frac{a_{i+k}}{\rho^{i+k-2}} - (n-k-i)\frac{b_{i+k-1}}{\rho^{i+k-2}} - \frac{c_{i+k-2}}{\rho^{i+k-2}}}{(n-k)(n-1-k)\frac{a_k}{\rho^{k-2}} + (n-k)\frac{b_{k-1}}{\rho^{k-2}} + \frac{c_{k-2}}{\rho^{k-2}}} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-k} \left| \frac{-(n-k-i)(n-1-k-i)a_{i+k} - (n-k-i)b_{i+k-1} - c_{i+k-2}}{(|a_k| + |b_{k-1}| + |c_{k-2}|)\rho^i} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{-(n-k-i)(n-1-k-i)a_{i+k} - (n-k-i)b_{i+k-1} - c_{i+k-2}}{(|a_k| + |b_{k-1}| + |c_{k-2}|)\rho^i} \right| < \varepsilon \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5.7)$$

para algum ρ suficientemente grande, pois a última soma pode ser vista como a série de potências

$$\sum_{i=1}^{\infty} |-(n-k-i)(n-1-k-i)a_{i+k} - (n-k-i)b_{i+k-1} - c_{i+k-2}|(x-x_0)^i, \quad (5.8)$$

aplicada em $x = \frac{1}{\rho} + x_0$. Essa série de potências tem o coeficiente de $(x-x_0)^0$ igual a zero e converge para x com $|x-x_0| < \min \rho_a, \rho_b, \rho_c$ onde ρ_a, ρ_b e ρ_c são os raios de convergência de $a(x), b(x)$ e $c(x)$, respectivamente. Além disso, $n_0 \in \mathbb{N}$ e ρ podem ser tomados suficientemente grandes de forma que a seguinte inequação seja válida

$$\left| \frac{\tilde{g}_{n-2}}{(n-k)(n-1-k)\tilde{a}_k + (n-k)\tilde{b}_{k-1} + \tilde{c}_{k-2}} \right| < \varepsilon \quad (5.9)$$

para algum $n > n_0$, pois para ρ grande o suficiente o raio de convergência de \tilde{g} será maior do que 1 e, portanto, $\sum \tilde{g}_n$ deverá ser convergente e, então, $\lim \tilde{g}_n = 0$.

□

Observação 5.4. Note que essas estimativas incluem alguns P.V.I que são singulares irregulares, no sentido do método de Frobenius em x_0 , e nossa prova da convergência (teorema 5.13) também se verifica para tais casos.

O P.V.I (4.1) é singular irregular exatamente quando for k -singular com $a_k = 0$. Apesar de provarmos para alguns casos singulares, as estimativas no Lema 5.3 têm um polinômio de segundo grau no numerador, mas apenas um polinômio de primeiro grau, ou uma constante, no denominador. Então é necessário que $\rho > 1$ para que a soma seja convergente. Isto significa que podemos apenas garantir que as soluções em pontos singulares irregulares convergem em uma vizinhança de x_0 com raio $1/\rho < 1$. Esperamos que tais soluções sejam convergentes apenas em uma pequena vizinhança de x_0 .

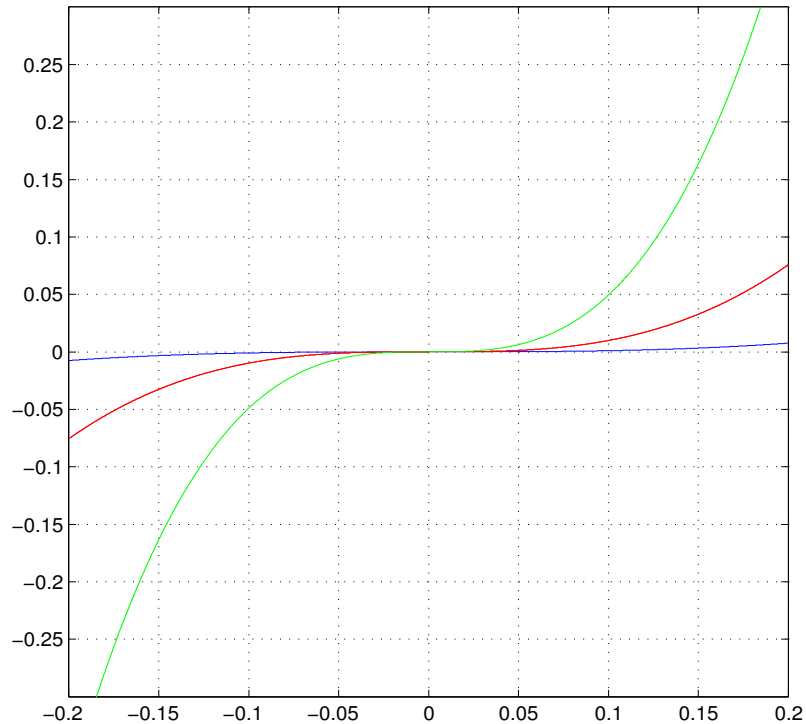
Exemplo 5.5. O P.V.I

$$x^5 y'' + 2x^2 y' - 6xy = x^6 e^{-x^2}, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta \quad (5.10)$$

é 3-singular em $x_0 = 0$ e cai na categoria 3, a) da definição 4.8 e então é admissível apenas se $y(0) = y'(0) = 0$. Além disso a equação (4.30) é válida para $n = 6$ e a restrição (4.31) é satisfeita. De modo que podemos atribuir qualquer valor para $y_3 = \delta$.

Tomando $y_3 = \delta = 1$ (azul), $y_3 = \delta = 10$ (vermelho) e $y_3 = \delta = 50$ (verde), plotamos as seguintes soluções, que convergem apenas em uma pequena vizinhança de x_0 .

Figura 9 – $y_3 = \delta = 1$ (azul), $y_3 = \delta = 10$ (vermelho) e $y_3 = \delta = 50$ (verde).



Fonte: Autoria própria / criada no Matlab.

Observação 5.6. Agora vamos provar a convergência do método da série de potências para o P.V.I (5.1) em alguma vizinhança de x_0 sob a hipótese que para n suficientemente grande teremos

$$\sum_{i=1}^{n-k} \left| \frac{-(n-k-i)(n-1-k-i)a_{i+k} - (n-k-i)b_{i+k-1} - c_{i+k-2}}{(n-k)(n-1-k)a_k + (n-k)b_{k-1} + c_{k-2}} \right| < \varepsilon \quad (5.11)$$

e

$$\left| \frac{g_{n-2}}{(n-k)(n-1-k)a_k + (n-k)b_{k-1} + c_{k-2}} \right| < \varepsilon. \quad (5.12)$$

Seja L um operador não-degenerado k -singular. Além disso seja $t \in \mathbb{N}$ grande o suficiente de modo que $n - k > t$ implica

$$(n-k)(n-1-k)a_k + (n-k)b_{k-1} + c_{k-2} \neq 0 \quad (5.13)$$

e y_0, y_1, \dots, y_t satisfazem a equação (4.29).

Com intuito de expressar a relação de recorrência (4.29) de forma mais compacta, denotaremos

$$\zeta_k^{i,n} := \frac{-(n-k-i)(n-1-k-i)a_{i+k} - (n-k-i)b_{i+k-1} - c_{i+k-2}}{(n-k)(n-1-k)a_k + (n-k)b_{k-1} + c_{k-2}} \quad (5.14)$$

$$\gamma_k^n := \frac{g_{n-2}}{(n-k)(n-1-k)a_k + (n-k)b_{k-1} + c_{k-2}} \quad (5.15)$$

Com essa notação a equação (4.29) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} y_{n-k} &= \gamma_k^n + \sum_{i=1}^{n-k} \zeta_k^{i,n} y_{n-k-i} = \gamma_k^n + \zeta_k^{1,n} y_{n-k-1} + \sum_{i=2}^{n-k} \zeta_k^{i,n} y_{n-k-i} \\ &= \gamma_k^n + \zeta_k^{1,n} (\gamma_k^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-k-1} \zeta_k^{i,n-1} y_{n-1-k-i}) + \sum_{i=2}^{n-k} \zeta_k^{i,n} y_{n-k-i} \\ &= \gamma_k^n + \zeta_k^{1,n} \gamma_k^{n-1} + \zeta_k^{1,n} \sum_{i=1}^{n-k-1} \zeta_k^{i,n-1} y_{n-1-k-i} + \sum_{i=1}^{n-k-1} \zeta_k^{i+1,n} y_{n-k-1-i} \end{aligned} \quad (5.16)$$

e portanto

$$y_{n-k} = \gamma_k^n + \zeta_k^{1,n} \gamma_k^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-k-1} (\zeta_k^{1,n} \zeta_k^{i,n-1} + \zeta_k^{i+1,n}) y_{n-k-1-i} \quad (5.17)$$

se $n - k - 1 > t$.

Como a relação de recorrência (4.29) é afim, é possível construir uma família de matrizes para calcular y_{n-k} em termos de y_0, \dots, y_{n-k-1} . De fato, usamos a família de matrizes $(n-k+1) \times (n-k+2)$:

$$\tilde{A}_k^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_k^n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \zeta_k^{n-k,n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \zeta_k^{n-k-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \zeta_k^{n-k-2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \zeta_k^{1,n} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Lema 5.7. *Sejam y_0, y_1, \dots, y_t constantes que satisfazem a equação (4.29) para $n-k = 2, \dots, t$, seja $d-k > t$, e suponha que y_{d-k} satisfaz a equação (4.29), isto é*

$$y_{d-k} = \gamma_k^d + \sum_{i=1}^{d-k} \zeta_k^{i,d} y_{d-k-i} \quad (5.19)$$

e, para $n > d$, y_{n-k} pode ser escrito como uma função afim de y_0, y_1, \dots, y_{d-k}

$$y_{n-k} = z + \sum_{i=0}^{d-k} x_i y_{d-k-i} \quad (5.20)$$

com $z, x_1, \dots, x_{d-k}, x_0 \in \mathbb{R}$. Além disso escreveremos

$$x = (z, x_{d-k}, \dots, x_1, x_0)^T. \quad (5.21)$$

Então y_{n-k} pode também ser escrito como uma função afim de $y_0, y_1, \dots, y_{d-k-1}$:

$$y_{n-k} = \tilde{z} + \sum_{i=1}^{d-k} \tilde{x}_i y_{d-k-i}, \quad (5.22)$$

com $\tilde{z} = (\tilde{A}_k^d x)_1$ e $\tilde{x}_i = (\tilde{A}_k^d x)_{d-k+2-i}$ para $1 \leq i \leq d-k$.

Demonstração:

Por hipótese temos

$$\begin{aligned} y_{n-k} &= z + \sum_{i=0}^{d-k} x_i y_{d-k-i} = z + x_0 y_{d-k} + \sum_{i=1}^{d-k} x_i y_{d-k-i} \\ &= z + x_0 (\gamma_k^d + \sum_{i=1}^{d-k} \zeta_k^{i,d} y_{d-k-i}) + \sum_{i=1}^{d-k} x_i y_{d-k-i} \\ &= (z + x_0 \gamma_k^d) + \sum_{i=1}^{d-k} (x_i + x_0 \zeta_k^{i,d}) y_{d-k-i} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Por outro lado,

$$(\tilde{A}_k^d x)_1 = z + x_0 \gamma_k^d \quad (5.24)$$

e

$$(\tilde{A}_k^d x)_{d-k+2-i} = x_i + x_0 \zeta_k^{i,d} \quad (5.25)$$

□

Observação 5.8. *Com intuito de aplicar essas matrizes recursivamente e encontrar y_{n-k} em termos de um conjunto fixado de valores dados y_0, \dots, y_t , para algum $t \geq 2$ precisamos que todas tenham dimensões compatíveis, e fazemos isso preenchendo-as com zeros para assim*

obtermos uma família de operadores $A_k^n : \ell^1 \rightarrow \ell^1$ definida por:

$$\tilde{A}_k^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_k^n & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \zeta_k^{n-k,n} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \zeta_k^{n-k-1,n} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \zeta_k^{n-k-2,n} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \zeta_k^{1,n} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

Observação 5.9. Usando essa notação segue que os coeficientes de $1, y_0, y_1, \dots, y_{n-k-2}$ na equação (5.17) são respectivamente, as primeiras $n - k$ entradas do vetor

$$x = A_k^{n-1} \begin{pmatrix} \gamma_k^n \\ \zeta_k^{n-k,n} \\ \zeta_k^{n-k-1,n} \\ \zeta_k^{n-k-2,n} \\ \vdots \\ \zeta_k^{1,n} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

e $y_{n-k} = x \cdot (1, y_0, y_1, \dots, y_{n-k-2}, 0, \dots)$.

Além disso x é exatamente a coluna $n - k + 2$ do produto $A_k^{n-1} A_k^n$. Isso significa que se a equação (4.29) é válida para y_{d-k} para algum $n - k > d - k > t > k$ então y_{n-k} pode ser calculado em termos de y_0, y_1, \dots, y_t pela aplicação desses operadores lineares sucessivamente. Mais precisamente

$$y_{n-k} = A_k^{t+k+1} A_k^{t+k+2} \dots A_k^{n-1} \begin{pmatrix} \gamma_k^n \\ \zeta_k^{n-k,n} \\ \zeta_k^{n-k-1,n} \\ \zeta_k^{n-k-2,n} \\ \vdots \\ \zeta_k^{1,n} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot (1, y_0, y_1, \dots, y_t, 0, \dots) \quad (5.28)$$

Isso motiva a seguinte definição:

Definição 5.10. Seja $n \geq t + k + 1$ um número natural e T_k^n um operador linear sobre ℓ^1 definido por

$$T_k^n := A_k^{t+k+1} A_k^{t+k+2} \dots A_k^{n-1} A_k^n. \quad (5.29)$$

Vamos agora nos atentar para como essa sequência de operadores se comporta quando n cresce.

Lema 5.11. *As matrizes que representam T_k^n são da forma*

$$T_k^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \phi_0^1 & \phi_0^2 & \dots & \phi_0^{n-k-t} & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \phi_1^1 & \phi_1^2 & \dots & \phi_1^{n-k-t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \phi_{t+1}^1 & \phi_{t+1}^2 & \dots & \phi_{t+1}^{n-k-t} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

Além disso

$$T_k^{n+1} = T_k^n A_k^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \phi_0^1 & \phi_0^2 & \dots & \phi_0^{n-k-t} & \phi_0^{n-k-t+1} & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \phi_1^1 & \phi_1^2 & \dots & \phi_1^{n-k-t} & \phi_1^{n-k-t+1} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \phi_{t+1}^1 & \phi_{t+1}^2 & \dots & \phi_{t+1}^{n-k-t} & \phi_{t+1}^{n-k-t+1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

Isto é, as primeiras $n - k + 2$ colunas de T_k^{k+1} são idênticas às primeiras $n - k + 2$ colunas de T_k^n e a única coluna não nula é a coluna na posição $(n - k + 3)$.

Isso pode ser visto usando indução, do fato que as primeiras $n - k + 2$ colunas de A_k^{n+1} são exatamente as mesmas como que as primeiras $n - k + 2$ da identidade e a única coluna não nula é a coluna $n - k + 3$.

Observação 5.12. *Da observação 5.9 segue que*

$$y_{n-k} = \phi_0^{n-k-t} + y_0 \phi_1^{n-k-t} + y_1 \phi_2^{n-k-t} + \dots + y_t \phi_{t+1}^{n-k-t} \quad (5.32)$$

Isso significa que a convergência da série de potências $y = \sum y_n (x - x_0)^n$ está relacionada à convergência da sequência de operadores $T_k^n \in B(\ell^1, \ell^1)$.

Teorema 5.13. *Considere um P.V.I k -singular, não degenerado, admissível da forma (5.1), e sejam $\rho \in \mathbb{R}$ e $n > n_0 \in \mathbb{N}$ grande suficiente de modo a tornar as estimativas do lema 5.3 válidas para $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Adicionalmente seja $t \in \mathbb{N}$ grande o suficiente de modo que a equação (4.30) não seja válida para $n - k > t$. Além disso, sejam y_0, y_1, \dots, y_t os primeiros $t + 1$ coeficientes dados pela equação (4.29) em termos de y_0 e y_1 e possivelmente duas constantes arbitrárias y_{d+1} e y_{e+1} como nos teoremas 4.13 e 4.15. Então os coeficientes y_{n-k} dados pela equação (5.32) definem uma série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n (x - x_0)^n \quad (5.33)$$

que converge para todo x com $|x - x_0| < 1$ e resolve o P.V.I (4.1)

Demonstração:

Sejam as constantes $\zeta_k^{i,n}$ e γ_k^n definidas como nas equações (5.14) e (5.15). Além disso seja a família de operadores $T_k^n \in B(\ell^1, \ell^1)$ definidos como na definição 5.10. Mostraremos que a sequência de operadores T_k^{n+1} converge para algum operador $T_k \in B(\ell^1, \ell^1)$; e para fazer isso mostraremos que $\|T_k^n\|$ é limitado e $(T_k^n x)$ é de Cauchy em ℓ^1 para qualquer $x \in \ell^1$ (Teorema da Convergência de operador forte em (KREYSZIG, 1978.)

De fato, como as estimativas do lema 5.3 são válidas para $n > n_0$

$$\sum_{i=1}^n |\zeta_k^{i,n}| < \varepsilon < \frac{1}{2} \quad (5.34)$$

e

$$|\gamma_k^n| < \varepsilon < \frac{1}{2} \quad (5.35)$$

Assim para $n > n_0$ e algum $x \in \ell^1$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ com $\|x\|_1 = 1$, vale

$$\|A_k^n(x)\|_1 \leq \sum_{i=1}^{n-k+1} |x_i| + |x_{n-k+2}| \left(|\gamma_k^n| + \sum_{i=1}^{n-k} |\zeta_k^{i,n}| \right) \leq \sum_{i=1}^{n-k+2} |x_i| \leq 1 \quad (5.36)$$

Então $\|A_k^n(x)\|_1 \leq 1$ para todo $n \geq n_0$ e

$$\|T_k^n\|_1 \leq \left\| \prod_{i=t+1}^{n_0} A_k^i \right\|_1 \prod_{i=n_0+1}^n \|A_k^i\|_1 \leq \left\| \prod_{i=t+1}^{n_0} A_k^i \right\|_1 \quad (5.37)$$

Além disso, se denotarmos $x^n = (0, 0, \dots, 0, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$ e I_n para o operador em $B(\ell^1, \ell^1)$ que atua como identidade nas primeiras n entradas de x e como zero para as outras entradas, é possível mostrar que $T_k^n(x)$ é uma sequência de Cauchy:

$$\begin{aligned} \|T_k^{n+p}(x) - T_k^n(x)\|_1 &= \left\| \prod_{i=t+1}^n A_k^i \left(\prod_{i=n+1}^{n+p} A_k^i - I_{n-k+2} \right) (x) \right\|_1 \\ &\leq \left\| \prod_{i=t+1}^{n_0} A_k^i \right\|_1 \left\| \left(\prod_{i=n+1}^{n+p} A_k^i - I_{n-k+2} \right) (x) \right\|_1 \\ &\leq \left\| \prod_{i=t+1}^{n_0} A_k^i \right\|_1 \left\| \left(\prod_{i=n+1}^{n+p} A_k^i \right) (x^{n-k+3}) \right\|_1 \\ &\leq \left\| \prod_{i=t+1}^{n_0} A_k^i \right\|_1 \|x^{n-k+3}\|_1 < \delta \ll 1 \end{aligned} \quad (5.38)$$

para n suficientemente grande, pois $x \in \ell^1$

Então existe um operador linear limitado $T \in B(\ell^1, \ell^1)$ tal que T_k^n converge fortemente¹ para T . Além disso

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \phi_0^1 & \phi_0^2 & \dots & \phi_0^{n-k-t} & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \phi_1^1 & \phi_1^2 & \dots & \phi_1^{n-k-t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \phi_{t+1}^1 & \phi_{t+1}^2 & \dots & \phi_{t+1}^{n-k-t} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

pois A_k^n preserva as primeiras $n - k + 1$ colunas.

Em particular, T é definida para alguma sequência da forma $x = (0, 1, (x - x_0), (x - x_0)^2, (x - x_0)^3, \dots)$, com $|x - x_0| < 1$, e a equação (5.32) implica

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n (x - x_0)^n = \sum_{n=k}^{\infty} y_{n-k} (x - x_0)^{n-k} \\ &= y_0 + y_1 (x - x_0) + \dots + y_t (x - x_0)^t + \sum_{n=t+1+k}^{\infty} y_{n-k} (x - x_0)^{n-k} \\ &= \sum_{n=t+1+k}^{\infty} \phi_0^{n-k-t} (x - x_0)^{n-k} + y_0 \left(1 + \sum_{n=t+1+k}^{\infty} \phi_1^{n-k-t} (x - x_0)^{n-k} \right) \\ &+ y_1 \left((x - x_0) + \sum_{n=t+1+k}^{\infty} \phi_2^{n-k-t} (x - x_0)^{n-k} \right) + \dots \\ &+ y_t \left((x - x_0)^t + \sum_{n=t+1+k}^{\infty} \phi_{t+1}^{n-k-t} (x - x_0)^{n-k} \right) \\ &= (T(x))_1 + y_0 (T(x))_2 + \dots + y_t (T(x))_{t+2} \end{aligned} \quad (5.40)$$

A convergência de $T(x)$ implica que os cálculos acima fazem sentido e a restrição $|x - x_0| < 1$ implica que o raio de convergência será pelo menos 1.

□

O P.V.I (4.1) tem uma única solução analítica, não possui nenhuma solução, ou possui várias soluções analíticas exatamente quando o P.V.I (5.1) tiver uma única solução analítica, não possuir nenhuma solução, ou possuir várias soluções analíticas. Além disso, o raio de convergência de y para o problema sem mudança de variável é de pelo menos $\frac{1}{\rho}$, onde ρ é uma constante que faz as estimativas do lema 5.3 valerem.

¹ Uma sequência de operadores convergir fortemente em ℓ^1 significa que $\|T_k^n(x) - T(x)\| \rightarrow 0$ para todo $x \in \ell^1$.

6 CONCLUSÃO

Ao estudar o método das derivadas sucessivas, conseguimos desenvolver um método alternativo (4.12) para o cálculo dos coeficientes da solução em série de uma equação diferencial ordinária, no entanto, estudamos também um método que nos permitiu analisar soluções em uma vizinhança de um ponto singular, esse método é conhecido por método de Frobenius.

Durante o estudo de soluções de Frobenius, obtivemos a tabela 1 que mostra as restrições de P.V.I. para a solução de Frobenius e dessa tabela concluímos que o caso mais interessante é o caso em que a solução é uma função analítica.

Utilizamos a definição de um ponto k -singular, que consta em ADAMES(2017), para nos auxiliar no estudo das restrições de uma solução analítica de um P.V.I, vistas na observação 4.7 a qual motivou a definição de P.V.I admissível 4.8.

No exemplo 4.12 temos um resultado bem interessante, pois obtivemos um P.V.I que possui infinitas soluções, o qual a rotina ODE45 não conseguiu resolver, no entanto encontramos a solução do P.V.I e comparamos com as soluções produzidas pela nossa fórmula de recorrência e observamos que de fato as soluções estão bem próximas.

Nos teoremas 4.13 e 4.15, estudamos a existência e a quantidade de soluções determinadas por uma ou duas constantes geradas pela fórmula recursiva, e portanto nos restou provar apenas a convergência do método no capítulo 5.

No capítulo 5, que trata da convergência do método, fizemos uma mudança de variável de acordo com a observação 5.1, de forma a produzirmos as estimativas do lema 5.3 e concluímos que essas também são válidas para P.V.I's singulares irregulares, no entanto, esperamos que soluções nesses pontos sejam convergente numa pequena vizinhança de x_0 e o exemplo 5.5, nos mostra exatamente este resultado e também a existência de infinitas soluções.

Por fim enunciamos e provamos o teorema 5.13, referente a convergência do método e para o provar utilizamos o Teorema da Convergência forte de operador encontrado em (KREYS-ZIG, 1978), concluindo assim que o método desenvolvido de fato converge para a solução analítica do P.V.I.

REFERÊNCIAS

ADAMES, Marcio R. **An alternative approach to the power series method.** *Preprint*, 2017.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno.** (7ª edição). LTC Editora. Rio de Janeiro, 2002.

KREYSZIG, Erwin. **Introductory functional analysis with applications.** New York: Wiley, 1989.

STEWART, James. **Cálculo.** Vol. II. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

TENENBAUM, Morris; POLLARD, Harry. **Ordinary differential equations: An elementary textbook for students of mathematics, engineering, and the sciences.** Courier Corporation, 1963.

TESCHL, Gerald. **Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems.** Vol. 30. American Mathematical Society, Rhode Island, 2011.