

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE CONSTRUÇÃO CIVIL
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

**FILIPPI SEUANES CAVALCANTI DE ALBUQUERQUE
WAGNER FELIPE KRAMAR**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE UMA PONTE
FERROVIÁRIA DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDA A
ESFORÇOS DE NATUREZA DINÂMICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**CURITIBA
2015**

**FILIPPI SEUANES CAVALCANTI DE ALBUQUERQUE
WAGNER FELIPE KRAMAR**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE UMA PONTE
FERROVIÁRIA DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDA A
ESFORÇOS DE NATUREZA DINÂMICA**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do Curso de Engenharia Civil do Departamento Acadêmico de Construção Civil – DACOC – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Luiz Martinechen Beghetto

**CURITIBA
2015**

FOLHA DE APROVAÇÃO

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE UMA PONTE FERROVIÁRIA DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDA A ESFORÇOS DE NATUREZA DINÂMICA

Por

FILIPPI SEUANES CAVALCANTI DE ALBUQUERQUE
WAGNER FELIPE KRAMAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, defendido e aprovado em 25 de fevereiro de 2015, pela seguinte banca de avaliação:

Prof. Orientador – Fernando Luiz Martinechen Beghetto, Dr.
UTFPR

Prof^a. José Manoel Caron, MSc.
UTFPR

Prof. João Elias Abdalla Filho, Dr.
UTFPR

Dedicamos este trabalho aos nossos familiares e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos aos nossos familiares que nos deram todo o suporte para podermos realizar esse trabalho.

Agradecemos ao professor Fernando Luiz Martinechen Beghetto por toda a orientação prestada para a realização desse trabalho, assim como a todos os professores do DACOC que de alguma maneira contribuíram para a elaboração desse trabalho.

Agradecemos a Bruna e a Eva, que nos animaram para que conseguíssemos chegar ao final desse trabalho.

“Algo só é impossível até que alguém duvide e acabe provando o contrário”

Albert Einstein

RESUMO

ALBUQUERQUE, F. S. C. de; KRAMAR, W. F. **Análise do comportamento estrutural de uma ponte ferroviária de concreto armado submetida a esforços de natureza dinâmica.** 92 f. Trabalho de Conclusão de Curso 2 (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

Este trabalho consiste na análise do comportamento estrutural de uma ponte ferroviária de vão curto de concreto armado submetida a solicitações dinâmicas. A ponte é composta por duas vigas de concreto armado de seção “I” paralelas e bi apoiadas de concreto armado, a partir dos esforços e tensões a que ela esteja submetida devido ao carregamento de um veículo ferroviário, utilizando-se para isso o modelo de veículo ferroviário e a rotina computacional implementada por Beghetto (2006). As vigas que compõem a estrutura foram subdivididas em vinte elementos finitos de viga Euler-Bernoulli e as amplitudes das irregularidades dos trilhos, que constituem a fonte de excitação das forças dinâmicas, foram tomadas com um valor de 2,5mm. O problema foi analisado para uma faixa de velocidades do veículo ferroviário de 1 a 100km/h. Após isso, compararam-se os resultados encontrados com a análise dinâmica com os valores de uma análise pseudo-estática majorada pelo coeficiente de impacto dinâmico da NBR 7187 (ABNT, 2003). Nessa comparação, verificou-se que os valores encontrados para a análise dinâmica superaram os valores da análise pseudo-estática quando o veículo transita sobre a ponte em velocidades próximas à condição ressonante. Por outro lado, quando em velocidades distantes da condição ressonante, o coeficiente de impacto prescrito pela NBR 7187 (ABNT, 2003) atendeu às expectativas.

Palavras-chave: Ponte ferroviária, Dinâmica Estrutural, Elementos Finitos.

ABSTRACT

ALBUQUERQUE, F. S. C. de; KRAMAR, W. F. **Analysis of the structural behavior of a railway bridge of reinforced concrete subjected to dynamic nature efforts.** 92 p. Completion of course work 2 (Bachelor of Civil Engineering) – Federal Technological University of Paraná. Curitiba, 2015.

This work dynamically analyzes the structural behavior of a railway bridge with short reinforced concrete composed of two "I" section beams parallel and bi supported, from the stresses and strains to which it is subject due to the load of a railway vehicle, using for this the rail vehicle and the computational routine implemented by Beghetto (2006). The beams that make up the structure have been subdivided into twenty finite element Euler-Bernoulli beam and the amplitude of irregularities of the rails were taken with a value of 2.5mm. The problem was analyzed for a speed range of the railway vehicle 1 to 100km/h. After that, we compare the results with the dynamic analysis with the values of a pseudo-static analysis increased by the dynamic impact coefficient of NBR 7187 (ABNT, 2003). In this comparison, it appears that the values found for the dynamic analysis outweigh the pseudo-static analysis of values when the vehicle moves on the bridge at nearly the speed resonant condition. On the other hand, when the resonant speeds far condition, the coefficient of impact prescribed by NBR 7187 (ABNT, 2003) meets expectations.

Keywords: Railway bridge, Structural Dynamics, Finite Element.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Coeficiente de impacto x vão	19
Figura 2: Carregamento harmônico – motor	26
Figura 3: Carregamento não periódico – terremoto	26
Figura 4: Ponte Tacoma Narrows em ressonância	28
Figura 5: Representação de um sistema com um grau de liberdade	28
Figura 6: Reservatório elevado	30
Figura 7: Pórtico com dois pavimentos.....	31
Figura 8: Divisão de um elemento plano em elementos finitos	31
Figura 9: Viga de Euler-Bernoulli sob ação de um carregamento transversal.....	35
Figura 10: Distribuição de tensões em uma seção de viga de Euler-Bernoulli.....	35
Figura 11: Funções interpoladoras	37
Figura 12: Elemento Finito de Viga.....	38
Figura 13: Idealização estrutural do veículo ferroviário	43
Figura 14: Fluxograma de passagem de energia entre os componentes constituintes do veículo ferroviário	44
Figura 15: Graus de liberdade do veículo ferroviário	44
Figura 16: Irregularidades da via	45
Figura 17: Pontos de contato entre rodas e trilhos	48
Figura 18: Modelo da ponte ferroviária	48
Figura 19: Representação do modelo de elementos finitos.....	49
Figura 20: Vista longitudinal e seção transversal da viga em estudo (cotas em metro)	49
Figura 21: Esquema da viga sob a ação de uma carga concentrada.....	52
Figura 22: Esquema da viga sob a ação de uma carga concentrada.....	53
Figura 23: Convenção para momento fletor positivo.....	57
Figura 24: Convenção para esforço cisalhante positivo.....	58
Figura 25: Convenção para deslocamento positiva.....	58
Figura 26: Convenção para tensão normal positiva	58
Figura 27: Convenção para rotação positiva	58
Figura 28: Histórico do Momento Fletor no centro do vão para a análise Pseudo-Estática ...	59
Figura 29: Histórico do esforço cisalhante no centro do vão para a análise pseudo-estática .	61

Figura 30: Histórico da Tensão Normal no centro do vão para a face inferior da viga na análise Pseudo-Estática.....	62
Figura 31: Histórico da Tensão Normal no centro do vão para a face superior da viga na análise Pseudo-Estática.....	63
Figura 32: Histórico dos deslocamentos no centro do vão para a análise Pseudo-Estática	63
Figura 33: Histórico das deformações específicas no centro do vão para a face inferior na análise Pseudo-Estática.....	64
Figura 34: Histórico das deformações específicas no centro do vão para a face superior na análise pseudo-estática	65
Figura 35: Momentos extremos para cada velocidade.....	68
Figura 36: Esforços cisalhantes extremos cada velocidade	68
Figura 37: Deslocamentos extremos para cada velocidade considerada.....	69
Figura 38: Tensões normais extremas na face inferior da viga para cada velocidade considerada.....	70
Figura 39: Tensões normais extremas na face superior da viga para cada velocidade considerada.....	71
Figura 40: Deformações específicas extremas para a face inferior da viga para cada velocidade considerada.....	72
Figura 41: Deformações específicas extremas para a face superior da viga para cada velocidade considerada.....	72
Figura 42: Razão entre momento fletor obtido com a análise dinâmica ao longo das velocidades consideradas e o maior momento fletor obtido com a análise pseudo-estática	75
Figura 43: Razão entre o esforço cisalhante positivo e negativo obtido com a análise dinâmica e o maior esforço cisalhante obtido com a análise pseudo-estática.	76
Figura 44: Razão entre deslocamento obtido com a análise dinâmica ao longo das velocidades consideradas e o maior deslocamento obtido com a análise pseudo - estática.....	76
Figura 45: Razão entre tensão normal obtida com a análise dinâmica ao longo das velocidades consideradas e a maior tensão normal obtida com a análise pseudo - estática.....	77
Figura 46: Razão entre deformação específica obtida com a análise dinâmica ao longo das velocidades consideradas e a maior deformação específica obtida com a análise pseudo - estática.	78

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Propriedades da viga utilizada no estudo	50
Tabela 2: Propriedades geométricas do trilho	50
Tabela 3: Resumo dos resultados da análise pseudo-estática.....	65
Tabela 4: Propriedades das vigas	67
Tabela 5: Resumo dos valores extremos e suas respectivas velocidades.....	73
Tabela 6: Resumo dos resultados da análise Pseudo-Estática.....	74
Tabela 7: Resumo da comparação entre análises	79

LISTA DE SIGLAS

OAE	Obra de Arte Especial
MEF	Método dos Elementos Finitos

LISTA DE ACRÔNIMOS

MatLab Matrix Laboratory

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Altura do trilho
A_R	Amplitude da onda senoidal onde transitam as rodas
{a}	Deslocamentos nodais
a	Distancia longitudinal do centro de gravidade do vagão às suspensões secundárias
B	Largura do patim do trilho
{b}	Vetor de forças volumétricas
[B]	Matriz de deformações
b	Distância longitudinal do centro de gravidade dos truques às suspensões primárias
C	Largura do boleto do trilho
c	Distância transversal do centro de gravidade dos truques às suspensões primárias
c1	Constante de amortecimento para o primeiro pavimento
c2	Constante de amortecimento para o segundo pavimento
[c]	Matriz de amortecimento do sistema
cij	Força que ocorre no nó i devido à velocidade apicada no nó j
C_{Pi}	Coefficiente de amortecimento viscoso das suspensões primárias
C_{Si}	Coefficiente de amortecimento viscoso das suspensões secundárias
D	Espessura da alma do trilho
[D]	Matriz material
δ_{Pi}	Deslocamentos da suspensão primária
δ_{Si}	Deslocamentos da suspensão secundária
dA	Diferencial de Área
dS	Diferencial de Superfície
dV	Diferencial de Volume
dX	Diferencial de Comprimento
D_D	Deformação resultante da análise dinâmica
D_{PE}	Maior deformação resultante da análise pseudo-estática
E	Módulo de elasticidade
E	Deformação específica
e	Deformação
e	Deformação resultante da análise dinâmica
e_D	Maior deformação resultante da análise pseudo-estática

e_{PE}	
$f_i(t)$	Força inercial em função do tempo
$f_d(t)$	Força de amortecimento em função do tempo
$f_s(t)$	Força de mola, em função do tempo
ϕ_{FB}	Rotação do truque dianteiro em relação ao eixo X
ϕ_{RB}	Rotação do truque traseiro em relação ao eixo X
ϕ_{CB}	Rotação do vagão em relação ao eixo X
φ	Coefficiente de impacto dinâmico
F_R	Forças aplicadas pelo veículo na ponte
F_P	Forças nas suspensões primárias
$\{f\}$	Vetor de forças nodais estaticamente equivalente
F_{DR}	Frequencia amortecida de vibração
I	Momento de inércia à flexão
I_{RI}	Irregularidades da via
\ddot{I}_{RI}	Aceleração associada às irregularidades
l	Vão da ponte
K	Rigidez do sistema
$[k]$	Matriz de rigidez do sistema
K_{Pi}	Coefficiente de rigidez elástico linear das molas das suspensões primarias
K_{Si}	Coefficiente de rigidez elástico linear das molas das suspensões secundárias
k_{ij}	Força que ocorre no nó i devido a um deslocamento unitário aplicada no nó j
k	Curvatura do eixo da viga
$[L]$	Operador diferencial
l_w	Comprimento da irregularidade dos trilhos
l_b	Comprimento da ponte
M	Momento Fletor
m	Massa do sistema
$[m]$	Matriz de massa do sistema
m_1	Massa do primeiro pavimento
m_2	Massa do segundo pavimento
m_{ij}	Força que ocorre no nó i devido à aceleração aplicada no nó j

m_{CB}	Massa do vagão
m_{FB}	Massa do truque dianteiro
m_{RB}	Massa do truque traseiro
m_{ut}	Massa por metro linear do trilho
m_w	Massa das rodas
M_D	Momento fletor resultante da análise dinâmica
M_{PD}	Maior momento fletor resultante da análise pseudo-estática
[N]	Funções de forma de um elemento finito
P	Peso específico do trilho
P_w	Pontos de contato das rodas com os trilhos
$p(t)$	Força aplicada em função do tempo
Π	Energia potencial de um elemento finito
R_a	Reação de apoio no ponto a
R_b	Reação de apoio no ponto b
σ	Tensão normal
δP_i	Deslocamento das suspensões primárias
δS_i	Deslocamento das suspensões secundárias
T	Energia cinética do elemento finito
{t}	Vetor de forças superficiais
Θ_{FB}	Rotação do truque dianteiro em relação ao eixo Y
Θ_{RB}	Rotação do truque traseiro em relação ao eixo Y
Θ_{CB}	Rotação do vagão em relação ao eixo Y
U	Energia elástica interna
U_d	Vetor deslocamento dos nós
$u(t)$	Deslocamento em função do tempo
{u}	Deslocamentos
u_1	Deslocamento do primeiro pavimento
u_2	Deslocamento do segundo pavimento
$\dot{u}(t)$	Velocidade em função do tempo
$\ddot{u}(t)$	Aceleração em função do tempo
V	Energia potencial de deformação do elemento finito

$v(t)$	Velocidade em função do tempo
v	Campo de deslocamento
V_{RD}	Velocidade ressonante
V_D	Esforço cisalhante resultante da análise dinâmica
V_{PE}	Maior esforço cisalhante resultante da análise pseudo-dinâmica
W	Trabalho das forças externas
ω_{nbi}	Frequências naturais de vibração
ω_{dbi}	Frequências amortecidas de vibração
ω_{dt}	Frequências associadas as irregularidades
y	Posição da linha neutra
y_{ln}	Distancia até a linha neutra
Z_{FB}	Translação do truque dianteiro em relação ao eixo Z
Z_{RB}	Translação do truque traseiro em relação ao eixo Z
Z_{CB}	Translação do vagão em relação ao eixo Z
ζ	Razao de amortecimento dinamico

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	18
1.1	Objetivo Geral.....	20
1.2	Objetivos Específicos.....	20
1.3	Justificativa.....	20
2	REFERENCIAL TEÓRICO.....	22
2.1	Análise Dinâmica.....	26
2.1.1	<i>Ressonância</i>	27
2.1.2	<i>Sistemas com 1 grau de liberdade</i>	28
2.1.3	<i>Sistemas com múltiplos graus de liberdade</i>	30
2.2	Método dos Elementos Finitos.....	31
2.3	Viga de Euler-Bernoulli.....	34
3	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	42
3.1	Modelo de Veículo.....	42
3.2	Modelo de Ponte.....	48
3.3	Esforços, tensões normais e deformações específicas.....	51
3.4	Análise Pseudo-Estática.....	52
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	57
4.1	Resultados da Análise Pseudo-Estática.....	57
4.2	Resultados da Análise Dinâmica.....	66
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	80
5.1	Conclusões.....	80
5.2	Sugestões Para Trabalhos Futuros.....	81
	REFERÊNCIAS.....	82
	APÊNDICE A.....	88

1 INTRODUÇÃO

O Brasil, quinto maior país em extensão territorial e sétima maior economia do mundo, baseia grande parte do transporte e escoamento de sua produção industrial no modal rodoviário. Estudos indicam que o modal rodoviário é responsável por 59% do transporte de cargas do país, enquanto o modal ferroviário responde por cerca de 24% (FIESP, 2014).

Quando comparados os custos de transporte dos dois modais, quanto maior a distância percorrida e maior a carga transportada, a utilização do modal ferroviário será mais vantajosa. Há uma certa igualdade de custos para cargas entre 27 e 40 toneladas, sendo que quanto maior a distância do transporte, mais econômico será o transporte ferroviário. Transporte de cargas acima de 40 toneladas tendem a ser mais econômicos quando realizados por ferrovias, independente da distância percorrida (CNT, 2013).

Em relação à sua extensão, a malha ferroviária brasileira chegou a ter aproximadamente 38.000km na década de 1960. Porém, até a década de 1980, ocorreram diminuições na sua extensão e, até hoje, se mantém aproximadamente com 30.000km (CNT, 2013).

Nesse contexto, em agosto de 2012, foi lançado um novo programa de desenvolvimento da infraestrutura brasileira com investimentos previstos de mais 242 bilhões de reais na área de logística, sendo que, deste montante, mais de 91 bilhões de reais se destinam a investimentos em ferrovias (LOGÍSTICA BRASIL, 2014).

Para a construção dessas ferrovias, em muitos momentos também será necessário a construção de obras de arte especiais, as chamadas OAE's, que são, por exemplo, as pontes.

A NBR 7187 (ABNT, 2003), norma brasileira que versa sobre o projeto de pontes de concreto armado e protendido, em seu item 7.2.1.2 define que o efeito dinâmico das cargas móveis deve ser analisado pela teoria da dinâmica das estruturas. Porém, permite assimilar as cargas móveis a cargas estáticas mediante a consideração de um determinado coeficiente de impacto, sendo que este depende exclusivamente do comprimento do vão teórico do elemento solicitado. A expressão que fornece o coeficiente de impacto dinâmico pode ser observada em (1), onde l é o comprimento do vão teórico da ponte. Para o caso de estruturas com vãos desiguais, em que o menor vão não seja inferior a 70% do maior vão, a norma permite considerar um vão equivalente como sendo a média aritmética de todos os vãos teóricos. Em caso de balanços, o vão teórico corresponde a duas vezes o comprimento do balanço.

$$\varphi = 0,001 \cdot (1600 - 60\sqrt{l} + 2,25 \cdot l) \geq 1,2 \quad (1)$$

Com a expressão (1), pode-se traçar um gráfico com os diferentes valores do vão teórico, como pode ser observado na Figura 1. A partir de sua observação, nota-se que quanto menor o vão teórico da ponte, maior será o coeficiente de impacto dinâmico a ser aplicado na estrutura.

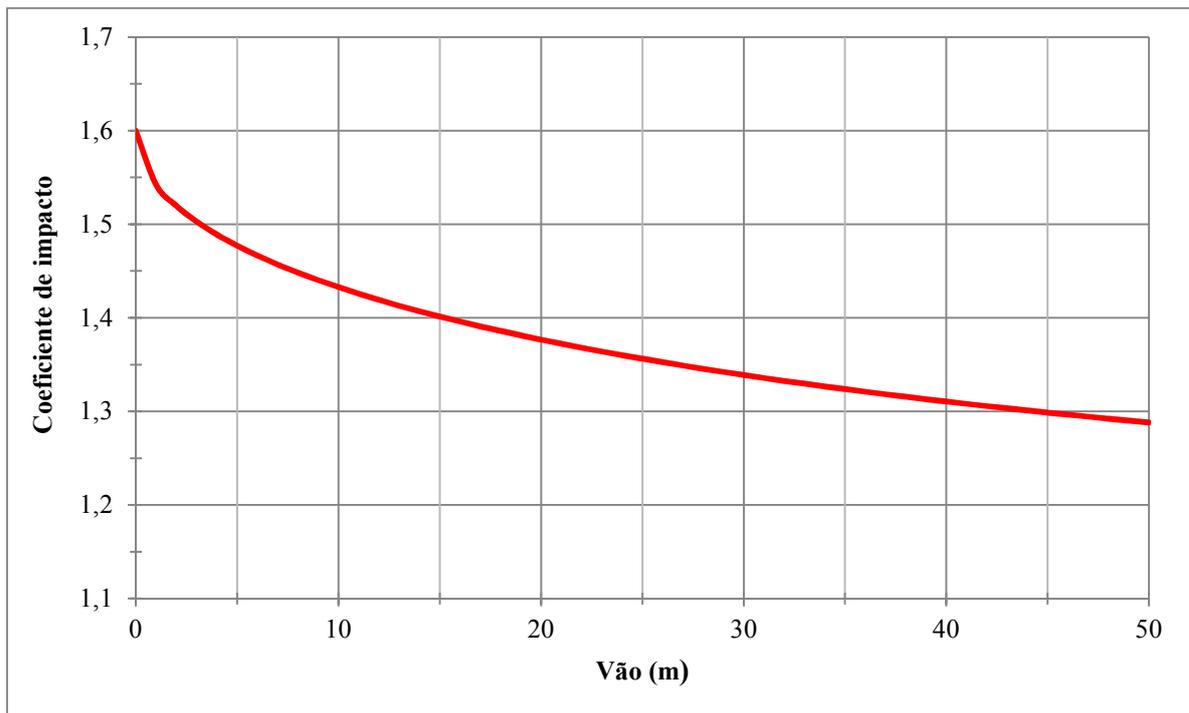


Figura 1: Coeficiente de impacto x vão
Fonte: Autoria própria

Entretanto, tendo em vista que a concepção e construção dessas estruturas são cada vez menos triviais e há a necessidade de construí-las de uma maneira econômica e que garanta sua segurança estrutural frente aos diversos tipos de carregamento a que ela estiver sujeita, faz-se necessário uma análise estrutural mais complexa, que possibilite resultados mais acurados e mais próximos da realidade do que uma simples análise com envoltória de esforços mediante a aplicação de um determinado coeficiente de impacto. Assim, é sempre muito bem vinda uma análise estrutural que considere a variação temporal de determinados carregamentos durante a vida útil da estrutura, bem como a influência da massa, inércia, amortecimento e frequências naturais de vibração do próprio elemento estrutural.

1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desse trabalho é analisar o comportamento dinâmico estrutural de uma ponte ferroviária com vão de 10,00m de comprimento composta por duas vigas de concreto armado de seção “T” paralelas e bi apoiadas, a partir dos esforços e tensões a que ela esteja submetida devido ao carregamento de um veículo ferroviário.

1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos desse trabalho são:

- Obter numericamente os esforços, tensões e o histórico de deslocamentos da estrutura para a análise dinâmica;
- Obter analiticamente os esforços, tensões e o histórico de deslocamentos da estrutura para a análise pseudo-estática;
- Comparar os resultados obtidos através da análise dinâmica e da análise pseudo-estática.

1.3 Justificativa

Com a injeção de muitos recursos a partir do governo federal para investimento na infraestrutura logística do Brasil, sendo grande parte destes destinados a ferrovias, deve haver uma grande demanda pela construção de pontes para que esse tipo de modal de transporte possa ser implantado e operado de maneira satisfatória.

Uma vez que as estruturas concebidas na construção civil são cada vez mais complexas e o fator econômico é tão importante quanto a segurança estrutural para definir a viabilidade ou não de sua construção, é importante que se realize uma análise estrutural o mais profunda e detalhada possível. A análise dinâmica de uma estrutura pode render resultados diferentes daqueles obtidos de uma maneira estática, o que pode viabilizar ou não

sua construção e fazer com que os recursos disponíveis para sua construção sejam melhor aproveitados.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, apresenta-se uma revisão bibliográfica dos trabalhos mais relevantes ao tema de estudo.

Fellipe Filho (2008) comparou os efeitos dinâmicos quando utilizados coeficientes de impacto e aqueles obtidos através de um modelo computacional via método dos elementos finitos considerando as forças inerciais para pontes de 20, 30 e 40 metros de vão. A ponte é representada por elementos de barra ao longo do seu eixo, com rigidez à flexão e os veículos foram simulados por um sistema de 2 graus de liberdade, obtendo valores que indicam que o cálculo com a utilização de coeficientes de impacto atende ao esperado, produzindo resultados conservadores.

Cunha (2011) analisou as vibrações induzidas em estruturas de concreto de pontes ferroviárias produzidas pela composição de um trem unidade elétrico típico. O modelo do veículo possuía nove graus de liberdade e foram definidos os carregamentos do trem sobre tabuleiro rígido indeslocável, sendo consideradas as irregularidades dos trilhos e das rodas, avaliando-se a amplificação dinâmica obtida e comparando-a com os coeficientes de impacto contidos na NBR 7189 que versa sobre as cargas a serem consideradas para o cálculo de pontes ferroviárias.

Liu et al. (2009) estudaram em que condições a interação dinâmica ponte-trem deve ser considerada para a análise de uma ponte durante a passagem de um trem, para diferentes modelos de veículos. O estudo levou em consideração diversos fatores, como relação entre a massa do veículo e a ponte, a razão entre a frequência natural do veículo e da ponte, a velocidade do trem e a relação de amortecimento da estrutura, mostrando que a amplificação dinâmica atinge seu valor máximo quando o trem está em sua velocidade ressonante.

Majka et al. (2009) estudaram as respostas dinâmicas de uma ponte ferroviária existente, considerando as irregularidades dos trilhos e a assimetria da ponte, obtendo resultados em que as respostas dinâmicas da ponte aumentaram quando a velocidade do trem se aproximava da velocidade crítica, sendo que as irregularidades dos trilhos afetaram consideravelmente as respostas laterais da ponte.

Garinei *et al.* (2007) utilizaram o modelo de uma viga simplesmente apoiada submetida à cargas variáveis no tempo para analisar as deformações produzidas em pontes de pequeno e médio vão, considerando a influência da velocidade, da frequência e da fase dos 7 componentes alternados, de forma a determinar as condições em que podem ocorrer fenômenos de ressonância.

Goicolea *et al.* (2004) demonstram a importância da verificação do comportamento das reações de apoio em pontes. Devido à passagem de trens de alta velocidade, pode surgir um esforço de tração nos apoios como consequência das vibrações dinâmicas da estrutura. Análises realizadas para um viaduto sobre o Rio Tejo, formado por tramos simplesmente apoiados, para a passagem do comboio EUROSTAR, às velocidades de 20 km/h e 225 km/h (esta última corresponde a uma velocidade de ressonância) demonstraram a importância deste fenômeno. Para a velocidade de 225 km/h, a reação positiva devida às ações permanentes é anulada pela reação negativa que se verifica à passagem do comboio.

Olsson (1985) desenvolveu um modelo de interação veículo-estrutura usando um sistema massa-mola-amortecedor, usando coordenadas modais para obter as respostas dinâmicas da ponte.

Lin *et al.* (2008) realizaram estudos em vigas elásticas sujeita à carga móvel com velocidade constante e variável, utilizando sistemas massa-mola-amortecedor com um e com dois graus de liberdade para representar o veículo ferroviário.

Silva (1996) utilizou um modelo massa-mola-amortecedor com dois graus de liberdade para estudar a interação dinâmica veículo-estrutura com irregularidades não determinísticas da superfície do pavimento.

Correa (2003) analisou as vibrações em pontes ferroviárias produzidas pela passagem da composição de dois TUE's (Trem Unidade Elétrico) típicos nas vias urbanas brasileiras, usando modelos de trem com cargas concentradas, e sistemas de massa-mola-amortecedor, e observou que a faixa segura para tráfego desta composição é de até 100km/h.

Ribeiro *et al.* (2013) efetuaram a validação experimental de um modelo numérico de análise da interação comboio-estrutura na ponte ferroviária de São Lourenço, em Portugal. Foram desenvolvidos modelos numéricos tridimensionais da ponte, incluindo a via férrea, e o comboio.

Nóbrega (2004) realizou um estudo diversificado e integrado do comportamento de estruturas pré-moldadas de concreto, por meio de ensaios experimentais e computacionais, estáticos e dinâmicos. Diferentes modelos físicos foram construídos, cada um possuindo uma particularidade estrutural (íntegro, com dano localizado, com dano generalizado e com vínculo pilar-viga semi-rígido).

Wiriyacha *et al.* (1982) estudaram o impacto dinâmico causado em pontes devido à passagem de veículos ferroviário usando irregularidades aleatórias e defeitos das rodas.

Chu *et al.* (1986) estudaram o impacto em pontes ferroviárias de concreto protendido devido à passagem de um veículo usando irregularidades aleatórias.

Yang *et al.* (1997) estudaram o efeito de trens em alta velocidade sobre pontes, modeladas como vigas simplesmente apoiadas. Uma série de forças concentradas verticais e sistemas massa-mola-amortecedor foram usados como modelo para os trens.

Cheng *et al.* (2001) analisaram a vibração de uma ponte com vários vãos não uniformes devido à passagem de cargas móveis.

Rigueiro *et al.* (2009) estudaram a influência das irregularidades da via na resposta dinâmica de pontes ferroviárias de vão médio.

Battista *et al.* (2000) utilizou modelos tridimensionais para a análise do comportamento estrutural dinâmico e para o projeto de reabilitação de um conjunto de pontes metálicas na cidade do Rio de Janeiro.

Savin (2001) propôs expressões analíticas para o fator de amplificação dinâmica e para a resposta dinâmica para vigas bi-apoiadas sob a passagem de cargas móveis.

Rocha *et al.* (2012) estudaram a influência da interação ponte-comboio na avaliação da segurança de uma ponte mista de aço-concreto de pequeno vão para passagem de trens de alta velocidade, considerando as incertezas associadas aos parâmetros do sistema estrutural e dos comboios, e concluíram que os principais fatores de influência para a resposta dinâmica da ponte são as massas associadas ao vagão.

Vásquez (2013) estudou os fatores que influenciam a resposta dinâmica veículo estrutura devido ao efeito da frenagem do veículo. Para o estudo, foi realizada uma modelagem numérica computacional da via, do veículo e das forças envolvidas. Concluiu-se que a rigidez e o amortecimento horizontal do sistema de suspensão do veículo tem uma influência direta no resultado, de modo que a escolha de valores adequados para a análise numérica é crucial para a resposta final do sistema.

Meixedo *et al.* (2012) estudou o comportamento dinâmico do viaduto ferroviário Flyover de Alverca quando sujeito ao tráfego de alta velocidade. A estrutura em foco localiza-se no trecho ferroviário linha do Norte que liga as cidades de Lisboa ao Porto. Os comboios escolhidos para interagir com o viaduto foram o articulado (*TGV*) Duplo e o convencional Alfa Pendular. Neste sentido, efetuaram-se análises com interação entre a ponte e o comboio, que foram posteriormente confrontadas com os resultados obtidos por aplicação de uma metodologia dinâmica de cargas móveis. Durante este processo executaram-se ainda verificações regulamentares relacionadas com a segurança estrutural, a estabilidade da via e o conforto dos passageiros.

Dinh *et al.* (2009) formularam a interação dinâmica tridimensional entre uma ponte e um trem de alta velocidade, desenvolvendo uma interface de contato roda-trilho. Nesta interface, a perda de contato é permitida, e a força de contato lateral é considerada como uma carga pontual. As rotações relativas entre as rodas e os trilhos nos eixos vertical e longitudinal foram consideradas, e o estudo de caso foi realizado com um trem de dez vagões considerando-o em diversas velocidades.

Liu *et al.* (2008) mediram *in situ* as respostas dinâmicas do viaduto de Sesia, localizado na linha italiana de alta velocidade entre Turim e Milão, e as comparou com o modelo numérico de análise. A ponte foi analisada sob vibração e excitação causada pelo trem de alta velocidade italiano ETR500Y. Para prever a resposta dinâmica da ponte sob a passagem do trem de alta velocidade, foi considerado dois modelos de interação trem-ponte. Um com um veículo de 15 graus de liberdade, e outro com um veículo representado como um conjunto de cargas móveis. Foram comparadas as acelerações e deformações de ambos os modelos e os resultados medidos na ponte, e ambos os resultados experimentais se aproximaram dos resultados medidos.

Li *et al.* (2009) implementaram um método numérico para avaliar o comportamento dinâmico de pontes sob a passagem de trens de forma não-linear. O método dos elementos finitos foi utilizado na modelagem da ponte e do veículo.

Xia *et al.* (2003) estudaram a interação entre a ponte e um trem articulado de alta velocidade. O veículo é composto por um modelo articulado, e a ponte é modelada em elementos finitos. Xia *et al.* adotaram como estudo de caso o trem *Thalys* passando sobre a ponte de St. Antonie, na linha de alta velocidade entre Paris e Bruxelas. Foram realizadas medições *in situ*, e posteriormente comparadas aos resultados teóricos.

Xia *et al.* (2005) analisaram a interação dinâmica ponte-veículo, considerando um trem de passageiro de alta velocidade, que foi implementado com 27 graus de liberdade. As respostas dinâmicas da ponte consideradas foram suas deflexões, amplitudes laterais, acelerações laterais e verticais e no veículo foram calculados seu fator de descarrilamento, forças de contato e suas acelerações.

Beghetto (2006) estudou a resposta dinâmica de uma ponte ferroviária e de um veículo composto por uma composição de corpos rígidos associados aos sistemas de suspensões. Obteve-se as equações que regem o movimento do veículo através do princípio de D'Alembert, da 2ª Lei de Newton e do equilíbrio de forças e de momentos. A ponte foi modelada como sendo composta por duas vigas contínuas, paralelas e bi-apoiadas, discretizadas por elementos finitos de viga de Euler-Bernoulli, com o amortecimento implementado considerando-se o método de Rayleigh. As equações de movimento da ponte e do veículo foram integradas numericamente utilizando-se o método de Newmark. As forças determinadas nas rodas do veículo são aplicadas à estrutura através de pontos de contato entre roda-trilho. Obteve-se que os máximos deslocamentos ocorreram em situações de velocidades baixas do veículo e máximas amplitudes de irregularidades. Os valores de deslocamento, bem como os de aceleração do vagão encontrados são relativamente baixos. Para o caso específico da ponte, os máximos deslocamentos ocorrem próximos à velocidade ressonante, que ocorre por volta de 30km/h.

2.1 Análise dinâmica

Uma carga é denominada dinâmica quando sua magnitude, direção ou posição variam no tempo. Desta maneira, a resposta estrutural para esta carga dinâmica também variará no tempo, sendo, portanto, uma resposta dinâmica (CLOUGH E PENZIEN, 2003).

O carregamento dinâmico pode ser classificado em dois tipos: o carregamento periódico e o carregamento não periódico (CLOUGH E PENZIEN, 2003).

O carregamento periódico pode ser entendido como aquele que possui uma mesma variação no tempo por repetidos números de ciclos, como no caso da vibração oriunda de um motor instalado em algum ponto da estrutura, conforme ilustrado na Figura 2. Estes carregamentos possuem variação senoidal ou cossenoidal no tempo, sendo chamados de carregamentos harmônicos. Em contrapartida, um carregamento não periódico é aquele que tem uma duração que não se repete de maneira cíclica, como nos casos de terremoto ou de explosões próximas à estrutura. A Figura 3 ilustra este último tipo de carregamento (CLOUGH E PENZIEN, 2003).

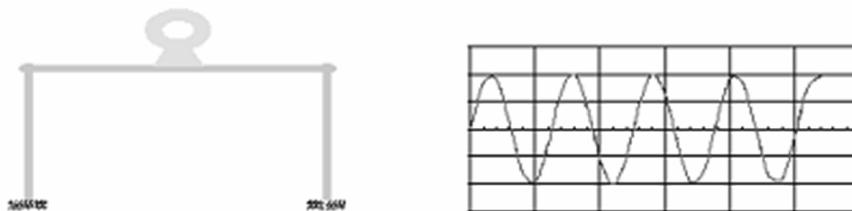


Figura 2: Carregamento harmônico – motor
Fonte: CLOUGH E PENZIEN, 2003.

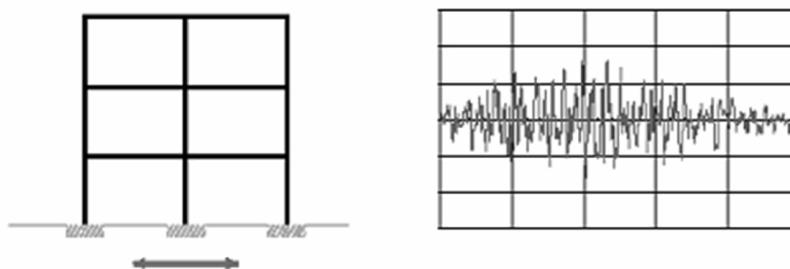


Figura 3: Carregamento não periódico – terremoto
Fonte: CLOUGH E PENZIEN, 2003.

Para a análise de estruturas submetidas a estes carregamentos, é necessário que seja considerado um modelo matemático que possa descrever de maneira aproximada o funcionamento da estrutura. Este modelo deve permitir a obtenção de relações matemáticas entre as características essenciais da excitação e da resposta estrutural resultante (MENDES E OLIVEIRA, 2008).

2.1.1 Ressonância

A ressonância é um fenômeno físico em que ocorre a transferência de energia de um sistema oscilante para outro. Isso ocorre em situações em que a frequência de oscilação do sistema excitador coincide com as frequências naturais do sistema excitado, levando a um aumento das amplitudes de vibração desse segundo sistema (KÜSTER E SARTORI, 2011).

Em estruturas da construção civil, este fenômeno é indesejável, pois um rápido aumento da amplitude de vibração de uma estrutura pode levar a deslocamentos excessivos, desconforto de usuários e, em condições extremas, à sua ruína.

Um dos exemplos mais clássicos de estruturas que entraram em ressonância é a Ponte Tacoma Narrows, localizada em Washington, nos Estados Unidos. Em novembro de 1940, poucos meses após sua inauguração, ventos de 65km/h atingiram a estrutura, fazendo-a entrar em ressonância e levando-a a ruína. Na Figura 4, pode-se observar a ponte no modo de ressonância torcional.

Outro exemplo de estrutura que sofreu com este tipo de fenômeno é a Ponte Rio-Niterói. Apesar de não ter sofrido nenhum dano estrutural, em situações de ventos de 55km/h a ponte oscilava com uma amplitude de 1,20m com um período de 3s. (GRECO, 2008)

A diferença das duas é o fato de que, enquanto a Ponte Tacoma Narrows atingiu o segundo modo de vibração, que é o modo torcional, a Ponte Rio-Niterói só teve o primeiro modo de vibração, que é o modo flexional.

Para o controle de tais oscilações, foram instalados 32 atenuadores dinâmicos sincronizados dentro das vigas do vão central da ponte, reduzindo em mais de 80% a amplitude das oscilações, de maneira que não causem desconforto aos usuários da ponte. (PET, 2014)



Figura 4: Ponte Tacoma Narrows em ressonância
Fonte: UNIVERSITY OF WASHINGTON LIBRARIES, 2014

Nas próximas seções, serão apresentadas as equações do movimento, primeiramente para um grau de liberdade e posteriormente para múltiplos graus de liberdade, tomando por base os trabalhos realizados por Cheun e Leung (1992), Chopra (1995), Clough e Penzien (2003), Mendes e Oliveira (2008) e Paultre (2010).

2.1.2 Sistemas com 1 grau de liberdade

Os sistemas com um único grau de liberdade podem ser idealizados como sistemas compostos por uma massa, uma mola e um amortecedor, como ilustrado na Figura 5, onde a constante k representa a rigidez do sistema, c representa a constante de amortecimento, $u(t)$ representa o deslocamento em função do tempo e $p(t)$ a força aplicada em função do tempo.

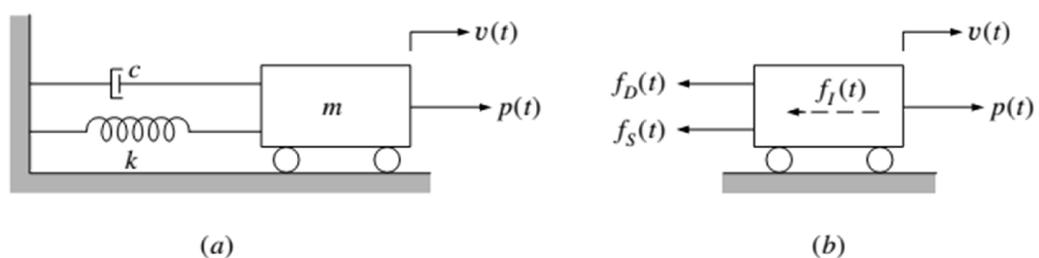


Figura 5: Representação de um sistema com um grau de liberdade
Fonte: CLOUGH E PENZIEN, 2003.

Do equilíbrio de forças, pode-se escrever que:

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \quad (2)$$

O primeiro termo da equação representa as forças inerciais, que, de acordo com o princípio de D'Alembert, é o produto da massa, m , e da aceleração $\ddot{u}(t)$:

$$f_I(t) = m\ddot{u}(t) \quad (3)$$

O segundo termo da equação representa as forças de amortecimento do sistema, que pode ser entendida como o produto entre a constante de amortecimento, c , e a velocidade do sistema $\dot{u}(t)$:

$$f_D(t) = c\dot{u}(t) \quad (4)$$

O terceiro termo da equação (2) representa as forças elásticas do sistema, podendo ser representado pelo produto entre a rigidez, k , e o deslocamento, $u(t)$, conforme a equação (5):

$$f_S(t) = ku(t) \quad (5)$$

Assim sendo, a equação geral do movimento para sistemas amortecidos com um único grau de liberdade pode ser escrita como segue na equação (6):

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (6)$$

Essa equação é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, não homogênea, para o sistema amortecido, envolvendo uma força externa, caso chamado de vibração forçada amortecida.

Na engenharia civil, um dos exemplos clássicos de estruturas com um grau de liberdade é o do reservatório de água elevado, como ilustrado na Figura 6.

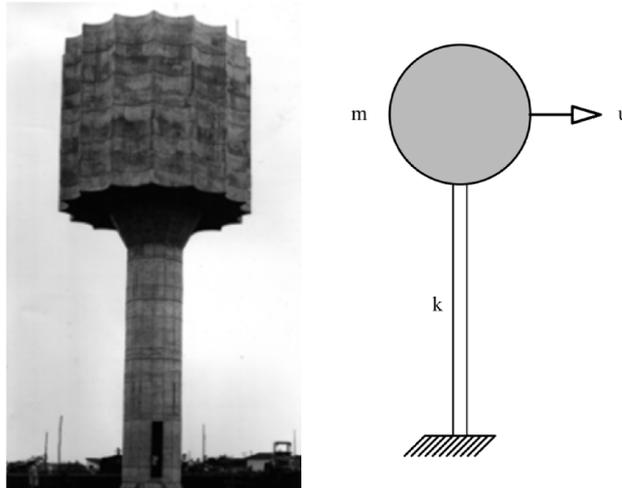


Figura 6: Reservatório elevado
Fonte: DAAE, 2014

Na Figura 6, também, pode-se observar o reservatório de água elevado idealizado. No momento em que este se encontra cheio, pode-se desprezar a massa do pilar de sustentação, sendo que este elemento contribui apenas para a rigidez do sistema estrutural.

2.1.3 *Sistemas com múltiplos graus de liberdade*

O comportamento de uma estrutura contendo múltiplos graus de liberdade pode ser representado através da seguinte equação matricial:

$$[m].\{\ddot{u}(t)\} + [c].\{\dot{u}(t)\} + [k].\{u(t)\} = \{p(t)\} \quad (7)$$

Na equação (7), a matriz $[m]$ representa a matriz de massas, a matriz $[c]$ representa a matriz de amortecimento e a matriz $[k]$ representa a matriz de rigidez da estrutura. Em cada uma destas matrizes, os elementos m_{ij} , c_{ij} e k_{ij} representam as forças que ocorrem no grau de liberdade i quando ocorre a aplicação de uma aceleração, uma velocidade ou um deslocamento unitário em um grau de liberdade j .

Os vetores $\{\ddot{u}\}$, $\{\dot{u}\}$ e $\{u\}$ representam, respectivamente, as acelerações, velocidades e deslocamentos relativos a cada um dos n graus de liberdade da estrutura.

Já o vetor $\{p(t)\}$ contém as forças externas aplicadas em cada grau dos n graus de liberdade da estrutura.

Um exemplo de estrutura com múltiplos graus de liberdade na engenharia civil é de um edifício de dois andares, como pode ser observado na Figura 7.

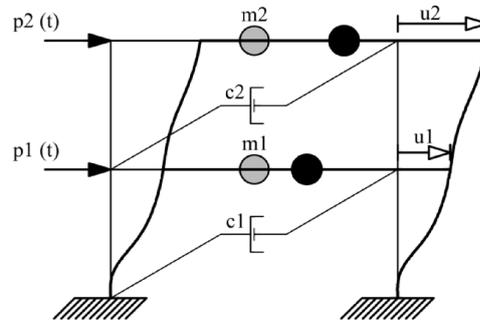


Figura 7: Pórtico com dois pavimentos
Fonte: CHOPRA, 1995

2.2 Método dos Elementos Finitos

O processo de divisão de sistemas complexos em elementos cujo comportamento é prontamente entendido, e posteriormente reconstruir o sistema original com estes componentes para estudar seu comportamento no estado natural é um procedimento utilizado por engenheiros, cientistas e até mesmo economistas (ZIENKIEWICZ E TAYLOR, 2000).

Na Figura 8 é ilustrada uma região plana dividida em elementos finitos (Idem, 2000).

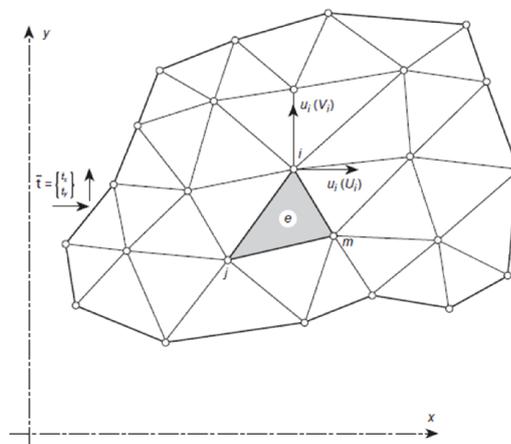


Figura 8: Divisão de um elemento plano em elementos finitos
Fonte: ZIENKIEWICZ E TAYLOR, 2000).

Com advento de computadores digitais, problemas discretos podem ser resolvidos prontamente, mesmo se o seu número de elementos for muito grande.

O Método dos Elementos Finitos teve um desenvolvimento recente, sendo conhecido desde meados da década de 50. Na década de 1940, Newmark mostrou que bons resultados para um problema elástico contínuo pode ser obtido substituindo pequenas porções do elemento contínuo por barras elásticas. Argyris e Kelsey (1954) desenvolveram um dos trabalhos pioneiros na área, onde o método de Rayleigh-Ritz com a técnica dos elementos finitos foi aplicada para analisar fuselagens e asas de aviões (ASSAN, 2003).

Na década de 1950 engenheiros e pesquisadores envolvidos no desenvolvimento de aviões a jato na Boeing iniciaram os primeiros trabalhos práticos no estabelecimento do MEF aplicados à indústria aeronáutica. M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin e L. J. Topp publicaram em 1956, um dos primeiros artigos que delinearam as principais ideias do MEF, entre elas a formulação matemática dos elementos e a montagem da matriz de elementos.

Ray Clough, na época professor na Universidade de Berkeley, publicou um artigo onde descrevia o método com o nome de elementos finitos, o que deu início à intensas pesquisas por seus colegas em Berkeley, dentre eles E. Wilson e R. L. Taylor, T. J. R. Hughes, C. Felippa e K. J. Bathe.

Atualmente, devido à evolução dos computadores, ocorreu uma grande expansão do método para várias áreas do conhecimento, estando disponíveis milhares de programas computacionais que utilizam o MEF em suas análises (Idem, 2003).

A energia potencial de um elemento finito, representada por (Π) , é constituída pela diferença entre a energia elástica interna (U), e o trabalho das forças externas (W), conforme apresentado pela Equação (8):

$$\Pi = U - W \quad (8)$$

A expressão da energia elástica interna para uma viga eu Euler-Bernoulli é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma \epsilon \, dV = \frac{1}{2} \int M \kappa \, dx = \frac{1}{2} \int E I \kappa^2 \, dx = \frac{1}{2} \int E I (v'')^2 \, dx = \frac{1}{2} \int v'' E I v'' \, dx \quad (9)$$

E a expressão do trabalho das forças externas é dado por:

$$W = \int \{u\} \{b\} \, dv + \int \{u\} \{t\} \, ds \quad (10)$$

Sendo $\{b\}$ o vetor das componentes das forças e $\{u\}$ o campo de deslocamento. As deformações são dadas por:

$$\{e\} = [L]\{u\} \quad (11)$$

Sendo $[L]$ um operador diferencial. O campo de deslocamento $\{u\}$ é determinado pelo produto entre as funções de forma $[N]$, e os deslocamentos nodais representados por $\{a\}$.

$$\{u\} = [N]\{a\} \quad (12)$$

Substituindo a Equação (12) na Equação (11), tem-se:

$$\{e\} = [L][N]\{a\} = [B]\{a\} \quad (13)$$

Sendo $[B]$ a matriz de deformações. Pela lei de Hooke, as tensões $\{\sigma\}$ estão relacionadas com as deformações específicas $\{e\}$ através da matriz material $[D]$.

$$\{\sigma\} = [D]\{e\} \quad (14)$$

Substituindo-se a Equação (13) na Equação (14), tem-se:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{a\} \quad (15)$$

Desta forma, reescrevendo a Equação (8), obtém-se:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int \{a\}^T [B]^T [D] [B] \{a\} dV + \int \{a\}^T [N]^T [b] dV + \int \{a\}^T [N]^T \{t\} ds \quad (16)$$

A solução para o problema contínuo é o vetor das funções $\{v\}$ que conduzem a um mínimo de Π para pequenas variações $\{\partial v\}$

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} \partial a_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} \partial a_2 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} \partial a_n = 0 \quad (17)$$

Substituindo-se a Equação (16) na Equação (17), tem-se:

$$\int [B]^T [D] [B] dV \{a\} + \int [N]^T [b] dV + \int [N]^T \{t\} ds = 0 \quad (18)$$

Fazendo:

$$[K] = \int [B]^T [D] [B] dV \quad (19)$$

$$\{f\} = \int [N]^T [b] dV + \int [N]^T \{t\} ds \quad (20)$$

Resulta em:

$$[K]\{a\} + \{f\} = 0 \quad (21)$$

Onde $[K]$ é a matriz de rigidez do elemento, e $\{f\}$ o vetor das forças nodais estaticamente equivalentes às forças de volume e de superfície aplicadas ao elemento.

2.3 Viga de Euler-Bernoulli

Um dos modelos mais simples para vigas retas e prismáticas é baseado na teoria de Euler-Bernoulli, também chamada de Teoria de Viga Clássica ou Teoria de Viga de Engenharia (FELIPPA, 2001), modelo tal que será utilizado para a idealização da viga estudada no presente trabalho.

A teoria para Viga de Euler-Bernoulli se baseia nas seguintes premissas (Felippa, 2001):

- O eixo longitudinal é reto, e a seção da viga tem um plano longitudinal de simetria, onde estará contida a resultante dos carregamentos transversais;
- A seção transversal é constante ou varia suavemente;
- Faces originalmente planas e perpendiculares ao eixo transversal permanecem planas e perpendiculares no estado deformado;

- A energia interna do elemento é constituída apenas por energia devida à flexão, sendo ignoradas energias de cisalhamento e forças axiais;
- Deslocamentos transversais, rotações e deformações são muito pequenas;
- O comportamento é elástico linear e homogêneo.

Na Figura 9 é representada uma viga de Euler-Bernoulli sob ação de um carregamento transversal.

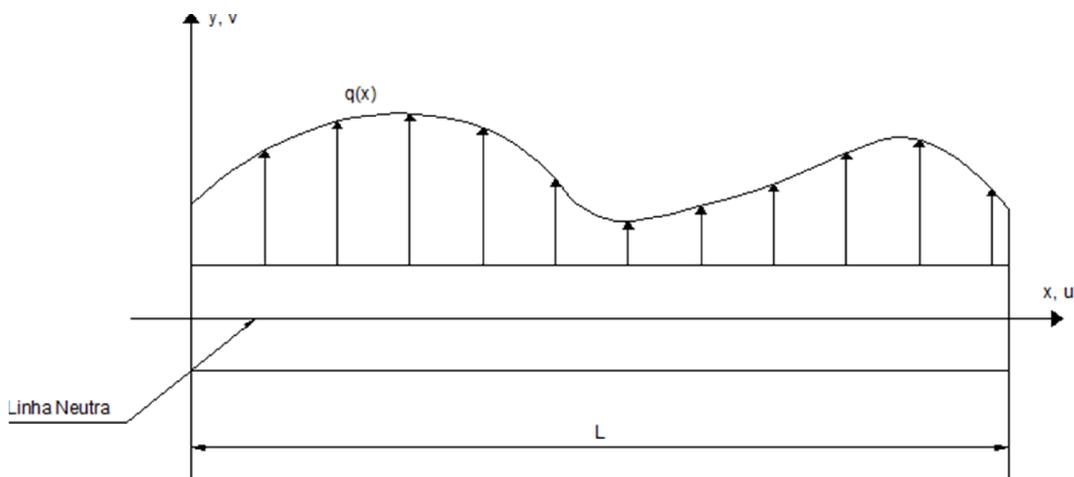


Figura 9: Viga de Euler-Bernoulli sob ação de um carregamento transversal
Fonte: Adaptado de FELIPPA, 1980.

Uma viga resiste à cargas transversais devida à ação do momento fletor, que produz tensões normais de tração em um bordo da viga e tensões normais de compressão no outro, conforme ilustrado na Figura 10.

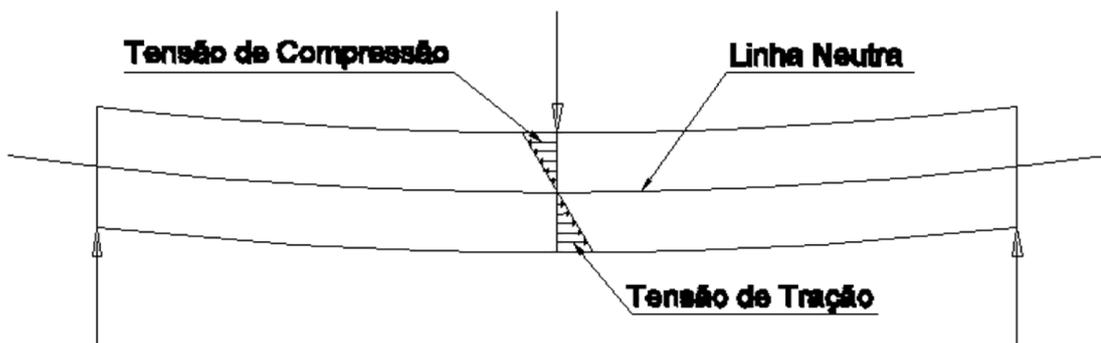


Figura 10: Distribuição de tensões em uma seção de viga de Euler-Bernoulli
Fonte: Adaptado de FELIPPA, 1980.

A teoria de viga de Euler-Bernoulli assume que a energia interna em uma viga é constituída inteiramente pelas tensões e deformações ocasionadas pelo momento fletor. Estas tensões podem ser relacionadas com as deformações pela fórmula:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -y \frac{d^2 v}{dx^2} = -yk \quad (22)$$

Onde k é a curvatura do eixo da viga, v é o deslocamento transversal de um ponto e y a posição da linha neutra.

A tensão normal devida ao momento fletor está relacionada com a deformação pela lei de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon = -Ey \frac{d^2 v}{dx^2} = -Eyk \quad (23)$$

E o momento fletor resultante:

$$M = \int -y\sigma \, dx = E \frac{d^2 v}{dx^2} \int y^2 dA = EIk \quad (24)$$

O MEF se caracteriza por aproximar o campo de deslocamentos do elemento em função dos deslocamentos nodais através de funções interpoladoras do tipo polinomial, usualmente chamadas de funções de forma (FELIPPA, 2001). Deste modo, cada função interpoladora representa a deformada do elemento quando se impõe um deslocamento unitário no grau de liberdade n no nó i , e zero em todos os outros. Na Figura 11 são mostradas as funções interpoladoras em forma de gráfico:

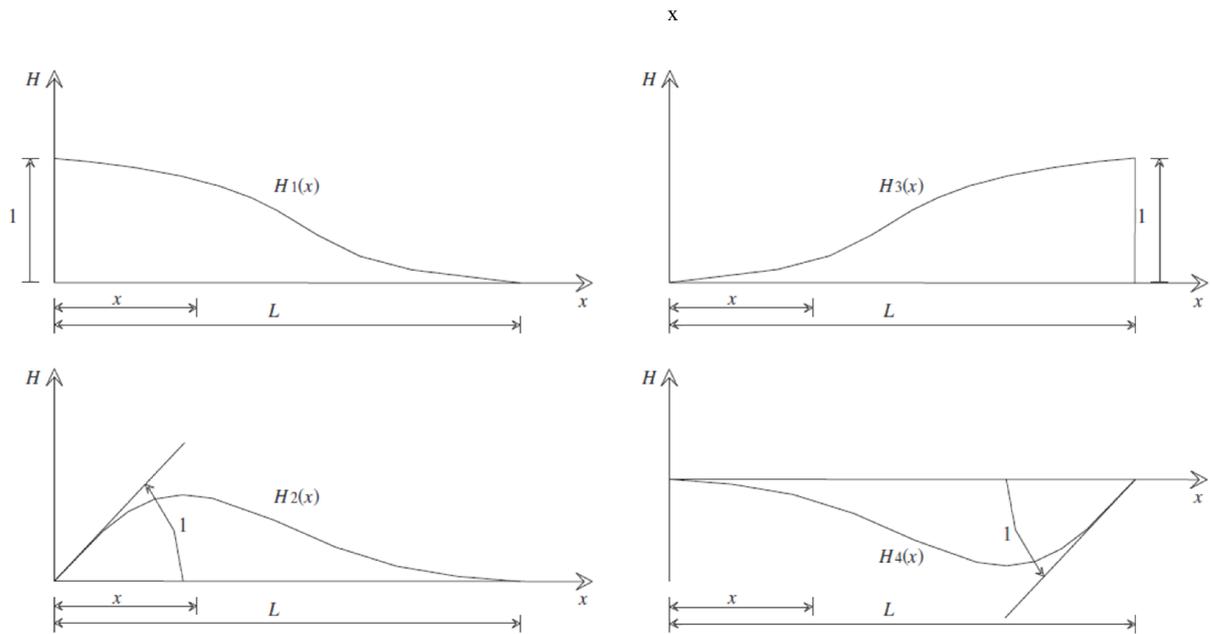


Figura 11: Funções interpoladoras
Fonte: BEGHETTO, 2011.

O elemento finito de viga é obtido pela divisão longitudinal da viga, e o elemento finito da viga de Euler-Bernoulli mais simples possui 2 nós (i e j) e 4 graus de liberdade (Felippa, 2001), e o vetor deslocamento dos nós é dado:

$$Ud = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Onde os elementos (w_1) e (w_2) representam respectivamente o deslocamento transversal e a rotação do nó i , e os elementos (w_3) e (w_4) representam respectivamente o deslocamento transversal e a rotação do nó j . Utilizando da equação (25), obtém-se o campo de deslocamento do elemento, dado pelo produto entre as funções de forma e seus deslocamentos nodais:

$$v = N_i \cdot U = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Na Figura 12 é apresentado um elemento finito de viga, de comprimento representado por (L) , com seus graus de liberdade. O deslocamento transversal e a rotação do nó i são representados respectivamente por $(w_1(x,t))$ e $(w_2(x,t))$, assim como $(w_3(x,t))$ e $(w_4(x,t))$ representam respectivamente o deslocamento transversal e a rotação do nó j .

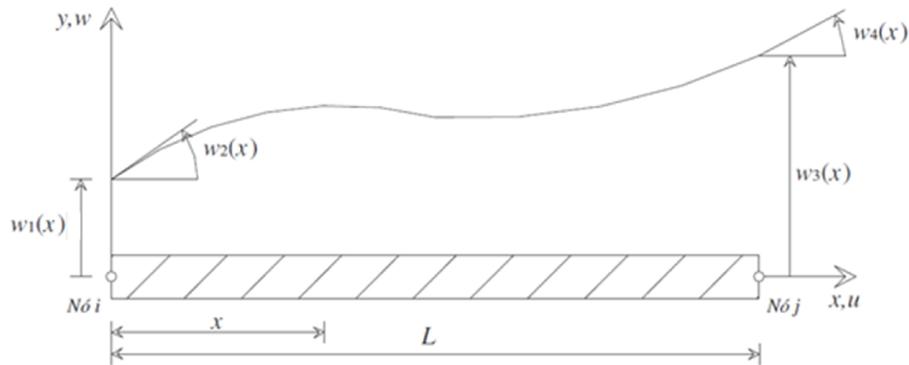


Figura 12: Elemento Finito de Viga
Fonte: Adaptado de BEGHETTO, 2011

Para a representação do campo de deslocamento (w) , é determinada uma função cúbica, com quatro condições de contorno essenciais, apresentadas a seguir.

$$w(x, y) = c_1 + c_2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right) + c_3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + c_4 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (27)$$

Na qual as condições de contorno são dadas por:

$$w_1(x, t) = w(0, t) = c_1 \quad (28)$$

$$w_2(x, t) = w'(0, t) = \frac{c_2}{L} \quad (29)$$

$$w_3(x, t) = w(L, t) = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \quad (30)$$

$$w_4(x, t) = w'(L, t) = \frac{c_2}{L} + \frac{2c_3}{L} + \frac{3c_4}{L} \quad (31)$$

Onde w' representa a primeira derivada em relação à x , ou seja, a rotação.

Tem-se

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^4 H_i(x) w_i(x, t) \quad (32)$$

Onde $H_i(x)$ representam as funções de forma, que para um elemento finito de viga são dados por:

$$N_1(x) = 1 - 3 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2 \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (33)$$

$$N_2(x) = L \left(\frac{x}{L}\right) - 2L \left(\frac{x}{L}\right)^2 + L \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (34)$$

$$N_3(x) = 3 \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (35)$$

$$N_4(x) = -L \left(\frac{x}{L}\right)^2 + L \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (36)$$

Estas funções são chamadas de funções polinomiais cúbicas de Hermite, e satisfazem as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} N_1(0) &= 1, & N'_1(0) &= 0, & N_1(L) &= 0, & N'_1(L) &= 0, \\ N_2(0) &= 0, & N'_2(0) &= 1, & N_2(L) &= 0, & N'_2(L) &= 0, \\ N_3(0) &= 0, & N'_3(0) &= 0, & N_3(L) &= 1, & N'_3(L) &= 0, \\ N_4(0) &= 0, & N'_4(0) &= 0, & N_4(L) &= 0, & N'_4(L) &= 1, \end{aligned} \quad (37)$$

Logo, pode-se escrever:

$$B_i = -\frac{d^2 H_i}{dx^2} = \frac{1}{L^2} [6 - 12x, L(4 - 6x)] \quad (38)$$

$$B_j = -\frac{d^2 H_j}{dx^2} = \frac{1}{L^2} [-6 + 12x, L(2 - 6x)] \quad (39)$$

E a matriz de rigidez do elemento pode ser escrita como:

$$K_{ij}^e = \int_0^L B_i^T E I B_j dx = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

A energia cinética do elemento finito de viga é dado por:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{w}_e\}^T [m_e] \{\dot{w}_e\} \quad (41)$$

Onde \dot{w}_e representa a primeira derivada do deslocamento de um nó de elemento finito em relação ao tempo.

A energia potencial de deformação do elemento finito de viga é dado por:

$$V = \frac{1}{2} \{w_e\}^T [k_e] \{w_e\} \quad (42)$$

Onde w_e representa o deslocamento de um nó de elemento finito.

Os esforços externos aplicados no elemento finito de viga são representados por:

$$\{F_e(t)\} = \int_0^L q(x) N_i dx \quad (43)$$

Aplicando o de equilíbrio dinâmico tem-se:

$$[m_e] \{\ddot{w}_e\} + [k_e] \{w_e\} = \{F_e(t)\} \quad (44)$$

Onde \ddot{w}_e representa a segunda derivada do deslocamento de um nó de elemento finito em relação ao tempo.

Onde (m_e) representa a matriz de massa do elemento, dada por:

$$m_{ij}^e = \int_0^L \rho A N_i N_j dx \quad (45)$$

$$m_{ij}^e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Considerando as coordenadas nodais dos elementos, e a montagem da matriz de rigidez para um sistema de coordenadas global, tem-se para um sistema sem amortecimento:

$$[M_B] \{\ddot{U}_B\} + [K_B] \{U_B\} = \{F_B(t)\} \quad (47)$$

Onde U_B representa o deslocamento dos nós dos elementos finitos em coordenadas globais, e \ddot{U}_B representa a segunda derivada do deslocamento em relação ao tempo.

A matriz de amortecimento do sistema pode ser modelada pelo amortecimento de Rayleigh, que consiste em uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez:

$$[C_B] = \alpha_B [M_B] + \beta_B [K_B] \quad (48)$$

Onde :

$$\alpha_B = \frac{2 \zeta \omega_{nb1} \omega_{nb2}}{\omega_{nb1} + \omega_{nb2}} \quad (49)$$

$$\beta_B = \frac{2 \zeta}{\omega_{nb1} + \omega_{nb2}} \quad (50)$$

Sendo que (ω_{nb1}) e (ω_{nb2}) representam, respectivamente, a primeira e a segunda frequência natural de vibração e ζ representa a razão de amortecimento do sistema.

Levando-se em consideração o amortecimento do sistema, pode-se escrever a equação (46) da seguinte forma:

$$[M_B] \{\ddot{U}_B\} + [C_B] \{\dot{U}_B\} + [K_B] \{U_B\} = \{F_B(t)\} \quad (51)$$

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O estudo do comportamento dinâmico da viga usou o modelo de veículo ferroviário desenvolvido por Beghetto (2006), o qual é composto por um vagão, dois truques, e oito rodas, com características físicas próximas aos veículos ferroviários utilizados na malha ferroviária brasileira.

O código para o cálculo do comportamento da estrutura utilizado foi o implementado por Beghetto (2006) em ambiente MatLab®, fazendo-se as devidas alterações para a ponte em concreto armado utilizado neste estudo.

As irregularidades da via constituem uma fonte de excitação para o veículo ferroviário quando o mesmo se desloca sobre os trilhos. Desta forma, esta situação é fisicamente equivalente ao veículo parado com as irregularidades da via passando sob suas rodas.

Este trabalho consiste em calcular numericamente os esforços, tensões e deslocamentos dinâmicos no ponto central da ponte em estudo provenientes da passagem de um veículo ferroviário, através da utilização do código implementado por Beghetto (2006), além de uma análise analítica pseudo-estática com a utilização do coeficiente de impacto definido NBR 7187 (ABNT, 2003) e posterior comparação entre as duas análises.

3.1 Modelo de Veículo

O modelo de veículo considerado no estudo é composto por corpos rígidos conectados por sistemas de suspensões. O veículo é constituído de um vagão, truques traseiro e dianteiro, suspensões primárias e secundárias, e um conjunto de rodas, conforme ilustrado na Figura 13.

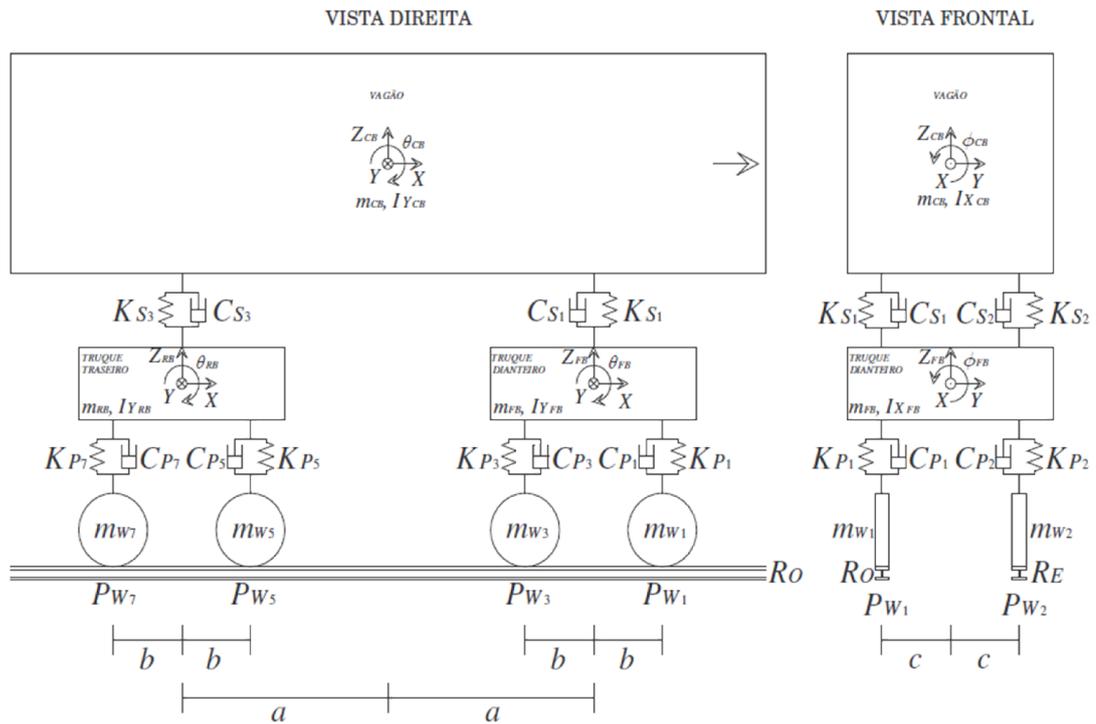


Figura 13: Idealização estrutural do veículo ferroviário
Fonte: BEGHETTO, 2006

O vagão, os truques e as rodas são considerados como corpos rígidos, com dimensões definidas e massas homogêneas. O conjunto de rodas é ligado aos truques por um sistema de suspensão primária, onde seus coeficientes de rigidez elástico linear são representados por K_{P_i} para $i=1,2,\dots,8$, e seus coeficientes de amortecimento viscoso linear representados por C_{P_i} para $i=1,2,\dots,8$. O conjunto de truques é ligado por sua vez ao vagão por um sistema de suspensão secundária, onde seus coeficientes de rigidez elástico linear são representados por K_{S_i} para $i=1,2,3$ e 4 , e seus coeficientes de amortecimento viscoso linear representados por C_{S_i} para $i=1,2,3$ e 4 . A

Figura 14 apresenta-se um fluxograma que resume a passagem de energia entre os componentes constituintes do veículo ferroviário.

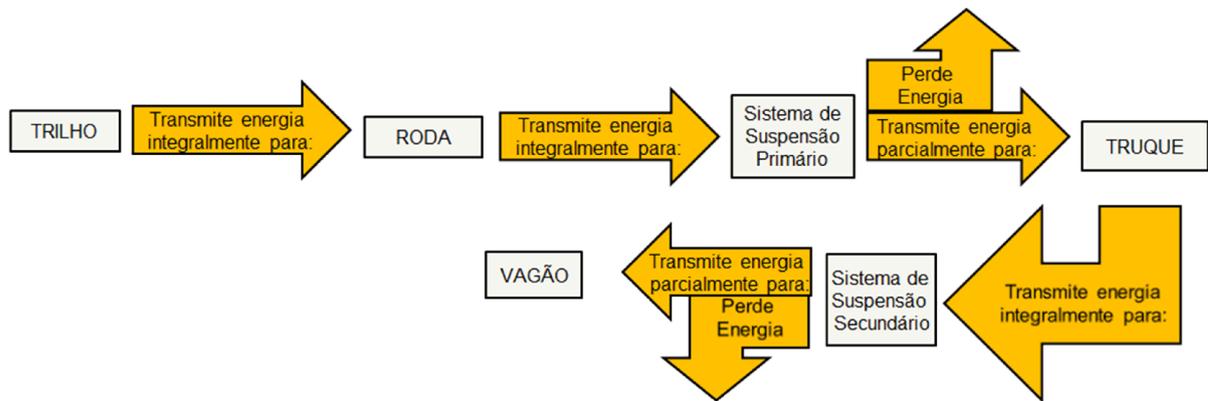


Figura 14: Fluxograma de passagem de energia entre os componentes constituintes do veículo ferroviário
 Fonte: Autoria própria

Na Figura 15 são representados os graus de liberdade considerados do veículo. O modelo desconsidera efeitos de temperatura e de atrito entre as rodas e os trilhos.

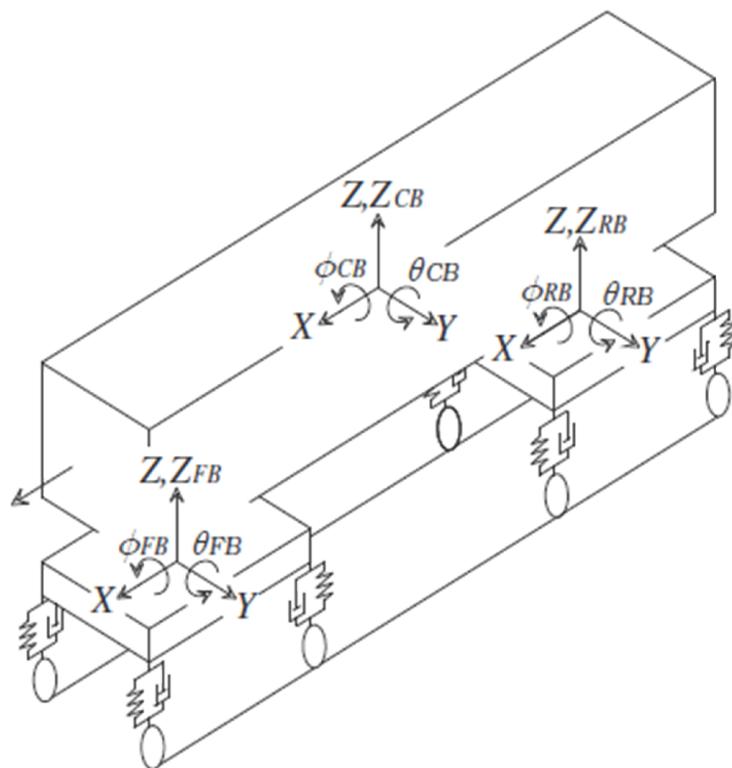


Figura 15: Graus de liberdade do veículo ferroviário
 Fonte: BEGHETTO, 2006.

Os parâmetros (Z_{FB}, Z_{RB}, Z_{CB}) representam as translações do truque dianteiro, truque traseiro e vagão ao longo do eixo Z , respectivamente. Os parâmetros $(\phi_{FB}, \phi_{RB}, \phi_{CB})$ representam as rotações do truque dianteiro, truque traseiro e vagão em torno do eixo X , respectivamente. Os parâmetros $(\theta_{FB}, \theta_{RB}, \theta_{CB})$ representam as rotações do truque dianteiro, truque traseiro e vagão em torno do eixo Y , respectivamente. Não serão consideradas as rotações em torno do eixo Z , pois apenas os efeitos provenientes das irregularidades verticais da via serão considerados, além da ponte em estudo não possuir curvatura lateral.

O veículo ao se deslocar sobre os trilhos expõe suas rodas às excitações provenientes das irregularidades dos trilhos. Na Figura 16 mostra-se um modelo de irregularidades verticais da via exageradas para melhor visualização, que serão modeladas como funções harmônicas senoidais.

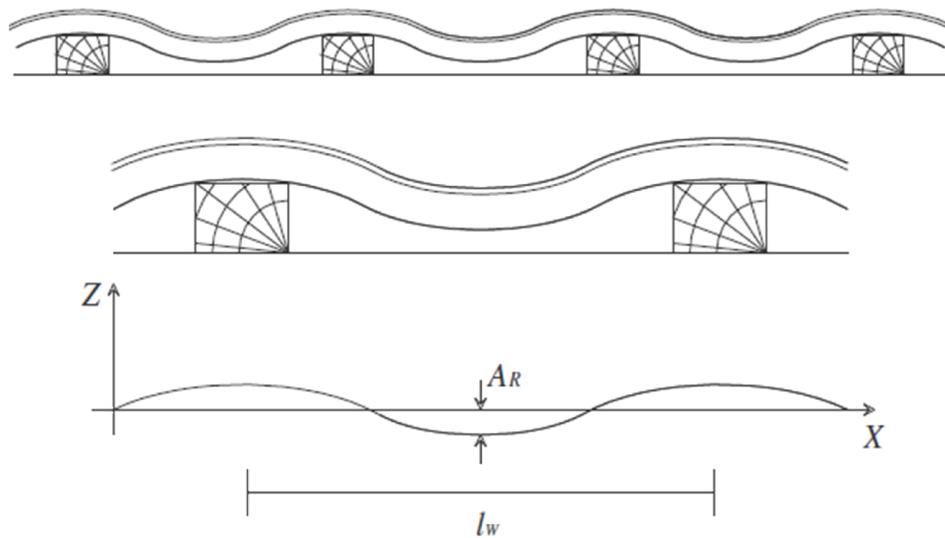


Figura 16: Modelo de irregularidades da via
Fonte: BEGHETTO, 2006

As rodas, por serem corpos rígidos, transmitem integralmente os impactos e vibrações ao sistema de suspensão primário. Este, por sua vez, absorve parte da energia de excitação devido ao seu amortecimento, e transmite o restante aos truques. Os deslocamentos do sistema de suspensão primário são descritos a seguir (BEGHETTO, 2006).

$$\delta_{P_i}(t) = Z_{FB}(t) + (-1)^i c \text{sen}(\phi_{FB}(t)) - b \text{sen}(v_{FB}(t)) - I_{Ri}(t), \text{ para } i = 1,2 \quad (52)$$

$$\delta_{P_i}(t) = Z_{FB}(t) + (-1)^i c \text{sen}(\phi_{FB}(t)) + b \text{sen}(v_{FB}(t)) - I_{Ri}(t), \text{ para } i = 3,4 \quad (53)$$

$$\delta_{P_i}(t) = Z_{RB}(t) + (-1)^i c \text{sen}(\phi_{RB}(t)) - b \text{sen}(v_{RB}(t)) - I_{Ri}(t), \text{ para } i = 5,6 \quad (54)$$

$$\delta_{P_i}(t) = Z_{RB}(t) + (-1)^i c \text{sen}(\phi_{RB}(t)) + b \text{sen}(v_{RB}(t)) - I_{Ri}(t), \text{ para } i = 5,6 \quad (55)$$

Onde (δ_{P_i}) representa os deslocamentos da suspensão primária, (Z) representa a translação do truque dianteiro ao longo do eixo Z , (ϕ) representa a rotação do truque em torno do eixo X , (θ) representa a rotação do truque em torno do eixo Y , (I_{Ri}) representa a irregularidade da via, e (b) e (c) representam parâmetros geométricos.

Este modelo matemático admitiu que as rotações dos truques em torno dos eixos x e y são pequenas, logo foi adotada a seguinte linearização:

$$\text{sen}(\theta(t)) \approx \theta(t) \quad (56)$$

Os truques, por serem considerados corpos rígidos, transmitem integralmente os impactos e vibrações ao sistema de suspensão secundário. Este, por sua vez, absorve parte desta energia e transmite o restante ao vagão. Os deslocamentos do sistema de suspensão secundário são descritos a seguir (BEGHETTO. 2006):

$$\delta_{S_i}(t) =$$

$$Z_{CB}(t) + (-1)^i c \text{sen}(\phi_{CB}(t)) - a \text{sen}(v_{CB}(t)) - Z_{FB}(t) + (-1)^{i+1} c \text{sen}(\phi_{FB}(t))$$

$$\text{para } i = 1,2 \quad (57)$$

$$\delta_{S_i}(t) =$$

$$Z_{CB}(t) + (-1)^i c \text{sen}(\phi_{CB}(t)) + a \text{sen}(v_{CB}(t)) - Z_{RB}(t) + (-1)^{i+1} c \text{sen}(\phi_{RB}(t))$$

$$\text{para } i = 3,4 \quad (58)$$

Este modelo matemático admitiu que as rotações do vagão em torno dos eixos x e y são pequenas, logo foi adotada a seguinte linearização:

$$\text{sen}(\theta(t)) \approx \theta(t) \quad (59)$$

As forças são transmitidas para a ponte através dos pontos de contato das rodas com os trilhos. O esforço em cada roda é definido a seguir.

$$F_{R_{2i-1}}(t) = \left[-\left(\frac{m_{CB}}{8} + \frac{m_{FB}}{4} + m_{W_{2i-1}} \right) g + m_{W_{2i-1}} \ddot{R}_{2i-1}(t) - F_{P_{2i-1}}(t) \right], \text{ para } i = 1,2 \quad (60)$$

$$F_{R_{2i}}(t) = \left[-\left(\frac{m_{CB}}{8} + \frac{m_{FB}}{4} + m_{W_{2i}} \right) g + m_{W_{2i}} \ddot{R}_{2i}(t) - F_{P_{2i}}(t) \right], \text{ para } i = 1,2 \quad (61)$$

$$F_{R_{2i-1}}(t) = \left[-\left(\frac{m_{CB}}{8} + \frac{m_{RB}}{4} + m_{W_{2i-1}} \right) g + m_{W_{2i-1}} \ddot{R}_{2i-1}(t) - F_{P_{2i-1}}(t) \right], \text{ para } i = 3,4 \quad (62)$$

$$F_{R_{2i}}(t) = \left[-\left(\frac{m_{CB}}{8} + \frac{m_{RB}}{4} + m_{W_{2i}} \right) g + m_{W_{2i}} \ddot{R}_{2i}(t) - F_{P_{2i}}(t) \right], \text{ para } i = 3,4 \quad (63)$$

Onde (F_R) representa as forças aplicadas pelo veículo na ponte, (m_{CB}), (m_{FB}) e (m_{RB}) representam as massas do vagão, do truque dianteiro e do truque traseiro, respectivamente. (m_w) representam as massas das rodas, (\ddot{R}) representam a aceleração associada às irregularidades, e (F_P) representam as forças nas suspensões primárias.

As forças de contato entre a roda e o trilho são definidas como forças normais aplicadas na estrutura da ponte, seguindo a geometria apresentada na Figura 17.

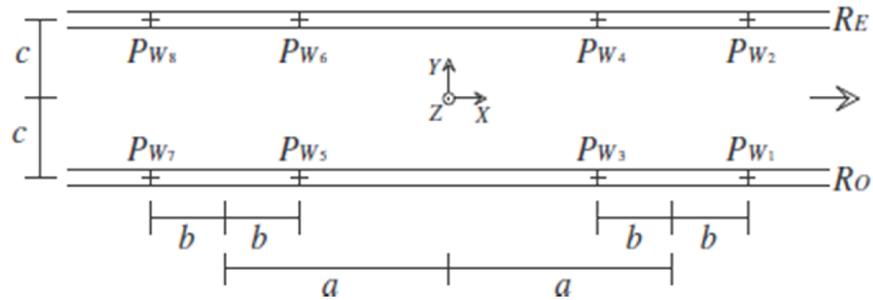


Figura 17: Pontos de contato entre rodas e trilhos
 Fonte: BEGHETTO, 2006.

3.2 Modelo de Ponte

A ponte ferroviária é constituída por duas vigas idênticas, paralelas e bi-apoiadas, de concreto armado, onde serão dispostos os dormentes, e acima destes, os trilhos, conforme apresentado na Figura 18. A ponte em questão não contará com tabuleiro, transversinas e outras estruturas.

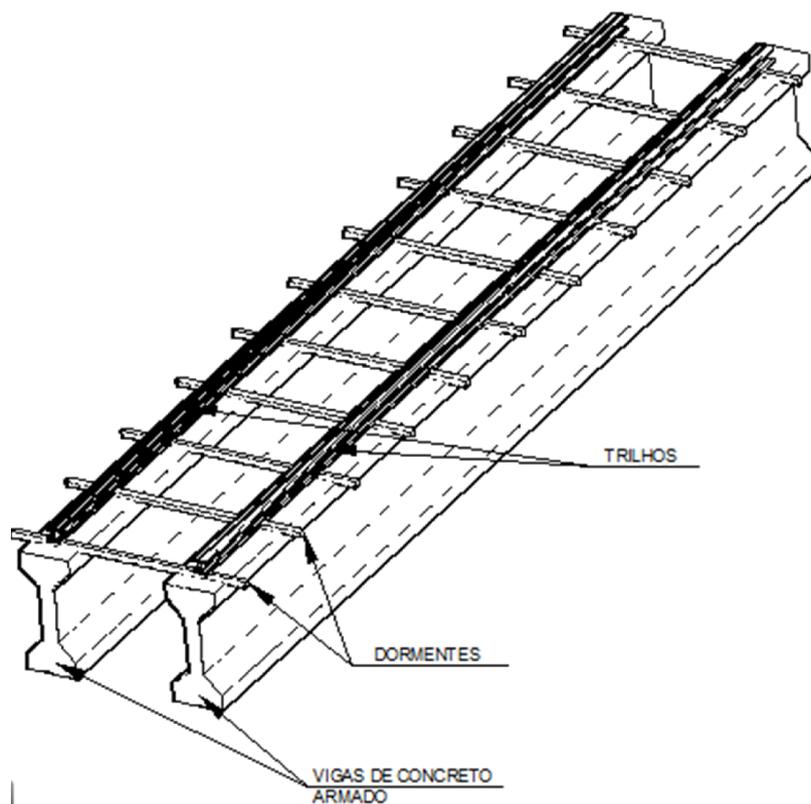


Figura 18: Modelo da ponte ferroviária
 Fonte: Adaptado de BEGHETTO, 2006.

Cada viga estudada tem dez metros de comprimento. As vigas serão modeladas com um elemento finito de viga de Euler-Bernoulli a cada 0,50m, totalizando, para cada viga, vinte elementos finitos e vinte e um nós. Na Figura 19 mostra-se uma representação esquemática dos elementos finitos.

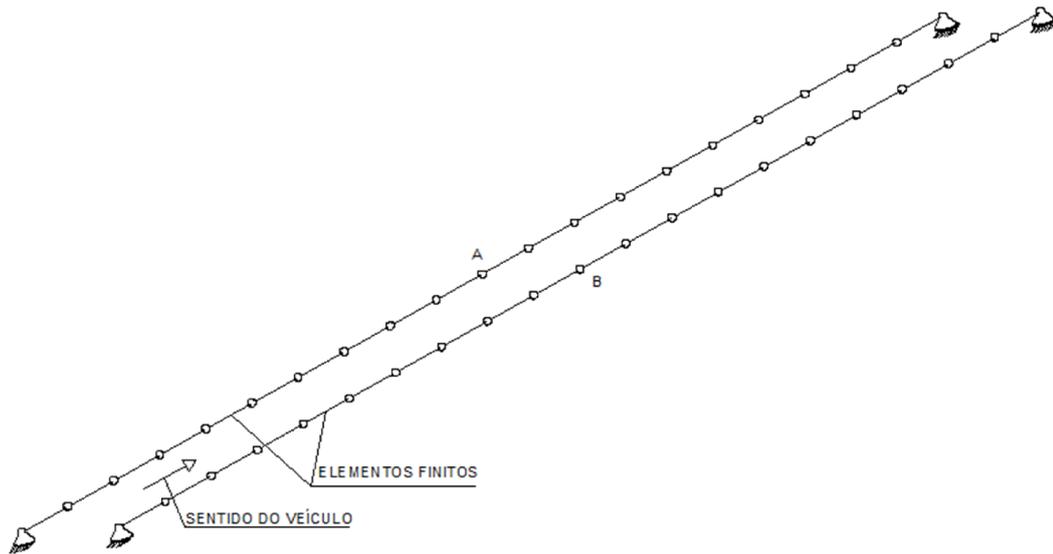


Figura 19: Representação do modelo de elementos finitos
Fonte: Adaptado de BEGHETTO, 2006.

A seção da viga utilizada para o estudo está representada na

Figura 20, e suas propriedades estão listadas na Tabela 1.

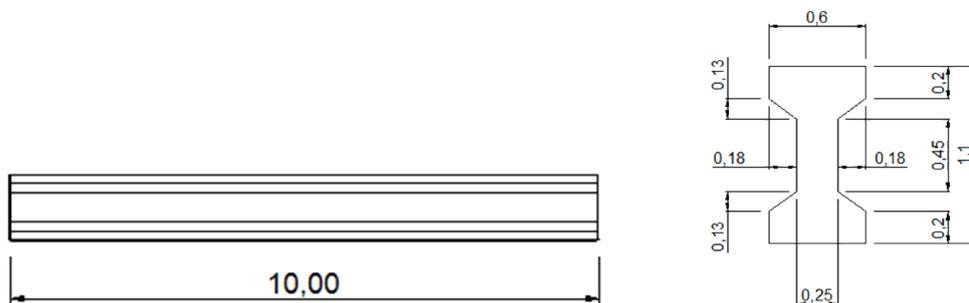


Figura 20: Vista longitudinal e seção transversal da viga em estudo (cotas em metro)
Fonte: Autoria própria

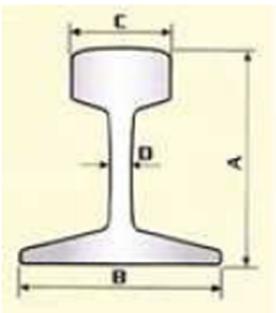
Tabela 1: Propriedades da viga utilizada no estudo

Viga Utilizada		
Dimensões e propriedades	Valores	Unidades
Altura	1,10	m
Largura da mesa	0,60	m
Espessura da mesa	0,2/0,325	m
Espessura da alma	0,25	m
Área transversal	0,4587	m ²
Massa por metro	1146,75	kg/m
Momento de Inércia em relação ao eixo x-x	0,0607	m ⁴
Momento de Inércia em relação ao eixo y-y	0,0097	m ⁴
Raio de giração em relação ao eixo x-x	98,35	m
Raio de giração em relação ao eixo y-y	29,70	m
Módulo de elasticidade	20,50	GPa
Coefficiente de Poisson	0,20	-
Massa específica	2500,00	kg/m ³

Fonte: Autoria própria

O trilho utilizado está apresentado na Tabela 2, bem como suas propriedades.

Tabela 2: Propriedades geométricas do trilho

Trilho TR-4550-57			
Dimensões e propriedades	Símbolos	Valores	Unidades
	A	168,3	mm
	B	139,7	mm
	C	69	mm
	D	25,9	mm
	At	0,00725	m ²
	mut	56,9	kg/m
	lxt	0,00002735	m ⁴
	E	205	GPa
	P	7850	kg/m ³

Fonte: BEGHETTO (2006)

3.3 Esforços, tensões normais e deformações específicas

Utilizando-se o modelo de veículo ferroviário e a rotina computacional implementada por Beghetto (2006), serão obtidos os deslocamentos e rotações de cada grau de liberdade dos elementos de viga de Euler-Bernoulli que compõem cada uma das vigas.

Com esses dados e através da equação da linha elástica apresentada a seguir, pode-se obter o valor do momento fletor solicitante da viga analisada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (64)$$

Reorganizando os termos da equação, obtém-se que:

$$M = \frac{d^2y}{dx^2} EI = KEI \quad (65)$$

Onde M corresponde ao valor do momento fletor na viga na seção considerada, E representa o módulo de elasticidade do material que compõem a viga e I corresponde ao momento de inércia da seção transversal do elemento estrutural e K é a curvatura do eixo da viga.

Uma vez conhecido o valor do momento fletor atuante, pode-se obter as tensões normais atuantes em cada ponto do elemento estrutural através da seguinte equação:

$$\sigma = \frac{M}{W} \quad (66)$$

Onde:

$$W = \frac{I}{yln} \quad (67)$$

Onde σ representa a tensão normal atuante, yln é a distância da fibra analisada até a linha neutra da seção transversal da viga, M é o momento fletor na viga na seção considerada e I corresponde ao momento de inércia em relação à linha neutra da seção transversal do elemento estrutural.

A deformação específica pode ser obtida pela Lei de Hooke, apresentada por (68):

$$\varepsilon = \frac{E}{\sigma} \quad (68)$$

Onde ε é a deformação específica ocorrida quando a viga de módulo de elasticidade E é submetida a uma tensão normal σ .

3.4 Análise Pseudo-Estática

Para comparar os resultados obtidos através da análise dinâmica da ponte levando em consideração as irregularidades dos trilhos, analisou-se de forma pseudo-estática a ponte com a utilização do coeficiente de impacto dinâmico definido pela equação (1). A análise está aqui sendo chamada de pseudo-estática, pois há a variação da posição da carga no tempo. O esquema estrutural adotado para essa análise está ilustrado na Figura 21.

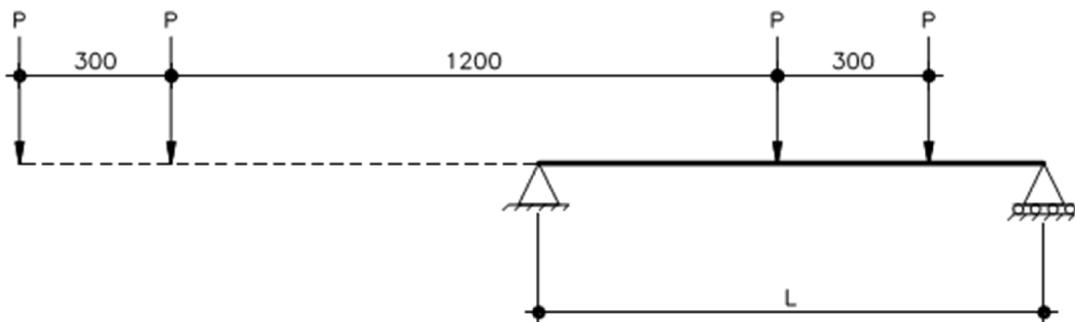


Figura 21: Esquema da viga sob a ação de uma carga concentrada
Fonte: Autoria própria

Para simplificar a análise, os esforços e deslocamentos que cada roda gera na estrutura foi tomado isoladamente e, pelo princípio da superposição dos efeitos, ao término da análise foram somados os efeitos de todas as rodas para obter-se o resultado final. A análise foi feita tomando-se 11200 passos de tempo, mesmo número de passos de tempo adotado para a análise dinâmica, de maneira a contemplar toda a estrutura de forma satisfatória. Esse valor se dá pelo fato de que o comprimento da viga é de 10,00m e o comprimento do veículo é de 18,00m, totalizando um comprimento de 28,00m. Realizando-se 400 iterações por metro, tem-se um total de 11200 passos de tempo.

Dessa forma, cada viga da ponte pode ser tomada como uma viga simplesmente apoiada submetida ao carregamento de uma carga concentrada, como representado na Figura 22.

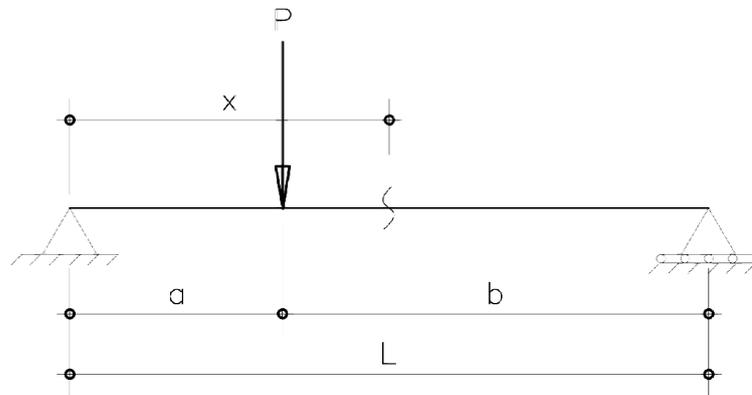


Figura 22: Esquema da viga sob a ação de uma carga concentrada
Fonte: Autoria própria

Para o cálculo dos esforços e deslocamentos, primeiramente deve-se calcular as reações verticais em cada apoio, definidas pelas equações (69) e (70):

$$Ra = \frac{P \cdot b}{L} \quad (69)$$

$$Rb = \frac{P \cdot a}{L} \quad (70)$$

Para a determinação do esforço cortante e do momento fletor em uma determinada seção, podem ocorrer duas situações distintas. A primeira ocorre quando uma seção x qualquer está entre o apoio esquerdo e a força P , ou seja, $0 \leq x \leq a$. A segunda situação ocorre quando essa mesma seção x está entre a força P e o apoio direito, ou seja, $a \leq x \leq L$.

Assim sendo, o esforço cortante em uma seção x oriundo da ação de cada roda pode ser determinado pelas equações (71) e (72):

$$V = \frac{P \cdot b}{L}, \quad (0 \leq x < a) \quad (71)$$

$$V = \frac{P \cdot b}{L} - P, \quad (a \leq x \leq L) \quad (72)$$

Por sua vez, o momento fletor em uma seção x qualquer pode ser obtido através das equações (73) e (74):

$$M = \frac{P.b.x}{L}, \quad (0 \leq x < a) \quad (73)$$

$$M = \frac{P.b.x}{L} - P.(x - a), \quad (a \leq x \leq L) \quad (74)$$

Para a obtenção das rotações e dos deslocamentos, faz-se necessário utilizar a equação da linha elástica, já mencionada na equação (63) e transcrita novamente em (75) com seus termos reorganizados:

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = M \quad (75)$$

Integrando a equação do momento fletor, obtém-se a equação da rotação em uma determinada seção. Fazendo esse procedimento para as duas situações expostas anteriormente, obtém-se que a rotação pode ser representada pelas equações (76) e (77), que contêm as constantes de integração C_1 e C_2 .

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{P.b.x^2}{2L} + C_1, \quad (0 \leq x < a) \quad (76)$$

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{P.b.x^2}{2L} - \frac{P.(x-a)^2}{2} + C_2, \quad (a \leq x \leq L) \quad (77)$$

Refazendo o procedimento de integração, obtém-se as equações que fornecem a deflexão em uma determinada seção analisada. As equações que representam a deflexão estão representadas em (78) e (79), onde também surgem as constantes de integração C_3 e C_4 .

$$EI \cdot y = \frac{P.b.x^3}{6L} + C_1 \cdot x + C_3, \quad (0 \leq x < a) \quad (78)$$

$$EI \cdot y = \frac{P \cdot b \cdot x^3}{6L} - \frac{P \cdot (x-a)^3}{6} + C_2 \cdot x + C_4, \quad (a \leq x \leq L) \quad (79)$$

Para a determinação das constantes de integração, deve-se respeitar as condições de contorno do problema. Nesse caso de uma viga simplesmente apoiada, as duas primeiras condições de contorno são as de que nos apoios a deflexão deverá ser nula, ou seja, quando $x=0$ e $x=L$, tem-se que $y=0$. A terceira condição de contorno implica em que a deflexão imediatamente à direita de um ponto deve ser igual à deflexão imediatamente à esquerda. Assim sendo, para encontrar as constantes de integração, escolhe-se esse ponto como sendo em a , pertencente tanto a equação (78) quanto a equação (79), o resultado de ambas as equações deve ser o mesmo. Da mesma maneira, a rotação imediatamente à direita de um ponto deve ser igual à rotação imediatamente à esquerda. Tomando como base novamente o ponto a , pertencente tanto a equação (76) quanto a equação (77), a rotação dada tanto por uma quanto pela outra equação deve ser o mesmo.

Fazendo esse procedimento algébrico, chega-se as seguintes constantes de integração:

$$C_1 = C_2 = -\frac{P \cdot b}{6L} (L^2 - b^2) \quad (80)$$

$$C_3 = C_4 = 0 \quad (81)$$

Encontradas as constantes de integração, pode-se reescrever as equações que definem a rotação e a deflexão da viga. Assim sendo, a rotação em uma determinada seção pode ser representada pelas equações (82) e (83):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P \cdot b}{6LEI} (L^2 - b^2 - 3x^2), \quad (0 \leq x < a) \quad (82)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P \cdot b}{6LEI} (L^2 - b^2 - 3x^2) - \frac{P \cdot (x-a)^2}{2EI}, \quad (a \leq x \leq L) \quad (83)$$

Já as deflexões podem ser obtidas através das equações (84) e (85):

$$y = \frac{Pbx}{6LEI} (x^2 - L^2 + b^2), \quad (0 \leq x < a) \quad (84)$$

$$EI \cdot y = -\frac{Pbx}{6LEI} (L^2 - b^2 - x^2) - \frac{P \cdot (x-a)^3}{6EI}, \quad (a \leq x \leq L) \quad (85)$$

Nas próximas seções, serão apresentados os resultados encontrados no desenvolvimento deste trabalho, tanto para a análise dinâmica quanto para a análise pseudo-estática, assim como a comparação entre elas.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos das análises expostas anteriormente.

4.1 Resultados da Análise Pseudo-Estática

Com as equações apresentadas anteriormente para a análise pseudo-estática da ponte, as características do veículo, as características das vigas que compõem a ponte e o auxílio de uma planilha de cálculo, além da equação (1) que representa o coeficiente de impacto dinâmico, encontraram-se os valores de momento fletor, esforço cisalhante, tensão normal, deformação específica e deslocamentos no centro do vão. Esses valores são apresentados a seguir tanto para a situação sem a aplicação do coeficiente de impacto dinâmico quanto para a situação com a aplicação desse coeficiente.

O coeficiente de impacto dinâmico encontrado a partir da equação (1) para um vão de 10,00m foi de 1,43.

Em todos os resultados expostos neste trabalho, a mesma convenção de sinais foi seguida, e esta está resumida nas figuras abaixo.

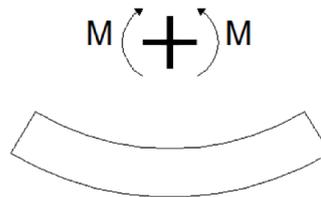


Figura 23: Convenção para momento fletor positivo
Fonte: Autoria própria

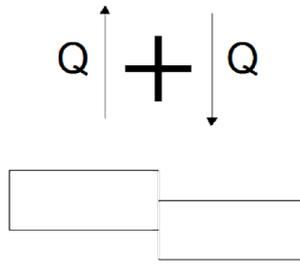


Figura 24: Convenção para esforço cisalhante positivo
Fonte: Autoria própria

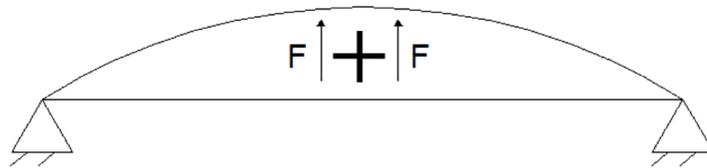


Figura 25: Convenção para deslocamento positiva
Fonte: Autoria própria



Figura 26: Convenção para tensão normal positiva
Fonte: Autoria própria

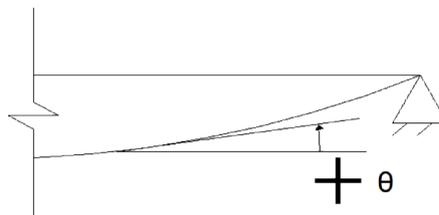


Figura 27: Convenção para rotação positiva
Fonte: Autoria própria

Todas as simulações realizadas neste estudo foram realizadas com 400 iterações por metro, o que fez com que as grandezas medidas fossem realizadas a cada 1/400 m, ou seja, a cada 2,5mm. O veículo ferroviário possui um comprimento total de 18 metros, logo, a análise se desenvolve em passos de tempo referentes à 28 metros, pois desta maneira engloba os 18 metros do veículo ferroviário e os 10 metros de comprimento da ponte em estudo. Dessa forma, cada simulação contém 11200 medições.

Na Figura 28, pode-se observar o histórico dos momentos fletores no centro do vão para a análise pseudo-estática:

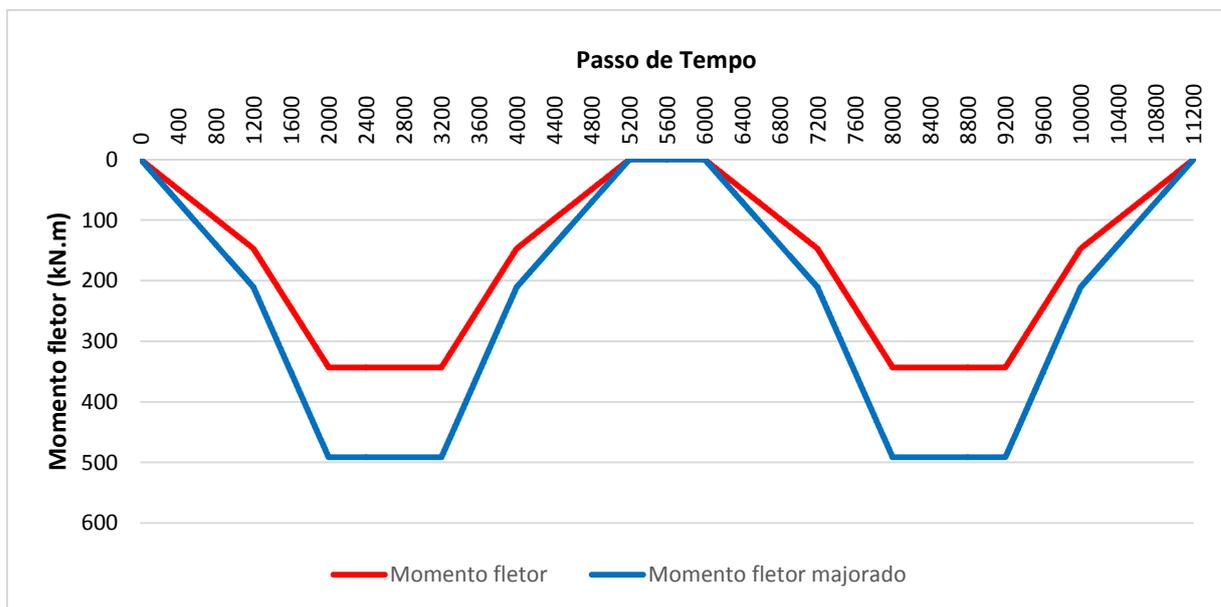


Figura 28: Histórico do Momento Fletor no centro do vão para a análise Pseudo-Estática
Fonte: Autoria própria

Observa-se na Figura 28 que o momento fletor no centro do vão tem algumas características. Do passo de tempo 0 ao passo de tempo 1200, temos que o valor do momento fletor no centro do vão cresce de uma forma aproximadamente linear. Nesse intervalo de tempo, tem-se apenas a primeira roda do primeiro truque sobre a estrutura, se movimentando a partir do apoio para o centro do vão.

A partir do passo de tempo 1200 até o passo de tempo 2000, o crescimento do momento fletor no centro do vão descreve uma reta com uma inclinação diferente. Isso deve-se ao fato da entrada da segunda roda do primeiro truque na estrutura.

Do passo de tempo 2000 até o passo de tempo 3200, tem-se um valor de momento fletor constante. Isso se deve ao fato de que o passo de tempo 2000 coincide com a chegada da primeira roda no centro do vão e, portanto, ao maior valor de momento fletor gerado por

esta roda. A partir desse instante, a primeira roda começa a se afastar do centro do vão, e consequentemente, a diminuir o valor do momento fletor gerado por ela no centro do vão. Em contrapartida, a segunda roda continua se aproximando do centro do vão, levando a um aumento no valor do momento fletor no centro do vão gerado por ela.

A partir do passo de tempo 3200 até o passo de tempo 4000, começa a haver uma diminuição do momento fletor no centro do vão, descrevendo uma reta. Isso deve-se ao fato de que o passo de tempo 4000 coincide com a chegada da segunda roda ao centro do vão. A partir desse ponto, há um afastamento da segunda roda do centro do vão e, portanto, uma diminuição do momento fletor no centro do vão gerado por esta.

A partir do passo de tempo 4000 até o passo de tempo 5200, a diminuição do momento fletor no meio do vão descreve uma reta com inclinação diferente. Isso ocorre porque no passo de tempo 4000 ocorre a saída da primeira roda da estrutura, sendo que o momento fletor gerado fica a cargo somente da segunda roda.

No passo de tempo 5200, ocorre a saída da segunda roda da estrutura. Desse instante até o passo de tempo 6000 a estrutura não é submetida a nenhum carregamento e, por consequência, os esforços são nulos. A partir do passo de tempo 6000, ocorre a entrada da primeira roda do segundo truque na ponte, levando a uma repetição do que ocorre com a estrutura quando submetida ao carregamento oriundo do primeiro truque.

O máximo valor de momento fletor atuante no centro do vão é de 343,09kN.m. Quando aplicado o coeficiente de impacto dinâmico, o valor do momento fletor atuante no centro do vão passa a ser de 491,56kN.m.

Na Figura 29, pode-se observar o histórico do esforço cisalhante no centro do vão para a análise pseudo-estática:

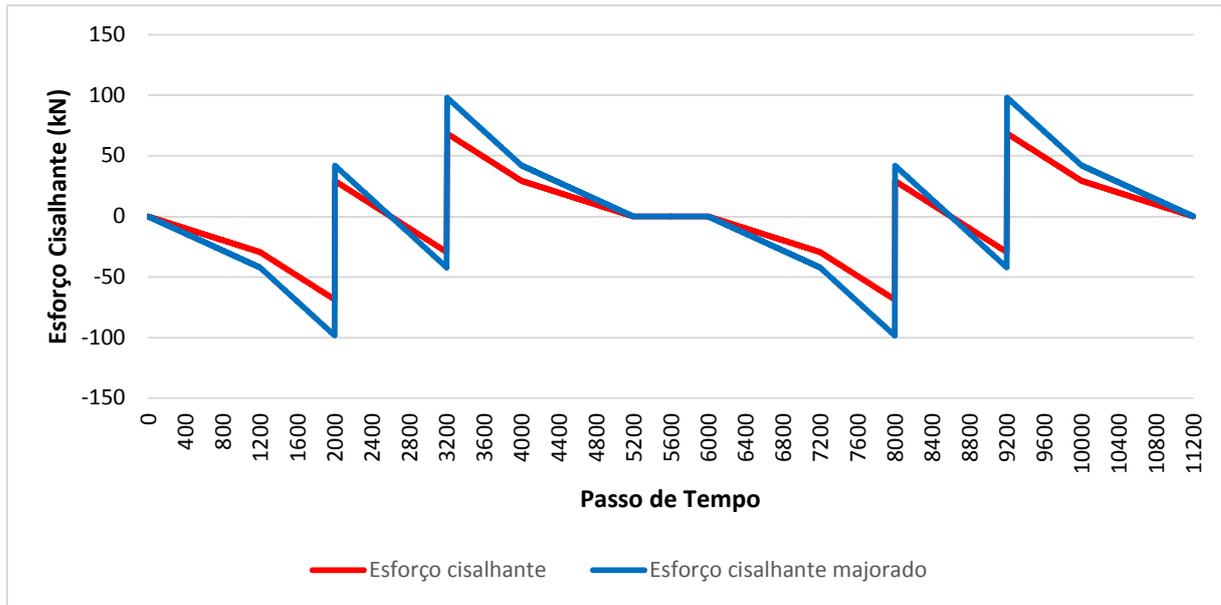


Figura 29: Histórico do esforço cisalhante no centro do vão para a análise pseudo-estática
Fonte: Autoria própria

Nota-se na Figura 29 que, assim como no caso do momento fletor, para o caso do esforço cisalhante também ocorrem mudanças nas inclinações das retas que definem o valor do esforço cisalhante no centro do vão. Isso ocorre pela influência ocasionada pela entrada ou saída das rodas do veículo de sobre a estrutura, da mesma maneira que ocorre no caso da análise do momento fletor. Também se observa pontos de saltos nos valores do esforço cisalhante nos passos de tempo 2000, 3200, 8000 e 9200. Esse fato ocorre pela passagem de uma roda pelo centro do vão.

O máximo valor absoluto do esforço cisalhante a que as vigas que compõem a ponte estão submetidas é de 68,42 kN para a análise pseudo-estática. Quando majorado pelo coeficiente de impacto dinâmico, esse valor sobe para 98,03 kN.

Em relação às tensões normais, primeiramente é necessário conhecer-se à distância das faces inferior e superior até a linha neutra. Da NBR 6118 (ABNT, 2014), para garantir-se o adequado comportamento dúctil em vigas, a relação da posição da linha neutra a partir da face superior da viga com a altura útil da mesma deve ser de no máximo 0,45. Neste trabalho, a altura útil da viga foi tomada como sendo sua altura total descontado de 5cm. Esse valor de 5cm de desconto deve-se ao cobrimento, aqui adotado como 3cm, acrescido do diâmetro da armadura transversal, estimado em torno de 0,8cm, e da metade do diâmetro da armadura longitudinal, estimada como sendo uma barra de 2,5cm de diâmetro, totalizando aproximadamente 5cm. Uma vez que a viga tem uma altura total de 110cm, sua altura útil é de 105cm. Aplicando-se a relação de 0,45 mencionada anteriormente, tem-se que a distância

da linha neutra até a face superior da viga é de 47,25cm. Em relação à face inferior da viga, a distância até a linha neutra é de 62,75cm.

Na Figura 30, pode-se observar o histórico de tensão normal no meio do vão para a face inferior:

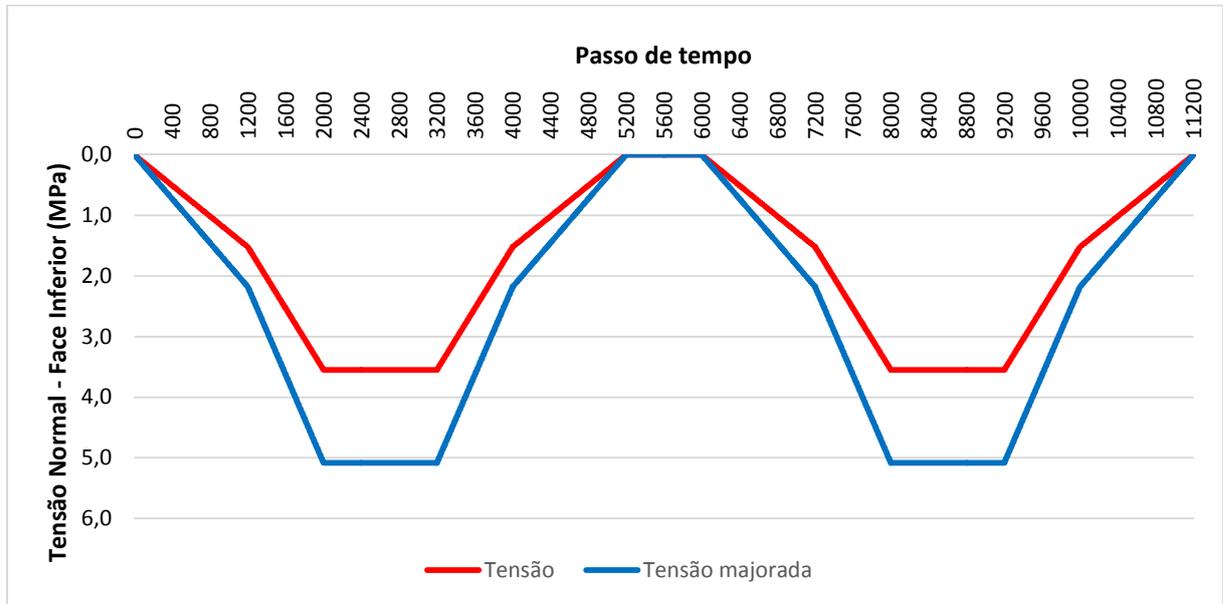


Figura 30: Histórico da Tensão Normal no centro do vão para a face inferior da viga na análise Pseudo-Estática

Fonte: Autoria própria

Observando-se a Figura 30, nota-se que as tensões normais no meio do vão para a face inferior se comportam da mesma maneira que o momento fletor quando da passagem do veículo ferroviário. Isso era o esperado, uma vez que as tensões são diretamente proporcionais aos momentos fletores atuantes.

O máximo valor da tensão normal atuante nas fibras inferiores das vigas que formam a estrutura da ponte é de 3,55 MPa para a análise pseudo-estática. Aplicando-se o coeficiente de impacto dinâmico, tem-se o valor de 5,08MPa de tensão normal no centro do vão, referindo-se à tensões normais de tração na superfície inferior da viga.

Para o histórico das tensões normais na face superior da viga, pode-se observar a Figura 31:

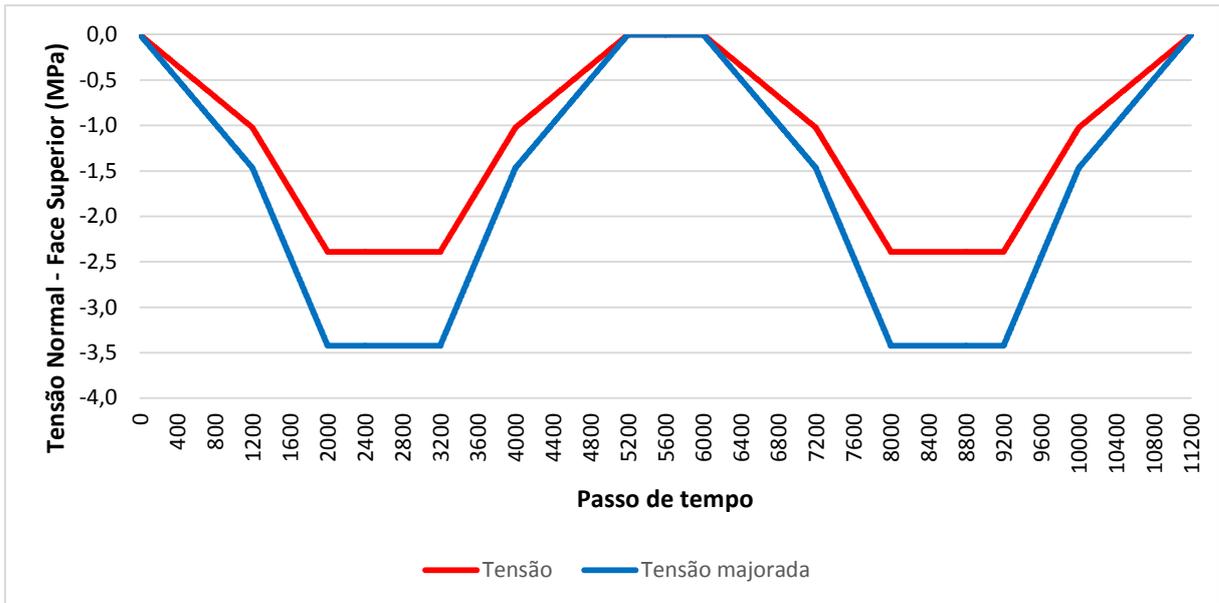


Figura 31: Histórico da Tensão Normal no centro do vão para a face superior da viga na análise Pseudo-Estática

Fonte: Autoria própria

Neste caso, os valores encontrados de tensão normal foram de -2,39MPa, para o caso sem a aplicação do coeficiente de impacto dinâmico e -3,42MPa para o caso com majoração. Esses valores referem-se à tensões normais de compressão na face superior da viga.

Na Figura 32, pode-se observar o histórico dos deslocamentos ocorridos nas vigas:

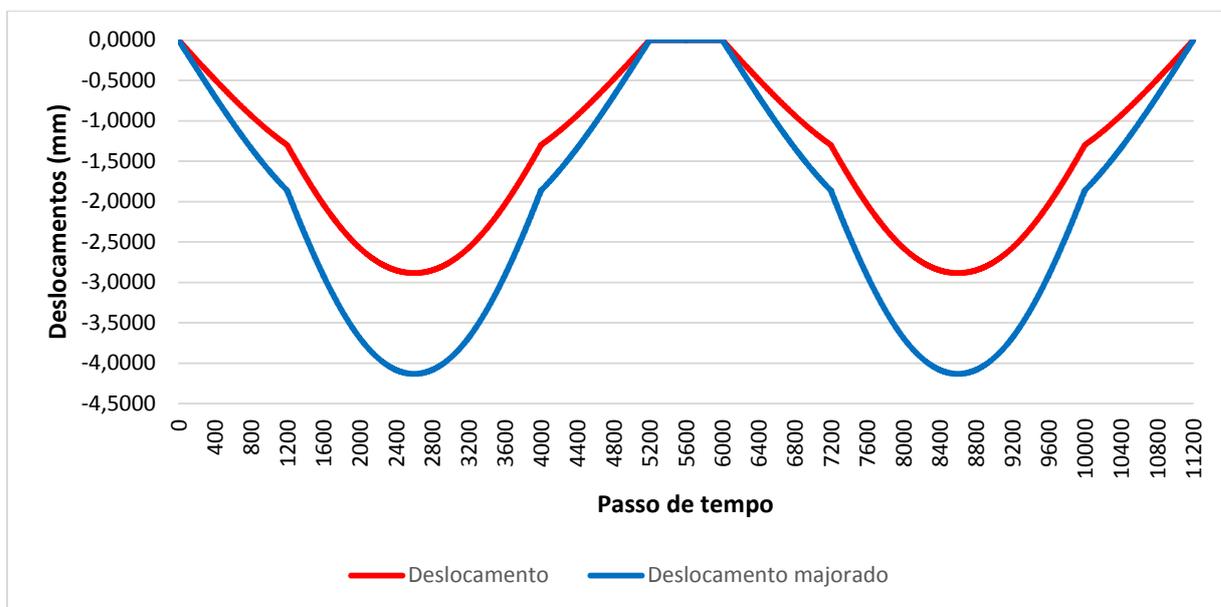


Figura 32: Histórico dos deslocamentos no centro do vão para a análise Pseudo-Estática

Fonte: Autoria própria

A partir de tal observação, percebem-se as mesmas características já mencionadas anteriormente para o momento fletor e as tensões normais, ocorrendo mudanças no comportamento da estrutura com a entrada ou saída das rodas do veículo de sobre a estrutura. Outro ponto é de que o deslocamento não é mais descrito por retas. Uma vez que é obtido através da integração da equação da rotação, que por sua vez é obtida da integração da equação do momento fletor, o deslocamento é regido por uma expressão do terceiro grau.

Os máximos valores de deslocamentos ocorridos no meio do vão para as vigas estudadas são de -2,88mm. Quando o coeficiente de impacto dinâmico é levado em consideração esse valor aumenta para -4,13mm.

Por último, pode-se também analisar as deformações específicas à que a viga está sujeita. O histórico de deformações específicas na fibra inferior é apresentado na Figura 33:

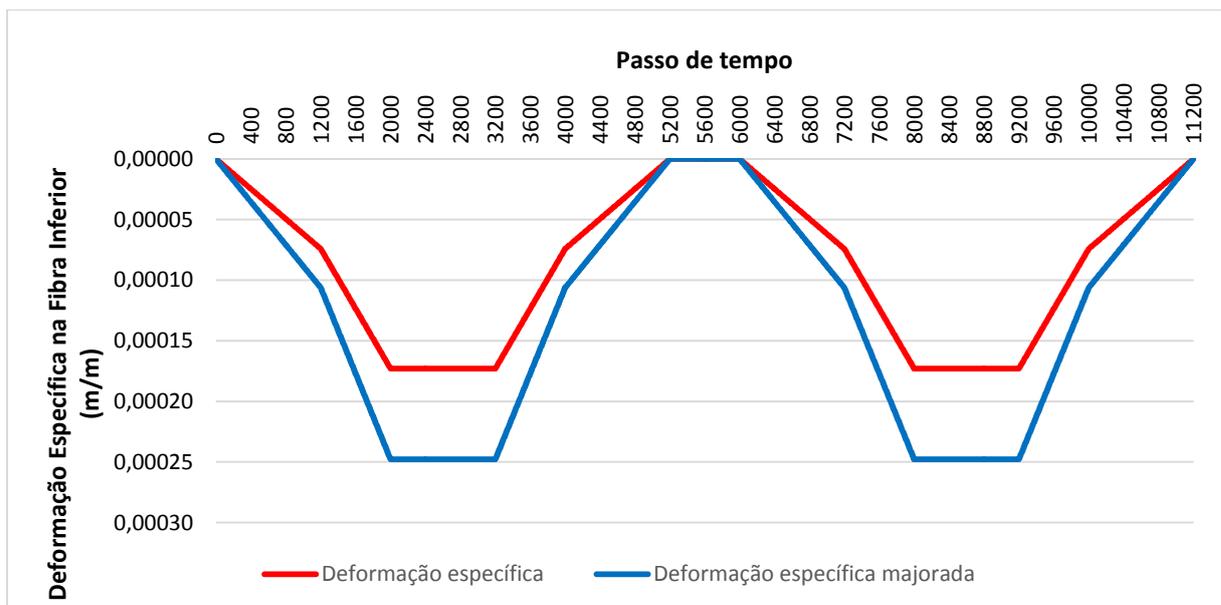


Figura 33: Histórico das deformações específicas no centro do vão para a face inferior na análise Pseudo-Estática

Fonte: Autoria própria

O comportamento das deformações específicas no centro da viga é semelhante ao que ocorre para as tensões normais, uma vez que uma é diretamente proporcional à outra. O maior valor de deformação encontrado para o caso estudado é de 0,000173m/m. Aplicando-se o coeficiente de impacto dinâmico, tem-se o valor de 0,000248m/m. Esses valores indicam um alongamento nas fibras inferiores da viga.

Na Figura 34, pode-se observar o histórico de deformações específicas na fibra superior da viga:

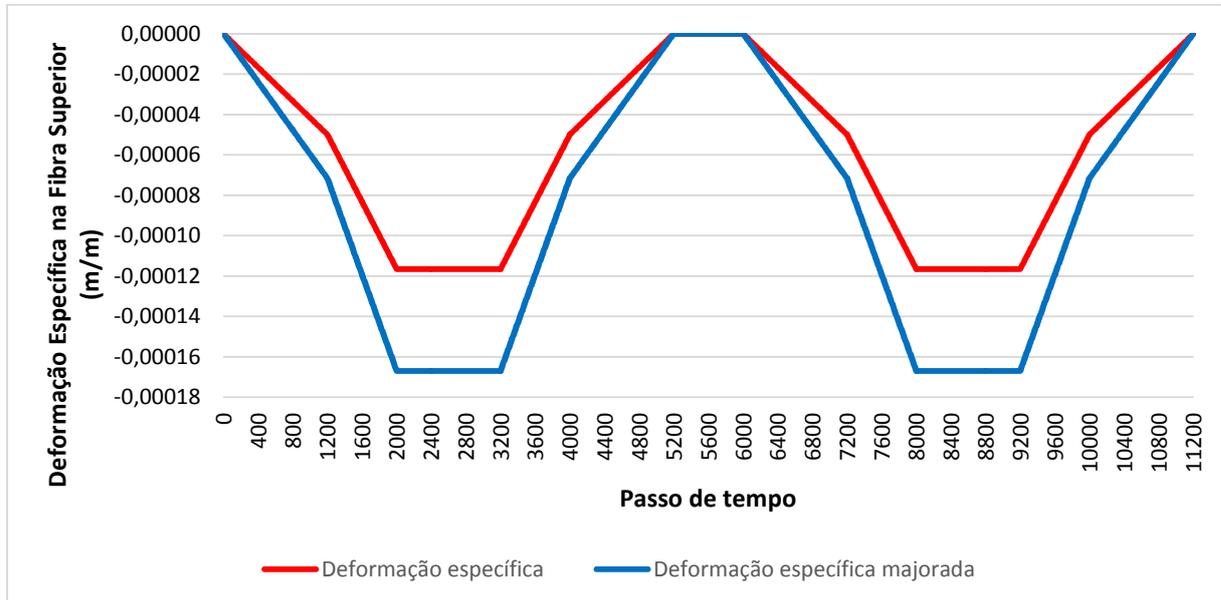


Figura 34: Histórico das deformações específicas no centro do vão para a face superior na análise pseudo-estática

Fonte: Autoria própria

A maior deformação específica encontrada para a fibra superior da viga é de $-0,000116\text{m/m}$. Aplicando-se o coeficiente de impacto dinâmico, tem-se o valor de $-0,000167\text{m/m}$. Esses valores indicam um encurtamento das fibras superiores da viga.

Apresenta-se abaixo uma tabela com um resumo dos valores resultantes da análise pseudo-estática:

Tabela 3: Resumo dos resultados da análise pseudo-estática

Grandeza	Valor sem majoração	Valor com majoração
Maior momento fletor positivo (kN.m)	343,09	491,56
Maior esforço cisalhante (kN)	68,42	98,03
Maior deslocamento negativo (m)	$-2,88 \cdot 10^{-3}$	$-4,13 \cdot 10^{-3}$
Maior tensão normal positiva (MPa)	3,55	5,08
Maior tensão normal negativa (MPa)	-2,39	-3,42
Maior deformação específica positiva (m/m)	$1,73 \cdot 10^{-4}$	$2,48 \cdot 10^{-4}$
Maior deformação específica negativa (m/m)	$-1,16 \cdot 10^{-4}$	$-1,67 \cdot 10^{-4}$

Fonte: Autoria própria

Na próxima seção, serão abordados os resultados provenientes da análise dinâmica.

4.2 Resultados da Análise dinâmica

Com a utilização do código computacional implementado por Beghetto (2006), será exposto a seguir os resultados da análise dinâmica da passagem do veículo ferroviário na ponte estudada.

A primeira e segunda frequência natural de vibração da ponte foram calculadas numericamente, com auxílio do código computacional implementado por Beghetto (2006).

Para um sistema amortecido, a frequência amortecida de vibração é dada pela Equação (86)

$$F_{RD} = \omega_{nt} \sqrt{1 - 2\zeta_t^2} \quad (86)$$

Onde (ζ_t) é a razão de amortecimento do sistema, aqui adotado com o valor de 2.5%, e (ω_{nt}) é a frequência natural da ponte, determinado com o código implementado por Beghetto (2006).

A velocidade de passagem do veículo ferroviário que causa a ressonância da ponte é determinada pela Equação (87) (CHOPRA, 1995)

$$V_{RD} = \frac{w_{dt} \cdot l_w}{2\pi} \quad (87)$$

Onde (w_{dt}) representam as frequências associadas às irregularidades, (l_w) representa o comprimento da onda senoidal da irregularidade da via, aqui considerada com o valor de 1 metro, e (V_{RD}) representam as velocidades ressonantes para as respostas dinâmicas de deslocamento do veículo.

A Tabela 4 resume as propriedades das vigas em estudo.

Tabela 4: Propriedades das vigas

Descrição	Símbolo	Unidade	Valor
Comprimento da ponte	lb	m	10,00
Área da seção transversal	A	m ²	0,4587
Módulo de elasticidade	E	GPa	20,50
Momento de inércia	I	m ⁴	0,0607
Massa específica	ρ	kg/m	2500,00
Massa unitária	m u	kg/m	1146,75
Razão de amortecimento	ζ	%	0,025
1º Frequência natural de vibração	ω_{nb1}	rad/s	33,28
2º Frequência natural de vibração	ω_{nb2}	rad/s	133,21
1º Frequência ressonante amortecida	ω_{db1}	rad/s	33,23
2º Frequência ressonante amortecida	ω_{db2}	rad/s	133,04
Velocidade ressonante para 1º frequência amortecida	V_{RD1}	km/h	19,07
velocidade ressonante para 2º frequência amortecida	V_{RD2}	km/h	76,32

Fonte: Autoria própria

O problema foi analisado para uma faixa de velocidade de 1 km/h até 100km/h. Para a compreensão do comportamento da estrutura nesta faixa de velocidade, foi executado o algoritmo variando com incrementos de velocidade de 1 em 1 km/h, totalizando 100 análises. Os resultados para a faixa de velocidade abaixo de 7km/h foram desconsiderados da análise, pois abaixo dessa velocidade ocorrem falsos modos de vibração, os quais apenas apresentam movimento de corpo rígido. Todas as análises foram realizadas em um processador Intel® Core™ i5-3210M, CPU de 2.50 GHz e 6.00 GB de memória RAM. O tempo total médio de simulação é de 2,45 segundos.

Os resultados para cada velocidade considerada estão dispostos nos gráficos a seguir. Na Figura 35 é apresentado um resumo do maior momento fletor, positivo e negativo, para cada velocidade considerada. Apesar de estarem representados no mesmo gráfico, os valores de momento fletor positivo e negativo ocorrem em diferentes instantes de tempo.

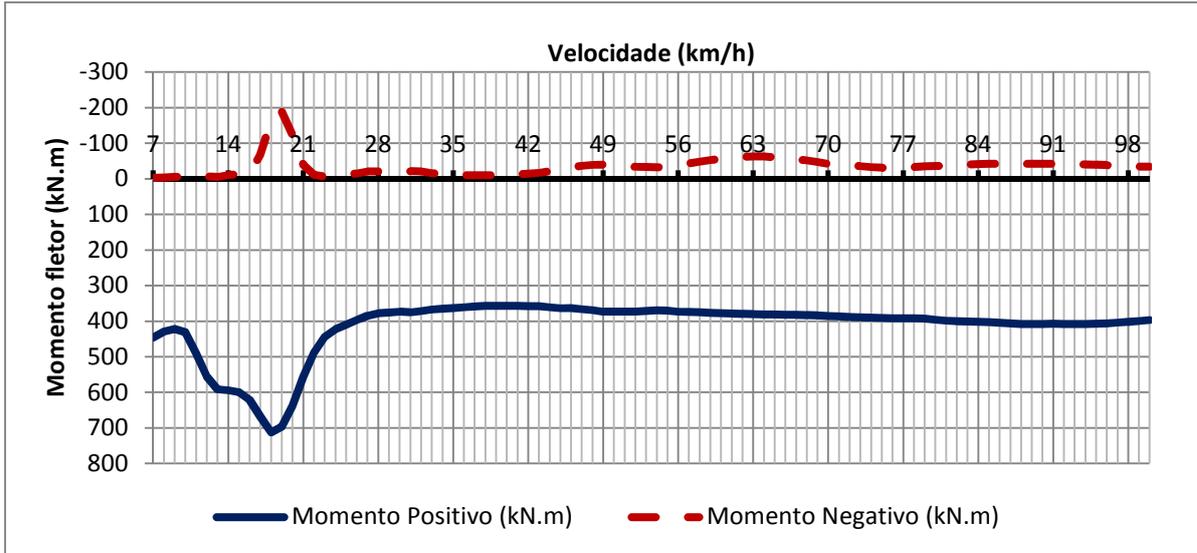


Figura 35: Momentos extremos para cada velocidade
Fonte: Autoria própria

Observou-se que o maior momento fletor positivo ocorreu quando a velocidade foi de 18km/h, no valor de 712,75 kN.m, e o maior momento fletor negativo ocorreu para a velocidade de 19 km/h, no valor -188,31 kN.m. Essas velocidades em que ocorreram os maiores valores de esforços estão muito próximas de uma velocidade ressonante, conforme exposto na Tabela 4, que é de 19,07km/h. Em velocidades um pouco mais distantes dessa velocidade ressonante, os valores de momento fletor negativo giraram em torno de 350 a 400kN.m e os valores do momento fletor positivo estiveram em torno de -30 a -60kN.m

Na Figura 36 visualiza-se um resumo do maior esforço cisalhante, positivo e negativo, para cada velocidade considerada:

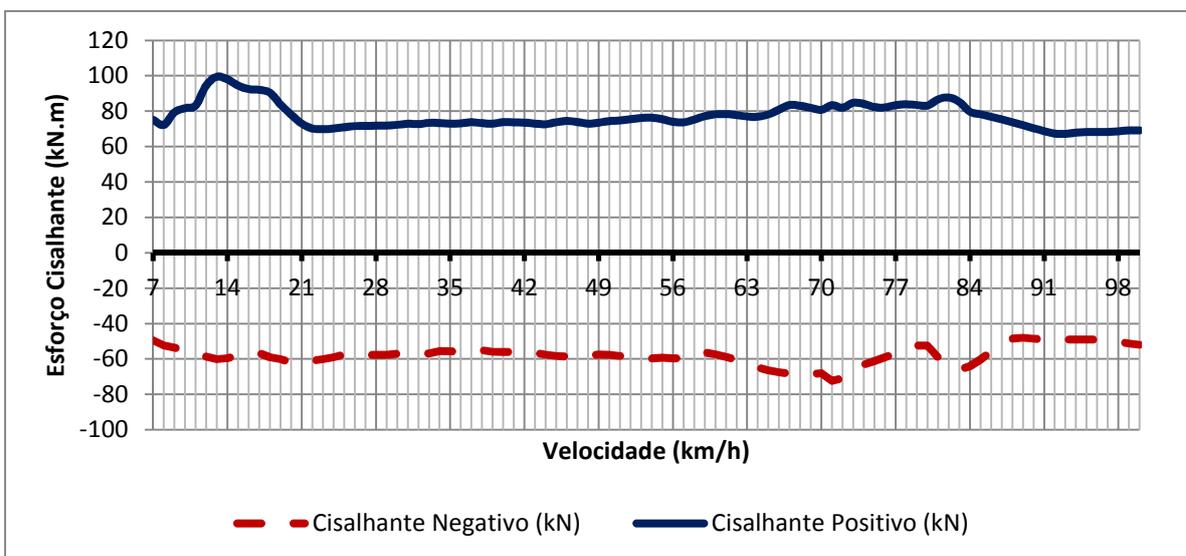


Figura 36: Esforços cisalhantes extremos cada velocidade
Fonte: Autoria própria

Observou-se que o maior esforço cisalhante positivo no centro do vão da ponte ocorreu quando a velocidade foi de 13km/h, no valor de 99,46 kN.m, e o maior esforço cisalhante negativo ocorreu para a velocidade de 71 km/h, no valor de -72,38 kN.m. Assim como no caso do momento fletor, esses valores ocorreram em velocidades próximas à alguma velocidade ressonante. No caso específico do esforço cisalhante positivo, para a primeira velocidade ressonante, e para o caso do esforço cisalhante negativo, para a segunda velocidade ressonante.

Para velocidades afastadas daquelas denominadas ressonantes, observou-se que o valor do esforço cisalhante positivo variou aproximadamente entre 70 a 80kN e o esforço cisalhante negativo teve uma variação aproximadamente entre -50 a -60kN.

Na Figura 37 pode-se observar o maior deslocamento do nó central, positivo e negativo, para cada velocidade considerada:

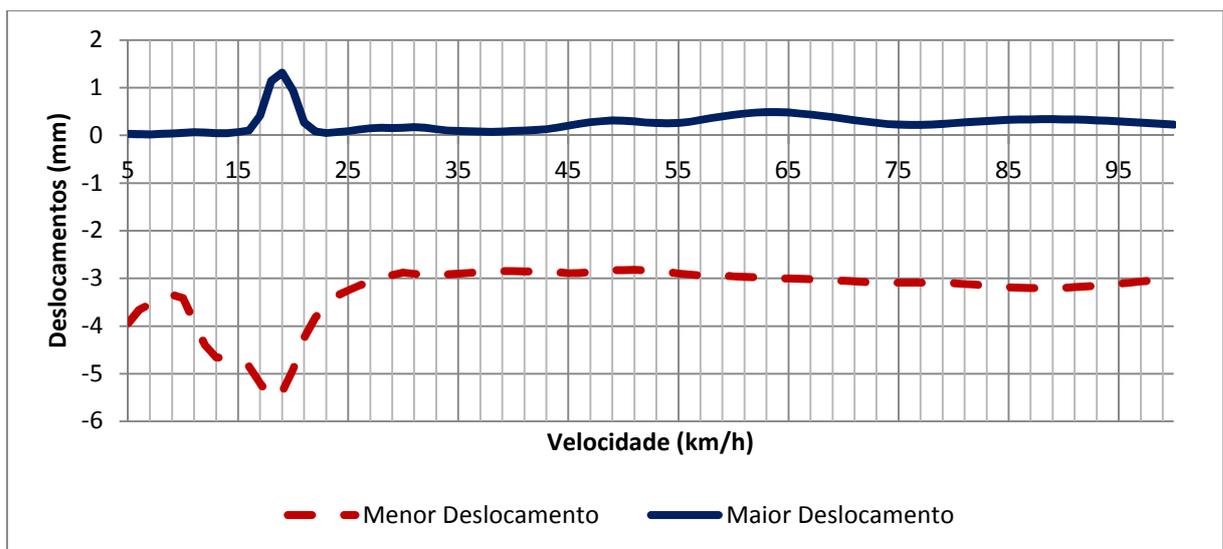


Figura 37: Deslocamentos extremos para cada velocidade considerada

Fonte: Autoria própria

Observou-se que o maior deslocamento positivo ocorreu quando a velocidade foi de 19km/h, no valor de 1,31 mm, e o maior deslocamento negativo ocorreu para a velocidade de 18 km/h, no valor de -5,53 mm. Assim como no caso do momento fletor, esses valores foram encontrados quando a velocidade de passagem do veículo ferroviário se deu muito próxima da velocidade ressonante.

Em faixas de velocidade distantes da velocidade ressonante, os maiores valores de deslocamento positivo ficaram abaixo de 0,50mm. Por sua vez, os maiores deslocamentos negativos ficaram em torno de -3,00mm

Na Figura 38 pode-se observar a maior tensão normal, positiva e negativa, na face inferior da viga, para cada velocidade considerada.

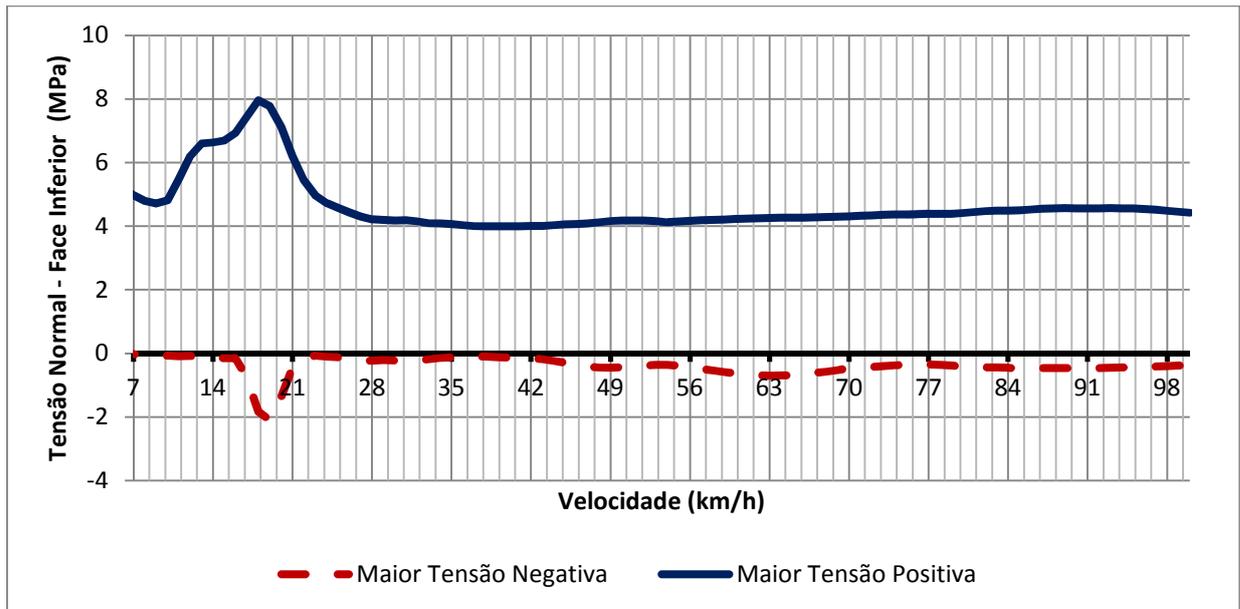


Figura 38: Tensões normais extremas na face inferior da viga para cada velocidade considerada
Fonte: Autoria própria

Observou-se que a maior tensão positiva ocorreu quando a velocidade foi de 18km/h, no valor de 7,96 MPa, e a maior tensão negativa ocorreu para a velocidade de 19km/h, no valor de -2,10 MPa. Esses valores se referem, respectivamente, às tensões de tração e compressão na superfície inferior da viga. Novamente, esses valores foram encontrados em velocidades muito próximas à velocidade ressonante.

Quando observados os valores de tensões encontrados distantes da velocidade ressonante, os valores encontrados giraram em torno de 4,00 a 4,50MPa para os valores de tensão positiva, ou seja, de tração. Por sua vez, os valores de tensão normal negativa, ou seja, de compressão, ficaram em torno de -0,20 a -0,50MPa.

Na Figura 38 pode-se observar a maior tensão normal, positiva e negativa, na face superior da viga, para cada velocidade considerada.

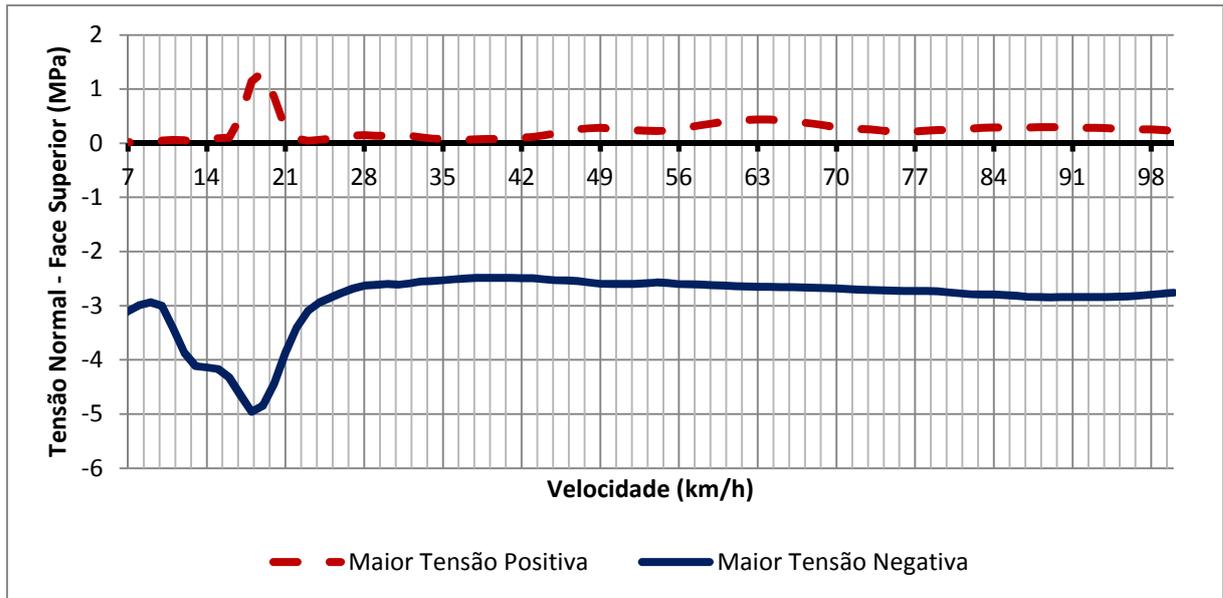


Figura 39: Tensões normais extremas na face superior da viga para cada velocidade considerada
Fonte: Autoria própria

Nota-se que a tensão de compressão na fibra superior da viga atingiu um valor de -4,96MPa, ocorrido na velocidade de 18km/h. Já a maior tensão de tração encontrada foi de 1,31MPa, ocorrida na velocidade de 19km/h. Do mesmo modo que nas análises anteriores, esses valores foram encontrados em velocidades muito próximas de uma velocidade ressonante.

Se forem analisados os valores encontrados em velocidades um pouco mais distantes da velocidade ressonante, observa-se uma tensão máxima de compressão em torno de -2,50 a -2,80MPa. Para as tensões de tração, os valores encontrados ficaram em torno de 0,20 a 0,40 MPa

Na Figura 40 é mostrada a maior deformação específica, positiva e negativa para a face inferior da viga, para cada velocidade considerada.

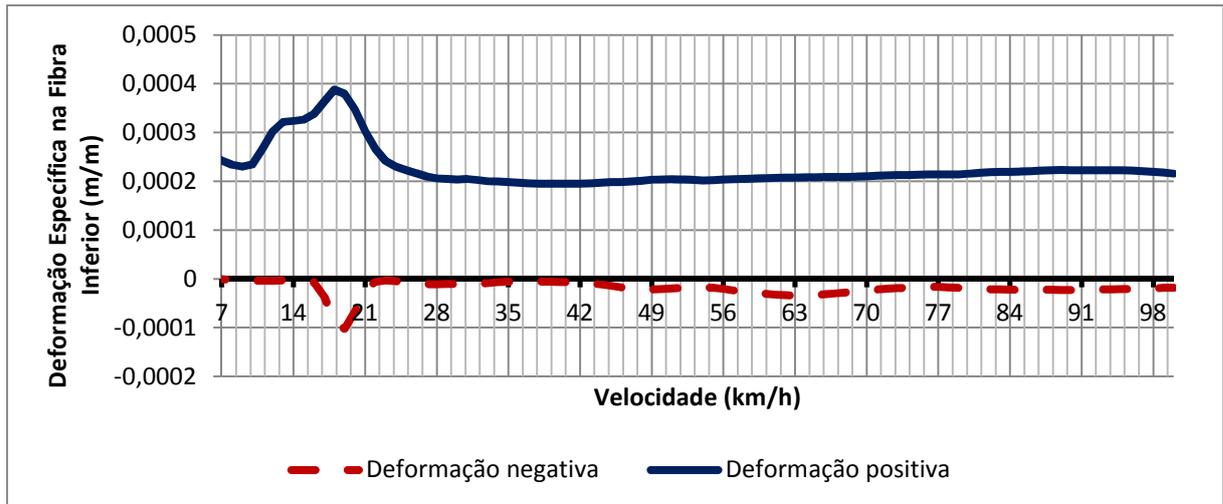


Figura 40: Deformações específicas extremas para a face inferior da viga para cada velocidade considerada

Fonte: Autoria própria

Observou-se que a maior deformação específica positiva ocorreu na velocidade de 18km/h, atingindo um alongamento de $4,00 \cdot 10^{-4}$ m/m. Já o maior encurtamento da face inferior da viga ocorreu para a velocidade de 19km/h, atingindo um valor de deformação específica de $-1,03 \cdot 10^{-4}$ m/m. Assim como nas análises de momento fletor, esforço cisalhante, tensão normal e deslocamentos, esses valores máximos foram encontrados quando o veículo ferroviário trafega em uma velocidade próxima à velocidade ressonante.

Para outras faixas de velocidade, temos que a deformação específica positiva da fibra inferior da viga ficou muito próxima do valor de $2,00 \cdot 10^{-4}$ m/m. Para a deformação específica negativa da fibra inferior, o valor variou em torno de $-0,1 \cdot 10^{-4}$ e $-0,3 \cdot 10^{-4}$ m/m.

Para a face superior, os valores de deformação podem ser observados na Figura 41.

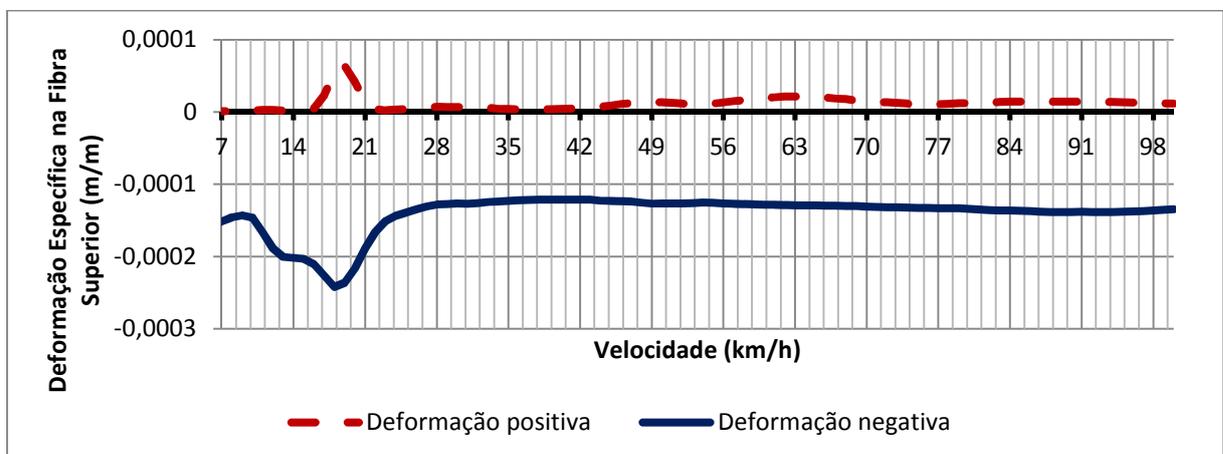


Figura 41: Deformações específicas extremas para a face superior da viga para cada velocidade considerada

Fonte: Autoria própria

Nota-se que a maior deformação específica positiva na face superior da viga, o que configura um alongamento, ocorreu na velocidade de 19 km/h, com valor de $6,4 \cdot 10^{-5}$ m/m. Para as deformações específicas negativas, que corresponde à um encurtamento da fibra superior, ocorreu para velocidade de 18 km/h, cujo valor é de $-2,34 \cdot 10^{-4}$ m/m, sendo que essas velocidades se encontram próximas ao valor da velocidade ressonante.

Analisando-se os dados obtidos para as outras faixas de velocidade, os valores de deformação específica positiva para a fibra superior da viga variaram aproximadamente entre $1,0 \cdot 10^{-5}$ e $2,1 \cdot 10^{-5}$ m/m. Para as deformações específicas negativas, os valores obtidos variaram em torno de $-1,2 \cdot 10^{-4}$ e $-1,4 \cdot 10^{-4}$ m/m.

Na Tabela 5 são resumidos os resultados máximos das grandezas medidas para a face inferior, e suas respectivas velocidades no qual estes picos ocorreram.

Tabela 5: Resumo dos valores extremos e suas respectivas velocidades

Grandeza	Valor	Velocidade (km/h)
Maior momento positivo (kN.m)	712,75	18
Maior momento negativo (kN.m)	-188,31	19
Maior esforço cisalhante positivo (kN)	99,46	13
Maior esforço cisalhante negativo (kN)	-72,38	71
Maior deslocamento positivo (mm)	1,31	19
Maior deslocamento negativo (mm)	-5,53	18
Maior tensão normal positiva (MPa)	7,96	18
Maior tensão normal negativa (MPa)	-2,10	19
Maior deformação específica positiva (m/m)	$4,00 \cdot 10^{-4}$	18
Maior deformação específica negativa (m/m)	$-1,03 \cdot 10^{-4}$	19

Fonte: Autoria própria

Desta forma, observa-se que das cinco grandezas medidas na análise dinâmica (momento fletor, esforço cisalhante, deslocamento, tensão normal e deformação específica), 4 delas (momento fletor, deslocamento, tensão normal e deformação específica) resultaram em valores máximos para as velocidades de 18 km/h ou 19 km/h. Apenas o esforço cisalhante retornou valores máximos para velocidades diferentes (13 km/h e 71 km/h).

Logo, a análise numérica mostra que a velocidade ressonante desta ponte considerada é 18 km/h ou 19 km/h, para a maioria das grandezas medidas.

Para cada grandeza medida (momento fletor, esforço cisalhante, deslocamento, tensão normal e deformação específica), em suas respectivas velocidades que resultaram em valores máximos, é apresentado no Apêndice A o histórico temporal do comportamento da referida grandeza.

A fim de comparação dos resultados dinâmicos com os resultados pseudo-estáticos, serão apresentados a seguir os gráficos dos resultados obtidos com razão entre os resultados da análise dinâmica e o maior valor encontrado com a análise pseudo-estáticos na respectiva grandeza medida. Os maiores valores obtidos com a análise pseudo-estáticos estão representados mais uma vez, na Tabela 6, para comodidade do leitor.

Tabela 6: Resumo dos resultados da análise Pseudo-Estática

Grandeza	Valor com majoração
Maior momento fletor positivo (kN.m)	491,56
Maior esforço cisalhante positivo (kN)	98,03
Maior deslocamento (m)	$-4,13 \cdot 10^{-3}$
Maior tensão normal (MPa)	5,08
Menor tensão normal (MPa)	-3,42
Maior deformação específica (m/m)	$2,48 \cdot 10^{-4}$
Menor deformação específica (m/m)	$-1,67 \cdot 10^{-4}$

Fonte: Autoria própria

Na Figura 42 observa-se a razão entre o maior momento fletor positivo obtido com a análise dinâmica para cada velocidade (M_D), e o maior momento fletor positivo obtido com a análise pseudo-estática (M_{PE}). Nota-se que os maiores momentos fletores negativos na análise dinâmica não serão comparados com a análise pseudo-estática, pois esta só produz momentos fletores positivos nos resultados, pelo fato de a viga em estudo ser modelada como simplesmente apoiada.

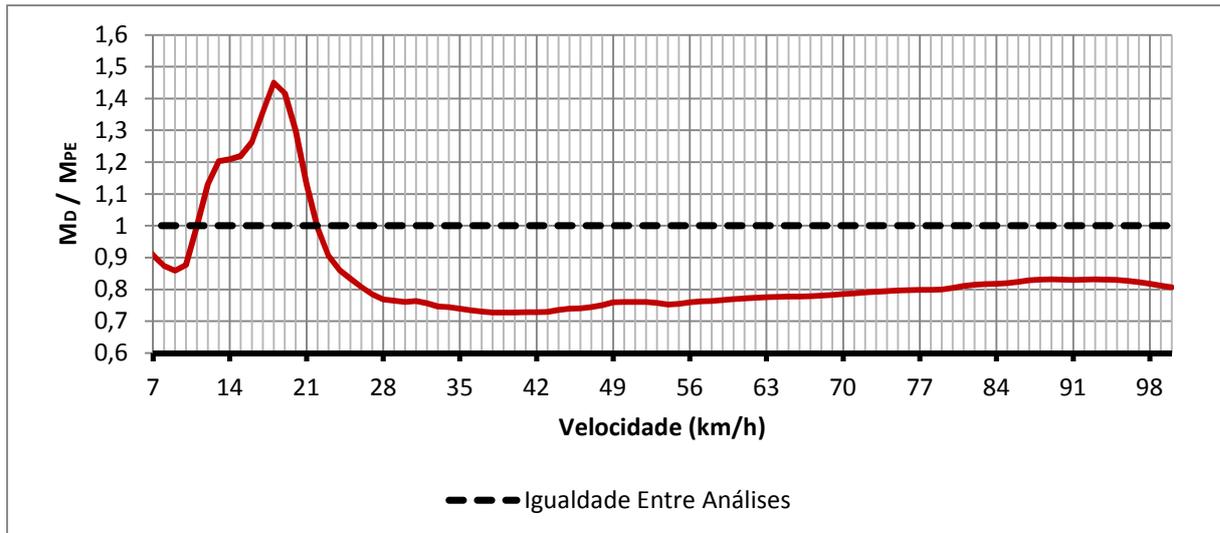


Figura 42: Razão entre momento fletor obtido com a análise dinâmica ao longo das velocidades consideradas e o maior momento fletor obtido com a análise pseudo-estática
Fonte: Autoria própria

Nota-se que, para a faixa de velocidade do veículo ferroviário entre 12 km/h e 21 km/h, a análise dinâmica retornou valores maiores do que os valores da análise pseudo-estática majorada pelo coeficiente de impacto prescrito na Norma NBR 7187 (ABNT, 2003), cuja maior razão entre análises foi de 1,45. Ou seja, os resultados da análise dinâmica retornaram valores de momento fletor até 45% maiores do que os valores da análise pseudo-estática. Destaca-se que essa razão de 1,45 é obtida para velocidades de passagem do veículo ferroviário muito próximas à velocidade ressonante.

Para faixas de velocidade distantes da primeira velocidade ressonante, observa-se que a razão entre as duas análises diminui consideravelmente, para valores que giram em torno 0,73 a 0,83, indicando que nesses casos a análise pseudo-estática retorna valores mais conservadores que a análise dinâmica.

Na Figura 43, mostra-se a relação do esforço cisalhante obtido com a análise dinâmica (V_D) e o maior esforço cisalhante obtido com a análise pseudo-estática (V_{PE}).

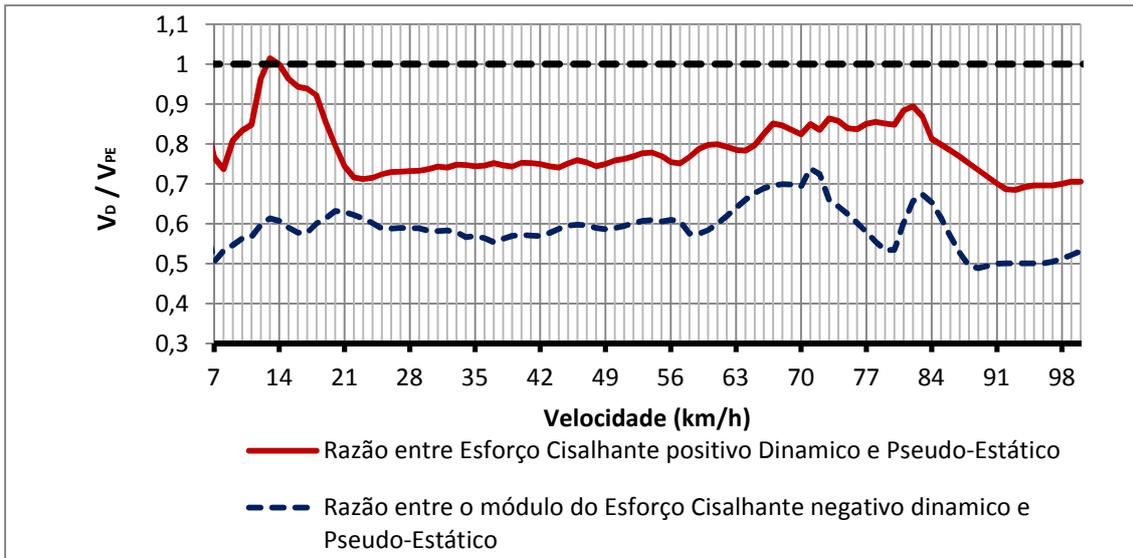


Figura 43: Razão entre o esforço cisalhante positivo e negativo obtido com a análise dinâmica e o maior esforço cisalhante obtido com a análise pseudo-estática.

Fonte: Autoria própria

Nota-se que na faixa de velocidades entre 10 km/h e 15 km/h o valor do maior esforço cisalhante positivo para análise dinâmica se aproxima do valor da análise pseudo-estática, e só o ultrapassa para a velocidade de 13 km/h, onde a relação entre eles atinge o valor de 1,02. O maior esforço cisalhante negativo resultante da análise dinâmica não se aproxima do valor da análise pseudo-estática em nenhuma velocidade considerada.

Na Figura 44 pode-se observar a relação do deslocamento obtido com a análise dinâmica (D_D) e o maior deslocamento obtido com a análise pseudo-estática (D_{PE}).

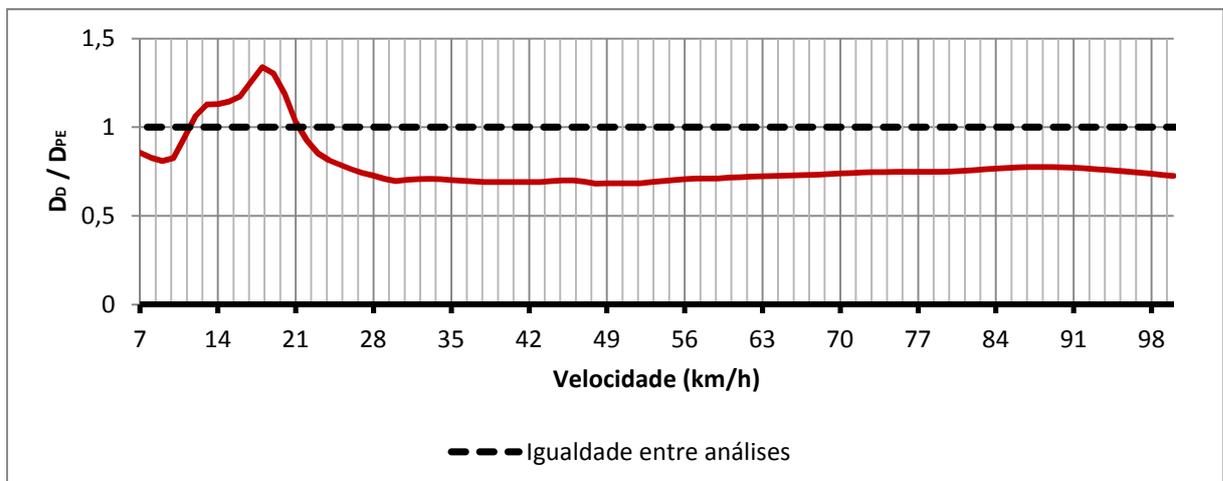


Figura 44: Razão entre deslocamento obtido com a análise dinâmica ao longo das velocidades consideradas e o maior deslocamento obtido com a análise pseudo - estática.

Fonte: Autoria própria

Nota-se que, para a faixa de velocidade do veículo ferroviário entre 12 km/h e 21 km/h, a análise dinâmica retornou valores maiores do que os valores da análise pseudo-estática majorada pelo coeficiente de impacto prescrito na Norma NBR 7187 (ABNT, 2003), cujo maior valor da razão entre análises foi de 1,35. Ou seja, os resultados da análise dinâmica retornaram valores de deslocamento até 35% maiores do que os valores da análise pseudo-estática já majorada pelo coeficiente de impacto. Ressalta-se que os valores da análise dinâmica que superaram os valores da análise pseudo-estática ocorreram em velocidades próximas à velocidade ressonante.

Em outras faixas de velocidade distantes da velocidade ressonante, tem-se que a relação entre os valores obtidos através da análise dinâmica e da análise pseudo-estática variou entre 0,70 e 0,79. Assim, percebe-se que para essas outras faixas de velocidade a análise pseudo-estática proporcionou resultados mais conservadores que a análise dinâmica.

Na Figura 45 é representada a relação da tensão normal obtida com a análise dinâmica (σ_D) e a maior tensão normal obtida com a análise pseudo-estática para a fibra inferior (σ_{PE}).

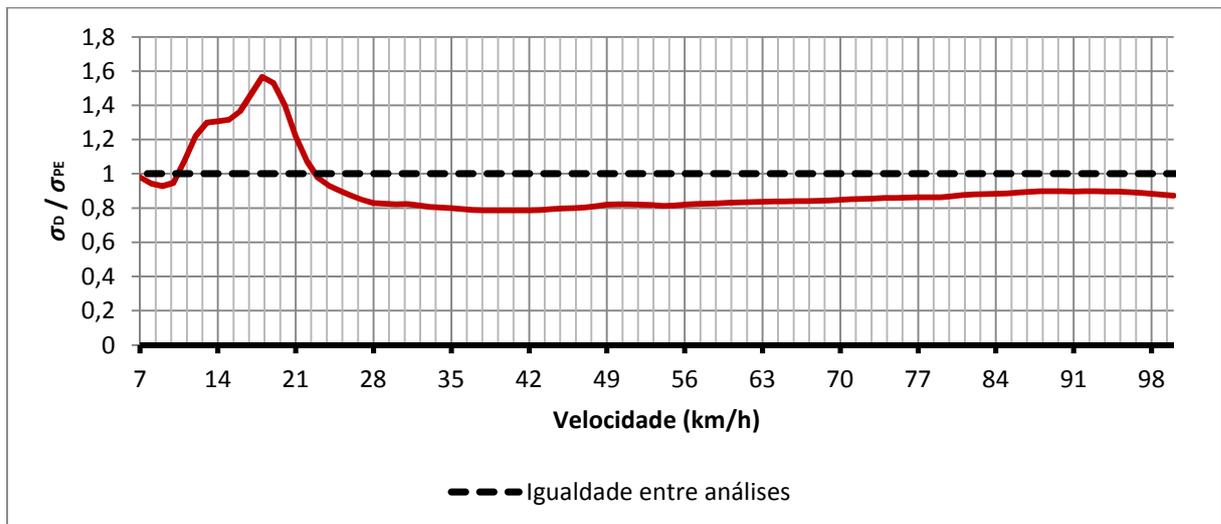


Figura 45: Razão entre tensão normal obtida com a análise dinâmica ao longo das velocidades consideradas e a maior tensão normal obtida com a análise pseudo - estática.

Fonte: Autoria própria

Nota-se que, para a faixa de velocidade do veículo ferroviário entre 12 km/h e 22 km/h, a análise dinâmica retornou valores maiores do que os valores da análise pseudo-estática majorada pelo coeficiente de impacto prescrito na Norma NBR 7187 (ABNT, 2003), cujo maior valor da razão entre as análises foi de 1,57. Ou seja, os resultados da análise dinâmica retornaram valores de tensão normal até 57% maiores do que os valores da análise pseudo-estática. Porém, da mesma forma que para momentos fletores e deslocamentos, os

valores provenientes da análise dinâmica que superaram o maior valor obtido pela análise estática foram encontrados em velocidades de passagem do veículo próximas à velocidade ressonante.

Analisando a razão entre as duas análises em velocidades mais distantes à velocidade ressonante, nota-se que a relação varia em torno de 0,80 a 0,90, indicando, mais uma vez, resultados conservadores para a análise pseudo-estática.

Na Figura 46 é ilustrada a relação da deformação específica obtida com a análise dinâmica (e_D) e a maior deformação específica obtida com a análise pseudo-estática (e_{PE}) para a face inferior da viga.

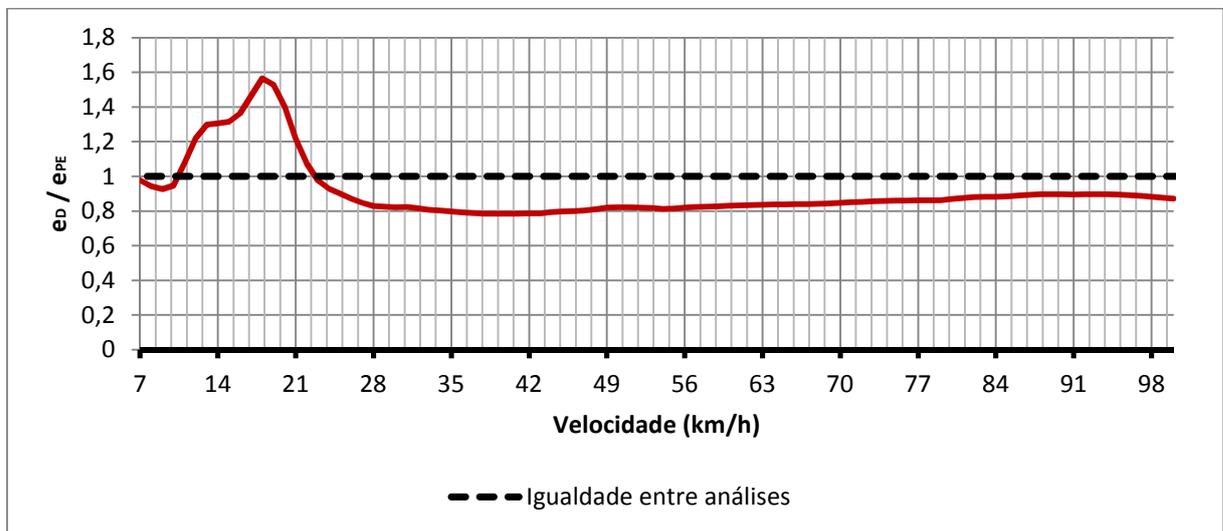


Figura 46: Razão entre deformação específica obtida com a análise dinâmica ao longo das velocidades consideradas e a maior deformação específica obtida com a análise pseudo - estática.
Fonte: Autoria própria

Observa-se que, para a faixa de velocidade do veículo ferroviário entre 11 km/h e 22 km/h, faixa de velocidade próxima à velocidade ressonante, a análise dinâmica retornou valores maiores do que os valores da análise pseudo-estática majorada pelo coeficiente de impacto prescrito na Norma NBR 7187 (ABNT, 2003). A maior relação da razão entre as análises ocorreu para velocidade de 19 km/h, cujo valor foi de 1,56. Ou seja, os resultados da análise dinâmica retornaram valores de deformação específica até 56% maiores do que os valores da análise pseudo-estática já majoradas pelo coeficiente de impacto dinâmico.

Por outro lado, quando o veículo trafega sobre a ponte em uma velocidade distante da velocidade ressonante, percebe-se que os valores encontrados a partir da análise pseudo-estática são mais conservadores que os valores obtidos através da análise dinâmica. Nesses

casos, a razão entre os resultados da análise dinâmica e o maior valor encontrado para a análise pseudo-estática variou entre 0,80 e 0,90

A seguir, é apresentado um resumo dos resultados da comparação entre a análise dinâmica e a análise pseudo-estática.

Tabela 7: Resumo da comparação entre análises

Grandeza comparada	Maior razão entre análises
Momento positivo	1,45
Maior cisalhante positivo	1,02
Maior cisalhante negativo, em módulo	0,74
Deslocamento	1,35
Tensão normal na fibra inferior	1,57
Deformação específica positiva na fibra inferior	1,56

Fonte: Autoria própria

Aqui se encerra a apresentação dos resultados obtidos durante a realização do trabalho. Na próxima seção, serão apresentadas as considerações finais do trabalho, bem como sugestões para futuros trabalhos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 Conclusões

Neste trabalho, com o auxílio do modelo de veículo ferroviário e a rotina computacional implementada por Beghetto (2006) e da equação da linha elástica, obteve-se numericamente para a análise dinâmica os valores de momento fletor, esforço cisalhante, tensão normal e deformação específica para o ponto central de cada uma das vigas que compõem a estrutura e para cada uma das diversas velocidades de passagem do veículo sobre a ponte.

Observou-se que das cinco grandezas medidas (momento fletor, esforço cisalhante, deslocamento, tensão normal e deformação específica) na análise dinâmica, quatro delas (momento fletor, deslocamento, tensão normal e deformação específica) resultaram em valores máximos para as velocidades de 18 km/h ou 19 km/h. Estes valores se aproximam do valor da velocidade ressonante para a primeira frequência natural de vibração (V_{RD1}), definido pela Equação (86) com o valor de 19,07 km/h, o que confirma esta velocidade como sendo uma velocidade ressonante para a ponte. Apenas o esforço cisalhante retornou valores máximos para velocidades diferentes (13 km/h e 71 km/h), mas ainda sim próximos das velocidades ressonantes para a primeira e segunda frequências naturais de vibração.

Para fins de comparação, a ponte também foi analisada analiticamente de forma pseudo-estática com a aplicação do coeficiente de impacto dinâmico recomendado pela NBR 7187 (ABNT, 2003). Esse coeficiente de impacto, influenciado exclusivamente pelo comprimento do vão teórico da ponte, para a ponte em questão teve o valor de 1,43.

Quando comparada as duas análises, notou-se que todas as cinco grandezas medidas na análise dinâmica tiveram seus valores máximos superiores à análise pseudo-estática em alguma velocidade considerada. Isso se deu em velocidades próximas àquelas que correspondem às velocidades ressonantes, em que as amplitudes de deslocamentos da estrutura são maiores.

Por outro lado, em velocidades distantes da situação ressonante, a análise pseudo-estática majorada pelo coeficiente de impacto dinâmico prescrito pela NBR 7187 (ABNT,

2003) retornou valores maiores que aqueles apontados pela análise dinâmica. Assim, em condições não ressonantes, a análise pseudo-estática produz resultados mais conservadores.

De certa forma, percebe-se que a análise dinâmica implementada via elementos finitos tende a ser mais precisa do que uma análise pseudo-estática majorada por um coeficiente de impacto prescrito pela norma brasileira.

5.2 Sugestões Para Trabalhos Futuros

A seguir, apresentam-se algumas sugestões para futuros trabalhos nessa linha de pesquisa:

- Variar as dimensões da viga, assim como suas propriedades físicas.
- Modelar via elementos finitos o tabuleiro da viga.
- Considerar a passagem de uma composição de múltiplos vagões.
- Aumentar o número de elementos finitos em que cada viga está subdividida.
- Variar a amplitude das irregularidades dos trilhos.
- Estudo de fissuração e dano material .
- Considerar outros elementos no modelo da ponte, como o tabuleiro, por exemplo.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto: procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

_____. NBR 7187: Projeto de pontes de concreto armado e protendido: procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

AZEVEDO, A. F. M. **Método dos elementos finitos**. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto – Portugal. 1º Edição, Abril 2003. Disponível em: <<http://www.fe.up.pt/~alvaro>>. Acesso em: 20 jun. 2014.

ASSAN, A. E. **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2003.

BATTISTA, R. C.; BARBOSA, F. S. **Reabilitação de pontes metálicas ferroviárias por ação composta de lajes de concreto armado**. XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Punta del este, Uruguay, 13-17 de novembro de 2000.

BEGHETTO, F. L. M. **Efeitos dinâmicos em modelo de veículo e ponte ferroviária diante da variação de velocidade e irregularidades verticais da via, 105f**. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.

BEGHETTO, F. L. M. **Modelagem tridimensional da interação dinâmica entre veículo e ponte ferroviária considerando contato roda-trilho, irregularidades da via e variação da velocidade, 268f**. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2011.

CHEUN, Y. K., LEUNG, A. Y. T., **Finite Element Methods in Dynamics**, Science Press, 1992.

CHOPRA, A. K. **Dynamic of structures: theory and applications to earthquake engineering**. Prentice Hall, 1995.

CHU, K.H.; GARG, V.K.; WANG, T.L. **Impact on railway prestressed concrete bridge**. *Journal of Structural Engineering*. ASCE V. 112, n.5, pp 1036-1051, 1986.

CHENG, Y.S.; AU, F.T.K.; CHEUNG, Y.K. **Vibration of railway bridges under a moving train by using bridge-track-vehicle element**. Engineering Structures v.23, n.12, pp 1597-1605, 2001.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 2003

CNT, O Sistema ferroviário brasileiro. Confederação Nacional do Transporte, Brasília, 2013.

CORREA, W.L.; **Vibrações em Pontes Ferroviárias**. UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003.

COOK, R.D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E. **Concepts and applications of finite element analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1989. 630p.

CUNHA, P. G., **Análise Dinâmica de Pontes Ferroviárias: uma metodologia simplificada**, São Paulo, Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2001.

DAAE, Departamento Autônomo de Água e Esgotos. Disponível em <<http://www.daaearaquara.com.br/hist.htm>>. Acesso em 29 de Outubro de 2014.

DINH, V. N.; KIM, K. D.; WARNITCHAI, P. **Dynamic analysis of three-dimensional bridge–high-speed train interactions using a wheel–rail contact model**. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029609002764>>. Acesso em 22 Jun 2014.

FELIPPA C. A. **Introduction to Finite Element Methods**. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures. University of Colorado, 2001

FELLIPE FILHO, W. N., **Avaliação dos coeficientes de impacto utilizados no cálculo de pontes rodoviária via análise dinâmica de estruturas**, Juiz de Fora – Universidade Federal de Juiz de Fora, 2008.

FIESP, **Matriz de transportes** – Disponível em <<http://www.fiesp.com.br/transporte-e-logistica/matriz-de-transporte/>> Acesso em 26 de fevereiro de 2015.

FONSECA, J. **Ferramentas de simulação em mecânica: elementos finitos**. Material compilado para a disciplina de Elementos Finitos para Graduação e Pós-graduação em Engenharia Mecânica. UFRGS. 2002. p. 88.

FRÝBA, L., **Dynamics of Railway Bridges**. London. Thomas Telford, 1996.

GARINEI, A.; RISITANO, G., 2007. **Vibrations of Railway Bridges for High Speed Trains under Moving Loads Varying in Time**. Engineering Structures, 30, 724-732

GOICOLEA, J.; GABALDÓN, F.; DOMÍNGUEZ, J.; NAVARRO, J. **Dynamic loads in new engineering codes for railway bridges in Europe and Spain**. In PROCEEDINGS OF WORKSHOP FOR HIGH-SPEED RAILWAY, FEUP, Porto, Portugal, 2004.

GRECO, B. L. **Vibrações e Construções**. Unicamp, 2008

KÜSTER, L. D.; SARTORI, A. L. **Análise dinâmica de estruturas de concreto: Avaliação de três sistemas construtivos de lajes**. Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.18, p. 13-22, 2011.

LI, Q. ; XU, Y. L. ; WU, D. J.; CHEN, Z. W. **Computer-aided Nonlinear Vehicle-bridge Interaction Analysis**. Disponível em:

LIN, Y.H., TRETHERWEY, M.W., **Finite element analysis of elastic beams subjected to moving dynamics loads**. Journal of Sound and Vibration v.136, n.2, pp 323-342, 1990.

LIU, K.; REYNDERS, E.; RÖECK, G. D., LOMBAERT, G. , 2009. **Experimental and numerical analysis of a composite bridge for high-speed trains**. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X08006329>>. Acesso em 20 Jun 2014

LIU, K., RÖECK, G.; LOMBAERT, G., 2008. **The Effect of Dynamic Train-Bridge Interaction on the Bridge Response during a Train Passage**. Journal of Sound and Vibration, 325, 240-251.

LOGÍSTICA BRASIL, disponível em <http://www.logisticabrasil.gov.br>. Data de acesso 21 de abril de 2014, às 11 horas.

MAJKA, M.; HARTNETT, M., 2009. **Dynamic Response of Bridges to Moving Trains: A Study on Effects of Random Track Irregularities and Bridge Skewness**. Journal Computers & Structures, 87, 1233-1252.

MEIXEDO, A.; DELGADO, D.; CALÇADA, R. **Comportamento Dinâmico de Pontes com Tabuleiro Pré-fabricado em Vias de Alta Velocidade**. Encontro Nacional BETÃO ESTRUTURAL - BE2012 FEUP, 24-26 de outubro de 2012.

MENDES, P.; OLIVEIRA, S. **Análise Dinâmica de Estruturas**, Lisboa, 2008

NÓBREGA, P. G. B. **Análise dinâmica de estruturas de concreto: estudo experimental e numérico das condições de contorno de estruturas pré-moldadas**. São Carlos, 2004. Tese (doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

OLSSON, M., **Finite element, modal co-ordinate analysis of structures subjected to moving loads**. Journal of Sound and Vibration v.99, n.1, pp 1-12, 1985.

PAULTRE, P. **Dynamic of Structures**, Iste, Londres, 2010.

PET, **A ação do vento em edificações – Parte 2**, Disponível em: <<http://blogdopetcivil.com/tag/rio-niteroi/>>. Acesso em 29 de Outubro de 2014

RIBEIRO, Diogo; CALÇADA, Rui; DELGADO, Raimundo. **Calibração e Validação Experimental de um Modelo Dinâmico da Ponte Ferroviária de São Lourenço sob Ação de Tráfego**. IX CONGRESSO DE CONSTRUÇÃO METÁLICA E MISTA, Porto, Portugal, 2013.

RIGUEIRO, C., REBELO, C., SILVA, L. S., 2009. **Influência das irregularidades da via na resposta dinâmica de pontes ferroviárias de médio vão**. Disponível em: <http://repositorio.ipcb.pt/bitstream/10400.11/1354/1/2009_METNUM_CRigueiro.pdf>. Acesso em 19 Jun 2014.

ROCHA, J.M.; HENRIQUES, A. A.; CALÇADA, R. **Influência da interação ponte-comboio na avaliação da segurança de uma ponte ferroviária mista aço-betão de pequeno vão**. Encontro Nacional BETÃO ESTRUTURAL - BE2012 FEUP, 24-26 de outubro de 2012.

RODOLFO, A.; VALE, M.; REMO M. S. **Metodologia para avaliar a interação entre trem e ponte UFPA**. Disponível em: <<http://www.revistaferroviaria.com.br/premios/EDLP2011/metodologia-para-avaliar-a-interacao-entre-trem-e-ponte.pdf>>. Acesso em 10 Jun 2014.

RODRIGO, M. D. M.; LAVADO, J. **Dynamic performance of existing high-speed railway bridges under resonant conditions retrofitted with fluid viscous dampers.** Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029609003927>>. Acesso em 22 Jun 2014.

SAVIN, E. **Dynamic amplification factor and response spectrum for the evaluation of vibrations of beams under successive moving loads.** Journal of Sound and Vibration v.248, n.2, pp 267-288, 2001.

SILVA, J. G. S. **Análise Dinâmica Não-Determinística de Tabuleiros de pontes rodoviárias com irregularidades superficiais.** Tese de D.Sc., PUC, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1996.

UNIVERSITY OF WASHINGTON LIBRARIES. **Tacoma Narrows Bridge during collapse showing central span twisting, November 7, 1940.** Disponível em: <<http://digitalcollections.lib.washington.edu/cdm/singleitem/collection/farquharson/id/36/rec/1>>. Acesso em 29 de Outubro de 2014.

VÁSQUEZ, M. P. R. **Implementação computacional e análise da frenagem considerando interação veículo-estrutura em pontes ferroviárias.** Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-013A/13, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 136 p, 2013.

WIRIYACHAI, A.; CHU, K.H.; CARG, V.K. **Bridge impact due to wheel and track irregularities.** Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE. V.108, n.4 pp 648-666, 1982.

XIA, H.; ZHANGA N.; RÖECKB, G. D., 2003. **Dynamic analysis of high speed railway bridge under articulated trains.** Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794903003092>>. Acesso em 20 Jun 2014.

XIA, H.; ZHANGA, N.; RÖECKB, G. D., 2005. **Dynamic analysis of railway bridge under high-speed trains.** Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794905001173>>. Acesso em 20 Jun 2014.

YANG, Y.B.; YAU, J.D. **Vibration of simples beams due to trains moving at high speed.** Engineering Structures v.19, n.11, pp 936-944, 1997.

ZIENKIEWICZ O. C.; TAYLOR R. L. The **Finite Element Method, Volume 1, The Basis**. Butterworth-Heinemann, 2000.

APÊNDICE A

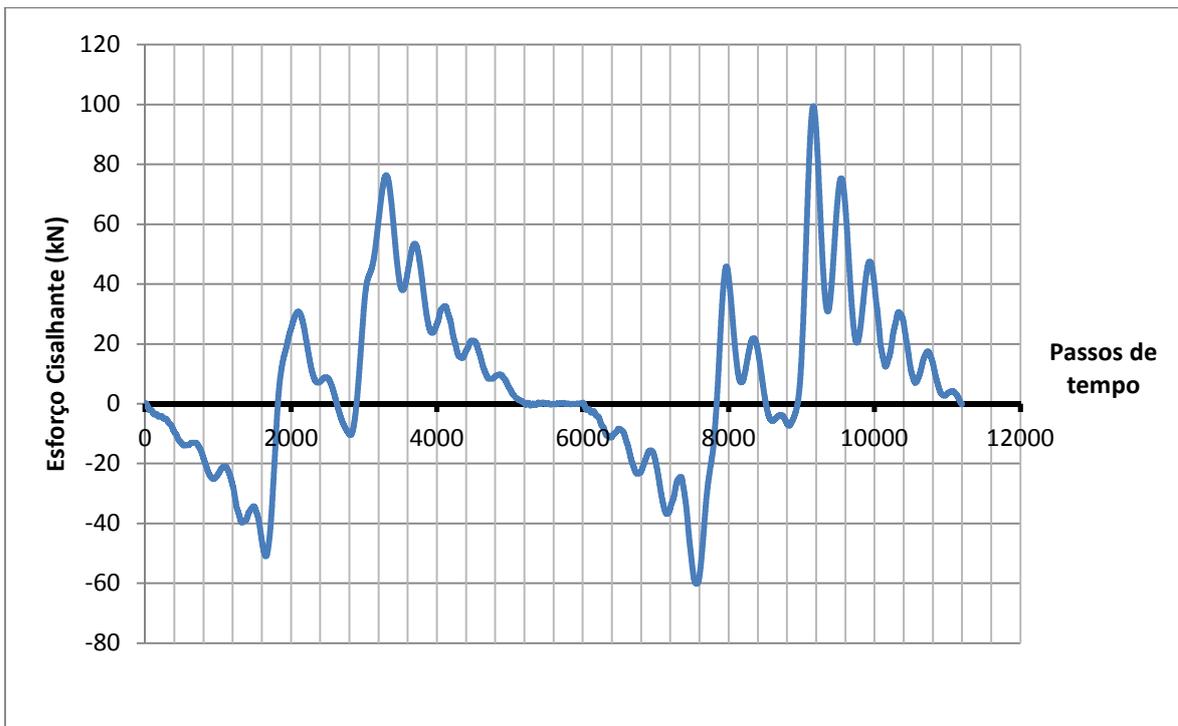


Figura A- 1: Histórico do esforço cisalhante no tempo. Velocidade de 13 km/h
Fonte: Autoria própria

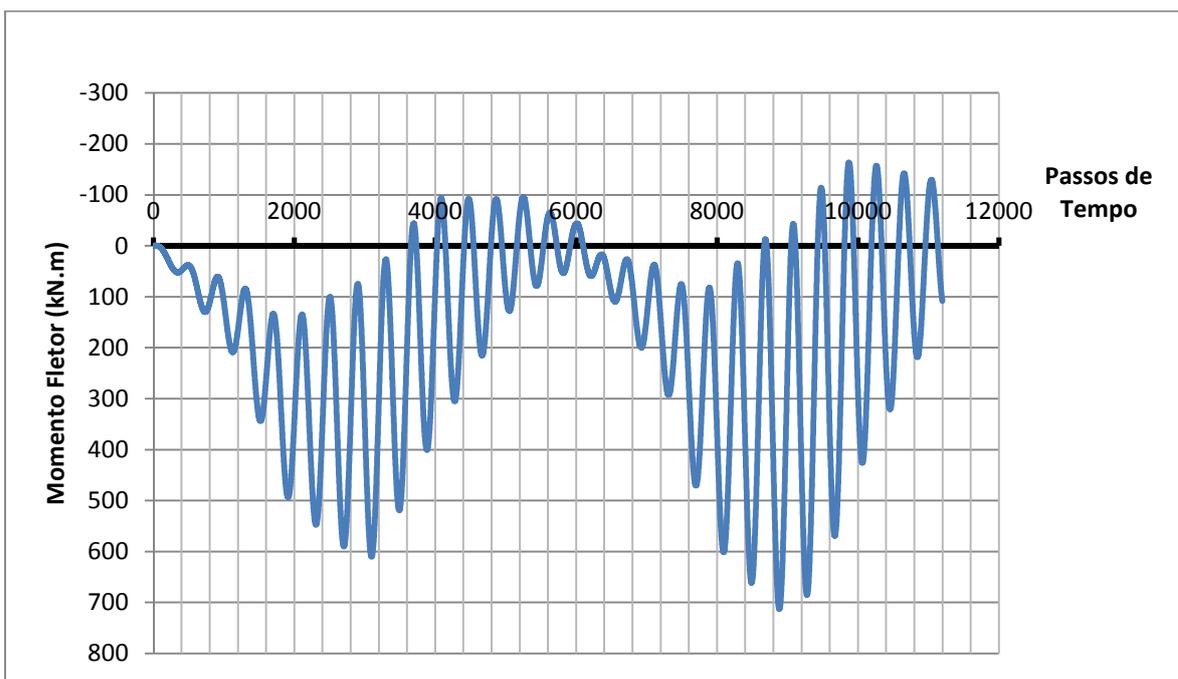


Figura A- 2: Histórico do Momento fletor no tempo. Velocidade de 18 km/h
Fonte: Autoria própria

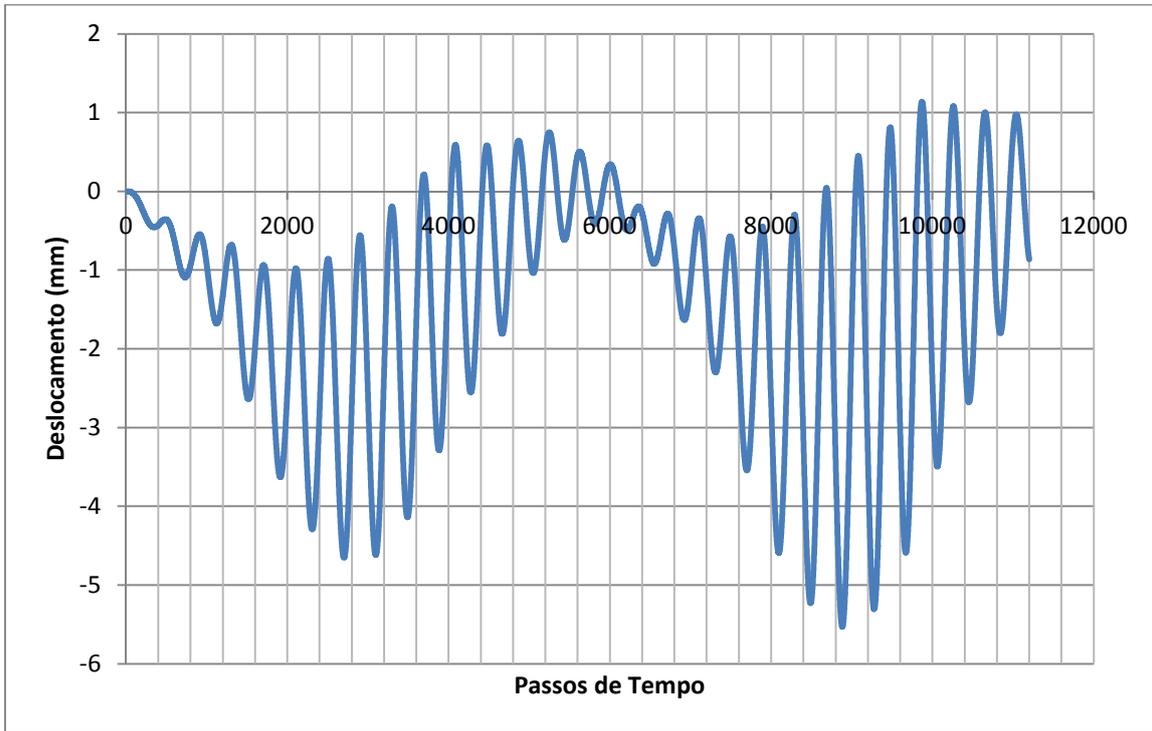


Figura A- 3: Histórico do deslocamento no tempo. Velocidade de 18 km/h
Fonte: Autoria própria

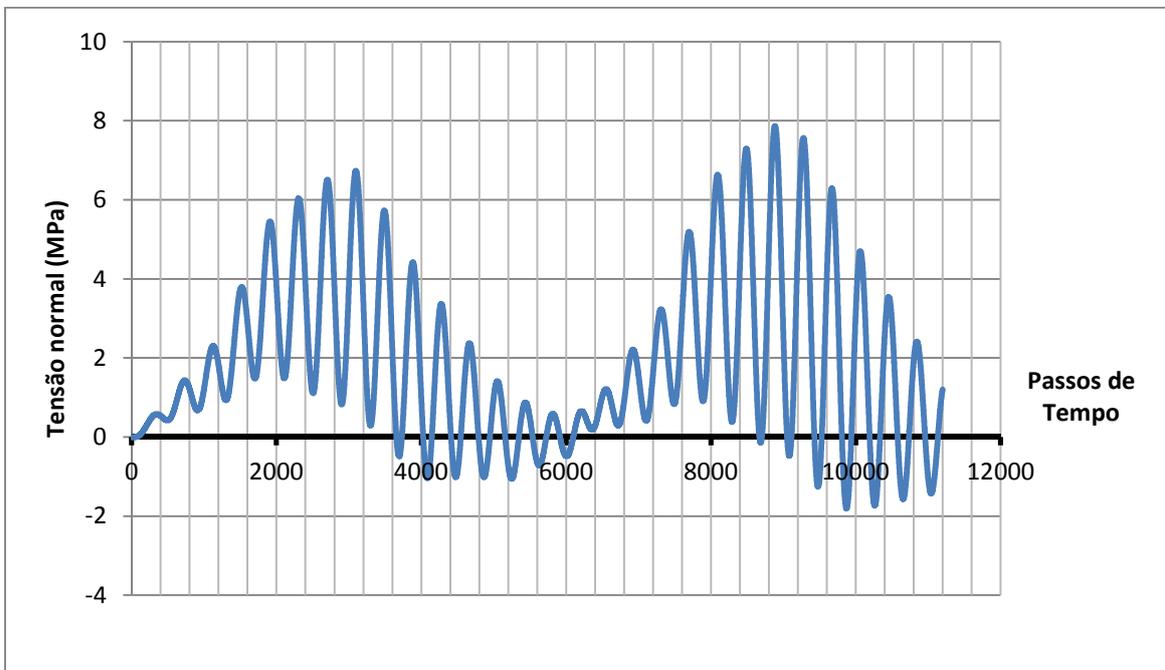


Figura A- 4: Histórico de tensão normal no tempo. Velocidade de 18 km/h
Fonte: Autoria própria

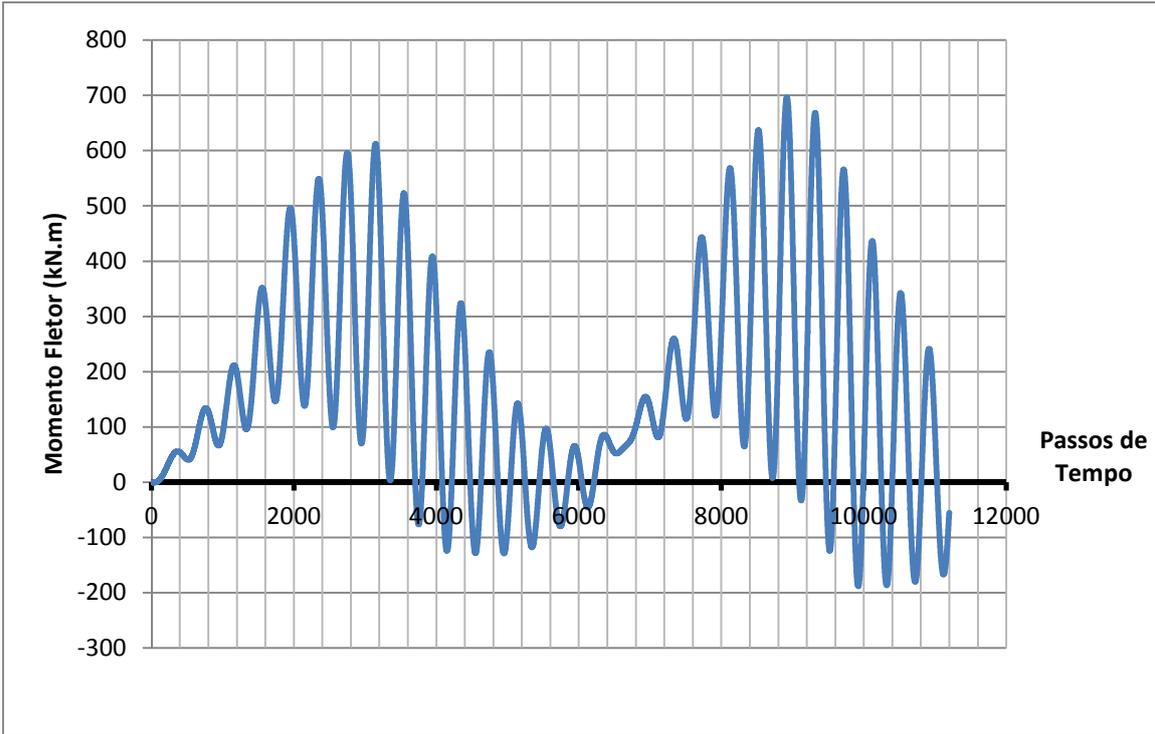


Figura A- 5: Histórico do momento fletor no tempo. Velocidade de 19 km/h
Fonte: Autoria própria

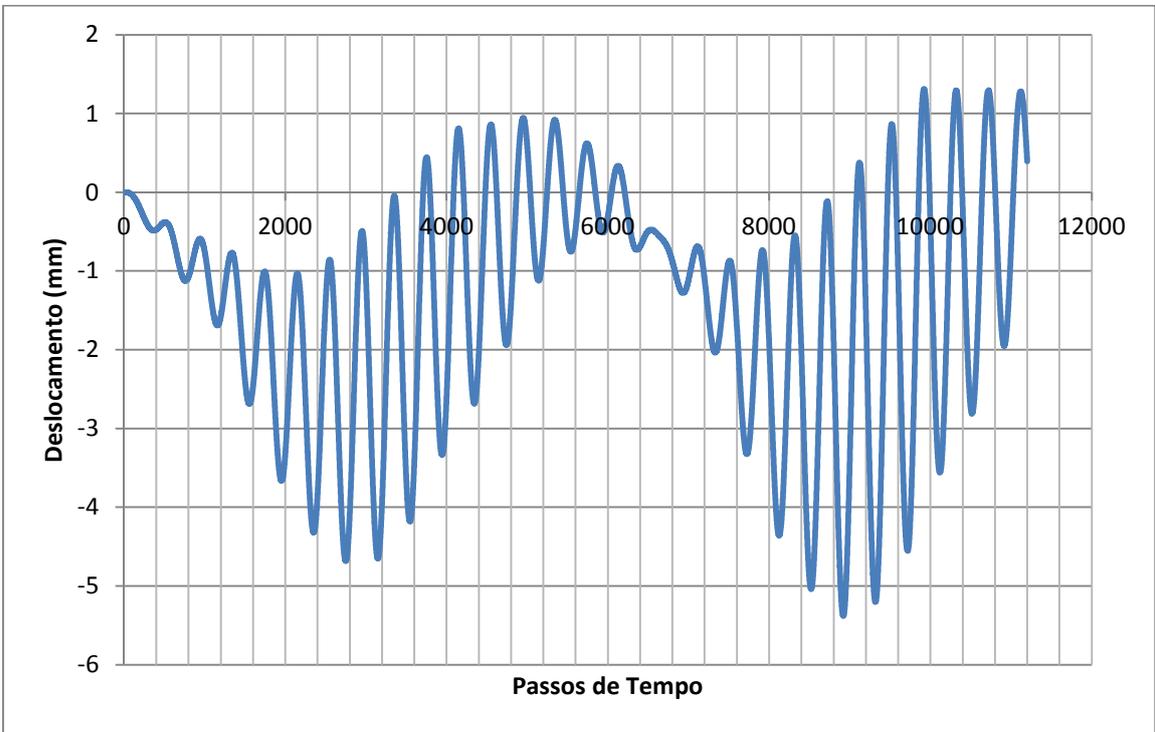


Figura A- 6: Histórico da flecha no tempo. Velocidade de 19 km/h
Fonte: Autoria própria

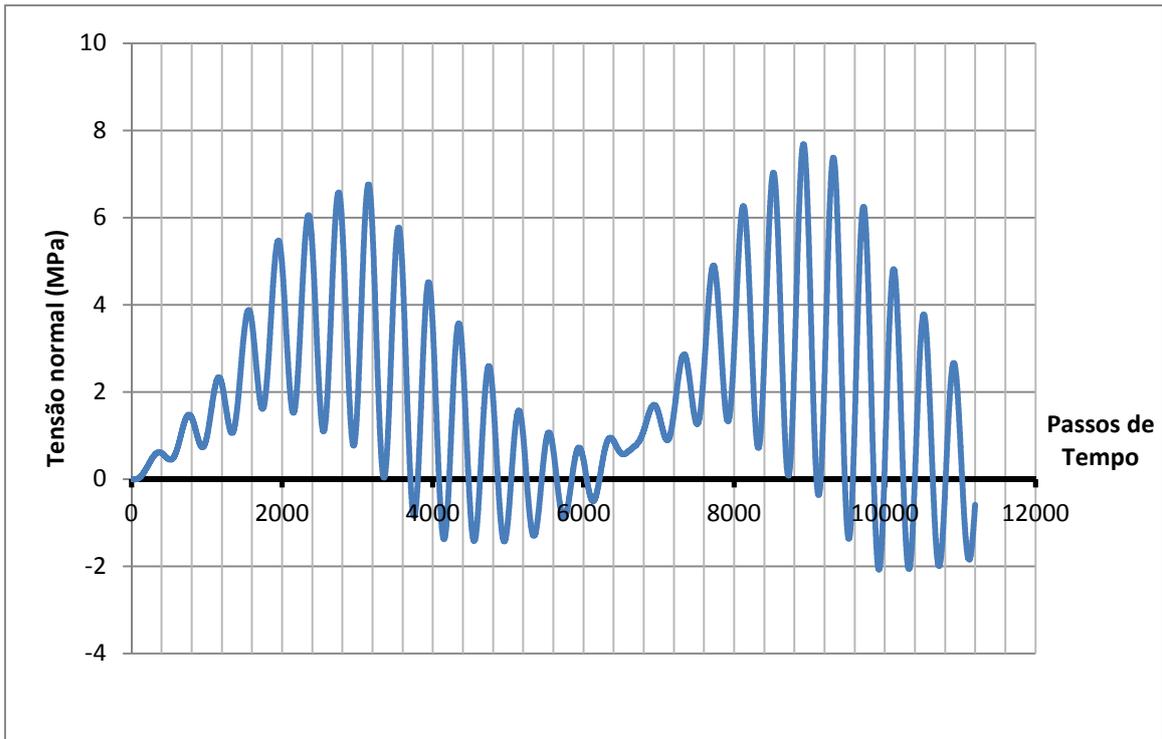


Figura A- 7: Histórico de tensão normal no tempo. Velocidade de 19 km/h
Fonte: Autoria própria

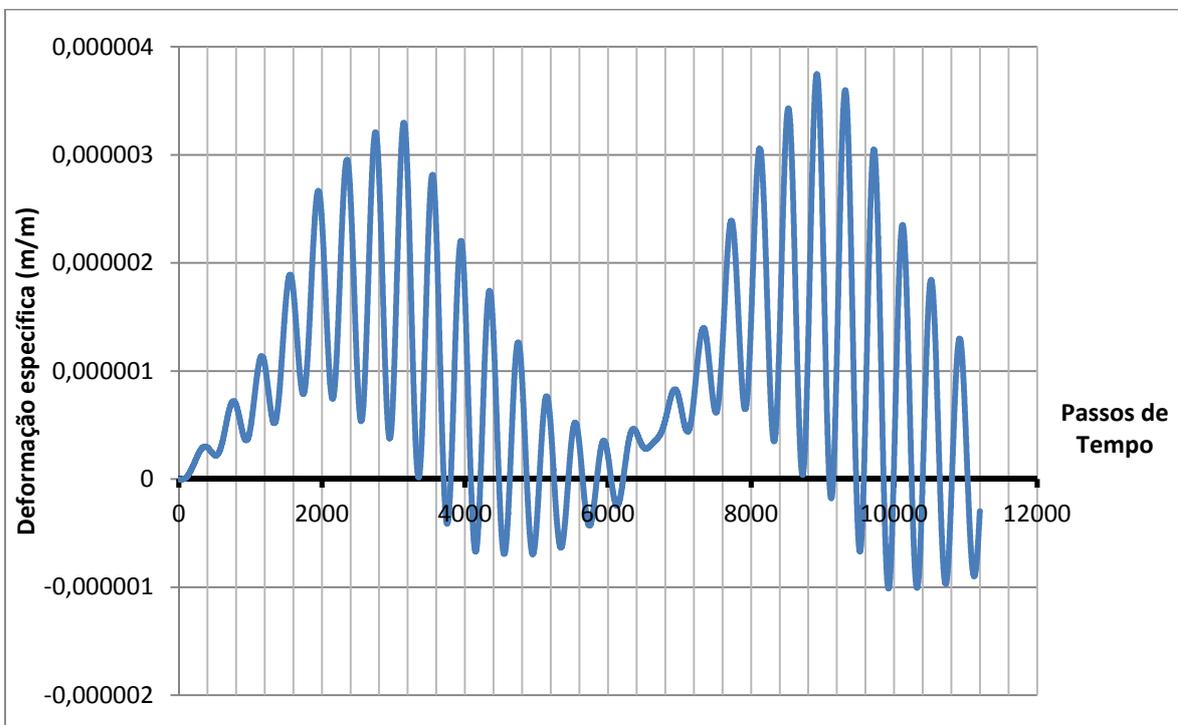


Figura A- 8: Histórico de deformação específica no tempo. Velocidade de 19 km/h
Fonte: Autoria própria

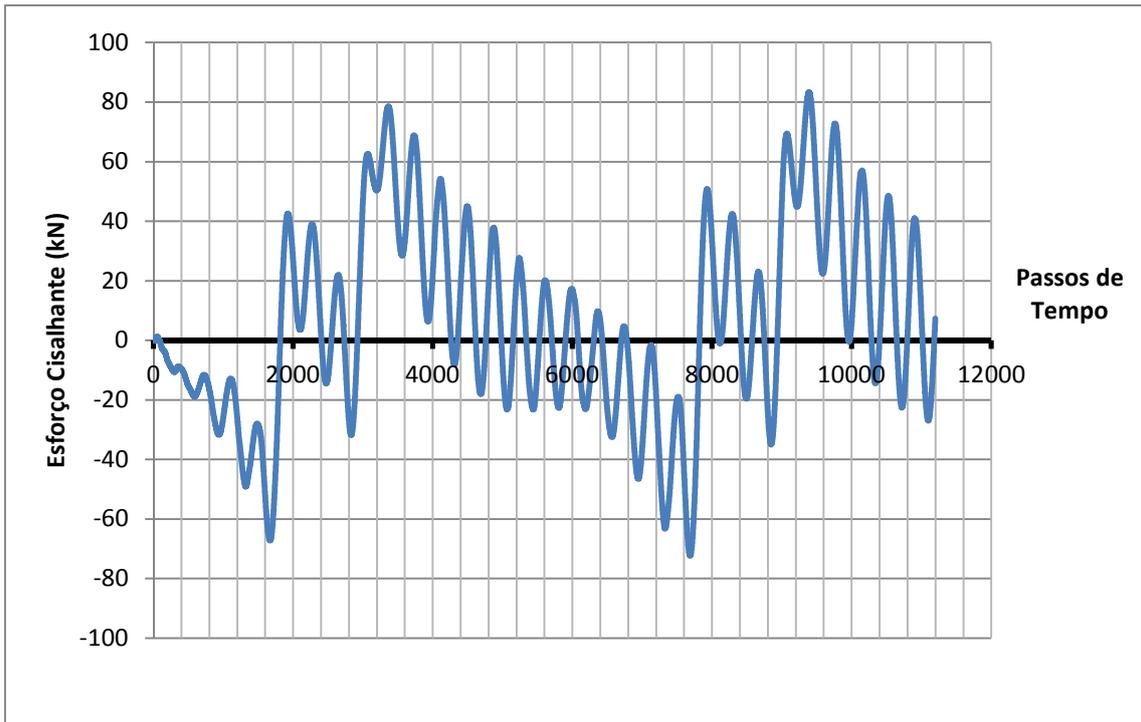


Figura A- 9: Histórico do esforço cisalhante no tempo. Velocidade de 71 km/h
Fonte: Autoria própria