UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALEXANDRE LUIZ DA SILVA

ESPAÇOS DE HILBERT E O TEOREMA DE LAX-MILGRAM

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2018

ALEXANDRE LUIZ DA SILVA

ESPAÇOS DE HILBERT E O TEOREMA DE LAX-MILGRAM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Licenciado em Matemática".

Orientador: Prof. Dr. Thiago Pinguello de Andrade

CORNÉLIO PROCÓPIO

2018

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

Prof. Thiago Pinguello de Andrade
(Orientador)

Profa. Alexandra Cristina Menis

Profa. Débora Aparecida Francisco Albanez

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso"

Á todos que me apoiaram . . . .

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por me permitir estar chegando ao final desse curso, sem ele nada seria possível.

Agradeço aos meus pais e familiares, em especial minha mãe Nair Izaurina da Silva, meus filhos Ana Júlia da Silva, Felipe Alexandre da Silva e minha sogra Eleni Pinheiro do Carmo, pela ajuda e compreensão durante essa jornada.

Agradeço aos colegas de turma, que durante essa trajetória, dividimos muitas experiências, aumentado e enriquecendo nosso conhecimento.

Agradeço também em especial, o meu orientador Prof. Dr. Thiago Pinguello de Andrade, que com seu conhecimento me orientou no desenvolvimento desse trabalho, sempre me incentivando e ao mesmo tempo teve compreensão e paciência nas minhas dificuldades.

E por final agradeço a todos os professores, direção, funcionários e alunos, que fizeram parte dessa caminhada, seja de forma direta ou indireta e que aqui não será possível nominar a todos.

RESUMO

Silva, Alexandre. ESPAÇOS DE HILBERT E O TEOREMA DE LAX-MILGRAM. 84 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018.

Neste trabalho de conclusão de curso temos como objetivo estudar os conceitos básicos da análise funcional, como espaços métricos, espaços normados, espaços de Banach, além de algumas noções topológicas, funcionais lineares, produto interno e espaços de Hilbert. Por fim, estudaremos o Teorema de Lax-Milgram, que possui aplicações importantes na teoria de Equações Diferenciais.

Palavras-chave: Análise Funcional, Espaços de Hilbert, Teorema de Lax-Milgram

ABSTRACT

Silva, Alexandre. HILBERT SPACES AND LAX-MILGRAM THEOREM. 84 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018.

In this work we study the basic concepts of functional analysis, such as metric spaces, normed spaces, Banach spaces, as well as some topological notions, linear functional, inner product and Hilbert spaces. Finally, we will study the Lax-Milgram Theorem, which has important applications in the Differential Equation theory.

Keywords: Functional Analysis, Hilbert Spaces, Lax-Milgram Theorem

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho faremos um estudo teórico e introdutório da teoria Análise Funcional, onde veremos desde os conceitos mais básicos, como normas, espaços de Banach e funcionais Lineares até os espaços de Hilbert, Lema de Riesz e o Teorema de Lax-Milgram, que podem ser aplicados no estudo de Equações Diferenciais e Integrais.

O matemático David Hilbert (1862-1943) estudou principalmente os espaços l^2 e L^2 (espaços de sequências e funções quadrados somáveis e quadrado integráveis, respectivamente), que estão conectados diretamente a teoria de equações diferenciais, porém, foi John Von Neumann quem, por volta de 1930, introduziu a definição abstrata de espaço de Hilbert, a qual foi necessária, por exemplo, na formulação matemática da Mecânica Quântica que acabara de surgir.

Tanto os espaços de Banach e o mais importante em questão, os espaços de Hilbert, são tratados em Análise Funcional, uma área da Matemática relativamente nova, porém de grande importância. A grosso modo, a Análise Funcional pode ser vista como uma generalização da Álgebra Linear clássica, porém os objetos (em geral funções e sequências, ao invés de vetores n-dimensionais) são tratados mais sob a perspectiva da análise matemática. Na Análise Funcional, também é amplamente estudado a teoria de funcionais lineares, que são transformações lineares entre um espaço vetorial e seu corpo associado.

Em linhas gerais, um espaço de Hilbert é um espaço vetorial munido de um produto interno, ou seja, com noções de distância e ângulos. Este espaço também obedece uma relação de completude (é um Espaço de Banach), que garante que os limites pertençam ao espaço, quando estes existem. Os espaços de Hilbert permitem, de certa maneira, que noções intuitivas sejam aplicadas em espaços funcionais. Por exemplo, com eles podemos generalizar os conceitos de séries de Fourier em termos de polinômios ortogonais. Já em Mecânica Quântica, um sistema físico é descrito por um espaço de Hilbert complexo que contém os vetores de estado, que possuem todas as informações do sistema e complexidades multifocais.

Iniciaremos nossos estudos, no Capítulo 2, vendo os conceitos de Normas em um

Espaço Vetorial, bem como algumas desigualdades associadas a estas normas. Neste contexto, obteremos os espaços vetoriais normados e os espaços métricos. Veremos também que é possível inserir nestes espaços, uma topologia, permitindo assim a introdução dos conceitos de conjunto aberto, fechado, vizinhança, limite, continuidade, entre outros.

No Capítulo 3 veremos o conceito de sequência em espaços normados e a questão da completude de um espaço vetorial normado. Introduziremos os espaços de Banach.

No Capítulo 4 estudaremos os operadores lineares e, em particular, os funcionais lineares. Obteremos resultados que diz respeito a continuidade e limitação desses operadores.

No Capítulo 5, abordaremos o conceito de produto interno em espaços vetoriais normados. Introduziremos aqui os Espaços de Hilbert bem como veremos varias de suas propriedades.

Por fim, no Capítulo 6, apresentaremos e demonstraremos o Teorema de Lax-Milgran. A principal aplicação do Teorema de Lax-Milgran é na obtenção da existência e unicidade de soluções para determinadas Equações Diferenciais Parciais. Contudo, para desenvolver tal aplicação é necessário outros conceitos que foge do escopo deste texto, como integrais de Lebesgue, espaços de Sobolev, e conceitos de Equações Diferenciais Parciais. Por esta razão, apenas faremos uma apresentação motivacional.

2 ESPAÇOS VETORIAIS NORMADOS

Nos cursos de álgebra linear da graduação em Matemática, é apresentado o conceito de espaços vetoriais. Contudo, nestes cursos os espaços vetoriais, bem como suas propriedades, acabam restrito apenas aqueles que possuem dimensão finita. Dessa maneira, pretendemos abordar aqui o estudo dos espaços vetoriais de dimensão infinita, bem como estudar conceitos mais gerais que envolvem estes espaços, como por exemplo noções topológicas, normas, métricas, funções contínuas, etc. Dentre as referências utilizadas destacamos as seguintes: (COELHO; LOURENÇO, 2013), (LIMA, 2016), (LIMA, 1983), (OLIVEIRA, 2012) e (CAVALCANTI et al., 2011)

Definição 2.1 *Um conjunto não vazio V é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ (V é denomindado $\mathbb{K}$-espaço vetorial), se em seus elementos, denominados vetores, estiverem definidas as seguintes duas operações:*

(A) A cada par u, v de vetores de V podemos associar um vetor $u+v \in V$, chamado de soma de u e v, de modo que:

(A1) $u+v = v+u$, $\forall u, v \in V$ (propriedade comutativa);

(A2) $(u+v)+w = u+(v+w)$, $\forall u, v, w \in V$ (propriedade associativa);

(A3) exista em V um vetor, denomidado vetor nulo e denotado por 0, tal que $v+0 = v$, $\forall v \in V$;

(A4) a cada vetor $v \in V$ exista um vetor em V, denotado por $-v$, tal que $v+(-v) = 0$.

(M) A cada par $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in V$, podemos associar um vetor $\alpha \cdot v \in V$, denominado produto por escalar de α por v de modo que:

(M1) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha(\beta \cdot v)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V$ (propriedade associativa);

(M2) $1 \cdot v = v$, $\forall v \in V$ (onde 1 é o elemento identidade de $\mathbb{K}$).

Além disso, para as operações dadas em (A) e (M) devem valer a propriedade distributiva, isto é, (D1) $\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall u, v \in V$;

(D2) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V$.

Exemplo 2.2 *Em $V = \mathbb{R}^n$, introduz-se de modo natural as noções de :*

(i) Adição (soma): Se $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$ são dois vetores (elementos) de $\mathbb{R}^n$, então

$$x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n).$$

(ii) Multiplicação (Produto) por um escalar: Se $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \cdots, \alpha \cdot x_n).$$

O elemento zero de $\mathbb{R}^n$ é $0 = (0, \cdots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Os conceitos de adição (soma) de vetores e multiplicação (Produto) por um escalar determinam em $\mathbb{R}^n$ a estrutura de um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$

Exemplo 2.3 *Considere X o intervalo $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{K}$ um corpo. O conjunto*

$$C([a,b], \mathbb{K}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{K}; f \text{ é uma função contínua}\}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações de soma e multiplicação por escalar de funções definidas por:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(c.f)(x) := c.f(x).$$

Exemplo 2.4 *O conjunto de polinômios*

$$P(\mathbb{K}) = \{p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0; a_i \in \mathbb{K} \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$$

é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com as operações usuais de soma de polinômios e multiplicação por escalar. Especificamente, sejam $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ dois elementos em $P(\mathbb{K})$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $n \leq m$. Definimos então a soma

$$(p+q)(x) = b_m x^m + \cdots + b_{n+1} x^{n+1} + (a_n + b_n) x^n + \cdots + (a_0 + b_0).$$

Além disso, se $\alpha \in \mathbb{K}$, o produto por escalar de α por $p(x)$ será, por definição, o polinômio

$$(\alpha.p)(x) = (\alpha a_n) x^n + \cdots + (\alpha a_1) x_1 + (\alpha a_0).$$

Para cada $m \geq 0$, o conjunto

$$P_m(\mathbb{K}) = \{p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0;\ a_i \in \mathbb{K}\ e\ 0 \leq n \leq m\}$$

também é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com as mesmas operações acima.

Exemplo 2.5 *(Espaços de Funções) Sejam X um conjunto qualquer não vazio e $F(X,\mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{K}$. Defina as seguintes operações em $F(X,\mathbb{K})$:*

(i) para $f,g \in F(X,\mathbb{K})$, defina a função $f+g : X \to \mathbb{K}$ dada por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ para cada $x \in X$.

(ii) para $f \in F(X,\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, defina a função $\alpha.f : X \to \mathbb{K}$ dada por $(\alpha.f)(x) = \alpha f(x)$ para cada $x \in X$.

Com estas operações, o conjunto $F(X,\mathbb{K})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, onde a função nula é o vetor nulo desse espaço. Este espaço é denominado espaço de funções.

Exemplo 2.6 *(Espaço de Sequências l^∞). Seja l^∞ o espaço das sequências reais limitadas, isto é,*

$$l^\infty = \{x = (x_1, x_2, \cdots); x_i \in \mathbb{R}\ e\ |x_i| \leq C_x,\ i = 1,2,\cdots\}.$$

Dados $x,y \in l^\infty$ definimos a soma de x por y,

$$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots)$$

e a multiplicação de um escalar α por x,

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots).$$

Observe que

$$|x_i+y_i| \leq |x_i|+|y_i| \leq c_x+c_y,\ e\ |\alpha x_i| = |\alpha||x_i| \leq |\alpha| c_x$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, αx e $x+y \in l^\infty$, ou seja, l^∞ é fechado para a soma e para a multiplicação por escalar.

O próximo lema (é útil pois ele) nos permite provar um resultado que garante a existência de base em espaços vetoriais com dimensão infinita. Ele é equivalente ao Axioma da Escolha e pode ser encotrado em(HALMOS, 2001).

Lema 2.7 *(Lema de Zorn). Um conjunto não-vazio parcialmente ordenado, no qual todo subconjunto totalmente ordenado possui um limite superior, possui um elemento maximal.*

Definição 2.8 *(Base de Hamel) Um subconjunto $B \subset V$ é dito ser uma base de Hamel para o espaço vetorial V quando B for um conjunto linearmente independente maximal, ou seja, se u é um vetor em V tal que $B \cup u$ é um conjunto linearmente independente, então $u \in B$.*

Em outras palavras, B é uma base de Hamel quando não for um subconjunto próprio de nenhum outro conjunto linearmente independente em V .

Proposição 2.9 *Todo espaço vetorial não-trivial (ou seja, que contém um elemento não-nulo) possui uma base de Hamel.*

Demonstração: Sejam $V \neq \{0\}$ um espaço vetorial e E a coleção de todos os subconjuntos linearmente independentes de V, isto é,

$$E = \{A_\lambda; A_\lambda \subset V \text{ é subconjuto L.I. } \lambda \in L\}$$

onde L é um conjunto de índices. Note que $E \neq 0$, pois $V \neq 0$ e isso implica que o conjunto $A_\lambda = \{v\}$, com $0 \neq v \in V$ é um subconjunto L.I. de V. Além disso, a relação R dada pela inclusão de conjuntos define uma ordem parcial em E. Para utilizarmos o Lema de Zorn, tomemos um subconjunto de E totalmente ordenado e mostraremos que tal subconjunto possui um limite superior. Seja $\overline{E} \subset E$ um subconjunto totalmente ordenado, digamos

$$\overline{E} = \{A_\lambda; \lambda \in \overline{L}\},$$

onde $\overline{L} \subset L$. Então o conjunto $\bigcup_{\lambda \in \overline{L}} A_\lambda$ dos elementos de $\overline{E}$ é um limite superior para $\overline{E}$, pois $A_{\overline{\lambda}} \subset \bigcup_{\lambda \in \overline{L}} A_\lambda$ para todo $\overline{\lambda} \in \overline{L}$. Portanto, pelo Lema de Zorn, E possui um elemento maximal M.

Agora, verifiquemos que M é uma base de Hamel. É claro que M é L.I. uma vez que elemento maximal de um conjunto sempre pertence a esse conjunto. Seja $W = span\, M$. Devemos mostrar que $W = V$. De fato, é óbvio que $W \subset V$. Suponha por absurdo que $V \nsubseteq W$, isto é, que existe $\xi \in V$ mas $\xi \notin W$.

Afirmação: $M \cup \{\xi\}$ é L.I.. De fato, suponha que $M \cup \{\xi\}$ é L.D. Então existem $n \in \mathbb{N}, x_i \in M, 0 \neq \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, n \; e \; \beta \neq 0$ tais que

$$\alpha_i x_i + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m + \beta \xi = 0,$$

o que implica que

$$\xi = -\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} x_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\beta} x_n,$$

isto é, ξ é combinação linear finita de elementos de M, portanto $\xi \in \text{span } (M) = W$, o que é um absurdo. Logo, $M \cup \{\xi\}$ é L.I.. Assim, $M \subsetneq M \cup \{\xi\}$ e $M \cup \{\xi\}$ é L.I. Isso contradiz o fato de M ser elemento maximal de E. Portanto $V \subset W$ e assim $V = W = \text{span } M$ donde concluímos que V possui uma base de Hamel.

$\square$

2.1 DEFINIÇÃO DE NORMA E PRIMEIRAS PROPRIEDADES

Nesta seção veremos os conceitos de norma e espaços normados, exemplos de normas e algumas propriedades como, por exemplo, normas equivalentes.

Definição 2.10 *Seja V um espaço vetorial qualquer. Uma **norma** em V é uma função real*

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|: & V & \to \mathbb{R} \\ & x & \mapsto \|x\| \end{array}$$

que a cada elemento de V associa um número real, satisfazendo as seguintes condições:

N1) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$ *e* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$ *e* $\forall x \in V$;

N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$ *(desigualdade triangular).*

*Quando as condições $N1)$, $N2)$ e $N3$ são satisfeitas, dizemos que o par $(V, \|\cdot\|)$ é um **espaço vetorial normado**[1].*

Exemplo 2.11 *No espaço $\mathbb{R}^n$ temos definido as seguintes normas:*

(i) Norma da soma: $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$;

(ii) Norma do máximo: $\|x\|_\infty = max\ \{\ |x_i|; 1 \leq i \leq n\}$.

(iii) Norma p: $\|x\|_p = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Observação 2.12 *Quando $p = 2$ na norma p, temos a chamada norma Euclidiana.*

[1]Também chamado espaço linear normado ou, simplesmente, espaço normado

O espaço $\mathbb{R}^n$ com a **norma euclidiana, norma da soma** , **norma do máximo** ou **norma** p é um espaço normado. Provaremos agora que a norma euclidiana definida acima é de fato uma norma. Com argumentos similares prova-se também que a norma da soma e a norma do máximo são normas. Para provar que a função definida em (iii) com $p = 2$ é uma norma, utilizaremos a desigualdade de Minkowski que provaremos no Teorema (2.24).

N1) De fato, dado $x = (x_1, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n$, temos que $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$. Logo,
$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \geq \sqrt{0} = 0$, ou seja, $\|x\| \geq 0$.
Além disso,
$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$,
isto é, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

N2) Dado $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\| &= \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2 + \cdots + (\alpha x_n)^2} \\
&= \sqrt{\alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2 + \cdots + \alpha^2 x_n^2} \\
&= \sqrt{\alpha^2 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \\
&= |\alpha|\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \\
&= |\alpha|\|x\|.
\end{aligned}$$

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. De fato,

Para demonstrar este item utilizaremos um resultado chamando Desigualdade de Cauchy-Schwarz (ver Corolário (2.22)). Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, esta desigualdade diz que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}. \tag{1}$$

Elevando ao quadrado o termo $\|x + y\|$, e utilizando (1), temos

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada na desigualdade acima, obtemos o desejado.

Portanto $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ é um espaço normado, onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana.

Exemplo 2.13 *Um subespaço Y de um espaço vetorial normado V também é um espaço vetorial normado, quando o munirmos da norma induzida da norma definida em V.*

Exemplo 2.14 *Considere $\mathbb{R}$ o conjunto de todos os números reais e definamos*

$$\|x\| = |x|,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Segue do Exemplo 2.11 item (ii), com $n = 1$, que $\mathbb{R}$ é um espaço normado. Note que neste caso as normas euclidiana, da soma e do máximo são iguais.

Exemplo 2.15 *(Espaço de Sequências l^∞). Seja l^∞ o conjunto das sequências limitadas de números reais e definamos nesse conjunto a função*

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|,$$

Afirmamos que $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma em l^∞. De fato, seja $x = (x_1, x_2, \cdots)$ tal que $|x_i| \le C_x$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $i \in \mathbb{N}$, temos

$$0 \le |x_i| \le C_x.$$

Logo,

$$0 \le \|x\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| \le C_x < \infty,$$

mostrando que a aplicação $l^\infty \ni x \longmapsto \|x\|$ está bem definida e $\|x\| \ge 0$, para todo $x \in l^\infty$. Além disso, dado $x \in l^\infty$ temos

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0, \forall i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = 0,$$

o que prova (N1). Agora, dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in l^\infty$, temos

$$\|\alpha x\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\alpha x_i| = |\alpha| \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| = |\alpha|\|x\|$$

de onde obtemos (N2). Finalmente, dados $x, y \in l^\infty$, podemos utilizar a propriedade de sup e obter

$$\|x+y\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i + y_i| \le \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| + \sup_{i\in\mathbb{N}} |y_i| = \|x\| + \|y\|,$$

o que prova a propriedade (N3).

Exemplo 2.16 *Seja X um conjunto não vazio e considere V o conjunto das funções $f : X \to \mathbb{R}$*

limitadas, isto é, para cada $f \in V$ existe um número $c_f > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq c_f, \forall x \in X.$$

A função $\|\cdot\|_\infty$ que associa a cada função $f \in V$ o número real

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in X\},$$

define uma norma no espaço das funções limitadas definidas em X. Para toda $f, g \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos:

N1) $\sup\limits_{x\in X}|f(x)| \geq 0$ *e* $\sup\limits_{x\in X}|f(x)| = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
De fato, para cada $x \in X$, temos $|f(x)| \geq 0$. Logo, $\sup\limits_{x\in X}|f(x)| \geq 0$, isto é,$\|f\|_\infty \geq 0$. Além disso, se $\sup\limits_{x\in X}|f(x)| = 0$, então $0 \leq |f(x)| \leq 0$, ou seja $f = 0$.

N2) $\sup\limits_{x\in X}|\alpha f(x)| = |\alpha|\sup\limits_{x\in X}|f(x)|$.
De fato, $\sup\limits_{x\in X}|\alpha f| = \sup\limits_{x\in X}|\alpha f(x)| = \sup\limits_{x\in X}|\alpha||f(x)| = |\alpha|\sup\limits_{x\in X}|f(x)|$.

N3) $\sup\limits_{x\in X}|f(x)+g(x)| \leq \sup\limits_{x\in X}|f(x)| + \sup\limits_{x\in X}|g(x)|$ $(desigualdade\ triangular)$.
De fato, usando a desigualdade triangular em $\mathbb{R}$ e a propriedade de sup, obtemos

$$\sup_{x\in X}|f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in X}(|f(x)|+|g(x)|) \leq \sup_{x\in X}|f(x)| + \sup_{x\in X}|g(x)|.$$

Em particular se considerarmos o conjunto das funções contínuas definidas num intervalo $[a,b]$ temos o espaço $C([a,b],\mathbb{R})$, onde

$$C([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R};\ \text{f é contínua}\},$$

munido da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]}|f(t)|.$$

Esta norma é chamada norma da covergência uniforme, ou norma do sup.

2.2 DESIGUALDADE DE YOUNG, HÖLDER E MINKWOSKI

Nesta seção veremos as desigualdades de Young, Hölder e Minkwoski. Tais desigualdades são importantes pois nos permitem obter normas para alguns espaços vetoriais, como por exemplo, $\|\cdot\|_p$ em l^p e $\|\cdot\|_p$ em $\mathbb{R}^n$.

Para provar a desigualdade de Young, utilizaremos o conceito de função convexa.

Definição 2.17 *Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa se*

$$f(\alpha x+\beta y) \leq \alpha f(x)+\beta f(y),\ \forall x,y \in \mathbb{R},\ \alpha,\beta \geq 0,\ \textit{tais que}\ \alpha+\beta = 1.$$

A seguir enunciamos um teorema que é bastante útil para decidirmos se uma função é convexa ou não. Sua demonstração poder ser encontrada em (LIMA, 2016).

Teorema 2.18 *Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$. Então f é convexa se e somente se $f"(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 2.19 *A função $f(x) = e^x$ é convexa. De fato, $f"(x) = e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, pelo Teorema 2.18 temos que $f(x) = e^x$ é uma função convexa.*

Teorema 2.20 ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam $a,b \geq 0$ e $p,q > 1$, tais que*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1, \textit{(p e q são ditos conjugados)}$$

então,

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Se $a = 0$ ou $b = 0$ a desigualdade é trivial pois $a,b \geq 0$. Cosideremos $a > 0$ e $b > 0$. Observe que

$$a.b = e^{(\ln(ab))} = e^{(\ln(a)+\ln(b))} = e^{\left(\frac{p\ln(a)}{p}+\frac{q\ln(b)}{q}\right)} = e^{\left(\frac{\ln(a^p)}{p}+\frac{\ln(b^q)}{q}\right)}.$$

Como a função e^x é convexa, $\frac{1}{p},\frac{1}{q} \geq 0$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, temos

$$a.b = e^{\left(\frac{\ln(a^p)}{p}+\frac{\ln(b^q)}{q}\right)} \leq \frac{e^{ln(a^p)}}{p}+\frac{e^{ln(a^q)}}{q} = \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

□

Teorema 2.21 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam (a_n) e (b_n) sequências de números reais não negativos tais que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty \ \textit{e} \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^q < \infty,$$

onde $1 < p,q < \infty$, com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração: Para facilitar os cálculos denotaremos:

$$A = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \; e \; B = \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Se A ou B se anulam então a desigualdade é imediata pois uma das sequências seria nula. Suponhamos então que A e B não se anulam. Utilizando a desigualdade de Young temos

$$\frac{a_n b_n}{AB} \leq \frac{a_n^p}{pA^p} + \frac{b_n^q}{qB^q},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\frac{1}{AB}\sum_{n=1}^{m} a_n b_n \leq \frac{1}{pA^p}\sum_{n=1}^{m} a_n^p + \frac{1}{qB^q}\sum_{n=1}^{m} b_n^q = \frac{1}{pA^p}\left(\sum_{n=1}^{m} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}\cdot p} + \frac{1}{qB^q}\left(\sum_{n=1}^{m} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}\cdot q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \; \forall m \in \mathbb{N}.$$

Note que o lado esquerdo da desigualdade acima representa o termo geral da sequência das somas parciais da série $\frac{1}{AB}\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Como tal sequência é monótona e limitada por um, temos que $\frac{1}{AB}\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge e é limitada por um, isto é

$$\frac{1}{AB}\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq 1,$$

Multiplicando esta desigualdade por AB, segue o resultado. □

Corolário 2.22 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Sejam* $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. *Então,*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração: Basta considerar $p = q = 2$, no Teorema 2.21, $a_n = (x_1, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)$ e $b_n = (y_1, \cdots, y_n, 0, 0, \cdots)$

□

Corolário 2.23 *Se* $x = (x_n) \in l^p$ *e* $y = (y_n) \in l^q$ *onde* $p, q > 1$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *então a sequência* $z = (x_n y_n) \in l^1$.

Demonstração: *Considerando* $a_n = |x_n|$ *e* $b_n = |y_n|$, *segue diretamente do Teorema 2.21 que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$\square$

Teorema 2.24 ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Seja $p \geq 1$. Se (a_n) e (b_n) são sequências de números reais não negativos tais que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^p < \infty,$$

então,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^p)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (b_n^p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração: Se $p = 1$ a igualdade se verifica. Consideremos $p > 1$. Fixando $m \in \mathbb{N}$, observe que

$$\sum_{n=1}^{m} (a_n + b_n)^p = \sum_{n=1}^{m} (a_n + b_n)(a_n + b_n)^{p-1} = \sum_{n=1}^{m} a_n(a_n + b_n)^{p-1} + \sum_{n=1}^{m} b_n(a_n + b_n)^{p-1}.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, com $q = p/(p-1)$ às duas últimas somatórias, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} (a_n + b_n)^p &\leq \left[\left(\sum_{n=1}^{m} (a_n^p)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{m} (b_n^p)\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{n=1}^{m} (a_n + b_n)^{(p-1).q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\left(\sum_{n=1}^{m} (a_n^p)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{m} (b_n^p)\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{n=1}^{m} (a_n + b_n)^{(p-1).\frac{p}{(p-1)}}\right)^{\frac{1}{\frac{p}{(p-1)}}} \\
&= \left[\left(\sum_{n=1}^{m} (a_n^p)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{m} (b_n^p)\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{n=1}^{m} (a_n + b_n)^p\right)^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\sum_{n=1}^{m} (a_n + b_n)^p\right)^{1} \leq \left[\left(\sum_{n=1}^{m} (a_n^p)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{m} (b_n^p)\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{n=1}^{m} (a_n + b_n)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Dividindo esta desigualdade por $\left(\sum_{n=1}^{m} (a_n + b_n)^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \neq 0$, obtemos

$$\left(\sum_{n=1}^{m} (a_n + b_n)^p\right)^{1-1+\frac{1}{p}} \leq \left[\left(\sum_{n=1}^{m} (a_n^p)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{m} (b_n^p)\right)^{\frac{1}{p}}\right],$$

isto é,

$$\left(\sum_{n=1}^{m} (a_n + b_n)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{m} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{m} b_n^p\right)^{\frac{1}{p}}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Elevando à potência p segue que a série do lado esquerdo converge pois $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p < \infty$. Pode-se usar aqui o critério de comparação, ou o fato que o lado esquerdo da desigualdade acima representa o termo geral de uma sequência (sequência das somas parciais da série) monótona crescente e limitada. Temos portanto a desigualdade desejada. Note que a desigualdade de Hölder pode ser aplicada sem problemas já que $p > 1$ implica que $q = \frac{p}{p-1} > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{p} = 1$. $\square$

Veremos a seguir que utilizando a Desigualdade de Minkowiski conseguimos provar que l^p com a norma $\|\cdot\|_p$ e R^n com a norma $\|\cdot\|_p$, são espaços normados.

Corolário 2.25 (Espaço Vetorial Normado l^p) *Consideremos $p \geq 1$ fixado. O conjunto l^p formado pelas sequências $x_n = (x_1, x_2, \cdots)$, tais que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty,$$

é um espaço vetorial. Além disso, a função $\|\cdot\|_p : l^p \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma em l^p. Quando $p = 2$ obtemos o espaço l^2, que é chamado de espaço das sequências de Hilbert.

Demonstração: Dados $(x_n), (y_n) \in l^p$, definimos a soma $(x_n) + (y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots)$. Utilizando o Teorema (2.24), temos que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |y_n|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad (2)$$

ou seja, $(x_n) + (y_n) \in l^p$. Portanto, l^p é fechado na soma. Não é difícil ver que $\alpha(x_n) \in l^p$ e que com estas operações l^p é espaço vetorial. Mostraremos agora que $\|\cdot\|_p$ é uma norma.

N1) $\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$ e $\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow x_j = 0, \forall j \in \mathbb{N}$.

De fato, para cada x_j elemento da sequência (x_n), temos $|x_j| \geq 0$. Logo $\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$, isto é, $\|x\|_p \geq 0$. Além disso, se $\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$, então para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |x_j| = (|x_j|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

ou seja, $x_j = 0\ \forall j \in \mathbb{N}$. Logo, $x = 0$.

N2) $\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. De fato, note que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha|^p |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

N3) A Desigualdade Triangular de $\|\cdot\|_p$ em l^p segue diretamente de (2).

$\square$

Corolário 2.26 (Espaço Normado $\mathbb{R}^n$ com a norma $\|\cdot\|_p$) *O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com a norma $\|\cdot\|_p$ definida em (iii) do Exemplo 2.11 é um espaço vetorial normado.*

Demonstração: Basta considerar na demonstração do Corolário 2.25, $(x_n) = (x_1, \cdots, x_i, 0, \cdots)$ e $(y_n) = (y_1, \cdots, y_i, 0, \cdots)$. $\square$

Exemplo 2.27 *Seja $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. No espaço $C(I,\mathbb{R})$ de funções contínuas pode-se definir outras normas da seguinte forma: a cada função $f \in C(I,\mathbb{R})$ podemos associar o número $\|f\|_1 = \int_a^b |f|$, ou o número $\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}}$. A $\|f\|_1$ representa geometricamente a área abaixo do gráfico de $|f(x)|$. (Ver figura 2.2).*

Proposição 2.28 *Seja V um espaço vetorial normado, com uma norma qualquer $\|\cdot\|$. Então, para todo $x, y \in V$ tem-se*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Demonstração: Para $x, y \in V$, podemos escrever $x = (x-y) + y$. Logo, utilizando a desigualdade triangular, temos

$$\|x\| = \|(x-y) + y\| \leq \|x-y\| + \|y\|.$$

Daí,

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|. \tag{3}$$

Analogamente, escrevendo $y = (y-x) + x$ temos,

$$\|y\| = \|(y-x) + x\| \leq \|y-x\| + \|x\|.$$

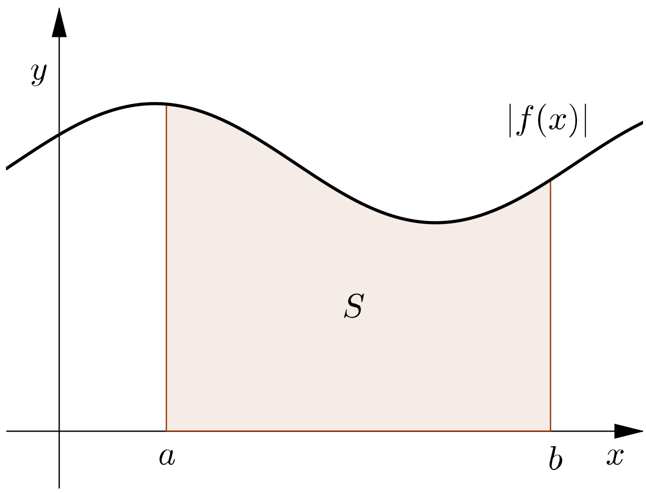

Figura 1: Área abaixo do gráfico de $|f(x)|$

Então,

$$-\|y-x\| \leq \|x\| - \|y\|. \tag{4}$$

Portanto, agrupando (3) e (4), obtemos

$$-\|x-y\| = -\|y-x\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|,$$

isto é

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|.$$

$\square$

A seguir veremos o conceito de normas equivalentes. Se duas normas forem equivalentes em um espaço vetorial V, então as noções topológicas que valem para uma norma também valem para a outra.

Definição 2.29 *Dadas duas normas* $\|\cdot\|_1$ *e* $\|\cdot\|_2$ *em* V*, dizemos que estas são equivalentes se existem* $c_1, c_2 > 0$ *tais que*

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \;\; \forall x \in X.$$

Teorema 2.30 *Em um espaço vetorial normado de dimensão finita, todas as normas são equivalentes.*

Demonstração: A ideia é mostrar que qualquer norma é equivalente a norma da soma. Para tanto, seja V um espaço vetorial normado n-dimensional e considere $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ uma base de V. Assim para cada $x \in V$, existem únicos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Suponha então que$\|\cdot\|_0$ seja uma norma qualquer em V e mostremos que $\|\cdot\|_0$ é equivalente a norma $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$. Para a primeira desigualdade note que

$$\|x\|_0 = \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \|e_i\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\| \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = \beta \|x\|_1,$$

onde $\beta = \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|$. Portanto, $\|x\|_0 \leq \beta \|x\|_1$.

Para a outra desigualdade, suponha que não exista $\alpha > 0$ tal que $\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_0$, para todo $x \in V$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in V$ tal que $\|x_n\|_1 > n \|x_n\|_0$. Definindo $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_1}$, obtemos uma sequência (y_n) tal que $\|y_n\|_1 = 1$. Como o conjunto dos vetores em V tais que $\|y\| = 1$ é compacto, existe subsequência (y_{n_j}) de (y_n) que converge para um ponto y em $(V, \|\cdot\|_1)$. Pela continuidade da norma, Lema (2.44), temos $\|y\|_1 = 1$. Daí,

$$\|y\|_0 = \|y - y_{n_j} + y_{n_j}\|_0 \leq \|y - y_{n_j}\|_0 + \|y_{n_j}\|_0 \leq \beta \|y - y_{n_j}\|_1 + \frac{1}{n_j}.$$

Fazendo $j \to \infty$ na desigualdade anterior obtemos $\|y\|_0 = 0$, portanto, $y = 0$. Isto é uma contradição, pois $\|y\|_1 = 1$.
Portanto, $\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_0, \alpha > 0$. □

Observação 2.31 *Se o espaço não for de dimensão finita pode ocorrer a existência de normas não equivalentes, como será mostrado mais adiante.*

2.3 A TOPOLOGIA DOS ESPAÇOS NORMADOS

Nesta seção veremos conceitos topológicos nos espaços normados, bem como funções contínuas nos mesmos espaços.

Definição 2.32 *Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Dado um ponto $x \in V$ e $r > 0$, definimos:*

(i) $B(x, r) := \{y \in V; \|x - y\| < r\}$, (bola aberta de centro em x e raio r);

(ii) $B[x,r] := \{y \in V; \|x-y\| \leq r\}$, (bola fechada de centro em x e raio r);

(iii) $S(x,r) := \{y \in V; \|x-y\| = r\}$, (esfera de centro em x e raio r).

Note que $B[x,r] = B(x,r) \dot{\cup} S(x,r)$, onde $\dot{\cup}$ significa união disjunta.

Seja $Y \subset V$ um subespaço do espaço normado V. Para cada $a \in Y$ e cada $r > 0$, a bola aberta de centro a e raio r, relativamente à norma induzida em Y é dada por $B_Y(a,r) = B(a,r) \cap Y$, onde $B(a,r)$ é bola aberta de centro a e raio r no espaço normado X. Analogamente, temos $B_Y[a,r] = B[a,r] \cap Y$ e $S_Y(a,r) = S(a,r) \cap Y$.

Definição 2.33 *(Conjunto aberto). Seja $(V, \|.\|)$ um espaço normado. Um conjunto $U \subset X$ é dito aberto em $(V, \|\cdot\|)$ se para cada $x \in U$ existe $r = r_x > 0$ tal que $B(x,r) \subset U$.*

Lema 2.34 *Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $x_0 \in V$. Então para qualquer $r > 0$, a bola aberta $B(x_0,r)$ de raio r e centro em x_0 é um conjunto aberto em V.*

Demonstração: Seja $x \in B(x_0,r)$. Mostremos que existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset B(x_0,r)$. Como $\|x-x_0\| < r$, escolhendo $\delta = r - \|x-x_0\| > 0$, obtemos que se $x' \in B(x,\delta)$, então

$$\|x'-x_0\| \leq \|x'-x\| + \|x-x_0\| < \delta + \|x-x_0\| = r.$$

Portanto, $x' \in B(x_0,r)$, de onde concluímos que $B(x,\delta) \subset B(x_0,r)$. □

Lema 2.35 *Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $x_0 \in V$. Então, para qualquer $r > 0$, o conjunto $B(x_0,r)^c = \{x \in V; \|x-x_0\| > r\}$ é um conjunto aberto em X.*

Demonstração: Seja $x \in B(x_0,r)^c$ e mostremos que existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset B(x_0,r)^c$. Para o x fixado acima, escolha δ dado por $\delta = \|x-x_0\| - r$. Assim, dado $x' \in B(x,\delta)$, temos que

$$\|x-x_0\| \leq \|x-x'\| + \|x'-x_0\|$$

e assim

$$\|x'-x_0\| \geq \|x-x_0\| - \|x-x'\| > \|x-x_0\| - \delta = r,$$

ou seja, $x' \in B(x_0,r)^c$.

Logo $B(x,\delta) \subset \{x' \in \|x'-x_0\| > r\}$, o que finaliza a prova do lema. □

A próxima proposição mostra que de fato uma norma induz uma topologia num espaço vetorial normado.

Proposição 2.36 *Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço normado. A coleção de conjuntos abertos de V tem as seguintes propriedades:*

(i) $\varnothing$, *V são conjuntos abertos,*

(ii) a união de qualquer coleção de conjuntos abertos em V é um conjunto aberto,

(iii) a interseção de qualquer coleção finita de conjuntos abertos em V é um conjunto aberto.

Demonstração: (i). O conjunto $\varnothing$ é aberto por convenção. Além disso a definição de conjunto aberto é trivialmente satisfeita pelo conjunto V.

(ii). Seja A uma coleção qualquer de conjuntos abertos em V, e denotaremos por U a união de todos os conjuntos abertos pertencentes a A. Queremos mostrar que U é um conjunto aberto. Seja $x \in U$. Então $x \in X$ para algum conjunto aberto X que pertence a coleção A. Portanto existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset X$. Mas $X \subset U$, e assim $B(x, \delta) \subset U$. isto mostra que U é aberto.

(iii). Seja $V_1, V_2, \cdots, V_k$ uma coleção finita de conjuntos aberto em V, e seja $X = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$. Seja $x \in X$. Então $x \in V_j$ para todo j e, portanto, existem números reais positivos $\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_k$ tal que $B(x, \delta_j) \subset V_j$ para $j = 1, 2, \cdots, k$. Seja $\delta = \min\{\delta_j : j = 1, 2, \cdots, k\}$. Então $\delta > 0$ e além disso, $B(x, \delta) \subset B(x, \delta_j) \subset V_j$ para $j = 1, 2, \cdots, k$ e assim $B(x, \delta) \subset X$. Isto mostra que a interseção X de conjuntos abertos $V_1, V_2, \cdots, V_k$ é um conjunto aberto. $\square$

Observação 2.37 *Para cada número natural n, denotemos V_n o conjunto aberto no plano $\mathbb{R}^2$ definido por*

$$V_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{n} \right\}.$$

A interseção $V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \{0\}$ é a origem e este conjunto não é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$. Isto mostra que a interseção de um número infinito de conjuntos aberto num espaço normado não é necessariamente um conjunto aberto.

Definição 2.38 *O interior A° de um conjunto $A \subset V$ é união de todos os conjuntos abertos de $(V, \|\cdot\|)$ contidos em A, isto é*

$$A^\circ = \bigcup \{X; X \textit{é aberto e } X \subset A\}$$

Definição 2.39 *(Conjunto fechado). Um conjunto $F \subset V$ é dito fechado em $(V, \|\cdot\|)$ se $F^c = V \setminus F$ (complementar de F) é aberto em $(V, \|\cdot\|)$.*

Definição 2.40 *O fecho $\overline{A}$ de um conjunto $A \subset V$ é a interseção de todos os fechados de V contendo A. Isto é,*

$$\overline{A} = \bigcap \{F : F \text{ é fechado e } F \supset A\}.$$

É claro que se A é fechado, então $A = \overline{A}$. Reciprocamente, se $A = \overline{A}$, então A é fechado, pois intersecção arbitrária de fechado é fechado.

Definição 2.41 *(Função contínua). Sejam $(U, \|\cdot\|_U)$ e $(V, \|\cdot\|_V)$ dois espaços normados e $f : U \longrightarrow V$ é uma função dada. Diremos que f é contínua em $x \in U$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que*

$$\|y - x\|_U < \delta \Rightarrow \|f(y) - f(x)\|_V < \varepsilon.$$

A função é dita contínua em U, ou simplesmente contínua, se f é contínua em todo ponto $x \in U$.

Note que esta definição de continuidade para funções entre espaços normados generaliza a definição de continuidade para funções de uma variável real ou complexa.

Proposição 2.42 *A função norma definida acima é uma função contínua.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon$. Assim utilizando a Proposição 2.28, temos que se $x \in V$ é tal que $\|y - x\| < \delta$, então

$$|\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\| < \delta = \varepsilon.$$

Portanto, a aplicação $x \to \|x\|$ é contínua em V. $\square$

Definição 2.43 *Uma função $f : V \to \mathbb{R}$, diz-se uniformemente contínua no subconjunto $A \subset V$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente e $a \in A$, pode-se obter $\delta > 0$, que depende apenas de ε, tal que $x \in A$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Lema 2.44 *Toda norma é uma função uniformemente contínua.*

Demonstração: Basta observar que na demonstração da Proposição 2.42 o valor δ não depende de x, apenas de ε.

$\square$

Proposição 2.45 *Sejam U, V e W espaços normados e sejam $f : U \to V$ e $g : V \to W$ funções contínuas. Então a função composição $g \circ f : U \to W$ é contínua.*

Demonstração: Seja $x \in U$ um ponto qualquer. Vamos mostrar que $g \circ f$ é contínua em x. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como a função g é contínua em $f(x)$, existe $\eta > 0$ tal que

$$\|g(y) - g(f(x))\|_W < \varepsilon, \tag{5}$$

para todo $y \in V$ satisfazendo $\|y - f(x)\|_V < \eta$. Por outro lado, para este $\eta > 0$, a continuidade de f implica que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(x') - f(x)\|_V < \eta, \tag{6}$$

para todo $x' \in U$ satisfazendo $\|x' - x\|_U < \delta$. Assim, de (5) e (6), temos que

$$\|g(f(x')) - g(f(x))\|_W < \varepsilon,$$

para todo $x' \in U$ satisfazendo $\|x' - x\|_U < \delta$. Portanto $g \circ f$ é contínua em x, como x foi tomado de modo arbitrário obtemos que $g \circ f$ é contínua. $\square$

2.4 ESPAÇOS MÉTRICOS

Nesta seção veremos os conceitos de métrica, espaços métricos e alguns exemplos. Na seção anterior vimos que é possível, utilizando o conceito de norma, introduzir num espaço vetorial noções topológicas. Contudo, é possível introduzir noções topológicas em conjuntos mais gerais que espaços vetoriais, ou seja, as noções de aberto, fechado, continuidade, etc..., podem ser extendidas para conjuntos com menos estruturas algébricas que um espaço vetorial. Se um determinado conjunto possuir, por exemplo, uma métrica definida, já é possível introduzir tais conceitos.

Definição 2.46 *Seja M um conjunto. Uma métrica (ou distância) em M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:*

D1) $d(x,y) \geq 0$ *para todo* $x, y \in M$,

D2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

D3) $d(x,y) = d(y,x)$ *para todo* $x, y \in M$ *(Simetria),*

D4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *para todo* $x, y, z \in M$ *(Desigualdade Triangular).*

Um conjunto M munido de uma métrica d é chamado de espaço métrico e denotado por (M,d).

Vermos agora alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 2.47 *A função* $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$d(x,y) = |x-y|,$$

é uma métrica em $\mathbb{R}$. *Mostraremos que (D1), (D2), (D3) e (D4) são satisfeitos. De fato, temos que, para todos x e* $y \in \mathbb{R}$ *temos* $0 \leq |x-y| < \infty$, *o que mostra (D1). Alé, disso* $d(x,y) = 0$ *se, e somente se,* $x-y=0$. *Como* $x-y=0$ *é equivalente a* $x=y$, *segue (D2). Para a condição (D3), basta observar que*

$$d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |-1|.|y-x| = |y-x| = d(y,x), \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, dados $x,y,z \in \mathbb{R}$ *temos*

$$|x-y| = |x-z+z-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z|+|z-y|$$

ou seja, $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$, *o que conclui a prova de (D4).*

Exemplo 2.48 (O Espaço de Sequências) . *Seja S o conjunto de todas as sequências limitadas e ilimitadas de números complexos. A função* $d : S\times S \to \mathbb{C}$ *definida por*

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}$$

onde $x=(x_k)$ *e* $y=(y_k), k\in\mathbb{N}$, *define uma métrica em S.*

Demonstração: (D1) Sejam $x=(x_k), y=(y_k) \in S$. Então,

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|} \geq 0,$$

pois $|x_k-y_k| \geq 0$, para todo $k\in\mathbb{N}$.

(D2) Se $x=y$, então $x_k=y_k$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Logo

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{|x_k-x_k|}{1+|x_k-x_k|} = 0.$$

Reciprocamente, se $x\neq y$, então existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que $x_{k_0}\neq y_{k_o}$. Logo,

$$\frac{1}{2^{k_0}}\frac{|x_{k_0}-y_{k_0}|}{1+|x_{k_0}-y_{k_0}|} > 0.$$

Assim,

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}\geq\frac{1}{2^{k_0}}\frac{|x_{k_0}-y_{k_0}|}{1+|x_{k_0}-y_{k_0}|}>0.$$

(D3) Como $x_k-y_k=-(y_k-x_k)$ para todo $k\in\mathbb{N}$, temos

$$\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}=\frac{|-1||y_k-x_k|}{1+|-1||y_k-x_k|}=\frac{|y_k-x_k|}{1+|y_k-x_k|}$$

Logo,

$$d(x,y)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|y_k-x_k|}{1+|y_k-x_k|}=d(y,x).$$

(D4) Para demonstrar esta última condição vamos utilizar uma função auxiliar $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(t)=\frac{t}{1+t}.$$

Note que f é uma função crescente em todo $\mathbb{R}^+$. De fato,

$$f'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}>0,\forall t\in\mathbb{R}^+.$$

Dessa maneira, como $|a+b|\leq|a|+|b|$ temos que $f(|a+b|)\leq f(|a|+|b|)$, ou seja,

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}\tag{7}$$

Considerando $a=x_k-y_k$ e $b=y_k-z_k$, temos que $a+b=x_k-z_k$. Assim de (7), temos

$$\frac{|x_k-z_k|}{1+|x_k-z_k|}\leq\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}+\frac{|y_k-z_k|}{1+|y_k-z_k|}$$

Finalmente multiplicando a última desigualdade por $\frac{1}{2^k}>0$ e somando, obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-z_k|}{1+|x_k-z_k|}\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|y_k-z_k|}{1+|y_k-z_k|},$$

isto é,

$$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$

□

Exemplo 2.49 *(Métrica zero-um) Seja S um conjunto qualquer com pelo menos dois elementos.*

A função $d:S\times S\to\mathbb{R}$, definida por

$$d(x,y)=\begin{cases}0 \;\; se \;\; x=y,\\ 1 \;\; se \;\; x\neq y,\end{cases}$$

define uma métrica em S.

Demonstração:

(D1) Como $d(x,y) = 0$ ou $d(x,y) = 1$ para todo $x,y \in S$, temos que $d(x,y) \geq 0$.

(D2) Se $x = y$, então pela definição de d, temos que $d(x,y) = 0$. reciprocamente, se $x \neq y$, então $d(x,y) > 0$. Logo, $d(x,y) = 0$ implica que $x = y$.

(D3) Se $x \neq y$, então $y \neq x$ e $d(x,y) = 1 = d(y,x)$. Agora, se $x = y$, então $y = x$ e $d(x,y) = 0 = d(y,x)$. Como em ambos os casos, temos $d(x,y) = d(y,x)$, segue a condição (D3).

(D4) Se $x = y$, e $z = x = y$, então

$$d(x,y) = 0 \leq 0 + 0 = d(x,z) + d(z,y).$$

Se $x = y$ e $z \neq x = y$, então

$$d(x,y) = 0 < 1 + 1 = d(x,z) + d(z,y).$$

Se $x \neq y$, então todo $z \in S$ satisfaz $z \neq x$ ou $z \neq y$. Em ambos os casos temos

$$d(x,y) = 1 \leq d(x,z) + d(z,y).$$

□

Proposição 2.50 *Todo espaço normado* $(V, \|\cdot\|)$ *é um espaço métrico* (V,d) *com a métrica definida por* $d(x,y) = \|x - y\|$, *para todo* $x,y \in V$.

Demonstração:

(D1) Por propriedade de norma, temos que $\|z\| \geq 0$, para todo $z \in V$. Em particular, para todos $x,y \in V$, temos $\|x - y\| \geq 0$, ou seja, $d(x,y) \geq 0$.

(D2) Novamente por propriedade de norma, temos que $\|z\| = 0$ se, e somente se, $z = 0$. Assim, para todos $x,y \in V$, temos que $\|x - y\| = 0$ implica que $x - y = 0$, ou seja, $x = y$. Reciprocamente, se $x = y$, então $x - y = 0$, logo, $\|x - y\| = 0$. Portanto, $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.

(D3) Para todos $x,y \in V$, temos

$$d(x,y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\| = d(y,x).$$

(D4) Utilizando a desigualdade triangular da norma, temos que para todo $x,y,z \in V$,

$$d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z).$$

Portanto, (V,d) é um espaço métrico.

$\square$

Definição 2.51 *(Bolas e Esferas). Dados um ponto $x_0 \in M$ e um número real $r > 0$, definimos três tipos de conjuntos:*

(a) Bola aberta: $B(x_0,r) = \{x \in M, d(x,x_0) < r\}$

(b) Bola fechada: $B[x_0,r] = \{x \in M, d(x,x_0) \leq r\}$

(c) Esfera: $S(x_0,r) = \{x \in M, d(x,x_0) = r\}$

Pela definição segue que $S(x_0,r) = B[x_0,r] - B(x_0,r)$

Observação 2.52 *Note que a definição acima coicide com a Definição 2.32 se tivermos a métrica d definida como na Proposição 2.50*

Definição 2.53 *(Ponto Interior). Seja $A \subset M$. Dizemos que $p \in A$ é um ponto interior de A se existir $\varepsilon > 0$ tal que $B(p,\varepsilon) \subset A$.*

Definição 2.54 *(Conjunto Aberto, Conjunto Fechado). Um subconjunto $\overline{M}$ de um espaço métrico M é aberto se ele contém uma bola sobre cada um de seus pontos. Um subconjunto K de um espaço métrico M é fechado se seu complementar (em M) é aberto, isto é, $K^c = M - K = M \backslash K$ é aberto.*

Proposição 2.55 *Seja M um espaço métrico. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Uma bola aberta em M é um conjunto aberto em M.

(ii) Uma bola fechada em M é um conjunto fechado em M

Demonstração:

(i) Sejam $x_0 \in M$ e $\varepsilon > 0$, e $B(x_0,\varepsilon)$ a bola aberta em M. Dado $x \in B(x_0,\varepsilon)$, temos que $d(x_0,x) < \varepsilon$ e $s = \varepsilon - d(x_0,x) > 0$. Mostraremos que $B(x,s) \subset B(x_0,\varepsilon)$. De fato, se $y \in B(x,s)$, então $d(x,y) < s$. Assim, pela desigualdade triangular, temos

$$d(y,x_0) \leq d(x,y) + d(x_0,x) < s + d(x_0,x) = \varepsilon - d(x_0,x) + d(x_0,x) = \varepsilon,$$

isto é, $d(y,x_0) < \varepsilon$. Logo, $y \in B(x_0,\varepsilon)$.

(ii) Dado $x_0 \in M$ e $\varepsilon > 0$, seja $B[x_0,\varepsilon]$ a bola fechada em M. Mostraremos que $B^c = M - B[x_0,\varepsilon] = \{x \in M; d(x,x_0) > \varepsilon\}$ é um conjunto aberto. Seja $p \in B^c$, isto é, $d(x_0,p) > \varepsilon$. Tomemos $s > 0$ tal que $\varepsilon + s < d(x_0,p)$. Logo as bolas $B[x_0,\varepsilon]$ e $B(p,s)$ são disjuntas. Portanto $B[x_0,\varepsilon] \cap B(p,s) = \varnothing$. Daí $B(p,s) \subset B^c$ e assim todo ponto $p \in B^c$ é interior. Portanto B^c é aberto em M, o que prova que $B[x_0,\varepsilon]$ é fechada.

□

Definição 2.56 *(Vizinhança). Dizemos que um conjunto $V \subset M$ é uma vizinhança de x_0, se existe $\varepsilon > 0$ tal que a bola aberta $B(x_0,\varepsilon)$, está contida em V, isto é, uma vizinhança de x_0 é qualquer subconjunto de M que contém uma bola $B(x_0,\varepsilon)$.*

Se N é uma vizinhança de x_0 e N está contido em V, então V é uma vizinhança de x_0. De fato, $B(x_0,\varepsilon) \subset N \subset V$, logo $B(x_0,\varepsilon) \subset V$. Chamamos de interior de V, o conjunto de todos os pontos interiores de V. Denotamos o interior de V por $\text{int}(V)$ ou V^0.

Veremos agora o conceito de continuidade em espaços métricos.

Definição 2.57 *(Aplicação Contínua). Seja $M = (M,d)$ e $N = (N,\overline{d})$ espaços métricos. Uma aplicação $T : M \to N$ é contínua em um ponto $x_0 \in M$ se para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $\overline{d}(T_{(x)},T_{(x_0)}) < \varepsilon$ sempre que $d(x,x_0) < \delta$. Dizemos que a aplicação T é contínua se ela é continua em todos os pontos de M.*

Definição 2.58 *(Ponto de Acumulação). Seja A um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $x_0 \in M$ é chamado de ponto de acumulação de A se para todo $\varepsilon > 0$, $B(x_0,\varepsilon)$ contém pelo menos um ponto $y \in A$ distinto de x_0. O conjunto que consiste nos pontos de A e pontos de acumulação de A é chamado de fecho de A e é denotado por $\overline{A}$.*

Teorema 2.59 *Uma aplicação T de um espaço métrico M em um espaço métrico N é contínua se, e somente se, a imagem inversa de qualquer subconjunto aberto de N é um subconjunto aberto de M.*

Demonstração: Suponha que T é contínua. Seja $S \subset N$ aberto e $S_0 = T^{-1}(S)$. Se $S_0 = \varnothing$ então S_0 é aberto. Se $S_0 \neq \varnothing$, considere $x_0 \in S_0$ e $y_0 \in T_{(x_0)}$. Como S é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(y_0, \varepsilon) \subset S$. Além disso, como T é contínua, $T(B(x_0, \delta)) \subset B(y_0, \varepsilon)$. Uma vez que $B(y_0, \varepsilon) \subset S$, temos que $T(B(x_0, \delta)) \subset S$, o que mostra que $B(x_0, \delta) \subset T^{-1}(S)$, isto é, $B(x_0, \delta) \subset S$ e portanto S_0 é aberto.

Reciprocamente para cada $x_0 \in M, y_0 = T(x_0)$ e qualquer $B(y_0, \varepsilon)$ em N, $T^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$ é aberta em M. Então existe $\delta > 0$ tal que

$$B(x_0, \delta) \subset T^{-1}(B(y_0, \varepsilon)),$$

ou seja, $B(x_0, \delta)$ é levada por T em $B(y_0, \varepsilon)$. Isso mostra que T é contínua. $\square$

3 ESPAÇOS DE BANACH

Neste capítulo veremos o conceito de espaços de Banach, bem como suas propriedades e alguns exemplos.

3.1 SEQUÊNCIAS EM ESPAÇOS DE BANACH

Nesta seção veremos sequências convergentes no espaço de Banach e funções contínuas entre espaços de Banach.

Definição 3.1 (Sequência convergente) *Uma sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *em um espaço normado* V *é dita convergente se dado qualquer* $\varepsilon > 0$, *existem um* $x \in V$ *e um número natural* N *tal que*

$$\|x_n - x\| < \varepsilon, \ \textit{para } n \geq N.$$

Neste caso escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \textit{ ou } x_n \to x, \ \textit{quando } n \to \infty.$$

Note que se considerarmos $V = \mathbb{R}$ e $\|x\| = |x|$ na Definição 3.1, temos o conceito de sequência de números reais e convergência desta, conforme estudado em cursos de Cálculo e Análise Real.

Se uma sequência de pontos num espaço normado é convergente, então o limite desta sequência é único. De fato, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de pontos no espaço normado V, a qual converge para dois pontos p e p' de V. Vamos mostrar que $p = p'$. Dado $\varepsilon > 0$, existem números naturais N_1 e N_2 tais que $\|x_n - p\| < \frac{\varepsilon}{2}$, *sempre que* $n \geq N_1$ e $\|x_n - p'\| < \frac{\varepsilon}{2}$, *sempre que* $n \geq N_2$

Escolhendo $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ e utilizando a desigualdade triangular da norma, obtemos

$$0 \leq \|p - p'\| \leq \|p - x_n\| + \|x_n - p'\| < \varepsilon.$$

Portanto, $\|p - p'\| = 0$ e assim, $p = p'$.

O seguinte resultado caracteriza o fecho de um conjunto em um espaço normado.

Proposição 3.2 *Seja $A \subset V$ um subconjunto qualquer do espaço normado V. Então*

$$\overline{A} = \{x \in V;\ \exists\ (x_n) \subset A \text{ e } x_n \to x\}.$$

i.e., o fecho de A é o conjunto formado pela união de A e seus pontos de acumulação.

Demonstração: Primeiramente mostremos que $\{x \in V;\ \exists\ (x_n) \subset A \text{ e } x_n \to x\} \subset \overline{A}$. De fato, seja $x \in \{x \in V;\ \exists\ (x_n) \subset A \text{ e } x_n \to x\}$ e suponha que $x \notin \overline{A}$. Como $x \notin \overline{A}$, então existe um conjunto fechado F tal que $A \subset F$ e $x \notin F$. Assim, podemos dizer que x pertence ao aberto $U = V \setminus F$. Note que neste caso $U \cap A = \varnothing$, pois $F \supset A$ e $F \nsubseteq U$. Por outro lado, como $x \in U$ e U é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset U$. Assim, $B(x,\varepsilon) \cap A = \varnothing$ e consequentemente $\|x-y\| \geq \varepsilon, \forall y \in A$, o que mostra que não existe $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \to x$, o que é uma contradição. Portanto, $x \in \overline{A}$.

Reciprocamente, se não existe nenhuma sequência de pontos em A que aproxima x, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon)$ não contém pontos de A, ou seja $B(x,\varepsilon) \cap A = \varnothing$. Como $B(x,\varepsilon)$ é aberta e $B(x,\varepsilon) \cap A = \varnothing$, temos que o fechado $F = B(x,\varepsilon)^C$ contém A e $x \notin F$. Portanto, $x \notin \overline{A}$, já que $\overline{A} = \cap\{F;\ F \text{ é fechado e } F \supset A\}$. □

Lema 3.3 *Seja V um espaço normado. Uma sequência $(x_n) \subset V$ converge para um ponto p se, e somente se, dado qualquer conjunto aberto U o qual contem p, existe um número natural N tal que $x_j \in U$ para todo $j \geq N$.*

Demonstração: Suponhamos que a sequência (x_j) converge para p. Seja U um conjunto aberto o qual contem p. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p,\varepsilon) \subset U$. Mas como $x_j \to p$ quando $j \to \infty$ existe um número natural N tal que

$$\|x_j - p\| < \varepsilon, \text{ para todo } j \geq N.$$

Assim, para todo $j \geq N$, temos $x_j \in B(p,\varepsilon) \subset U$ ou seja $x_j \in U$.

Reciprocamente, suponha que (x_n) seja uma sequência que satisfaz o critério dado no enunciado do lema e $\varepsilon > 0$. Como a bola aberta $B(p,\varepsilon)$ é um conjunto aberto, existe um número natural N tal que, $x_j \in B(p,\varepsilon)$ para todo $j \geq N$. Portanto, $\|x_j - p\| < \varepsilon$ para todo $j \geq N$ de onde obtemos que $x_n \to p$. □

Proposição 3.4 *Seja $F \subset V$ um conjunto fechado num espaço normado V e seja (x_n) uma sequência de pontos de F. Suponhamos que $x_n \to p$ quando $n \to \infty$. Então, p pertence a F.*

Demonstração: Basta ver que se F é fechado, então $F = \overline{F}$. Assim o resultado segue diretamente da Proposição 3.2. $\square$

Lema 3.5 *Seja V um espaço normado e $(x_n) \subset V$ uma sequência em V convergindo para $p \in V$. então, para qualquer ponto $y \in V$,*

$$\|x_n - y\| \to \|p - y\|, \textit{ quando } n \to \infty.$$

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ dado. Queremos mostrar que existe um número natural N tal que

$$|\|x_n - y\| - \|p - y\|| < \varepsilon, \ \forall\, n > N.$$

Como $x_n \to p$, temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - p\| < \varepsilon, \ \forall\, n \geq N.$$

Por outro lado pela desigualdade triangular, temos

$$\|x_n - y\| \leq \|x_n - p\| + \|p - y\| \ \textit{ e } \ \|p - y\| \leq \|p - x_n\| + \|x_n - y\|.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\|x_n - y\| - \|p - y\| \leq \|x_n - p\| + \|p - y\| - \|p - y\| = \|x_n - p\|,$$

e

$$\|x_n - y\| - \|p - y\| \geq \|x_n - y\| - \|p - x_n\| - \|x_n - y\| = \|x_n - p\|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$|\|x_n - y\| - \|p - y\|| < \varepsilon, \ \forall\, n \geq N,$$

e temos provado o lema. $\square$

Proposição 3.6 *Seja $f : U \to V$ uma função entre espaços normados U e V. Então, f é contínua em $p \in U$ se, e somente se, para toda sequência $(x_n) \subset U$ tal que $x_n \to p$, $p \in U$, a sequência $(f(x_n)) \subset V$ converge para $f(p)$.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que f é contínua em p e seja $(x_n) \subset U$ tal que $x_n \to p$. Dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade de f em p, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x - p\|_U < \delta$, então

$$\|f(x) - f(p)\|_V < \varepsilon. \tag{8}$$

Por outro lado, pela convergência de (x_n), temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - p\|_U < \delta, \forall n > N. \tag{9}$$

Portanto, de (8) e (9), temos

$$\|f(x_n) - f(p)\| < \varepsilon, \forall n > N,$$

ou seja $f(x_n) \to f(p)$.

Reciprocamente, se f não é contínua em $p \in U$, então existe $\varepsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta \in U$, tal que $\|x_\delta - p\| < \delta$ e $\|f(x_\delta) - f(p)\| \geq \varepsilon$. Em particular, se tomarmos $\delta = 1$, existe $x_1 \in U$ com $\|x_1 - p\| < 1$ e $\|f(x_1) - f(p)\| \geq \varepsilon$. Se consideramos $\delta = \frac{1}{2}$ existe $x_2 \in U$ com $\|x_2 - p\| < \frac{1}{2}$ e $\|f(x_2) - f(p)\| \geq \varepsilon$. Aplicando sucessivamente este argumento, temos que para $\delta = \frac{1}{n}$, existe $x_n \in U$, com $\|x_n - p\| < \frac{1}{n}$ e $\|f(x_n) - f(p)\| \geq \varepsilon$. Em outras palavras existe $\varepsilon > 0$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos obter $x_n \in U$ tal que

$$\|x_n - p\| < \frac{1}{n} \; e \; \|f(x_n) - f(p)\| \geq \varepsilon,$$

Portanto, existe uma sequência $(x_n) \subset U$, com $x_n \to p$, sem que $f(x_n)$ convirja para $f(p)$, contrariando a hipótese. Portanto f é contínua. □

Definição 3.7 *Seja V um espaço normado. Uma sequência (x_n) de pontos de V é chamada de sequência de Cauchy em V se, dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural N tal que*

$$\|x_n - x_k\| < \varepsilon, \; para \; todo \; n, k \geq N.$$

Claramente toda sequência convergente num espaço normado é uma sequência de Cauchy. De fato, assumindo que $x_n \to p$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_k\| = \|x_n - p + p - x_k\| \leq \|x_n - p\| + \|x_k - p\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \; \forall n, \; k > N.$$

Estamos interessados agora em caracterizar espaços normados que satisfazem a recíproca dessa afirmação.

3.2 ESPAÇOS DE BANACH

Nesta seção apresentamos o conceitos de espaço de Banach, além de exemplos desses espaços, bem como os conceitos de convergência uniforme e sequências de Cauchy.

Definição 3.8 *Um espaço normado V é dito completo se toda sequência de Cauchy em V é convergente e seu limite pertence a V. Chamaremos um espaço normado completo de espaço de Banach.*

Proposição 3.9 *Seja V um espaço de Banach, e seja A um subespaço vetorial de V. Então, A é completo se, e somente se, A é fechado em V.*

Demonstração: Suponhamos que A seja fechado em V e que (a_n) é uma sequência de Cauchy em A. Esta sequência de Cauchy converge para um ponto $p \in V$ (pois V é completo). Pela Proposição 3.2 o limite de qualquer sequência de pontos de A pertence a A, pois A é fechado. Assim, $a_n \to p$ e $p \in A$. Portanto, A é completo.

Agora suponhamos que A seja completo. Se o conjunto A não for fechado, então o complemento $V \setminus A$ de A não é conjunto aberto. Logo, existe um ponto $p \in V \setminus A$ tal que $B(p, \delta) \cap A \neq \varnothing$ para todo $\delta > 0$. Assim para cada $\delta = y_n$, existe $a_n \in A$ tal que

$$\|a_n - p\| < 1/n.$$

Dessa maneira (a_n) é uma sequência em A que converge para p. Como toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy, temos que (a_n) é uma sequência de Cauchy em A a qual não converge para um ponto de A, contradizendo assim a completitude de A. Portanto, A é fechado. $\square$

Exemplo 3.10 *O espaço normado $\mathbb{R}$ com a norma $\|x\| = |x|$ é completo.*

Demonstração: Suponha que x_n seja uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall m, n > N_1. \tag{10}$$

Mostremos inicialmente que x_n é limitada. De fato, por (10), temos que

$$|x_n - x_{N+1}| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n > N_1.$$

Assim,

$$|x_n| \leqslant |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| < \frac{\varepsilon}{2} + |x_{N+1}|, \ \forall n > N_1.$$

isto é, (x_n) é limitada.

Por outro lado, pelo Teorema de Bolzano Weierstrass, existe (x_{n_k}) subsequência de

(x_n) e $a \in \mathbb{R}$, tal que $x_{n_k} \to a$. Em outras palavras, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n_k > N_2.$$

considerando $N = \max\{N_1, N_2\}$, temos

$$|x_n - a| \leqslant |x_n - n_{n_k}| + |n_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n > N.$$

□

Exemplo 3.11 *O espaço normado $\mathbb{R}^n$ com a norma euclidiana é um espaço de Banach.*

Demonstração: Se (x_m) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m - x_k\| = \sqrt{(x_m^1 - x_k^1)^2 + \cdots + (x_m^n - x_k^n)^2} < \varepsilon, \forall m, k \geq N.$$

Assim, para cada inteiro $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, a sequência (x_m^j) é uma sequência de Cauchy de números reais, a qual é convergente. Denotando o limite de (x_m^j) por x_j, com $j = 1, \cdots, n$, mostremos que a sequência (x_m) converge para $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$ em $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Como $(x_m^j) \to x_j$ para cada $j = 1, \cdots, n$ dado $\varepsilon > 0$, existem números naturais $N_1, N_2, \cdots, N_n$ tais que

$$|x_m^j - x^j| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n}},$$

para todo $m > N_j$ e todo $j = 1, \cdots, n$. Tomando $N = \max\{N_1, N_2, \cdots, N_n\}$ obtemos que se $m \geq N$, então

$$|x_m^j - x^j|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{n},$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_m^j - x^j|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Logo, para $m > N$, temos que

$$\|x_m - x\| \leq \varepsilon,$$

isto é, $x_m \to x$. □

Corolário 3.12 *Seja $\|\cdot\|$ uma norma qualquer em $\mathbb{R}^n$. Então $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Basta observar que em $\mathbb{R}^n$ toda norma é equivalente. □

Exemplo 3.13 *O espaço l^∞ é um espaço de Banach.*

Demonstração: De fato, se (x^m) é uma sequência de Cauchy em l^∞, então $(x^m) = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots)$ para cada $m \in \mathbb{N}$, onde

$$\|x^m\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i^m| \leq c_m, m = 1, 2, \cdots, \tag{11}$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > N$

$$\|x^m - x^n\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i^m - x_i^n| < \varepsilon$$

Portanto, para todo $i \in \mathbb{N}$ fixado, temos que para todo $m, n > N$,

$$|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| < \varepsilon, \tag{12}$$

ou seja, para qualquer i fixado, a sequência $x_i^{(m)} = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \cdots)$ é uma sequência de Cauchy de números reais, a qual é convergente. Então, existe $x_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_i^{(m)} \to x_i, \text{quando } m \to \infty.$$

Definamos $x = (x_1, x_2, \cdots)$ e mostremos que $x \in l^\infty$ e que $x_m \to x$. De fato, fazendo $n \to \infty$ em (12), obtemos que

$$|x_i^{(m)} - x_i| < \varepsilon, \forall m > N. \tag{13}$$

Logo, de (11) e (13) temos

$$|x_i| \leq |x_i - x_i^{(N+1)}| + |x_i^{(N+1)}| < \varepsilon + c_{N+1},$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| \leq \varepsilon + c_{N+1},$$

o que mostra que $x \in l^\infty$. Novamente (13) implica que

$$\|x^m - x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i^{(m)} - x_i| < \varepsilon,$$

sempre que $m > N$, ou seja, $x^m \longrightarrow x$ em l^∞, mostrando que l^∞ é completo. $\square$

Exemplo 3.14 *Para $p \geq 1$, o espaço normado de sequências*

$$l^p = \{(x_1, x_2, \cdots); x_j \in \mathbb{K}, j = 1, 2, \cdots, e \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\},$$

com a norma dada por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach.

Exemplo 3.15 *O espaço de funções contínuas $C[a,b] = C([a,b],\mathbb{R})$ com a norma*

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

é um espaço de Banach, onde $[a,b]$ é um intervalo compacto em $\mathbb{R}$.

Demonstração: De fato, se (x_m) é uma sequência de Cauchy em $C[a,b]$ então, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|x_m - x_n\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall m,n > N_1. \tag{14}$$

Portanto, para cada $t_0 \in [a,b]$ fixado, temos

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

sempre que $m,n \geq N_1$. Isso mostra que a sequência $(x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Logo, existe $x(t_0) \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_m(t_0) \to x(t_0), \text{ quando } m \to \infty.$$

Assim podemos associar a cada $t \in [a,b]$ um único número real $x(t)$, o que define uma função x em $[a,b]$. Mostremos que $x \in C[a,b]$ e $x_m \to x$ em $C[a,b]$. Fazendo $n \to \infty$ em (14), temos

$$\sup_{t\in[a,b]} |x_m(t) - x(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \tag{15}$$

sempre que $m \geq N_1$. Logo, para todo $t \in [a,b]$,

$$|x_m(t) - x(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \tag{16}$$

sempre que $m \geq N_1$. Por outro lado, a continuidade de x_{N_1} implica que existe $\delta > 0$ tal que, se $|t - t_0| < \delta$, então

$$|x_{N_1}(t) - x_{N_1}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{17}$$

Dessa maneira, se $|t - t_0| < \delta$, então (16) e (17) implicam que

$$|x(t) - x(t_0)| = |x(t) - x_{N_1}(t) + x_{N_1}(t) - x_{N_1}(t_0) + x_{N_1}(t_0) - x(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Isso mostra que a função limite x é contínua em $[a,b]$. Assim, $x \in C[a,b]$. Além disso, temos diretamente de (15) que $x_m \to x$. Portanto $C[a,b]$ é um espaço de Banach. $\square$

Definição 3.16 *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge pontualmente para uma função $f : X \to \mathbb{R}$, quando, dado $a \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}, n_0$ dependendo de a, tal que $n > n_0$ implica que*

$$|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon \text{ para todo } n > n_0.$$

Definição 3.17 *(Convergência Uniforme). Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in X. \tag{18}$$

Observação 3.18 *A diferença entre a convergência pontual e a uniforme é que na uniforme existe um n_0 tal que* (18) *ocorre independente do ponto $x \in X$ escolhido.*

Proposição 3.19 *Se $x_m \to x$ no espaço de Banach $C[a,b]$ com a norma*

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|, \tag{19}$$

então esta convergência é uniforme, isto é, (x_m) converge uniformemente para $x \in C[a,b]$ na norma (19).

Demonstração: Sejam (x_m) uma sequência em $C[a,b]$ e $x \in C[a,b]$ tal que

$$\|x_m - x\|_\infty \to 0,$$

quando $m \to \infty$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{t \in [a,b]} |x_m(t) - x(t)| < \varepsilon, \forall m \geq N.$$

Logo, para todo $t \in [a,b]$ temos que

$$|x_m(t) - x(t)| < \sup_{t \in [a,b]} |x_m(t) - x(t)| < \varepsilon,$$

sempre que $m > N$. Portanto $x_m \to x$ uniformemente em $[a,b]$. $\square$

Lema 3.20 *Seja $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ um conjunto linearmente independente de vetores em um espaço normado V (de qualquer dimensão). Então existe um número $c > 0$ tal que para toda escolha* *de escalares* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ *temos*

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|) \tag{20}$$

Demonstração: Seja $s = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|$. Se $s = 0$, então $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ e (20) vale para qualquer $c > 0$. Seja $s > 0$. Então (20) é equivalente a desigualdade que obtemos dividindo (20) por s e escrevendo $\beta_i = \frac{\alpha_i}{s}$, isto é,

$$\|\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n\| \geq c, \tag{21}$$

onde

$$\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| = 1.$$

Portanto é suficiente provar a existência de $c > 0$ tal que (20) sirva para toda n-upla de escalares $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$, com $\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| = 1$. Suponha que isso é falso. Então existe uma sequência (y_m) de vetores da forma

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \beta_2^{(m)} x_2 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n,$$

onde

$$\sum_{i=1}^{n} |\beta_i^{(m)}| = 1$$

e

$$\|y_m\| \to 0, \text{ quando } m \to \infty.$$

Como $\sum_{i=1}^{n} |\beta_i^{(m)}| = 1$, temos $|\beta_i^{(m)}| \leq 1$ para todo $i = 1, \cdots, n$. Portanto, para cada i fixado a sequência $(\beta_i^{(m)}) = (\beta_i^{(1)}, \beta_i^{(2)}, \cdots)$ é limitada. Consequentemente, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, $\beta_i^{(m)}$ tem uma subsequência convergente. Seja β_1 o limite desta subsequência e seja $(y_{1,m})$ a subsequência correspondente de (y_m). Pelo mesmo argumento, $(y_{1,m})$ tem uma subsequência $(y_{2,m})$ para a qual a subsequência correspondente de escalares $\beta_2^{(m)}$ converge e seja β_2 o limite. Seguindo dessa forma, depois de n passos obtemos a subsequência $(y_{n,m}) = (y_{n,1}, y_{n,2}, \cdots)$ de (y_m) cujos termos são da forma

$$y_{n,m} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(m)} x_i,$$

onde

$$\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i^{(m)}| = 1$$

e $\gamma_i^{(m)}$ são escalares satisfazendo $\gamma_i^{(m)} \to \beta_i$, quando $m \to \infty$. Portando, quando $m \to \infty$,

$$y_{n,m} \to y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i,$$

onde $\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| = 1$. Note que, nem todo β_i pode ser zero. Como $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ é um conjunto linearmente independente, temos então $y \neq 0$. Por outro lado, $y_{n,m} \to y$ implica $\|y_{n,m}\| \to \|y\|$, pela continuidade de norma. Como $\|y_m\| \to 0$ por hipotese e $(y_{n,m})$ é uma subsequência de (y_m), devemos ter $\|y_{n,m}\| \to 0$. Consequentemente $\|y\| = 0$, o que é uma contradição, provando o lema. □

Teorema 3.21 *Todo subespaço Y de dimensão finita de um espaço normado V é um espaço de Banach. Em particular todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach.*

Demonstração: Sejam $n = \dim Y$, $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ uma base de Y e $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em Y. Como B é uma base para Y, para todo $m \in \mathbb{N}$, existem escalares $\alpha_1^{(m)}, \cdots, \alpha_n^{(m)}$ tais que

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(m)} e_n.$$

Além disso, sendo $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|y_m - y_n\| < \varepsilon, \forall\, m,n > N.$$

O Lema 3.20 implica que existe $c > 0$ tal que

$$\varepsilon > \|y_m - y_n\| = \|\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(n)}) e_j\| \geq c \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(n)}|,$$

sempre que $m,n > N$. Logo, para $j = 1,2,...,n$, temos

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(n)}| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{c}, \forall m,n \geq N.$$

Portanto, $(\alpha_j^{(m)})$ é uma sequência de Cauchy de números reais para todo $j = 1, \cdots, n$. Denotando

$$\alpha_j = \lim_{m\to\infty} \alpha_j^{(m)}, j = 1,2,\cdots,n,$$

e definindo $y = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$, temos que $y \in Y$ e

$$\|y_m - y\| = \|\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) e_j\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j| \|e_j\|.$$

Como $\alpha_j^{(m)} \to \alpha_j$, quando $m \to \infty$, obtemos que

$$\|y_m - y\| \to 0, \text{quando } m \to \infty,$$

mostrando que $y_m \to y$ e que Y é um espaço de Banach. □

Corolário 3.22 *Todo subespaço Y de um espaço normado V de dimensão finita é fechado em V.*

Demonstração: Como dimensão de Y é finita, segue do Teorema 3.21 que Y é um espaço normado completo e, portanto, Y é fechado em V. □

Exemplo 3.23 *O espaço de funções $C([0,1],\mathbb{R})$ com a norma*

$$\|g\|_i = \int_0^1 |g(x)|dx$$

é um espaço normado, mas não é completo.

De fato, a sequência de funções $f_n(x) = x^n$, é de Cauchy com essa norma e converge para f, onde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ 0 \leq x < 1 \\ 1, & se\ x = 1. \end{cases}$$

Como essa função f é descontínua no intervalo $[0,1]$, temos que $f_n(x) = x^n$ é uma sequência de Cauchy em $C([0,1],\mathbb{R})$ que não converge em $C([0,1],\mathbb{R})$. Portanto, $C([0,1],\mathbb{R})$ não é completo. A Figura 2 ilustra os gráficos de $f_n(x)$ e $f(x)$.

Vamos apresentar agora um critério que utiliza o conceito de convergência de séries, para verificar quando um espaço normado é um espaço de Banach. Se (x_n) é uma sequência em um espaço normado V, podemos associar com (x_n) a sequência (S_n) de somas parciais cujo n-ésimo termo é definido por

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

para $n = 1, 2, \cdots$ Se (S_n) é convergente, ou seja, se existe $S \in X$ tal que

$$\|S_n - S\| \to 0, \text{quando } n \to \infty,$$

diremos que a série infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots = S \tag{22}$$

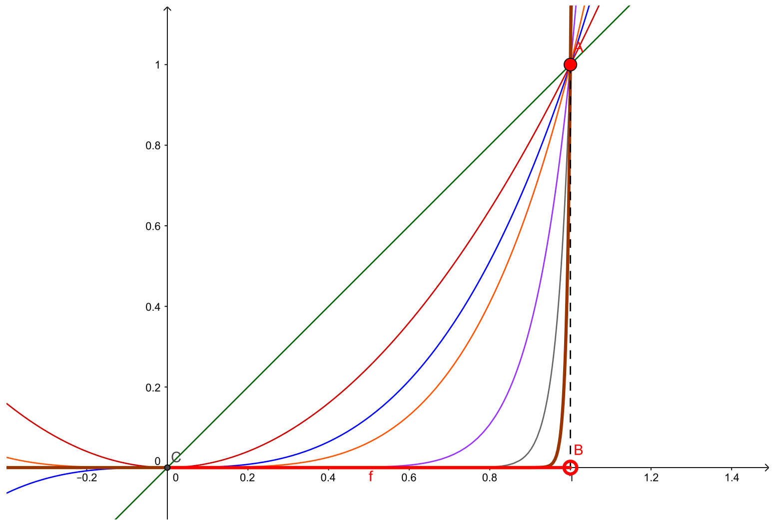

Figura 2: Gráficos de $f_n(x)$ e $f(x)$.

é convergente e S é chamado de soma da série. Se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots$$

converge no sentido acima, a série em (22) é dita absolutamente convergente.

Teorema 3.24 *Em um espaço normado V, a convergência absoluta implica em convergência se, e somente se, V é um espaço de Banach.*

Demonstração: Suponhamos que V seja um espaço de Banach e consideremos (x_n) uma sequência em V tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

Definamos a sequência das somas parciais associada à série acima por

$$\bar{S_1} = \|x_1\|,$$

$$\bar{S_2} = \|x_1\| + \|x_2\|,$$

$$\vdots$$

$$\bar{S_n} = \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|.$$

Como $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, então $(\bar{S_n})$ é convergente e, portanto, é uma sequência de Cauchy, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > m > N$, então

$$|\bar{S_m} - \bar{S_n}| < \varepsilon,$$

isto é,

$$|\bar{S_m} - \bar{S_n}| = \|x_{m+1}\| + \|x_{m+2}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon.$$

Vamos mostrar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

é convergente em V. Para isso consideremos a sequência das somas parciais

$$S_1 = x_1,$$

$$S_2 = x_1 + x_2,$$

$$\vdots$$

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Tomando $n > m > N$ e utilizando a desigualdade triangular da norma, temos

$$\|S_m - S_n\| = \|x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n\| \leq \|x_{m+1}\| + \|x_{m+2}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon,$$

Mostramos assim que (S_n) é uma sequência de Cauchy. Como V é um espaço de Banach existe $S \in V$ tal que $S_n \to S$, quando $n \longrightarrow \infty$, mostrando que a série é convergente.

Reciprocamente, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em V. Para cada $j \in \mathbb{N}$, existem $N_j \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq N_j$, então

$$\|x_m - x_n\| < \frac{1}{2^j}.$$

Consideremos a subsequência (x_{N_j}) de (x_n) e definamos

$$u_1 = x_{N_1}$$

$$u_2 = x_{N_2} - x_{N_1}$$

$$\vdots$$

$$u_k = x_{N_k} - x_{N_{k-1}}$$

$$\vdots$$

Note que

$$\sum_{j=1}^{k} u_j = x_{N_k}$$

e

$$\sum_{j=1}^{k} \|u_j\| \leq \|u_1\| + \sum_{j=2}^{k} 2^{-j} < \|u_1\| + 1,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, a série

$$\sum_{j=1}^{\infty} u_j$$

é absolutamente convergente e, portanto, por hipótese converge para algum x, isto é,

$$x_{N_k} = \sum_{j=1}^{k} u_j \to x, \text{quando } k \to \infty,$$

com $x \in V$. Portanto (x_n) possui uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente e assim (x_n) é convergente mostrando que V é um espaço de Banach. $\square$

Observação 3.25 *Note que, se (x_n) é uma sequência de Cauchy e admite uma subsequência que converge para x, então (x_n) também converge para x. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{x_k} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall\, n, k > N$$

4 OPERADORES LINEARES

Em espaços vetoriais gerais, um operador linear é uma aplicação linear cujo domínio e imagem encontram-se em um mesmo espaço vetorial. Quanto a este espaço passa a estar munido de uma norma e consequentemente de uma topologia, faz sentido perguntarmos se tais operadores são por exemplo contínuos e limitados e quais as consequências matemáticas disso. Também podemos perguntar se o espaço vetorial formado pelos operadores lineares é ou não um espaço vetorial normado e o que seria uma norma para tal espaço. Estes mesmos questionamentos podem ser levados para os funcionários lineares. Neste capítulo, pretendemos responder tais perguntas e ver que tipos de resultados podemos obter dentro deste contexto.

Definição 4.1 *Sejam $(V, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $T : D(T) \subset V \to V$ um operador. Diremos que T é um operador linear se*

(i) o domínio $D(T)$ de T é um subespaço vetorial de V e sua imagem $R(T) \subset V$;

(ii) para quaisquer $x, y \in D(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$T(x+y) = Tx + Ty \text{ e } T(\alpha x) = \alpha Tx. \tag{23}$$

Usaremos as notações $D(T)$ para o domínio de T e $R(T)$ para a imagem de T. O núcleo de T é definido por

$$\text{Nuc}T = \{x \in D(T);\ T(x) = 0\}.$$

Se $x, y \in D(T)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, note que (23) é equivalente a

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$$

Em particular quando $\alpha = \beta = 0$, obtemos que

$$T(0) = 0.$$

Observação 4.2 *Quando $T : D(T) \subset U \to V$, é uma aplicação linear, dizemos que T é uma transformação linear. Em particular todo operador linear é uma transformação linear.*

Vejamos alguns exemplos de operadores lineares.

Exemplo 4.3 *(Operador Identidade). O operador $I_d : V \to V$, definido por $I_d(x) = x$ para todo $x \in V$, é um operador linear e é chamado de Operador Identidade.*

Exemplo 4.4 *(Operador Nulo). O operador $T : V \to V$ definido por $T(x) = 0$ para todo $x \in V$, é o operador nulo. Este operador pode ser denotado por $T = 0$.*

Exemplo 4.5 *(Matrizes). Uma matriz real A_{ij} com r linhas e n colunas define um operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$, por $T(x) = Ax$. Denotando, $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ e $(\eta_1, \cdots, \eta_r)$ sua imagem, na notação matricial, temos*

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.6 *Seja $T : D(T) \subset V \to V$ um operador linear. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) A imagem $R(T)$ é um subespaço vetorial de V.

(ii) Se $\dim D(T) = n < \infty$, então $\dim R(T) \leq n$.

(iii) O $Nuc T$ é um subespaço vetorial de V.

Demonstração: (i) Dados $z, w \in R(T)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, basta mostrarmos que $\lambda z + w \in R(T)$. Como $z, w \in R(T)$, existe $x, y \in X$ tais que $T(x) = z$ e $T(y) = w$. Logo, pela linearidade de T,

$$\lambda z + w = \lambda T(x) + T(y) = T(\lambda x + y),$$

ou seja $\lambda z + w \in R(T)$.

(ii) Suponha que dim $R(T) > n$. Logo, existe um conjunto L.I., com $n+1$ elementos $\{y_1, \cdots, y_{n+1}\} \subset R(T)$. Além disso, existem $x, x_2, \cdots, x_{n+1} \in D(T)$ tais que

$$y_1 = Tx_1, \cdots, y_{n+1} = Tx_{n+1},$$

Por hipótese dim $D(T) = n$. Assim, os vetores $\{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$ são linearmente dependentes, ou seja, existe $\alpha_i, i = 1, \cdots, n+1$, não todos nulos, tais que,

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0. \tag{24}$$

Sendo T é linear e $T(0)=0$, temos por (24) que

$$0 = T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = \alpha_1 T x_1 + \cdots + \alpha_{n+0} T x_{n+1} = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+1}.$$

Dessa forma, temos $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0$, com pelo menos algum α_i não nulo. Logo, $\{y_1, \cdots, y_{n+1}\}$ é um conjunto linearmente dependente, o que é uma contradição. Portanto, dim $R(T) \leq n$.

(iii) Dados $x, y \in \text{Nuc}T$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então $T(x) = 0, T(y) = 0$ e

$$T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y) = 0 + \lambda 0 = 0,$$

ou seja, $x + \lambda y \in \text{Nuc}T$. □

Consideremos uma aplicação linear $T : D(T) \subset U \to V$ injetiva, ou seja, se $x, y \in D(T)$ são tais que $T(x) = T(y)$, então $x = y$. Como toda aplicação injetiva é uma bijeção entre seu domínio e sua imagem, temos que existe

$$T^{-1} : R(T) \to D(T),$$

onde

$$T^{-1} T x = x, \forall x \in D(T),$$

e

$$T T^{-1} y = y, \forall y \in R(T).$$

É sabido da álgebra linear clássica que uma transformação linear T é injetora se, e somente se, o núcleo de T consiste apenas no vetor nulo. Nesse contexto temos o seguinte resultado para a existência da inversa de operadores.

Teorema 4.7 *Sejam U e V espaços vetoriais reais e $T : D(T) \subset U \to V$ uma transformação linear, onde $D(T) \subset U$ e $R(T) \subset V$. Então*

(i) Se existe T^{-1}, então T^{-1} é um operador linear.

(ii) A inversa $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ existe se, e somente se, $NucT = \{0\}$.

(iii) Se $\dim D(T) = n < \infty$ e T^{-1} existe, então $\dim R(T) = \dim D(T)$.

Demonstração: (i) Sejam $z, w \in R(T)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, existem $x, y \in D(T)$ tais que $T(x) = z$

e $T(y) = w$. Logo,

$$\begin{aligned} T^{-1}(\lambda z + w) &= T^{-1}(\lambda T(x) + T(y)) \\ &= T^{-1}(T(\lambda x + y)) \\ &= \lambda x + y \\ &= \lambda T^{-1}(T(x)) + T^{-1}(T(y)) \\ &= \lambda T^{-1}(z) + T^{-1}(w). \end{aligned}$$

Note que, como $T(0) = 0$, então $T^{-1}(0) = T^{-1}(T(0)) = 0$.

(ii) Se T^{-1} existe e $T(x) = 0$, então $x = T^{-1}(T(x)) = T^{-1}(0)$, ou seja, $x = 0$. Isso mostra que $\mathrm{Nuc}T = \{0\}$. Reciprocamente, se $\mathrm{Nuc}T = \{0\}$, sabemos da álgebra linear que T é injetora. Assim, $T : D(T) \to R(T)$ é uma bijeção e portanto existe T^{-1} .

(iii) Sendo $\dim D(T) = n < \infty$, segue do Teorema 4.6 (ii) que

$$\dim R(T) \leq \dim D(T) = n. \tag{25}$$

Por outro lado, como existe

$$T^{-1} : R(T) \to D(T)$$

e T^{-1} é linear, pelo item (i), o mesmo Teorema 4.6 implica que

$$\dim D(T) \leq \dim R(T). \tag{26}$$

Assim concluímos de (25) e (26) que $\dim R(T) = \dim D(T)$. $\square$

4.1 OPERADORES LINEARES CONTÍNUOS E LIMITADOS

Nesta seção veremos que é possível falar em limitação e continuidade de operadores lineares em espaços normados e espaços de Banach bem como mostraremos algumas relações entre a limitação e a continuidade de operadores lineares.

Definição 4.8 *Sejam U e V espaços normados e $T : D(T) \subset U \to V$ uma transformação linear. A transformação T é dita limitada se existe um número real $c > 0$ tal que para todo $x \in D(T)$ temos*

$$\|T(x)\|_V \leq c\|x\|_U.$$

Para facilitar a notação, denotaremos tanto a norma $\|\cdot\|_U$ quando a norma $\|\cdot\|_V$ apenas por $\|\cdot\|$ deixando a cargo do contexto a diferenciação de ambas.

Pela definição acima, podemos observar que uma transformação linear limitada leva um subconjunto limitado de $D(T)$ em um subconjunto limitado de V. Também, para todo $x \in D(T)$, com $x \neq 0$ temos

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq c.$$

Logo, o número

$$\|T\| := \sup_{x \in D(T), x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \tag{27}$$

existe e será denominado norma do operador T. Neste caso, para todo $x \in D(T)$, temos que

$$\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|.$$

Proposição 4.9 *Seja $T : D(T) \subset U \to V$ uma transformação linear limitada. Então,*

$$\|T\| = \sup_{x \in D(T), x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in D(T), \|x\|=1} \|T(x)\|$$

e $\|T\|$ satisfaz as condições de (N_1) a (N_3) da Definição 2.10, ou seja, $\|T\|$ define uma norma no espaço das transformação linear limitada.

Demonstração: Seja $x \in D(T)$ tal que $x \neq 0$. Considerando $y = \frac{x}{\|x\|}$, obtemos que

$$\|y\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

Assim, utilizando a linearidade de T, temos

$$\|T\| = \sup_{x \in D(T),\, x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in D(T),\, x \neq 0} \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \sup_{y \in D(T), \|y\|=1} \|T(y)\|.$$

Mostraremos agora que $\|T\|$ dado em (27) satisfaz as condições exigidas na Definição 2.10. Para isso considere $x \in D(T)$, com $x \neq 0$. Então, a limitação de T implica que

$$0 \leq \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq c.$$

Logo,

$$0 \leq \|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq c$$

Além disso, $\|T\| = 0$ se, e somente se

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Esta última igualdade por sua vez é equivalente a $\|T(x)\| = 0$ e $x \in D(T)$, com $x \neq 0$. Portanto, como $T(0) = 0$, temos que $\|T\| = 0$ se, e somente se $T = 0$, o que mostra a condição $(N1)$ exigida na Definição 2.10. Além disso, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x \in D(T)$, com $x \neq 0$, temos

$$\frac{\|(\alpha T)(x)\|}{\|x\|} = \frac{|\alpha|\|T(x)\|}{\|x\|} = |\alpha|\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}.$$

Logo,

$$\|\alpha T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|(\alpha T)(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0}|\alpha|\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = |\alpha|\sup_{x\neq 0}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = |\alpha|\|T\|,$$

mostrando que $\|T\|$ satisfaz a condição $(N2)$. Por fim, dados $T_1, T_2 : D(T) \subset X \to Y$ dois operadores lineares limitados, temos que

$$\|(T_1+T_2)(x)\| = \|T_1x + T_2x\| \leq \|T_1x\| + \|T_2x\|, \forall x \in D(T).$$

Logo, para $x \neq 0$, temos

$$\frac{\|(T_1+T_2)(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{\|T_1x\|}{\|x\|} + \frac{\|T_2x\|}{\|x\|}. \tag{28}$$

Portanto, tomando o supremo em (28), obtemos

$$\|T_1+T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|.$$

Temos assim provado $(N3)$ e consequentemente o teorema. $\square$

Corolário 4.10 *O espaço $B(U,V)$ das transformação linear limitadas, é um espaço vetorial normado com a norma definida em* (27)*. Em particular, quando $U = V$, o espaço $B(V)$ dos operadores lineares limitados também é um espaço vetorial.*

Exemplo 4.11 *(Operador Integral) Consideremos em $C([a,b],\mathbb{R})$ a norma*

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]}|x(t)|,$$

e definimos a aplicação $T : C([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R})$ da seguinte forma

$$Tx(t) = \int_a^t x(t)dt,$$

onde $t \in [a,b]$. O operador integral definido acima é linear em $C([a,b],\mathbb{R})$ e é limitado.

De fato, se $x \in C([a,b],\mathbb{R})$, então

$$|x(t)| \leq \max_{t\in[a,b]}|x(t)| = \|x\|, \forall\, t \in [a,b].$$

Logo,

$$|(Tx)(t)| = \left|\int_a^t x(\xi)d\xi\right| \leq \int_a^t |x(\xi)|d\xi \leq \|x\| \int_a^t d\xi = \|x\|(t-a) \leq \|x\|(b-a).$$

Portanto,

$$\|T(x)\| = \max_{t\in[a,b]} |(Tx)(t)| \leq (b-a)\|x\|,$$

ou seja, T é um operador linear limitado.

Exemplo 4.12 *Seja P o espaço de todas as funções polinomiais definidas no intervalo* $[0,1]$. *Consideremos em P a norma*

$$\|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|,$$

e definamos o operador derivada $T : X \to X$ por $T(x(t)) = x'(t)$.

O operador T definido dessa maneira é linear, porém não é limitado. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$ considere

$$x_n(t) = t^n, \text{com } t \in [0,1].$$

Temos que

$$\|x_n\| = \max_{t\in[0,1]} |x_n(t)| = \max_{t\in[0,1]} |t^n| = 1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, $x_n'(t) = nt^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\|T(x_n)\| = \max_{t\in[0,1]} |x_n'(t)| = \max_{t\in[0,1]} |nt^{n-1}| = n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\frac{\|T(x_n)\|}{\|x_n\|} = n \to \infty, \text{quando } n \to \infty,$$

mostrando que T não pode ser limitado.

Teorema 4.13 *Se um espaço normado V possui dimensão finita, então todo operador linear em V é limitado.*

Demonstração: Sejam $dim_{\mathbb{K}}V = n < \infty$ o conjunto $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base de V e $x \in V$ tal que

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, x \in \mathbb{R}.$$

Como T é linear temos

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j T e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \|Te_j\| \leq \max_{1\leq k\leq n} \|Te_k\| \sum_{j=1}^{n} |x_j|. \tag{29}$$

Por outro lado, pelo Lema 3.20, temos que existe $c > 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\| = \frac{1}{c}\|x\|. \tag{30}$$

Assim, de (29) e (30), temos

$$\|Tx\| \leq \max_{1\leq k\leq n} \|Te_k\| \frac{1}{c}\|x\|.$$

Denotando, $\gamma = \max\limits_{1\leq k\leq n} \frac{\|Te_k\|}{c}$, obtemos

$$\|Tx\| \leq \gamma \|x\|.$$

Portanto, T é operador linear limitado. □

Teorema 4.14 *Seja $T : D(T) \subset U \to V$ uma transformação linear, onde $D(T)$ é um subespaço vetorial de U, com U e V sendo espaços vetoriais normados. Então,*

i) T é contínua se, e somente se, T é limitada.

ii) T é contínua em $x_0 \in D(T)$ se, e somente se, T é contínua.

Demonstração*: (i) ($\Leftarrow$) Seja $T : D(T) \subset U \to V$ uma transformação linear não nulo e $x_0 \in D(T)$. Dado $\varepsilon > 0$, basta escolhermos $\delta > 0$ tal que $\delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$. Como T é linear e limitada, temos que se $x \in D(T)$ e $\|x - x_0\| < \delta$, então*

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\|\|x - x_0\| < \|T\|\delta = \|T\|\frac{\varepsilon}{\|T\|} = \varepsilon.$$

Logo, T é contínua em x_0. Pela arbitrariedade da escolha de x_0 concluímos que T é contínua.

($\Rightarrow$) Como T é contínua em $D(T)$, então T é contínua em algum $x_0 \in D(T)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in D(T)$ e $\|x - x_0\| < \delta$, então $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$. Por outro lado, dado $y \in D(T), y$ qualquer e diferente de 0, podemos definir $x = x_0 + \frac{\delta}{2\|y\|}y$. Note que

$$\|x - x_0\| = \frac{\|\delta y\|}{2\|y\|} = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Logo, pela continuidade de T, temos

$$\varepsilon > \|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right)\right\| = \frac{\delta}{2\|y\|}\|Ty\|.$$

Portanto, para todo $y \in D(T)$,

$$\|Ty\| \leq C\|y\|,$$

onde $C = \frac{2\varepsilon}{\delta}$. Isso mostra que T é limitada.

(ii)- Se T é contínua em $x_0 \in D(T)$, utilizando os mesmos argumentos da demonstração do item anterior, obtemos que T é limitada. Portanto, usando o item anterior temos que T é contínua. A recíproca é imediata. □

Corolário 4.15 *Seja $T : D(T) \subset U \to V$ uma transformação linear limitada. Então*

(i) se $x_n \to x$, onde $(x_n) \subset D(T)$, então $T(x_n) \to T(x)$.

(ii) o núcleo $NucT$ é um subespaço fechado.

Demonstração: (i) O Teorema 4.14 garante que T é contínua. Logo utilizando a (3.6) temos que $x_n \to x$, implica que $T(x_n) \to T(x)$.

(ii) Já vimos no (4.6) que o $Nuc(T)$ é um subespaço. Mostraremos agora que $NucT$ é fechado. De fato, se $x \in NucT$, existe $(x_n) \in NucT$, tal que $x_n \to x$. Pelo item anterior temos que $T(x_n) \to T(x)$. Por outro lado, $T(x_n) = 0$ para todo n, ou seja, $T(x_n) \to 0$. Logo, pela unicidade do limite $T(x) = 0$, ou seja, $x \in NucT$. Como $x \in \overline{NucT}$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos que $NucT$ é um subespaço fechado. □

4.2 FUNCIONAIS LINEARES

Vamos agora estudar um caso particular de transformação linear, o funcional linear. Os funcionais lineares desempenham um papel crucial no nosso trabalho já que eles são a base para o nosso teorema principal, o Teorema de Lax-Milgram.

Definição 4.16 *Um funcional linear é uma transformação linear $f : D(f) \subset V \to \mathbb{K}$, onde V é um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$. Se V é um espaço vetorial real, então $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e se X é um espaço vetorial complexo então $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

Definição 4.17 *Um funcional linear é limitado se existe um número $c > 0$ tal que para todo $x \in D(f)$,*

$$|f(x)| \leq c\|x\|.$$

Além disso, a norma de f é dada por

$$\|f\| = \sup_{x \in D(T), \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

ou ainda,

$$\|f\| = \sup_{x \in D(T), \|x\|=1} |f(x)|.$$

Observação 4.18 *O conjunto dos funcionais lineares com a soma $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ e multiplicação por escalar $(\lambda f(x)) = \lambda f(x)$, formam o espaço vetorial $L(V,\mathbb{K})$. Este espaço também é chamado de espaço dual e denotado por V^*.*

Como agora estamos trabalhando com espaços vetoriais que possuem norma, podemos nos questionar quando um funcional linear é contínuo, com relação a uma norma fixada.

Observação 4.19 *Utilizando a definição de $\|f\|$, temos que todo funcional linear limitado satisfaz*

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\|, \ \forall x \in Dom(f).$$

De fato, se $x \neq 0$,

$$|f(x)| = \frac{|f(x)|}{\|x\|}\|x\| \leq \left(\sup_{x \neq 0, x \in V} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \right) \|x\| = \|f\|\|x\|.$$

Teorema 4.20 *Um funcional linear f com domínio $D(f)$ em um espaço normado é limitado se, e somente se, f é contínuo.*

Demonstração: Segue do Teorema 4.14 item i), considerando $V = \mathbb{K}$. $\square$

Exemplo 4.21 *A norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ em um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é um funcional em X que não é linear.*

Exemplo 4.22 *A integral definida é um funcional linear limitado no conjunto das funções contínuas, isto é, se $f : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é tal que*

$$f(x(t)) = \int_a^b x(t)dt, \ x \in C([a,b],\mathbb{R}).$$

então f é um funcional linear limitado.

Demonstração: *De fato, dados $x, y \in C([a,b],\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos*

$$f(\alpha x(t)+\beta y(t)) = \int_a^b \alpha x(t)+\beta y(t)dt = \alpha\int_a^b x(t)dt+\beta\int_a^b y(t)dt = \alpha f(x)+\beta f(t),$$

ou seja, f é linear. Além disso,

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)dt\right| \leq \int_a^b |x(t)|dt \leq \max_{t\in[a,b]}|x(t)|\int_a^b dt = (b-a)\|x\|,$$

isto é, $|f(x)| \leq C\|x\|$, onde $C = (b-a)$.

Portanto a integral definida define um funcional linear limitado. $\square$

Definição 4.23 *Seja V um espaço vetorial normado. Definimos o dual topológico de V como sendo o espaço normado*

$$V' = \{f \in V^*; f \text{ é limitado}\},$$

com norma definida por

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Teorema 4.24 *O espaço dual V' de um espaço normado V é um espaço de Banach.*

Demonstração: (OLIVEIRA, 2012) $\square$

O espaço bidual de V que denotamos por V^{**}, é o espaço que consiste de todos os funcionais lineares definidos em V^* , isto é,

$$V^{**} = \{f : V^* \to \mathbb{K}; f \text{ é linear}\}.$$

Vamos relacionar agora os espaços normados V e V^{**}. Consideramos a seguinte aplicação definida em V e assumindo valores em V^{**} :

$$\begin{array}{rclcrcl} F : V & \to & V^{**} & & & & \\ x & \to & F(x) = g_x & : & V^* & \to & \mathbb{K} \\ & & & & f & \to & g_x(f) = f(x) \end{array}$$

Mostremos que F está bem definida. De fato, dados $x_1, x_2 \in V$, tais que $x_1 = x_2$, temos que

$$f(x_1) = f(x_2),$$

para todo $f \in V^*$. Logo, $g_{x_1}(f) = g_{x_2}(f), \forall\, f \in V^*$, isto é, $g_{x_1} = g_{x_2}$ e portanto $F(x_1) = F(x_2)$. Além disso, para cada $x \in V$ fixado, $f_1, f_2 \in V^*$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ temos

$$g_x(\alpha f_1 + \beta f_2) = (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = \alpha g_x(f_1) + \beta g_x(f_2),$$

ou seja, g_x é linear. Portanto F está bem definida. Ainda, para $x_1, x_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ temos que

$$\begin{aligned} F(\alpha x_1 + \beta x_2)(f) &= g_{\alpha x_1 + \beta x_2}(f) \\ &= f(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} F(\alpha x_1 + \beta x_2)(f) &= \alpha g_{x_1}(f) + \beta g_{x_2}(f) \\ &= \alpha F(x_1)(f) + \beta F(x_2)(f) \\ &= (\alpha F(x_1) + \beta F(x_2))(f), \end{aligned}$$

para todo $f \in V^*$. Logo,

$$F(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha F(x_1) + \beta F(x_2),$$

o que mostra que F é uma transformação linear.

Mostraremos agora que F é injetora. De fato, se $F(x) = 0$, então $g_x(f) = f(x) = 0$, para todo $f \in V^*$. Note que, se $x \neq 0$, então existem escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, não todos nulos, digamos $\alpha_j \neq 0$, e vetores $u_1, \cdots, u_n \in B$, onde B é uma base de Hamel, tais que

$$x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Definindo o funcional f_j por $f_j(u_j) = 1$ e $f_j(v) = 0$, $\forall\, v \in B$ e $v \neq u_j$, temos que

$$0 = f_j(x) = f_j(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_j,$$

o que é uma contradição. Logo, devemos ter $x = 0$ e assim $\mathrm{Nuc}F = \{0\}$. Portanto F é injetora.

5 ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

Neste capítulo veremos os espaços de Hilbert, que formam a classe mais importante de espaços de Banach. Além da norma e da completude, estes espaços são munidos de um produto interno.

5.1 ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO E ESPAÇOS DE HILBERT

Definição 5.1 *Seja H um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ é um produto interno se para todos $x,y,z \in H$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ valem as seguintes condições:*

(P1) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$;

(P2) $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$;

(P3) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$;

(P4) $\langle x,x\rangle \geq 0$ *e* $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

Dizemos que $H = (H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um espaço com produto interno.

Observe que se o corpo de escalares do espaço vetorial H for o corpo dos números reais $\mathbb{R}$, então (P3) pode ser escrita como

$$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle,$$

para todo $x,y \in H$. Neste caso dizemos que o produto interno é simétrico.

Observação 5.2 *Para $x,y,z \in H$ e $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, (P1), (P2) e (P3) implicam que:*

(a) $\langle \alpha x + \beta y,z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$. *De fato, de (P1) e (P2), temos*

$$\langle \alpha x + \beta y,z\rangle = \langle \alpha x,z\rangle + \langle \beta y,z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle.$$

(b) $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle$. *De fato, utilizando (P2) e (P3), obtemos*

$$\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \overline{\alpha\langle y,x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle.$$

(c) $\langle x, \alpha y+\beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle + \overline{\beta}\langle x,z\rangle$. *De fato, por (P1), (P2) e (P3), temos*

$$\langle x, \alpha y+\beta z\rangle = \overline{\langle \alpha y+\beta z, x\rangle} = \overline{\alpha\langle y,x\rangle} + \overline{\beta\langle z,x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle + \overline{\beta}\langle x,z\rangle.$$

Proposição 5.3 *Seja H um espaço com produto interno. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Para todo $x,y \in H$,

$$|\langle x,y\rangle| \leq \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y,y\rangle^{\frac{1}{2}} = \|x\|\|y\|. \qquad (Desigualdade\, de\, Cauchy-Schwarz) \tag{31}$$

(ii) A aplicação $x \mapsto \|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ define uma norma em H, que será denominada norma induzida pelo produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(iii) A aplicação $(x,y) \mapsto d(x,y) = \langle x-y, x-y\rangle^{\frac{1}{2}} = \|x-y\|$ define uma métrica em H, que será denominada métrica induzida pelo produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(iv) A norma induzida pelo produto interno, $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{\frac{1}{2}}$, satisfaz:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|. \qquad (Desigualdade\ Triangular)$$

Demonstração: (i) Primeiro observemos que para todo $x,y \in H$, o número complexo, $\langle x,y\rangle$ pode ser escrito sob a forma

$$\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle|e^{i\theta}$$

onde $\theta = arg\langle x,y\rangle$. Além disso,

$$\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle} = \overline{|\langle x,y\rangle|e^{-i\theta}} = |\langle x,y\rangle|e^{-i\theta}.$$

Assim, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$,e $x,y \in H$, temos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle \lambda x + e^{i\theta}y, \lambda x + e^{i\theta}y\rangle \\
&= \lambda\overline{\lambda}\langle x,x\rangle + \lambda e^{-i\theta}\langle x,y\rangle + \overline{\lambda}e^{i\theta}\langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \lambda\overline{\lambda}\langle x,x\rangle + \lambda e^{-i\theta}|\langle x,y\rangle|e^{i\theta} + \overline{\lambda}e^{i\theta}|\langle x,y\rangle|e^{-i\theta} + \langle y,y\rangle \\
&= \lambda\overline{\lambda}\langle x,x\rangle + (\lambda+\overline{\lambda})|\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle.
\end{aligned}$$

Considerando $\lambda \in \mathbb{R}$ e denotando $a = \langle x,x\rangle, b = 2|\langle x,y\rangle|$ e $c = \langle y,y\rangle$, obtemos que

$$0 \leq \langle \lambda x + e^{i\theta}y, \lambda x + e^{i\theta}y\rangle = a\lambda^2 + b\lambda + c =: p(\lambda).$$

Note que $p(\lambda)$ é uma parábola em λ e $p(\lambda) \geq 0$. Logo, o descriminante $\triangle$ satisfaz $\triangle \leq 0$. Daí

$$4|\langle x,y\rangle|^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0$$

isto é,

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle.$$

Extraindo a raiz em ambos os lados da desigualdade acima, obtemos

$$|\langle x,y\rangle| \leq \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y,y\rangle^{\frac{1}{2}}, \forall x,y \in H.$$

(ii) Note que $\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$. Como $\langle x,x\rangle \geq 0$, por (P4), temos que $\|x\| \geq 0$. Além disso, ainda por (P4), $\langle x,x\rangle = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Logo, $\|x\| = 0$ se, e somente se $x = 0$. Agora, dados $x \in H$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, então

$$\|\alpha x\| = \langle \alpha x, \alpha x\rangle^{\frac{1}{2}} = (\alpha.\overline{\alpha}\langle x,x\rangle)^{\frac{1}{2}} = (|\alpha|^2\langle x,x\rangle)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\|x\|.$$

Finalmente, dados $x,y \in H$, podemos utilizar Cauchy-Schwarz e obter

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2re(\langle x,y\rangle) + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Concluímos dessa maneira que $\|\cdot\| = \langle \cdot,\cdot\rangle^{\frac{1}{2}}$ é uma norma em H.

(iii) Segue da Proposição 2.50.

(iv) Foi demonstrado em (ii).

$\square$

Observação 5.4 *Seja H um espaço com produto interno. Se $\langle x,y\rangle = 0$ para $y \in H$, então $x = 0$.*

De fato, se $\langle x,y\rangle = 0$, para todo $y \in H$, em particular para $y = x$, temos$\langle y,y\rangle = 0$ ou seja, $y = 0$.

Dado um espaço normado é natural perguntarmos se ele possui um produto interno que induz tal norma ou não. O próximo teorema fornece uma resposta para essa pergunta.

Teorema 5.5 *(M. Fréchet, J. Von Neumann e P. Jordan). Seja $(H, \|\cdot\|)$ um espaço normado. A norma $\|\cdot\|$ é induzida por um produto interno em H se, e somente se, vale a identidade do paralelogramo*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

para $x, y \in H$.

Demonstração: Ver (PRIMO, 2008) e (HELEMSKII, 2006). □

Exemplo 5.6 *(Espaço $C((a,b),\mathbb{R})$). O espaço $C((a,b),\mathbb{R})$ das funções reais contínuas definidas no intervalo fechado $J = [a,b]$ com a norma definida por*

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)|,$$

é um espaço normado completo, mas a norma definida acima não pode ser obtida de um produto interno, pois esta norma não satisfaz a identidade do paralelogramo. De fato, se tomarmos

$$x(t) = 1 \;\; e \;\; y(t) = \frac{(t-a)}{(b-a)},$$

temos que $\|x\| = 1, \|y\| = 1$,

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{t-a}{b-a} \;\; e \;\; x(t) - y(t) = 1 - \frac{t-a}{b-a}.$$

Portanto, $\|x+y\| = 2, \|x-y\| = 1$ e $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 5$. Contudo,

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4.$$

Assim, o Teorema 5.5 implica que a norma definida acima não provém de um produto interno.

Definição 5.7 *Um espaço com produto interno H é um espaço de Hilbert se ele for um espaço de Banach relativamente à norma induzida pelo produto interno.*

Exemplo 5.8 *(Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$). O espaço $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Hilbert com produto interno definido por*

$$\langle x,y\rangle = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_n\eta_n, \tag{32}$$

onde $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ *e* $y = (\eta_1, ..., \eta_n)$.

Exemplo 5.9 *Considere o espaço vetorial de todas as funções contínuas de valores reais em* $[a,b]$, *isto é,*

$$H = \{x : [a,b] \to \mathbb{R}; \int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty\}.$$

Em H podemos definir norma

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Esta norma, por sua vez, pode ser obtida do produto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt.$$

O espaço vetorial H com o produto interno e a respectiva norma dada acima é um espaços de Hilbert.

Exemplo 5.10 *(Espaço Unitário* $\mathbb{C}^n$*). O espaço vetorial* $\mathbb{C}^n$ *é um espaço de Hilbert com produto interno dado por*

$$\langle x, y\rangle = \xi_1\eta_1 + ... + \xi_n\eta_n \tag{33}$$

onde $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ *e* $y = (\eta_1, ..., \eta_n)$ *e norma induzida pelo produto interno dada por*

$$\|x\| = (\xi_1\overline{\xi_1} + \cdots + \xi_n\overline{\xi_n})^{\frac{1}{2}} = (|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemplo 5.11 *(Espaço* l^2 *das Sequências de Hilbert). O espaço vetorial* l^2 *definido por*

$$l^2 = \{x = (x_1, x_2, \cdots); x_i \in \mathbb{C} \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}.$$

é um espaço de Hilbert com produto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j\overline{\eta_j}.$$

A convergência da série acima segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz e do fato que $x, y \in l^2$. *A norma induzida pelo produto interno acima é dada então por*

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

5.2 PROPRIEDADES DE ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

Nesta seção mostraremos algumas propriedades sobre espaços com produto interno.

Proposição 5.12 *Seja H um espaço vetorial com produto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *e* $\|\cdot\|$ *a norma induzida por este produto interno. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Se H é um espaço vetorial real, então

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2); \tag{34}$$

(ii) Se H é um espaço vetorial complexo, então

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(\langle x,y\rangle) &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \\ \mathrm{Im}\,(\langle x,y\rangle) &= \frac{1}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2) \end{aligned} \tag{35}$$

onde Re $(\langle x,y\rangle)$ é a parte real de $\langle x,y\rangle$ e Im $(\langle x,y\rangle)$ é a parte imaginária de $\langle x,y\rangle$.

Demonstração: Se H é um espaço vetorial real, então para todos $x,y\in H$, temos

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle - \langle x-y,x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle - \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle - \langle y,y\rangle \\ &= 4\langle x,y\rangle, \end{aligned}$$

provando (34). Se H for um espaço vetorial complexo, então para todos $x,y\in H$, temos

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= 2\langle x,y\rangle + 2\langle y,x\rangle = 2(\langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle}) \\ &= 2(2Re(\langle x,y\rangle)) = 4Re(\langle x,y\rangle), \end{aligned}$$

provando a primeira igualdade em (35). Também, para todos $x,y\in H$, temos que

$$\begin{aligned} \|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 &= \langle x+iy,x+iy\rangle - \langle x-iy,x-iy\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,iy\rangle + \langle iy,x\rangle + \langle iy,iy\rangle - \langle x,x\rangle + \langle x,iy\rangle + \langle iy,x\rangle - \langle iy,iy\rangle \\ &= -i\langle x,y\rangle + i\langle y,x\rangle - i\langle x,y\rangle + i\langle y,x\rangle \\ &= 2i(-\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle) \\ &= 2i(-\langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle}) \\ &= 2i(-2i\mathrm{Im}(\langle x,y\rangle)) \\ &= 4\mathrm{Im}(\langle x,y\rangle), \end{aligned}$$

provando a última igualdade em (35). $\square$

O próximo lema mostra a continuidade do produto interno.

Lema 5.13 *Sejam H um espaço com produto interno, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências em H tais que*

$$x_n \to x \in H \ \ e \ \ y_n \to y \in H,$$

quando $n \to \infty$. Então $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$, quando $n \to \infty$.

Demonstração: Como sequências convergentes são limitadas, a desigualdade triangular para números reais e a desigualdade de Cauchy-Schwarz implicam que

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leq \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \to 0, \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$, pois $y_n \to y$ e $x_n \to x$, quando $n \to \infty$. Portanto, $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$, quando $n \to \infty$. $\square$

Definição 5.14 *Seja H um espaço munido de um produto interno. Dois elementos x, y em H são ditos ortogonais e denotamos por $x \perp y$, quando $\langle x, y\rangle = 0$.*

Observação 5.15 *Se E, F são subconjuntos de H, então $E \perp F$ indica que $x \perp y$ sempre que $x \in E$ e $y \in F$. Além disso, se E e F são subespaços, dizemos que eles são ortogonais.*

Definição 5.16 *Definimos $E^{\perp}$ como sendo o conjunto de todos os elementos de H ortogonais a E, ou seja,*

$$E^{\perp} = \{x \in H : \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in E\}.$$

Proposição 5.17 *Seja H um espaço vetorial munido com um produto interno. Então,*

(i) $x \perp y$ se, e somente se,

$$\|x + \alpha y\| \geqslant \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{36}$$

(ii) Dado um subconjunto E de H, então $E^{\perp}$ é um subespaço vetorial fechado. Além disso, se E também é subespaço vetorial, então $E \cap E^{\perp} = \{0\}$.

Demonstração: Ver Lemas 3.20 e 3.30 em (RYNNE; YOUNGSON, 2000). $\square$

Definição 5.18 *Um espaço vetorial H é dito ser soma direta de dois de seus subespaços H_1 e H_2, o qual denotamos por*

$$H = H_1 \oplus H_2,$$

se todo $x \in H$ possui uma representação única da forma $x = x_1 + x_2$, com $x_1 \in H_1$ e $x_2 \in H_2$.

Teorema 5.19 *Seja E um subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert H. Então*

$$H = E \oplus E^{\perp}.$$

O subespaço $E^{\perp}$ é chamado de complemento ortogonal do subespaço E em H.

Demonstração: Dado $x \in H$, definamos $\delta = \inf\limits_{y \in E} \|x - y\|$ e consideremos $(w_n) \subset E$, tal que $\|x - w_n\| \to \delta$. Mostraremos que (w_n) é de Cauchy. Usando a identidade do paralelogramo, temos

$$\|(w_n - x) + (w_m - x)\|^2 + \|(w_n - x) - (w_m - x)\|^2 = 2\|w_n - x\|^2 + 2\|w_m - x\|^2$$

ou seja,

$$\|w_n + w_m - 2x\|^2 + \|w_n - w_m\|^2 = 2\|w_n - x\|^2 + 2\|w_m - x\|^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|w_n - w_m\|^2 &= 2\|w_n - x\|^2 + 2\|w_m - x\|^2 - \|w_n + w_m - 2x\|^2 \\ &= 2\|w_n - x\|^2 + 2\|w_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{w_n + w_m}{2} - x\right\|^2 \end{aligned} \tag{37}$$

Por outro lado, como E é subespaço de H, então $\frac{w_n + w_m}{2} \in E$. Daí para quaisquer naturais n, m, obtemos

$$\delta \leqslant \left\|\frac{w_n + w_m}{2} - x\right\|,$$

ou seja,

$$-4\delta^2 \geqslant -4\left\|\frac{w_n + w_m}{2} - x\right\|^2,$$

Assim, (37) se torna

$$\|w_n - w_m\|^2 \leqslant 2\|w_n - x\|^2 + 2\|w_m - x\|^2 - 4\delta^2. \tag{38}$$

Como $\|x - w_n\| \to \delta$, temos de (38) que $\|w_n - w_m\| \to 0$, quando $m, n \to \infty$. Logo (w_n)

é uma sequência de Cauchy e portanto converge para um elemento $w \in H$. Uma vez que E é fechado, segue que $w \in E$. Mostraremos agora que $x = w + (x - w)$, com $w \in E$ e $(x - w) \in E^{\perp}$.

Pela continuidade da norma temos $\|x - w_n\| \to \|x - w\|$. Ademais, como $\|x - w_n\| \to \delta$, temos da unicidade do limite que $\delta = \|x - w\|$.

Além disso, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $y \in E$, temos que $(\alpha y - w) \in E$. Logo

$$\|(x - w) + \alpha y\| = \|x + (\alpha y - w)\| \geqslant \delta = \|x - w\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, y \in E.$$

Dessa forma, o item (i) da Proposição (5.17), temos que $(x - w) \perp y$, para todo $y \in E$, ou seja, $x - w \in E^{\perp}$. Portanto, obtemos a seguinte decomposição

$$x = w + (x - w), w \in E \text{ e } (x - w) \in E^{\perp}.$$

Mostraremos agora que essa decomposição é única. De fato supondo que existe outra decomposição $x = u + v$, com $u \in E$ e $v \in E^{\perp}$, temos

$$x = w + (x - w) = u + v,$$

ou seja,

$$\underbrace{u - w}_{\in E} = \underbrace{(x - w) - v}_{\in E^{\perp}}.$$

Uma vez que $u - w \in E$ e $(x - w) - v \in E^{\perp}$, encontramos que $u - w \in E \cap E^{\perp}$ e $(x - w) - v \in E \cap E^{\perp}$. Além disso, a Proposição 5.17 item (ii), garante que $E \cap E^{\perp} = \{0\}$. Portanto,

$$u = w \text{ e } v = (u - w).$$

Finalmente concluímos que existe uma única decomposição para cada elemento $x \in H$, como queríamos mostrar. $\square$

Observação 5.20 *Um subespaço Y de um espaço com produto interno H é um subespaço vetorial de H munido do produto interno dado pela restrição do produto interno em H para Y. Analogamente, um subespaço Y de um espaço de Hilbert H é um subespaço do espaço com produto interno H, porém não necessariamente Y é Hilbert como veremos no próximo teorema.*

6 O TEOREMA DE LAX-MILGRAM

Apresentamos a seguir a definição de forma bilinear, forma bilinear contínua e forma bilinear coerciva. Utilizaremos estes conceitos para apresentarmos o Teorema de Lax-Milgram, bem como sua demonstração.

Definição 6.1 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma forma bilinear sobre U e V é uma função $a : U \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz, para todos $u, v \in U$ e $w, z \in V$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, as condições:*

i. $a(u+v,w) = a(u,w) + a(v,w)$;

ii. $a(\lambda u,w) = \lambda a(u,w)$;

iii. $a(u,z+w) = a(u,z) + a(u,w)$;

iv. $a(u,\lambda w) = \lambda a(u,w)$.

Observação 6.2 *Uma forma bilinear $a : U \times V \to \mathbb{R}$ é uma transformação linear em cada entrada, isto é,*

$$a(\alpha u + \beta v, z) = \alpha a(u,z) + \beta a(v,z),$$

$$a(u, \alpha w + \beta z) = \alpha a(u,w) + \beta a(u,z),$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v \in U$ e $w, z \in V$.

Definição 6.3 *Uma forma bilinear $a : U \times V \to \mathbb{R}$ é limitada se existe $C_a > 0$ tal que*

$$|a(u,v)| \leqslant C_a \|u\|_U \|v\|_V, \forall u \in U \text{ e } \forall v \in V;$$

Aqui C_a denota que a constante não depende das variáveis u e v, apenas da forma bilinear a. Além disso a norma de $a(u,v)$ é definida por

$$\|a\| = \sup_{\substack{u \in U - \{0\} \\ v \in V - \{0\}}} \frac{|a(u,v)|}{\|u\|\|v\|} = \sup_{\substack{\|u\|=1 \\ \|v\|=1}} |a(u,v)|. \tag{39}$$

Definição 6.4 *Uma forma bilinear $a : U \times V \to \mathbb{R}$ é dita coerciva se existe $\alpha > 0$ tal que*

$$a(u,v) \geqslant \alpha\|u\|\|v\|, \forall u \in U \text{ e } v \in V.$$

Analogamente as transformações lineares, o seguinte resultado mostra a equivalência entre limitação e continuidade de uma forma bilinear.

Proposição 6.5 *Uma forma bilinear $a : U \times V \to \mathbb{R}$ é limitada se, e somente se, $a : U \times V \to \mathbb{R}$ é contínua.*

Demonstração: A demonstração é baseada nos mesmos argumentos da demonstração do Teorema 4.14. Primeiro mostraremos que a limitação implica na continuidade. Supondo a é linear e limitada, ela é linear e limitada em cada uma de suas entradas. Assim, pelo Teorema 4.14 $a(u,v)$ é contínua em cada uma de suas entradas.

Mostraremos agora que se $a(u,v)$ é contínua em cada uma de suas variáveis, então $a(u,v)$ é contínua. Para isso considere a norma em $U \times V$, dada por

$$\|(u,v)\|_{U\times V} := \|u\|_U + \|v\|_V$$

Assim, devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $(u,v) \in U \times V$ e $\|(u,v) - (u_0,v_0)\|_{U\times V} < \delta$ implica que

$$\|a(u,v) - a(u_0,v_0)\|_{U\times V} < \varepsilon.$$

De fato, fixando um $v \in V$ arbitrário, como $a(\cdot,v) : X \to \mathbb{R}$ é contínua, dado um $\varepsilon > 0, \exists\, \delta_1 > 0$ tal que $u \in U$ e $\|u - u_0\|_U < \delta_1$ implicam que

$$|a(u,v) - a(u_0,v)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da mesma maneira, a continuidade de $a(u,\cdot)$ nos fornece que dado um $\varepsilon > 0, \exists\, \delta_2 > 0$ tal que $v \in V$ e $\|v - v_0\|_V < \delta_2$ implicam que

$$|a(u,v) - a(u,v_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considerando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que $\|(u,v) - (u_0,v_0)\| < \delta$ implica que $\|u - u_0\| < \delta \leq \delta_1$ e $\|v - v_0\| < \delta \leq \delta_2$. Daí,

$$\begin{aligned}
|a(u,v) - a(u_0,v_0)| &= |a(u,v) + a(u_0,v) - a(u_0,v) - a(u_0,v_0)| \\
&\leqslant |a(u,v) - a(u_0,v)| + |a(u_0,v) - a(u_0,v_0)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ou seja, $a(u,v)$ é contínua.

Reciprocamente, a continuidade de $a(u,v)$ implica que $a(u,v)$ é contínua em todo $(u_0,v_0) \in U \times V$. Assim, dado $\varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que

$$\|u-u_0\|_U + \|v-v_0\|_V < \delta,$$

então

$$|a(u,v) - a(u_0,v_0)| < \varepsilon.$$

Agora, dado $(u,v) \in U \times V$ não-nulos quaisquer, consideremos $(x_1,x_2) = \left(u_0 + \frac{\delta}{4\|u\|}u, v_0 + \frac{\delta}{4\|v\|}v\right)$. Logo

$$\begin{aligned}
\|(x_1,x_2) - (u_0,v_0)\|_{U\times V} &= \|x_1 - u_0\|_U + \|x_2 - v_0\|_V \\
&= \left\|\frac{\delta}{4\|u\|}u\right\|_U + \left\|\frac{\delta}{4\|v\|}v\right\|_V \\
&= \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2} < \delta
\end{aligned}$$

Assim, pela continuidade em (u_0,v_0), temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon > |a(x_1,x_2) - a(u_0,v_0)| &= |a(x_1,x_2) + a(u_0,x_2) - a(u_0,x_2) - a(u_0,v_0)| \\
&= |a(x_1-u_0,x_2) + a(u_0,x_2-v_0)| \\
&= \left|a\left(\frac{\delta}{4\|u\|}u, x_2\right) + a\left(u_0, \frac{\delta}{4\|v\|}v\right)\right| \\
&= \left|a\left(\frac{\delta}{4\|u\|}u, v_0 + \frac{\delta}{4\|v\|}v\right) + a\left(u_0, \frac{\delta}{4\|v\|}v\right)\right| \\
&= \left|a\left(\frac{\delta}{4\|u\|}u, v_0\right) + a\left(\frac{\delta}{4\|u\|}u, \frac{\delta}{4\|v\|}v\right) + a\left(u_0, \frac{\delta}{4\|v\|}v\right)\right|,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\varepsilon > \left|\frac{\delta}{4\|u\|}a(u,v_0) + \frac{\delta^2}{16\|u\|\|v\|}a(u,v) + \frac{\delta}{4\|v\|}(u_0,v)\right|. \tag{40}$$

Similarmente, se considerarmos $(y_1,y_2) = \left(u_0 + \frac{\delta}{4\|u\|}u, v_0\right)$, vemos que

$$\|(y_1,y_2) - (u_0,v_0)\|_{U\times V} = \|y_1 - u_0\| + \|y_2 - v_0\| = \left\|\frac{\delta}{4\|u\|}u\right\| + 0 = \frac{\delta}{4} < \delta.$$

Logo, a continuidade em (u_0, v_0) implica que

$$\begin{aligned} \varepsilon &> |a(y_1, y_2) - a(u_0, v_0)| \\ &= |a(y_1, v_0) - a(u_0, v_0)| \\ &= |a(y_1 - u_0, v_0)| \\ &= \left| a\left(\frac{\delta}{4\|u\|} u, v_0 \right) \right| \\ &= \frac{\delta}{4\|u\|} |a(u, v_0)|, \end{aligned}$$

isto é,

$$|a(u, v_0)| \leqslant \frac{4\varepsilon}{\delta} \|u\|. \tag{41}$$

Com o mesmo argumento, porém considerando $(z_1, z_2) = \left(u_0, v_0 + \frac{\delta}{4\|v\|} v \right)$, obtemos

$$|a(u_0, v)| \leqslant \frac{4\varepsilon}{\delta} \|v\|, \tag{42}$$

Finalmente, por (40), (41) e (42), encontramos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\delta^2}{16\|u\|\|v\|} a(u, v) \right| &\leqslant \left| \frac{\delta^2}{16\|u\|\|v\|} a(u, v) + \frac{\delta}{4\|u\|} a(u, v_0) + \frac{\delta}{4\|v\|} a(u_0, v) \right| \\ &\quad + \left| \frac{\delta}{4\|u\|} a(u, v_0) \right| + \left| \frac{\delta}{4\|v\|} a(u_0, v) \right| \\ &< \varepsilon + \frac{\delta}{4\|u\|} |a(u, v_0)| + \frac{\delta}{4\|v\|} |a(u_0, v)| \\ &\leqslant \varepsilon + \frac{\delta}{4\|u\|} \frac{4\varepsilon}{\delta} \|u\| + \frac{\delta}{4\|v\|} \frac{4\varepsilon}{\delta} \|v\| \\ &= 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Em outras palavras,

$$|a(u, v)| \leqslant \frac{3\varepsilon}{\delta^2} 16\|u\|\|v\|.$$

□

6.1 O TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO DE RIESZ

Veremos agora o Teorema de Representação de Riesz, muito útil na Análise Funcional e particularmente na demonstração do Teorema de Lax-Milgram.

Teorema 6.6 (Representação de Riesz) *Sejam H um espaço de Hilbert, H' o dual topológico de H e μ a aplicação definida por*

$$\begin{aligned} \mu \ : \ & H \to H' \\ & x \mapsto f_x, \end{aligned}$$

onde f_x é o funcional dado por $f_x(y) = \langle x, y \rangle, \forall y \in H$. Então, para cada $f \in H'$, existe um único $x \in H$ tal que $f(y) = f_x(y)$. Além disso, μ é uma isometria linear, ou seja, uma transformação linear bijetora tal que $\|x\| = \|\mu(x)\| = \|f_x\|$.

Demonstração: Pela definição de produto interno e pelo item (i) da Proposição 5.3, temos que f_x é um funcional linear que satisfaz

$$|f_x(y)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

ou seja, f_x é um funcional linear limitado e consequentemente, contínuo.

Mostremos agora que dado $f \in H'$, existe $x \in H$ tal que $f_x = f$. De fato, se $f = 0$, isto é, se f for o funcional nulo, basta considerarmos $x = 0$. Suponha agora que $f \neq 0$. Como f contínuo, pelo Corolário 4.15, o $\text{Nuc}(f)$ é um subespaço vetorial fechado. Além disso, $\text{Nuc}(f)$ é um subespaço próprio já que $f \neq 0$. Utilizando agora o Teorema 5.19, podemos escrever o espaço H como sendo a soma direta

$$H = \text{Nuc}(f) \oplus \text{Nuc}(f)^{\perp}.$$

Por outro lado, considerando $w \in \text{Nuc}(f)^{\perp}$, com $\|w\| = 1$, e usando a linearidade de f, temos

$$f(f(y)w - f(w)y) = f(y)f(w) - f(w)f(y) = 0, \forall y \in H,$$

ou seja,

$$f(y)w - f(w)y \in \text{Nuc}(f).$$

Como $w \in \text{Nuc}(f)^{\perp}$ e $f(y)w - f(w)y \in \text{Nuc}(f)$, temos que $\langle w, f(y)w - f(w)y \rangle = 0$, ou seja,

$$\langle w, f(y)w \rangle - \langle w, f(w)y \rangle = 0.$$

Daí, segue que

$$f(y)\langle w, w \rangle = f(w)\langle w, y \rangle,$$

isto é,

$$f(y)\|w\|^2 = \langle f(w)w, y \rangle.$$

Como $\|w\| = 1$, temos que

$$f(y) = \langle f(w)w, y\rangle, \forall y \in H. \tag{43}$$

Portanto, escolhendo $x = f(w)w$, obtemos de (43) que $f = f_x$, como queríamos.

Mostremos agora que x é único. De fato, supondo que x_1 e x_2 são tais que $f(y) = f_{x_1} = f_{x_2}$, temos que

$$\langle x_1, y\rangle = \langle x_2, y\rangle, \ \forall y \in H,$$

ou seja,

$$\langle x_1 - x_2, y\rangle = 0, \ \forall y \in H.$$

Logo, pela Observação 5.4, concluímos que $x_1 - x_2 = 0$, isto é, $x_1 = x_2$.

Mostremos agora que μ é uma isometria linear. Note que

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = f_x(x) \leqslant |f_x(x)| \leqslant \|f_x\|\|x\|.$$

Logo,

$$\|x\| \leqslant \|f_x\|. \tag{44}$$

Por outro lado, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\|f_x\| = \sup_{y\neq 0}\frac{|f_x(y)|}{\|y\|} = \sup_{y\neq 0}\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|} \leqslant \sup_{y\neq 0}\frac{\|x\|\|y\|}{\|y\|} = \sup_{y\neq 0}\|x\| = \|x\|. \tag{45}$$

De (44) e (45), obtemos que $\|f_x\| = \|x\|$, isto é, $\|\mu(x)\| = \|x\|$. Para verificar a linearidade de μ, considere $x_1, x_2 \in H$ e $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$. Observe que

$$\begin{aligned}
f_{\alpha x_1 + \lambda x_2}(y) &= \langle \alpha x_1 + \lambda x_2, y\rangle \\
&= \langle \alpha x_1, y\rangle + \langle \lambda x_2, y\rangle \\
&= \alpha\langle x_1, y\rangle + \lambda\langle x_2, y\rangle \\
&= \alpha f_{x_1}(y) + \lambda f_{x_2}(y), \forall y \in H.
\end{aligned}$$

Então,

$$f_{\alpha x_1 + \lambda x_2}(y) = \alpha f_{x_1}(y) + \lambda f_{x_2}(y),$$

ou seja,

$$\mu(\alpha x_1 + \lambda x_2) = \alpha\mu(x_1) + \lambda\mu(x_2).$$

□

Proposição 6.7 *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert. Se $a : H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear limitada, então existe um operador $T \in B(H_1, H_2)$ satisfazendo*

$$a(x,y) = \langle T(x), y\rangle, \forall x \in H_1, \forall y \in H_2.$$

Além disso, $\|T\| = \|a\|$. Aqui $B(H_1, H_2)$ denota o espaço das transformações lineares limitadas de H_1 em H_2.

Demonstração: Para cada x em H_1, considere o funcional $F_x : H_2 \to \mathbb{R}$, dado por $F_x(y) = a(x,y)$. Por definição, F_x é linear. Além disso, por (39),

$$\frac{|a(x,y)|}{\|x\|\|y\|} \leqslant \|a\|, \ \forall x \in H_1 - \{0\}, \forall y \in H_2 - \{0\}.$$

Logo

$$|F_x(y)| = |a(x,y)| \leqslant \|a\|\|x\|\|y\|.$$

Desse modo F_x é contínuo, e portanto $F_x \in H_2'$. O Teorema da Representação de Riesz garante a existência de um único $w \in H_2$ tal que

$$F_x(y) = \langle w, y\rangle, \forall y \in H_2.$$

Daí, definindo $T : H_1 \to H_2$ por $T(x) = w$, temos

$$a(x,y) = F_x(y) = \langle w, y\rangle = \langle T(x), y\rangle, \ \forall x \in H_1, \forall y \in H_2 - \{0\}.$$

Vejamos agora que $T \in B(H_1, H_2)$. De fato, considerando $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x, z \in H_1$, temos que para todo $y \in H_2$,

$$\begin{aligned}
\langle T(\alpha x + \beta z), y\rangle &= a(\alpha x + \beta z, y) \\
&= \alpha a(x,y) + \beta a(z,y) \\
&= \alpha \langle T(x), y\rangle + \beta \langle T(z), y\rangle \\
&= \langle \alpha T(x), y\rangle + \langle \beta T(z), y\rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle T(\alpha x + \beta z) - \alpha T(x) - \beta T(z), y\rangle = 0,$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, z \in H_1$ e para todo $y \in H_2$. Assim, pela Observação 5.4 temos que

$$T(\alpha x + \beta z) = \alpha T(x) + \beta T(z),$$

isto é, T é linear. Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\sup_{x\neq 0}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} &= \sup_{x\notin \text{Nuc}T}\frac{\|T(x)\|^2}{\|x\|\|T(x)\|} = \sup_{x\notin \text{Nuc}T}\frac{\langle T(x),T(x)\rangle}{\|x\|\|T(x)\|}\\
&= \sup_{x\notin \text{Nuc}T}\frac{a(x,T(x))}{\|x\|\|T(x)\|} \leq \sup_{x\notin \text{Nuc}T}\frac{\|a\|\|x\|\|T(x)\|}{\|x\|\|T(x)\|}\leq \|a\|.
\end{aligned}$$

Desse modo, T é um operador linear limitado e $\|T\| \leq \|a\|$.

Por outro lado, temos que

$$\|a\| = \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}}\frac{|a(x,y)|}{\|x\|\|y\|} = \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}}\frac{|\langle T(x),y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \leqslant \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}}\frac{\|T(x)\|\|y\|}{\|x\|\|y\|} = \|T\|.$$

Dessa maneira $\|T\| \leqslant \|a\|$ e $\|a\| \leqslant \|T\|$, ou seja $\|T\| = \|a\|$. Por fim, para unicidade de T suponha que exista outro operador $S \in B(H_1,H_2)$, satisfazendo

$$a(x,y) = \langle S(x),y\rangle,\ \forall x\in H_1, y\in H_2.$$

Assim, $\langle S(x),y\rangle = \langle T(x),y\rangle$, ou seja, $\langle S(x)-T(x),y\rangle = 0,\ \forall x\in H_1, \forall y\in H_2$. Logo,

$$S(x)-T(x) = 0, \forall x, \text{ e daí } S = T.$$

□

6.2 O TEOREMA DE LAX-MILGRAM

Veremos agora o principal teorema de nosso trabalho.

Teorema 6.8 (Lax-Milgram) *Sejam H um espaço de Hilbert e $a : H\times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear, limitada e coerciva. Então, para cada $f \in H'$, existe um único $u \in H$ tal que*

$$f(v) = a(u,v)\ \forall v\in H. \tag{46}$$

Demonstração: Sendo a uma forma bilinear limitada, a Proposição 6.7 garante a existência de um único operador $T \in B(H,H)$ satisfazendo

$$a(x,v) = \langle T(x),v\rangle\ \forall x,v\in H. \tag{47}$$

Afirmamos agora que T admite um inverso $T^{-1} : H \to H$, que também é um operador linear contínuo. De fato, pela coercividade de $a(u,v)$, temos que

$$c\|x\|^2 \leqslant |a(x,x)| = |\langle T(x),x\rangle| \leqslant \|T(x)\|\|x\|.$$

Daí, temos a seguinte desigualdade

$$c\|x\| \leqslant \|T(x)\|, \forall x \in H. \tag{48}$$

Se tivermos $T(x) = 0$, então $0 = \|T(x)\| \geqslant c\|x\|$, isto é, $x = 0$. Neste caso $\text{Nuc}T = \{0\}$ e o Teorema 4.7 implica que T é invertível e sua inversa T^{-1} é um operador linear. Considerando $x = T^{-1}(w)$, na desigualdade (48), temos que

$$c\|T^{-1}(w)\| \leqslant \|T(T^{-1}(w))\| = \|w\|, \ \forall\, w \in R(T),$$

ou seja,

$$\|T^{-1}(w)\| \leqslant \frac{1}{c}\|w\|, \ \forall\, w \in R(T).$$

Dessa forma concluímos que T^{-1} é limitado. Mostraremos agora que a imagem $R(T)$ é fechada e que $R(T) = H$, isto é, T é um operador sobrejetor. Seja $w \in \overline{R(T)}$. Neste caso, existe uma sequência $T(x_n) \subset R(T)$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = w. \tag{49}$$

Sendo $T(x_n)$ uma sequência convergente, temos que ela é de Cauchy. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0, tal que

$$\|T(x_m) - T(x_n)\| < c\varepsilon, \forall m,n > n_0.$$

Utilizando (48), encontramos que

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \frac{1}{c}\|T(x_m - x_n)\| = \frac{1}{c}\|T(x_m) - T(x_n)\| < \frac{1}{c}c\varepsilon = \varepsilon, \forall m,n > n_0.$$

Logo, (x_n) é uma sequência de Cauchy e portanto converge, digamos, $\lim x_n = x$. Uma vez que T é contínuo, segue que

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x). \tag{50}$$

Utilizando (49) e (50) e a unicidade do limite, obtemos que $T(x) = w$, ou seja, $w \in R(T)$. Portanto $R(T)$ é fechada. Usando agora o fato de $R(T)$ ser um subespaço fechado do espaço de Hilbert H, o Teorema 5.19 garante que

$$H = R(T) \oplus R(T)^{\perp}.$$

Para mostrarmos que $H = R(T)$, é suficiente mostrarmos que $R(T)^{\perp} = \{0\}$. Com efeito, se

$v \in R(T)^{\perp}$, então

$$0 = |\langle T(v), v\rangle| = |a(v,v)| \geqslant c\|v\|^2,$$

isto é, $v = 0$. Concluímos dessa maneira que

$$H = R(T) \text{ e } D(T^{-1}) = H.$$

Por outro lado, utilizando o Teorema da Representação de Riesz, temos que para todo $f \in H'$, existe um único $x \in H$, tal que

$$f(v) = \langle x, v\rangle, \forall v \in H. \tag{51}$$

Ademais, de (47) obtemos

$$a(T^{-1}(x), v) = \langle T(T^{-1}(x)), v\rangle = \langle x, v\rangle, \; \forall\, x, v \in H. \tag{52}$$

Agrupando (51) e (52) encontramos

$$f(v) = a(T^{-1}(x), v), \forall v \in H.$$

Em outras palavras, para cada funcional linear contínuo $f : H \to \mathbb{K}$, existe um único $u \in H$, satisfazendo

$$f(v) = a(u,v) \;\; \forall v \in H,$$

onde escolhemos $u = T^{-1}(x)$. $\square$

6.3 APLICAÇÃO

Conforme já mencionamos, o Teorema de Lax-Milgran é de grande utilidade na teoria de equações diferenciais parciais. A grosso modo, ele se traduz num teorema de existência e unicidade para uma classe de equações diferenciais parciais, as chamadas equações elípticas lineares, ver (EVANS, 1997). A explanação dessa aplicação em detalhes e com o devido rigor matemático demanda um conhecimento prévio da teoria de equações diferenciais parciais, teoria da medida e integração e espaços de Sobolev. Como estes temas fogem do escopo deste texto, apresentaremos uma ideia superficial dessa aplicação, omitindo os detalhes e visando mais a motivação do tema. Ao leitor interessado em aprofundar o assunto, recomendamos o livro (EVANS, 1997).

No que segue consideraremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e conexo, $L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert formado por funções quadrado integráveis em Ω, munido da norma

$$|f|_2 = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

e produto interno

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Consideraremos também o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, que a grosso modo pode ser visto como o espaço das funções u definidas em Ω, tais que u e $|\nabla u|$ são quadrado integráveis e os pontos em Ω onde estas funções não se anulam pertencem a um conjunto compacto contido em Ω. Neste espaço podemos considerar a norma

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

e o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx.$$

Considerando o exposto acima, podemos definir a seguinte noção de solução para a equação diferencial parcial $-\Delta u + u = f$. Aqui, Δu em $\mathbb{R}^n$ é $\Delta u = u_{xx}$, quando $n = 1$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, quando $n = 2$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, quando $n = 3$, etc...

Definição 6.9 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto conexo. Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma solução para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, \ em \ \Omega \\ u = 0, \ em \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{53}$$

onde $f \in L^2(\Omega)$, se $u \in H_0^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{54}$$

O lado esquerdo da equação integral (54) *é obtido após multiplicar a EDP em* (53) *por v e integrar por partes. Essa noção de solução é conhecida como* ***Solução Fraca****.*

Finalmente, definindo as aplicações: $b : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, por

$$b(u, v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx, \tag{55}$$

e $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, por

$$F(v) = \int_\Omega fv \, dx$$

é possível mostrar que b é uma forma bilinear, limitada e coerciva e F é um funcional linear contínuo, isto é, $F \in [H_0^1(\Omega)]'$. Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgran, existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$b(u,v) = F(v),\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja, existe uma única função u tal que a equação (54) é satisfeita e consequentemente, existe uma única solução fraca para a EDP.

7 CONCLUSÃO

Neste Trabalho de Conclusão de Curso aprendemos um pouco da Teoria de Análise Funcional. Além de aprender uma teoria matemática nova, que possui diversas aplicações, tivemos a oportunidade de aprofundar e consolidar diversos conteúdos do curso de graduação em Matemática, especialmente aqueles presentes nas disciplinas de Álgebra Linear e Análise na Reta. Mais do que isso, pudemos constatar que os conteúdos dessas duas disciplinas, que num primeiro olhar podem parecer desconexo, na verdade podem se relacionar e serem combinados para gerar uma estrutura mais ampla. Isso ficou evidente, por exemplo, quando introduzimos nos espaços vetoriais os conceitos de normas, distâncias, conjuntos abertos, fechados, continuidade, entre outros presentes na Análise. Tal generalização, além de nos ajudar a desenvolver o raciocínio lógico, nos mostra como as teorias matemáticas podem ser moldadas, combinadas e adaptadas para atender objetivos diversos, o que evidencia o potencial da matemática enquanto ferramenta para descrever e analisar as estruturas presentes em nosso meio.

Ao estudar os conceitos presentes neste trabalho, percebemos em cada etapa que muitas perguntas vão surgindo e muitos resultados e teoremas vistos na graduação parecem ser possíveis de serem generalizados para contextos mais gerais, criando assim novas possibilidade de aplicações. Em outras palavras, o que apresentamos se mostra apenas uma pequena introdução da Análise Funcional. Isso nos motiva a estudos futuros, a explorar e aprofundar os conceitos de Análise Funcional. Por outro lado, o Teorema de Lax-Milgran nos mostra como a Análise Funcional pode ter aplicações importantes, já que as equações diferenciais são ferramentas importantíssimas para compreendermos os fenômenos presentes em nosso meio. Dessa maneira, somos motivados também, a estudar no futuro a teoria de equações diferenciais e as aplicações envolvidas.

Por fim, esperamos que este texto possa ajudar, de maneira didática, aqueles estudantes que estejam interessados em aprender Análise Funcional.

REFERÊNCIAS

CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D.; KOMORNIK, V. **Introdução a análise funcional**. Maringá: Eduem, 2011.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Curso de Álgebra Linear**. São Paulo: Edusp, 2013.

EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. Berkeley, CA: American Mathematical Society, 1997.

HALMOS, P. R. **Teoria ingênua dos conjuntos**. Rio de Janeiro: Editora Ciencia Moderna, 2001.

HELEMSKII, A. Y. **Lectures and exercises on functional analysis**. Providence, RI: American Mathematical Society, 2006.

LIMA, E. L. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.

LIMA, E. L. **Analise real, volume 1: funções de uma variável**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2016.

OLIVEIRA, C. R. D. **Introdução à análise funcional**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012.

PRIMO, M. R. T. **Introdução a Aniálise Funcional**. Maringá, PR: Notas de Aula, 2008.

RYNNE, B. P.; YOUNGSON, M. A. **Linear functional analysis**. Great Britain: Springer Science & Business Media, 2000.