

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA E  
INFORMÁTICA INDUSTRIAL

THIAGO ALBERTO RIGO PASSARIN

**RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS DE ULTRASSOM UTILIZANDO  
REGULARIZAÇÃO  $\ell_1$  ATRAVÉS DE MÍNIMOS QUADRADOS  
ITERATIVAMENTE REPONDERADOS E GRADIENTE CONJUGADO**

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2013

THIAGO ALBERTO RIGO PASSARIN

**RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS DE ULTRASSOM UTILIZANDO  
REGULARIZAÇÃO  $\ell_1$  ATRAVÉS DE MÍNIMOS QUADRADOS  
ITERATIVAMENTE REPONDERADOS E GRADIENTE CONJUGADO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Ciências” – Área de Concentração: Engenharia Biomédica.

Orientador: Marcelo Victor Wüst Zibetti, Dr.  
Eng.

Co-orientador: Fábio Kurt Schneider, Ph.D.

**CURITIBA**

**2013**

---

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

---

- P286 Passarin, Thiago Alberto Rigo  
Reconstrução de imagens de ultrassom utilizando regularização L1 através de mínimos quadrados iterativamente reponderados e gradiente conjugado / Thiago Alberto Rigo Passarin. – 2013.  
139 f. : il. ; 30 cm
- Orientador: Marcelo Victor Wüst Zibetti.  
Coorientador: Fábio Kurt Schneider.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial. Curitiba, 2013.  
Bibliografia: f. 134-139.
1. Recuperação de imagem. 2. Ultrassom. 3. Mínimos quadrados. 4. Problemas inversos (Equações diferenciais). 5. Algoritmos. 6. Métodos de gradiente conjugado. 7. Métodos iterativos (Matemática). 8. Simulação (Computadores). 9. Engenharia elétrica – Dissertações. I. Zibetti, Marcelo Victor Wüst, orient. II. Schneider, Fábio Kurt, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial. IV. Título.

CDD (22. ed.) 621.3

Título da Dissertação Nº. 647

**“Reconstrução de Imagens de Ultrassom utilizando Regularização L1 através de Mínimos Quadrados Iterativamente Reponderados e Gradiente Conjugado.”**

por

**Thiago Alberto Rigo Passarin**

**Orientador:** Prof. Dr. Marcelo Victor Wüst Zibetti

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de MESTRE EM CIÊNCIAS – Área de Concentração: Engenharia Biomédica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial – CPGEI – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, às 9h00 do dia 13 de dezembro de 2013. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos professores doutores:

---

Prof. Dr. Marcelo Victor Wüst Zibetti  
(Presidente – UTFPR)

---

Prof. Dr. Alvaro Rodolfo de Pierro  
(Unicamp)

---

Prof<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup> Giselle Lopes Ferrari Ronque  
(UFPR)

---

Prof. Dr. Hugo Vieira Neto  
(UTFPR)

Visto da coordenação:

---

**Prof. Ricardo Lüders, Dr.**  
(Coordenador do CPGEI)

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo Victor Wüst Zibetti pela paciência e pelo compromisso.

Ao meu co-orientador Prof. Dr. Fábio Kurt Schneider pela confiança e pelo auxílio na resolução dos problemas práticos que se apresentaram ao longo do caminho.

Ao meu colega e amigo Leonardo Geovany da Silva Zanin, cujo trabalho de mestrado foi o ponto de partida para o presente trabalho, pela ajuda e pela disponibilização do valioso produto do seu trabalho.

À minha esposa Aline Anna Picinin pelo apoio, fé, companheirismo e paciência.

Ao meu amigo Daniel Rossato de Oliveira pela prestatividade em me representar formalmente no cumprimento das obrigações burocráticas que surgiram durante o período em que estive escrevendo esta dissertação à distância.

A todos os colegas que em algum momento demonstraram interesse pelo tema deste trabalho, fomentando discussões e questionamentos que me auxiliaram na compreensão dos desafiadores aspectos teóricos envolvidos.

*Tudo é vaidade.*

Ecclésiastes 1:2

## RESUMO

PASSARIN, Thiago A. R.. RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS DE ULTRASSOM UTILIZANDO REGULARIZAÇÃO  $\ell_1$  ATRAVÉS DE MÍNIMOS QUADRADOS ITERATIVAMENTE REPONDERADOS E GRADIENTE CONJUGADO. 140 f. Dissertação – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

Este trabalho apresenta um método de reconstrução de imagens de ultrassom por problemas inversos que tem como penalidade para o erro entre solução e dados a norma  $\ell_2$ , ou euclidiana, e como penalidade de regularização a norma  $\ell_1$ . A motivação para o uso da regularização  $\ell_1$  é que se trata de um tipo de regularização promotora de esparsidade na solução. A esparsidade da regularização  $\ell_1$  contorna o problema de excesso de artefatos, observado em outras implementações de reconstrução por problemas inversos em ultrassom. Este problema é consequência principalmente da limitação da representação discreta do objeto contínuo no modelo de aquisição. Por conta desta limitação, objetos refletivos na área imageada quase sempre localizam-se em posições que não correspondem precisamente a uma das posições do modelo discreto, gerando dados que não correspondem aos dados modelados. As formulações do problema com regularização  $\ell_2$  e com regularização  $\ell_1$  são apresentadas e comparadas dos pontos de vista geométrico e Bayesiano. O algoritmo de otimização proposto é uma implementação do algoritmo Iteratively Reweighted Least Squares (IRLS) e utiliza o método do Gradiente Conjugado (CG - Conjugate Gradient) a cada iteração, sendo chamado de IRLS-CG. São realizadas simulações com phantoms computacionais que mostram que o método permite reconstruir imagens a partir da aquisição de dados com refletivos em posições não modeladas sem a observação de artefatos. As simulações também mostram melhor resolução espacial do método proposto com relação ao algoritmo delay-and-sum (DAS). Também se observou melhor desempenho computacional do CG com relação à pseudo-inversa de Penrose-Moore nas iterações do IRLS.

**Palavras-chave:** reconstrução de imagens, ultrassom, regularização, mínimos quadrados, problemas inversos

## ABSTRACT

PASSARIN, Thiago A. R.. ULTRASOUND IMAGE RECONSTRUCTION USING  $\ell_1$  REGULARIZATION VIA ITERATIVELY REWEIGHTED LEAST SQUARES AND CONJUGATE GRADIENT. 140 f. Dissertação – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

This work presents an inverse problem based method for ultrasound image reconstruction which uses the  $\ell_2$ -norm (or euclidean norm) as a penalty for the error between the data and the solution, and the  $\ell_1$ -norm as a regularization penalty. The motivation for the use of  $\ell_1$  regularization is the sparsity promoting property of this type of regularization. The sparsity of  $\ell_1$  regularization circumvents the problem of excessive artifacts that is observed in other approaches of inverse problem based reconstruction in ultrasound. Such problem is mainly a consequence of the limitation in the discrete representation of a continuous object in the acquisition model. Due to this limitation, reflecting objects in the imaged area are often localized in positions that do not correspond precisely to one of the positions in the discrete model, therefore generating data that do not correspond to the model data. The formulations of the problem with  $\ell_2$  regularization and with  $\ell_1$  regularization are presented and compared in geometric and Bayesian terms. The optimization algorithm proposed is an implementation of Iteratively Reweighted Least Squares (IRLS) and uses the Conjugate Gradient (CG) method inside each iteration, thus being called IRLS-CG. Simulations with computer phantoms are performed showing that the proposed method allows for the reconstruction of images, without observable artifacts, from data with reflectors located in non-modeled positions. Simulations also show a better spatial resolution in the proposed method when compared to the delay-and-sum (DAS) algorithm. It was also observed better computational performance of CG when compared to the Penrose-Moore pseudoinverse in the iterations of IRLS.

**Keywords:** image reconstruction, ultrasound, regularization, least squares, inverse problems



## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Reflexão e propagação em interfaces entre zonas com diferentes impedâncias acústicas .....	20
FIGURA 2	– Impedâncias acústicas ao longo de um tecido hipotético .....	21
FIGURA 3	– Reflexividades acústicas ao longo de um tecido hipotético .....	21
FIGURA 4	– Principais componentes de um transdutor de ultrassom .....	23
FIGURA 5	– Transdutor e um ponto arbitrário dispostos sobre um sistema cartesiano de duas dimensões .....	24
FIGURA 6	– Representação do princípio de Huygens .....	25
FIGURA 7	– Incidência numa interface entre duas zonas com impedâncias acústicas distintas .....	26
FIGURA 8	– Atrasos utilizados para direcionamento e focalização da frente de onda .	29
FIGURA 9	– Linha no modo A e no modo B .....	30
FIGURA 10	– Diferentes conjuntos de elementos gerando diferentes linhas .....	31
FIGURA 11	– Demonstração do princípio segundo o qual a resolução axial corresponde à metade do tamanho do pulso .....	32
FIGURA 12	– Distância focal e seção transversal do feixe de ultrassom .....	33
FIGURA 13	– Demonstração do problema da resolução lateral em algoritmos DAS ...	33
FIGURA 14	– Aquisição de dados para um único ponto refletor .....	35
FIGURA 15	– Representação do processo de reconstrução .....	37
FIGURA 16	– Representação do conceito de pontos sobre a grade e fora da grade ....	38
FIGURA 17	– Exemplo gráfico de como a minimização $\ell_1$ privilegia soluções esparsas	50
FIGURA 18	– Exemplo gráfico tridimensional de como a minimização $\ell_1$ privilegia soluções esparsas .....	51
FIGURA 19	– Interpretação gráfica do LASSO .....	52
FIGURA 20	– FDP Normal Generalizada para $p=1$ e $p=2$ .....	57
FIGURA 21	– Reconstrução da imagem de um cisto com regularização $\ell_1$ para 5 valores de $\lambda$ .....	58
FIGURA 22	– Aspecto típico da curva L .....	60
FIGURA 23	– Exemplo unidimensional de aproximação da norma $\ell_1$ por uma parábola	64
FIGURA 24	– Ilustração da convergência do CG para um problema bidimensional ....	68
FIGURA 25	– Representação da construção da matriz $\mathbf{H}$ .....	73
FIGURA 26	– Reconstrução de um ponto no centro da ROI .....	77
FIGURA 27	– Reconstrução de um ponto no centro da ROI e aquisição com ruído ....	78
FIGURA 28	– Reconstrução de um ponto deslocado meio pixel no eixo lateral .....	80
FIGURA 29	– Amplitudes na linha central das imagens reconstruídas de um ponto deslocado meio pixel no eixo lateral .....	81
FIGURA 30	– Reconstrução de um ponto deslocado meio pixel no eixo axial .....	82
FIGURA 31	– Intensidades dos pixels para reconstruções IPB de um ponto deslocado meio ponto axialmente da grade .....	83
FIGURA 32	– Valores da correlação entre o sinal obtido na aquisição com ponto deslocado meio pixel axialmente e cada pixel do modelo .....	84
FIGURA 33	– Reconstrução de um ponto deslocado 0,2 pixel no eixo axial .....	85

FIGURA 34	– Intensidades dos pixels para reconstruções IPB de um ponto deslocado 0,2 pixel axialmente da grade .....	86
FIGURA 35	– Valores da correlação entre o sinal obtido na aquisição com ponto deslocado 0,2 pixel axialmente e cada pixel do modelo .....	86
FIGURA 36	– Modelo do phantom de 25 pontos uniformemente distribuídos ao longo da ROI .....	87
FIGURA 37	– Resultados das reconstruções com os 25 pontos sobre a grade .....	88
FIGURA 38	– Reconstrução de 25 pontos ao longo da ROI e aquisição com ruído usando SNR de 20 dB .....	89
FIGURA 39	– Reconstrução de 25 pontos ao longo da ROI, deslocados da grade em meio pixel na direção lateral .....	90
FIGURA 40	– Intensidades dos pixels para reconstruções IPB dos 25 pontos deslocados da grade em meio pixel na direção lateral .....	91
FIGURA 41	– Reconstrução de 25 pontos ao longo da ROI, deslocados da grade em meio pixel na direção axial .....	92
FIGURA 42	– Intensidades dos pixels para reconstruções IPB dos 25 pontos deslocados da grade em meio pixel na direção axial .....	92
FIGURA 43	– Reconstrução de 25 pontos ao longo da ROI, deslocados da grade em 0,2 pixel na direção axial .....	93
FIGURA 44	– Intensidades dos pixels para reconstruções IPB dos 25 pontos deslocados da grade em 0,2 pixel na direção axial .....	94
FIGURA 45	– Medida da intensidade da representação no domínio $\nabla$ de cada pixel da grade modelada .....	95
FIGURA 46	– Modelo do phantom de um cisto anecóico em um meio Gaussiano .....	96
FIGURA 47	– Reconstrução de um phantom cisto anecóico em meio Gaussiano e aquisição sem ruído .....	97
FIGURA 48	– Reconstrução de um phantom cisto anecóico em meio Gaussiano e aquisição com ruído .....	98
FIGURA 49	– Modelo do phantom de um cisto anecóico em um meio Laplaciano .....	99
FIGURA 50	– Reconstrução de um phantom cisto anecóico em meio Laplaciano e aquisição sem ruído .....	100
FIGURA 51	– Intensidades dos pixels para reconstruções IPB do cisto anecóico em meio Laplaciano .....	101
FIGURA 52	– Reconstrução de um phantom cisto anecóico em meio Laplaciano e aquisição com ruído .....	102
FIGURA 53	– Reconstrução de um phantom cisto anecóico em meio exponencial e aquisição sem ruído .....	103
FIGURA 54	– Intensidades dos pixels para reconstruções IPB do cisto anecóico em meio exponencial .....	104
FIGURA 55	– Modelo do phantom de massa em meio anecóico .....	104
FIGURA 56	– Reconstrução de um phantom massa em meio anecóico e aquisição sem ruído .....	105
FIGURA 57	– Reconstrução de um phantom massa em meio anecóico e aquisição com ruído .....	106
FIGURA 58	– Reconstrução de um phantom com dois refletores distanciados 1,6949 mm axialmente .....	107
FIGURA 59	– Reconstrução de um phantom com dois refletores distanciados 0,8475 mm axialmente .....	108

FIGURA 60	– Reconstrução de um phantom com dois refletores distanciados 0,339 mm axialmente .....	109
FIGURA 61	– Reconstrução de um phantom com dois refletores distanciados 0,1695 mm axialmente .....	109
FIGURA 62	– Reconstrução de um phantom com dois refletores distanciados 0,0847 mm axialmente .....	110
FIGURA 63	– Reconstrução de um phantom com dois refletores distanciados 1,6949 mm axialmente .....	111
FIGURA 64	– Reconstrução de um phantom com dois refletores distanciados 0,8475 mm axialmente .....	111
FIGURA 65	– Reconstrução de um phantom com dois refletores distanciados 0,339 mm axialmente .....	112
FIGURA 66	– Reconstrução de um phantom com dois refletores distanciados 0,1695 mm axialmente .....	113
FIGURA 67	– Reconstrução de um phantom massa em meio anecóico e aquisição sub-amostrada sem ruído .....	114
FIGURA 68	– Reconstrução de um phantom massa em meio anecóico e aquisição sub-amostrada com ruído usando SNR de 20 dB .....	115
FIGURA 69	– Reconstruções com regularização $\ell_1$ para 30 valores de $\lambda$ .....	117
FIGURA 70	– Reconstruções com regularização $\ell_2$ para 30 valores de $\lambda$ .....	118
FIGURA 71	– Curva L resultante das reconstruções com regularização $\ell_1$ .....	119
FIGURA 72	– Curva L resultante das reconstruções com regularização $\ell_2$ .....	119
FIGURA 73	– Reconstruções com regularização $\ell_1$ para 30 valores de $\lambda$ .....	121
FIGURA 74	– Reconstruções com regularização $\ell_2$ para 30 valores de $\lambda$ .....	122
FIGURA 75	– Curva L resultante das reconstruções com regularização $\ell_1$ .....	123
FIGURA 76	– Curva L resultante das reconstruções com regularização $\ell_2$ .....	123
FIGURA 77	– Curvas de desempenho do IRLS-CG e do IRLS-Inv .....	125
FIGURA 78	– Curva L para o phantom do tipo cisto anecóico .....	126
FIGURA 79	– Resultados das reconstruções do phantom do tipo cisto anecóico para os valores de $\lambda$ determinados pelos dois métodos .....	127
FIGURA 80	– Curva L para o phantom do tipo massa reflexiva em meio anecóico ....	128
FIGURA 81	– Resultados das reconstruções do phantom do tipo massa em meio anecóico para os valores de $\lambda$ determinados pelos dois métodos .....	129

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– Algoritmo IRLS-CG .....	64
TABELA 2	– Algoritmo do Gradiente Conjugado .....	67
TABELA 3	– Parâmetros do transdutor .....	76
TABELA 4	– Parâmetros padrão utilizados no IRLS-CG .....	77
TABELA 5	– Custos computacionais do IRLS-CG e do IRLS-Inv .....	125

## LISTA DE SIGLAS

BPDN	<i>Basis Pursuit Denoising</i>
CG	<i>Conjugate Gradient</i>
CS	<i>Compressive Sampling</i>
DAS	<i>Delay-and-sum</i>
FDP	Função Densidade de Probabilidade
GCV	<i>Generalized Cross-Validation</i>
IPB	<i>Inverse Problem Based</i>
IRLS	<i>Iteratively Reweighted Least Squares</i>
IRLS-CG	IRLS utilizando Gradiente Conjugado
IRLS-Inv	IRLS utilizando a matriz inversa direta
LASSO	<i>Least Absolute Shrinkage and Selection Operator</i>
LS	<i>Least squares</i>
MAP	<i>Maximum a Posteriori</i>
MATLAB	Matrix Laboratory
MLE	<i>Maximum Likelihood Estimator</i>
MRI	<i>Magnetic Resonance Imaging</i>
N.A.	Não aplicável
PCG	<i>Preconditioned Conjugate Gradient</i>
PET	<i>Proton Emission Tomography</i>
PSF	<i>Point Spread Function</i>
PZT	Titanato zirconato de chumbo
ROI	<i>Region of Interest</i>
SNR	<i>Signal-to-noise ratio</i>
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i>
TOF	<i>Time of Flight</i>
TSVD	<i>Truncated SVD</i>
TV	<i>Total Variation</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$p(t)$	Pressão percebida pelo transdutor no tempo $t$
$h^{ef}(t)$	Resposta eletroacústica ao impulso direta do transdutor
$u(t)$	Sinal elétrico com o qual o transdutor é excitado
$\mathbf{r}_1$	Ponto arbitrário afetado pelo sinal acústico
$h_k^{f-SIR}(\mathbf{r}_1, t)$	Resposta direta ao impulso espacial
$p(\mathbf{r}_1, t)$	Pressão percebida em $\mathbf{r}_1$ no instante $t$
$Z$	Impedância acústica
$p$	Pressão na oscilação
$u_z$	Velocidade na oscilação
$\theta_i$	Ângulo de incidência
$\theta_r$	Ângulo de reflexão
$\theta_t$	Ângulo de transmissão
$c_1$	Velocidade no meio 1
$c_2$	Velocidade no meio 2
$R_p$	Coefficiente de reflexão
$T_p$	Coefficiente de transmissão
$p_i$	Pressão da onda incidente
$p_r$	Pressão da onda refletida
$p_t$	Pressão da onda transmitida
$\sigma_s$	Seção de espalhamento
$\lambda$	Comprimento de onda
$\kappa_s$	Compressibilidade adiabática do refletor
$\kappa$	Compressibilidade adiabática do meio
$\rho_s$	Densidade do refletor
$\rho$	Densidade do meio
$h_k^{b-SIR}(\mathbf{r}_1, t)$	Função de resposta inversa ao impulso espacial
$h_k^{eb}(t)$	Resposta eletroacústica ao impulso inversa do elemento transdutor
$g_k(\mathbf{r}_1, t)$	Sinal no $k$ -ésimo elemento e proveniente de $\mathbf{r}_1$
$h_k(\mathbf{r}, t)$	Influência do eco do ponto $\mathbf{r}$ no $k$ -ésimo elemento transdutor no tempo $t$
$g_k(t)$	Sinal total recebido pelo $k$ -ésimo transdutor
$g_k[t_i]$	Sinal total recebido pelo $k$ -ésimo transdutor, no tempo discreto
$s(t)$	Função de amostragem
$M$	Número de pixels da imagem
$M_1$	Número de linhas da imagem
$M_2$	Número de colunas da imagem
$\mathbf{f}_{M \times 1}$	Vetor dos pixels da imagem
$\mathbb{U}$	Espaço vetorial da imagem
$\mathbf{H}_{N \times M}$	Matriz do modelo de aquisição
$\mathbb{V}$	Espaço vetorial dos dados de aquisição
$N$	Número de elementos do vetor dos dados de aquisição
$N_s$	Número de amostras por elemento transdutor

$N_e$	Número de elementos transdutores
$\mathbf{g}$	Vetor dos dados de aquisição
$g_n$	$n$ -ésimo elemento do vetor $\mathbf{g}$
$\mathbf{h}_m$	$m$ -ésima coluna da matriz $\mathbf{H}$
$\eta$	Vetor-erro
$\hat{\mathbf{f}}$	Vetor $\mathbf{f}$ estimado ou reconstruído
$\ \cdot\ _{\ell_2}$	Norma $\ell_2$ ou Euclidiana
$\mathbf{H}^+$	Pseudo-inversa de Penrose-Moore
$\cdot^T$	Matriz transposta
$\varepsilon$	Erro máximo tolerável (restrição)
$\lambda$	Parâmetro de regularização
$\hat{\mathbf{f}}^+$	Solução generalizada (dada pela pseudo-inversa)
$\max(\cdot)$	Máximo elemento de um vetor
$\min(\cdot)$	Mínimo elemento de um vetor
$\sigma$	Vetor dos valores singulares de $\mathbf{H}$
$\mathbf{U}$	Matriz dos vetores singulares à direita
$\mathbf{u}_i$	$i$ -ésimo vetor singular à direita
$\mathbf{V}$	Matriz dos vetores singulares à esquerda
$\mathbf{v}_i$	$i$ -ésimo vetor singular à esquerda
$\mathbf{S}$	Matriz dos valores singulares
$\mathcal{R}(\mathbf{f})$	Função penalidade de regularização
$\mathbf{D}$	Matriz de diferenças finitas
$\ \cdot\ _{\ell_1}$	Norma $\ell_1$
$\mathbf{L}$	Matriz de transformação arbitrária
$\mathbf{I}$	Matriz identidade
$\text{nnz}(\cdot)$	Número de elementos diferentes de zero
$\gamma$	Tolerância de restrição relaxada no domínio $\mathbb{V}$
$\tau$	Tolerância de restrição relaxada no domínio $\mathbb{U}$
$p(\cdot)$	Função Densidade de Probabilidade
$\sigma$	Desvio padrão dos elementos de $\eta$
$K$	Constante de normalização
$e_k$	Erro na $k$ -ésima iteração do IRLS
$\mathbf{f}_k$	Resultado da $k$ -ésima iteração do IRLS
$\mathbf{f}_R$	Resultado esperado
$tol$	Parâmetro do convergência do IRLS

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
1.1	OBJETIVO	18
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	18
<b>2</b>	<b>IMAGEAMENTO POR ULTRASSOM</b>	<b>20</b>
2.1	TRANSDUTORES E EMISSÃO DE ONDAS DE ULTRASSOM	22
2.2	PRINCÍPIO DE HUYGENS E RESPOSTA DIRETA AO IMPULSO ESPACIAL	23
2.3	REFLEXÃO DE ONDAS DE ULTRASSOM	25
2.3.1	Pontos refletores	26
2.4	AQUISIÇÃO DOS DADOS DE ECO	27
2.5	PRINCÍPIOS DA RECONSTRUÇÃO POR <i>DELAY-AND-SUM BEAMFORMING</i>	29
2.5.1	Ultrassom modo A e modo B	30
2.5.2	Limitações de resolução espacial no modo B	31
2.5.3	Limitação de resolução temporal no modo B	34
2.6	RECONSTRUÇÃO POR PROBLEMAS INVERSOS EM ULTRASSOM	34
2.6.1	O problema direto	36
2.6.2	O problema inverso	37
2.7	CONCLUSÃO DO CAPÍTULO	38
<b>3</b>	<b>RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS POR PROBLEMAS INVERSOS</b>	<b>40</b>
3.1	CONDIÇÕES DE HADAMARD	40
3.1.1	Existência de uma solução	41
3.1.2	Unicidade da solução	42
3.1.3	Estabilidade da solução	43
3.2	REGULARIZAÇÃO EM PROBLEMAS INVERSOS	44
3.2.1	Condicionamento do modelo de aquisição	44
3.2.2	<i>Overfitting</i>	45
3.2.3	Conhecimento a priori sobre a solução	45
3.2.4	Regularização como um processo de filtragem e formulações analisadas via SVD	46
3.2.4.1	Truncated SVD	46
3.2.4.2	Regularização de Tikhonov	47
3.2.5	Esparsidade e regularização por minimização de norma $\ell_1$	48
3.2.6	Formulações estatísticas	53
3.2.6.1	O Estimador de Máxima Verossimilhança	53
3.2.6.2	O estimador Maximum a Posteriori	54
3.2.6.3	MAP com <i>prior</i> Laplaciano	56
3.3	ESCOLHA DO PARÂMETRO DE REGULARIZAÇÃO	58
3.3.1	Inspeção visual	58
3.3.2	Curva L	59
3.3.3	Modelagem estatística	60
3.3.4	Outros métodos	60
3.4	CONCLUSÃO DO CAPÍTULO	61
<b>4</b>	<b>ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO</b>	<b>62</b>



4.1	ITERATIVELY REWEIGHTED LEAST SQUARES	62
4.2	GRADIENTE CONJUGADO	65
<b>5</b>	<b>ESTADO DE ARTE E PROPOSTA</b>	<b>69</b>
5.1	ABORDAGENS IPB EM ULTRASSOM	69
5.2	PROPOSTA	71
5.3	MATERIAIS E MÉTODOS	72
5.3.1	Ferramentas computacionais	72
5.3.2	Problema direto: construção da matriz H	72
<b>6</b>	<b>EXPERIMENTOS E RESULTADOS</b>	<b>74</b>
6.1	CONFIGURAÇÕES UTILIZADAS NOS EXPERIMENTOS	75
6.1.1	Transdutor e Field II	76
6.1.2	Parâmetros do IRLS-CG	76
6.2	PONTO NO CENTRO DA ROI	77
6.2.1	Ponto sobre a grade e aquisição sem ruído	77
6.2.2	Ponto sobre a grade e aquisição com ruído usando SNR de 20 dB	78
6.2.3	Ponto deslocado da grade meio pixel na direção lateral	79
6.2.4	Ponto deslocado da grade meio pixel na direção axial	81
6.2.5	Ponto deslocado da grade 0,2 pixel na direção axial	84
6.3	25 PONTOS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDOS AO LONGO DA ROI	87
6.3.1	Pontos sobre a grade e aquisição com ruído usando SNR de 20 dB	88
6.3.2	Pontos deslocados da grade meio pixel na direção lateral	89
6.3.3	Pontos deslocados da grade meio pixel na direção axial	91
6.3.4	Pontos deslocados da grade 0,2 pixel na direção axial	93
6.4	CISTO ANECÓICO NUM MEIO GAUSSIANO	95
6.4.1	Aquisição sem ruído	96
6.4.2	Aquisição com ruído usando SNR de 20 dB	97
6.5	CISTO ANECÓICO NUM MEIO LAPLACIANO	98
6.5.1	Aquisição sem ruído	99
6.5.2	Aquisição com ruído usando SNR de 20 dB	101
6.5.3	Phantom modificado: pontos com reflexividades positivas	102
6.6	MASSA NUM MEIO ANECÓICO	104
6.6.1	Aquisição sem ruído	105
6.6.2	Aquisição com ruído usando SNR de 20 dB	106
6.7	LIMITAÇÕES DE RESOLUÇÃO	106
6.7.1	Refletores distanciados axialmente	107
6.7.2	Refletores distanciados lateralmente	110
6.8	SENSIBILIDADE À SUBAMOSTRAGEM	113
6.9	COMPARAÇÃO DO EFEITO DO RUÍDO COM O EFEITO DA PRESENÇA DE REFLETORES NÃO MODELADOS	115
6.9.1	Pontos na grade e aquisição usando SNR de 5 dB	116
6.9.2	Pontos fora da grade e aquisição sem ruído	120
6.9.3	Discussão	124
6.10	COMPARAÇÃO DE DESEMPENHO ENTRE O CG E A INVERSA DIRETA	124
6.10.1	Observações	125
6.11	ESCOLHA DO PARÂMETRO DE REGULARIZAÇÃO PELA CURVA L	126
6.11.1	Discussão	129
6.12	CONCLUSÃO DO CAPÍTULO	130
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>131</b>

7.1 SUGESTÕES DE ESTUDOS FUTUROS .....	132
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>134</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os sistemas de imagens médicas de ultrassom apresentam como principais vantagens o baixo custo do equipamento, o caráter geralmente não invasivo dos exames e a capacidade de fornecer imagens em tempo real. Uma desvantagem destes sistemas, no entanto, é a baixa qualidade das imagens. Se comparadas, por exemplo, a imagens de tomografia computadorizada ou de ressonância magnética, as imagens de ultrassom apresentam baixa resolução espacial, ruído em excesso e pouco contraste.

Em aplicações que exigem alta resolução, como os diagnósticos de melanomas (PASMANN et al., 1993; TURNBULL et al., 1995), a limitação de resolução espacial traduz-se diretamente em limitação da capacidade de diagnóstico e acompanhamento clínico, pois quanto pior for a resolução maior é o tamanho que um objeto deve ter para ser detectado. Portanto é importante melhorar a resolução no imageamento médico por ultrassom.

Nos sistemas de ultrassom comerciais, a reconstrução de imagens baseia-se em algoritmos de *delay-and-sum beamforming* (DAS) (SMITH; WEBB, 2010). A reconstrução em ultrassom por problemas inversos (IPB - *Inverse Problem Based*) não é difundida na prática, existe no âmbito da pesquisa e tem demonstrado resultados promissores com relação à resolução se comparada aos algoritmos DAS (LAVARELLO et al., 2006; LINGVALL; OLOFSSON, 2007; VIOLA et al., 2008; ZANIN, 2011).

Este tipo de técnica traz, no entanto, dois novos problemas. O primeiro é a sensibilidade da reconstrução à presença de ruído. Este é na verdade um problema clássico na literatura de reconstrução de imagens por problemas inversos, o qual é geralmente tratado com regularização. Trabalhos preliminares mostraram a efetividade do uso da regularização de Tikhonov no tratamento deste problema em reconstrução IPB em ultrassom, mostrando resultados promissores (LINGVALL; OLOFSSON, 2007; ZANIN, 2011).

O segundo problema é a sensibilidade da reconstrução aos erros provenientes da discretização do modelo matemático de aquisição. Tal deficiência faz com que ecos de objetos refletivos localizados em posições não modeladas, que estão fora da grade de pixels prevista,

causem degradações na imagem reconstruída. Nas abordagens utilizando a regularização de Tikhonov este problema não foi suficientemente atenuado. Porém, em abordagens em que se utilizou algum tipo de regularização promotora de esparsidade (LINGVALL; OLOFSSON, 2007; LAVARELLO et al., 2006), observou-se progresso nesse sentido.

## 1.1 OBJETIVO

Em vista do problema exposto, este trabalho tem como objetivo avaliar a utilização da regularização por minimização da norma  $\ell_1$  da imagem, ou regularização  $\ell_1$ , no sentido de minimizar o problema do ruído e artefatos consequentes de imperfeições no modelo de aquisição. A regularização por minimização da norma  $\ell_1$  adiciona à reconstrução uma tendência à esparsidade na imagem, ou seja, uma tendência à geração de imagens com a energia concentrada em poucos pixels. A premissa assumida é que esta tendência diminui o efeito do ruído e dos artefatos, uma vez que faz com que os objetos reconstruídos tenham uma representação mais concentrada, em vez de espalhada na imagem. Ou seja, uma representação mais esparsa. A penalidade de ajuste da imagem ao modelo e aos dados é a norma  $\ell_2$ , o que classifica a reconstrução como um problema de mínimos quadrados. Essa combinação de penalidades será referida como  $\ell_2$ - $\ell_1$ .

O algoritmo utilizado para a resolução do problema inverso é uma implementação do algoritmo de mínimos quadrados iterativamente reponderados (IRLS - *Iteratively Reweighted Least Squares*). Cada iteração do IRLS envolve a resolução de um sistema linear, que é realizada utilizando o algoritmo do gradiente conjugado (CG - *Conjugate Gradient*). Esta combinação de algoritmos é referida como IRLS-CG.

Concomitantemente, este trabalho apresenta uma introdução teórica sobre regularização em problemas inversos e uma explicação sobre as semelhanças e diferenças das regularizações  $\ell_2$  (Tikhonov) e  $\ell_1$  dos pontos de vista geométrico e da estatística Bayesiana.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O Capítulo 2 aborda a aquisição de dados de ultrassom, que compreende desde o disparo de um pulso sonoro no transdutor até a amostragem dos sinais de tensão provenientes do eco dos objetos refletores. São também apresentados os princípios da reconstrução de imagens por algoritmos DAS e IPB, bem como as limitações de resolução do DAS que motivam o estudo de algoritmos IPB.

O Capítulo 3 aborda os aspectos teóricos da reconstrução de imagens por problemas inversos, com ênfase no conceito de regularização e nos principais tipos de regularização presentes na literatura. As regularizações por minimização da norma  $\ell_2$  e da norma  $\ell_1$  da imagem são apresentadas, e suas respectivas propriedades e efeitos esperados são explicados do ponto de vista geométrico e do ponto de vista da estatística Bayesiana.

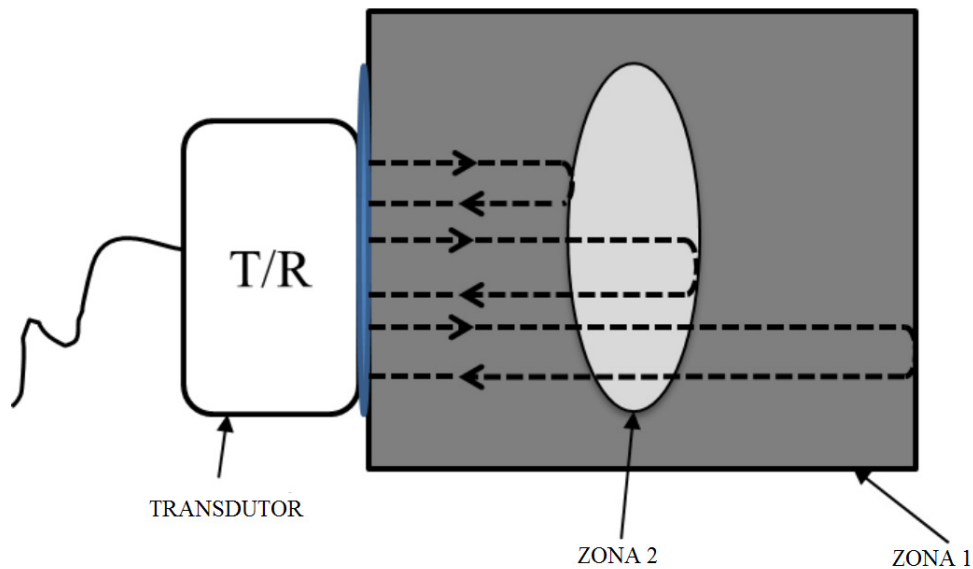
O Capítulo 5 contém três seções. A Seção 5.1 apresenta uma revisão dos principais trabalhos que reportaram o uso de algoritmos IPB na reconstrução de imagens de ultrassom, onde se encontra a motivação para estudos com *priors* promotores de esparsidade. Na Seção 5.2 é apresentada a proposta do trabalho. E na Seção 5.3, mostra-se como esta proposta é implementada: são apresentados o método de modelagem do problema direto, a formulação do problema inverso e os algoritmos utilizados na reconstrução, além das ferramentas computacionais utilizadas.

O Capítulo 6 contém experimentos de reconstruções de imagens utilizando dados provenientes de simulação com phantoms computacionais. São comparadas reconstruções com os algoritmos DAS, IPB  $\ell_2$ - $\ell_2$  e IPB  $\ell_2$ - $\ell_1$ . Alguns aspectos e particularidades da reconstrução com minimização  $\ell_1$  são demonstrados.

O Capítulo 7 contém a conclusão do trabalho, além de sugestões de estudos futuros baseadas principalmente em problemas observados nos experimentos relatados no Capítulo 6.

## 2 IMAGEAMENTO POR ULTRASSOM

No imageamento por ultrassom, utiliza-se a emissão e recepção de ondas acústicas em frequências acima da faixa audível, geralmente entre 1MHz e 20MHz, para gerar imagens que representam o interior do objeto de interesse. A grandeza medida e representada na imagem é a reflexividade acústica, ou seja, a capacidade de refletir ondas acústicas. A reflexividade está presente nos pontos onde há interface entre zonas com diferentes impedâncias acústicas. Nessas interfaces, parte da onda propaga-se para a zona seguinte e parte é refletida, retornando ao transdutor, conforme representado na Figura 1. A porção refletida e retornada ao transdutor é convertida por este em um sinal elétrico que será em seguida processado para a reconstrução da imagem (CHRISTENSEN, 1988).

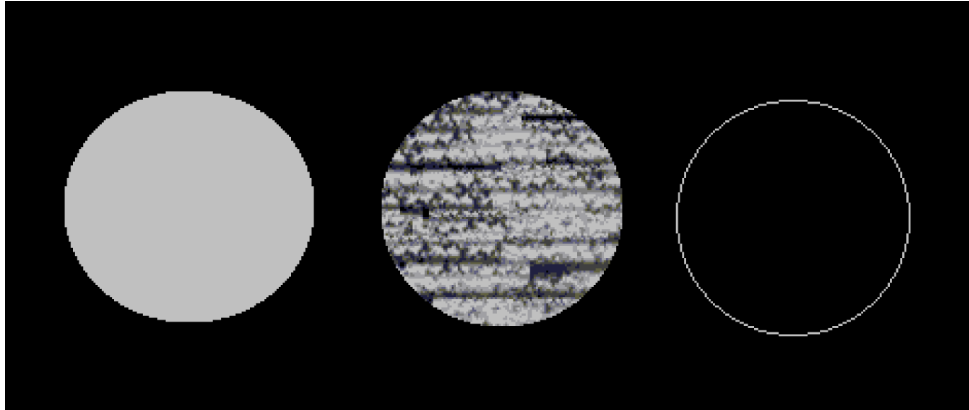


**Figura 1: Reflexão e propagação em interfaces entre zonas com diferentes impedâncias acústicas.**

**Fonte: Adaptado de (ZANIN, 2011)**

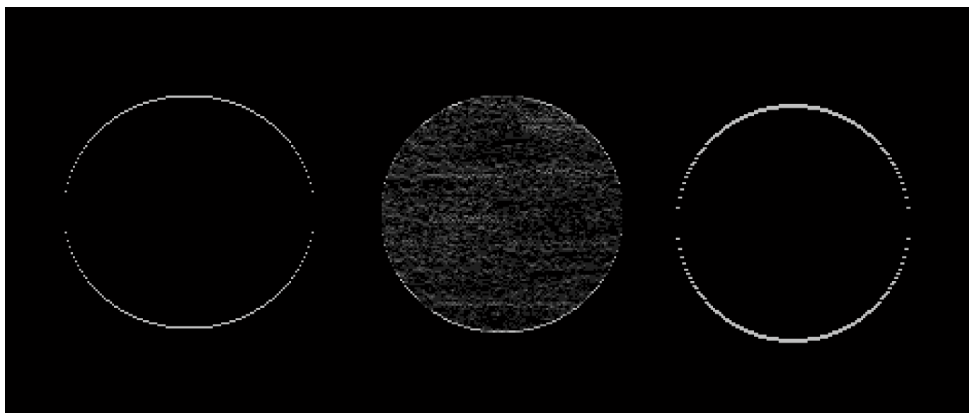
Tipicamente, no ultrassom modo B (do inglês *bright*, brilho), obtém-se uma imagem em escala de cinza onde a intensidade ou brilho de cada pixel representa a reflexividade acústica do ponto correspondente no tecido.

Para ilustrar a relação entre impedâncias acústicas e reflexividades acústicas, a Figura 2 mostra uma imagem em que a intensidade dos pixels representa as impedâncias acústicas de um tecido hipotético, enquanto a Figura 3 mostra uma imagem em que a intensidade dos pixels representa as reflexividades acústicas ao longo do mesmo tecido.



**Figura 2: Impedâncias acústicas ao longo de um tecido hipotético.**

**Fonte: Autoria própria**



**Figura 3: Reflexividades acústicas ao longo de um tecido hipotético.**

**Fonte: Autoria própria**

A geração da Figura 3 a partir da Figura 2 simula o imageamento com um transdutor posicionado acima do tecido e disparando os pulsos de cima para baixo, na direção perpendicular à sua superfície. Dessa forma, as reflexividades aparecem na Figura 3 em todo pixel que, para o pixel correspondente na Figura 2, há diferença entre a sua impedância acústica e a do pixel imediatamente inferior.

## 2.1 TRANSDUTORES E EMISSÃO DE ONDAS DE ULTRASSOM

As ondas sonoras que viajam e são refletidas ao longo do tecido imageado são geradas por transdutores, elementos que convertem energia elétrica em energia mecânica (som) e vice-versa. O componente mais importante de um transdutor de ultrassom é o material piezoelétrico, tipicamente uma cerâmica piezoelétrica, sendo que o material mais comumente utilizado é o titanato zirconato de chumbo (PZT). É este componente que possui a característica de transdutor. Além do material piezoelétrico, um transdutor de ultrassom é tipicamente constituído por outros três componentes (AZHARI, 2010):

- Camada de amortecimento. Camada responsável pela absorção da energia de vibração do transdutor, amortecendo sua oscilação natural e otimizando sua resposta ao impulso. Constitui-se tipicamente de um substrato em epóxi impregnado com pó metálico. (SMITH; WEBB, 2010).
- Camada de compatibilidade acústica. Como as impedâncias acústicas da cerâmica piezoelétrica e da pele humana são muito distintas (a do PZT é cerca de 15 vezes a da pele), o contato direto entre os dois materiais criaria uma superfície altamente reflexiva, fazendo com que uma quantidade significativa de energia das ondas sonoras fosse refletida deixando de ser transmitida ao tecido. Por essa razão uma camada de plástico é adicionada à superfície do transdutor, melhorando o acoplamento acústico.
- Contato metálico. Utilizado para realizar o contato entre o material piezoelétrico e a instrumentação eletrônica, transmitindo os sinais de tensão elétrica.

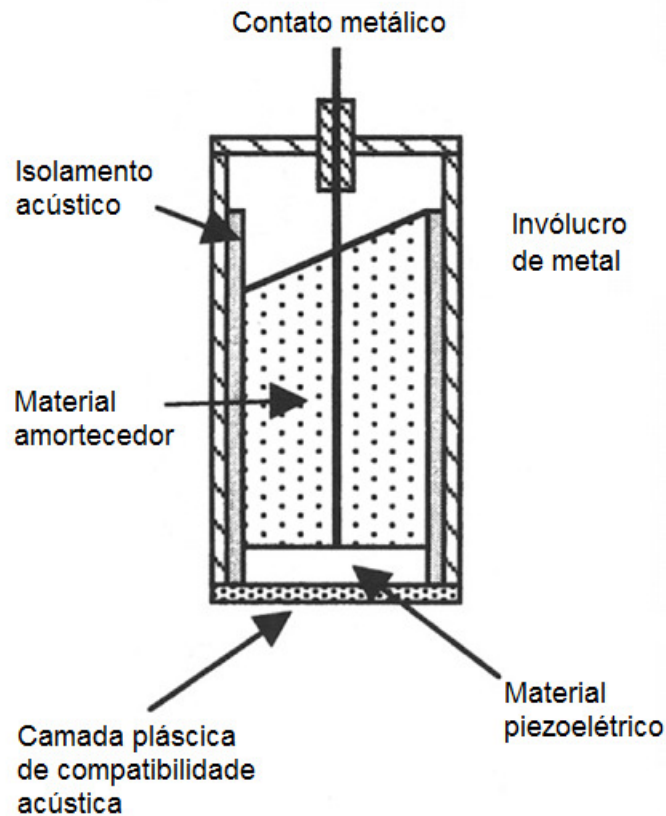
Estes elementos estão esquematizados na Figura 4.

Variações de tensão elétrica na extremidades do transdutor são convertidas em variações de pressão de compressão e de cisalhamento. Estas variações de pressão causam pequenas variações nas dimensões do cristal piezoelétrico. Dessa forma são provocadas ondas mecânicas que se propagam pelo material com o qual o transdutor está em contato (SMITH; WEBB, 2010; AZHARI, 2010; CHRISTENSEN, 1988).

É razoável representarmos o transdutor como um sistema linear e invariante no tempo (SMITH; WEBB, 2010). Essa representação nos permite expressar a relação entre o sinal de entrada (tensão elétrica) e o sinal de saída (pressão mecânica) através da seguinte equação de convolução:

$$p(t) = h^{ef}(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h^{ef}(t - \tau)d\tau, \quad (1)$$





**Figura 4: Principais componentes de um transdutor de ultrassom.**

Fonte: Adaptado de (SMITH; WEBB, 2010)

onde  $p(t)$  é a pressão causada na superfície do transdutor,  $h^{ef}(t)$  é a resposta ao impulso direta do comportamento eletroacústico do transdutor,  $u(t)$  é o sinal elétrico com o qual o transdutor é excitado e o símbolo  $*$  denota a convolução no tempo.

Como trabalharemos com transdutores multi-elementos, redefinimos a Equação 1 para  $k$  elementos:

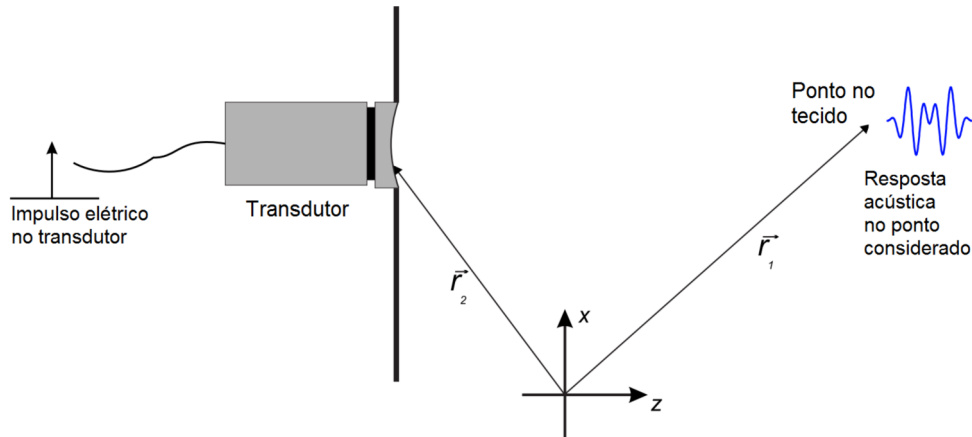
$$p_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h_k^{ef}(t - \tau) d\tau = h_k^{ef}(t) * u(t), \quad (2)$$

onde o índice  $k$  denota o  $k$ -ésimo elemento do transdutor.

## 2.2 PRINCÍPIO DE HUYGENS E RESPOSTA DIRETA AO IMPULSO ESPACIAL

Uma vez que o pulso tenha sido gerado na superfície do transdutor, deve-se conhecer como ele afeta cada ponto ao longo do objeto imageado. A Figura 5 mostra o transdutor e um ponto arbitrário dispostos sobre um sistema cartesiano de duas dimensões, onde  $r_2$  é a posição

da parte mais inferior do transdutor e  $r_1$  é a posição do ponto.

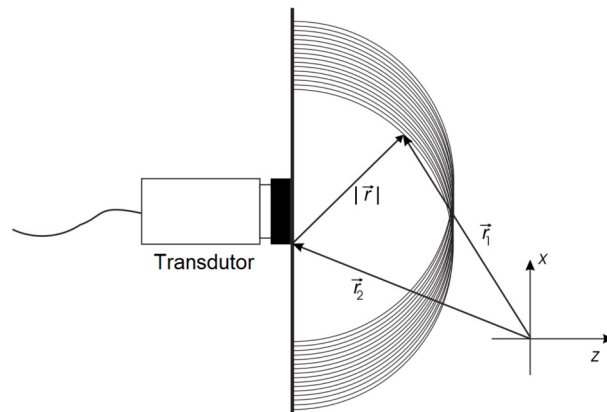


**Figura 5: Transdutor e um ponto arbitrário dispostos sobre um sistema cartesiano de duas dimensões.**

**Fonte: Adaptado de (JENSEN, 2011)**

De acordo com o princípio de Huygens (AZHARI, 2010; HARRIS, 1981; JENSEN, 1991; JENSEN; SVENDSEN, 1992) a superfície radiante de um elemento do transdutor pode ser dividida em infinitos pontos que irradiam cada um uma onda esférica afastando-se do transdutor com velocidade  $c$ . Este princípio é representado na Figura 6. O sinal acústico que afeta um ponto arbitrário  $\mathbf{r}_1$  no tecido é um somatório (ou uma integral, caso pensemos de forma contínua) da influência de todas essas ondas esféricas geradas por elementos infinitesimais. Como a disposição de cada ponto  $\mathbf{r}_1$  com relação à superfície do elemento do transdutor é distinta, também é distinta a forma como cada ponto  $\mathbf{r}_1$  é afetado pelo sinal gerado por ele. Por isso surge a necessidade de se modelar o sinal percebido em um ponto em função da sua posição com relação ao elemento transdutor. À função de resposta ao impulso do  $k$ -ésimo elemento transdutor para o ponto  $\mathbf{r}_1$  chamamos  $h_k^{f-SIR}(\mathbf{r}_1, t)$ . Esta função é conhecida como resposta direta ao impulso espacial (*forward-Spatial Impulse Response*) (HARRIS, 1981; JENSEN et al., 1993, 1993; STEPHANISHEN, 1971, 1971). Convolvendo-se-se esta função de resposta com a expressão da Equação 2, modela-se a pressão  $p(\mathbf{r}_1, t)$  percebida pelo ponto  $\mathbf{r}_1$  no instante de tempo  $t$  da seguinte forma:

$$p(\mathbf{r}_1, t) = \sum_{k=1}^K h_k^{f-SIR}(\mathbf{r}_1, t) * h_k^{ef}(t) * u_k(t). \quad (3)$$



**Figura 6: Representação do princípio de Huygens: a superfície irradiante do transdutor é constituída de infinitos pontos radiantes.**

Fonte: (JENSEN, 2011)

### 2.3 REFLEXÃO DE ONDAS DE ULTRASSOM

A reflexão das ondas de pressão ocorre em todos os pontos em que há interface entre duas regiões com impedâncias acústicas distintas. A impedância acústica  $Z$  define-se como

$$Z = \frac{p}{u_z}, \quad (4)$$

onde  $p$  é a pressão e  $u_z$  a velocidade da partícula durante a oscilação (SMITH; WEBB, 2010).

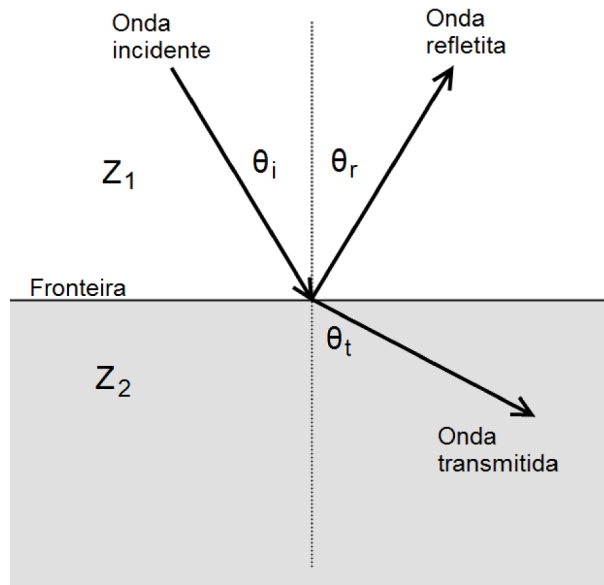
Caso o ponto  $\mathbf{r}_1$  esteja situado numa interface entre duas regiões com impedâncias acústicas diferentes, ocorrerá reflexão, que consiste no retorno de parte da energia da onda. Se as velocidades do som nos dois meios forem distintas, a porção transmitida da onda sofrerá refração, ou seja, haverá mudança no ângulo de propagação da onda com relação à superfície (exceto nos casos em que o ângulo é 90 graus). O fenômeno da reflexão e da refração está representado na Figura 7.

As equações que governam os ângulos incidência  $\theta_i$ , de reflexão  $\theta_r$  e de transmissão  $\theta_t$  representados na Figura 7 são dadas por:

$$\theta_i = \theta_r, \quad (5)$$

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{c_1}{c_2}, \quad (6)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são as velocidades do som nos meios 1 e 2 respectivamente.



**Figura 7: Incidência numa interface entre duas zonas com impedâncias acústicas distintas.**

**Fonte: Adaptado de (SMITH; WEBB, 2010)**

Os coeficientes de reflexão ( $R_p$ ) e transmissão ( $T_p$ ) da onda transmitida são dadas por:

$$R_p = \frac{p_r}{p_i} = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t}, \quad (7)$$

$$T_p = \frac{p_t}{p_i} = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t}, \quad (8)$$

onde  $p_i$ ,  $p_r$  e  $p_t$  são respectivamente as pressões das ondas incidente, refletida e transmitida.

### 2.3.1 PONTOS REFLETORES

A reflexão é na verdade um caso particular do fenômeno do espalhamento ou *scattering* (SMITH; WEBB, 2010). O conhecimento do fenômeno do espalhamento é importante na modelagem do comportamento acústico de regiões muito pequenas com impedância acústica diferente do meio em que estão inseridas. Estas regiões, de dimensões menores do que o comprimento da onda transmitida, comportam-se como um ponto espalhador ou *scatterer*, também chamado de ponto refletor. De maneira aproximada, o comportamento acústico de um ponto refletor é de espalhar esfericamente e uniformemente a energia da onda de pressão que o excita. O processo de espalhamento é caracterizado por uma grandeza conhecida como seção de espalhamento ( $\sigma_s$ ), que se define como a potência espalhada por unidade de intensidade incidente (SMITH; WEBB, 2010) e obedece à seguinte relação:

$$\sigma_s = \frac{64\pi^5}{9\lambda^4} r^6 \left[ \left| \frac{\kappa_s - \kappa}{\kappa} \right|^2 + \frac{1}{3} \left| \frac{3(\rho_s - \rho)}{2\rho_s + \rho} \right|^2 \right], \quad (9)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda,  $\kappa_s$  é a compressibilidade adiabática do refletor,  $\kappa$  é a compressibilidade adiabática do meio em que o refletor está inserido,  $\rho_s$  é a densidade do refletor e  $\rho$  é a densidade do meio.

Um exemplo de objeto que normalmente se comporta como ponto refletor são os glóbulos vermelhos do sangue. No âmbito da pesquisa, o conceito de ponto refletor é importante por ser a entidade com a qual se modela o comportamento acústico de tecidos em programas de simulação como o Field II (JENSEN, 1996, 2004).

Neste trabalho, assume-se o uso de pontos refletores de dimensões infinitesimais na modelagem do comportamento acústico dos tecidos. A reflexividade de um ponto arbitrário  $\mathbf{r}_1$  será representada pela função  $f(\mathbf{r}_1)$ , de forma que um valor diferente de zero para  $f(\mathbf{r}_1)$  significa que há um ponto refletor na posição  $\mathbf{r}_1$ . A imagem de ultrassom que se busca reconstruir é um mapa de todos os  $f(\mathbf{r})$  tal que  $\mathbf{r} \in \text{ROI}$ , onde ROI é a região de interesse ou *region of interest*.

## 2.4 AQUISIÇÃO DOS DADOS DE ECO

Conforme descrito na Seção 2.2, o princípio de Huygens faz com que a resposta ao impulso  $h_k^{f-SIR}(\mathbf{r}_1, t)$  da superfície radiante do elemento transdutor  $k$  ao ponto  $\mathbf{r}_1$  no tecido seja dependente não somente da distância entre  $\mathbf{r}_1$  e a superfície do transdutor, já que a superfície do transdutor é um conjunto de pontos infinitesimais. Esta ideia pode ser estendida para o sinal de eco retornado do ponto  $\mathbf{r}_1$  para o elemento transdutor. Deve-se, portanto, definir uma função de resposta inversa ao impulso espacial (*back-Spatial Impulse Response*)  $h_k^{b-SIR}(\mathbf{r}_1, t)$  para o  $k$ -ésimo elemento do transdutor. Da mesma forma, a resposta ao impulso direta do comportamento eletroacústico do elemento transdutor possui um equivalente inverso  $h_k^{eb}(t)$ .

Uma vez definidas estas duas últimas funções, podemos finalmente representar o sinal  $g_k(\mathbf{r}_1, t)$  percebido pela instrumentação eletrônica do  $k$ -ésimo elemento transdutor como consequência da excitação acústica do ponto  $\mathbf{r}_1$ . Este sinal é o resultado das convoluções dos seguintes componentes:

1. A pressão  $p(\mathbf{r}_1, t)$  percebida pelo ponto  $f(\mathbf{r}_1)$  como consequência das emissões dos  $k$  elementos do transdutor (Equação 3), que é ponderada pela reflexividade  $f(\mathbf{r}_1)$  do ponto  $\mathbf{r}_1$  (Seção 2.3.1);

2. A função de resposta inversa ao impulso espacial  $h_k^{b-SIR}(\mathbf{r}_1, t)$ ;
3. A resposta ao impulso inversa  $h_k^{eb}(t)$  do comportamento eletroacústico do elemento transdutor.

Tem-se assim:

$$g_k(\mathbf{r}_1, t) = [p(\mathbf{r}_1, t)f(\mathbf{r}_1)] * h_k^{b-SIR}(\mathbf{r}_1, t) * h_k^{eb}(t). \quad (10)$$

Uma representação mais concisa da Equação 10 é possível chamando-se de  $h_k(\mathbf{r}, t)$  o resultado da convolução de todos os termos com exceção de  $f(\mathbf{r})$ :

$$g_k(\mathbf{r}_1, t) = h_k(\mathbf{r}_1, t)f(\mathbf{r}_1) \quad (11)$$

Mas na prática não é possível isolar o sinal proveniente da reflexão de cada ponto  $\mathbf{r}_1$ . O sinal  $g_k(t)$  recebido pela instrumentação do  $k$ -ésimo elemento transdutor é na verdade um somatório dos sinais provenientes das reflexões de todos os pontos do objeto imageado:

$$g_k(t) = \sum_{\mathbf{r} \in ROI} [h_k(\mathbf{r}, t)f(\mathbf{r})], \quad (12)$$

onde  $ROI$  representa a região de interesse imageada (*Region of Interest*).

Finalmente, a amostragem do sinal  $g_k(t)$  nos dá o sinal  $g_k[t_i]$  no tempo discreto:

$$g_k[t_i] = g_k(t)s(t), \quad (13)$$

onde

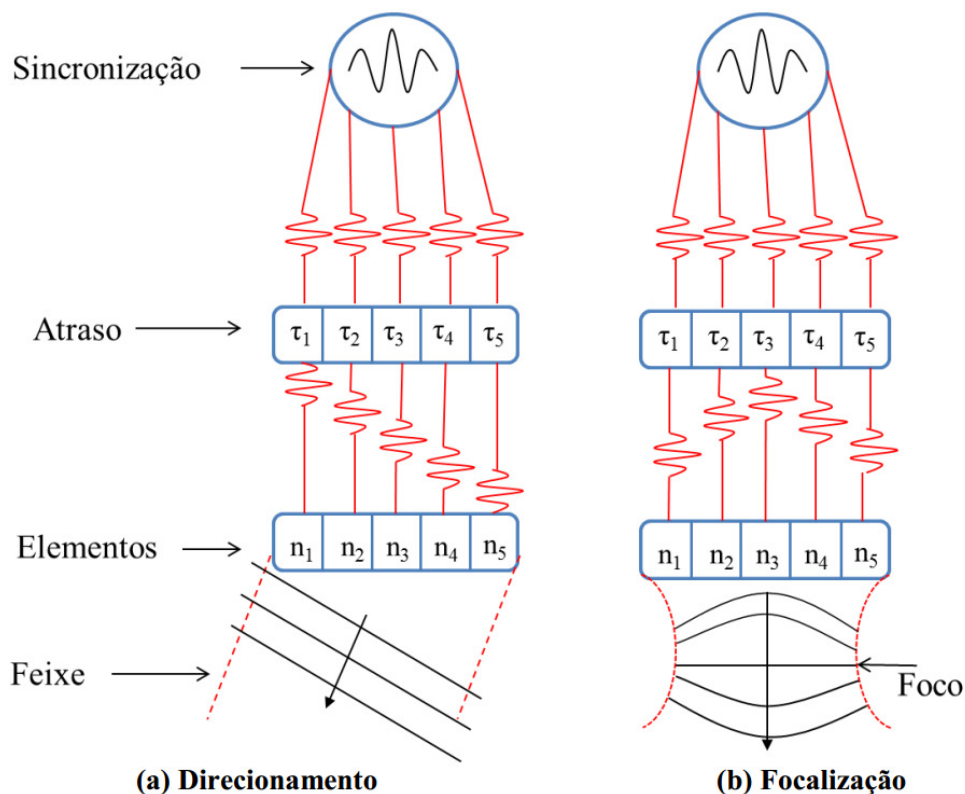
$$s(t) = \sum_{i=1}^S \delta(t - t_i), \quad (14)$$

é uma função de amostragem.

A forma como a influência de cada ponto  $\mathbf{r}_1$  se espalha ao longo dos sinais  $g_k[t_i]$  constitui um conceito importante no modelo de aquisição, chamado função espalhamento de ponto ou *Point Spread Function* (PSF) (BARRETT; MYERS, 2004; BOVIK, 2000). Os sinais  $g_k[t_i]$  são então utilizados na reconstrução da imagem que representa as reflexividades  $f(\mathbf{r})$ . Pode-se dizer que a maneira como se reconstrói a reflexividade de cada ponto  $\mathbf{r}_1$  é o que diferencia os algoritmos baseados em DAS dos algoritmos IPB.

## 2.5 PRINCÍPIOS DA RECONSTRUÇÃO POR *DELAY-AND-SUM BEAMFORMING*

Um dos principais problemas que um algoritmo de reconstrução de imagens de ultrassom deve resolver é como obter informação sobre um ponto específico a partir de um sinal que é composto pela soma dos ecos recebidos de todos os pontos refletoras da imagem, como mostra a Equação 12. No caso dos algoritmos baseados em DAS, esse problema é contornado ajustando-se eletronicamente o foco do transdutor (AZHARI, 2010; CHRISTENSEN, 1988; HEDRICK et al., 1995). Isto é possível em transdutores multielementos quando se impõem atrasos individuais no sinal de cada elemento, na emissão e na recepção. Durante a emissão do pulso de ultrassom, elementos linearmente atrasados alteram a direção da frente de onda. Da mesma forma, um atraso em padrão semi-circular cria uma frente de onda côncava que converge para um foco onde há interferência construtiva das ondas geradas por todos os elementos utilizados. Os dois casos estão representados na Figura 8.



**Figura 8:** Atrasos utilizados para (a) direcionamento e (b) focalização da frente de onda.

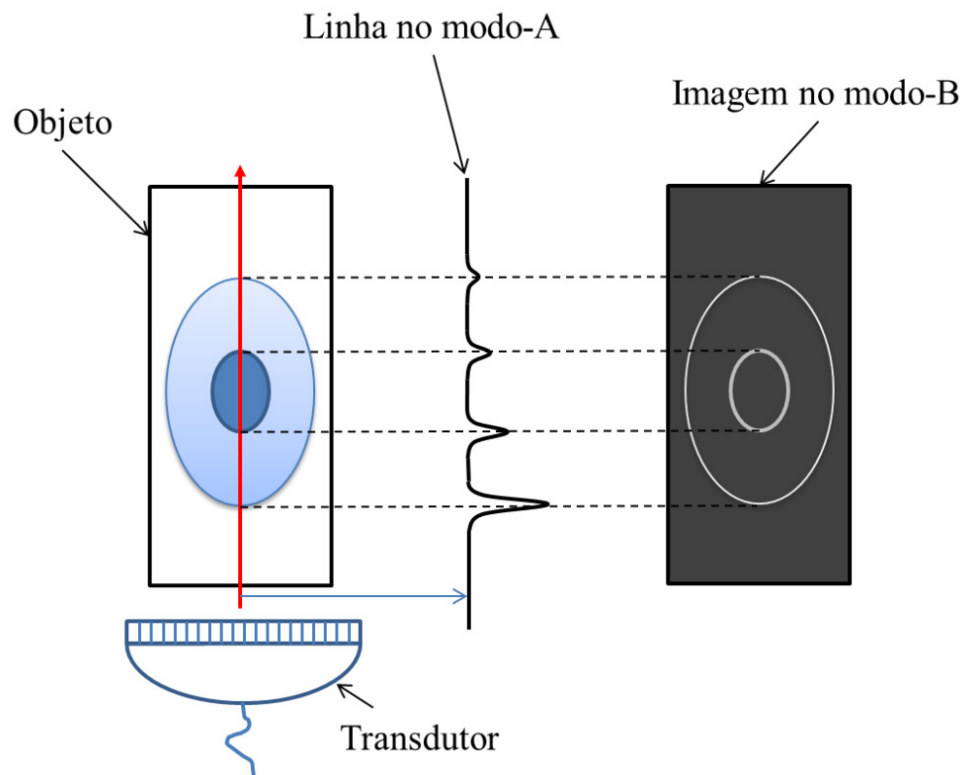
Fonte: (ZANIN, 2011)

A focalização também é utilizada na recepção. Aplicando-se o padrão de atrasos inverso àquele utilizado na transmissão e somando-se os sinais capturados pelos elementos utilizados, amplifica-se o sinal proveniente do ponto focal. É esta combinação de atrasos e soma

que dá nome ao *delay-and-sum beamforming*.

### 2.5.1 ULTRASSOM MODO A E MODO B

O ultrassom modo A leva este nome porque a informação desejada está na amplitude do sinal de eco recuperado. Não se trata de reconstrução de imagens, mas de uma técnica que visa a estimar a profundidade de interfaces entre tecidos de diferentes impedâncias acústicas (WEBSTER, 2009). O pulso de ultrassom é enviado pelo transdutor, que então fica recebendo o sinal proveniente das reflexões. O sinal recebido é demodulado e exibido ao operador, conforme representado na Figura 9.

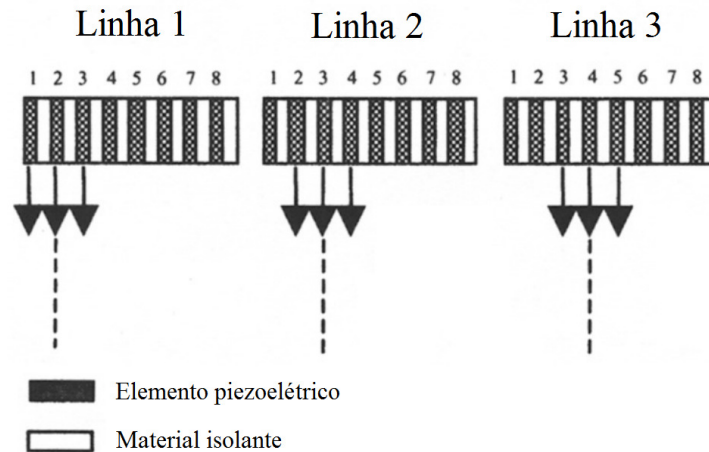


**Figura 9:** No modo A, o sinal demodulado de uma linha é a informação de interesse. No modo B, a mesma linha compõe, junto de outras linhas paralelas, a imagem.

Fonte: (ZANIN, 2011)

O ultrassom modo B (brilho ou *bright*) também está representado na Figura 9. Pode-se compreender o processo de aquisição no modo B como uma sucessão de aquisições modo A paralelas. De fato uma imagem modo B é composta de colunas de amplitude modo A, com a amplitude convertida em intensidade de pixel numa escala de cinza. Uma das formas de gerar diferentes linhas no modo B sem a movimentação física do transdutor é ativando-se um subconjunto de elementos do transdutor para cada linha, conforme representado na Figura 10.





**Figura 10: Diferentes conjuntos de elementos gerando diferentes linhas no modo B. No exemplo, cada conjunto de 3 elementos do transdutor é responsável pela geração de uma das linhas no modo B.**

**Fonte: Adaptado de (SMITH; WEBB, 2010)**

### 2.5.2 LIMITAÇÕES DE RESOLUÇÃO ESPACIAL NO MODO B

A reconstrução DAS para geração de imagens modo B possui limitações intrínsecas de resolução axial. Essas limitações existem pelo fato de não ser possível resolver independentemente objetos refletoras cujos ecos encontram-se sobrepostos no sinal adquirido pelo transdutor (SMITH; WEBB, 2010).

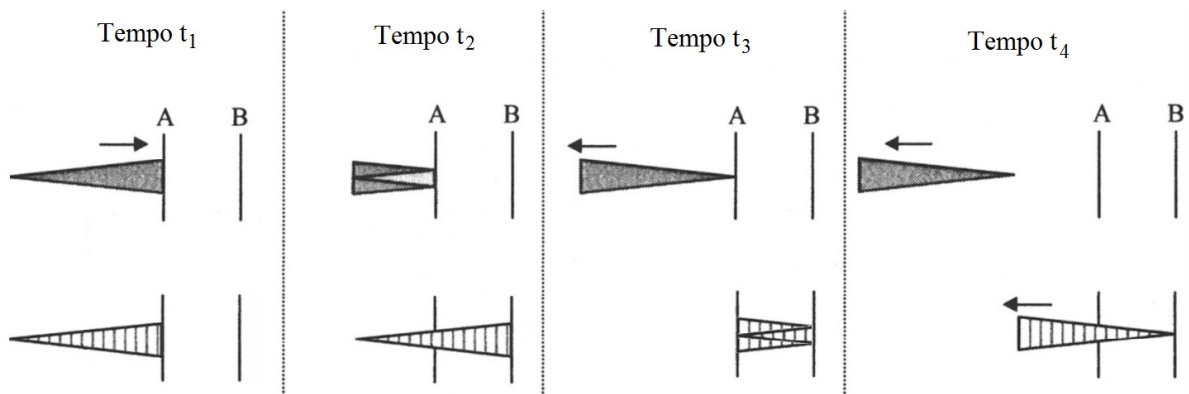
A resolução axial (paralela à direção de propagação) encontra como limitante o tamanho do pulso emitido pelo transdutor. Sendo  $d$  a duração em segundos do pulso, seu tamanho  $l$  obedece a relação

$$l = dc, \quad (15)$$

onde  $c$  é a velocidade de propagação do som no tecido. É possível definir a resolução axial  $Rz$  como (SMITH; WEBB, 2010)

$$Rz = \frac{1}{2}dc, \quad (16)$$

conforme representado no exemplo de reflexão e transmissão da Figura 11, que representa quatro instantes de tempo igualmente intervalados. As duas porções refletidas do pulso, uma refletida na interface A e outra na interface B, não estão sobrepostas, pois a distância entre as duas interfaces é igual à metade do comprimento do pulso. Se essa distância fosse menor, os dois pulsos refletidos estariam sobrepostos e não poderiam ser resolvidos independentemente pelo algoritmo DAS modo A ou modo B.



**Figura 11:** Demonstração do princípio segundo o qual a resolução axial corresponde à metade do tamanho do pulso. O pulso amortecido transmitido é representado por triângulos. A distância entre as interface A e B é igual à metade do tamanho do pulso. As imagens superior e inferior correspondem a duas porções do mesmo pulso. A porção superior é refletida na interface A, enquanto a porção inferior atravessa a interface A e é refletida na interface B. Em  $t_1$  a frente do pulso alcança a interface A. Em  $t_2$ , metade da porção superior já alcançou a interface A e foi refletida, e a frente da metade inferior alcança a interface B. Em  $t_3$ , toda a porção superior do pulso foi refletida pela interface A, e metade da porção inferior já alcançou a interface B e foi refletida. Em  $t_4$ , a porção superior já se distanciou da interface a, e a porção inferior foi totalmente transmitida. Como a distância entre as interfaces A e B é igual à metade do tamanho do pulso, não há sobreposição das porções refletidas por cada uma das interfaces.

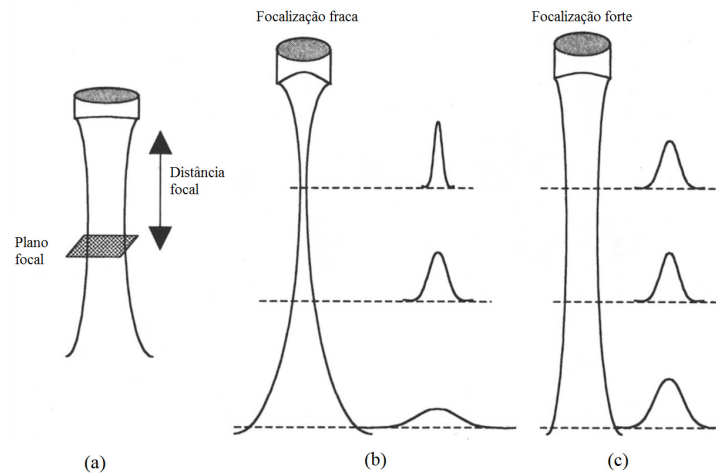
Fonte: Adaptado de (SMITH; WEBB, 2010)

Os algoritmos DAS também possuem uma limitação intrínseca na resolução lateral, consequente da limitação na capacidade de foco. As linhas adquiridas para formação da imagem modo B possuem ecos provenientes de uma região do tecido que abrange toda a seção transversal do feixe focalizado. A seção transversal do feixe é função da focalização utilizada e da distância do transdutor, e é representada na Figura 12.

Como a área da seção transversal do feixe não é infinitesimal, é possível que dois objetos refletoras muito próximos estejam sob a área de abrangência do mesmo feixe, impossibilitando que sejam resolvidos independentemente. Este problema é representado na Figura 13.

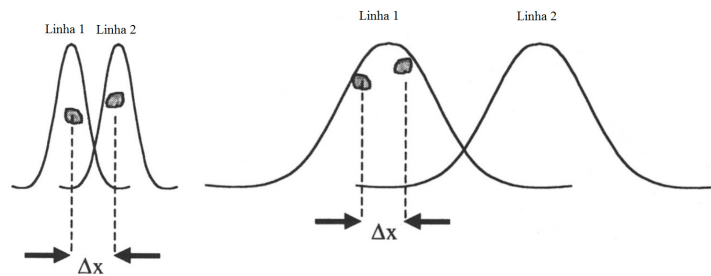
A superposição de seções transversais de linhas adjacentes e a existência dos *grating lobes* e *side lobes* (HEDRICK et al., 1995; SMITH; WEBB, 2010) faz ainda com que o eco do mesmo objeto afete várias linhas do modo B, resultando na presença de artefatos indesejados na imagem reconstruída.

Dentro do contexto do DAS, a forma mais comum de se melhorar a resolução espacial é através do aumento da frequência para diminuição do tamanho do pulso (resolução axial) e da diminuição do tamanho dos elementos do transdutor (resolução lateral). Os ganhos de resolução espacial são úteis no imageamento da sub-superfície da pele (PASSMANN et al.,



**Figura 12: Distância focal e seção transversal do feixe de ultrassom. (a) A seção transversal ao longo do feixe é função da focalização utilizada, do ponto focal escolhido e da distância do transdutor. (b) Representação de três amplitudes de seção transversal para um feixe focalizado. (c) A mesma representação para um feixe menos focalizado.**

Fonte: Adaptado de (SMITH; WEBB, 2010)



**Figura 13: Demonstração do problema da resolução lateral em algoritmos DAS. Em (a) a distância  $\Delta x$  entre os objetos refletivos é maior do que o diâmetro da seção transversal do feixe para a profundidade em que eles se encontram, permitindo que cada um apareça em uma linha diferente do modo B. Em (b)  $\Delta x$  é menor do que a seção transversal e os pontos pertencerão à mesma linha no modo B, não sendo resolvidos separadamente.**

Fonte: Adaptado de (SMITH; WEBB, 2010)

1993; TURNBULL et al., 1995) e dos olhos (SHERAR et al., 1989; PAVLIN et al., 1990, 1992; PAVLIN; FOSTER, 1995) onde aplicações clínicas incluem detecção de melanomas e glaucomas.

É possível concluir que os dois limitadores de resolução citados são consequência da superposição de ecos na recepção, o que o DAS é incapaz de resolver. A limitação de resolução lateral é resultado da existência de *scanlines* e do fato de um mesmo ponto refletor ser percebido em mais de uma *scanline*. A limitação de resolução axial deriva da superposição do sinal de eco de refletores muito próximos. Em algoritmos IPB estas não são limitações intrínsecas: por se

tratar da resolução de um sistema linear, a superposição é prevista e não resulta necessariamente em perda de resolução.

### 2.5.3 LIMITAÇÃO DE RESOLUÇÃO TEMPORAL NO MODO B

Os algoritmos DAS trazem ainda uma limitação de resolução temporal. Dado que a aquisição envolve propagação, reflexão e propagação de volta das ondas sonoras, a quantidade de imagens está limitada pelo tempo de viagem (TOF - *Time of Flight*) destas ondas. Tal limitação é inerente à física do processo e está presente independentemente do algoritmo de reconstrução utilizado. No entanto, há que se observar que, no modo B, o tempo necessário para aquisição de todos os dados que formarão uma imagem é proporcional à quantidade de linhas adquiridas. Um algoritmo de reconstrução que possibilite um menor número de disparos para a aquisição dos dados tem o potencial de trazer ganhos significativos com relação à quantidade de quadros por segundo possíveis de serem gerados.

As simulações de aquisições para reconstrução IPB mostradas neste trabalho, bem como algumas presentes na literatura de IPB em ultrassom (LAVARELLO et al., 2006; LINGVALL; OLOFSSON, 2007; VIOLA et al., 2008; ZANIN, 2011) envolvem um único disparo em aquisições que envolveriam vários disparos se fosse utilizada reconstrução baseada em DAS. Isso mostra o potencial da reconstrução IPB de trazer um ganho de resolução temporal com relação à técnica DAS.

No entanto, algoritmos IPB não são a única forma de viabilizar o imageamento em ultrassom com apenas um disparo. Técnicas de reconstrução baseadas em DAS mas utilizando um ou poucos disparos e foco apenas na recepção foram propostas, como em (MONTALDO et al., 2009) e (SANDRIN et al., 2002).

## 2.6 RECONSTRUÇÃO POR PROBLEMAS INVERSOS EM ULTRASSOM

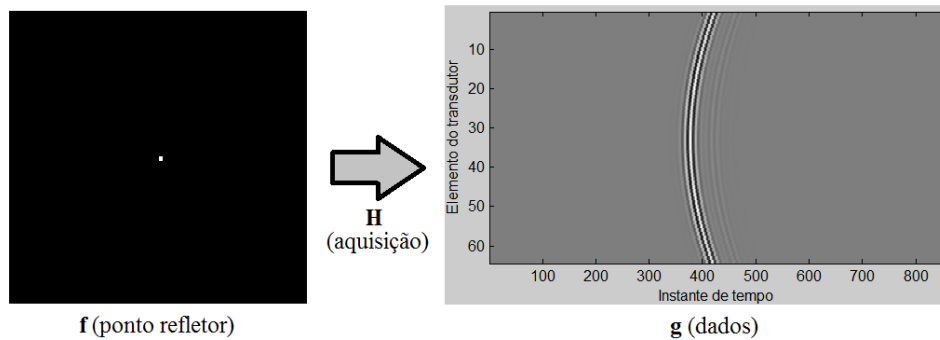
A reconstrução de imagens baseada em problemas inversos apóia-se na álgebra vetorial. Assume-se uma representação discreta do objeto imageado, composta por  $M$  reflexividades acústicas e representada por uma imagem de  $M = M_1 \times M_2$  pixels, sendo  $M_1$  linhas e  $M_2$  colunas. Estas reflexividades compõem o vetor  $\mathbf{f}_{M \times 1}$  no espaço  $\mathbb{U}$  (embora seja mais natural pensarmos numa imagem representada como uma matriz, é a representação vetorial que nos permite utilizar algumas ferramentas da álgebra linear que fundamentam a técnica proposta).

Todo o processo de aquisição dos dados de ultrassom (excitação dos elementos do transdutor, propagação do pulso ao longo do objeto, reflexão, propagação de volta e amostragem

das tensões nos elementos do transdutor) é representado como uma transformação linear. Essa transformação, como toda transformação linear, pode ser representada como uma matriz, que chamaremos de  $\mathbf{H}_{N \times M}$ , onde  $N$  é o número de elementos do vetor no espaço  $\mathbb{V}$ . A representação de  $\mathbf{f}$  em  $\mathbb{V}$ , que chamaremos de  $\mathbf{g}_{N \times 1}$ , é composta pelas  $N = N_s \times N_e$  amostras de tensão do transdutor, ou seja, as amostras nos  $N_s$  instantes de tempo e nos  $N_e$  elementos do transdutor. O vetor  $\mathbf{g}$  dos dados de aquisição é, portanto, gerado através da multiplicação matriz-vetor

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}. \quad (17)$$

A Figura 14 mostra um exemplo de aquisição, ou seja, de geração de  $\mathbf{g}$  a partir de  $\mathbf{f}$ . Como  $\mathbf{H}$  modela o processo de aquisição, o conteúdo do vetor  $\mathbf{g}$  é a concatenação de todos os sinais  $g_k[t_i]$  (Equação 13), sendo  $k = \{1, 2, \dots, N_e\}$  e  $t_i = \{1, 2, \dots, N_s\}$ .



**Figura 14: Aquisição de dados para um único ponto refletor. O vetor das reflexividades  $\mathbf{f}$  nesse caso possui apenas um elemento não-nulo. O vetor dos dados  $\mathbf{g}$  é obtido através da aquisição, expressa por  $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$ .**

**Fonte: Autoria própria**

A criação de um sistema de reconstrução de imagens IPB pode ser dividida em duas etapas: o problema direto e o problema inverso. O problema direto trata da definição da matriz  $\mathbf{H}$  e envolve a compreensão da sua estrutura, além de escolhas teóricas e operacionais (por exemplo: calculá-la analiticamente ou extrair os dados a partir de simulações computacionais?). O problema inverso trata, como o nome sugere, do modelo inverso, que permite obter o vetor  $\mathbf{f}$  a partir de um conjunto de dados de aquisição  $\mathbf{g}$  e do modelo de aquisição  $\mathbf{H}$ . Infelizmente, na prática, a simples inversão da matriz  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{f} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{g} \quad (18)$$

geralmente é impossível ou não produz resultados úteis. Esta limitação é, de maneira geral, a motivação do estudo de problemas inversos.

### 2.6.1 O PROBLEMA DIRETO

O problema direto consiste na modelagem do processo de aquisição, ou seja, na definição de cada elemento  $h_{n,m}$  da matriz  $\mathbf{H}$ . Para efeito de visualização, a Equação (17) pode ser expandida da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} & \cdots & h_{1,M} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} & \cdots & h_{2,M} \\ h_{3,1} & h_{3,2} & h_{3,3} & \cdots & h_{3,M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N,1} & h_{N,2} & h_{N,3} & \cdots & h_{N,M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} \quad (19)$$

A multiplicação matriz-vetor da Equação (19) pode ser reformulada como

$$g_n = \sum_{m=1}^M H_{n,m} f_m, \quad (20)$$

ou seja, cada elemento  $g_n$  é resultado do produto interno entre a  $n$ -ésima linha de  $\mathbf{H}$  e o vetor  $\mathbf{f}$ . O vetor  $\mathbf{g}$  pode, portanto, ser entendido como uma soma ponderada das  $M$  colunas  $\mathbf{h}_m$  da matriz  $\mathbf{H}$ , em que os pesos são os elementos de  $\mathbf{f}$ :

$$\mathbf{g} = \sum_{m=1}^M \mathbf{h}_m f_m \quad (21)$$

A Equação (21) deixa claro um aspecto importante da transformação  $\mathbf{H}$ : a quantidade de colunas  $\mathbf{h}_m$  que participam na composição de  $\mathbf{g}$  é igual à quantidade de elementos não nulos de  $\mathbf{f}$ . Isso nos permite visualizar de que são compostas as colunas  $\mathbf{h}_m$ . Imaginemos um caso em que o vetor  $\mathbf{f}$  possui valor um para o primeiro pixel e zero para todos os outros. Este vetor corresponde a uma imagem em que apenas o pixel superior esquerdo é branco, e todos os outros são pretos. Da Equação (21) podemos concluir que, nesse caso, o vetor  $\mathbf{g}$  gerado será igual à primeira coluna de  $\mathbf{H}$ , ou seja,  $\mathbf{g} = \mathbf{h}_1$ , conforme a Equação (22):

$$\begin{bmatrix} h_{1,1} \\ h_{2,1} \\ h_{3,1} \\ \vdots \\ h_{N,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} & \cdots & h_{1,M} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} & \cdots & h_{2,M} \\ h_{3,1} & h_{3,2} & h_{3,3} & \cdots & h_{3,M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N,1} & h_{N,2} & h_{N,3} & \cdots & h_{N,M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Isso revela uma forma bastante prática de se determinar os valores da coluna  $\mathbf{h}_1$  da matriz

**H**: esses valores são precisamente a resposta **g** do sistema de aquisição para um vetor  $\mathbf{f} = [1, 0, 0, \dots, 0]$ . A mesma relação existe entre  $\mathbf{h}_2$  e um vetor  $\mathbf{f} = [0, 1, 0, \dots, 0]$ , e assim por diante. Tal procedimento permite-nos -seja de forma analítica, experimental ou através de simulações- construir a matriz de transformação linear **H** que representa o sistema de aquisição.

A seção 5.3.2 aborda a construção da matriz **H** para o caso estudado neste trabalho.

## 2.6.2 O PROBLEMA INVERSO

O vetor **g** obtido ao se capturar dados de um objeto é uma combinação linear das colunas  $\mathbf{h}_m$ . A pergunta é: de quais colunas, e em que proporção? A resposta a esta pergunta é o vetor **f**, que é o conjunto dos coeficientes que ponderam as colunas  $\mathbf{h}_i$  na composição de **g**. A reconstrução IPB, portanto, consiste na obtenção de uma imagem **f** a partir de um conjunto de dados de aquisição **g**, conforme representado na Figura 15. Por se tratar da operação inversa àquela realizada pela matriz do modelo direto, chamamos esta operação de modelo inverso. Em um caso ideal, onde não há erros no processo de aquisição e a matriz **H** é inversível, o modelo inverso é obtido pela inversão desta matriz. Ou seja, existe uma matriz do modelo inverso  $\mathbf{H}^{-1}$ , e a imagem **f** é obtida conforme a Equação (18). No entanto, na prática, raramente a matriz **H** é inversível.



**Figura 15: Representação do processo de reconstrução.**

**Fonte: Autoria própria**

Mesmo que a matriz **H** seja inversível, há ainda o problema da presença de erros (por exemplo, ruído e limitações da modelagem) no processo de aquisição. Se levarmos em conta a existência de erros, a aquisição é não mais precisamente descrita pela Equação (17), mas sim por

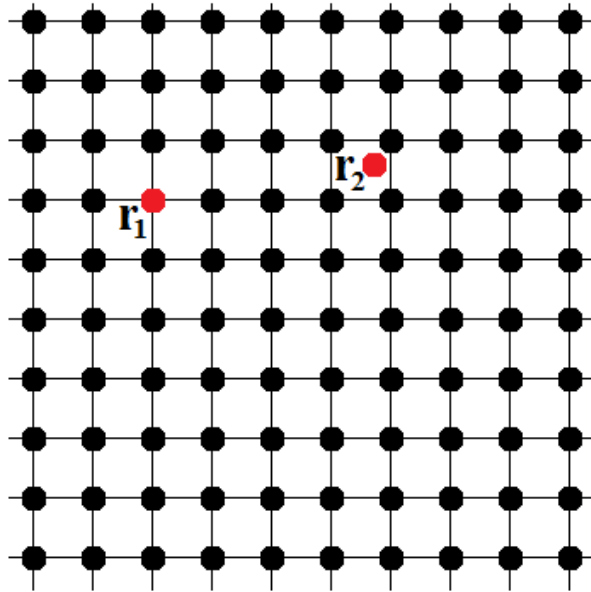
$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \boldsymbol{\eta}, \quad (23)$$

onde  $\boldsymbol{\eta}$  é o vetor-erro, e a inversão de **H** nos dá

$$\mathbf{f} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{g} - \mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\eta}, \quad (24)$$

o que é uma formulação sem utilidade prática imediata, uma vez que o vetor  $\eta$  é desconhecido.

Em ultrassom, uma importante fonte de erros no processo de aquisição é o mau posicionamento de refletores com relação à grade de pixel modelada. Quando um refletor está precisamente em uma posição que faz parte das possíveis posições (ou pixels) modeladas na matriz  $\mathbf{H}$ , diz-se que ele está sobre a grade. Quando a posição do refletor não coincide com nenhuma dessas posições, diz-se que o refletor está fora da grade. Estes conceitos estão representados na Figura 16.



**Figura 16: Representação do conceito de pontos sobre a grade e fora da grade. Os pontos pretos representam pixels modelados pela matriz de aquisição  $\mathbf{H}$ . Os pontos vermelhos são pontos refletores, estando o ponto  $r_1$  sobre a grade e ponto  $r_2$  fora da grade.**

**Fonte: Autoria própria**

O estudo de técnicas que buscam soluções que de alguma forma representem a inversão do modelo direto fazem parte da área de estudos chamada problemas inversos (BARRETT; MYERS, 2004), que será abordada com mais detalhes nas seções 3.1 e 3.2. Frequentemente os problemas trazidos pelo uso de algoritmos IPB são tratados com uso de regularização.

## 2.7 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO

Os algoritmos de reconstrução de imagens baseados em DAS possuem limitações intrínsecas de resolução espacial (lateral e axial). Estas mesmas limitações não estão presentes em algoritmos de reconstrução baseados na resolução de sistemas lineares, que é o caso dos algoritmos IPB. Isso, embora não nos ponha diante de uma forma de reconstruir imagens de



ultrassom com resolução ilimitada, abre caminho na direção da criação de sistemas e algoritmos com resolução superior aos usados atualmente. No entanto, um desafio inerente ao uso de algoritmos IPB em ultrassom é como contornar o problema de dados de aquisição originados de pontos refletores situados em posições não modeladas.

A limitação na resolução temporal é consequência da física do processo e, assim como nos algoritmos DAS, está presente em algoritmos IPB. Porém, uma vantagem apresentada pelos algoritmos IPB é que a aquisição dos dados pode ser feita com menos disparos do transdutor. Algoritmos inspirados em DAS mas que possibilitam menos disparos já demonstraram ganhos significativos de resolução temporal.

### 3 RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS POR PROBLEMAS INVERSOS

Neste capítulo serão revisados os principais problemas que podem estar presentes na recuperação de sinais através de problemas inversos, e como esses problemas são contornados através de estratégias de regularização. Serão apresentadas duas formulações de regularização que possuem seus princípios derivados da análise SVD (*Singular Value Decomposition*) (GOLUB; LOAN, 1996): a TSVD (*Truncated SVD*) (BERTERO, 1989; HANSEN, 1998) e a regularização de Tikhonov, que neste trabalho também é chamada de regularização  $\ell_2$ . A regularização  $\ell_1$  será então apresentada e sua formulação será analisada dos pontos de vista geométrico e Bayesiano. Essas análises serão também feitas sobre a regularização  $\ell_2$ , de forma a compará-la com a  $\ell_1$ .

#### 3.1 CONDIÇÕES DE HADAMARD

A reconstrução de imagens (e, de maneira mais genérica, a recuperação de sinais) através da inversão de um modelo de aquisição como o da Equação (17) tem aplicação em diversas áreas tais como (BARRETT; MYERS, 2004):

- Sensoriamento remoto;
- Imagens astronômicas;
- Medicina nuclear;
- Ressonância magnética;
- Imagens sísmicas.

De maneira geral, dado um vetor de dados de aquisição  $\mathbf{g}$  e o modelo de aquisição  $\mathbf{H}$ , deseja-se encontrar o vetor  $\mathbf{f}$  que satisfaça  $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$ . Para que seja possível encontrar uma solução satisfatória para o sistema, é necessário que ele seja bem-posto, ou seja, que atenda às três condições de Hadamard (HANSEN, 1998; ENGL et al., 2000; BERTERO, 1989):

1. Uma solução existe;
2. A solução é única;
3. A solução é estável.

### 3.1.1 EXISTÊNCIA DE UMA SOLUÇÃO

A primeira condição pode não ser satisfeita em casos onde a matriz  $\mathbf{H}$  é determinada ou sobredeterminada e há erros no processo de aquisição, ou seja, o vetor  $\mathbf{g}$  não foi gerado puramente pela multiplicação  $\mathbf{H}\mathbf{f}$ . Em tais casos o sistema pode ser insolúvel por não haver um  $\mathbf{f}$  que gere  $\mathbf{g}$  através da Equação (17).

Se o vetor erro  $\boldsymbol{\eta}$  fosse conhecido, poder-se-ia inverter o modelo da Equação (23). Porém, o erro na aquisição é tipicamente desconhecido.

O problema da insolubilidade é contornado relaxando-se a condição de solução exata por uma solução aproximada, segundo algum critério. Um critério comumente utilizado neste tipo de problema é a solução por mínimos quadrados (LS - *Least squares*) (BJÖRCK, 1996), cuja formulação busca a solução  $\hat{\mathbf{f}}$  que minimiza a soma dos quadrados dos elementos da diferença  $\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}$ , conforme a equação 25

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \sum_{n=1}^N |g_n - \mathbf{h}_n \mathbf{f}|^2, \quad (25)$$

onde  $N$  é o número de elementos do vetor  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{h}_n$  é a  $n$ -ésima linha de  $\mathbf{H}$ . A Equação (25) busca a solução com menor erro (ou resíduo) utilizando como medida de energia a norma  $\ell_2$ , ou Euclidiana, ao quadrado, e pode portanto ser reescrita como

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2, \quad (26)$$

onde  $\|\cdot\|_{\ell_2}$  denota a norma  $\ell_2$  ou Euclidiana. Dessa forma, contorna-se o problema da inexistência de uma solução exata buscando-se a solução que produz um erro de menor valor quadrático, podendo esta eventualmente ser exata.

Aplicando-se o gradiente na formulação das Equações (25) e (26), encontra-se que a solução de mínimos quadrados corresponde à solução pela pseudo-inversa

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}^+ \mathbf{g}, \quad (27)$$

onde a matriz  $\mathbf{H}^+$  é definida como

$$\mathbf{H}^+ = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \quad (28)$$

e chamada de pseudo-inversa de Penrose-Moore de  $\mathbf{H}$  (BERTERO, 1989). Na Equação 28,  $\cdot^T$  denota a matriz transposta.

### 3.1.2 UNICIDADE DA SOLUÇÃO

A segunda condição de Hadamard diz respeito à unicidade da solução. Caso o espaço nulo de  $\mathbf{H}$  não seja vazio, ou nulo, o sistema  $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$  pode ter infinitas soluções. Este problema pode ocorrer, por exemplo, em sistemas subdeterminados, onde  $M$  (dimensão de  $\mathbf{f}$ ) é maior do que  $N$  (dimensão de  $\mathbf{g}$ ), ou seja, existem mais incógnitas do que equações. Nesses casos podem haver infinitas soluções  $\mathbf{f}$  que atendam ao modelo. O que se faz então é definir um critério de escolha da solução entre as que satisfazem  $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$  exatamente. Por exemplo, solução de menor norma  $\ell_2$ :

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2 \text{ sujeito a } \mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}. \quad (29)$$

Um problema modelado segundo a Equação (29) pode, no entanto, não atender à primeira condição de Hadamard, uma vez que a restrição força a adequação da solução  $\mathbf{f}$  ao modelo. Por isso, a restrição é relaxada, impo-se apenas que o erro atenda a um critério de energia máxima. A formulação fica então na forma:

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2 \text{ sujeito a } \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2 \leq \varepsilon, \quad (30)$$

onde  $\varepsilon$  define o erro máximo tolerável. A Equação (30) pode ainda ser traduzida na Equação (31)

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2 + \lambda \|\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2, \quad (31)$$

onde o parâmetro  $\lambda$  tem papel equivalente ao do  $\varepsilon$  da Equação (30) e atua como um compromisso entre a adequação ao modelo e o critério minimizado (HANSEN, 1998; RAMANI; FESSLER, 2010).

A formulação da Equação (27), apresentada como solução para o problema da possível inexistência de uma solução exata, também enquadra o problema na segunda condição de Hadamard. A solução  $\hat{\mathbf{f}}^+$ , dada pela pseudo-inversa e chamada de solução generalizada, é única e corresponde à solução sem componentes no espaço nulo de  $\mathbf{H}$ , que é equivalente à Equação 31

quando  $\lambda \rightarrow 0$ .

### 3.1.3 ESTABILIDADE DA SOLUÇÃO

A terceira condição de Hadamard diz respeito à estabilidade da solução. Pode-se dizer que um sistema tem solução estável quando pequenas variações no vetor  $\mathbf{g}$  não causam grandes variações na solução  $\mathbf{f}$ , o que é uma forma de dizer que o sistema é bem condicionado.

Para entendermos o conceito de condicionamento é necessária uma abordagem através da SVD. O condicionamento de um sistema é expresso matematicamente como a razão entre o seu maior e o seu menor valor singular:

$$\text{cond}(\mathbf{H}) = \|\mathbf{H}\|_{\ell_2} \|\mathbf{H}^{-1}\|_{\ell_2} = \frac{\max(\boldsymbol{\sigma})}{\min(\boldsymbol{\sigma})}, \quad (32)$$

sendo  $\max(\cdot)$  e  $\min(\cdot)$  os operadores que extraem o maior e o menor valor de um vetor, respectivamente, e  $\boldsymbol{\sigma}$  o vetor dos valores singulares de  $\mathbf{H}$  (BOVIK, 2000). Quanto maior esta razão, pior é o condicionamento do sistema.

Para elucidar o problema do mau condicionamento, deve-se pensar no modelo de aquisição  $\mathbf{H}$  como um filtro passa-baixas, que atenua -mas não anula!- as altas frequências do sinal de entrada  $\mathbf{f}$ , gerando o sinal de saída  $\mathbf{g}$  (o exemplo é válido pois, em sistemas lineares invariantes ao deslocamento, a decomposição em autovalores equivale à representação do sinal por meio dos seus coeficientes de Fourier (BARRETT; MYERS, 2004; GOLUB; LOAN, 1996)). O problema inverso de reconstrução consiste em encontrar o vetor  $\mathbf{f}$  que gerou  $\mathbf{g}$ , o que é feito basicamente amplificando-se as componentes de alta frequência de  $\mathbf{g}$ . O mau condicionamento torna-se um problema caso haja erros - por exemplo, ruído - no processo de aquisição. Nesse caso, as componentes de alta frequência do ruído serão amplificadas no processo de reconstrução do sinal  $\mathbf{f}$ , poluindo o sinal reconstruído. Quanto maior for a atenuação das altas frequências no modelo direto, maior será sua amplificação no modelo inverso, e portanto mais presente será o ruído.

O problema do mau condicionamento de um sistema de aquisição é contornado através de regularização. Algumas técnicas de regularização serão apresentadas na seção 3.2, mas podem aqui ser citadas como exemplo a TSVD, que consiste em igualar a zero os  $n$  menores valores singulares de  $\mathbf{H}$ , criando-se assim uma matriz  $\tilde{\mathbf{H}}$  utilizada para a criação do modelo inverso.

A Equação (31), que apresenta uma formulação que atende às duas primeiras condições de Hadamard, também representa uma forma de regularização (a regularização de Tikhonov)

bastante utilizada para solucionar o problema do mau condicionamento. Em geral, as regularizações possibilitam atender aos três critérios de Hadamard.

## 3.2 REGULARIZAÇÃO EM PROBLEMAS INVERSOS

### 3.2.1 CONDICIONAMENTO DO MODELO DE AQUISIÇÃO

O primeiro papel da regularização, como dito na seção 3.1.3, é solucionar o problema do mau condicionamento. O condicionamento de uma matriz, definido na Equação (32), é um conceito que pode ser compreendido através da análise SVD, que é uma generalização da análise de autovalores e autovetores, sendo válida para qualquer sistema linear (BARRETT; MYERS, 2004; GOLUB; LOAN, 1996). A SVD de uma matriz  $\mathbf{H}$  de dimensões  $M \times N$  consiste em decompô-la nas matrizes  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{V}$  da seguinte forma (BOVIK, 2000):

$$\mathbf{H} = \mathbf{V}\mathbf{S}\mathbf{U}^T = \sum_{k=1}^p \sigma_k \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^T, \quad (33)$$

onde:

- $\mathbf{U}$  é uma matriz unitária  $M \times M$ , cujo produto  $\mathbf{U}\mathbf{f}$  muda a base de  $\mathbf{f}$  no espaço  $\mathbb{U}$ , da base trivial para uma base específica onde residem os valores singulares de  $\mathbf{H}$ .  $\mathbf{U}$  é composta por colunas ortonormais  $\mathbf{u}_i$ , chamadas de vetores singulares à direita;
- $\mathbf{V}$  é uma matriz unitária  $N \times N$ , cujo produto mapeia vetores da base onde residem os valores singulares para a base onde os dados  $\mathbf{g}$  são representados, no espaço  $\mathbb{V}$  dos dados.  $\mathbf{V}$  é composta pelas colunas ortonormais  $\mathbf{v}_i$  chamadas de vetores singulares à esquerda;
- $\mathbf{S}$  é uma matriz retangular,  $N \times M$ , com os valores singulares  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$  na diagonal principal e zero em todos os outros elementos, sendo  $p = \min(M, N)$ .
- O conjunto de todas as tríades  $\{\sigma_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i\}$ ,  $1 \leq i \leq p$  é chamado de sistema singular de  $\mathbf{H}$ .

Sendo  $r$  o rank, ou posto, de  $\mathbf{H}$ ,  $\sigma_i$  satisfaz a

$$\sigma_1 > \dots > \sigma_r > \sigma_{r+1} = \sigma_p = 0, \quad (34)$$

ou seja, existem  $r$  valores não-nulos, sendo os  $p - r$  restantes iguais a zero.

A decomposição da matriz  $\mathbf{H}$  no sistema singular  $\mathbf{S}, \mathbf{V}^T, \mathbf{U}$  permite a definição da solução generalizada da Equação (27) em termos da SVD:

$$\hat{\mathbf{f}}^+ = \sum_{i=1}^r \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{g}}{\sigma_i} \mathbf{u}_i. \quad (35)$$

A Equação (35) deixa claro o problema que decorre da existência de valores singulares  $\sigma_i$  não-nulos muito pequenos: a divisão por tais valores, na composição da solução generalizada, resulta em grande amplificação das respectivas componentes  $\mathbf{u}_i$  do sinal. Caso a presença de ruído nos dados seja significativa nestas componentes, o ruído pode ser excessivamente amplificado em  $\hat{\mathbf{f}}$ , comprometendo a reconstrução.

### 3.2.2 OVERFITTING

Pode-se também visualizar o papel da regularização no condicionamento como uma forma de evitar *overfitting* ou excessiva adequação ao modelo de aquisição. A solução  $\hat{\mathbf{f}}$  pode ser distorcida na tentativa de se adequar aos dados  $\mathbf{g}$  ruidosos (BOVIK, 2000) quando o único critério da reconstrução é a minimização do erro  $\|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2$ . O uso de regularização traduz-se na adição de um segundo termo na função objetivo, de forma que um segundo critério também participe dela. Nos casos abordados aqui, a formulação de uma solução regularizada assume a forma (LUSTIG M.; DONOHO; PAULY, 2007)

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2 + \lambda \mathcal{R}(\mathbf{f}), \quad (36)$$

onde o termo regularizador  $\mathcal{R}(\mathbf{f})$  representa este critério, a exemplo da Equação (31). Via de regra, a formulação do termo  $\mathcal{R}(\mathbf{f})$  é quem define qual tipo de regularização se está utilizando. O parâmetro  $\lambda$  é denominado parâmetro de regularização. Quanto maior for o seu valor, maior será o esforço de adequação de  $\hat{\mathbf{f}}$  ao critério de regularização, e conseqüentemente menor é o esforço de adequação ao modelo. É nesse sentido que se diz que a regularização evita *overfitting*. Há que se notar, no entanto, que o *overfitting* só é um problema quando existem erros na aquisição.

### 3.2.3 CONHECIMENTO A PRIORI SOBRE A SOLUÇÃO

Independente da existência ou não de erros na aquisição, o termo de regularização ainda tem outra função: a utilização de um *prior*, ou uma característica da solução conhecida a priori (BOVIK, 2000). Dessa forma, a adequação da solução  $\hat{\mathbf{f}}$  a um critério de regularização significa sua adequação ao *prior*, ou a um conhecimento a priori sobre a solução.

A minimização da norma  $\ell_2$  da solução, como no exemplo da Equação (31), corresponde a um *prior* Gaussiano. Desse ponto de vista, o parâmetro  $\lambda$  representa a razão entre as variâncias esperadas para o erro  $\eta$  e para a imagem  $\mathbf{f}$ . Quando  $\lambda$  tende a zero, tendem também a zero a variância do erro e o peso do critério regularizador na formulação da solução, recaindo na formulação não regularizada da Equação (26).

A minimização da norma  $\ell_1$  da solução, como no caso proposto neste trabalho, corresponde a um *prior* Laplaciano, que é um exemplo de *prior* usado para representar sinais esparsos (STARCK et al., 2010), ou seja, com poucos pixels com amplitude não-nula.

A característica buscada pelo *prior* pode se referir ao domínio da informação propriamente dita (no caso de reconstrução de imagens, o domínio espacial) ou a qualquer outro domínio em que a informação possa ser representada através de uma transformação linear. A regularização TV (*Total Variation*), por exemplo, utiliza um *prior* esparsos no domínio das diferenças finitas (BOVIK, 2000)

$$\mathcal{R}_{TV}(\mathbf{f}) = \|\mathbf{Df}\|_{\ell_1}, \quad (37)$$

onde o operador  $\mathbf{D}$  é a matriz de diferenças finitas para duas dimensões e  $\|\cdot\|_{\ell_1}$  é o operador norma  $\ell_1$ . Qualitativamente, a regularização TV busca imagens em que as variações estejam concentradas em poucos lugares, o que tende a produzir imagens de bordas bem definidas.

### 3.2.4 REGULARIZAÇÃO COMO UM PROCESSO DE FILTRAGEM E FORMULAÇÕES ANALISADAS VIA SVD

A compreensão das características e vantagens do tipo de regularização proposto neste trabalho para o problema de reconstrução inversa de imagens de ultrassom é facilitada quando é feita uma comparação com outras formas similares e mais simples de regularização. Nesta seção são apresentadas algumas formas de regularização bastante conhecidas e utilizadas na literatura de problemas inversos e processamento de sinais.

#### 3.2.4.1 TRUNCATED SVD

Assumindo-se que o problema da instabilidade é uma consequência da existência de valores singulares muito baixos para a matriz  $\mathbf{H}$ , a solução mais simples é o truncamento dos valores singulares muito pequenos. Esta abordagem é chamada de *Truncated SVD* ou TSVD (HANSEN, 1998; GOLUB; LOAN, 1996; BERTERO, 1989; ENGL et al., 2000).



Utilizando a mesma notação da Equação (35) pode-se definir a solução TSVD como:

$$\hat{\mathbf{f}}_{TSVD} = \sum_{i=1}^r w_{i,\lambda} \frac{v_i^T \mathbf{g}}{\sigma_i} u_i, \quad (38)$$

onde  $w_{i,\lambda}$  é um conjunto de pesos definido como

$$w_{i,\lambda} = \begin{cases} 1 & i \leq k(\lambda) \\ 0 & i > k(\lambda) \end{cases} \quad (39)$$

com o inteiro positivo  $k(\lambda) = \lfloor \lambda^{-1} \rfloor$ , onde  $\lfloor \lambda \rfloor$  denota  $\lambda$  arredondado para o próximo menor inteiro (BOVIK, 2000).

A regularização TSVD exclui os componentes mais instáveis da solução. No entanto, não adiciona novas componentes, ou seja, não permite a incorporação de conhecimento a priori sobre a solução. Ao reduzir o rank da matriz  $\mathbf{H}$ , a regularização TSVD aumenta seu espaço nulo.

### 3.2.4.2 REGULARIZAÇÃO DE TIKHONOV

A regularização de Tikhonov permite a incorporação de conhecimento a priori sobre a solução através da adição de um termo regularizador à formulação por mínimos quadrados expressa na Equação (26). A solução regularizada neste caso corresponde à minimização

$$\hat{\mathbf{f}}_{Tik}(\lambda) = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2 + \lambda \|\mathbf{L}\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2, \quad (40)$$

onde o parâmetro  $\lambda$  representa o compromisso entre o primeiro termo (adequação ao modelo) e o termo de regularização. A formulação da solução é obtida através do gradiente de  $\mathbf{f}$  e corresponde a

$$\hat{\mathbf{f}}_{Tik}(\lambda) = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{g}. \quad (41)$$

O caso em que a matriz  $\mathbf{L}$  é a matriz identidade  $\mathbf{I}$  é especialmente interessante por permitir uma compreensão mais intuitiva da regularização de Tikhonov e por ter sido recentemente aplicado à reconstrução de imagens de ultrassom em (ZANIN, 2011), (ZANIN et al., 2011) e (ZANIN et al., 2012). Nesse caso, o termo regularizador torna-se simplesmente  $\lambda \|\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2$ , buscando soluções de baixa energia, em que não há elementos  $f_m$  com grandes valores e discrepantes dos demais. É possível então descrever a solução  $\hat{\mathbf{f}}_{Tik}$  do ponto de vista da SVD:

$$\hat{\mathbf{f}}_{Tik}(\lambda) = \sum_{i=1}^r \left( \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda} \right) \frac{v_i^T \mathbf{g}}{\sigma_i} u_i. \quad (42)$$

Comparando-se a Equação (42) com a Equação (38), que expressa a SVD ponderada por pesos  $w_{i,\lambda}$ , pode-se definir os pesos da regularização de Tikhonov com  $\mathbf{L} = \mathbf{I}$  como:

$$w_{i,\lambda} = \left( \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda} \right), \quad (43)$$

ou seja,  $w_{i,\lambda}$  comporta-se de forma análoga a um filtro passa-baixas de segunda ordem, com ganho tendendo a zero quando  $\sigma_i^2$  tende a zero e a um quando  $\sigma_i^2$  tende a infinito (BOVIK, 2000). A aplicação da análise SVD à reconstrução de imagens de ultrassom com regularização de Tikhonov é apresentada em (ZANIN et al., 2011).

Caso a matriz  $\mathbf{L}$  não seja a identidade, a regularização opera sobre a projeção de  $\mathbf{f}$  na imagem do operador  $\mathbf{L}$ . Frequentemente, em outras aplicações de reconstrução de imagens, a matriz  $\mathbf{L}$  corresponde a uma matriz de diferenças finitas ou a um operador de gradiente. Nesses casos, a regularização busca evitar grandes diferenças entre pixels vizinhos (no caso de reconstrução de imagens), resultando em imagens com transições suavizadas e com menos degraus.

### 3.2.5 ESPARSIDADE E REGULARIZAÇÃO POR MINIMIZAÇÃO DE NORMA $\ell_1$

A busca de sinais que sejam esparsos em algum domínio está presente em várias aplicações de reconstrução de sinais e imagens. Por exemplo:

- *Compressive Sampling* (CS), onde a existência de uma representação esparsa do sinal é um requisito para que seja possível reconstruí-lo a partir de poucas amostras em um espaço incoerente com o espaço de dados (ROMBERG, 2008; CANDÈS; WAKIN, 2008);
- Imageamento por ressonância magnética (MRI) (RAMANI; FESSLER, 2010; LUSTIG et al., 2008) e tomografia por emissão de prótons (PET) (JONSSON et al., 1998), onde é comum a utilização da regularização *Total Variation* (RUDIN et al., 1992), que busca sinais com representação esparsa no domínio das diferenças finitas, o que gera sinais com bordas preservadas e bem definidas mesmo atenuando-se o ruído (BJÖRCK, 1996).
- Compressão de áudio (GRIBONVAL; BACRY, 2003), imagens (FROSSARD et al., 2004) e vídeo (NGUYEN; ZAKHOR, 2003).

A rigor, a solução  $\mathbf{f}$  mais esparsa possível de um sistema da forma da Equação (17) é, dentre todas as soluções possíveis, aquela de menor suporte, ou seja, aquela com o menor número de coeficientes não nulos, o que corresponde à solução do seguinte problema de mini-

mização (ROMBERG, 2008; GILL et al., 2011):

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \text{nnz}(\mathbf{f}) \text{ sujeito a } \mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}, \quad (44)$$

onde o operador  $\text{nnz}(\cdot)$  computa o número de elementos diferentes de zero de um vetor. Esta medida é conhecida como pseudo-norma  $\ell_0$  pois, embora não seja considerada uma norma por não cumprir o critério da escalabilidade positiva (PRUGOVECKI, 1971), pode mesmo assim ser obtida a partir da formulação da norma  $\ell_p$

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell_p} := \left( \sum_i |\mathbf{x}_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (45)$$

fazendo-se  $p$  igual a zero e considerando-se  $0^0 = 0$ .

Um limitante prático da minimização da pseudo-norma  $\ell_0$  é que não se trata de um problema convexo, mas de um problema combinatorial NP-complexo (NATARAJAN, 1995), o que recai rapidamente numa explosão combinatoria na medida em que cresce o tamanho do vetor  $\mathbf{f}$  buscado. A título de exemplo, a maior parte das imagens de ultrassom reconstruídas e apresentadas neste trabalho possuem  $60 \times 60 = 3600$  pixels, o que torna pouco atrativa a utilização de uma abordagem combinatorial.

A minimização da norma  $\ell_1$  é utilizada como um substituto prático da minimização  $\ell_0$  sem grande comprometimento dos resultados (TROPP, 2006; BERGH; LÖFSTRÖM, 2011; FADILI et al., 2010; ROMBERG, 2008):

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{f}\|_{\ell_1} \text{ sujeito a } \mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}. \quad (46)$$

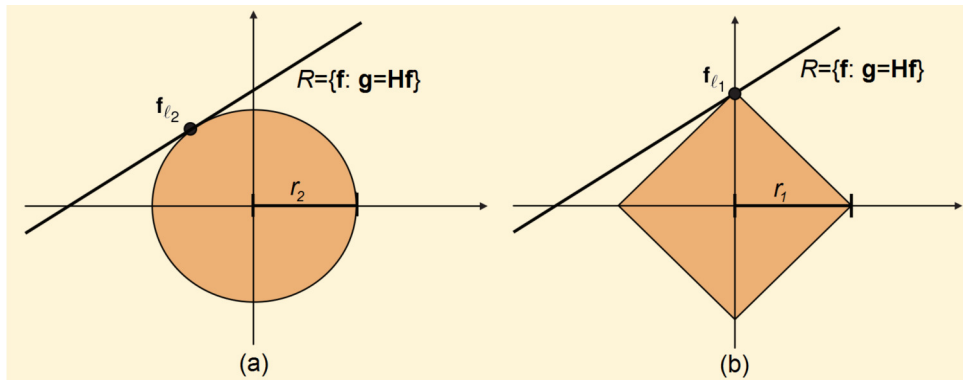
Ao utilizá-la, busca-se não mais a solução de menor suporte, mas a solução de menor soma das magnitudes, conforme a formulação da norma  $\ell_1$ :

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell_1} := \sum_i |\mathbf{x}_i| \quad (47)$$

Como vantagem com relação à minimização  $\ell_0$ , a minimização  $\ell_1$  é um problema de otimização convexa. Trata-se de um problema não-linear, mas que pode ser solucionado com algoritmos iterativos (CHEN et al., 1998; BJÖRCK, 1996).

A compreensão da minimização  $\ell_1$  como promotor de esparsidade é facilitada se observarmos graficamente seu comportamento e o compararmos ao comportamento da minimização  $\ell_2$ . A visualização gráfica de um problema em que  $\mathbf{f}$  possui apenas duas dimensões é bastante intuitivo e é mostrado na Figura 17. Tanto na Figura 17 (a) como na Figura 17 (b), a reta  $R$

representa o conjunto de todos os vetores  $\mathbf{f}$  que são soluções do sistema  $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$  dados um vetor de aquisição  $\mathbf{g}$  e uma matriz de aquisição  $\mathbf{H}$ . Um conjunto de todos os vetores de mesma norma  $\ell_2$  possui a forma de um círculo. O círculo presente na Figura 17 (a) toca a reta  $R$  no ponto  $\mathbf{f}_{\ell_2}$  e contém todos os vetores  $\{\mathbf{f} : \|\mathbf{f}\|_{\ell_2} = r_2\}$ , ou seja, contém os vetores  $\mathbf{f}$  cuja norma  $\ell_2$  é igual a  $r_2$ . Para qualquer raio menor do que  $r_2$ , o círculo não toca  $R$ , donde se conclui que o ponto  $\mathbf{f}_{\ell_2}$  representa a solução de menor norma  $\ell_2$ .



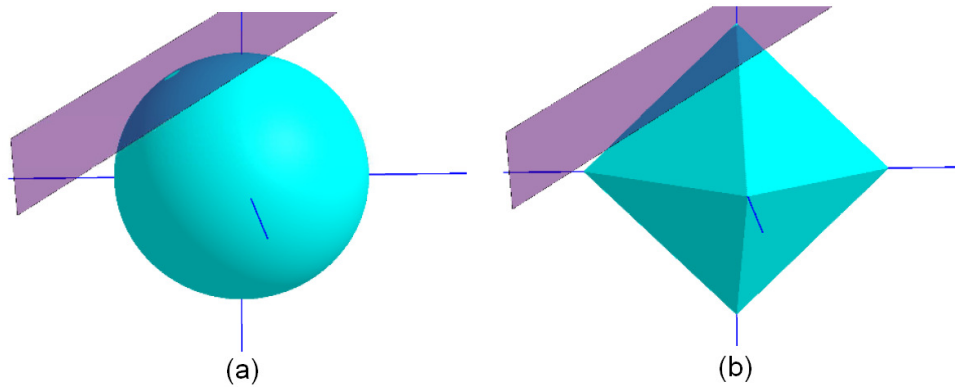
**Figura 17:** Exemplo gráfico de como a minimização  $\ell_1$  privilegia soluções esparsas. Em (a) e (b) a reta  $R$  contém o conjunto de todas as soluções  $\mathbf{f}$  do sistema  $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$ . (a) O círculo de norma  $\ell_2$  igual a  $r_2$  toca  $R$  no ponto  $\mathbf{f}_{\ell_2}$ , que corresponde à solução de mínima norma  $\ell_2$ . (b) O quadrado de norma  $\ell_1$  igual a  $r_1$  toca  $R$  no ponto  $\mathbf{f}_{\ell_1}$ , que corresponde à solução de mínima norma  $\ell_1$ .

Fonte: Adaptado de (ROMBERG, 2008)

O conjunto de todos os vetores com uma mesma norma  $\ell_1$ , por sua vez, possui o formato de um quadrado. O quadrado da Figura 17 (b) contém todos os vetores  $\{\mathbf{f} : \|\mathbf{f}\|_{\ell_1} = r_1\}$  e toca a reta  $R$  no ponto  $\mathbf{f}_{\ell_1}$ . Como qualquer quadrado com semi-diagonal menor do que  $r_1$  não possui interseção com  $R$ , conclui-se que  $\mathbf{f}_{\ell_1}$  é a solução de menor norma  $\ell_1$  para o sistema  $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$ . Logo,  $\mathbf{f}_{\ell_1}$  é a solução do problema de minimização da Equação (46). Note-se que o suporte da solução  $\mathbf{f}_{\ell_1}$  é menor do que o da solução  $\mathbf{f}_{\ell_2}$ . O quadrado  $\ell_1$  possui anisotropia "pontiaguda", o que favorece as soluções esparsas.

Pode-se ainda visualizar uma versão tridimensional do problema mostrado na Figura 17. A Figura 18 mostra o problema em três dimensões, onde o conjunto das soluções compõe um plano e os conjuntos de norma  $\ell_2$  e  $\ell_1$  constantes compõem respectivamente a superfície de uma esfera e a superfície de um octaedro. Novamente o suporte da solução de mínima norma  $\ell_1$  é menor do que o de mínima norma  $\ell_2$ .

Na seção 3.1.2, observou-se que a presença de ruído ou outros tipos de erros no processo de aquisição pode fazer com que não exista uma solução  $\mathbf{f}$  que atenda ao modelo. Para contornar este problema, abriu-se mão da restrição e adicionou-se na função-objetivo um termo



**Figura 18:** Em (a) e (b) o plano contém o conjunto de todas as soluções  $\mathbf{f}$  do sistema  $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$ . (a) A superfície da esfera, de norma  $\ell_2$  constante, toca o plano no ponto correspondente à solução de mínima norma  $\ell_2$ , que possui suporte de tamanho 3. (b) A superfície do octaedro, de norma  $\ell_1$  constante, toca o plano no ponto correspondente à solução de mínima norma  $\ell_1$ , que possui suporte de tamanho 1.

Fonte: Adaptado de (ELAD; AHARON, 2006)

de adequação ao modelo, passando-se da Equação (29) para a Equação (31). Da mesma forma aqui, relaxa-se a restrição imposta na formulação da Equação (46), obtendo-se uma formulação robusta com relação a erros na aquisição:

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2 + \lambda \|\mathbf{f}\|_{\ell_1}, \quad (48)$$

onde o parâmetro  $\lambda$  determina o compromisso entre o *prior* esparsos a fidelidade ao modelo.

A formulação da Equação (48) tem sido utilizada nas áreas de processamento e compressão de sinais com o nome de BPDN (*Basis Pursuit Denoising*) (CHEN, 1995; CHEN et al., 1998). O BPDN tem como objetivo encontrar, a partir de uma aquisição ruidosa, o vetor de coeficientes  $\mathbf{f}$  mais esparsos que reproduza o sinal  $\mathbf{g}$  a partir de um dicionário  $\mathbf{H}$  composto pelos sinais  $\mathbf{h}_m$  (colunas de  $\mathbf{H}$ ). O dicionário  $\mathbf{H}$  frequentemente é um sistema sobrecompleto (que não é linearmente independente (BALAN et al., 2005)), por isso é comum que haja mais de uma combinação  $\mathbf{f}$  de coeficientes que gere o sinal  $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$ . De maneira geral, a técnica de reconstrução de imagens de ultrassom proposta nesse trabalho pode ser compreendida como um problema BPDN, já que se busca um vetor de coeficientes  $\mathbf{f}$  esparsos que ponderou as colunas da matriz do modelo de aquisição  $\mathbf{H}$  na composição do sinal de aquisição  $\mathbf{g}$ .

No contexto do BPDN, a Equação (48) representa uma versão não-restritiva de uma formulação preliminar em que a energia do erro é limitada por um parâmetro  $\gamma$ , aparecendo

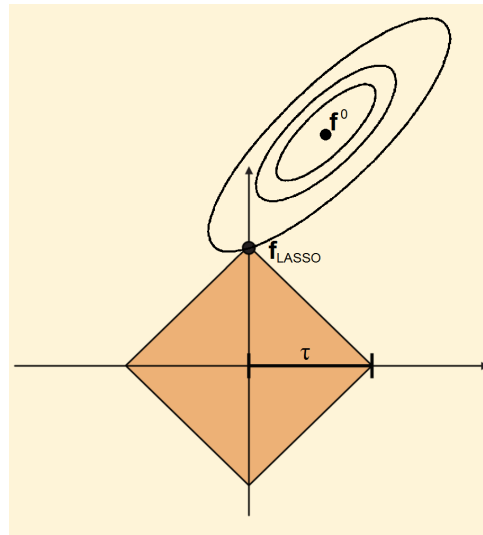
como um termo de restrição relaxada ao invés de ser um termo da função-objetivo:

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{f}\|_{\ell_1} \text{ sujeito a } \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2 \leq \gamma. \quad (49)$$

Invertendo-se os papéis da restrição e da função-objetivo na Equação (49) obtém-se ainda a formulação conhecida como LASSO (*Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*) (TIBSHIRANI, 1996):

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2 \text{ sujeito a } \|\mathbf{f}\|_{\ell_1} \leq \tau, \quad (50)$$

onde se restringe um valor máximo  $\tau$  para a norma  $\ell_1$  da solução. A Figura 19 possibilita uma interpretação gráfica em duas dimensões do LASSO. Enquanto na Figura 17(b) deve-se imaginar a semi-diagonal  $r_1$  aumentando de tamanho até o quadrado  $\ell_1$  tocar a reta  $R$  das soluções, aqui ocorre o contrário: como a norma  $\ell_1$  da solução está restrita a um valor menor ou igual a  $\tau$ , a região que cumpre a restrição constitui uma superfície  $\ell_1$  quadrada (representada em laranja na Figura), e é o conjunto de soluções que “cresce” até tocar esta superfície. O ponto  $\mathbf{f}^0$  corresponde à solução por mínimos quadrados formulada na Equação (27), e as elipses representam conjuntos de mesma norma  $\ell_2$  do erro.



**Figura 19:** Interpretação gráfica do LASSO (Equação (50)). A superfície do quadrado de semi-diagonal  $\tau$  representa o conjunto de soluções que atendem à restrição  $\|\mathbf{f}\|_{\ell_1} < \tau$ . O ponto  $\mathbf{f}^0$  representa a solução por mínimos quadrados. As elipses concêntricas representam conjuntos de soluções para diferentes valores da norma do erro. O ponto  $\mathbf{f}_{LASSO}$ , onde a elipse mais externa toca o quadrado, representa o ponto de menor norma do erro que atende à restrição  $\|\mathbf{f}\|_{\ell_1} \leq \tau$ .

Fonte: Adaptado de (TIBSHIRANI, 1996)

A implementação computacional do BPDN e do LASSO frequentemente é feita a partir da formulação da Equação (48), onde o parâmetro  $\lambda$  traduz tanto o parâmetro  $\gamma$  do BPDN (Equação (49)) como o parâmetro  $\tau$  do LASSO (Equação (50)) (ver (GILL et al., 1981), capítulo 5).

### 3.2.6 FORMULAÇÕES ESTATÍSTICAS

A literatura de problemas inversos tende a assumir que o erro  $\eta$  é um vetor limitado por uma norma, enquanto a literatura de processamento de sinais normalmente modela o erro estatisticamente (TROPP, 2006). A álgebra linear e a estatística são de fato duas formas distintas de abordar um problema inverso, mas que frequentemente convergem para uma mesma formulação e, conseqüentemente, mesma implementação computacional. Como será visto nesta seção, o Estimador de Máxima Verossimilhança (MLE - *Maximum Likelihood Estimator*) fornece uma formulação estatística para problemas inversos que, assumidos alguns pressupostos, equivale à solução de erro mínimo, sem regularização. O estimador Maximum a Posteriori (MAP), por sua vez, fornece uma formulação que possibilita a definição de parâmetros estatísticos da solução buscada, o que equivale ao conceito de regularização apresentado previamente neste capítulo.

#### 3.2.6.1 O ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

A busca pelo vetor  $\mathbf{f}$ , que até aqui tem sido apresentada como um problema de álgebra vetorial, pode ser formulada como um problema de inferência estatística. A pergunta que se faz é: dados o modelo  $\mathbf{H}$  e o vetor de dados  $\mathbf{g}$ , qual é o vetor  $\mathbf{f}$  que possui a maior probabilidade de ter gerado  $\mathbf{g}$ ? Tal pergunta pode ser expressa (e posteriormente respondida) através do MLE:

$$\hat{\mathbf{f}}_{MLE} = \underset{\mathbf{f}}{\operatorname{arg\,max}} p(\mathbf{g}; \mathbf{f}), \quad (51)$$

onde  $p(\cdot)$  é a Função Densidade de Probabilidade (FDP) assumida para o vetor erro  $\eta = \mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}$ .

Assume-se que o erro  $\eta$  possui densidade de probabilidade Gaussiana. A FDP Gaussiana é obtida a partir da formulação da FDP Normal Generalizada Multivariável (SINZ et al., 2009; GOODMAN; KOTZ, 1973)

$$p(\eta) = K(N, \sigma, p) \cdot \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^N |\eta_i|^p}{2\sigma^2}\right) \quad (52)$$

quando se faz  $p = 2$ . Na Equação (52),  $\eta = \mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}$  é o vetor erro,  $\sigma$  é o desvio padrão dos elementos do vetor  $\eta$  e  $K$  é uma constante de normalização para garantir  $\int p(\eta) d\eta = 1$  (para mais detalhes, ver (SINZ et al., 2009) e (GOODMAN; KOTZ, 1973)). Aplicando-se o operador

logaritmo neperiano à FPD Gaussiana, obtém-se

$$\ln[p(\boldsymbol{\eta})] = cte - \frac{\sum_{i=1}^N \eta_i^2}{2\sigma^2}, \quad (53)$$

onde  $cte$  é uma constante proveniente da aplicação do logaritmo ao termo  $K$ , que não depende dos elementos de  $\boldsymbol{\eta}$ .

Por ser a formulação da Equação (51) um problema de maximização, a aplicação do operador logaritmo neperiano (que é monotônico) do lado direito da equação não altera a solução  $\hat{\mathbf{f}}$ . Em vista disso e da Equação (53) obtém-se

$$\hat{\mathbf{f}}_{MLE} = \arg \max_{\mathbf{f}} - \frac{\sum_{i=1}^N \eta_i^2}{2\sigma^2}. \quad (54)$$

Outras operações algébricas ainda são úteis. O somatório presente no numerador da função-objetivo formulada na Equação (54) equivale a  $\|\boldsymbol{\eta}\|_{\ell_2}^2$ , e ao inverter-se o sinal negativo na Equação (54), transforma-se o problema de maximização num problema de minimização. Dessa forma, chega-se a

$$\hat{\mathbf{f}}_{MLE} = \arg \min_{\mathbf{f}} \frac{\|\boldsymbol{\eta}\|_{\ell_2}^2}{2\sigma^2}. \quad (55)$$

Finalmente, ignorando-se o fator de escala do denominador (o que não altera a solução do problema de minimização) e lembrando que  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}$ , conclui-se que o Estimador de Máxima Verossimilhança, quando assumida distribuição Gaussiana para o erro, recai na solução por mínimos quadrados:

$$\hat{\mathbf{f}}_{MLE} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2. \quad (56)$$

Ou seja, a solução MLE para erro assumido Gaussiano é o vetor  $\hat{\mathbf{f}}$  para o qual o quadrado da norma  $\ell_2$  do erro é o menor possível, que é precisamente a solução de mínimos quadrados, formulado segundo a Equação (26).

### 3.2.6.2 O ESTIMADOR MAXIMUM A POSTERIORI

Sendo equivalente à solução de mínimos quadrados, a estimação MLE atende à primeira condição de Hadamard mas não adiciona informação a priori sobre a solução. Na prática isso pode resultar em ruído excessivo da solução ou na não unicidade da mesma (MARROQUIN et al., 1987). Na seção 3.1.2 a regularização é apresentada como uma forma de contornar estes problemas. No contexto da estimação estatística é possível obter um equivalente da regularização através da formulação do problema pelo estimador MAP.

Enquanto a formulação MLE da Equação (51) pode ser lida como “encontre o  $\mathbf{f}$  que



maximize a verossimilhança da observação  $\mathbf{g}$ ”, a formulação MAP traduz-se em “encontre o  $\mathbf{f}$  de máxima probabilidade dada a observação de  $\mathbf{g}$ ”:

$$\hat{\mathbf{f}}_{MAP} = \underset{\mathbf{f}}{\operatorname{arg\,max}} p(\mathbf{f}|\mathbf{g}). \quad (57)$$

Aplicando-se o teorema de Bayes (GRINSTEAD; SNELL, 1997) à Equação (57) obtém-se

$$\hat{\mathbf{f}}_{MAP} = \underset{\mathbf{f}}{\operatorname{arg\,max}} \frac{p(\mathbf{g}|\mathbf{f})p(\mathbf{f})}{p(\mathbf{g})}. \quad (58)$$

O denominador da expressão maximizada na Equação (58) pode ser desconsiderado sem afetar a solução, já que  $\mathbf{g}$  não é um argumento do problema de maximização. Tem-se assim:

$$\hat{\mathbf{f}}_{MAP} = \underset{\mathbf{f}}{\operatorname{arg\,max}} p(\mathbf{g}|\mathbf{f})p(\mathbf{f}) \quad (59)$$

Aplicando-se à Equação (59) o operador logaritmo neperiano, que é uma função monotônica crescente e não altera o ponto de mínimo, e trocando-se o sinal, de forma que o problema de maximização torne-se um problema de minimização, obtém-se:

$$\hat{\mathbf{f}}_{MAP} = \underset{\mathbf{f}}{\operatorname{arg\,min}} -\ln[p(\mathbf{g}|\mathbf{f})] - \ln[p(\mathbf{f})]. \quad (60)$$

Nota-se que na Equação (60) existem dois termos na função-objetivo, um dependente da relação entre os dados e a imagem buscada e outro dependente apenas da imagem, o que lembra a apresentação da solução regularizada da Equação (36). De fato as Equações (36) e (60) podem ser equivalentes. Se assumirmos um comportamento Gaussiano para o erro de aquisição  $\eta$ , o primeiro termo da função-objetivo na Equação (60) corresponde à formulação MLE, ou seja, à solução de mínima norma  $\ell_2$ . A definição da FDP do segundo termo nos dá espaço para adicionar um critério de regularização à estimativa MAP. Caso seja assumida uma distribuição Gaussiana também para os elementos de  $\mathbf{f}$ , chega-se a:

$$\hat{\mathbf{f}}_{MAP} = \underset{\mathbf{f}}{\operatorname{arg\,min}} \frac{\|\eta\|_{\ell_2}^2}{2\sigma_\eta^2} + \frac{\|\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2}{2\sigma_f^2}, \quad (61)$$

onde  $\sigma_\eta$  e  $\sigma_f$  são, respectivamente, os desvios padrão assumidos para o erro e para os pixels da imagem.

Na passagem da Equação (55) para a Equação (56) desprezou-se o denominador da função-objetivo, já que se trata de uma constante, o que não altera a solução da minimização. No caso do MAP isso não é possível: na Equação (61), como existe mais de um termo, os denominadores atuam como ponderações, definindo a influência de cada termo na função-objetivo. Aumentar  $\sigma_\eta$  significa assumir maior energia no erro e, como consequência, a minimização

do erro torna-se um critério com peso menor, e vice-versa. O mesmo vale para a imagem, de forma que o peso relativo de cada termo depende da razão entre os dois denominadores. Com o objetivo de se obter uma representação mais concisa, faz-se

$$\lambda = 2\sigma_{\eta}^2/2\sigma_{\mathbf{f}}^2 \quad (62)$$

e obtém-se

$$\hat{\mathbf{f}}_{MAP} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2 + \lambda \|\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2, \quad (63)$$

onde o parâmetro  $\lambda$  expressa a razão entre as variâncias esperadas para o erro na aquisição e para a imagem. Na prática este parâmetro traduz-se em um compromisso entre a adequação de  $\mathbf{f}$  ao modelo e ao *prior* escolhido.

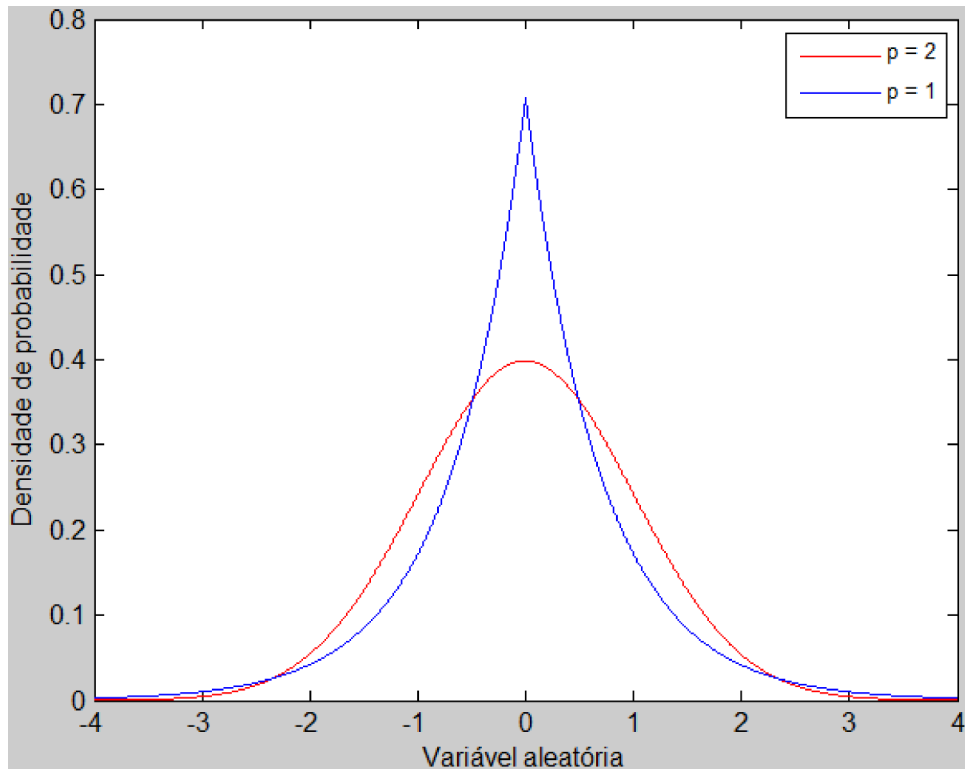
É importante notar que as Equações (60) e (63) são equivalentes apenas quando se assume FDP Gaussiana tanto para  $\eta$  como para  $\mathbf{f}$ . Qualquer outra formulação de  $p(\mathbf{f})$  representa outro *prior* e, portanto, outro tipo de regularização.

### 3.2.6.3 MAP COM *PRIOR* LAPLACIANO

Uma vez que nosso objetivo é obter uma solução  $\hat{\mathbf{f}}$  esparsa para o problema  $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$ , é interessante o uso de uma FDP  $p(\mathbf{f})$  esparsa na formulação do MAP. A FDP Laplaciana tem sido usada como *prior* promotor de esparsidade em aplicações como classificação de genes (SHEVADE; KEERTHI, 2003; CAWLEY; TALBOT, 2006), inteligência artificial (FIGUEIREDO, 2003) e restauração de imagens (MOULIN; LIU, 1999; PIPA, 2012). A formulação de um problema inverso com *prior* Laplaciano é atraente pois, como será visto, recai na minimização da norma  $\ell_1$  do vetor  $\hat{\mathbf{f}}$ , que por sua vez é um problema convexo de otimização.

O caráter esparsa proporcionado pelo uso da FDP Laplaciana fica evidente quando se a compara à FDP Gaussiana. Na Figura 20 é possível comparar as duas curvas para um caso unidimensional. As curvas foram geradas a partir da definição da FDP Normal Generalizada Multivariável (Equação (52)), onde as FDP Gaussiana e Laplaciana correspondem, respectivamente, a  $p = 2$  e  $p = 1$ . Nota-se que a curva Laplaciana possui "pico" mais estreito e "cauda" mais longa do que a Gaussiana (ELTOFT et al., 2006), ou seja, apresenta maior probabilidade do que a Gaussiana para valores próximos de zero ou muito distantes de zero, enquanto a Gaussiana privilegia valores intermediários. Nesse sentido diz-se que a Laplaciana é uma distribuição que expressa a tendência do sinal à esparsidade.

Assim como a  $p(\mathbf{f})$  Gaussiana contém a norma  $\ell_2$  do argumento na sua formulação, da Equação (52) podemos concluir (fazendo  $p = 1$ ) que a FDP Laplaciana contém a norma  $\ell_1$



**Figura 20: FDP Normal Generalizada para  $p=1$  e  $p = 2$ .  $\sigma = 1$ .**

**Fonte: Autoria própria**

do argumento. De fato, a formulação da FDP Normal  $p$ -Generalizada Multivariável pode ser apresentada como uma função da norma  $\ell_p$  do vetor argumento (ver introdução de (SINZ et al., 2009)). Isso significa que, num contexto em que se assume uma FDP Laplaciana com média zero para os elementos de um vetor  $\mathbf{f}$ , qualquer conjunto de vetores  $\mathbf{f}$  com a mesma norma  $\ell_1$  possui mesma probabilidade (a mesma relação existe entre a FDP Gaussiana e a norma  $\ell_2$ ). Dessa forma, a norma  $\ell_1$  é uma medida de probabilidade do vetor  $\mathbf{f}$ : quanto maior é  $\|\mathbf{f}\|_{\ell_1}$ , menor é  $p(\mathbf{f})$ . E uma vez que o estimador MAP tem como um dos critérios a maximização de  $p(\mathbf{f})$  (Equação (60)), esse critério equivale à busca da solução de menor norma  $\ell_1$ . Dessa forma traduz-se a esparsidade do ponto de vista estatístico para o ponto de vista geométrico, exposto na sessão 3.2.5.

A vantagem da utilização de um *prior* promotor de esparsidade na reconstrução de imagens de ultrassom está na tendência a concentrar (ao invés de espalhar) na imagem a influência de um ponto refletor presente no objeto imageado. Quando se reconstrói a imagem de um ponto que se encontra fora da grade modelada, a tendência é que o erro provoque artefatos que poluam praticamente toda a imagem. A tendência à esparsidade nesse caso traduz-se em uma tendência a concentrar as energia dos artefatos em regiões muito próximas ao pixel que

melhor representa o ponto.

### 3.3 ESCOLHA DO PARÂMETRO DE REGULARIZAÇÃO

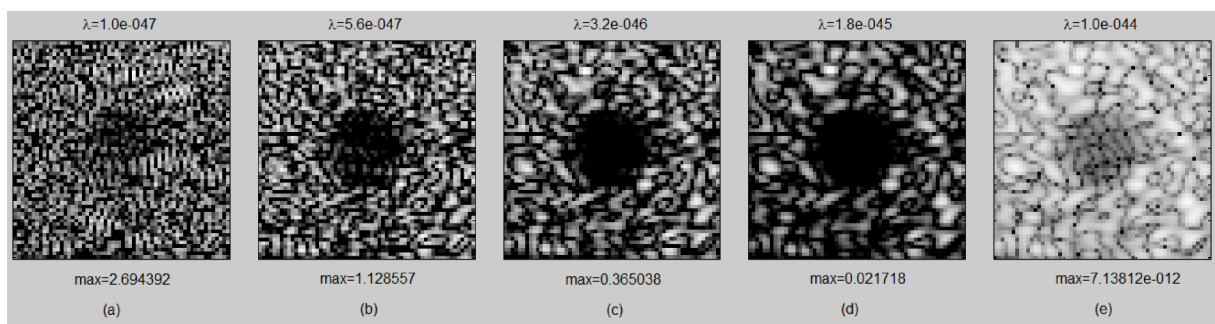
O principal compromisso com o qual se lida em reconstruções inversas regularizadas é entre a excessiva amplificação de ruído que ocorre na ausência de regularização e a excessiva atenuação (ou suavidade, dependendo do tipo de regularização) da imagem que ocorre quando se usa regularização demais (BOVIK, 2000).

A escolha do parâmetro de regularização mais adequado envolve conhecimento a priori sobre a imagem e sobre os erros envolvidos no processo de aquisição. É razoável pensar que tal conhecimento é sempre limitado, o que motiva a busca por métodos que auxiliem na determinação do parâmetro.

#### 3.3.1 INSPEÇÃO VISUAL

O ponto ideal do compromisso entre a presença do ruído e a atenuação da imagem é muitas vezes subjetivo e particular a cada tipo de imagem que se pretende reconstruir. Quando um critério determinístico para a determinação do parâmetro de regularização não cabe, a inspeção visual mostra-se como um método generalista.

A Figura 21 mostra a reconstrução da imagem de um cisto anecóico de 4mm para cinco valores de  $\lambda$ . Nota-se na Figura 21a a presença excessiva de ruído, de forma que até



**Figura 21: Reconstrução da imagem de um cisto com regularização  $\ell_1$  para 5 valores de  $\lambda$ .**

**Fonte: Autoria própria**

mesmo a identificação do cisto fica comprometida. Já na Figura 21e ocorre uma atenuação excessiva da imagem, de forma que todos os pixels têm valor muito próximo de zero. As imagens estão normalizadas (o que explica o aspecto claro e intenso da Figura 21(e) e com

ganho de compressão logarítmica de 60dB. O valor *max* mostrado sob cada uma das imagens corresponde ao valor do pixel de maior intensidade em cada imagem.

Da Figura 21b para a Figura 21c é perceptível uma perda de resolução da imagem, pois as diferenças de intensidades entre pixels vizinhos ficam mais suavizadas. No entanto, o interior do cisto, sabidamente nulo no que diz respeito à reflexividade acústica, é significativamente despoluído do ruído de uma imagem para a outra. O veredicto sobre qual das imagens é a mais apropriada é um critério subjetivo e depende de quais aspectos da reconstrução são mais valorizados.

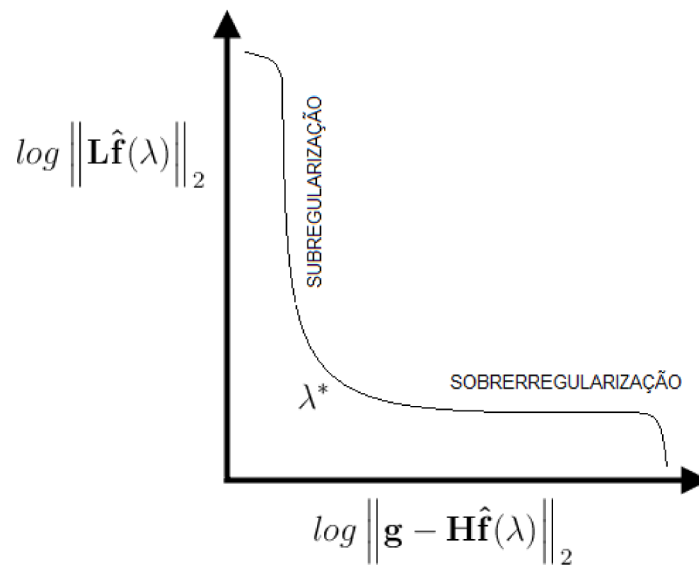
Na prática, a possibilidade de ajuste em tempo real do parâmetro de regularização é interessante, pois diferentes valores de  $\lambda$  revelam diferentes características da imagem. Essa possibilidade é comparável aos recursos de ajuste de *threshold* e de ganho, presentes em sistemas baseados em algoritmos DAS.

### 3.3.2 CURVA L

O método da curva L (HANSEN, 1998) baseia-se na premissa de que há duas grandes regiões de valores do parâmetro de regularização: uma região sub-regularizada, em que a imagem é dominada por ruído, e uma região super-regularizada, em que a imagem é excessivamente regularizada e apresenta-se suavizada ou atenuada em demasia. Dessa forma, a região de interesse situa-se na transição entre essas duas grandes regiões.

A Figura 22 mostra a estrutura ideal da curva L. O gráfico relaciona os valores da penalidade de regularização  $\mathcal{R}\{\hat{\mathbf{f}}(\lambda)\}$  e do erro  $\|\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}(\lambda)\|_{\ell_2}^2$  para cada valor de  $\lambda$  (embora não haja um eixo que represente o  $\lambda$  propriamente dito). O trecho mais vertical corresponde à região onde a penalidade de regularização possui um valor grande, ou seja, onde a imagem encontra-se sub-regularizada. Note-se que a diminuição do valor de  $\lambda$  provoca um crescimento abrupto do valor do termo  $\mathcal{R}\{\hat{\mathbf{f}}(\lambda)\}$  nessa região. O trecho mais horizontal da curva, por sua vez, corresponde à região onde o erro possui um valor muito grande em função da predominância de ruído na imagem reconstruída. Ali o valor  $\|\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}(\lambda)\|_{\ell_2}^2$  cresce abruptamente quando cresce o valor de  $\lambda$ .

Os principais critérios propostos para a determinação do melhor ponto na curva L são: o ponto de máxima curvatura (HANSEN, 1998), o ponto com menor distância euclidiana da origem (BELGE et al., 2002) e o ponto tangente a uma reta de inclinação negativa, considerando apenas as normas (ZIBETTI et al., 2008) ou as normas ao quadrado (REGINSKA, 1996). Porém, esses critérios foram propostos para problemas onde a penalidade de regularização uti-



**Figura 22:** Aspecto típico da curva L. O valor ideal  $\lambda^*$  do parâmetro de regularização encontra-se próximo à zona de transição entre a região sobreregularizada e a região subregularizada.

Fonte: Adaptado de (HANSEN, 1998)

liza a norma  $\ell_2$ . A determinação do melhor ponto na curva L para problemas com regularização  $\ell_1$  ainda é um problema em aberto.

### 3.3.3 MODELAGEM ESTATÍSTICA

Quando o problema de reconstrução regularizada é modelado como um problema de estimativa com o estimador MAP, a determinação do parâmetro de regularização  $\lambda$  deriva naturalmente das funções densidade de probabilidade assumidas para o erro e para a imagem reconstruída, conforme já apontado na Equação 62, onde o valor de  $\lambda$  é função dos desvios-padrão das FDP. No entanto, há que se considerar que a escolha de uma FDP que melhor reflita as características esperadas para a imagem reconstruída e a definição dos parâmetros da FDP são dois problemas distintos. Ou seja, uma vez que se conheça a priori os desvios-padrão do erro e da imagem, tem-se consequentemente um  $\lambda$ . Do contrário, a definição do  $\lambda$  permanece como um problema.

### 3.3.4 OUTROS MÉTODOS

Outros métodos para regularizações com norma  $\ell_2$  foram propostos, como o GCV (*Generalized Cross Validation*) (GOLUB; LOAN, 1996), o princípio da discrepância (BOVIK, 2000) e a análise da SVD. Este último é especialmente interessante por ter sido utilizado na

reconstrução de imagens de ultrassom com regularização  $\ell_2$  em (ZANIN et al., 2012). A aplicabilidade destes métodos para problemas com regularização  $\ell_1$  é, no entanto, um problema em aberto.

### 3.4 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO

Em problemas inversos, a necessidade de regularização é bastante recorrente. Na maioria dos casos, é necessário regularização até mesmo para tornar factível uma solução para o problema modelado, pois são raros os modelos que atendem às três condições de Hadamard.

As regularizações TSVD e Tikhonov podem ser compreendidas como uma generalização do conceito de filtragem de sinais, quando analisadas do ponto de vista da SVD. Do ponto de vista Bayesiano, é possível compreender a regularização de Tikhonov como um *prior* Gaussiano, enquanto a regularização  $\ell_1$  constitui um *prior* Laplaciano. Geometricamente, esses dois tipos de regularização podem ser entendidos, respectivamente, como promotor de homogeneidade e de esparsidade na distribuição das intensidades ao longo dos pixels da imagem.

A regularização  $\ell_1$  tem sido bastante explorada na última década em problemas relacionados à compressão e interpretação de dados. Essas aplicações fazem uso da tendência à esparsidade promovida pela regularização  $\ell_1$  nos dados, no domínio em que ela é utilizada. No caso de imagens de ultrassom, a promoção de esparsidade no domínio da imagem possibilitará a reconstrução de imagens menos poluídas por ruído e artefatos indesejados.

Um dos desafios trazidos pelo uso da reconstrução IPB com regularização é a escolha do parâmetro de regularização. Neste trabalho o método utilizado é a inspeção visual, e assume-se que o recurso de ajuste em tempo real do parâmetro seja interessante em sistemas de reconstrução de imagens de ultrassom. Porém, a definição de um método automático efetivo constitui um importante campo de estudo em problemas inversos e deve motivar estudos futuros para o problema aqui abordado.

## 4 ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO

Este capítulo apresenta os algoritmos utilizados na resolução do problema de estimativa por mínimos quadrados com regularização  $\ell_1$  proposto neste trabalho. É apresentado o algoritmo IRLS com detalhes sobre a implementação realizada. Em seguida é apresentada de maneira geral o algoritmo CG, para o qual foi utilizada uma implementação disponível no programa Matlab.

### 4.1 ITERATIVELY REWEIGHTED LEAST SQUARES

A Equação 41 mostra o uso da estimativa por mínimos quadrados para a resolução de problemas inversos com regularização de Tikhonov. A formulação corresponde ao problema onde tanto a penalidade do erro como a da regularização utilizam minimização da norma  $\ell_2$ . A necessidade de resolução de problemas envolvendo a minimização da norma  $\ell_p$  para  $p \neq 2$  traz a necessidade de outros métodos. Para  $1 < p < 2$  o IRLS (OSBORNE, 1985) é amplamente difundido (BJÖRCK, 1996). O algoritmo utilizado neste trabalho é uma implementação do IRLS.

A Equação 48 nos dá o problema da regularização via minimização  $\ell_1$ . Utilizando a definição da norma  $\ell_1$ , o problema pode ser reescrito como

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2 + \lambda \sum_{i=1}^M |f_i| \quad (64)$$

ou ainda

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2 + \lambda \sum_{i=1}^M |f_i|^{-1} f_i^2. \quad (65)$$

Isso permite que a norma  $\ell_1$  do segundo termo da função-objetivo seja colocada como a norma  $\ell_2$  ponderada. Sendo

$$\mathbf{W} = \text{diag}(1/|f_1|, \dots, 1/|f_M|) \quad (66)$$



a matriz (diagonal) de ponderação. Então a Equação 65 pode ser reescrita como

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2 + \lambda \|\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}\|_{\ell_2}^2. \quad (67)$$

A aplicação do gradiente à Equação 67 nos dá a solução

$$\hat{\mathbf{f}}(\lambda) = (\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \lambda\mathbf{W})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{g}. \quad (68)$$

Como os elementos da matriz de ponderação  $\mathbf{W}$  são funções de  $\mathbf{f}$ , a solução não é direta, sendo necessária uma abordagem iterativa. Sendo  $\mathbf{W}_k$  e  $\mathbf{f}_k$  respectivamente a matriz  $\mathbf{W}$  e o vetor  $\mathbf{f}$  na  $k$ -ésima iteração, o problema linear a ser resolvido a cada iteração do IRLS é

$$\hat{\mathbf{f}}_{k+1}(\lambda) = (\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \lambda\mathbf{W}_k)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{g}. \quad (69)$$

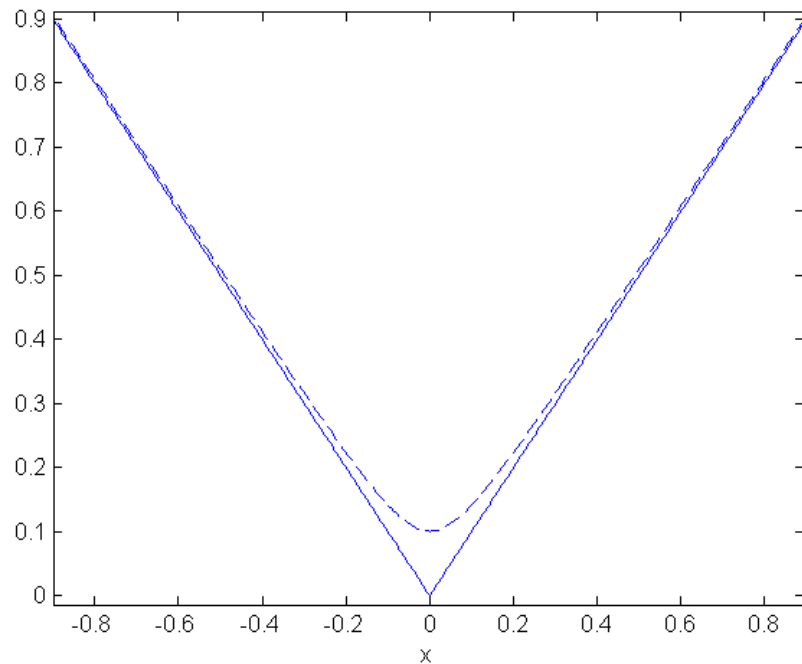
A rigor, o IRLS é um algoritmo para norma  $\ell_p$  sendo  $1 < p < 2$ . O fato da norma  $\ell_1$  ser apenas parcialmente diferenciável (não possui gradiente definido quando um dos elementos é igual a zero) faz com que a minimização  $\ell_1$  tenha problemas de convergência próximo a um elemento igual a zero. No algoritmo implementado, utilizou-se o artifício de aproximar o módulo de um elemento pela equação da hipérbole, com uma constante  $\varepsilon$  extremamente pequena:

$$|f_i| \approx \sqrt{|f_i|^2 + \varepsilon}. \quad (70)$$

Esta aproximação não altera de forma significativa a geometria da norma  $\ell_1$ , como pode ser observado no exemplo unidimensional da Figura 23. A atribuição de  $\mathbf{W}_k$  foi, portanto, implementada no algoritmo da seguinte forma:

$$\mathbf{W}_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{|f_1|^2 + \varepsilon}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{|f_2|^2 + \varepsilon}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{|f_M|^2 + \varepsilon}} \end{bmatrix} \quad (71)$$

A Tabela 1 representa em pseudo-linguagem o algoritmo implementado.



**Figura 23:** Exemplo unidimensional de aproximação da norma  $\ell_1$  por uma parábola. A linha sólida representa a função  $f(x) = |x|_{\ell_1}$ . A linha tracejada representa a função  $f(x) = \sqrt{|x|^2 + 0,01}$ , uma aproximação da norma  $\ell_1$ . A função  $\sqrt{|x|^2 + 0,01}$  é diferenciável, enquanto  $|x|_{\ell_1}$  é apenas parcialmente diferenciável, contendo uma descontinuidade da derivada em  $x = 0$ .

Fonte: Autoria própria

**Tabela 1:** Algoritmo IRLS-CG

$k := 0$	
$\mathbf{f}_k := \mathbf{1}$	Valor inicial de $\mathbf{f}_k$
Faça	
$\mathbf{W}_k = \text{diag}(1/\mathbf{f}_k)$	Atualiza matriz de pesos
$\mathbf{f}_{k+1} = \text{CG}(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{W}_k, \mathbf{H}^T \mathbf{g})$	CG para resolver o sistema linear
$e_k = \ \mathbf{f}_{k+1} - \mathbf{f}_k\ _{\ell_2}^2 / \ \mathbf{f}_k\ _{\ell_2}^2$	Atualiza o erro da iteração
$k := k + 1$	
Enquanto $(e_k > \text{tol})$ & $(k < \text{maxit})$	

No algoritmo da Tabela 1,  $\mathbf{1}$  é o vetor de  $M$  elementos iguais a 1,  $\text{CG}$  é o algoritmo do gradiente conjugado,  $e_k$  é uma métrica da diferença entre os resultados de duas iterações sucessivas na  $k$ -ésima iteração e  $\text{tol}$  é o valor de tolerância para a convergência do algoritmo.

A implementação do CG utilizada foi a função PCG (*Preconditioned Conjugate Gradient*) do MatLab. Embora a função PCG ofereça a possibilidade da utilização de pré-condicionamento na resolução do sistema, este recurso não foi utilizado.

Com o crescente interesse que tem surgido por problemas com minimização  $\ell_1$  na última década, vários outros métodos para solução de problemas de mínimos quadrados com regularização  $\ell_1$  têm sido propostos. Por exemplo, algoritmos baseados na estratégia do subgradiente (SHEVADE; KEERTHI, 2003; PERKINS et al., 2003; FU, 1998) e em aproximações da norma  $\ell_1$  (KOH et al., 2007; SCHMIDT et al., 2007). A escolha do IRLS se deu principalmente por ser um algoritmo relativamente difundido na literatura e por ser baseado na formulação de mínimos quadrados regularizados que demonstrou resultados promissores na reconstrução de imagens de ultrassom em (ZANIN, 2011).

## 4.2 GRADIENTE CONJUGADO

A pseudo-inversa de Penrose-Moore é uma das formas mais estáveis de solução do sistema linear presente em cada iteração do IRLS. Este método, porém, apresenta um custo computacional bastante elevado. A utilização do CG faz uso do fato da matriz  $\mathbf{H}$  ser esparsa (não confundir com a esparsidade do sinal), situação em que o CG possui uma taxa de convergência mais rápida e mostra-se computacionalmente mais eficiente do que a pseudo-inversa (SAAD, 2003).

Embora o algoritmo CG utilizado seja uma implementação nativa do software Matlab, é interessante uma descrição resumida de como o método funciona. Para uma introdução mais didática e pormenorizada, recomenda-se (SHEWCHUK, 1994), de onde foi resumida a descrição que segue.

O CG um é método iterativo cujo objetivo é encontrar o vetor  $\mathbf{x}_*$  que soluciona o sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (72)$$

onde  $\mathbf{A}$  é uma matriz simétrica, real e definida positiva, e  $\mathbf{b}$  é um vetor. Tanto  $\mathbf{A}$  como  $\mathbf{b}$  são conhecidos a priori. A solução do sistema da Equação 72 corresponde ao vetor  $\mathbf{x}$  que zera a função

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} - \mathbf{x}^T \mathbf{b}. \quad (73)$$

Quando  $\mathbf{A}$  é uma matriz não simétrica ou não definida positiva (a maioria dos casos

práticos), o CG pode ser aplicado às equações normais  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , com  $\mathbf{A}^T \mathbf{b}$  no lado direito:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (74)$$

Nesse caso, a solução  $\mathbf{x}_*$  corresponde à solução  $\hat{\mathbf{x}}$  do problema de minimização

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_{\ell_2}^2. \quad (75)$$

A cada iteração  $k$  do CG, a direção de busca é uma direção conjugada da direção anterior. O resíduo da  $k$ -ésima iteração  $\mathbf{r}_k$  corresponde a:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k. \quad (76)$$

A direção  $\mathbf{p}_k$  é então computada de forma a remover a parcela das direções anteriores:

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k - \sum_{i < k} \frac{\mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \mathbf{p}_i} \mathbf{p}_i \quad (77)$$

e utilizada no cálculo do próximo passo:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k, \quad (78)$$

onde o coeficiente  $\alpha_k$  define o passo ótimo e é computado como

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{p}_k^T \mathbf{b}}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{A} \mathbf{p}_k} = \frac{\mathbf{p}_k^T (\mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1})}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{A} \mathbf{p}_k} = \frac{\mathbf{p}_k^T \mathbf{r}_{k-1}}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{A} \mathbf{p}_k}, \quad (79)$$

de forma a minimizar  $f(\mathbf{x})$  na direção  $\mathbf{p}_k$ .

O resultado é que, a cada iteração, a  $k$ -ésima componente conjugada  $\mathbf{p}_k$  é eliminada da diferença  $\mathbf{x}_k - \mathbf{x}$ . Logo, depois de  $M$  iterações (onde  $M$  é a dimensão de  $\mathbf{x}$ ), tem-se a solução exata  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_M = \mathbf{x}_*$ .

A Tabela 2 representa em pseudo-linguagem uma implementação do CG.

**Tabela 2: Algoritmo do Gradiente Conjugado**

$$\mathbf{r}_0 := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{p}_0 := \mathbf{r}_0$$

$$k := 0$$

Faça

$$\alpha_k := \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{A} \mathbf{p}_k}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$$

$$\mathbf{r}_{k+1} := \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{A} \mathbf{p}_k$$

$$\beta_k := \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}$$

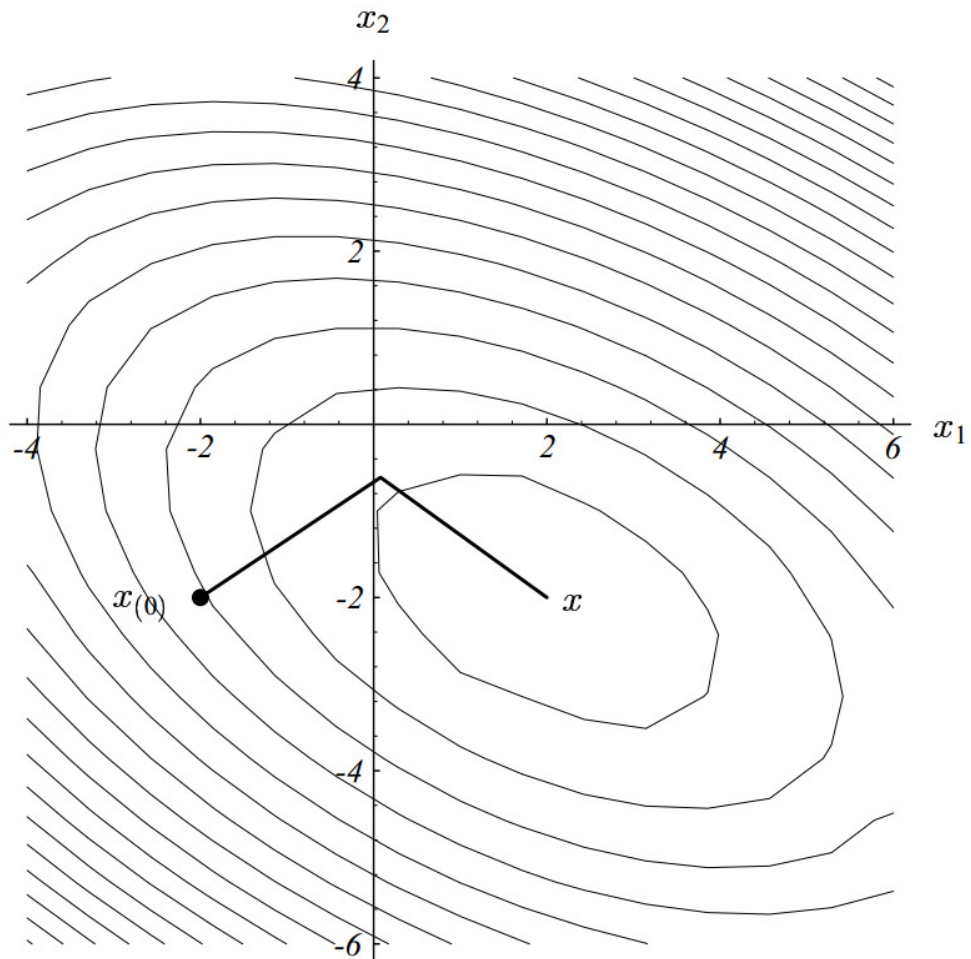
$$\mathbf{p}_{k+1} := \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k$$

$$k := k + 1$$

Enquanto  $(\|\mathbf{r}_k\|_{\ell_2} < \text{res}) \ \& \ (k < \text{maxitcg})$

No algoritmo da Tabela 2, *res* é a tolerância para convergência do resíduo e *maxitcg* é o número máximo de iterações a serem executadas caso não se atinja um resíduo menor do que *res*.

A Figura 24 ilustra a convergência do CG para um problema de duas dimensões. Nesse caso, a convergência se dá em duas iterações. Repare que as direções dos dois passos são conjugadas, ou seja, são ortogonais em  $\mathbf{A}$ .



**Figura 24:** Ilustração da convergência do CG para um problema bidimensional. Nesse caso, o algoritmo converge em duas iterações.

Fonte: (SHEWCHUK, 1994)

## 5 ESTADO DE ARTE E PROPOSTA

Neste capítulo será feita uma revisão das abordagens de reconstrução de imagens de ultrassom por problemas inversos presentes na literatura. São descritas algumas formulações apresentadas, destacadas vantagens que motivam a pesquisa nesta área e apontadas possíveis inconsistências.

Em seguida é apresentada a proposta deste trabalho, composta principalmente pela formulação utilizada para o problema e pelo algoritmo de otimização utilizado na resolução do problema posto pela formulação.

### 5.1 ABORDAGENS IPB EM ULTRASSOM

Na última década, algumas abordagens IPB em ultrassom foram reportadas mostrando resultados promissores, o que constitui parte da motivação deste trabalho. Essas abordagens e suas formulações serão apresentadas nesta seção.

Em (LAVARELLO et al., 2006), o problema é formulado como reconstrução inversa com regularização de Tikhonov generalizada, ou seja, regularização de Tikhonov com norma  $\ell_p$  e  $p$  variável, sendo testados os valores  $p = \{0,5; 1; 1,5\}$  na reconstrução da imagem de um cisto anecóico com dados adquiridos através de simulação computacional. Considerou-se o resultado mais satisfatório aquele obtido na reconstrução com  $p = 1$ , o que corresponde à norma  $\ell_1$ . Utilizou-se o IRLS como algoritmo de otimização. Porém, a formulação da matriz de pesos apresentada para norma  $\ell_p$ ,

$$\mathbf{W}(\hat{\mathbf{f}}) = \frac{P}{2} \text{diag} \left[ (|\hat{\mathbf{f}}_i|^2 + \varepsilon)^{1-(p/2)} \right], \quad (80)$$

não condiz com a teoria presente na literatura (BJÖRCK, 1996), pois o expoente correto é  $(p-2)/2$  ao invés de  $1-(p/2)$ . Outro problema é que o IRLS não prevê a resolução de problemas com pseudo-norma  $\ell_{0,5}$ , mas apenas com norma  $\ell_p$  sendo  $1 \leq p < 2$  (BJÖRCK, 1996).

Em (LINGVALL; OLOFSSON, 2007) são apresentados resultados de reconstrução IPB em ultrassom para duas abordagens: uma baseada em mínimo erro quadrático médio (equivalente à regularização de Tikhonov, ou MAP com *prior* Gaussiano para as reflexividades) e uma correspondente ao estimador MAP com *prior* Gaussiano para o erro e exponencial para as reflexividades, com restrição de reflexividades não-negativas. O *prior* que reflete a distribuição exponencial para as reflexividades aparece na formulação MAP como

$$p(\mathbf{f}) = \prod_{i=1}^{MN} \lambda e^{-\lambda f_i}. \quad (81)$$

Os resultados apresentados demonstram performance superior do algoritmo com *prior* exponencial se comparado ao algoritmo com *prior* Gaussiano ou à reconstrução DAS, especialmente na reconstrução com dados reais, onde o refletor não é forçado a se localizar sobre a grade do modelo. Tais resultados são especialmente motivadores no contexto do presente trabalho, uma vez que o *prior* Laplaciano utilizado aqui corresponde ao *prior* exponencial de duplo lado, ou seja, sem a restrição de não-negatividade das reflexividades. No caso de imagens médicas de ultrassom, o conhecimento das impedâncias acústicas encontradas nos tecidos humanos mostra que tal restrição não se aplica, pois as impedâncias variam tanto positivamente quanto negativamente (SMITH; WEBB, 2010; WEBSTER, 2009).

Em (VIOLA et al., 2008), o problema da reconstrução é modelado com o estimador MAP com *prior* descrito como Gaussiano. A fidelidade da imagem ao modelo de aquisição e aos dados é imposta através de uma restrição no modelo inverso. A formulação apresentada para o problema de otimização é

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \sum_{i=1}^{MN} \ln |f_i|^2 \text{ sujeito a } \mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}. \quad (82)$$

O algoritmo utilizado é uma implementação do algoritmo SPOC (BETHEL et al., 2002).

Em (ZANIN, 2011) é realizado um estudo comparando os seguintes métodos de reconstrução de imagens de ultrassom: DAS, matriz transposta, pseudo-inversa, regularização de Tikhonov e regularização por limitação nas iterações do algoritmo CG. Os resultados apresentados são promissores e demonstram ganhos de resolução e contraste nos métodos IPB quando comparados ao DAS. Na presença de ruído, a reconstrução com regularização de Tikhonov demonstrou performance superior aos outros métodos. No entanto, nas simulações em que os pontos refletores não foram forçados a se localizarem sobre a grade do modelo, foi observada excessiva degradação das imagens reconstruídas em todos os métodos IPB experimentados. Este tipo de erro corresponde ao conceito de pontos fora da grade modelada, apresentado na Seção 2.6.2 deste trabalho. Este problema observado é o principal motivador do presente estudo.



Algumas técnicas de tomografia computadorizada utilizando ondas de ultrassom foram propostas, como (PETERLIK et al., 2008), (NATTERER; WUBBELING, 1995) e (NATTERER, 2010). Estas abordagens são classificadas como problemas inversos. No entanto, diferem da abordagem analisada neste trabalho principalmente pelo fato de que a principal grandeza buscada é a atenuação das ondas acústicas, e não a reflexividade.

Em (PASSARIN et al., 2012) foi apresentado o algoritmo de reconstrução IPB utilizado neste trabalho. Conforme será abordado na Seção 5.2, o problema foi formulado do ponto de vista Bayesiano com *prior* Laplaciano. Resultados preliminares foram apresentados, exibindo ganhos significativos com relação à formulação com *prior* Gaussiano (regularização de Tikhonov) no que diz respeito ao problema dos pontos refletores fora da grade e à robustez ao ruído.

Conclui-se que as abordagens IPB em ultrassom analisadas mostram ganhos promissores com relação à resolução quando comparadas às abordagens DAS. Formulações com regularização de Tikhonov (minimização da norma  $\ell_2$  da imagem) demonstram esses ganhos, além de mostrarem robustez ao ruído na aquisição. No entanto, essas formulações geram resultados excessivamente degradados quando são feitas aquisições com phantoms físicos ou com phantoms computacionais em que não há restrição para que os pontos refletores permaneçam sobre a grade do modelo. Conclui-se, portanto, que a limitação de resolução espacial do modelo de aquisição resulta em um problema de degradação da imagem que não é satisfatoriamente compensado com a regularização por minimização  $\ell_2$ .

Nas abordagens em que foram utilizados *priors* promotores de esparsidade, observam-se ganhos significativos na compensação do problema de limitação da resolução espacial do modelo de aquisição. Tais resultados justificam o pressuposto de que a regularização  $\ell_1$  deve trazer ganhos no tratamento deste problema, o que motiva o presente estudo.

## 5.2 PROPOSTA

O propósito do presente trabalho é analisar o uso da regularização por minimização da norma  $\ell_1$  na reconstrução de imagens de ultrassom. Face aos resultados promissores observados na literatura com o uso de regularização  $\ell_2$  e aos problemas remanescentes de degradação na presença de refletores em pontos não modelados, a pergunta a ser respondida é se a regularização  $\ell_1$  mantém os ganhos obtidos com  $\ell_2$  e avança no referido problema da degradação. Formulações IPB para ultrassom utilizando outros *priors* esparsos (LAVARELLO et al., 2006; LINGVALL; OLOFSSON, 2007) sugerem que sim.

O problema inverso é formulado segundo a Equação 48, onde o vetor  $\mathbf{f}$  contém as reflexividades do objeto imageado, o vetor  $\mathbf{g}$  contém as amostras obtidas na aquisição dos sinais de eco e a matriz  $\mathbf{H}$  é o modelo direto de aquisição.

A minimização da norma  $\ell_1$  torna a busca do mínimo da Equação 48 a solução de um sistema não-linear, sem solução fechada, o que requer a utilização de um algoritmo de otimização iterativo. O algoritmo utilizado é uma implementação do IRLS. Cada iteração do IRLS envolve a resolução de um sistema linear, para a qual se utilizou o CG, aproveitando a esparsidade da matriz de aquisição  $\mathbf{H}$ .

Dessa forma, a proposta do trabalho é analisar a reconstrução IPB em ultrassom com regularização via minimização da norma  $\ell_1$  da imagem, utilizando o algoritmo IRLS-CG. A comparação com a regularização por minimização da norma  $\ell_2$  e com uma implementação baseada em DAS faz parte dessa análise.

### 5.3 MATERIAIS E MÉTODOS

#### 5.3.1 FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS

Tanto as simulações para criação da matriz do modelo direto como as simulações de aquisição de phantoms computacionais demandam a utilização de um simulador que considere todos os elementos que compõem a Equação 13, como as respostas ao impulso espacial direta e de retorno dos transdutores. O programa de simulação utilizado no desenvolvimento deste trabalho é o Field II (JENSEN, 1996, 2004), que se baseia na resposta ao impulso espacial de Tupholme-Stephanishen (TUPHOLME, 1969; STEPHANISHEN, 1970). A escolha se deu por ser uma ferramenta bem documentada e bastante difundida na literatura de ultrassom.

O simulador Field II consiste de uma biblioteca para o software MATLAB. As simulações, o algoritmo de reconstrução e todas as outras operações matemáticas e de imagens foram executados no MATLAB versão R2011a.

#### 5.3.2 PROBLEMA DIRETO: CONSTRUÇÃO DA MATRIZ $\mathbf{H}$

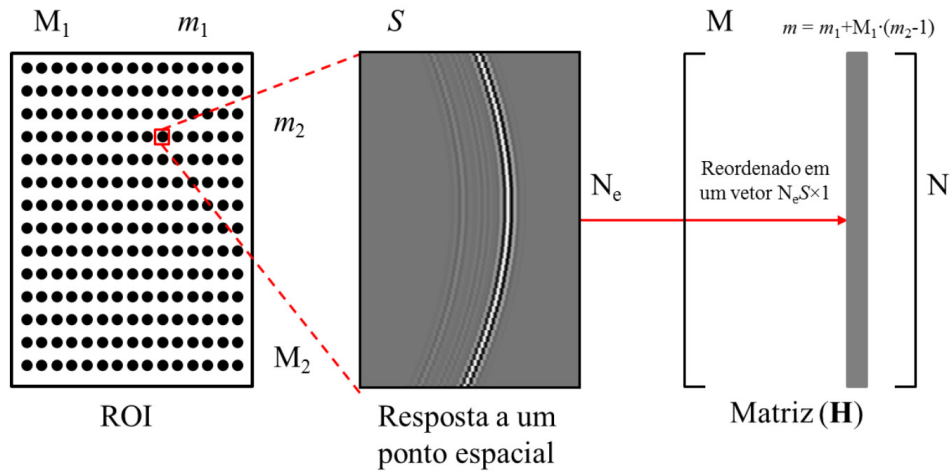
A formulação de um problema inverso baseia-se na inversão de uma matriz do modelo direto, que chamamos de matriz  $\mathbf{H}$ . Esta matriz modela o processo de aquisição: se multiplicada por um vetor  $\mathbf{f}$  de reflexividades, fornecerá como produto o vetor  $\mathbf{g}$  dos dados da aquisição de  $\mathbf{f}$ . É válido lembrar que o vetor  $\mathbf{g}$  equivale à concatenação dos sinais de aquisição  $g_k[t_i]$

(Equação 13) observados nos  $N_e$  elementos do transdutor:

$$\mathbf{g} = [\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \dots \ \mathbf{g}_{N_e}], \quad (83)$$

onde  $N_e$  é o número de elementos.

A Equação 22 mostra uma forma de se determinar a matriz  $\mathbf{H}$ : se tivermos condições de realizar a aquisição para um ponto de reflexividade unitária  $f_m$  de forma independente, o vetor  $\mathbf{g}_m$  resultante corresponde à coluna  $\mathbf{h}_m$  da matriz  $\mathbf{H}$ . Se o mesmo processo for possível para todos os pontos  $f_m$  da ROI, então é possível obter todas as colunas de  $\mathbf{H}$ . Este processo é representado na Figura 25.



**Figura 25: Representação da construção da  $m$ -ésima linha da matriz  $\mathbf{H}$ .**

Fonte: (ZANIN, 2011)

Duas maneiras possíveis de gerar os dados de aquisição  $\mathbf{g}_m$ , quando não se possui um modelo analítico para a matriz do modelo direto  $\mathbf{H}$ , são aquisição real e simulação. As matrizes  $\mathbf{H}$  utilizadas no desenvolvimento deste trabalho foram obtidas a partir de simulações com o programa Field II.

## 6 EXPERIMENTOS E RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados experimentos e resultados obtidos com o método proposto, incluindo em alguns casos comparações com outros métodos descritos neste trabalho. Primeiramente são apresentadas as reconstruções de um único ponto no centro da ROI. O objetivo deste experimento é mostrar que a reconstrução com regularização  $\ell_1$  resulta numa função espalhamento de ponto mais concentrada do que as reconstruções com outras técnicas. Os testes são então repetidos para um phantom com 25 pontos uniformemente distribuídos ao longo da ROI, visando mostrar que as propriedades observadas aplicam-se para toda a extensão da ROI. Os experimentos com um ponto e com 25 pontos são feitos com os pontos dentro e fora da grade.

São também realizados experimentos de resolução que têm como objetivo demonstrar que as limitações de resolução dos algoritmos DAS não estão presentes no algoritmos IPB. Esses testes exploram a capacidade de cada uma das técnicas de resolver independentemente pontos refletores situados a distâncias próximas.

Reconstruções de phantoms mais complexos, com quantidades de pontos na ordem dos milhares, são realizadas. Os phantoms são do tipo massa em um meio anecóico e do tipo cisto anecóico em um meio reflexivo. Estes experimentos têm como objetivo analisar o desempenho do método proposto na reconstrução de phantoms não esparsos e não pontuais, ou seja, phantoms que não são bem representados pelo *prior* proposto. São também comparados resultados de phantoms similares com distribuições Laplaciana e Gaussiana dos valores das reflexividades.

São também comparados os efeitos, na imagem reconstruída, pelos dois tipos de erros de aquisição considerados: ruído adicionado ao sinal e mau posicionamento dos refletores (pontos fora da grade), a fim de verificar se os dois tipos de erros são equivalentes.

É feita uma comparação de desempenho computacional de duas versões do algoritmo IRLS, que diferem na maneira como se resolve o sistema linear presente em cada iteração: a primeira utiliza o CG (algoritmo proposto) e a segunda utiliza a pseudo-inversa.

Finalmente, é avaliado o uso da curva L como critério inicial de escolha do parâmetro

de regularização. São realizadas 30 reconstruções, com valores do parâmetro de regularização logaritmicamente espaçados, e escolhida aquela cujo ponto na curva L está mais próximo da origem.

## 6.1 CONFIGURAÇÕES UTILIZADAS NOS EXPERIMENTOS

A menos que outras configurações estejam explícitas, os experimentos utilizaram as configurações descritas a seguir.

A grade de pixels modelada é de 60 pixels no eixo axial e 60 pixels no eixo lateral, totalizando 3600 pixels. A ROI correspondente vai de 30 mm a 40 mm no eixo axial e de -5 mm a 5 mm no eixo lateral. As aquisições (e respectivas reconstruções) são realizadas sem ruído e com ruído usando SNR (*Signal-to-noise Ratio* - Relação Sinal-ruído) de 20 dB. Os resultados das reconstruções são apresentados em escala logarítmica com ganho de 60 dB e em escala linear, e os tipos de reconstrução apresentados são:

- **DAS:** algoritmo *delay-and-sum beamforming* disponibilizado no site do Field II (<http://field-ii.dk/>);
- **Pseudo-inversa:** matriz pseudo-inversa de Penrose-Moore (Equação 27);
- **L2:** reconstrução IPB com regularização  $\ell_2$  (Equação 40, com  $\mathbf{L}$  sendo a matriz identidade);
- **L1:** reconstrução IPB com regularização  $\ell_1$  (Equação 48).

Para as reconstruções com regularização  $\ell_1$  são apresentados um caso de reconstrução sub-regularizada (parâmetro  $\lambda$  abaixo do ideal), um caso com o parâmetro  $\lambda$  ideal e um caso de reconstrução super-regularizada (parâmetro  $\lambda$  acima do ideal). Como o método adotado para determinação do parâmetro  $\lambda$  é a inspeção visual, o valor de  $\lambda$  considerado ideal é aquele que produz a imagem que melhor representa visualmente o modelo do phantom, que sempre é conhecido a priori.

Para o algoritmo DAS, as aquisições foram feitas com 16 elementos para cada *scanline*, resultando em 49 *scanlines*. Foi utilizado foco eletrônico no centro da ROI, o que corresponde a 35 mm de profundidade nas configurações padrão dos experimentos.

As imagens exibidas estão em escala de 128 tons de cinza. Todas as imagens estão normalizadas, de forma que o pixel de maior valor corresponde ao tom branco, e exibidas em

módulo. Nas figuras em que os resultados das reconstruções são expressos por gráficos de barras, superfícies ou histogramas, não foi aplicado módulo ou qualquer outro operador aos resultados. As imagens e gráficos em que as escalas não possuem unidades estão em *mm*, e esta informação foi suprimida por motivo de economia de espaço.

Todos os phantoms utilizados são computacionais, de forma que todas as aquisições de dados foram realizadas no software Matlab utilizando o programa Field II (JENSEN, 2004).

Para a exibição dos modelos dos phantoms, o valor da intensidade de cada pixel é a soma das intensidades dos refletores que se encontram a uma distância menor do que meio pixel (nos dois eixos) dele.

### 6.1.1 TRANSDUTOR E FIELD II

O transdutor e o meio modelados no programa Field II para realização dos experimentos possuem as características descritas na Tabela 3.

**Tabela 3: Parâmetros do transdutor**

Tipo de transdutor	1-D linear array
Número de elementos matemáticos por elemento (x)	4
Número de elementos matemáticos por elemento (y)	4
Número de elementos (x)	64
Número de elementos (y)	1
Frequência central do pulso	5 MHz
Largura de banda fracionária	0,6
Frequência de amostragem	50 MHz
Velocidade do som	1540 m/s
Largura dos elementos	0,3 mm
Espaço entre elementos	8 $\mu$ m

Não foi utilizada atenuação ao longo do meio, e os disparos foram desfocados.

### 6.1.2 PARÂMETROS DO IRLS-CG

Os parâmetros padrão utilizados no algoritmo IRLS-CG estão discriminados na Tabela 4.

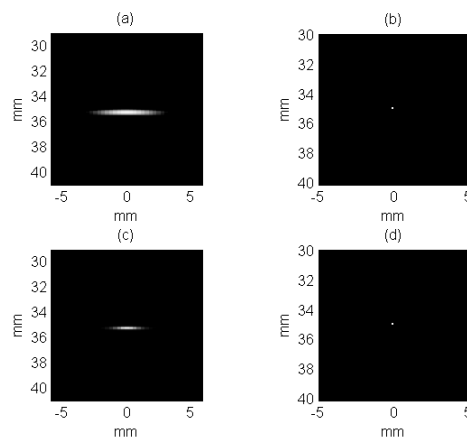
Parâmetro	Descrição	Valor
<i>tol</i>	Tolerância de convergência do IRLS	0
<i>maxit</i>	Limite de iterações do IRLS	300
<i>res</i>	Tolerância do resíduo do CG	$10^{-5}$
<i>maxitcg</i>	Limite de iterações de cada execução do CG	300

**Tabela 4: Parâmetros padrão utilizados no IRLS-CG**

## 6.2 PONTO NO CENTRO DA ROI

### 6.2.1 PONTO SOBRE A GRADE E AQUISIÇÃO SEM RUÍDO

O caso mais simples de reconstrução é a de um ponto localizado em um pixel modelado. Foi criado um phantom computacional com apenas um refletor, de amplitude unitária, posicionado no ponto central da ROI. Como se trata de uma aquisição livre de erros, o problema da reconstrução tem uma solução  $\hat{\mathbf{f}}$  que atende ao modelo  $\mathbf{g} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}$ . Dessa forma, essa reconstrução é possível sem o uso de regularização, ou seja, utilizando a pseudo-inversa. A Figura 26 mostra o resultado das reconstruções com DAS e com IPB.



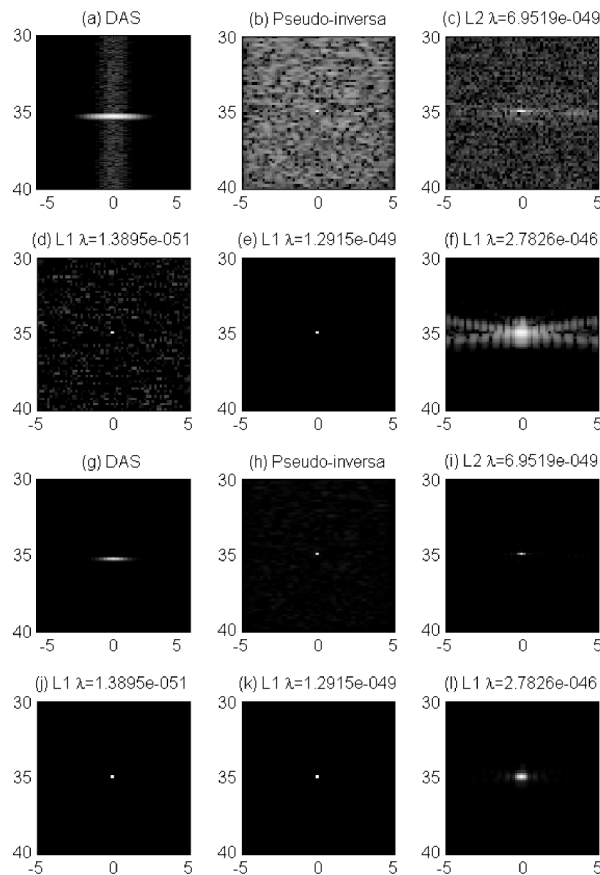
**Figura 26: Reconstrução de um ponto no centro da ROI. (a) DAS em escala logarítmica, (b) Pseudo-inversa em escala logarítmica, (c) DAS em escala linear e (d) pseudo-inversa em escala linear.**

**Fonte: Autoria própria**

O caso representado na Figura 26 é ideal e pouco representativo do ponto de vista prático, mas serve como demonstração do potencial dos algoritmos IPB. Enquanto na reconstrução DAS o refletor se espalha na imagem, na reconstrução IPB ele afeta apenas o pixel em que está posicionado.

## 6.2.2 PONTO SOBRE A GRADE E AQUISIÇÃO COM RÚIDO USANDO SNR DE 20 dB

Foi simulada a aquisição do mesmo phantom computacional da Seção 6.2.1, porém com adição de ruído de forma a obter uma SNR de 20dB. Os resultados das reconstruções são exibidos na Figura 27.



**Figura 27: Reconstrução de um ponto no centro da ROI e aquisição com ruído. (a)-(f) em escala logarítmica com ganho de 60dB. (a) DAS, (b) pseudo-inversa, (c) regularização  $\ell_2$ , (d) regularização  $\ell_1$  sub-regularizada, (e) regularização  $\ell_1$  e (f) regularização  $\ell_1$  super-regularizada. (g)-(l) apresentam os mesmos dados exibidos em escala linear.**

**Fonte: Autoria própria**

É possível observar que a reconstrução pela pseudo-inversa ainda permite distinguir o ponto, embora adicione forte ruído à imagem. A reconstrução  $\ell_2$  atenua parte do ruído, a custo de provocar espalhamento do ponto refletor nos pixels vizinhos. Esse comportamento corrobora a ideia de que uma penalidade de mínimos quadrados na imagem reconstruída tende a espalhar a representação de um refletor pontual ao invés de concentrá-la em um único ponto, quando a aquisição é ruidosa. A reconstrução  $\ell_1$  mostra a efetividade do *prior* promotor de esparsidade: o

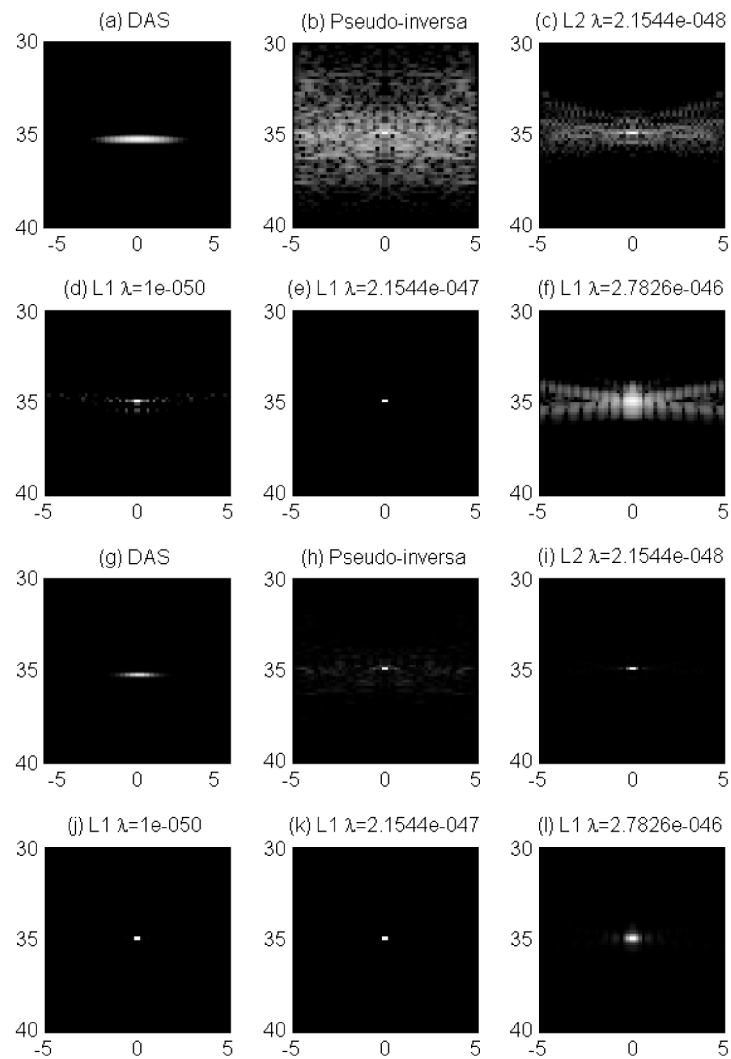


ruído de fundo consequente da reconstrução IPB é "encolhido" e apenas o pixel correspondente ao ponto refletor possui valor distante de zero.

### 6.2.3 PONTO DESLOCADO DA GRADE MEIO PIXEL NA DIREÇÃO LATERAL

O principal ganho esperado da reconstrução com regularização  $\ell_1$  é com relação ao problema dos artefatos consequentes da existência de refletores em pontos não definidos na grade de pixels modelados. Os experimentos a seguir utilizam phantoms pontuais semelhantes ao utilizado na Seção 6.2.1, porém com o refletor deslocado da grade de forma que se localize em uma posição não modelada.

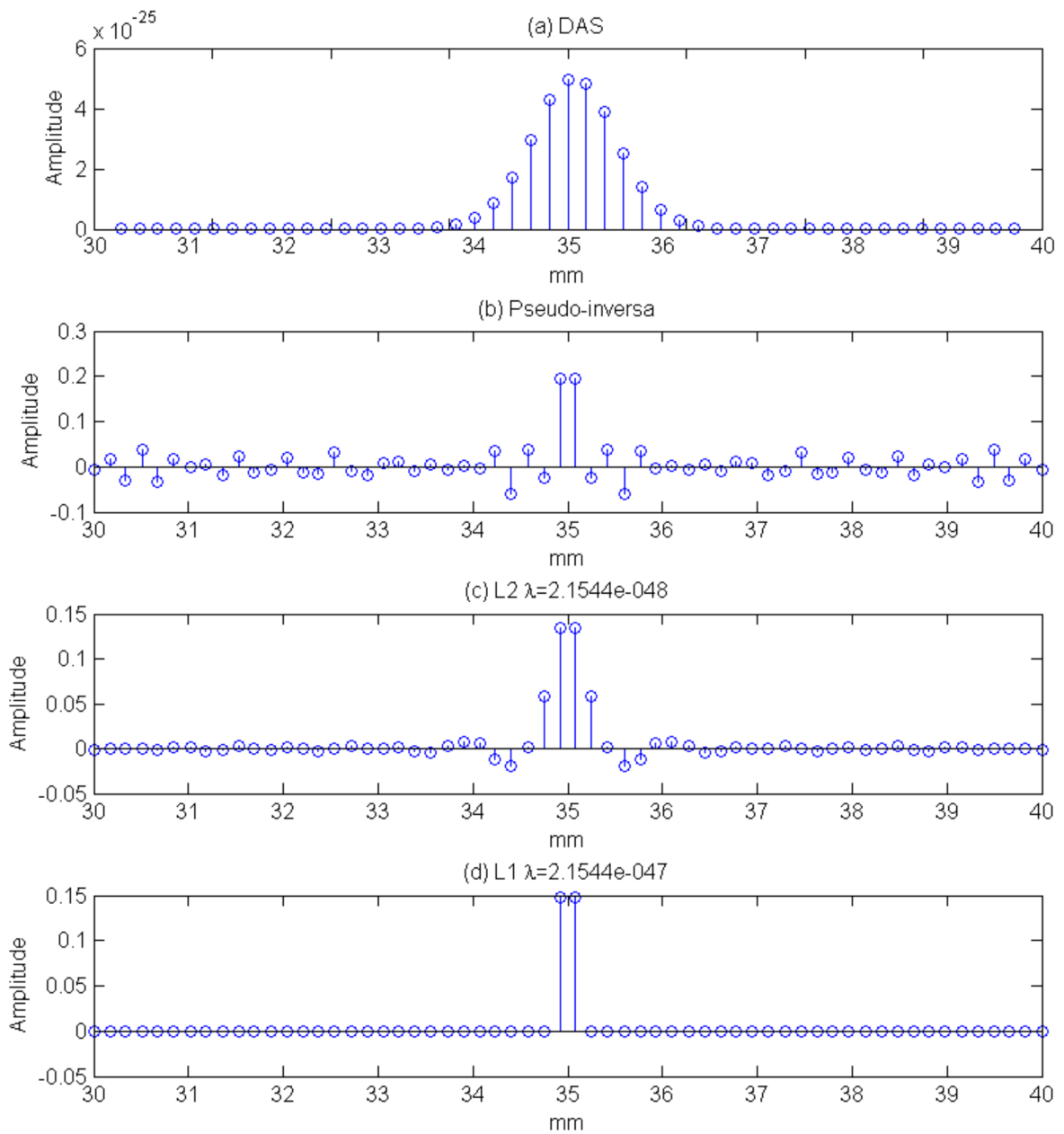
Como a ROI possui 10 mm de largura, correspondentes a 60 colunas de pixels igualmente espaçadas, o tamanho do passo entre cada pixel é de 0,16 mm. No experimento a seguir o refletor foi deslocado à direita meio passo, ou seja,  $84,7 \mu\text{m}$ . Dessa forma, ficou exatamente entre as colunas 30 e 31 da grade. A Figura 28 mostra os resultados das reconstruções. É possível observar que, ao contrário das outras técnicas, a reconstrução com regularização  $\ell_1$  proporcionou uma imagem em que apenas os dois pixels vizinhos à localização do refletor possuem valor diferente de zero. Isso fica evidente principalmente quando as imagens são exibidas em escala logarítmica.



**Figura 28: Reconstrução de um ponto deslocado meio pixel no eixo lateral. (a)-(f) em escala logarítmica com ganho de 60dB. (a) DAS, (b) pseudo-inversa, (c) regularização  $\ell_2$  (d) regularização  $\ell_1$  sub-regularizada, (e) regularização  $\ell_1$  e (f) regularização  $\ell_1$  super-regularizada. (g)-(l) apresentam os mesmos dados exibidos em escala linear.**

**Fonte: Autoria própria**

A Figura 29 mostra os gráficos das amplitudes dos pixels da linha central da imagem, onde se encontra o refletor. Foi utilizada representação do gráfico em barras visando facilitar a identificação de cada pixel individualmente.

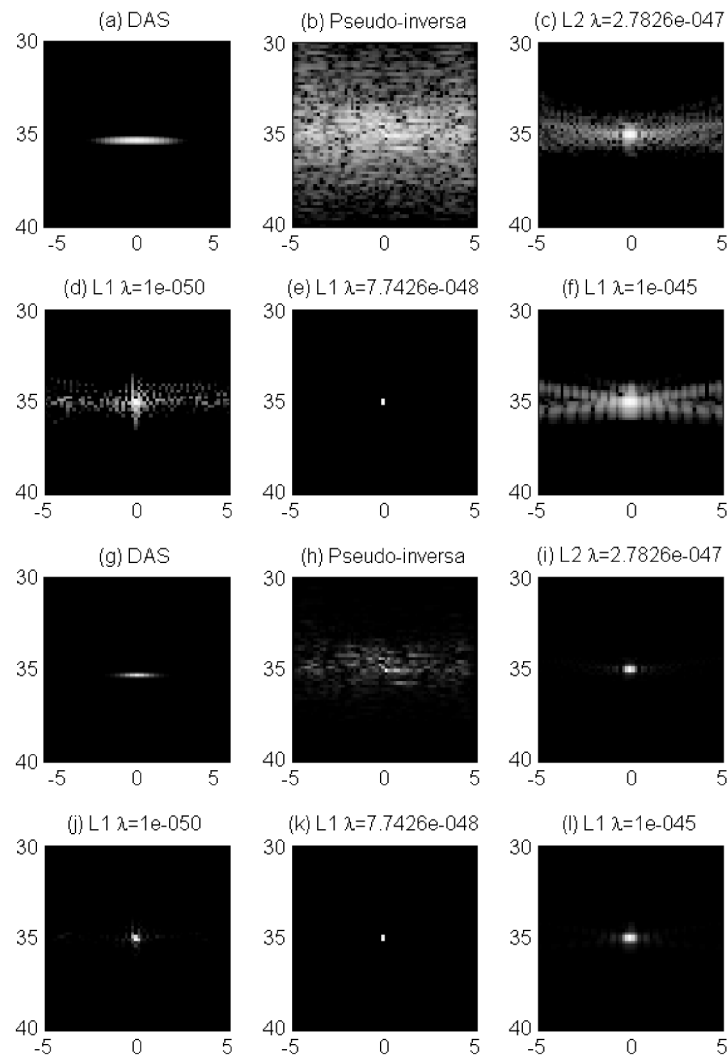


**Figura 29:** Amplitudes na linha central das imagens reconstruídas de um ponto deslocado meio pixel no eixo lateral. (a) DAS, (b) pseudo-inversa, (c) regularização  $\ell_2$  e (d) regularização  $\ell_1$ .

Fonte: Autoria própria

#### 6.2.4 PONTO DESLOCADO DA GRADE MEIO PIXEL NA DIREÇÃO AXIAL

O mesmo experimento foi feito para o refletor deslocado de uma distância de meio pixel ( $84,7 \mu\text{m}$ ) na direção axial, distanciando-se do transdutor. Os resultados das reconstruções são exibidos na Figura 30.

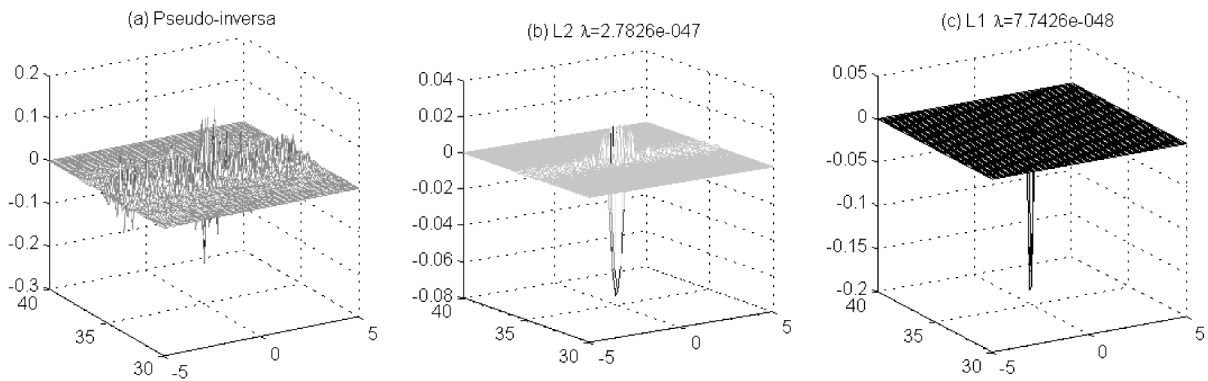


**Figura 30: Reconstrução de um ponto deslocado meio pixel no eixo axial. (a)-(f) em escala logarítmica. (a) DAS, (b) pseudo-inversa, (c) regularização  $\ell_2$ , (d) regularização  $\ell_1$  sub-regularizada, (e) regularização  $\ell_1$  e (f)  $\ell_1$  super-regularizada. (g)-(l) apresentam os mesmos dados exibidos em escala linear.**

**Fonte: Autoria própria**

Os resultados corroboram o que já foi observado em (ZANIN, 2011): na reconstrução com a pseudo-inversa e com regularização  $\ell_2$ , a degradação causada na imagem pelo deslocamento axial do ponto refletor é mais significativa do que a causada pelo deslocamento lateral. No caso da reconstrução com regularização  $\ell_1$ , a degradação é menos significativa, e apenas pixels próximos à posição do refletor apresentam valores distantes de zero.

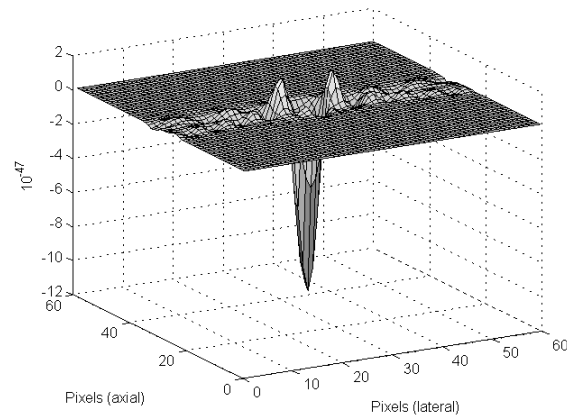
Nesse caso as técnicas IPB apresentaram uma particularidade: o refletor apareceu representado por pixels com intensidades negativas. Isso pode ser observado na Figura 31, que mostra as amplitudes reconstruídas na forma de superfícies.



**Figura 31: Intensidades dos pixels para reconstruções IPB de um ponto deslocado axialmente da grade. (a) Pseudo-inversa, (b) regularização  $\ell_2$  e (c) regularização  $\ell_1$ .**

**Fonte: Autoria própria**

Tomando-se o sinal obtido na simulação da aquisição com o refletor deslocado axialmente e fazendo-se a correlação deste sinal com cada coluna da matriz  $\mathbf{H}$  (que corresponde à resposta individual de cada pixel do modelo), obtêm-se os valores representados no gráfico da Figura 32. Neste gráfico, é possível observar que os valores mais intensos de correlação localizam-se nos pontos em que a imagem reconstruída (Figura 31-c) apresentou maior intensidade de pixels. Também é possível observar que essas correlações mais intensas são negativas, o que explica o fato dos pixels reconstruídos possuírem amplitudes negativas. Isso significa que o sinal resultante da aquisição com o refletor deslocado de meio pixel axialmente é, neste caso, muito semelhante ao sinal gerado por um refletor de intensidade negativa localizado sobre um pixel modelado na grade.

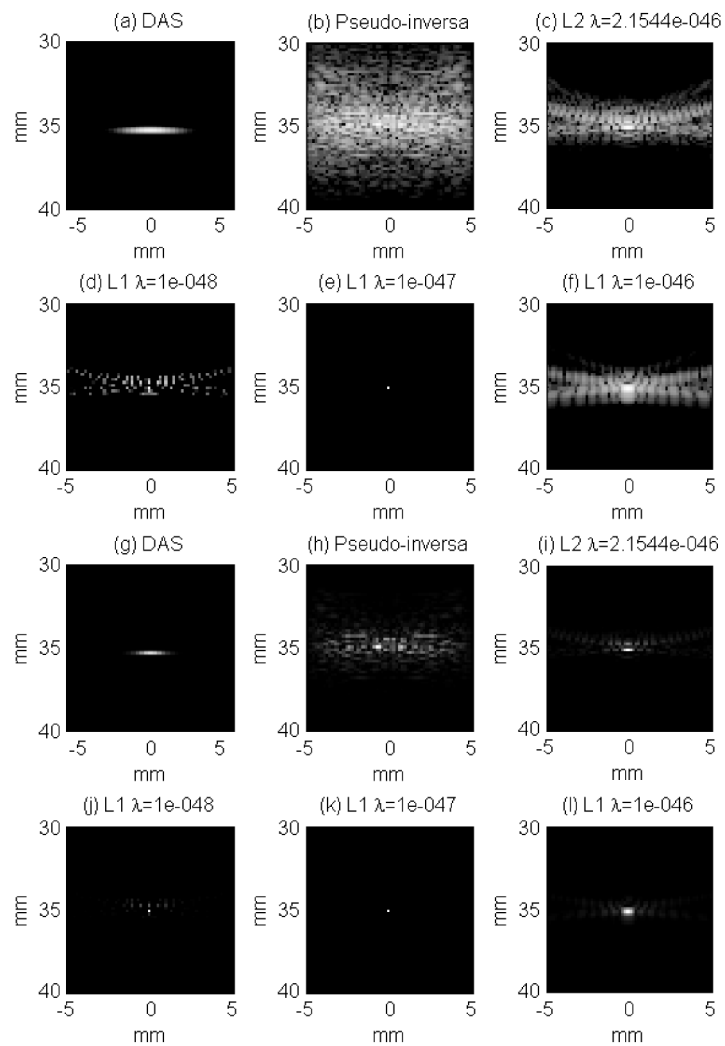


**Figura 32: Valores da correlação entre o sinal obtido na aquisição com ponto deslocado axialmente e cada pixel do modelo.**

**Fonte: Autoria própria**

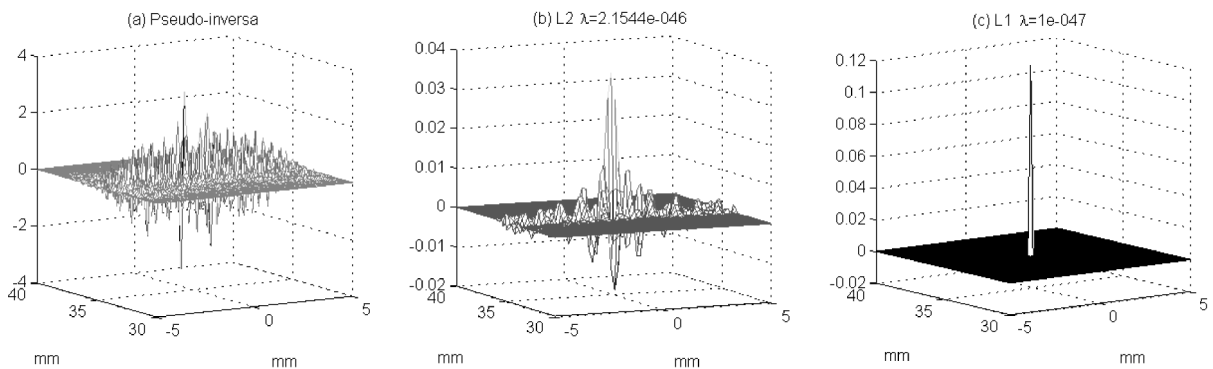
#### 6.2.5 PONTO DESLOCADO DA GRADE 0,2 PIXEL NA DIREÇÃO AXIAL

O ponto refletor foi deslocado axialmente de uma distância igual a 0,2 vezes a distância entre pixels, afastando-se do transdutor. O objetivo foi deixar o ponto refletor mais próximo de um pixel modelado do que no experimento anterior. A Figura 33 mostra os resultados das reconstruções. Na Figura 34 os resultados com os métodos IPB são exibidos na forma de superfície, permitindo a observação do sinal das amplitudes.



**Figura 33: Reconstrução de um ponto deslocado 0,2 pixel no eixo axial. (a)-(f) em escala logarítmica. (a) DAS, (b) pseudo-inversa, (c) regularização  $\ell_2$ , (d) regularização  $\ell_1$  sub-regularizada, (e) regularização  $\ell_1$  e (f) regularização  $\ell_1$  super-regularizada. (g)-(l) apresentam os mesmos dados exibidos em escala linear.**

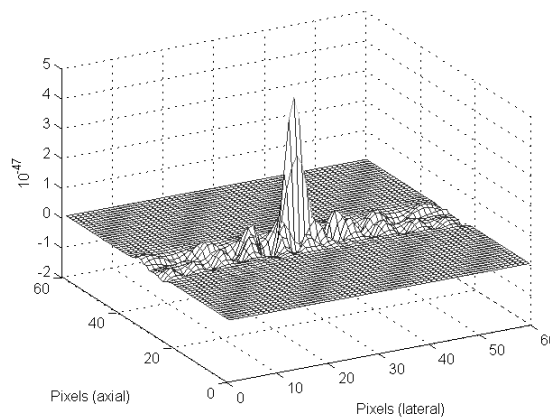
**Fonte: Autoria própria**



**Figura 34: Intensidades dos pixels para reconstruções IPB de um ponto deslocado 0,2 pixel axialmente da grade. (a) Pseudo-inversa, (b) regularização  $l_2$  e (c) regularização  $l_1$ .**

**Fonte: Autoria própria**

Da Figura 34 percebe-se que, nesse caso, o ponto foi representado por amplitudes predominantemente positivas nas reconstruções IPB. Pode-se interpretar este resultado da seguinte forma: como o ponto encontra-se próximo a um pixel modelado, os dados resultantes de sua aquisição são muito semelhantes à resposta esperada de um ponto posicionado naquele pixel. Esta afirmação é reforçada pelo gráfico de correlações da Figura 35.



**Figura 35: Valores da correlação entre o sinal obtido na aquisição com ponto deslocado 0,2 pixel axialmente e cada pixel do modelo.**

**Fonte: Autoria própria**

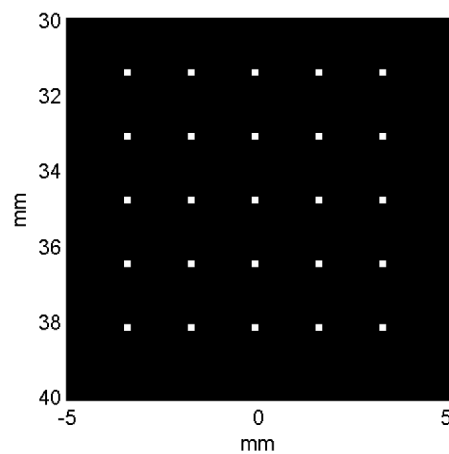
Percebe-se, das reconstruções com o ponto deslocado da grade, que a natureza oscilatória do pulso utilizado causa significativas correlações negativas entre a resposta do refletor e as respostas esperadas dos pixels modelados próximos a ele. Isso resulta, em alguns casos, no



fenômeno da inversão da amplitude do pixel que representa o ponto. Este fenômeno não afeta de forma significativa a visualização nem o desempenho das regularizações testadas, mas pode afetar o desempenho de outros tipos de regularização, conforme será discutido no Capítulo 7.

### 6.3 25 PONTOS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDOS AO LONGO DA ROI

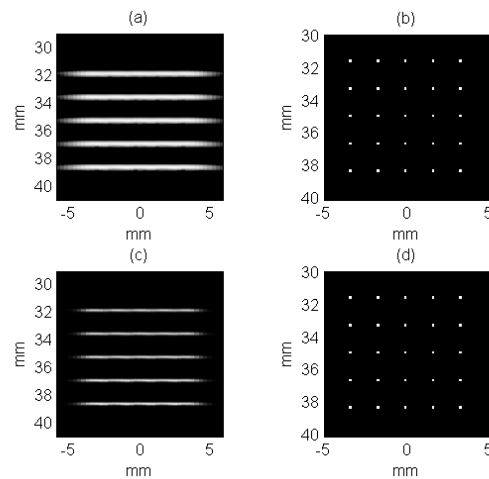
Este phantom consiste de uma grade de  $5 \times 5$  pontos distribuídos ao longo da ROI, conforme o modelo da Figura 36. O objetivo é demonstrar que as características observadas na Seção 6.2 reproduzem-se ao longo da ROI.



**Figura 36: Modelo do phantom de 25 pontos uniformemente distribuídos ao longo da ROI**

**Fonte: Autoria própria**

A Figura 37 mostra o resultado das reconstruções com DAS e pseudo-inversa para o caso em que os refletores estão posicionados sobre pontos modelados da ROI. Observa-se que a capacidade do algoritmo IPB de representar em um único pixel refletores infinitesimais mantém-se ao longo da ROI. Na reconstrução DAS observa-se expalhamento do ponto na imagem, principalmente no eixo axial.

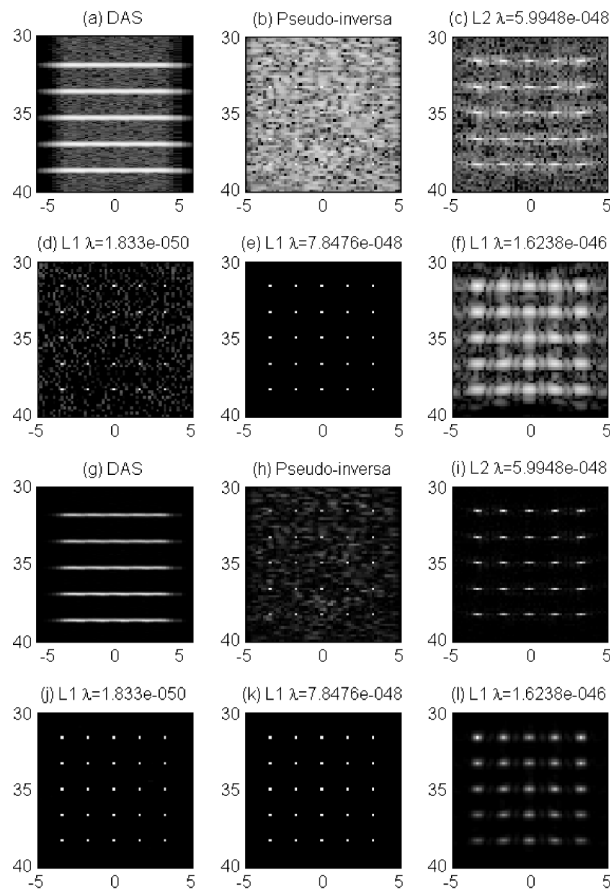


**Figura 37: Resultados das reconstruções com os 25 pontos sobre a grade. (a) DAS em escala logarítmica, (b) Pseudo-inversa em escala logarítmica, (c) DAS em escala linear e (d) pseudo-inversa em escala linear..**

**Fonte: Autoria própria**

### 6.3.1 PONTOS SOBRE A GRADE E AQUISIÇÃO COM RUÍDO USANDO SNR DE 20 dB

A Figura 38 mostra os resultados das reconstruções para o caso em que os pontos refletores estão localizados em posições modeladas e há ruído na aquisição com SNR de 20 dB. Observa-se que a reconstrução  $\ell_2$  foi capaz de resolver os pontos refletores, porém a imagem reconstruída fica poluída por um ruído de fundo. A reconstrução  $\ell_1$  permitiu a representação dos refletores em um único pixel e sem ruídos observáveis, mesmo quando se exibe a imagem em escala logarítmica com ganho de 60 dB (Figura 38-k). Estes resultados mostram que as características observadas na Figura 27 mantêm-se ao longo da ROI.

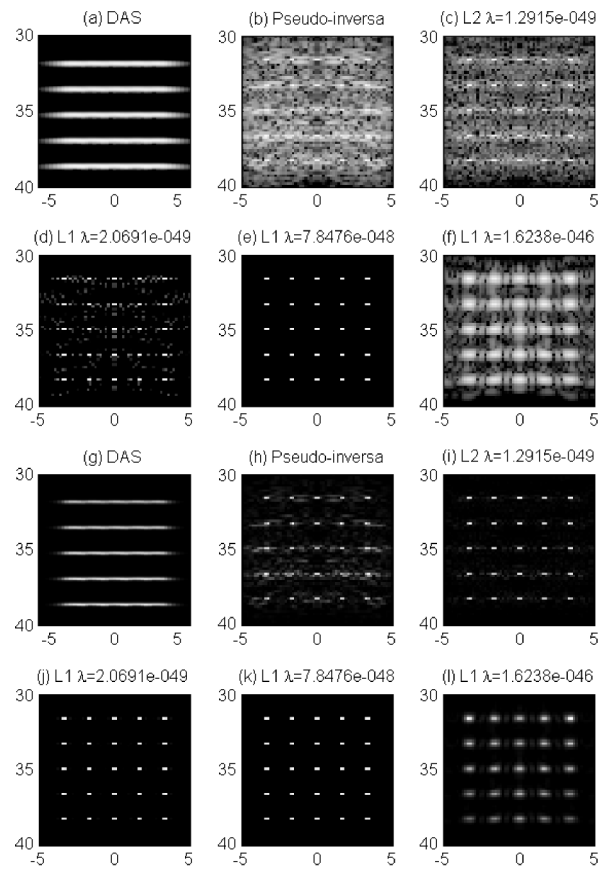


**Figura 38: Reconstrução de 25 pontos ao longo da ROI e aquisição com ruído usando SNR de 20 dB. (a)-(f) em escala logarítmica com ganho de 60dB. (a) DAS, (b) pseudo-inversa, (c) regularização  $\ell_2$ , (d) regularização  $\ell_1$  sub-regularizada, (e) regularização  $\ell_1$  e (f) regularização  $\ell_1$  super-regularizada. (g)-(l) apresentam os mesmos dados exibidos em escala linear.**

**Fonte: Autoria própria**

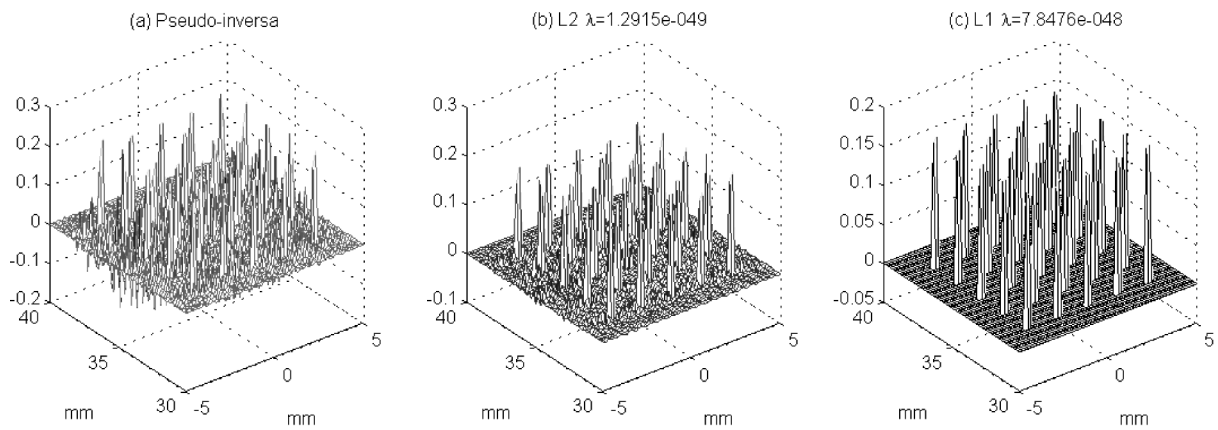
### 6.3.2 PONTOS DESLOCADOS DA GRADE MEIO PIXEL NA DIREÇÃO LATERAL

A Figura 39 mostra os resultados das reconstruções para aquisição sem ruído e com os refletores deslocados em meio pixel na direção lateral. As características observadas na Figura 28 mantêm-se ao longo da ROI. As representações em forma de superfície para os resultados das reconstruções IPB são mostradas na Figura 40, onde se observa que não houve inversão do sinal das reflexividades.



**Figura 39:** Reconstrução de 25 pontos ao longo da ROI, deslocados da grade em meio pixel na direção lateral. (a)-(f) em escala logarítmica com ganho de 60dB. (a) DAS, (b) pseudo-inversa, (c) regularização  $\ell_2$ , (d) regularização  $\ell_1$  sub-regularizada, (e) regularização  $\ell_1$  e (f) regularização  $\ell_1$  super-regularizada. (g)-(l) apresentam os mesmos dados exibidos em escala linear.

Fonte: Autoria própria

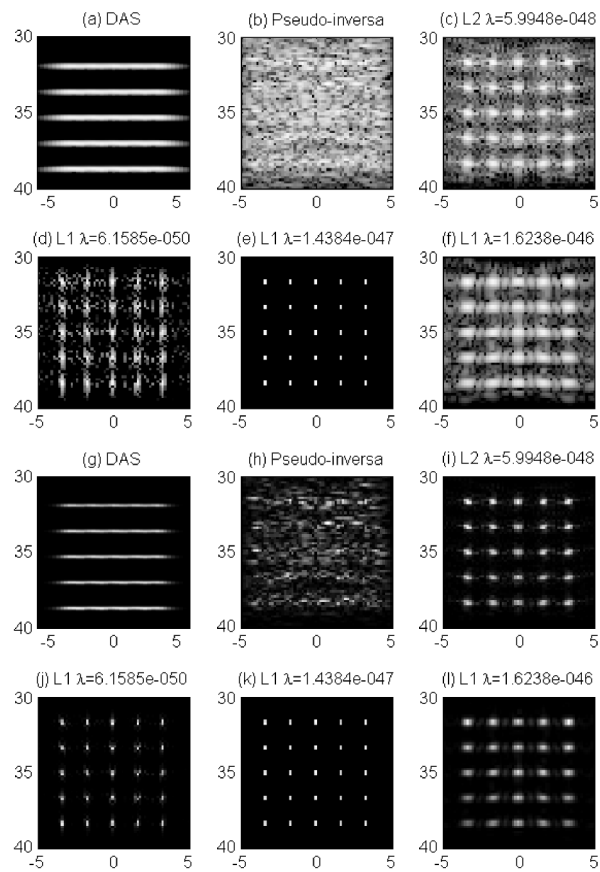


**Figura 40: Intensidades dos pixels para reconstruções IPB dos 25 pontos deslocados da grade em meio pixel na direção lateral. (a) Pseudo-inversa, (b) regularização  $l_2$  e (c) regularização  $l_1$ .**

**Fonte: Autoria própria**

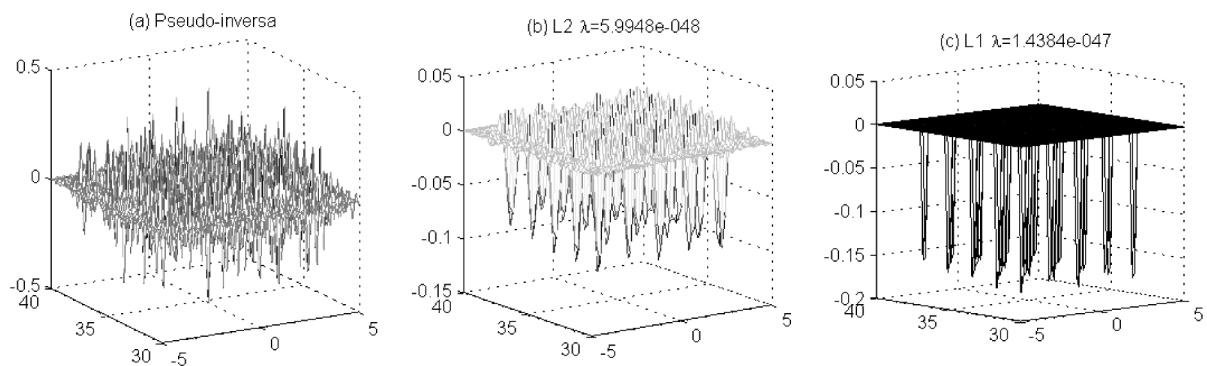
### 6.3.3 PONTOS DESLOCADOS DA GRADE MEIO PIXEL NA DIREÇÃO AXIAL

A Figura 41 mostra os resultados das reconstruções para o caso em que os refletores estão deslocados da grade em meio pixel axialmente. As características observadas para um único ponto no centro da ROI, na Figura 30 mantêm-se ao longo da ROI. Também o fenômeno da inversão dos sinais das reflexividades, já observado na Figura 31, apresenta-se ao longo de toda a ROI utilizada, como mostra a Figura 42.



**Figura 41:** Reconstrução de 25 pontos ao longo da ROI, deslocados da grade em meio pixel na direção axial. (a)-(f) em escala logarítmica com ganho de 60dB. (a) DAS, (b) pseudo-inversa, (c) regularização  $\ell_2$ , (d) regularização  $\ell_1$  sub-regularizada, (e) regularização  $\ell_1$  e (f) regularização  $\ell_1$  super-regularizada. (g)-(l) apresentam os mesmos dados exibidos em escala linear.

Fonte: Autoria própria

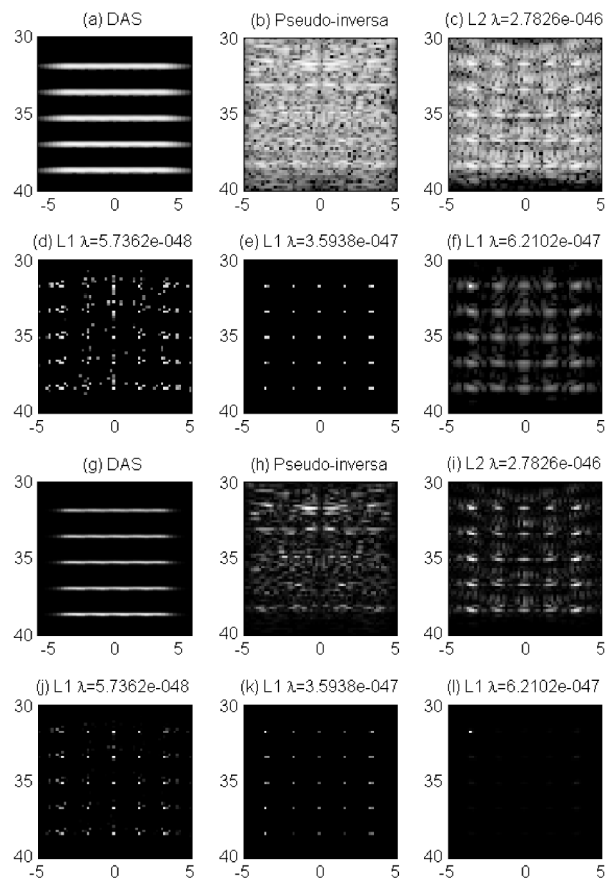


**Figura 42:** Intensidades dos pixels para reconstruções IPB dos 25 pontos deslocados da grade em meio pixel na direção axial. (a) Pseudo-inversa, (b) regularização  $\ell_2$  e (c) regularização  $\ell_1$ .

Fonte: Autoria própria

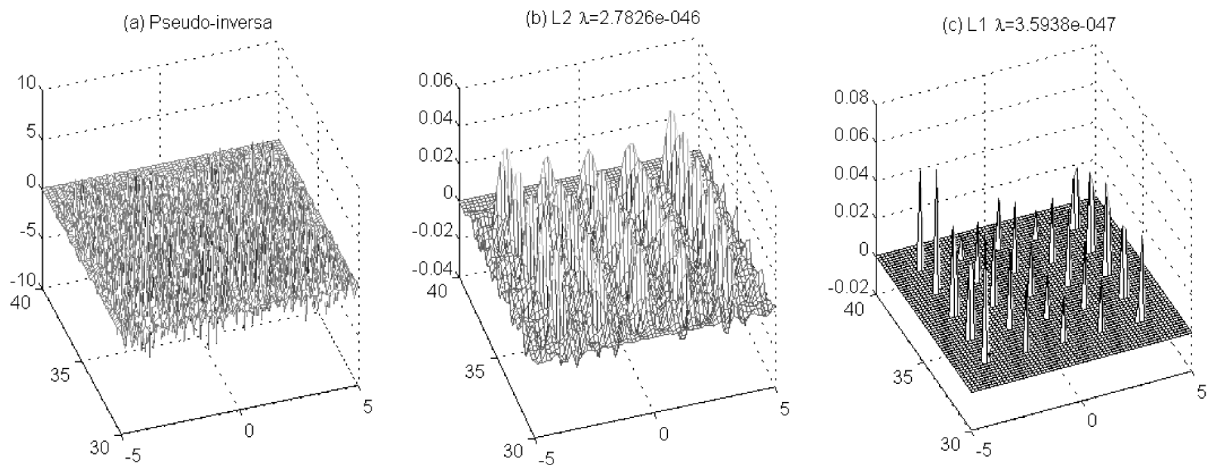
### 6.3.4 PONTOS DESLOCADOS DA GRADE 0,2 PIXEL NA DIREÇÃO AXIAL

Assim como na Seção 6.2.5, foram realizadas a simulação de aquisição e as reconstruções para o caso em que os pontos estão deslocados da grade de uma distância de 0,2 pixel axialmente. Os resultados das reconstruções são mostrados na Figura 43. A Figura 44 mostra os resultados das reconstruções IPB na forma de superfícies, onde se observa que não houve inversão das reflexividades, ou seja, novamente as características observadas para um único ponto mantêm-se ao longo da ROI.



**Figura 43: Reconstrução de 25 pontos ao longo da ROI, deslocados da grade em 0,2 pixel na direção axial. (a)-(f) em escala logarítmica com ganho de 60dB. (a) DAS, (b) pseudo-inversa, (c) regularização  $\ell_2$ , (d) regularização  $\ell_1$  sub-regularizada, (e) regularização  $\ell_1$  e (f) regularização  $\ell_1$  super-regularizada. (g)-(l) apresentam os mesmos dados exibidos em escala linear.**

**Fonte: Autoria própria**



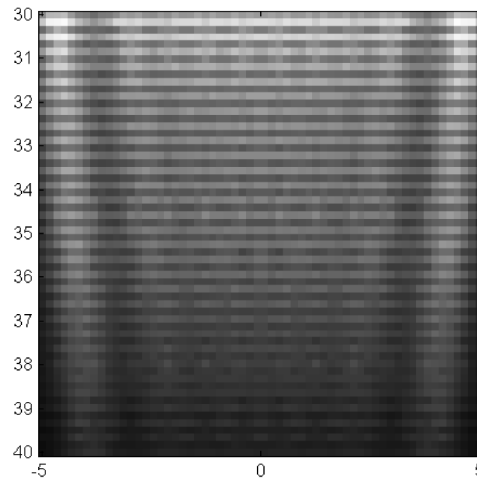
**Figura 44: Intensidades dos pixels para reconstruções IPB dos 25 pontos deslocados da grade em 0,2 pixel na direção axial. (a) Pseudo-inversa, (b) regularização  $\ell_2$  e (c) regularização  $\ell_1$ .**

**Fonte: Autoria própria**

Da Figura 44 percebe-se que a atenuação não é uniforme ao longo dos refletores. Um motivo provável para essa disparidade é a diferença na intensidade com que cada um dos refletores é representado no domínio  $\mathbb{V}$  (domínio dos dados de aquisição). Como o pulso recebido por cada refletor é uma soma dos pulsos emitidos por cada elemento do transdutor, é natural que haja regiões de interferência mais construtiva e regiões de interferência mais destrutiva, de forma que refletores localizados sobre aquelas possuam representação no domínio  $\mathbb{V}$  com mais energia do que os refletores localizados nestas. A atenuação, na reconstrução, de refletores com representação em  $\mathbb{V}$  menos intensa afeta menos o termo  $\|\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}\|_{\ell_2}^2$  do que a atenuação de refletores com representação mais intensa. Logo, aqueles tendem a ser os "escolhidos" para atender à penalidade de regularização  $\|\hat{\mathbf{f}}\|_{\ell_1}$ .

Para ilustrar o exposto acima, a Figura 45 mostra uma medida da intensidade com que cada pixel da grade modelada é representado no domínio  $\mathbb{V}$ . Cada pixel da imagem corresponde à medida  $\|\mathbf{h}_i\|_{\ell_2}^8$ , onde  $\mathbf{h}_i$  é a coluna da matriz  $\mathbf{H}$  que contém a representação daquele pixel no domínio  $\mathbb{V}$ , ou seja, a Função Espalhamento de Ponto do  $i$ -ésimo pixel. Seria mais natural optar pela medida  $\|\mathbf{h}_i\|_{\ell_2}^2$ , porém, as diferenças entre os pixels são muito pequenas e difíceis de serem percebidas através de tal medida.





**Figura 45: Medida da intensidade da representação no domínio  $\mathbb{V}$  de cada pixel da grade modelada. O  $i$ -ésimo pixel corresponde à medida  $\|\mathbf{h}_i\|_{\ell_2}^8$ , onde  $\mathbf{h}_i$  é a coluna da matriz  $\mathbf{H}$ .**

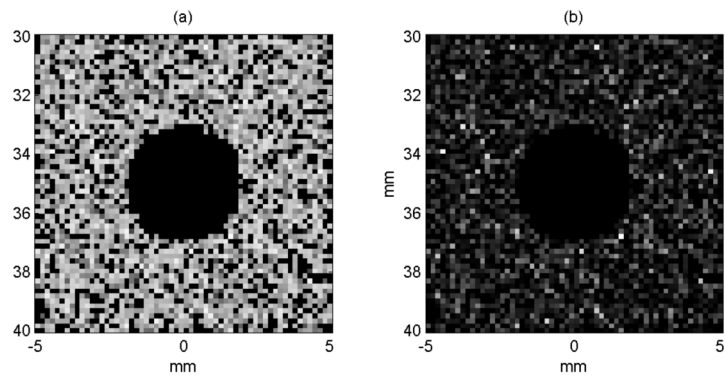
**Fonte: Autoria própria**

Uma possível maneira de contornar este problema e impedir que refletores de mesma intensidade sejam reconstruídos com atenuações distintas é a utilização de uma matriz de covariância que pondere uma das duas penalidades (ou de ambas) de forma a compensar a disparidade da intensidade das representações em  $\mathbb{V}$ . Pode-se reescrever a formulação da Equação 48 incluindo-se as matrizes de covariância  $\mathbf{C}_f$  no domínio  $\mathbb{U}$  e  $\mathbf{C}_\eta$  no domínio  $\mathbb{V}$ , conforme a Equação 84.

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{C}_\eta(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f})\|_{\ell_2}^2 + \lambda \|\mathbf{C}_f\mathbf{f}\|_{\ell_1}. \quad (84)$$

#### 6.4 CISTO ANECÓICO NUM MEIO GAUSSIANO

O phantom computacional utilizado nestes experimentos foi gerado posicionando-se 5000 pontos aleatoriamente dentro da ROI. As reflexividades dos pontos são também aleatórias, seguindo uma distribuição Normal (Gaussiana) com média zero e  $\sigma = 1$ . Então os pontos que se localizavam a uma distância menor ou igual a 2 mm do centro da ROI tiveram suas amplitudes anuladas. Dessa forma criou-se um phantom que reproduz um cisto anecóico de 4 mm de diâmetro, localizado num meio em que as reflexividades seguem uma distribuição Gaussiana. O modelo do phantom está representado na Figura 46.

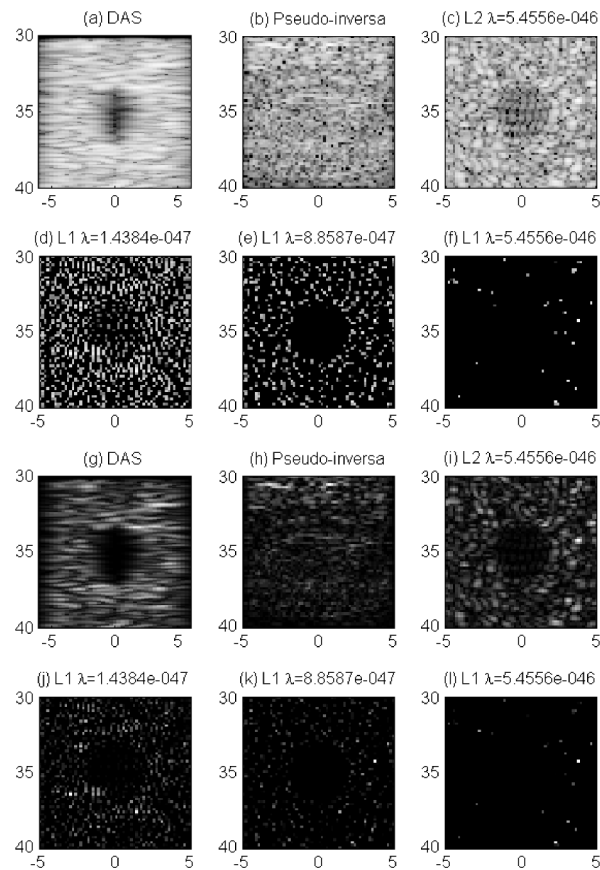


**Figura 46: Modelo do phantom de um cisto anecóico em um meio Gaussiano. Representação em (a) escala logarítmica e (b) escala linear.**

**Fonte: Autoria própria**

#### 6.4.1 AQUISIÇÃO SEM RUÍDO

A Figura 47 mostra as reconstruções para aquisição sem ruído.



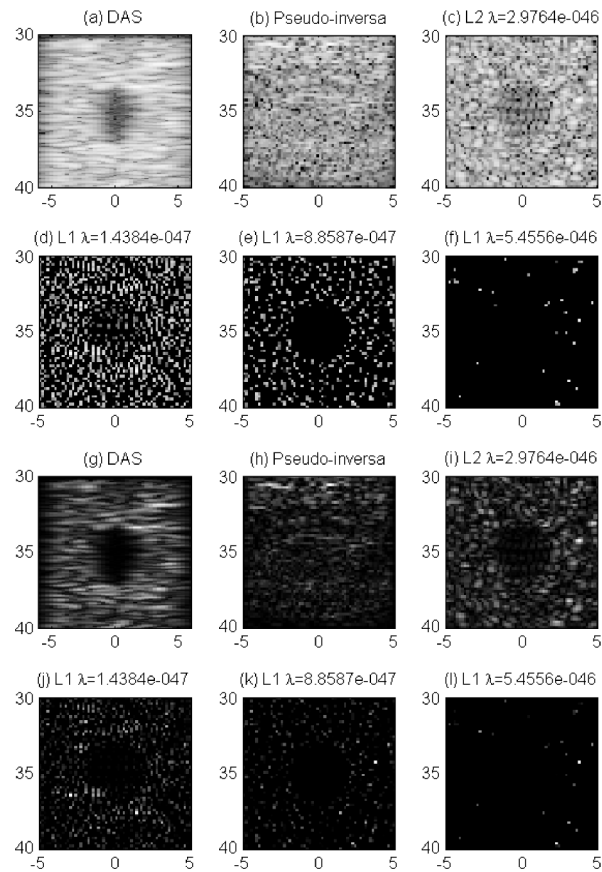
**Figura 47: Reconstrução de um phantom cisto anecóico em meio Gaussiano e aquisição sem ruído. (a)-(f) em escala logarítmica com ganho de 60dB. (a) DAS, (b) pseudo-inversa, (c) regularização  $\ell_2$ , (d) regularização  $\ell_1$  sub-regularizada, (e) regularização  $\ell_1$  e (f) regularização  $\ell_1$  super-regularizada. (g)-(l) apresentam os mesmos dados exibidos em escala linear.**

**Fonte: Autoria própria**

Nas reconstruções com regularização  $\ell_1$  da Figura 47, assim como nos outros casos de phantoms complexos apresentados na sequência, observa-se que a região reflexiva foi reconstruída de forma esparsa, o que é uma consequência da escolha do *prior*. Como o *prior* esparsa não está bem alinhado com a característica esperada na reconstrução dessas regiões, o resultado não está bem alinhado com as características esperadas para a imagem.

#### 6.4.2 AQUISIÇÃO COM RUÍDO USANDO SNR DE 20 dB

A Figura 48 mostra as reconstruções para aquisição com ruído usando SNR de 20 dB. Comparando-se estes resultados com aqueles obtidos com aquisição sem ruído (Figura 47) observa-se que a presença de ruído não afetou de forma perceptível o resultado das reconstruções IPB. Já no caso da reconstrução DAS, o ruído mostra-se poluindo a região anecóica.



**Figura 48: Reconstrução de um phantom cisto anecóico em meio Gaussiano e aquisição com ruído usando SNR de 20 dB. (a)-(f) em escala logarítmica com ganho de 60dB. (a) DAS, (b) pseudo-inversa, (c) regularização  $\ell_2$ , (d) regularização  $\ell_1$  sub-regularizada, (e) regularização  $\ell_1$  e (f) regularização  $\ell_1$  super-regularizada. (g)-(l) apresentam os mesmos dados exibidos em escala linear.**

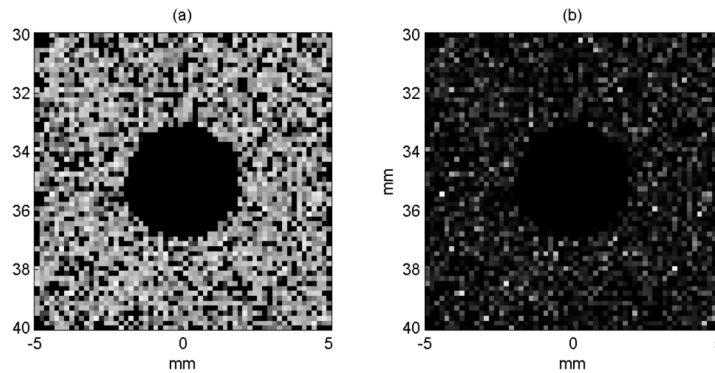
**Fonte: Autoria própria**

## 6.5 CISTO ANECÓICO NUM MEIO LAPLACIANO

O objetivo deste experimento é verificar se a reconstrução com regularização  $\ell_1$  apresenta melhor resultado com um phantom com distribuição Laplaciana do que com distribuição Gaussiana. O primeiro caso corresponde ao problema de estimação Bayesiana da Equação 58 com  $p(\mathbf{f})$  sendo a FDP Laplaciana multivariável, enquanto o segundo caso corresponde à FDP Gaussiana multivariável.

O phantom computacional utilizado nestes experimentos foi gerado posicionando-se 5000 pontos aleatoriamente dentro da ROI. As reflexividades dos pontos são também aleatórias, seguindo uma distribuição Laplaciana com média zero e  $\sigma = 1$ . Então os pontos que se localizavam a uma distância menor ou igual a 2 mm do centro da ROI tiveram suas amplitudes

anuladas. Dessa forma criou-se um phantom que reproduz um cisto anecóico de 4 mm de diâmetro, localizado num meio em que as reflexividades seguem uma distribuição Laplaciana. O modelo do phantom está representado na Figura 49.



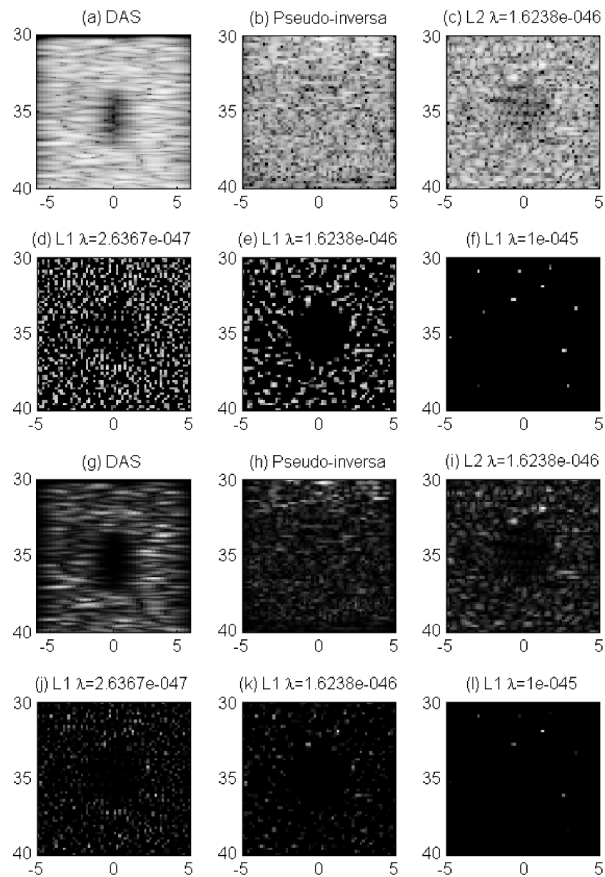
**Figura 49: Modelo do phantom de um cisto anecóico em um meio Laplaciano. Representação em (a) escala logarítmica e (b) escala linear.**

**Fonte: Autoria própria**

Como os refletores foram dispostos em posições aleatórias dentro da ROI, não há restrição que os faça estar sobre pontos modelados da grade. Embora haja uma probabilidade remota da posição de alguns refletores coincidir com a posição de pontos modelados, via de regra eles estão deslocados da grade.

### 6.5.1 AQUISIÇÃO SEM RUÍDO

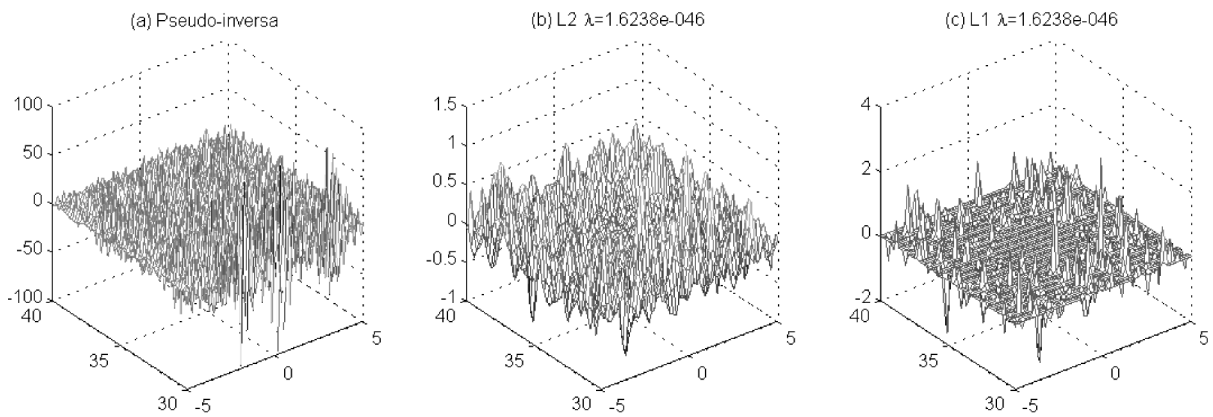
A Figura 50 mostra as reconstruções para aquisição sem ruído. Não são observadas diferenças na qualidade das reconstruções quando comparadas aos resultados exibidos na Figura 47 (distribuição Gaussiana para as reflexividades).



**Figura 50: Reconstrução de um phantom cisto anecóico em meio Laplaciano e aquisição sem ruído. (a)-(f) em escala logarítmica com ganho de 60dB. (a) DAS, (b) pseudo-inversa, (c) regularização  $\ell_2$ , (d) regularização  $\ell_1$  sub-regularizada, (e) regularização  $\ell_1$  e (f) regularização  $\ell_1$  super-regularizada. (g)-(l) apresentam os mesmos dados exibidos em escala linear.**

**Fonte: Autoria própria**

Para efeito de comparação com um experimento na Seção 6.5.3, a Figura 51 mostra uma representação em superfície dos resultados das reconstruções IPB. Este tipo de representação permite observar o sinal da intensidade dos pixels ao longo da imagem. Cerca de 50% do pixels possuem intensidades negativas.

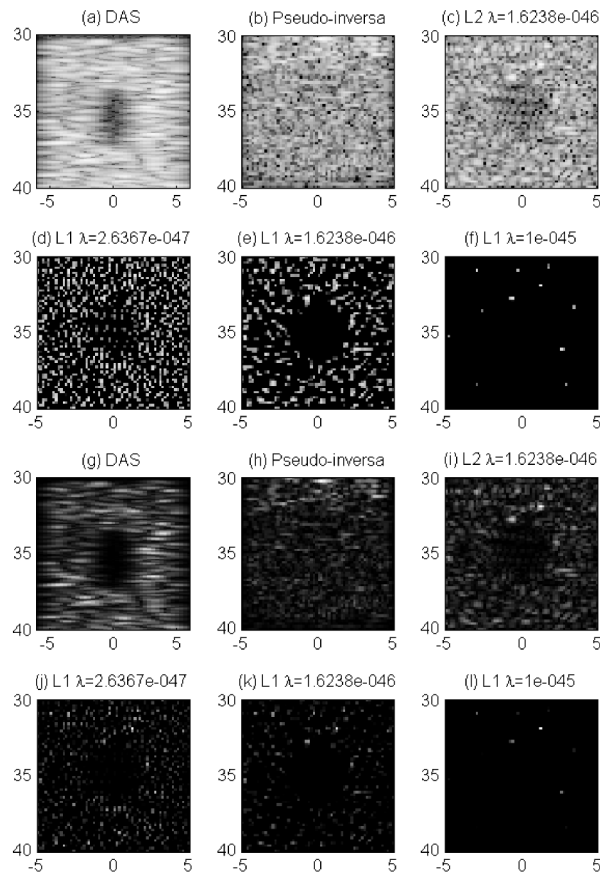


**Figura 51: Intensidades dos pixels para reconstruções IPB do cisto anecóico em meio Laplaciano. (a) Pseudo-inversa, (b) regularização  $\ell_2$  e (c) regularização  $\ell_1$ .**

**Fonte: Autoria própria**

### 6.5.2 AQUISIÇÃO COM RUÍDO USANDO SNR DE 20 dB

A Figura 52 mostra as reconstruções para aquisição com ruído usando SNR de 20 dB. Comparando-se os resultados com os da Figura 48, é possível observar que também na presença de ruído não há diferença na qualidade da reconstrução quando se utiliza uma distribuição Laplaciana ao invés de Gaussiana para as reflexividades.



**Figura 52: Reconstrução de um phantom cisto anecóico em meio Laplaciano e aquisição com ruído usando SNR de 20 dB. (a)-(f) em escala logarítmica com ganho de 60dB. (a) DAS, (b) pseudo-inversa, (c) regularização  $\ell_2$ , (d) regularização  $\ell_1$  sub-regularizada, (e) regularização  $\ell_1$  e (f) regularização  $\ell_1$  super-regularizada. (g)-(l) apresentam os mesmos dados exibidos em escala linear.**

**Fonte: Autoria própria**

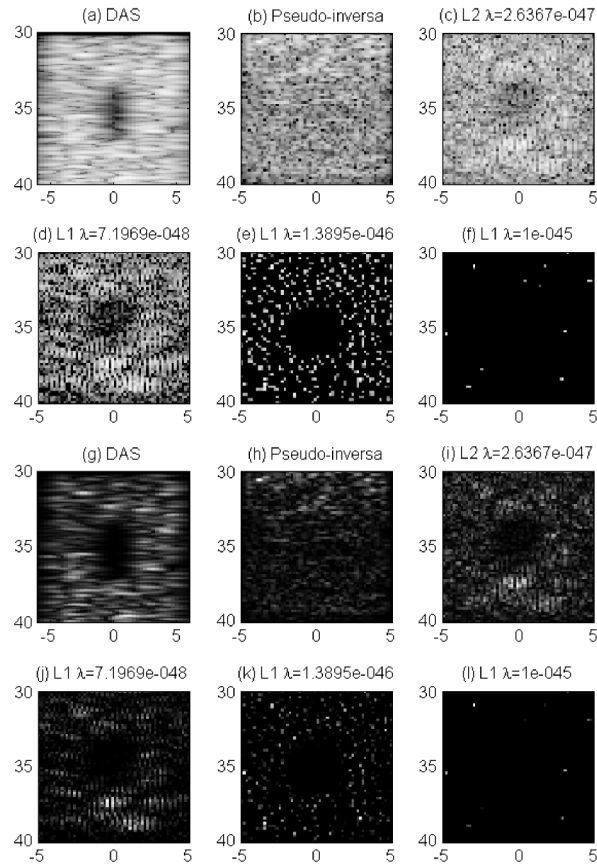
### 6.5.3 PHANTOM MODIFICADO: PONTOS COM REFLEXIVIDADES POSITIVAS

Neste experimento, foi utilizado um phantom cujas reflexividades correspondem ao módulo das reflexividades do phantom utilizado nos experimentos anteriores. Dessa forma, as reflexividades seguem uma distribuição de probabilidade exponencial. Em vista do problema de inversão de amplitude de alguns pontos situados fora da grade, observado nos experimentos com phantoms pontuais, o objetivo aqui é observar se as reflexividades reconstruídas permanecem ou não predominantemente positivas. A possibilidade de reconstruir imagens com poucas ou nenhuma variação de sinal pode viabilizar o uso de *priors* no domínio das diferenças finitas, que priorizam a homogeneidade ao longo de regiões do tecido (BOVIK, 2000).

A Figura 53 mostra os resultados das reconstruções para o phantom com reflexividades



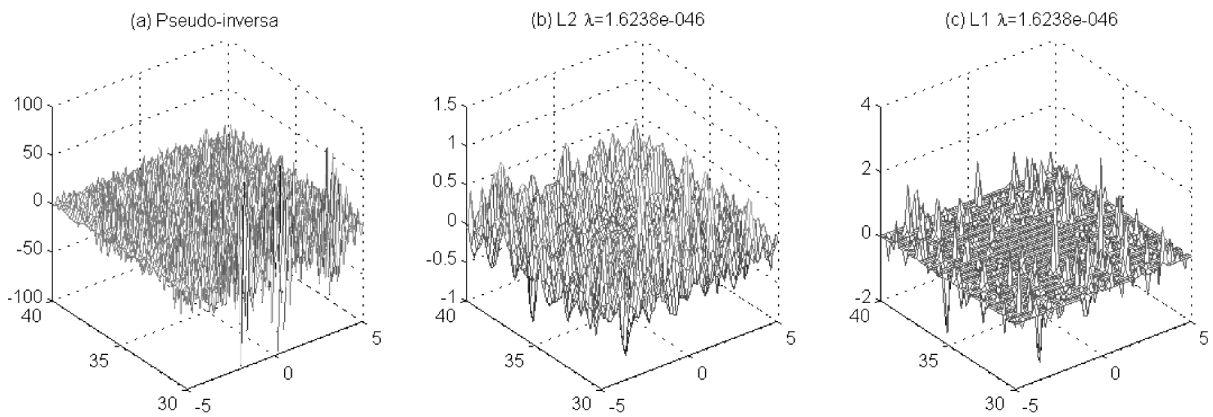
estritamente positivas. Qualitativamente não há diferenças quando comparados aos resultados exibidos na Figura 50.



**Figura 53: Reconstrução de um phantom cisto anecóico em meio exponencial e aquisição sem ruído. (a)-(f) em escala logarítmica com ganho de 60dB. (a) DAS, (b) pseudo-inversa, (c) regularização  $\ell_2$ , (d) regularização  $\ell_1$  sub-regularizada, (e) regularização  $\ell_1$  e (f) regularização  $\ell_1$  super-regularizada. (g)-(l) apresentam os mesmos dados exibidos em escala linear.**

**Fonte: Autoria própria**

Com relação ao sinal das intensidades dos pixels reconstruídos, também se observou uma quantidade de pixels de amplitude negativa próxima de 50%. Ou seja, mesmo que todos os refletores possuam reflexividade positiva, o mal posicionamento provoca inversão de grande parte das reflexividades reconstruídas, o que a princípio inviabiliza o uso de um prior no domínio das diferenças finitas. A representação dos pixels em superfície, onde os sinais das amplitudes podem ser observados, encontra-se na Figura 54.

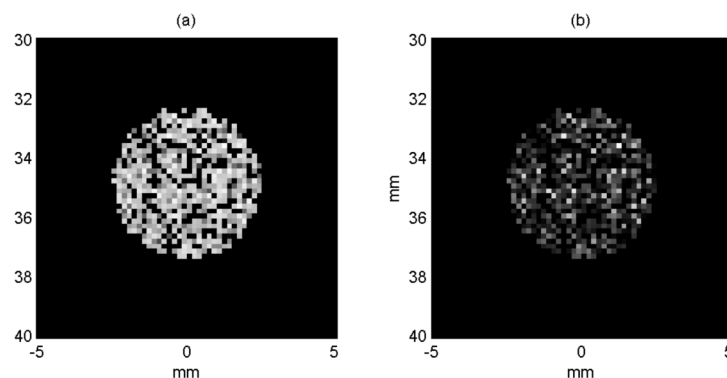


**Figura 54:** Intensidades dos pixels para reconstruções IPB do cisto anecóico em meio exponencial. (a) Pseudo-inversa, (b) regularização  $\ell_2$  e (c) regularização  $\ell_1$ .

Fonte: Autoria própria

## 6.6 MASSA NUM MEIO ANECÓICO

O phantom computacional utilizado nos experimentos a seguir foi gerado posicionando-se 5000 pontos aleatoriamente dentro da ROI. As reflexividades dos pontos são também aleatórias, seguindo uma distribuição normal com média zero e  $\sigma = 1$ . Então os pontos que se localizavam a uma distância maior ou igual a 2,5 mm do centro da ROI tiveram suas amplitudes anuladas. Dessa forma criou-se um phantom que reproduz uma massa de 5 mm de diâmetro num meio anecóico. O modelo do phantom está representado na Figura 55.



**Figura 55:** Modelo do phantom de massa em meio anecóico. Representação em (a) escala logarítmica e (b) escala linear.

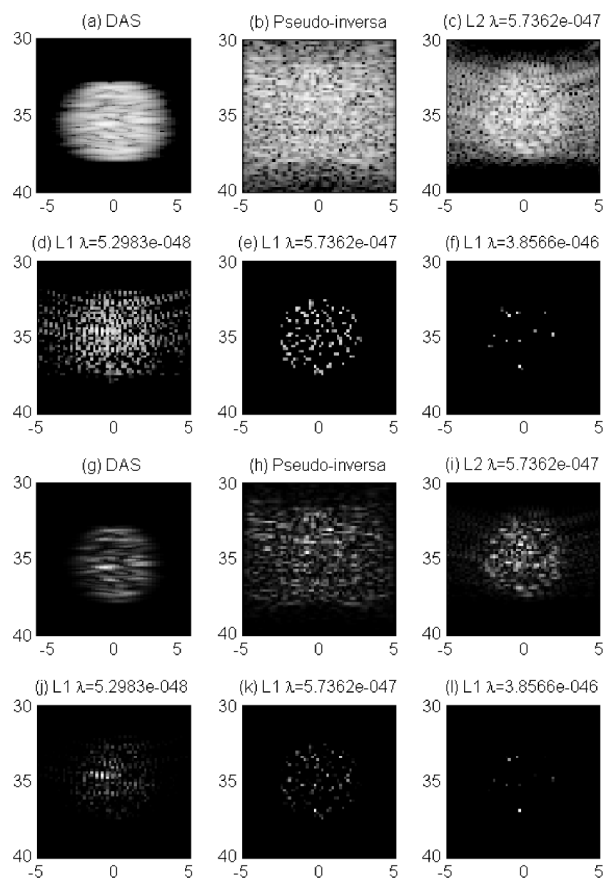
Fonte: Autoria própria

Como os refletores foram dispostos em posições aleatórias dentro da ROI, não há res-

trição que os faça estar sobre pontos modelados da grade. Embora haja uma probabilidade remota da posição de alguns refletores coincidir com a posição de pontos modelados, via de regra eles estão deslocados da grade.

### 6.6.1 AQUISIÇÃO SEM RUÍDO

A Figura 56 mostra as reconstruções para aquisição sem ruído. A capacidade da reconstrução  $\ell_1$  em representar regiões anecóicas, já observada nas Seções 6.4 e 6.5, mantém-se no caso de uma massa reflexiva em meio anecócio.

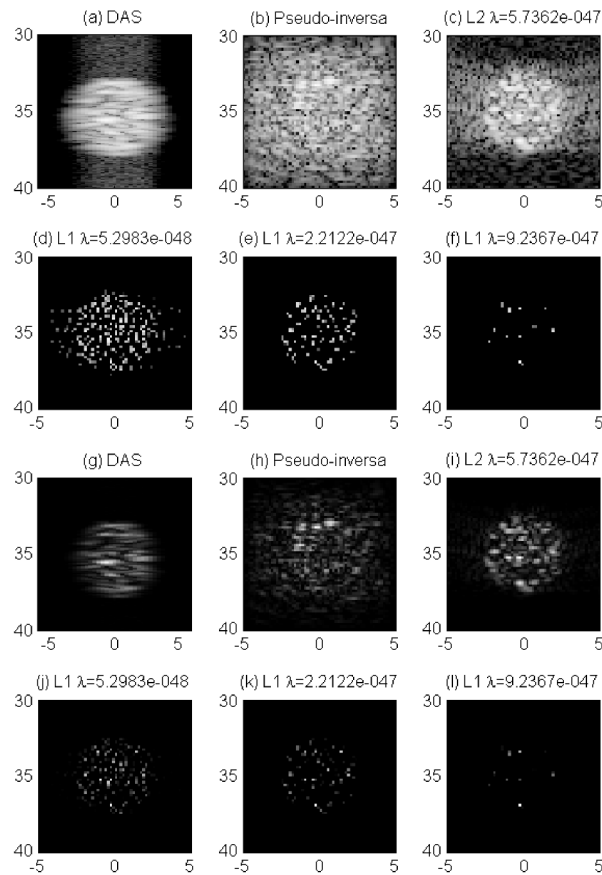


**Figura 56: Reconstrução de um phantom massa em meio anecóico e aquisição sem ruído. (a)-(f) em escala logarítmica com ganho de 60dB. (a) DAS, (b) pseudo-inversa, (c) regularização  $\ell_2$ , (d) regularização  $\ell_1$  sub-regularizada, (e) regularização  $\ell_1$  e (f) regularização  $\ell_1$  super-regularizada. (g)-(l) apresentam os mesmos dados exibidos em escala linear.**

**Fonte: Autoria própria**

### 6.6.2 AQUISIÇÃO COM RUÍDO USANDO SNR DE 20 dB

A Figura 57 mostra as reconstruções para aquisição com ruído usando SNR de 20 dB, onde se observa novamente a robustez ao ruído das reconstruções  $\ell_2$  e  $\ell_1$ .



**Figura 57: Reconstrução de um phantom massa em meio anecóico e aquisição com ruído. (a)-(f) em escala logarítmica com ganho de 60dB. (a) DAS, (b) pseudo-inversa, (c) regularização  $\ell_2$ , (d) regularização  $\ell_1$  sub-regularizada, (e) regularização  $\ell_1$  e (f) regularização  $\ell_1$  super-regularizada. (g)-(l) apresentam os mesmos dados exibidos em escala linear.**

**Fonte: Autoria própria**

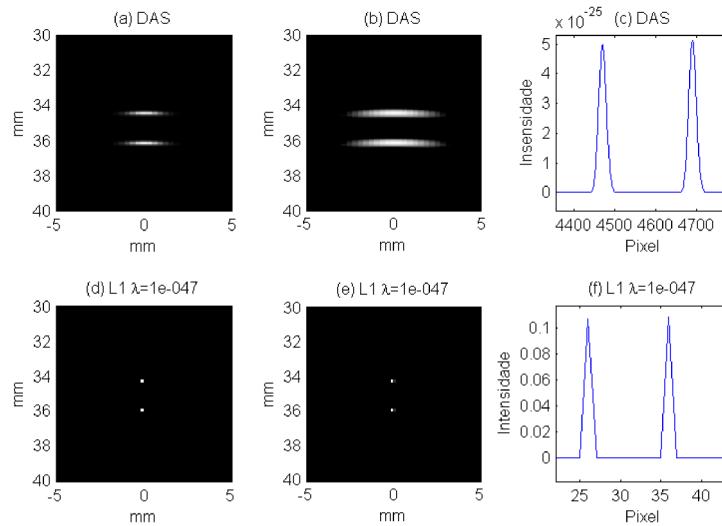
### 6.7 LIMITAÇÕES DE RESOLUÇÃO

Os experimentos a seguir têm como objetivo demonstrar que, diferente dos algoritmos DAS, a superposição de sinais oriundos de diferentes refletores não impede que estes refletores sejam resolvidos independentemente através da técnica proposta. Dois pontos refletores são dispostos na ROI a uma distância equivalente a 10 pixels. Os pontos são deslocados da grade de uma distância equivalente a meio pixel, tanto axialmente quanto lateralmente, o que se

considera ser o pior caso de deslocamento da grade. O tamanho da ROI é alterado em cada experimento, de forma que a distância equivalente a 10 pixels é alterada na mesma proporção. Os experimentos são feitos com os pontos distanciados primeiro axialmente e depois lateralmente, de forma a observar os efeitos da superposição nas resoluções axial e lateral. As aquisições foram feitas sem ruído.

### 6.7.1 REFLETORES DISTANCIADOS AXIALMENTE

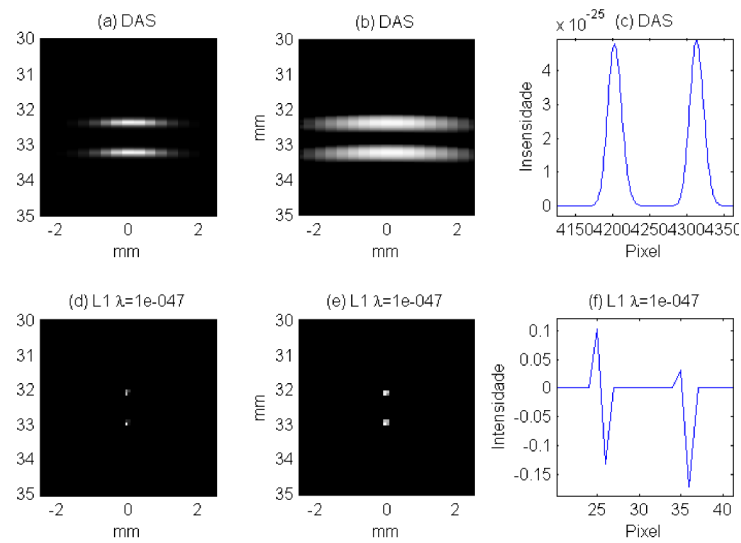
Com a ROI medindo  $10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ , a distância de 10 pixels equivale a 1,6949 mm. Os resultados dos experimentos com estas configurações são exibidos na Figura 58.



**Figura 58: Reconstrução de um phantom com dois refletores distanciados 1,6949 mm axialmente. (a) DAS em escala linear, (b) DAS em escala logarítmica, (c) intensidades da coluna central da imagem reconstruída via DAS, (d) regularização  $\ell_1$  em escala linear, (e) regularização  $\ell_1$  em escala logarítmica e (f) intensidades da coluna central da imagem reconstruída via regularização  $\ell_1$ .**

**Fonte: Autoria própria**

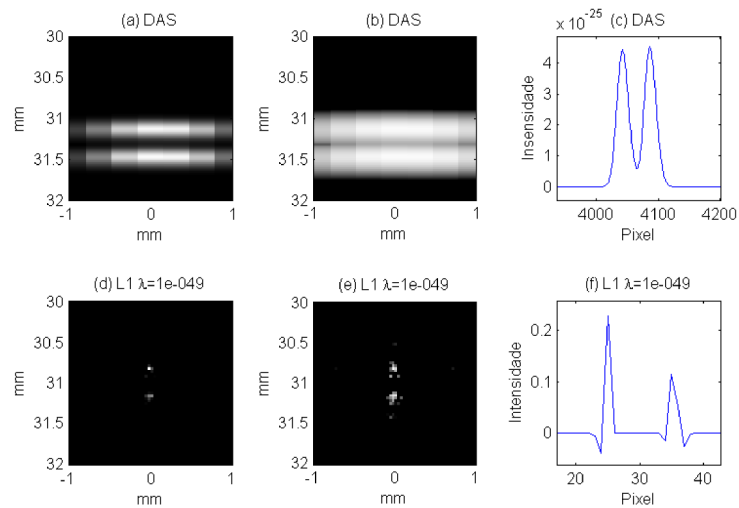
Com a ROI medindo  $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ , a distância de 10 pixels equivale a 0,8475 mm. Os resultados dos experimentos com estas configurações são exibidos na Figura 59.



**Figura 59: Reconstrução de um phantom com dois refletores distanciados 0,8475 mm axialmente. (a) DAS em escala linear, (b) DAS em escala logarítmica, (c) intensidades da coluna central da imagem reconstruída via DAS, (d) regularização  $\ell_1$  em escala linear, (e) regularização  $\ell_1$  em escala logarítmica e (f) intensidades da coluna central da imagem reconstruída via regularização  $\ell_1$ .**

**Fonte: Autoria própria**

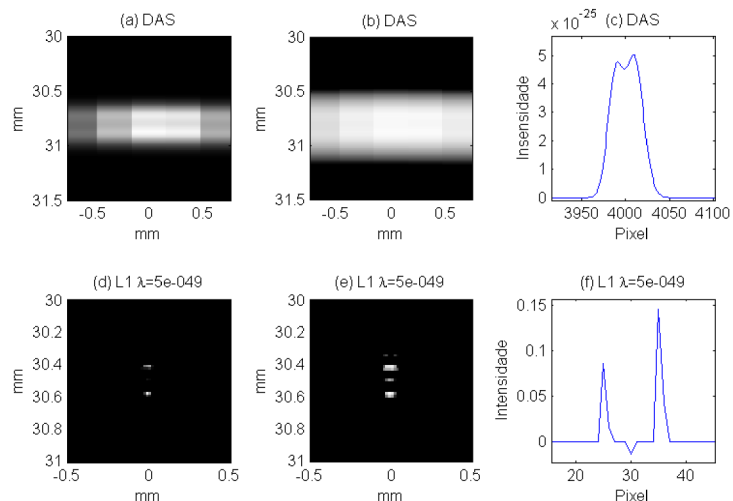
Com a ROI medindo  $2 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$ , a distância de 10 pixels equivale a 0,339 mm. Os resultados dos experimentos com estas configurações são exibidos na Figura 60.



**Figura 60: Reconstrução de um phantom com dois refletores distanciados 0,339 mm axialmente. (a) DAS em escala linear, (b) DAS em escala logarítmica, (c) intensidades da coluna central da imagem reconstruída via DAS, (d) regularização  $\ell_1$  em escala linear, (e) regularização  $\ell_1$  em escala logarítmica e (f) intensidades da coluna central da imagem reconstruída via regularização  $\ell_1$ .**

Fonte: Autoria própria

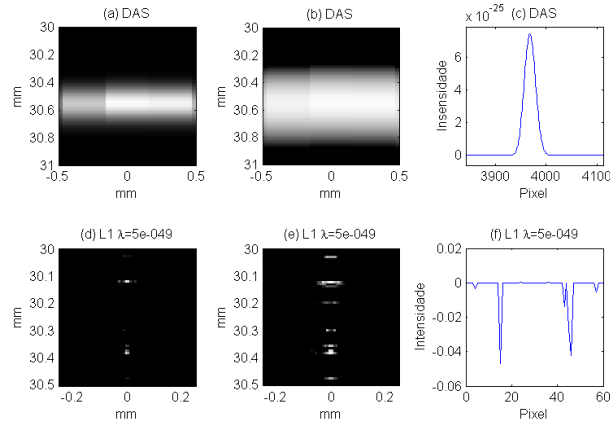
Com a ROI medindo  $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ , a distância de 10 pixels equivale a 0,1695 mm. Os resultados dos experimentos com estas configurações são exibidos na Figura 61.



**Figura 61: Reconstrução de um phantom com dois refletores distanciados 0,1695 mm axialmente. (a) DAS em escala linear, (b) DAS em escala logarítmica, (c) intensidades da coluna central da imagem reconstruída via DAS, (d) regularização  $\ell_1$  em escala linear, (e) regularização  $\ell_1$  em escala logarítmica e (f) intensidades da coluna central da imagem reconstruída via regularização  $\ell_1$ .**

Fonte: Autoria própria

Com a ROI medindo  $0,5 \text{ mm} \times 0,5 \text{ mm}$ , a distância de 10 pixels equivale a  $0,0847 \text{ mm}$ . Os resultados dos experimentos com estas configurações são exibidos na Figura 62.



**Figura 62: Reconstrução de um phantom com dois refletores distanciados  $0,0847 \text{ mm}$  axialmente. (a) DAS em escala linear, (b) DAS em escala logarítmica, (c) intensidades da coluna central da imagem reconstruída via DAS, (d) regularização  $\ell_1$  em escala linear, (e) regularização  $\ell_1$  em escala logarítmica e (f) intensidades da coluna central da imagem reconstruída via regularização  $\ell_1$ .**

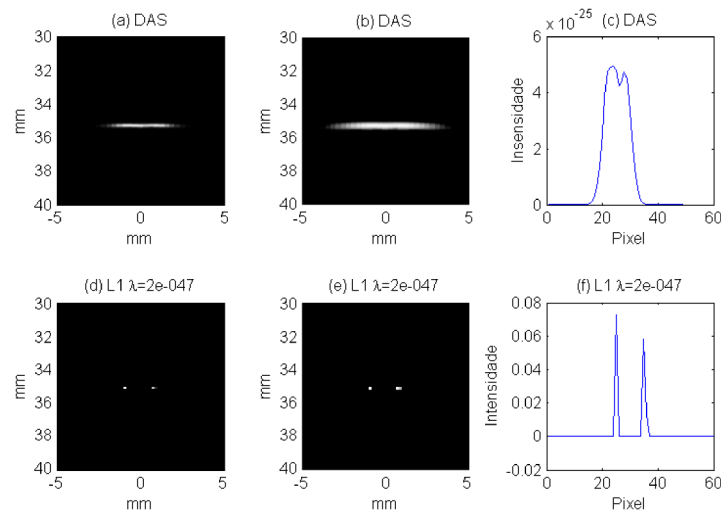
Fonte: Autoria própria

Nos casos abordados e representados nas Figuras 58 a 62, foi possível a resolução independente dos dois pontos através da reconstrução com regularização  $\ell_1$ , mesmo quando os ecos estão sobrepostos. Para a reconstrução DAS, a sobreposição dos ecos implica em sobreposição das representações na imagem, já que a imagem exibida é uma representação em tons de cinza do sinal demodulado.

### 6.7.2 REFLETORES DISTANCIADOS LATERALMENTE

Com a ROI medindo  $10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ , a distância de 10 pixels equivale a  $1,6949 \text{ mm}$ . Os resultados dos experimentos com estas configurações são exibidos na Figura 63.

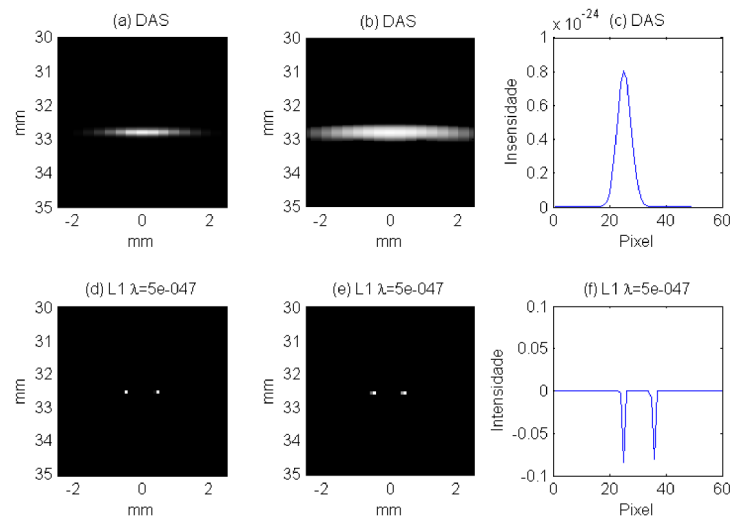




**Figura 63: Reconstrução de um phantom com dois refletores distanciados 1,6949 mm axialmente. (a) DAS em escala linear, (b) DAS em escala logarítmica, (c) intensidades da coluna central da imagem reconstruída via DAS, (d) regularização  $\ell_1$  em escala linear, (e) regularização  $\ell_1$  em escala logarítmica e (f) intensidades da coluna central da imagem reconstruída via regularização  $\ell_1$ .**

Fonte: Autoria própria

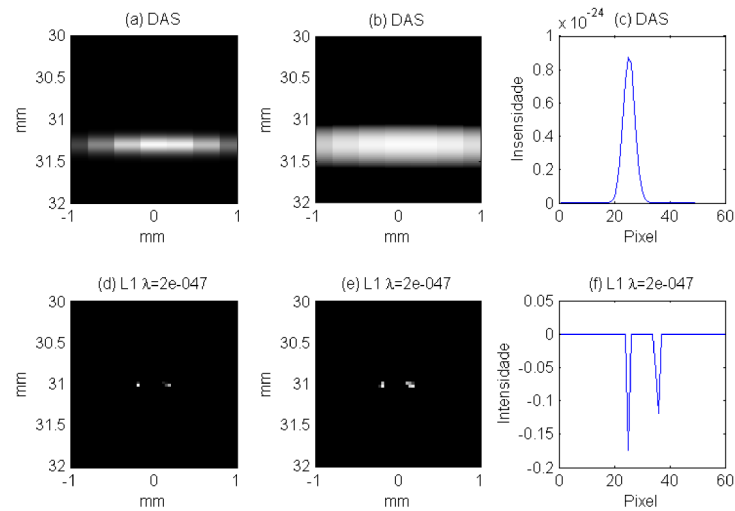
Com a ROI medindo  $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ , a distância de 10 pixels equivale a 0,8475 mm. Os resultados dos experimentos com estas configurações são exibidos na Figura 64.



**Figura 64: Reconstrução de um phantom com dois refletores distanciados 0,8475 mm axialmente. (a) DAS em escala linear, (b) DAS em escala logarítmica, (c) intensidades da coluna central da imagem reconstruída via DAS, (d) regularização  $\ell_1$  em escala linear, (e) regularização  $\ell_1$  em escala logarítmica e (f) intensidades da coluna central da imagem reconstruída via regularização  $\ell_1$ .**

Fonte: Autoria própria

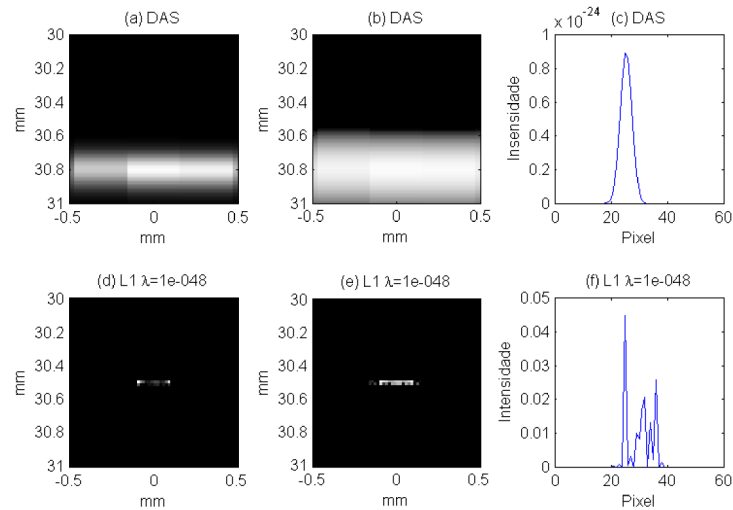
Com a ROI medindo  $2 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$ , a distância de 10 pixels equivale a  $0,339 \text{ mm}$ . Os resultados dos experimentos com estas configurações são exibidos na Figura 65.



**Figura 65: Reconstrução de um phantom com dois refletores distanciados  $0,339 \text{ mm}$  axialmente. (a) DAS em escala linear, (b) DAS em escala logarítmica, (c) intensidades da coluna central da imagem reconstruída via DAS, (d) regularização  $\ell_1$  em escala linear, (e) regularização  $\ell_1$  em escala logarítmica e (f) intensidades da coluna central da imagem reconstruída via regularização  $\ell_1$ .**

**Fonte: Autoria própria**

Com a ROI medindo  $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ , a distância de 10 pixels equivale a  $0,1695 \text{ mm}$ . Os resultados dos experimentos com estas configurações são exibidos na Figura 66.



**Figura 66: Reconstrução de um phantom com dois refletores distanciados 0,1695 mm axialmente. (a) DAS em escala linear, (b) DAS em escala logarítmica, (c) intensidades da coluna central da imagem reconstruída via DAS, (d) regularização  $\ell_1$  em escala linear, (e) regularização  $\ell_1$  em escala logarítmica e (f) intensidades da coluna central da imagem reconstruída via regularização  $\ell_1$ .**

**Fonte: Autoria própria**

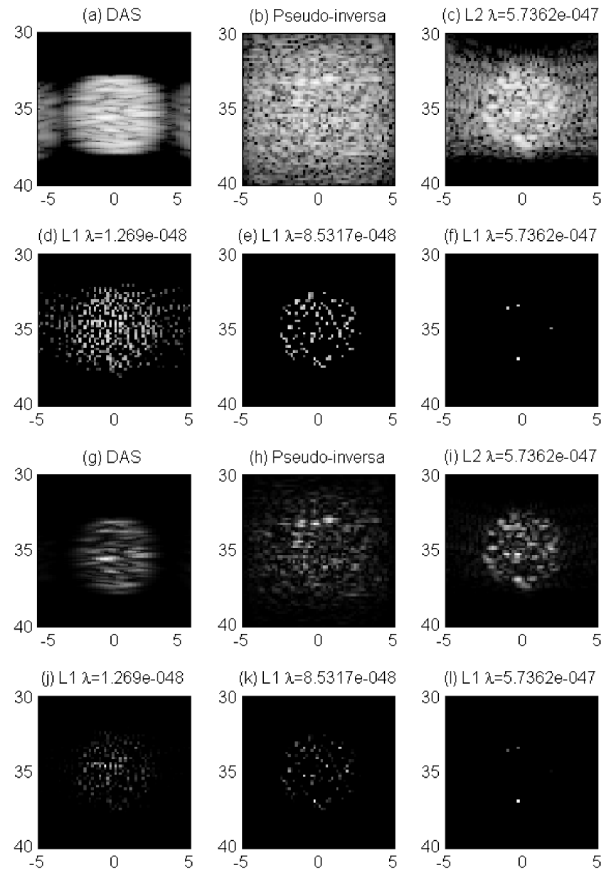
Na Seção 2.5.2 foi exposto que o fato da seção transversal do pulso de ultrassom não ser infinitesimal resulta em recepção de ecos de objetos que não estão sobre a linha de interesse. Como consequência, o eco de um ponto refletor espalha-se em várias linhas vizinhas, constituindo uma limitação de resolução lateral. Nos resultados exibidos nas Figuras 63 a 66 esta característica impediu a resolução independente dos pontos refletores através do algoritmo DAS. Já na reconstrução  $\ell_1$  esta não se mostrou uma limitação intrínseca: a reconstrução não foi bem sucedida apenas no caso em que os refletores foram distanciados 0,1695 mm axialmente, mostrado na Figura 66.

## 6.8 SENSIBILIDADE À SUBAMOSTRAGEM

Foram repetidos os experimentos com o cisto do tipo massa em meio anecóico utilizado na Seção 6.6, mas com apenas metade dos elementos do transdutor desativados, intercalando-se um elemento ativado com um desativado. A forma de se implementar esse efeito no programa Field II foi configurando o vetor de apodização para zero nos elementos ímpares. Não foi alterada a taxa de amostragem da aquisição.

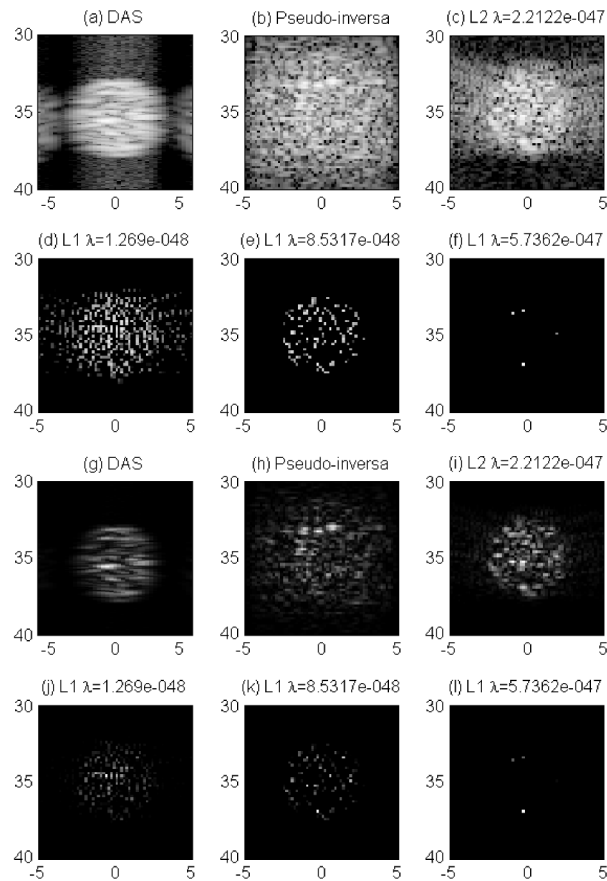
As Figuras 67 e 68 mostram, respectivamente, os resultados das reconstruções para aquisição feita sem ruído e com ruído usando SNR de 20 dB. Observa-se nas reconstruções com

o algoritmo DAS a presença de artefatos consequentes da menor capacidade de focalização e do distanciamento não ideal entre os elementos ativos do transdutor (SMITH; WEBB, 2010). As reconstruções com regularização  $\ell_1$  mostram resultados ligeiramente mais esparsos do que aqueles observados nas Figuras 56 e 57, onde não foi feita subamostragem dos elementos do transdutor. Esta esparsidade é consequência da menor quantidade de aos quais a reconstrução deve se adequar, de forma que a escassez de informação é preenchida pelo *prior*.



**Figura 67:** Reconstrução de um phantom massa em meio anecóico e aquisição sub-amostrada sem ruído. (a) DAS, (b) pseudo-inversa, (c) regularização  $\ell_2$ , (d) regularização  $\ell_1$  sub-regularizada, (e) regularização  $\ell_1$  e (f) regularização  $\ell_1$  super-regularizada. (g)-(l) apresentam os mesmos dados exibidos em escala linear.

Fonte: Autoria própria



**Figura 68: Reconstrução de um phantom massa em meio anecóico e aquisição sub-amostrada com ruído usando SNR de 20 dB. (a) DAS, (b) pseudo-inversa, (c) regularização  $\ell_2$ , (d) regularização  $\ell_1$  sub-regularizada, (e) regularização  $\ell_1$  e (f) regularização  $\ell_1$  super-regularizada. (g)-(l) apresentam os mesmos dados exibidos em escala linear.**

**Fonte: Autoria própria**

## 6.9 COMPARAÇÃO DO EFEITO DO RUÍDO COM O EFEITO DA PRESENÇA DE REFLETORES NÃO MODELADOS

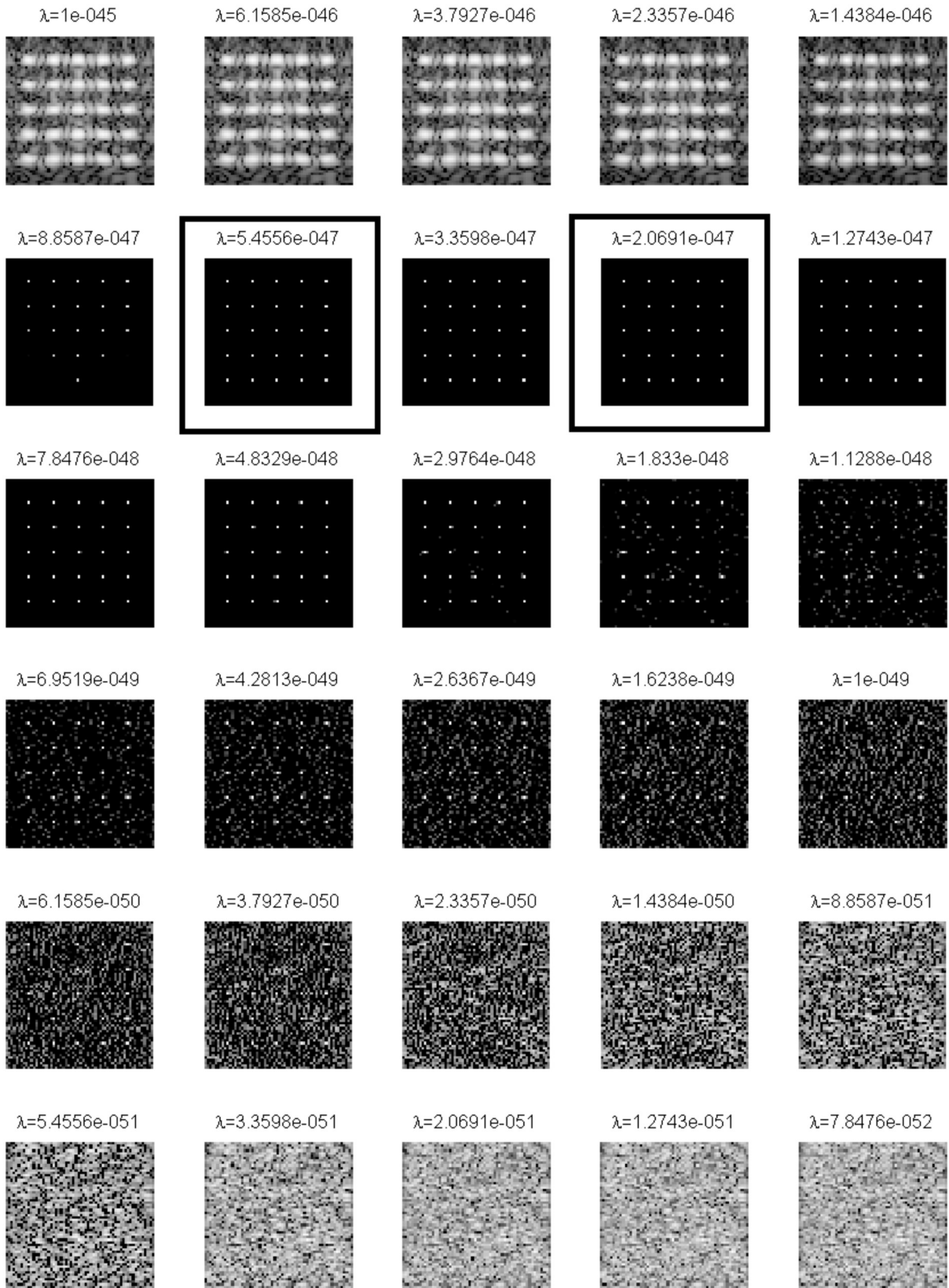
Duas fontes de erro no processo de aquisição são consideradas: o ruído na aquisição e o erro consequente o mau posicionamento dos pontos refletores. Nos experimentos a seguir, os efeitos destes dois tipos de erro são comparados. O phantom computacional utilizado é o conjunto de 25 pontos refletores utilizado na Seção 6.3 e representado na Figura 36. Para observar os efeitos do ruído, a aquisição foi simulada com ruído usando SNR de 5 dB, com todos os refletores sobre a grade. Para observar os efeitos do mau posicionamento dos refletores, estes foram deslocados de uma distância de meio pixel nos dois eixos.

Foram realizadas as reconstruções para 30 valores de  $\lambda$  espaçados logaritmicamente.

Os resultados das 30 reconstruções são exibidos e também as curvas L em escala linear e em escala logarítmica. Nas curvas L são identificados dois pontos: o ponto de menor distância da origem e o ponto correspondente à reconstrução que foi visualmente classificada como a ideal. O eixo horizontal das curvas L, referente à penalidade do erro, está ponderado pelo escalar  $K = \sqrt{N/\text{Tr}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})}$ , onde  $\text{Tr}(\cdot)$  denota o traço da matriz e  $N$  é o número de linhas de  $\mathbf{H}$ .

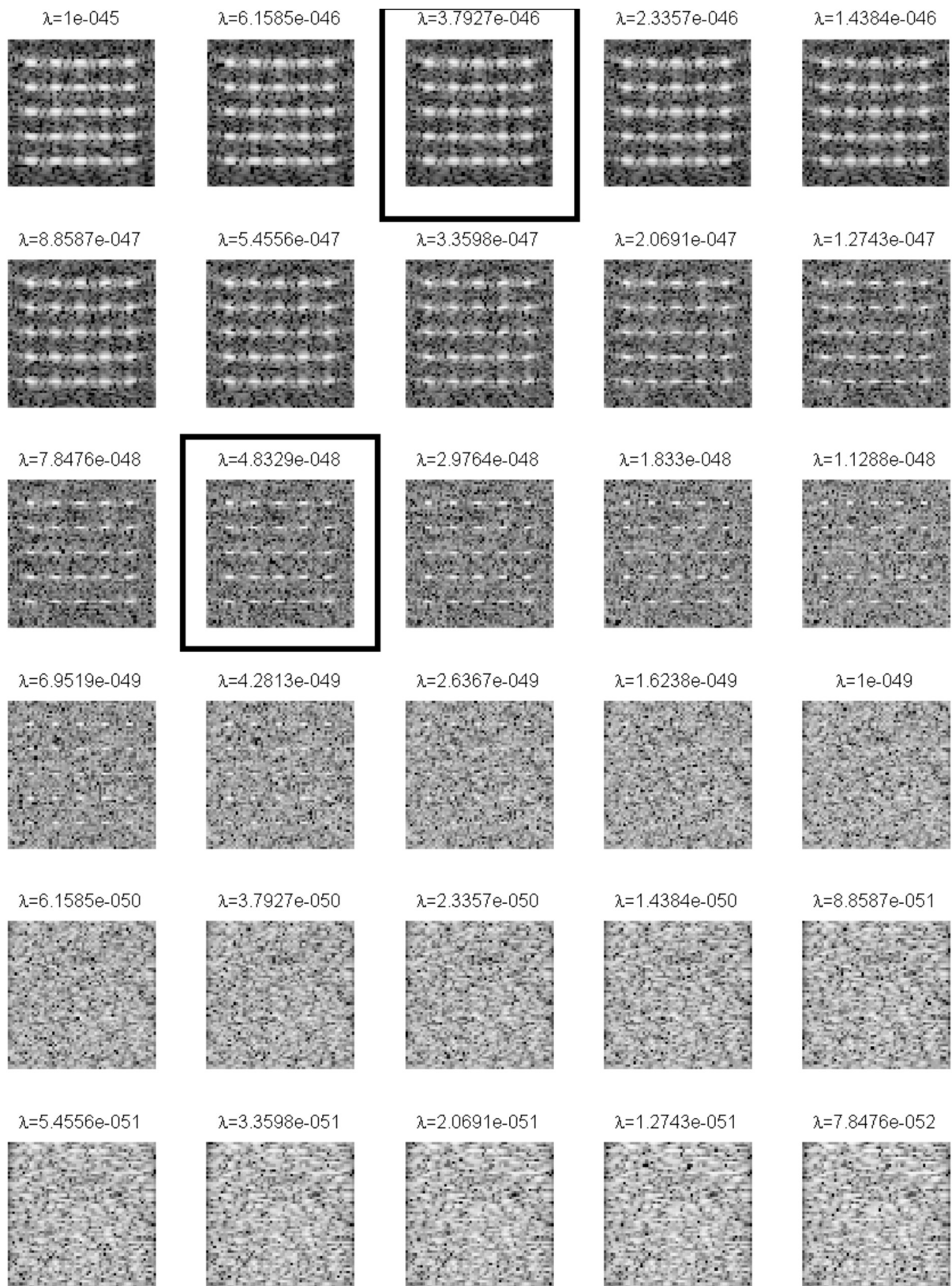
#### 6.9.1 PONTOS NA GRADE E AQUISIÇÃO USANDO SNR DE 5 dB

As Figuras 69 e 70 mostram as reconstruções com regularização  $\ell_1$  e  $\ell_2$  respectivamente, a partir de uma aquisição com os pontos sobre a grade e ruído usando SNR de 5 dB.



**Figura 69:** Reconstruções com regularização  $\ell_1$  para 30 valores de  $\lambda$ . Imagens em escala logarítmica com ganho de 60dB.

Fonte: Autoria própria

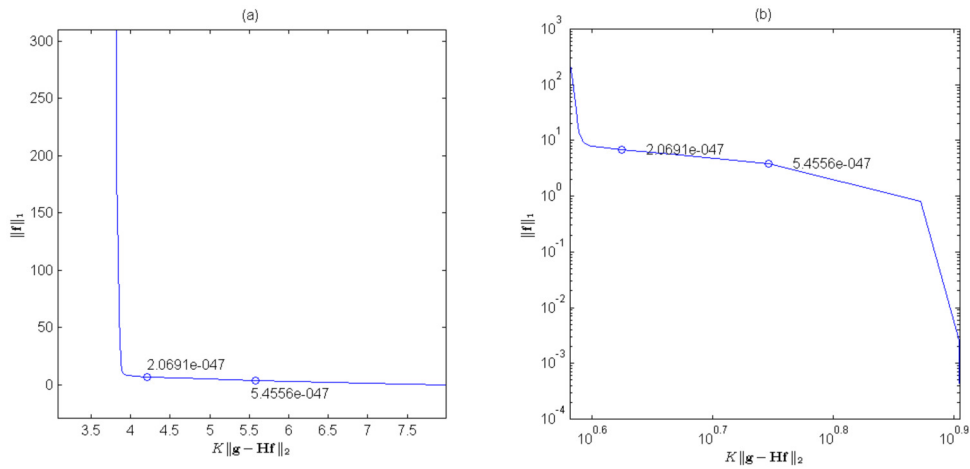


**Figura 70: Reconstruções com regularização  $\ell_2$  para 30 valores de  $\lambda$ . Imagens em escala logarítmica com ganho de 60dB.**

Fonte: Autoria própria

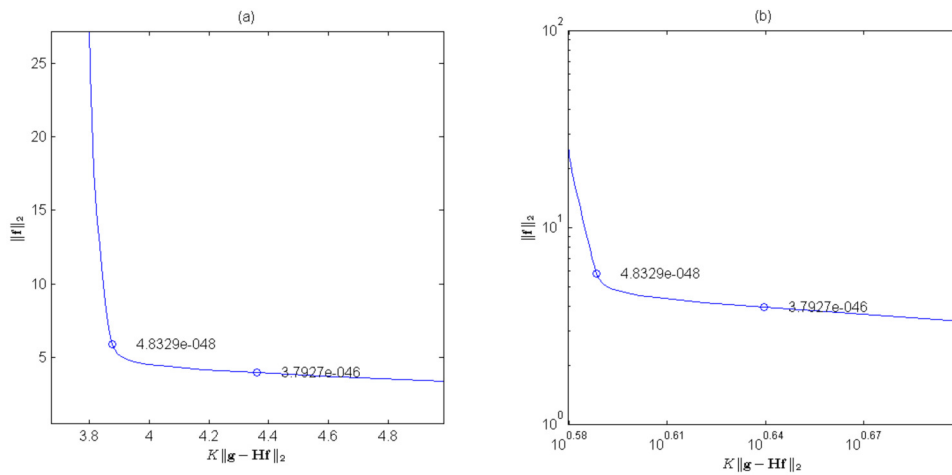


As Figuras 71 e 72 mostram as curvas L para as reconstruções com regularização  $\ell_1$  e  $\ell_2$  respectivamente.



**Figura 71:** Curva L resultante das reconstruções com regularização  $\ell_1$ . Os valores identificados são  $\lambda = 5,46 \times 10^{-47}$  para o ponto onde a curva mais se aproxima da origem e  $2,07 \times 10^{-47}$  para a reconstrução considerada visualmente ideal. (a) em escala linear e (b) em escala logarítmica.

Fonte: Autoria própria

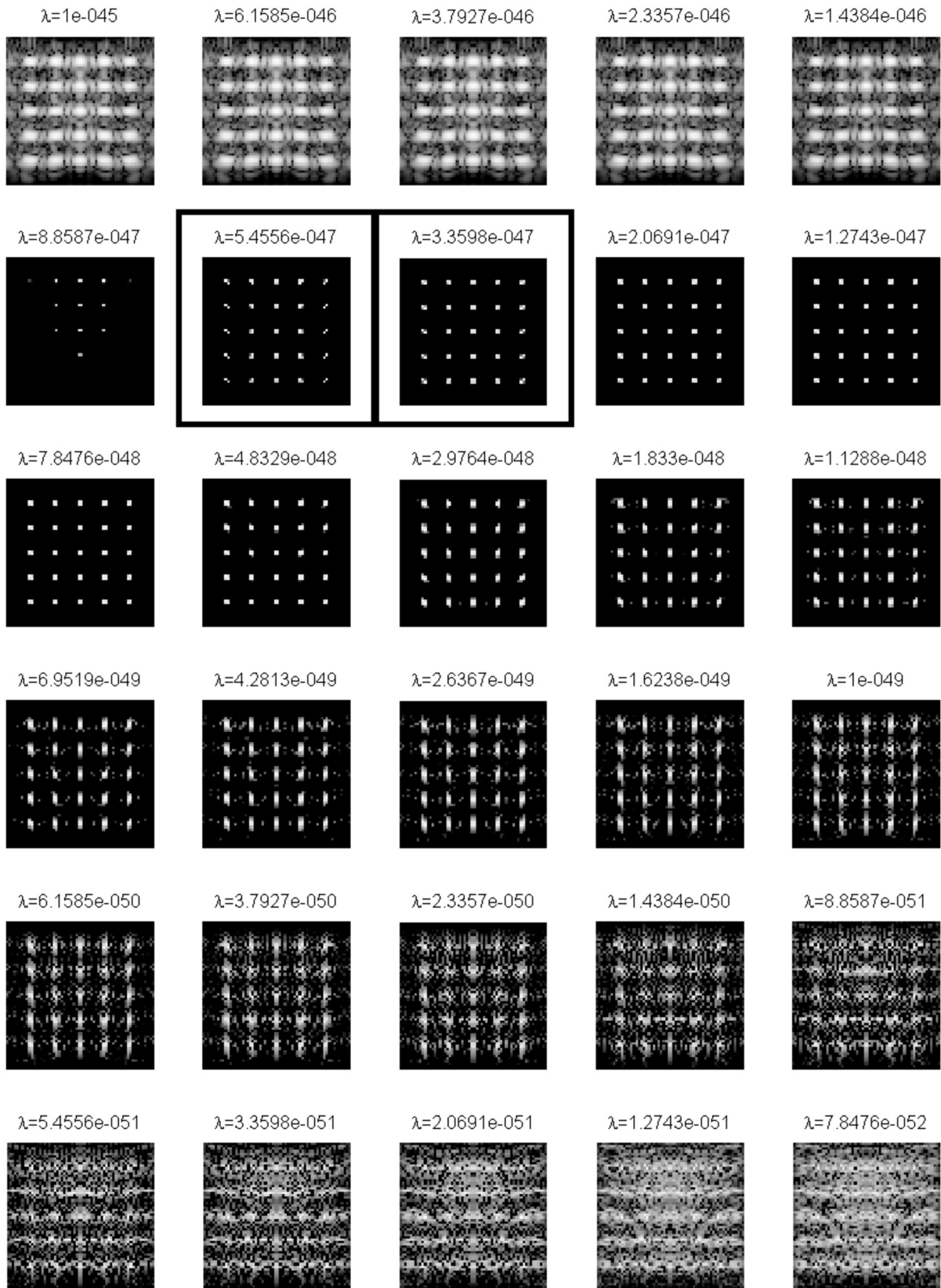


**Figura 72:** Curva L resultante das reconstruções com regularização  $\ell_2$ . Os valores identificados são  $\lambda = 4,83 \times 10^{-48}$  para o ponto onde a curva mais se aproxima da origem e  $3,79 \times 10^{-46}$  para a reconstrução considerada visualmente ideal. (a) em escala linear e (b) em escala logarítmica.

Fonte: Autoria própria

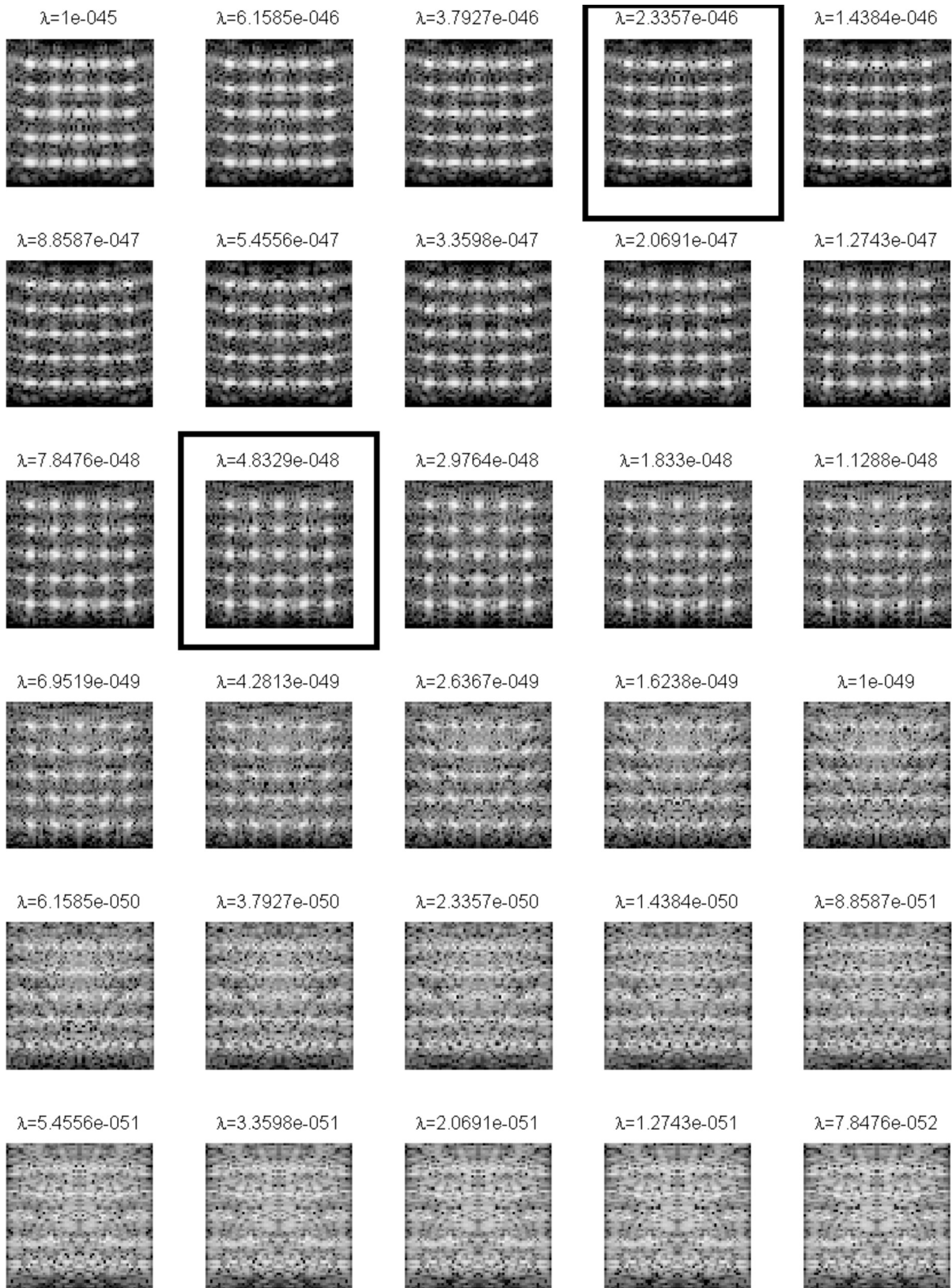
### 6.9.2 PONTOS FORA DA GRADE E AQUISIÇÃO SEM RUÍDO

As Figuras 73 e 74 mostram as reconstruções com regularização  $\ell_1$  e  $\ell_2$  respectivamente, a partir de uma aquisição com os pontos deslocados da grade em meio pixel nos dois eixos e sem ruído.



**Figura 73:** Reconstruções com regularização  $\ell_1$  para 30 valores de  $\lambda$ . Imagens em escala logarítmica com ganho de 60dB.

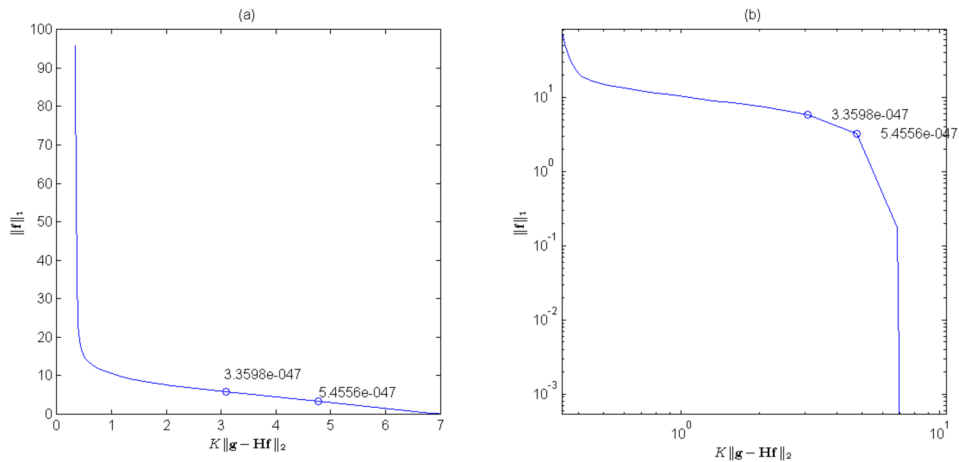
Fonte: Autoria própria



**Figura 74: Reconstruções com regularização  $\ell_2$  para 30 valores de  $\lambda$ . Imagens em escala logarítmica com ganho de 60dB.**

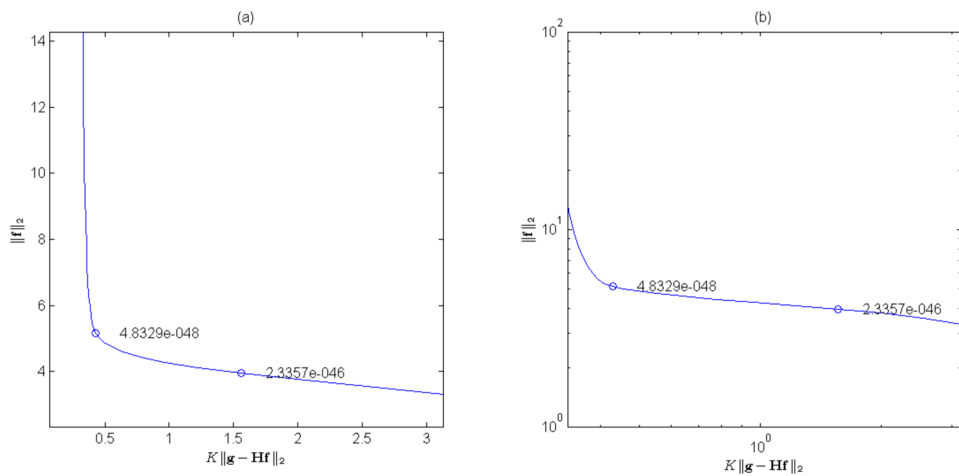
Fonte: Autoria própria

As Figuras 75 e 76 mostram as curvas L para as reconstruções com regularização  $\ell_1$  e  $\ell_2$  respectivamente.



**Figura 75:** Curva L resultante das reconstruções com regularização  $\ell_1$ . Os valores identificados são  $\lambda = 5,46 \times 10^{-47}$  para o ponto onde a curva mais se aproxima da origem e  $3,36 \times 10^{-47}$  para a reconstrução considerada visualmente ideal. (a) em escala linear e (b) em escala logarítmica.

Fonte: Autoria própria



**Figura 76:** Curva L resultante das reconstruções com regularização  $\ell_2$ . Os valores identificados são  $\lambda = 4,83 \times 10^{-48}$  para o ponto onde a curva mais se aproxima da origem e  $2,34 \times 10^{-46}$  para a reconstrução considerada visualmente ideal. (a) em escala linear e (b) em escala logarítmica.

Fonte: Autoria própria

### 6.9.3 DISCUSSÃO

Para a reconstrução com regularização  $\ell_1$ , é possível observar que o padrão de degradação causado na imagem não é o mesmo para o caso de ruído na aquisição e para o caso de pontos fora da grade. A degradação gerada pela presença de ruído na aquisição apresenta um padrão de ruído de fundo, presente ao longo de toda a imagem. No caso dos pontos fora da grade, a degradação está no espalhamento dos pontos ao longo dos pixels vizinhos à sua localização.

### 6.10 COMPARAÇÃO DE DESEMPENHO ENTRE O CG E A INVERSA DIRETA

Conforme apontado na Seção 4.2, o uso do CG explora a esparsidade da matriz  $H$ : a convergência do algoritmo é mais rápida quando a matriz é esparsa. Os experimentos a seguir têm o objetivo de demonstrar que o uso do CG nas iterações do IRLS resulta em menor tempo de execução do que quando se utiliza a inversa direta. Assim como chamamos a primeira combinação de IRLS-CG, a segunda será chamada de IRLS-Inv.

À primeira vista pode-se pensar em aplicar o mesmo critério de convergência, baseado na norma da diferença entre duas iterações consecutivas, para os dois algoritmos. No entanto, uma iteração do IRLS-Inv normalmente representa um passo maior na direção da solução do que uma iteração do IRLS-CG. Isso porque o CG tipicamente não resolve completamente o sistema linear (porque tipicamente a quantidade de iterações utilizada no CG é menor do que a dimensão do sistema). Portanto, para uma comparação efetiva, outro critério de convergência é necessário, que não seja baseado na diferença entre os resultados de duas iterações sucessivas.

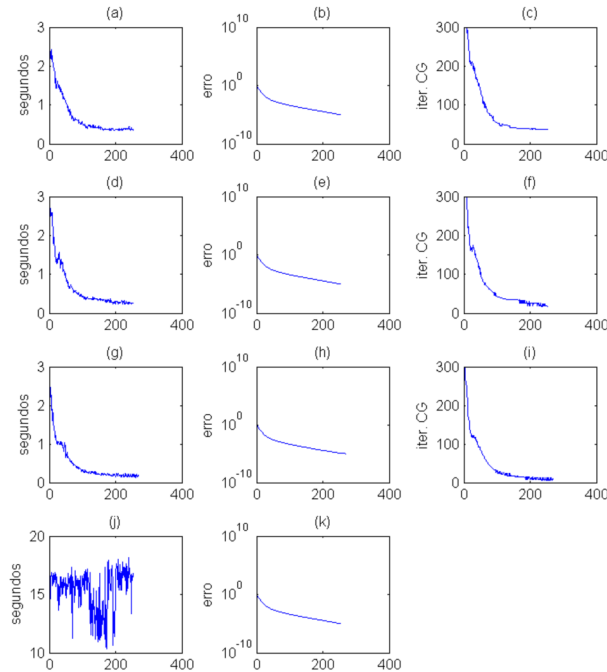
Conhecendo-se a priori o resultado esperado da reconstrução, é possível computar a diferença entre o resultado de cada iteração e o resultado esperado. Esta alternativa foi utilizada nos experimentos mostrados a seguir. Como resultado esperado, foi utilizado o resultado de uma reconstrução com 400 iterações do IRLS-Inv. Dessa forma, o erro  $e_k$  na  $k$ -ésima iteração é computado como

$$e_k = \frac{\|\mathbf{f}_k - \mathbf{f}_R\|_{\ell_2}^2}{\|\mathbf{f}_R\|_{\ell_2}^2}, \quad (85)$$

onde  $\mathbf{f}_k$  é o resultado da  $k$ -ésima iteração do IRLS e  $\mathbf{f}_R$  é o resultado esperado. Quando  $e_k < tol$  (onde  $tol$  é o parâmetro de convergência), considera-se atingida a convergência.

O phantom utilizado foi o mesmo da Seção 6.3.3, que contém 25 pontos uniformemente distribuídos e deslocados da grade em meio pixel no eixo axial. O parâmetro de regularização utilizado foi  $\lambda = 2,5 \times 10^{-47}$ . Não foi adicionado ruído à aquisição. No IRLS-CG, foram utilizados para o parâmetro resíduo  $res$  os valores  $10^{-6}$ ,  $10^{-5}$  e  $10^{-4}$ . As curvas de desempe-

nhos dos algoritmos são exibidas na Figura 77. Na Tabela 5 estão discriminados, para cada caso de reconstrução, o tempo total da reconstrução, o total de iterações do CG (soma das iterações dentro de cada iteração do IRLS) e a quantidade de iterações do IRLS.



**Figura 77:** Curvas de desempenho do IRLS-CG e do IRLS-Inv. (a) Tempo dispendido em cada iteração do IRLS-CG com  $res = 10^{-6}$ , (b) valor do erro  $e_k$  em cada iteração do IRLS-CG com  $res = 10^{-6}$ , (c) Quantidade de iterações do CG a cada iteração do IRLS-CG com  $res = 10^{-6}$ . (d), (e), (f): mesmas curvas para o IRLS-CG com  $res = 10^{-5}$ . (g), (h), (i): mesmas curvas para o IRLS-CG com  $res = 10^{-4}$ . (j), (k): mesmas curvas para o IRLS-Inv.

Fonte: Autoria própria

Algoritmo	Tempo total (s)	Total iterações CG	Iterações IRLS
IRLS-Inv	3917	N.A.	254
IRLS-CG ( $res = 10^{-6}$ )	176	21177	254
IRLS-CG ( $res = 10^{-5}$ )	157	17015	254
IRLS-CG ( $res = 10^{-4}$ )	123	12312	268

**Tabela 5:** Custos computacionais do IRLS-CG e do IRLS-Inv

### 6.10.1 OBSERVAÇÕES

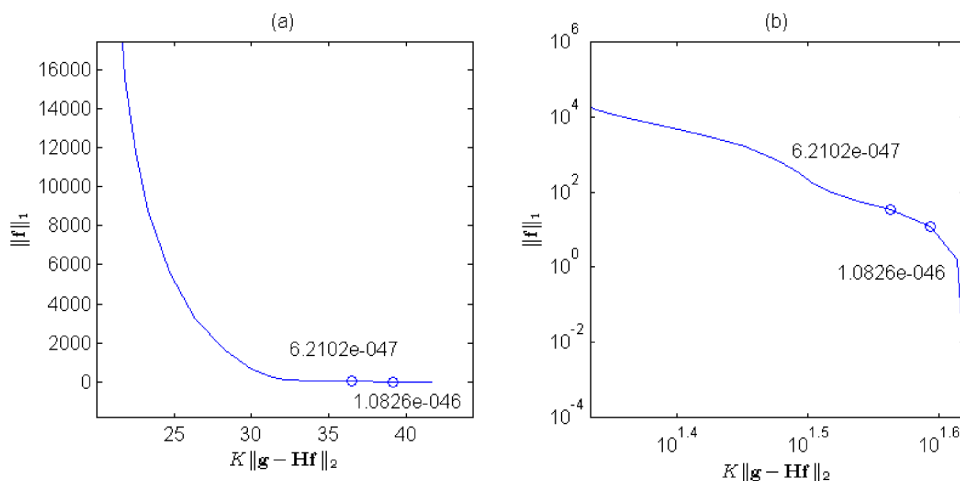
Nos três casos apresentados, o IRLS-CG demonstrou melhor desempenho computacional do que o IRLS-Inv, sendo no mínimo 22 vezes mais rápido no alcance da condição de convergência adotada.

Com relação ao parâmetro  $res$ , observa-se que a relaxação do parâmetro apresentou uma relação monotônica com o tempo: quanto maior (mais relaxado) o parâmetro, menor é o tempo dispendido até que a convergência seja atingida. Há que se atentar para o fato que valores muito altos do parâmetro  $res$  limitam demais a quantidade de iterações do CG, comprometendo a convergência do algoritmo. Por exemplo, utilizando-se  $res = 10^{-3}$  o IRLS resultou em estagnação do resultado antes que a convergência fosse alcançada.

### 6.11 ESCOLHA DO PARÂMETRO DE REGULARIZAÇÃO PELA CURVA L

Embora o ajuste manual do parâmetro  $\lambda$  seja interessante do ponto de vista clínico, é necessária a definição de um valor inicial. Nesta seção será testado o uso da curva L como método de determinação do  $\lambda$  inicial, para dois dos phantoms apresentados anteriormente (cisto anecóico e massa em meio anecóico). Serão exibidos os resultados das reconstruções para o  $\lambda$  escolhido através de inspeção visual e através da curva L (ponto de menor distância da origem). Também será exibida a curva L, onde os dois valores de  $\lambda$  estarão identificados. Complementarmente, a Seção 6.9 mostra o mesmo teste para o phantom de 25 pontos deslocados da grade axialmente.

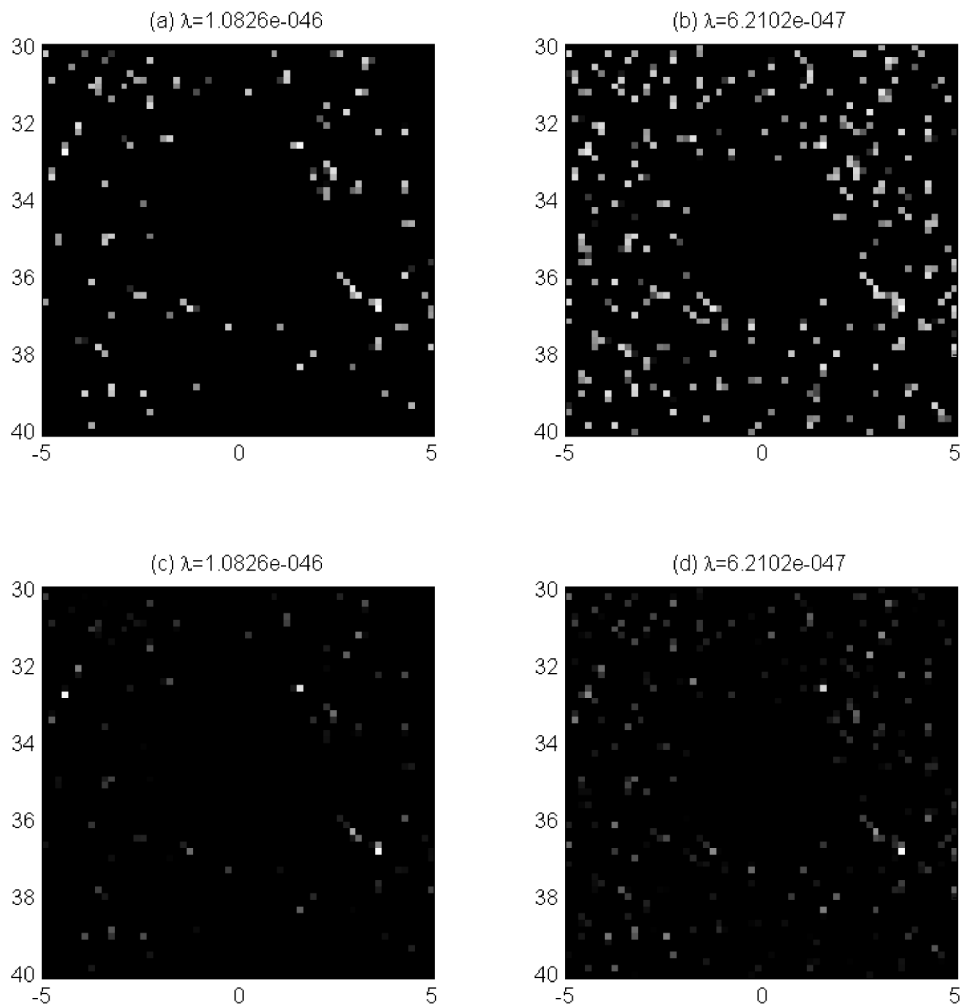
Para o phantom do tipo cisto anecóico, a curva L está representada na Figura 78. Os resultados das reconstruções com os parâmetros  $\lambda$  determinados através da curva L e da inspeção visual são exibidos na Figura 79.



**Figura 78: Curva L para o phantom do tipo cisto anecóico. (a) eixos em escala linear e (b) em escala logarítmica.**

**Fonte: Autoria própria**

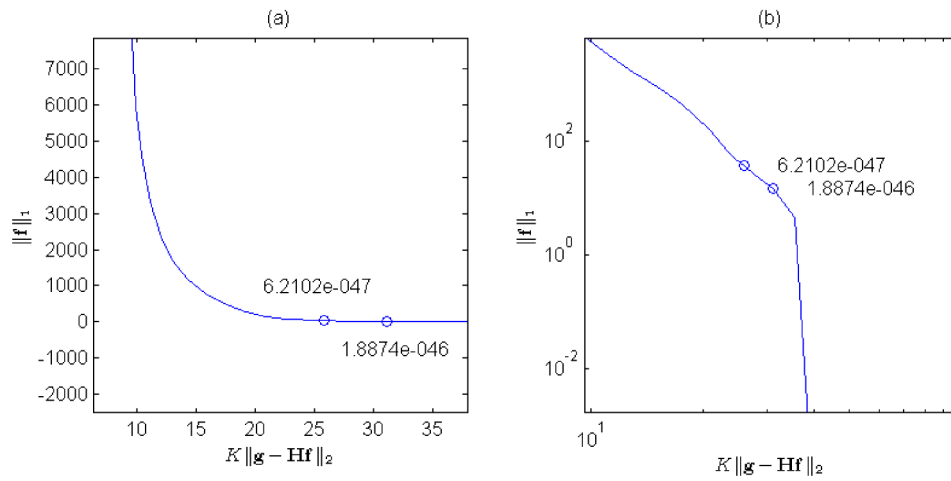




**Figura 79:** Resultados das reconstruções do phantom do tipo cisto anecóico para os valores de  $\lambda$  determinados pelos dois métodos. Imagem (a) em escala logarítmica com ganho de 60 dB e (c) em escala linear para a reconstrução com  $\lambda$  determinado pela curva L. Imagem (b) em escala logarítmica com ganho de 60 dB e (d) em escala linear para a reconstrução com  $\lambda$  determinado por inspeção visual.

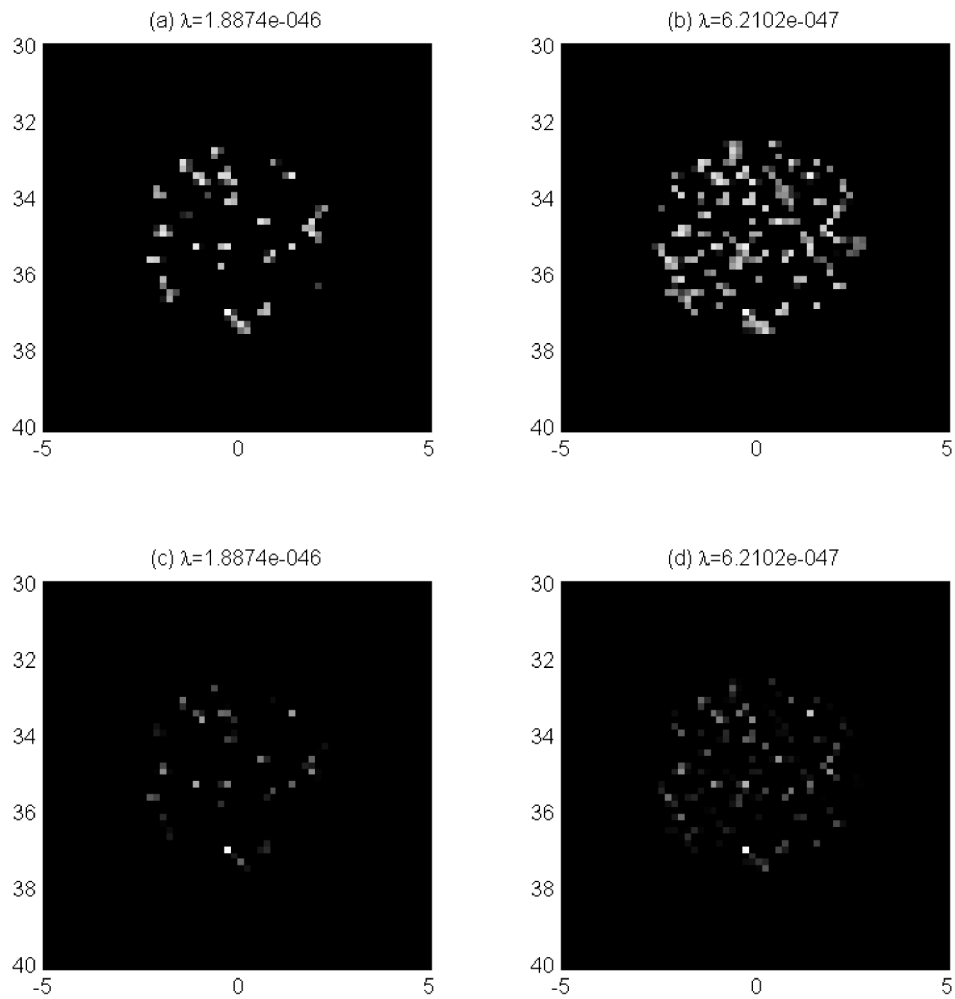
**Fonte:** Autoria própria

Para o phantom do tipo massa reflexiva em meio anecóico, a curva L está representada na Figura 80. Os resultados das reconstruções com os parâmetros  $\lambda$  determinados através da curva L e da inspeção visual são exibidos na Figura 81.



**Figura 80: Curva L para o phantom do tipo massa reflexiva em meio anecóico. (a) eixos em escala linear e (b) em escala logarítmica.**

**Fonte: Autoria própria**



**Figura 81:** Resultados das reconstruções do phantom do tipo massa em meio anecóico para os valores de  $\lambda$  determinados pelos dois métodos. Imagem (a) em escala logarítmica com ganho de 60 dB e (b) em escala logarítmica para a reconstrução com  $\lambda$  determinado pela curva L. Imagem (c) em escala logarítmica com ganho de 60 dB e (d) em escala linear para a reconstrução com  $\lambda$  determinado por inspeção visual.

Fonte: Autoria própria

### 6.11.1 DISCUSSÃO

Na Seção 6.9 observou-se que a curva L pode fornecer um  $\lambda$  inicial próximo do escolhido por inspeção visual, permitindo identificar os refletores na imagem e portanto servindo como um valor inicial efetivo. Nos experimentos com o phantom do tipo massa em meio anecóico, apresentados nas Figuras 79 e 81, é possível discernir as duas regiões da imagem, porém a degradação já se torna um problema na imagem gerada utilizando-se o  $\lambda$  determinado pela curva L. Já para os experimentos com o phantom do tipo cisto a degradação da imagem gerada

com o  $\lambda$  determinado pela curva L pode ser considerada proibitiva. Esses resultados sugerem que a curva L apresenta melhores resultados com phantoms esparsos do que com phantoms ricos em pontos refletores, refletindo uma característica da reconstrução com regularização  $\ell_1$ .

## 6.12 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO

Em experimentos com pontos fora da grade modelada observou-se que a técnica IPB com regularização  $\ell_1$  viabiliza a reconstrução, representando phantoms pontuais em um único pixel ou em poucos pixels adjacentes, e permite a identificação de áreas anecóicas em phantoms mais complexos. Os princípios que limitam a resolução nos algoritmos DAS não se mostram presente nos algoritmos IPB, e como consequência observa-se uma melhor resolução nestes. No entanto, a promoção da esparsidade se dá em todas as reconstruções com regularização  $\ell_1$ , o que significa que phantoms não esparsos (como a massa circular e o cisto anecóico) não são bem representados.

A reconstrução com regularização  $\ell_1$  mostrou robustez ao ruído de aquisição em todos os experimentos em que houve ruído adicionado.

Os erros provenientes da má localização dos refletores demonstraram não afetar a imagem reconstruída da mesma forma que o ruído na aquisição. O ruído de aquisição tem como resultado na reconstrução um ruído de fundo, enquanto os pontos fora da grade geram artefatos concentrados na vizinhança do pixel que os representa.

O IRLS-CG mostrou-se pelo menos 22 vezes mais eficiente computacionalmente do que o IRLS-Inv, que utiliza a inversa direta. Observou-se que a relaxação do parâmetro de convergência do CG implica em maior velocidade de convergência, respeitando-se um limite (não determinado) para o qual a convergência é possível.

A escolha do ponto mais próximo da origem na curva L mostrou-se um método viável de definição preliminar do parâmetro de regularização, dando resultados próximos aos obtidos quando a escolha é feita por inspeção visual.

## 7 CONCLUSÃO

A regularização por minimização da norma  $\ell_1$  da imagem apresentou como vantagem com relação à regularização  $\ell_2$ , a capacidade de reconstruir imagens a partir de phantoms que contém pontos refletores fora da grade modelada. Nas imagens reconstruídas de phantoms com poucos pontos, pontos de dimensões infinitesimais (que na prática corresponde a um refletor com tamanho menor do que um comprimento de onda) são reconstruídos e representados cada um em um único pixel ou em poucos pixels (apenas os adjacentes), sem que sejam observados artefatos ou ruído de fundo nas reconstruções, mesmo que seja adicionado ruído na aquisição. Em phantoms mais complexos foi possível observar a presença de regiões anecóicas.

A reconstrução IPB, tanto com regularização  $\ell_1$  como com regularização  $\ell_2$ , apresentou como vantagens com relação à reconstrução DAS maior nitidez, maior resolução e maior robustez ao ruído de aquisição.

A possibilidade de reconstruir imagens a partir da aquisição com refletores fora da grade modelada permitiu o vislumbamento de problemas que antes não podiam ser observados. O primeiro é o fenômeno da inversão do sinal da intensidade de alguns refletores, que ocorre em função da natureza oscilatória dos pulsos de excitação em ultrassom. Nos casos de reconstrução abordados neste trabalho, este problema não afeta a reconstrução ou a visualização do resultado. Porém, este problema pode ser impeditivo na utilização de *priors* em domínios onde o sinal dos pixels é relevante (por exemplo, o domínio das diferenças finitas).

Outro problema identificado é que a regularização  $\ell_1$ , embora possibilite a reconstrução de phantoms esparsos de maneira superior às outras técnicas apresentadas, representou bem apenas phantoms esparsos, ou seja, que possuem poucos pontos refletores. Phantoms mais complexos, que não podem ser bem representados de forma esparsa, são reconstruídos com excessiva atenuação de grande parte dos pixels. Esses resultados condizem com a teoria que diz que a regularização por minimização da norma  $\ell_1$  força a esparsidade e atua como um seletor de pixels.

A reconstrução do phantom cisto em meio Laplaciano não apresentou diferença na

qualidade da imagem com relação à reconstrução do phantom cisto em meio Gaussiano. Embora tenha sido possível identificar a região anecóica, ambos os casos com phantoms complexos apresentaram resultados inferiores aos casos em que o phantom possuía um ou poucos pixels. Disso é possível concluir que a esparsidade representada pelo *prior* diz respeito mais à quantidade de pixels com valores distantes de zero do que à FDP dos pixels. Ou seja, a interpretação geométrica da esparsidade da norma  $\ell_1$  foi mais bem representada pelos dados do que a interpretação Bayesiana.

A utilização do CG nas iterações do IRLS (IRLS-CG) mostrou-se mais eficiente computacionalmente do que a utilização da inversa direta (IRLS-Inv). Observou-se também que a relaxação do parâmetro de limitação do resíduo do CG implica em maior eficiência.

## 7.1 SUGESTÕES DE ESTUDOS FUTUROS

A busca por formas de pulso ultrassônico que, para o caso dos pontos deslocados da grade, apresentem padrões de correlação onde os valores negativos sejam pouco expressivos comparados aos valores positivos mostra-se um tema de estudo motivador. Os resultados podem permitir a reconstrução sem inversão de sinal dos refletores e assim viabilizar o uso, por exemplo, da regularização TV. Essa seria uma possibilidade de solução para o problema da excessiva esparsificação de phantoms complexos (com muitos pontos refletores).

O algoritmo IRLS-CG tem uma série de parâmetros cujos estudos podem melhorar o seu desempenho. Tanto o IRLS como o CG são sintonizáveis através de parâmetros de convergência e limitação na quantidade de iterações. O IRLS possui também o parâmetro de aproximação da norma  $\ell_1$  de uma parábola. Além do estudo dos parâmetros de sintonia dos algoritmos, a paralelização do IRLS-CG, ou apenas do CG como apresentado em (NIEDU, 2012), pode diminuir o tempo dispendido na reconstrução das imagens.

Na Seção 6.10 foi possível observar que a relaxação do parâmetro *res* do CG resulta em maior eficiência computacional do algoritmo IRLS-CG, porém a partir de um certo limiar a convergência do IRLS não é mais alcançada. Estudos visando à determinação deste limiar podem permitir uma utilização ótima do IRLS-CG.

Outros algoritmos para implementação computacional da formulação proposta neste trabalho podem ser propostos, testados e comparados, uma vez que apenas o IRLS-CG foi apresentado.

A formulação apresentada utiliza a minimização da norma  $\ell_2$  ao quadrado como função de penalidade para o erro  $\eta$ . Conforme a interpretação Bayesiana apresentada no Capítulo 3,

tal formulação é ideal quando se sabe a priori que o erro na aquisição tende a seguir uma FPD Gaussiana. Em casos onde o erro é consequência apenas do ruído na aquisição, esse pressuposto costuma ser razoável. Mas no caso do ultrassom, há uma importante componente do erro consequente da diferença entre o sinal proveniente de um refletor fora da grade e o sinal correspondente ao pixel modelado que melhor representa a posição daquele refletor. Há portanto um erro estruturado, cujas características podem talvez ser traduzidas em uma penalidade para o erro diferente da norma  $\ell_2$  ao quadrado. Esta hipótese também representa um campo de estudo com potencial de melhorar a reconstrução IPB em ultrassom.

O fenômeno da disparidade na atenuação dos refletores ao longo da ROI, mostrado nas Figuras 44 e 45 constitui mais um problema a ser resolvido. A Equação 84 sugere uma formulação com duas matrizes de covariância que têm como objetivo compensar este efeito. A definição dessas matrizes pode constituir um interessante tema de estudo futuro.

Este trabalho debruçou-se apenas sobre dados originários de simulações computacionais com o programa Field II. Embora este programa seja amplamente utilizado e validado no universo da pesquisa em ultrassom, é importante que as conclusões resultantes deste e de outros trabalhos sejam revalidadas através de dados de aquisições reais. Este será um passo importante na direção de se obter um sistema prático de imagens médicas de ultrassom que explore as vantagens da reconstrução IPB que estão sendo pesquisadas.

## REFERÊNCIAS

- AZHARI, H. **Basics of Biomedical Ultrasound for Engineers**. [S.l.]: Wiley, 2010. ISBN 9780470561461.
- BALAN, R.; CASAZZA, P. G.; HEIL, C.; LANDAU, Z. Z.: **Density, overcompleteness, and localization of frames, I. Theory**. [S.l.], 2005.
- BARRETT, H.; MYERS, K. **Foundations of Image Science**. [S.l.]: Wiley-Interscience, 2004. ISBN 9780471153009.
- BELGE, M.; KILMER, M. E.; ERIC; MILLER, E. L. Efficient determination of multiple regularization parameters in a generalized l-curve framework. **Inverse Problems**, v. 18, p. 2002, 2002.
- BERGH, J.; LÖFSTRÖM, J. **Interpolation Spaces: An Introduction**. [S.l.]: Springer London, Limited, 2011. ISBN 9783642664533.
- BERTERO, M. Linear inverse and ill-posed problems. **Advances in Electronics and Electron Physics**, Academic Press, New York, v. 75, p. 1–120, 1989.
- BETHEL, R.; SHAPO, B.; TREES, H. V. Single snapshot spatial processing: Optimized and constrained. In: IEEE. **Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop Proceedings, 2002**. [S.l.], 2002. p. 508–512.
- BJÖRCK, r. **Numerical Methods for Least Squares Problems**. [S.l.]: SIAM, 1996. ISBN 0898713609.
- BOVIK, A. **Handbook of Image & Video Processing**. [S.l.]: Academic Press, 2000. ISBN 9780121197902.
- CANDES, E. J.; WAKIN, M. B. An introduction to compressive sampling. **IEEE Signal Processing Magazine**, IEEE, v. 25, n. 2, p. 21–30, mar. 2008. ISSN 1053-5888.
- CAWLEY, G. C.; TALBOT, N. L. C. Gene selection in cancer classification using sparse logistic regression with bayesian regularization. **Bioinformatics**, v. 22, n. 19, p. 2348–2355, 2006.
- CHEN, S. S. **Basis Pursuit**. Tese (Doutorado) — Department of Statistics, Stanford University, 1995.
- CHEN, S. S.; DONOHO, D. L.; SAUNDERS, M. A. Atomic decomposition by basis pursuit. **SIAM Journal on Scientific Computing**, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 20, n. 1, p. 33–61, 1998.
- CHRISTENSEN, D. **Ultrasonic Bioinstrumentation**. [S.l.]: Wiley, 1988. ISBN 9780471604969.



- ELAD, M.; AHARON, M. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries. **IEEE Transactions on Image Processing**, v. 15, n. 12, p. 3736–3745, 2006. ISSN 1057-7149.
- ELTOFT, T.; KIM, T.; LEE, T.-W. On the multivariate laplace distribution. **IEEE Signal Processing Letters**, v. 13, n. 5, p. 300–303, 2006. ISSN 1070-9908.
- ENGL, H.; HANKE, M.; NEUBAUER. **Regularization of inverse problems**. [S.l.]: Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 2000.
- FADILI, M.; STARCK, J.-L.; BOBIN, J.; MOUDDEN, Y. Image decomposition and separation using sparse representations: An overview. **Proceedings of the IEEE**, v. 98, n. 6, p. 983–994, 2010. ISSN 0018-9219.
- FIGUEIREDO, M. A. T. Adaptive sparseness for supervised learning. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. 25, n. 9, p. 1150–1159, 2003. ISSN 0162-8828.
- FROSSARD, P.; VANDERGHEYNST, P.; VENTURA, R. Figueras i; KUNT, M. A posteriori quantization of progressive matching pursuit streams. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 52, n. 2, p. 525–535, 2004. ISSN 1053-587X.
- FU, W. J. Penalized regressions: the bridge versus the LASSO. **Journal of Computational and Graphical Statistics**, Taylor & Francis, v. 7, n. 3, p. 397–416, 1998.
- GILL, P.; MURRAY, W.; WRIGHT, M. **Practical Optimization**. [S.l.]: Academic Press, 1981. ISBN 9780122839504.
- GILL, P.; WANG, A.; MOLNAR, A. The in-crowd algorithm for fast basis pursuit denoising. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 59, n. 10, p. 4595–4605, 2011. ISSN 1053-587X.
- GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. **Matrix Computations**. 3rd. ed. [S.l.]: The Johns Hopkins University Press, 1996. Paperback. ISBN 0801854148.
- GOODMAN, I. R.; KOTZ, S. Multivariate  $\theta$ -generalized normal distribution. **Jornal of Multivariate Analysis**, v. 3, p. 204–219, 1973.
- GRIBONVAL, R.; BACRY, E. Harmonic decomposition of audio signals with matching pursuit. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 51, n. 1, p. 101–111, 2003. ISSN 1053-587X.
- GRINSTEAD, C.; SNELL, J. **Introduction to Probability**. [S.l.]: American Mathematical Society, 1997. ISBN 9780821807491.
- HANSEN, C. **Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion**. Philadelphia: SIAM, 1998.
- HARRIS, R. Review of transient field theory for a baffled planar piston. **Acoustical Society of America**, v. 70, p. 10–20, 1981.
- HEDRICK, W.; HYKES, D.; STARCHMAN, D. **Ultrasound Physics and Instrumentation**. [S.l.]: Mosby, 1995. ISBN 9780815142461.
- JENSEN, J. Simulation of advanced ultrasound systems using Field II. In: **IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: Nano to Macro**. [S.l.: s.n.], 2004. p. 636–639 Vol. 1.

JENSEN, J. **Linear description of ultrasound imaging systems: Notes for the International Summer School on Advanced Ultrasound Imaging**. Junho 2011.

JENSEN, J.; GANDHI, D.; O'BRIEN W.D., J. Ultrasound fields in an attenuating medium. In: **Proceedings of the IEEE Ultrasonics Symposium**. [S.l.: s.n.], 1993. p. 943–946 vol.2.

JENSEN, J.; SVENDSEN, N. Calculation of pressure fields from arbitrarily shaped, apodized, and excited ultrasound transducers. **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control**, v. 39, n. 2, p. 262–267, 1992. ISSN 0885-3010.

JENSEN, J. A. A model for the propagation and scattering of ultrasound in tissue. **Acoustical Society of America**, v. 89, p. 182–190, 1991.

JENSEN, J. A. Field: A program for simulating ultrasound systems. In: **10th Nordicbaltic Conference on Biomedical Imaging**. [S.l.: s.n.], 1996. v. 4, p. 351–353.

JENSEN, J. A.; MATHORNE, J.; GRAVESEN, T.; STAGE, B. Deconvolution of in-vivo ultrasound b-mode images. In: **IN ULTRASONIC IMAGING**. [S.l.: s.n.], 1993. p. 122–133.

JONSSON, E.; HUANG, S.-c.; CHAN, T. **Total-variation regularization in positron emission tomography**. [S.l.], 1998.

KOH, K.; KIM, S.-J.; BOYD, S. P. An interior-point method for large-scale  $l_1$ -regularized logistic regression. **Journal of Machine Learning Research**, v. 8, n. 8, p. 1519–1555, 2007.

LAVARELLO, R.; KAMALABADI, F.; O'BRIEN, W. D. A regularized inverse approach to ultrasonic pulse-echo imaging. **IEEE Transactions on Medical Imaging**, IEEE, v. 25, n. 6, p. 712–722, 2006.

LINGVALL, F.; OLOFSSON, T. On time-domain model-based ultrasonic array imaging. **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control**, IEEE, v. 54, n. 8, p. 1623–1633, 2007.

LUSTIG, M.; DONOHO, D.; SANTOS, J.; PAULY, J. Compressed sensing MRI. **IEEE Signal Processing Magazine**, v. 25, n. 2, p. 72–82, 2008. ISSN 1053-5888.

LUSTIG M.; DONOHO, D.; PAULY, J. M. Sparse MRI: the application of compressive sensing for rapid MR imaging. In: **Magnetic Resonance in Medicine**. [S.l.: s.n.], 2007. v. 58, n. 1, p. 1182–1195.

MARROQUIN, J.; MITTER, S.; POGGIO, T. Probabilistic solution of ill-posed problems in computational vision. **Journal of the American Statistical Association**, v. 82, p. 76–89, 1987.

MONTALDO, G.; TANTER, M.; BERCOFF, J.; BENECH, N.; FINK, M. Coherent plane-wave compounding for very high frame rate ultrasonography and transient elastography. **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control**, v. 56, n. 3, p. 489–506, 2009. ISSN 0885-3010.

MOULIN, P.; LIU, J. Analysis of multiresolution image denoising schemes using generalized Gaussian and complexity priors. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 45, n. 3, p. 909–919, 1999. ISSN 0018-9448.

- NATARAJAN, B. K. Sparse approximate solutions to linear systems. **SIAM Journal on Computing**, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, v. 24, n. 2, p. 227–234, abr. 1995. ISSN 0097-5397.
- NATTERER, F. Ultrasound mammography with a mirror. **Physics in Medicine and Biology**, IOP Publishing, v. 55, n. 10, p. N275, 2010.
- NATTERER, F.; WUBBELING, F. A propagation-backpropagation method for ultrasound tomography. **Inverse problems**, IOP Publishing, v. 11, n. 6, p. 1225, 1995.
- NGUYEN, T.; ZAKHOR, A. Matching pursuits based multiple description video coding for lossy environments. In: **Proceedings of the 2003 International Conference on Image Processing**. [S.l.: s.n.], 2003. v. 1, p. I-57–60 vol.1. ISSN 1522-4880.
- NIEDU, G. da S. **Um método para a resolução de sistemas lineares através do gradiente conjugado cooperativo**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2012.
- OSBORNE, M. **Finite Algorithms in Optimization and Data Analysis**. [S.l.]: J. Wiley, 1985. ISBN 9780471905394.
- PASSARIN, T. A. R.; ZIBETTI, M. V. W.; SCHNEIDER, F. K.; ZANIN, L. G. S.; MAIA, J. M. Reconstrução em ultrassom usando mínimos quadrados iterativamente reponderados para regularização L1. In: **Anais do XXIII Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica**. [S.l.: s.n.], 2012.
- PASSMANN, C.; ERMERT, H.; AUER, T.; KASPAR, K.; GAMMAL, S. el; ALTMAYER, P. In vivo ultrasound biomicroscopy. In: **Proceedings of the IEEE Ultrasonics Symposium**. [S.l.: s.n.], 1993. p. 1015–1018 vol.2.
- PAVLIN, C.; FOSTER, F. **Ultrasound Biomicroscopy of the Eye**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1995. ISBN 9780387942063.
- PAVLIN, C.; MCWHAEE, J.; FOSTER, F. Ultrasound biomicroscopy of anterior segment tumours. **Ophthalmology**, v. 99, p. 1220–1228, 1992.
- PAVLIN, C.; SHERAR, M.; FOSTER, F. Subsurface imaging of the eye by ultrasound backscatter microscopy ophthalmology. **Ophthalmology**, v. 97, p. 244–250, 1990.
- PERKINS, S.; LACKER, K.; THEILER, J. Grafting: Fast, incremental feature selection by gradient descent in function space. **The Journal of Machine Learning Research**, JMLR. org, v. 3, p. 1333–1356, 2003.
- PETERLIK, I.; JIRIK, R.; RUITER, N.; JAN, J. Regularized image reconstruction for ultrasound attenuation transmission tomography. **RADIOENGINEERING**, v. 17, p. 125 – 132, 2008.
- PIPA, D. R. **Tópicos em reconstrução de imagens e vídeos**. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2012.
- PRUGOVECKI, E. **Quantum Mechanics in Hilbert Space**. [S.l.]: Academic Press, 1971. ISBN 9780125660501.

RAMANI, S.; FESSLER, J. An accelerated iterative reweighted least squares algorithm for compressed sensing MRI. In: **Proceedings of the 2010 IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro**. [S.l.: s.n.], 2010. p. 257–260. ISSN 1945-7928.

REGINSKA, T. A regularization parameter in discrete ill-posed problems. **SIAM Journal on Scientific Computing**, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, v. 17, n. 3, p. 740–749, maio 1996. ISSN 1064-8275.

ROMBERG, J. Imaging via compressive sampling. **IEEE Signal Processing Magazine**, v. 25, n. 2, p. 14–20, march 2008. ISSN 1053-5888.

RUDIN, L. I.; OSHER, S.; FATEMI, E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. In: **Proceedings of the Eleventh Annual International Conference of the Center for Nonlinear Studies on Experimental Mathematics : Computational Issues in Nonlinear Science**. Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands: Elsevier North-Holland, Inc., 1992. p. 259–268.

SAAD, Y. **Iterative Methods for Sparse Linear Systems**. 2nd. ed. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. ISBN 0898715342.

SANDRIN, L.; TANTER, M.; CATHELIN, S.; FINK, M. Shear modulus imaging with 2-d transient elastography. **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control**, v. 49, n. 4, p. 426–435, 2002. ISSN 0885-3010.

SCHMIDT, M.; FUNG, G.; ROSALES, R. Fast optimization methods for L1 regularization: A comparative study and two new approaches. In: **Machine Learning: ECML 2007**. [S.l.]: Springer, 2007. p. 286–297.

SHERAR, M. D.; STARKOSKI, B. G.; TAYLOR, W. B.; FOSTER, F. S. A 100 MHz B-scan ultrasound backscatter microscope. **Ultrasonic Imaging**, v. 11, p. 95–105, 1989.

SHEVADE, S. K.; KEERTHI, S. S. A simple and efficient algorithm for gene selection using sparse logistic regression. **Bioinformatics**, v. 19, n. 17, p. 2246–2253, 2003.

SHEWCHUK, J. R. **An Introduction to the Conjugate Gradient Method without the Agonizing Pain**. Pittsburgh, PA, Agosto 1994.

SINZ, F. H.; GERWINN, S.; BETHGE, M. Characterization of the p-generalized normal distribution. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 100, n. 5, p. 817–820, 2009.

SMITH, N.; WEBB, A. **Introduction to Medical Imaging: Physics, Engineering and Clinical Applications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. ISBN 9780521190657.

STARCK, J.-L.; MURTAGH, F.; FADILI, M. **Sparse Signal and Image Processing: Wavelets, Curvelets and Morphological Diversity**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010.

STEPHANISHEN, P. Transient radiation from pistons in an infinite planar baffle. **Journal of the Acoustical Society of America**, v. 9, p. 1629–1638, 1970.

STEPHANISHEN, P. The time-dependent force and radiation impedance on a piston in a rigid infinite planar baffle. **Journal of the Acoustical Society of America**, v. 49, p. 841–849, 1971.

TIBSHIRANI, R. Regression shrinkage and selection via the LASSO. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, Wiley for the Royal Statistical Society, v. 58, n. 1, p. pp. 267–288, 1996. ISSN 00359246.

TROPP, J. Just relax: convex programming methods for identifying sparse signals in noise. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 52, n. 3, p. 1030–1051, march 2006. ISSN 0018-9448.

TUPHOLME, G. E. Generation of acoustic pulses by baffled plane pistons. **Mathematika**, v. 16, p. 209–224, 12 1969. ISSN 2041-7942.

TURNBULL, D. H.; STARKOSKI, B. G.; HARASIEWICZ, K. A.; SEMPLE, J. L.; FROM, L.; GUPTA, A. K.; SAUDER, D. N.; FOSTER, F. A 40-100 MHz B-scan ultrasound backscatter microscope for skin imaging. **Ultrasound in medicine & biology**, v. 21, p. 79–88, 1995.

VIOLA, F.; ELLIS, M. A.; WALKER, W. F. Time-domain optimized near-field estimator for ultrasound imaging: initial development and results. **IEEE Transactions on Medical Imaging**, IEEE, v. 27, n. 1, p. 99–110, 2008.

WEBSTER, J. **Medical Instrumentation: Application and Design, 3rd Ed.** [S.l.]: Wiley India Pvt. Limited, 2009. ISBN 9788126511068.

ZANIN, L. **Reconstrução de Imagens de Ultrassom Baseada em Problemas Inversos.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial - CPGEI, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

ZANIN, L.; SCHNEIDER, F. K.; ZIBETTI, M. V. W. Análise SVD de sistemas de imageamento de ultrassom baseado na reconstrução inversa. In: **V Simpósio de Instrumentação e Imagens Médicas.** Porto Alegre: [s.n.], 2011.

ZANIN, L.; SCHNEIDER, F. K.; ZIBETTI, M. V. W. Regularized reconstruction of ultrasonic imaging and the regularization parameter choice. In: **Proceedings of the International Conference on Bio-inspired Systems and Signal Processing.** [S.l.: s.n.], 2012. p. 438–442.

ZANIN, L.; ZIBETTI, M.; SCHNEIDER, F. Conjugate gradient and regularized inverse problem-based solutions applied to ultrasound image reconstruction. In: **Ultrasonics Symposium (IUS), 2011 IEEE International.** [S.l.: s.n.], 2011. p. 377–380. ISSN 1948-5719.

ZIBETTI, M. V. W.; BAZAN, F. S. V.; MAYER, J. Determining the regularization parameters for super-resolution problems. **Signal Processing**, v. 88, p. 2890–2901, 2008.