UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLEYTON DA SILVA RAMBALDI

APLICAÇÃO DO TEOREMA DOS RESÍDUOS NA OBTENÇÃO DA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016

CLEYTON DA SILVA RAMBALDI

APLICAÇÃO DO TEOREMA DOS RESÍDUOS NA OBTENÇÃO DA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Trabalho de conclusão de curso apresentada ao departamento de matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Vinicius Araujo Peralta

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Vinicius Araújo Peralta
Orientador

Profa. Me. Cristiane Aparecida Pendeza Martinez

Prof. Me. Valter Henrique Biscaro Raposo

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por ter me dado força, sabedoria e persistência durante toda a elaboração deste trabalho. Agradeço ainda de maneira especial o meu orientador, Vinicius Araújo Peralta que se empenhou incansavelmente em ajudar na produção deste projeto e ainda a minha família que, mesmo implicitamente, proporcionou-me ânimo para continuar e cumprir todos os meus objetivos com afinco.

RESUMO

SILVA RAMBALDI, CLEYTON. APLICAÇÃO DO TEOREMA DOS RESÍDUOS NA OBTENÇÃO DA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE. 86 f. Trabalho de conclusão de curso – departamento de matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. CORNÉLIO PROCÓPIO, 2016.

Neste trabalho é realizado a aplicação do Teorema dos Resíduos para a obtenção da transformada inversa de Laplace. Para isso, é apresentado um estudo das propriedades da transformada de Laplace e da teoria de funções de variáveis complexas.

Palavras-chave: Transformada de Laplace, Equações diferenciais, Fórmula complexa de inversão, Teorema dos Resíduos, Funções de variáveis complexa

ABSTRACT

SILVA RAMBALDI, CLEYTON. APPLICATION OF WASTE THEOREM FOR THE OBTAINMENT THE INVERSE LAPLACE TRANSFORM. 86 f. Trabalho de conclusão de curso – departamento de matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. CORNÉLIO PROCÓPIO, 2016.

In this work the application of the Waste Theorem is performed to obtain the inverse Laplace transform. For this, a study of the properties of the Laplace transform and the theory of complex variable functions is presented.

Keywords: Laplace transform, diferential equation, Complex inversion formula, Waste Theorem, Complex variable funtions

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Esquema funcionamento da Transformada de Laplace 10
FIGURA 2 – Função seccionalmente contínua 19
FIGURA 3 – Função de ordem exponencial 19
FIGURA 4 – Exemplo de translação 23
FIGURA 5 – Gráfico de $e^{-t}cos(2t)$ e sua transformada $G(s)$ 23
FIGURA 6 – Mudança de escala 24
FIGURA 7 – Mudança de escala 24
FIGURA 8 – Interpretação geométrica do limite. 30
FIGURA 9 – Partição P 40
FIGURA 10 – Arco parametrizado. 41
FIGURA 11 – $\mathscr{C}$ é o segmento de reta de 0 a $2+3i$. 42
FIGURA 12 – A curva $\mathscr{C}_1$ é simples. A curva $\mathscr{C}_2$ é não-simples 42
FIGURA 13 – $\mathscr{C}_1$ é uma curva fechada simples; $\mathscr{C}_2$ é uma curva fechada não-simples. . 42
FIGURA 14 – Região Simplesmente Conexa e Região Conexa respectivamente 43
FIGURA 15 – O arco $z(t) = t + it^2$ é regular. 43
FIGURA 16 – O arco $w(t) = t + i|t|$ não é regular. 44
FIGURA 17 – Contorno ou caminho. 44
FIGURA 18 – f é analítica sobre $\mathscr{C}_1$. 50
FIGURA 19 – Independência do caminho. 50
FIGURA 20 – O valor da integral sobre $\mathscr{C}_1$ é o mesmo que sobre $\mathscr{C}_2$. 51
FIGURA 21 – O valor da integral sobre $\mathscr{C}$ é igual a soma das integrais sobre $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$. . 51
FIGURA 22 – Região de convergência. 57
FIGURA 23 – Região anelar $1 < |z+i| < 3$. 63
FIGURA 24 – $z_1, \ldots, z_k$ são singularidades isoladas. 68
FIGURA 25 – Gráfico $y = e^{r(\gamma+R\cos\theta)}$ 71
FIGURA 26 – Gráfico de $y = \cos\theta$. 71
FIGURA 27 – Contorno ℓ. 74
FIGURA 28 – Contorno de Bromwich. 74
FIGURA 29 – Circuíto elétrico. 77
FIGURA 30 – Circuíto elétrico. 79
FIGURA 31 – Circuíto elétrico. 80

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Tabela Transformada de Laplace 21

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **9**
2 PRELIMINARES **12**
3 TRANSFORMADA DE LAPLACE **18**
3.1 CONDIÇÕES SUFICIENTES DE EXISTÊNCIA 18
3.1.1 Cálculo da Transformada de Laplace de algumas funções 20
3.2 PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE 21
4 FUNÇÕES DE VARIÁVEIS COMPLEXAS **28**
4.1 FUNÇÕES COMPLEXAS 28
4.1.1 Exemplos 29
4.2 LIMITE E CONTINUIDADE 29
4.3 DIFERENCIABILIDADE 34
4.3.1 Equações de Cauchy-Riemann 37
4.4 TEORIA INTEGRAL 40
4.4.1 Integrais Reais 40
4.4.2 Integração Complexa 41
4.4.2.1 Consequências do Teorema de Cauchy-Goursat 50
4.4.3 Fórmula Integral de Cauchy 52
4.4.4 Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas 52
4.5 SÉRIES E RESÍDUOS 53
4.5.1 Série de Taylor 59
4.5.2 Série de Laurent 60
4.5.3 Singularidades 64
4.5.4 Cálculo de Resíduos 66
4.5.5 Teorema dos Resíduos 67
5 TRANFORMADA INVERSA DE LAPLACE **70**
5.1 LEMA DE JORDAN 70
5.2 FÓRMULA COMPLEXA DE INVERSÃO 73
5.3 APLICAÇÕES 76
5.3.1 Circuitos elétricos 76
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS **84**
REFERÊNCIAS **85**
Índice **86**

1 INTRODUÇÃO

A transformada de Laplace é uma estratégia que possibilita a resolução de equações diferenciais nas áreas das ciências exatas. O método que carrega o nome de Pierre Simon de Laplace é considerado um ritual para estudantes de engenharia devido a sua grande aplicabilidade na resolução de problemas lineares invariantes em relação ao tempo, como por exemplo, circuitos elétricos, osciladores harmônicos e sistemas mecânicos. Ao utilizá-la, fazem recorrência à tabelas, que, restringe o processo, e não permite um conhecimento mais profundo. O estudo é relevante pois, as equações diferenciais são capazes de descrever fenômenos, e sendo assim, a busca por soluções das mesmas é de muita importância pois, fornecem informações a respeito do comportamento desses fenômenos.

O uso da transformada na resolução de equações diferenciais faz-se expressiva pois, quando aplicada em tal expressão a transforma em uma equação algébrica. Em outras palavras, quando aderido o método da transformada de Laplace para a resolução de alguma equação diferencial ou integral a transformada retorna uma equação polinomial, cuja solução se obtém com relativa facilidade, via métodos elementares.

Essa transformada integral é uma homenagem a Pierre Simon de Laplace por sua contribuição na implementação de tal método. No entanto, o mesmo foi sendo construído por diversos colaboradores e estudiosos da época. Com o passar dos anos, a expressão foi tomando diferentes formas até ser conhecida como é atualmente. Por mais que o nome nos faça deduzir que o método tenha sido realmente deduzido por Laplace a fórmula remonta os primeiros trabalhos de Leonhard Euler a partir do século XVIII, passando por nomes como Joseph Louis Lagrange (1736-1813) e o conterrâneo de Laplace, Augustin Louis Cauchy (1789-1857) já no século XIX (TONIDANDEL, 2012).

Heaviside redescobriu a transformada em um trabalho relacionado ao cálculo operacional, chegando a resultados parecidos em como a fórmula é hoje conhecida. A única diferença com a transformada de Laplace que hoje conhecemos é que as funções não descreviam “domínio da frequência” ou ainda, “domínio do tempo”. (TONIDANDEL, 2012).

Uma transformada integral é uma relação da forma

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t)f(t)\,dt \tag{1.1}$$

onde $K(s,t)$ é uma função dada, chamada *núcleo* da transformada, e os limites de integração α e β também são dados. Quando $K(s,t) = e^{-st}$, $\alpha = 0$ e $\beta = +\infty$, a função F dada em (1.1) é chamada de *Transformada de Laplace* de f, isto é

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\, f(t)\,dt, \tag{1.2}$$

onde, $F(s)$ corresponde a *função algébrica* resultante da aplicação 1.2 em $f(t)$ é a função real ou complexa na qual está definida para todo $t > 0$ e e^{-st} corresponde ao chamado *núcleo* da Transformada de Laplace. Seu funcionamento está caracterizado na Figura 1 a seguir

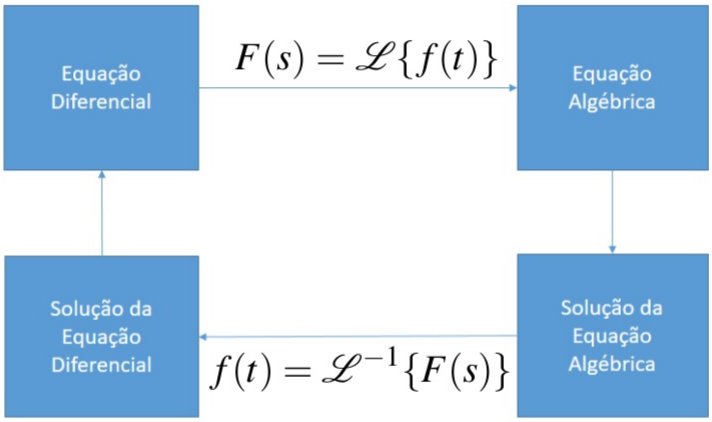

Figura 1: esquema da utilização da Transformada de Laplace.

A fim de se obter a transformada inversa de Laplace de uma função $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ Bromwich desenvolveu a fórmula complexa de inversão, dada por

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}F(s)ds, \tag{1.3}$$

envolvendo a integração com números complexos.

É conhecido ainda alguns outros métodos para a obtenção da transformada inversa de Laplace além da fórmula complexa de inversão, tais como, frações parciais, método das séries, método das equações diferenciais, diferenciação em relação a um parâmetro, entre outros. No entanto, esses procedimentos recaem na recorrência a tabelas. (SPIEGEL, 1965).

Como alternativa ao uso de tabelas, comumente usado e presente na literatura (BOYCE, 2006), (FIGUEIREDO, 2010), (GROOVE, 1991) se fará neste trabalho a utilização da teoria de variáveis complexas para a aplicação do Teorema dos Resíduos na obtenção da transformada inversa de Laplace. Esse procedimento isenta a utilização de resultados previamente calculados.

A partir da transformada inversa de Laplace de funções $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, faz-se possível vislumbrar a solução de equações diferenciais. A fim de mostrar sua importância, serão apresentadas soluções de equações diferenciais que descrevem circuitos elétricos e ainda a solução de equações diferenciais parciais (EDP).

Em primeira instância serão definidos conceitos da transformada de Laplace, assim como da transformada inversa, apresentando o método utilizado frequentemente. Posteriormente, os conceitos acerca das funções complexas, que servirão de base para aplicação do Teorema dos Resíduos à fórmula complexa de inversão e ainda, a aplicação desses conceitos em equações que descrevam fenômenos físicos.

2 PRELIMINARES

Para o estudo da tranformada de Laplace apresentaremos alguns conceitos que fundamentam o desenvolvimento de tal conteúdo.

Definição 2.0.1 *Uma partição de um conjunto X é qualquer coleção P de subconjuntos não vazios de X dotada da seguinte propriedade: todo elemento de X pertence a um e apenas um dos elementos de P. Dizemos que cada elemento de P é um bloco da partição.*

Teorema 2.0.2 *Sejam $a,b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq b$ e seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então, existem $x_m, x_M \in [a,b]$ tais que $\forall x \in [a,b]$,*

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M).$$

Prova: : Para a verificação, serão analisados dois casos:

1. Se $a = b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é analisada em um único ponto. Assim, existem $x_m, x_M \in [a,b]$ tais que $a = x_m, x_M = b$ e
$$f(x_m) = f(x) = f(x_M),$$
verificando a propriedade.

2. Se $a < b$, tem-se que $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ poderá ser constante ou não. Se f for constante, a verificação se dá de maneira análoga ao caso 1. Caso contrário, existirão $x_m, x_M \in [a,b]$ tais que
$$f(x_m) < f(x) < f(x_M),$$
Como queríamos mostrar. ■

Teorema 2.0.3 (Teorema do Confronto) *Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo a a (exceto possivelmente em a) e*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

então,

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

Prova: : Veja (GUIDORIZZI, 2001).

Teorema 2.0.4 (Teorema Fundamental do Cálculo Parte 1) *Se f for contínua em $[a,b]$, então a função g definida por*

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) e $g'(x) = f(x)$

Demonstração: Se x e $x+h$ pertencem a (a,b), então

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \left(\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt \right) - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt, \end{aligned}$$

logo, para $h \neq 0$,

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt. \tag{2.1}$$

Consideremos $h > 0$. Uma vez que f é contínua em $[x, x+h]$, o Teorema de Weierstrass garante que existem u e v em $[x, x+h]$ tais que $f(u) = m$ e $f(v) = M$ sendo m mínimo absoluto e M máximo absoluto em $[x, x+h]$.

Desta forma

$$mh \leqslant \int_x^{x+h} f(t)dt \leqslant Mh,$$

ou seja

$$f(u)h \leqslant \int_x^{x+h} f(t)dt \leqslant f(v)h.$$

Uma vez que $h > 0$, podemos dividir essa desigualdade por h. Assim,

$$f(u) \leqslant \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \leqslant f(v).$$

De (2.1) temos

$$f(u) \leqslant \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leqslant f(v) \tag{2.2}$$

Tomando $h \to 0$ temos que $u \to x$ e $v \to x$ pois, $u, v \in [x, x+h]$, ou seja,

$$\lim_{h \to 0} f(u) = f(x)$$

e

$$\lim_{h \to 0} f(v) = f(x)$$

pois f é contínua em x. Portanto, de (2.2) e do Teorema do Confronto

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

■

Teorema 2.0.5 (Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2) *Se f for contínua em $[a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Demonstração: Considere $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Do Teorema Fundamental do Cálculo Parte 1 sabemos que $g'(x) = f(x)$. Se F for qualquer outra primitiva de f em $[a,b]$, então F e g diferem por uma constante, ou seja

$$F(x) = g(x) + C, \tag{2.3}$$

para $a < x < b$. No entanto, F e g são ambas contínuas em $[a,b]$ e, portanto, tomando os limites em ambos os lados de (2.3) quando $x \to a^+$ e $x \to b^-$, vemos que isso também é válido quando $x = a$ e $x = b$.

Se fizermos $x = a$ temos

$$g(a) = \int_a^a f(t)dt = 0.$$

Sendo assim, de (2.3) com $x = a$ e $x = b$, temos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [g(b) + C] - [g(a) + C] \\ &= g(b) - g(a) = g(b) = \int_a^b f(t)dt. \end{aligned}$$

■

Proposição 2.0.6 (Regra de Leibniz) *Seja $f(x,t)$ uma função contínua tendo uma derivada $\frac{\partial f}{\partial t}$ contínua num domínio do plano xt que contém o retângulo $a \le x \le b$, $t_1 \le t \le t_2$. Então,* *para $t_1 < t < t_2$, vale a igualdade*

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

Prova: Considere a função

$$g(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx \qquad (t_1 \leq t \leq t_2).$$

Como a função $\frac{\partial f}{\partial t}$ é contínua na região descrita, logo $g(t)$ também será contínua em $t_1 \leq t \leq t_2$. Dessa forma, considerando $t_1 \leq t_3 \leq t_2$, temos

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) = \int_{t_1}^{t_3}\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dxdt.$$

Podemos então, comutar a ordem de integração, obtendo

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_3} g(t)dt &= \int_a^b \int_{t_1}^{t_3} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dtdx = \int_a^b [f(x,t_3) - f(x,t_1)]dx\\ &= \int_a^b f(x,t_3)dx - \int_a^b f(x,t_1)dx = F(t_3) - F(t_1),\end{aligned}$$

onde $F(t)$ é definida por

$$\int_a^b f(x,t)dx.$$

Podemos por fim, considerar t_3 como sendo uma variável t, resultando em

$$F(t) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t} g(t)dt.$$

Derivando ambos os lados em relação a t e considerando o Teorema Fundamental do Cálculo concluímos

$$F'(t) = g(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

■

Definição 2.0.7 (Integral Imprópria Tipo 1) *1. Se $\int_a^t f(x)dx$ existe para cada $t \geq a$, então*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

desde que o limite exista.

2. Se $\int_t^b f(x)dx$ existe para cada $t \leq b$, então

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx,$$

desde que o limite exista.

Se os limites correspondentes as integrais $\int_a^\infty f(x)dx$ *e* $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ *existirem diz-se que são convergentes. No entanto, se esses mesmos limites não existirem, diz-se que as integrais são divergentes.*

3. *Se ambas* $\int_a^\infty f(x)dx$ *e* $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ *são convergentes, temos*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx \qquad a \in \mathbb{R}$$

Definição 2.0.8 (Integral Imprópria Tipo 2) 1. *Se* f *é contínua em* $[a,b)$ *e descontínua em* b*, então*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

se esse limite existir.

2. *Se* f *é contínua em* $(a,b]$ *e descontínua em* a*, então*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

se esse limite existir.

Se o limite correspondente a integral $\int_a^b f(x)dx$ *existir dizemos que a mesma é convergente. No entanto, se o mesmo limite não existir, a integral será divergente.*

3. *Se* f *apresentar um descontinuidade em* c*, n qual* $a < c < b$*, e as integrais impróprias* $\int_a^c f(x)dx$ *e* $\int_c^b f(x)dx$ *forem convergentes, temos*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Teorema 2.0.9 *Suponha que* f *e* g *sejam funções contínuas com* $f(x) \geq g(x) \geq 0$ *para* $x \geq a$*.*

a *Se* $\int_a^\infty f(x)dx$ *é convergente, então* $\int_a^\infty g(x)dx$ *é convergente.*

b *Se* $\int_a^\infty g(x)dx$ *é divergente, então* $\int_a^\infty f(x)dx$ *é divergente.*

A demonstração para esse teorema se encontra em ((STEWART, 2013)).

Teorema 2.0.10 (Integral de Fourier) *Seja* $f(x)$ *satisfazendo as seguintes condições.*

1. $f(x)$ *satisfaz as condições de Dirichlet em todo intervalo* $-l \leq x \leq l$*.*

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *converge, isto é,* $f(x)$ *é absolutamente integrável em* $-\infty \leq x \leq +\infty$.

Assim,

$$f(x) = \int_0^\infty \{A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda) sen\lambda x\}\, d\lambda, \tag{2.4}$$

onde

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x dx$$
$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) sen\lambda x dx.$$

A demonstração deste resultado encontra-se em (SPIEGEL, 1965).

Forma Complexa das Integrais de Fourier

Em notação complexa, 2.4 com os coeficientes $A(\lambda), B(\lambda)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\lambda u} du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\lambda(x-u)} du d\lambda. \end{aligned}$$

3 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Neste capítulo, apresentaremos algumas das muitas propriedades da transformada de Laplace. O intuito será retratar e fundamentar a transformada a partir de como foi definida. As obras utilizadas foram (SPIEGEL, 1965) e (GROOVE, 1991).

3.1 CONDIÇÕES SUFICIENTES DE EXISTÊNCIA

Nesta seção, serão apresentadas condições suficientes de existência da transformada de Laplace. Não se faz necessárias tais exigências, no entanto, são de suma importância de modo que, satisfazendo essas propriedades é certa a ocorrência de uma solução para a devida equação diferencial.

Definição 3.1.1 *Uma função é dita* ***seccionalmente contínua*** *em um intervalo* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ *quando existe uma partição* $P = \{\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_n = \beta\}$ *do mesmo tal que para* $i = 1, \ldots, n$*:*

1. f *é contínua em cada subintervalo* $t_{i-1} < t < t_i$*;*

2. f *possui, respectivamente, limite lateral à esquerda e à direta finitos na extremidade de cada subintervalo* (t_{i-1}, t_i)*.*

A Figura 2 ilustra uma função que satisfaz os critérios anteriores, sendo contínua para cada subintervalo $t_{i-1} < t < t_i$ e o limite lateral existe na extremidade de cada subintervalo.

Definição 3.1.2 *Dizemos que uma função é de* ***ordem exponencial*** γ *quando existem constantes* γ*,* $M > 0$ *e* T *tais que*

$$|f(t)| \leqslant Me^{\gamma t}$$

para todo $t > T$*.*

Exemplo 3.1.3 *: A função* $f(t) = sen(t)$ *é de ordem exponencial. Note que para todo* $t \in \mathbb{R}$ *temos*

$$|f(t)| = |sen(t)| \leqslant 1$$

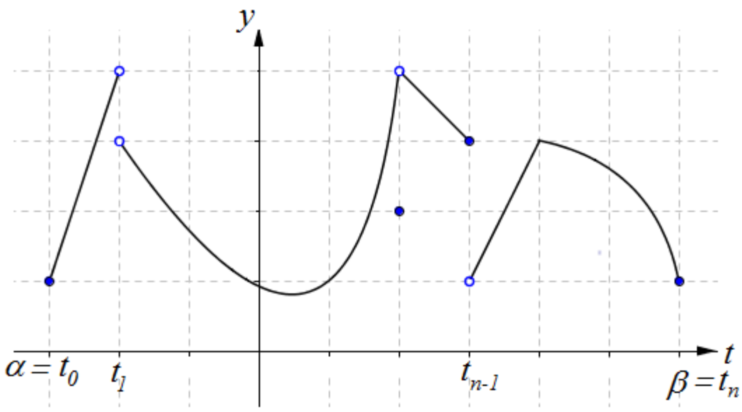

Figura 2: Função seccionalmente contínua.

ou seja,

$$|f(t)| = |sen(t)| \leqslant 1 \leqslant e^t$$

para $t > 0$*. Deste modo, temos* $T = 0$ *e* $M = \gamma = 1$*, veja Figura 3.*

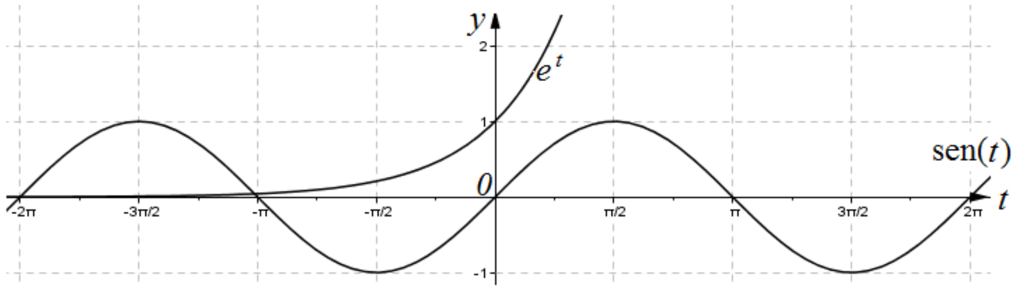

Figura 3: Função de ordem exponencial.

Teorema 3.1.4 (Existência) *Se* $f(t)$ *é seccionalmente contínua em todo intervalo fechado* $0 \leqslant t \leqslant N$ *e de ordem exponencial* γ *para* $t > N$*, então sua transformada de Laplace* $F(s)$ *existe para todo* $s > \gamma$*.*

Demonstração: Decorre da definição que

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \underbrace{\int_0^{N} e^{-st} f(t)dt}_{I_1} + \underbrace{\int_N^{+\infty} e^{-st} f(t)dt}_{I_2}.$$

Por hipótese, temos que $f(t)$ é seccionalmente contínua em todo intervalo $0 \leqslant t \leqslant N$, o que implica que a integral I_1 existe.

Por outro lado, como $f(t)$ é de ordem exponencial γ para $t > N$, segue que

$$\left| \int_N^{\infty} e^{-st} f(t)dt \right| \leqslant \int_N^{\infty} \left| e^{-st} f(t) \right| dt \leqslant \int_0^{\infty} e^{-st} \left| f(t) \right| dt \leqslant \int_0^{\infty} e^{-st} M e^{\gamma t} dt = \frac{M}{s-\gamma}$$

logo I_2 também existe para $s > \gamma$.

Portanto a transformada de Laplace $F(s)$ está definida para $s > \gamma$. ■

Observamos que a transformada de Laplace não está definida para todas as funções. Exemplos disso são as funções $f(t) = \dfrac{1}{t}$ e $f(t) = e^{t^2}$.

Note que, para $t > 0$ e $s \in \mathbb{R}$ temos

$$e^{t^2 - st} \geqslant e^{\frac{-3s^2}{4}}.$$

Assim,

$$\mathscr{L}\left\{e^{t^2}\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{t^2} dt > \int_0^{+\infty} e^{\frac{-3s^2}{4}}\, dt = +\infty$$

Portanto $\mathscr{L}\{e^{t^2}\}$ não está definida.

No entanto, as condições de existência não são necessárias para a existência da transformada de Laplace de uma função, uma vez que há funções que não são seccionalmente contínuas ou, não são de ordem exponencial, que ainda assim admitem transformada de Laplace. Como exemplo temos a função $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Pode-se notar que essa função não é seccionalmente contínua em $(0, +\infty)$, porém sua transformada de Laplace existe.

De fato, calculando a transformada de Laplace da função $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{1}{\sqrt{t}} dt = \underbrace{\int_0^{1} e^{-st}\frac{1}{\sqrt{t}} dt}_{I_3} + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-st}\frac{1}{\sqrt{t}} dt}_{I_4}.$$

Note que I_3 converge pois

$$\int_0^1 e^{-st}\frac{1}{\sqrt{t}} dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leqslant \frac{2}{3}. \tag{3.1}$$

Por outro lado I_4 também é convergente pois, para $s > 0$, temos

$$\int_1^{+\infty} e^{-st}\frac{1}{\sqrt{t}} dt < \int_1^{+\infty} e^{-st}\, dt = \frac{e^{-s}}{s}. \tag{3.2}$$

Logo, de (3.1) e (3.2), $\mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}$ existe.

3.1.1 CÁLCULO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE DE ALGUMAS FUNÇÕES

Exemplo 3.1.5 *Calcule a transformada de Laplace de $f(t) = 1$.*

Solução: Pela definição de transformada de Laplace temos

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^\infty = \frac{1}{s}, \tag{3.3}$$

para $s > 0$.

Exemplo 3.1.6 *Calcule* $\mathscr{L}\{e^{at}\}$.

Solução: Pela definição de transformada de Laplace temos

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{e^{at}\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-t(s-a)} dt \\ &= \left[\frac{e^{-t(s-a)}}{s-a} \right]_0^\infty = \frac{1}{s-a}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

para $s > a$.

Sendo assim, a partir de cálculos similares, são formulados resultados previamente calculados, explicitados em tabelas como a que segue

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$
e^{kt}	$\frac{1}{s-k}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$,
$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
$\sinh(kt)$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
$\cosh(kt)$	$\frac{s}{s^2-k^2}$

Tabela 1: Exemplo de tabela da Transformada de Laplace

3.2 PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Para que se possa empregar a transformada de Laplace na resolução de problemas é pertinente estabelecer algumas propriedades a ela concernentes.

Teorema 3.2.1 (Linearidade) *Se c_1 e c_2 são constantes quaisquer e $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são funções com transformada de Laplace $F_1(s)$ e $F_2(s)$, respectivamente, então*

$$\mathscr{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathscr{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathscr{L}\{f_2(t)\} = c_1 F(s) + c_2 F(s).$$

Demonstração: Da definição da transformada de Laplace e da linearidade da integral segue que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= \int_0^{\infty} [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] e^{-st} dt \\
&= \int_0^{\infty} c_1 f_1(t) e^{-st} dt + \int_0^{\infty} c_2 f_2(t) e^{-st} dt \\
&= c_1 \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt + c_2 \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt \\
&= c_1 \mathscr{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathscr{L}\{f_2(t)\} \\
&= c_1 F(s) + c_2 F_2(s).
\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.2.2 *Determine $\mathscr{L}\{4e^{5t} + 6t^3 - 3sen(4t) + 2\cos(2t)\}$.*

Solução: De acordo com a linearidade temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{4e^{5t} + 6t^3 - 3\text{sen}(4t) + 2\cos(2t)\right\} &= 4\mathscr{L}\left\{e^{5t}\right\} + 6\mathscr{L}\left\{t^3\right\} - 3\mathscr{L}\left\{\text{sen}(4t)\right\} + 2\mathscr{L}\left\{\cos(2t)\right\} \\
&= 4\left(\frac{1}{s-5}\right) + 6\left(\frac{3!}{s^4}\right) - 3\left(\frac{4}{s^2+16}\right) + 2\left(\frac{s}{s^2+4}\right) \\
&= \frac{4}{s-5} + \frac{36}{s^4} - \frac{12}{s^2+16} + \frac{2s}{s^2+4}.
\end{aligned}$$

Teorema 3.2.3 (Teorema da Translação) *Se $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ e a é uma constante arbitrária, então*

$$\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a).$$

Demonstração: Da definição de transformada de Laplace segue que

$$\int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{t(a-s)} f(t) dt,$$

assim, tomando $u = s - a$ temos

$$\int_0^{\infty} e^{t(a-s)} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-ut} f(t) dt = F(u) = F(s-a).$$

Portanto $\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$. ■

Exemplo 3.2.4 *Como* $\mathscr{L}\{\cos(2t)\} = \dfrac{s}{s^2+4} = F(s)$, *temos*

$$\mathscr{L}\{e^{-t}\cos(2t)\} = F(s-(-1)) = F(s+1) = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{s^2+2s+5}.$$

Na Figura 5 observamos que a transformada de Laplace da função $e^{-t}\cos(2t)$ está transladada com relação a transformada de $\cos(2t)$ expressa na Figura 4.

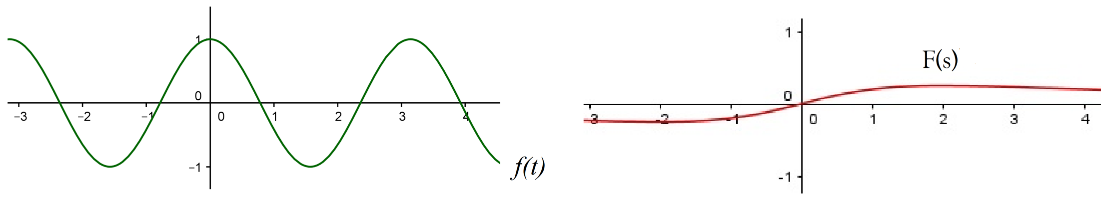

Figura 4: Gráfico de $cos(2t)$ e sua transformada $F(s)$

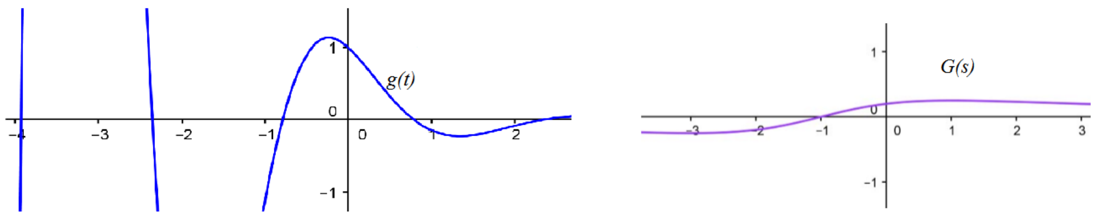

Figura 5: Gráfico de $e^{-t}cos(2t)$ e sua transformada $G(s)$

Teorema 3.2.5 (Mudança de Escala) *Se* $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ *e* a *é uma constante arbitrária então*

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Demonstração: Da definição temos

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at)dt.$$

Efetuando a mudança de variáveis $u = at$ tem-se que $du = adt$ e $t = \frac{u}{a}$ assim,

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at)dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u)du = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

■

Exemplo 3.2.6 *Como* $\mathscr{L}\{sen(t)\} = \dfrac{1}{s^2+1} = F(s)$, *temos*

$$\mathscr{L}\{sen(3t)\} = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{s}{3}\right)^2+1} = \frac{3}{s^2+9}.$$

Na Figura 7 observamos que função que se obtém após aplicar a Transformada de Laplace em $\text{sen}(3t)$ está com sua escala modificada com relação ao gráfico $G(s)$ presente Figura 6.

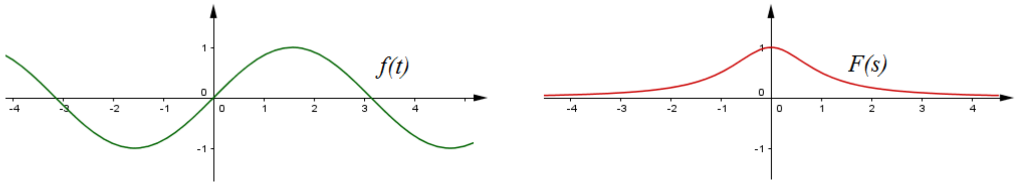

Figura 6: Gráfico da função $f(t) = \text{sen}(t)$ e sua Transformada $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$

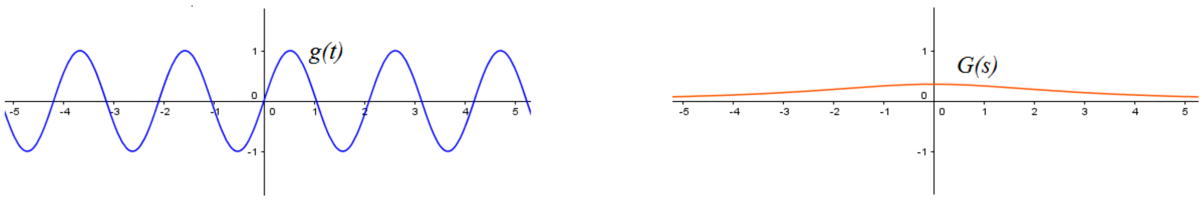

Figura 7: Gráfico da função $g(t) = \text{sen}(3t)$ e sua Transformada $G(s) = \frac{3}{s^2+9}$

Teorema 3.2.7 (Teorema da Derivada) *Se $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ com $f(t)$ contínua para $0 \leq t \leq N$ e de ordem exponencial γ para $t > N$, sendo que $f'(t)$ é seccionalmente contínua para $0 \leqslant t \leqslant N$, então*

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0),$$

Demonstração: Da definição de transformada de Laplace temos que

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt. \tag{3.5}$$

Integrando por partes (3.5) temos,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt &= \lim_{k\to\infty} [e^{-st} f(t)]_0^k + s \lim_{k\to\infty} \int_0^k e^{-st} f(t)dt \\ &= \lim_{k\to\infty} [e^{-sk} f(k) - e^{-s0} f(0)] + s \lim_{k\to\infty} \int_0^k e^{-st} f(t)dt \\ &= sF(s) - f(0). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Exemplo 3.2.8 *Se $f(t) = \cos(3t)$ então temos que $\mathscr{L}\{\cos(3t)\} = \dfrac{s}{s^2+9}$. Assim, empregando o Teorema da Derivada, concluímos*

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\left(\frac{s}{s^2+9}\right) - 1 = \frac{-9}{s^2+9} = \mathscr{L}\left\{-3\frac{3}{s^2+9}\right\} = \mathscr{L}\{-3sen(3t)\}.$$

Teorema 3.2.9 *Se $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ com $f(t), f'(t), ..., f^{(n-1)}(t)$ contínuas para $0 \leqslant t \leqslant N$ e de ordem exponencial γ para $t > N$, enquanto $f^{(n)}(t)$ é seccionalmente contínua para $0 \leqslant t \leqslant N$ então*

$$\mathscr{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - ... - s f^{(n-2)} - f^{(n-1)}(0).$$

Demonstração: Pelo Princípio de Indução Finita se $n = 1$, então pelo Teorema 3.2.7 segue que

$$\mathscr{L}\left\{f'(t)\right\} = sF(s) - f(0).$$

Para $n = k$, temos a seguinte hipótese de indução

$$\mathscr{L}\left\{f^{(k)}(t)\right\} = s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f'(0) - ... - s f^{(k-2)} - f^{(k-1)}(0). \tag{3.7}$$

Então para $n = k+1$ segue que

$$\mathscr{L}\left\{f^{(k+1)}(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f^{(k+1)}(t) dt.$$

Tomando $g(t) = f^{(k)}(t)$ obtemos

$$\int_0^\infty e^{-st} g'(t) dt = \lim_{k \to \infty} \int_0^k e^{-st} g'(t) dt. \tag{3.8}$$

Integrando por partes (3.8)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st} g'(t) dt &= \lim_{k \to \infty} \left[e^{-st} g(t) \big|_0^k - \int_0^k -s e^{-st} g(t) dt \right] \\
&= \lim_{k \to \infty} \left[e^{-sk} g(k) - g(0) + s \int_0^k e^{-st} g(t) dt \right] \\
&= \lim_{k \to \infty} \left[e^{-sk} f^{(n)}(k) - f^{(n)}(0) + s \int_0^\infty e^{-st} f^{(n)}(t) dt \right]
\end{aligned}$$

pela hipótese de indução e do fato de $f^{(n)}(t)$ ser de ordem exponencial γ, concluímos que

$$\lim_{k \to \infty} \left[e^{-sk} f^{(k)}(k) - f^{(k)}(0) \right] + s \int_0^\infty e^{-st} f^{(n)}(t) dt = -f^{(n)}(0) + s\mathscr{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}.$$

$\blacksquare$

Teorema 3.2.10 (Teorema da Integral) *Se $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, então*

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

Demonstração: Para demonstrar esse teorema, considere a mudança de variáveis

$$g(t) = \int_0^t f(u)du.$$

Dessa forma, pelo teorema fundamental do cálculo

$$g'(t) = f(t). \tag{3.9}$$

Utilizando o Teorema 3.2.7 em (3.9) tem-se

$$\mathscr{L}\{g'(t)\} = sG(s) - g(0).$$

Note que, $g(0) = \int_0^0 f(u)du = 0$.

Dessa forma,

$$\mathscr{L}\{g'(t)\} = sG(s) \tag{3.10}$$

e assim, isolando $G(s)$ em (3.10)

$$G(s) = \frac{\mathscr{L}\{g'(t)\}}{s}. \tag{3.11}$$

Substituindo (3.9) em (3.11) e considerando $G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}$ obtemos

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{\mathscr{L}\{f(t)\}}{s} = \frac{F(s)}{s}.$$

■

Exemplo 3.2.11 *Como $\mathscr{L}\{sen(2t)\} = \frac{2}{s^2+4} = F(s)$, temos*

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t sen(2u)du\right\} = \frac{2}{s(s^2+4)}.$$

Teorema 3.2.12 (Valor Inicial) *Se $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ e os limites indicados existem, então*

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to+\infty} sF(s).$$

Demonstração: Pelo Teorema 3.2.7 temos que

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = -f(0) + sF(s). \tag{3.12}$$

Se $f'(t)$ é seccionalmente contínua e de ordem exponencial podemos reescrever sua transformada como

$$\lim_{s\to\infty} \mathscr{L}\{f'(t)\} = \lim_{s\to\infty} \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = 0, \tag{3.13}$$

e de (3.12) e (3.13) temos

$$\lim_{s\to\infty}[sF(s)-f(0)]=0,$$

então

$$\lim_{s\to\infty}sF(s)=f(0)=\lim_{t\to 0}f(t).$$

■

Exemplo 3.2.13 *Observe que para $\mathscr{L}\{1\}=\frac{1}{s}$ segue*

$$\lim_{t\to 0}f(t)=1=\lim_{s\to\infty}s\frac{1}{s}=\lim_{s\to+\infty}sF(s).$$

Teorema 3.2.14 (Valor Final) *Se $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$ e os limites indicados existem então*

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s).$$

Demonstração: Do Teorema 3.2.7 temos que,

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}=-f(0)+sF(s). \tag{3.14}$$

Decorre da definição e do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}\mathscr{L}\{f'(t)\}&=\lim_{s\to 0}\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt=\int_0^\infty f'(t)dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b f'(t)dt=\lim_{b\to\infty}[f(b)-f(0)]\\&=\lim_{t\to\infty}[f(t)-f(0)].\end{aligned} \tag{3.15}$$

Dessa forma, de (3.14) e (3.15) temos

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s).$$

■

Exemplo 3.2.15 *Observe que para $\mathscr{L}\{1\}=\frac{1}{s}$ segue que*

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=1=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}sF(s).$$

Nos capítulos posteriores, o objetivo maior será dado as estratégias, pré-requisitos e aplicações da Transformada Inversa de Laplace, em especial, a Fórmula Complexa de Inversão. Tal fato se encarregará de apresentar a aplicabilidade da Transformada em resolução de problemas físicos a partir de equações integro-diferenciais que representam fenômenos nas diversas áreas das ciências exatas.

4 FUNÇÕES DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

Para obter a transformada inversa de Laplace, aplicando o Teorema dos Resíduos apresentaremos neste capítulo conceitos de funções de variávei complexas. Iniciaremos o estudo com o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, bem como limite, continuidade, diferenciabilidade, teoria integral, séries e resíduos.

4.1 FUNÇÕES COMPLEXAS

Definição 4.1.1 (Números Complexos) *Um número complexo é qualquer número da forma $z = x + iy$, onde x e y são números reais e $i = \sqrt{-1}$, a unidade imaginária.*

Definição 4.1.2 *Se $\mathsf{A} \subset \mathbb{C}$ e f é uma correspondência de A em $\mathbb{C}$, $f : \mathsf{A} \to \mathbb{C}$, de modo que a cada $z \in \mathsf{A}$, está associado um único $w \in \mathbb{C}$, $w = f(z)$, então f é denominada função de A em $\mathbb{C}$, e além disso, diz-se que*

- *z é a variável independente;*
- *w é a variável dependente;*
- *A é o **domínio** de f;*
- *$\mathbb{C}$ é o **contradomínio** de f.*

O conjunto imagem de f é definido como

$$\mathsf{B} = \{w \in \mathbb{C} \mid w = f(z),\, z \in \mathsf{A}\}$$

que é denotado por $f(\mathsf{A})$.

O complexo w também é chamado de imagem de z por f.

Proposição 4.1.3 *Se $z = x + iy$ então $f : \mathsf{A} \to \mathbb{C}$ pode ser reescrita como a soma de duas funções reais de duas variáveis reais $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$ da forma*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

onde $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é chamada parte real de f e $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é chamada parte imaginária de f; e são respectivamente denotadas por $Re(f)$ e $Im(f)$.

A validação desse resultado pode ser encontrado em (ZILL, 2011).

4.1.1 EXEMPLOS

1. Se $f(z) = z^2$, então tomando $z = x + iy$ temos

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = (x+iy)(x+iy) = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

portanto

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad v(x,y) = 2xy$$

são respectivamente as partes real e imaginária de $f(z) = z^2$.

2. Para $z = x + iy$, definimos a função exponencial complexa como

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\text{sen}y)$$

isto é

$$f(x) = e^x \cos y + ie^x \text{sen}y$$

assim, as respectivas partes real e imaginária de f são:

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad \text{e} \quad v(x,y) = e^x \text{sen}y.$$

4.2 LIMITE E CONTINUIDADE

Definição 4.2.1 *Seja $f : \mathsf{A} \to \mathbb{C}$ uma função de variável complexa e $z_0 \in A$. Dizemos que f tem limite $L \in \mathbb{C}$ em z_0, quando para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que para $z \in \mathsf{A}$*

$$0 < |z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - L| < \varepsilon,$$

e nesse caso denota-se por

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L.$$

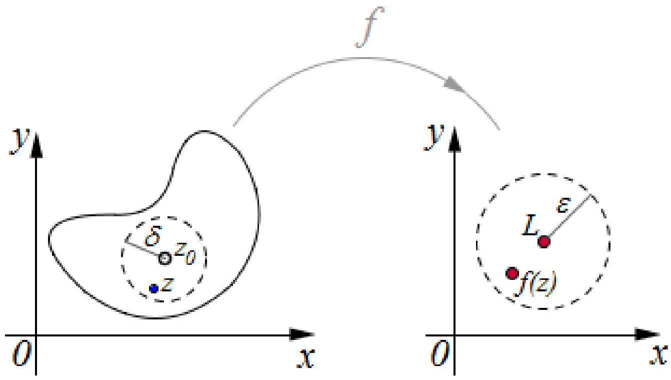

Figura 8: Interpretação geométrica do limite.

Teorema 4.2.2 *Seja* $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *tal que* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *onde* $z = x + iy$ *e* $z_0 = a + ib$. *Então*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A + iB$$

se, e somente se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y) = A \quad e \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} v(x,y) = B.$$

Prova: : Veja (ÁVILA, 2000).

Teorema 4.2.3 (Propriedades de Limites Complexos) *Sejam* f *e* g *funções complexas com* $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ *e* $\lim_{z\to z_0} g(z) = M$, *então*

1. $\lim_{z\to z_0} (f(z) \pm g(z)) = L \pm M$
2. $\lim_{z\to z_0} (f(z) \cdot g(z)) = L \cdot M$
3. $\lim_{z\to z_0} \left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right) = \dfrac{L}{M}$ *desde que* $M \neq 0$

Demonstração item 1*:* *Seja* $L = \lim_{z\to\zeta_0} f(z)$ *e* $M = \lim_{z\to\zeta_0} g(z)$. *Sendo assim, dado* $\varepsilon > 0$, *existem* $\delta_1 > 0$ *e* $\delta_2 > 0$ *tais que se* $z \in D_f$, *com* $0 < |z - z_0| < \delta_1$, *então*

$$|f(z) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e se $z \in D_g$, *com* $0 < |z - z_0| < \delta_2$, *então*

$$|g(z) - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deste modo ocorre que

$$|(f(z)+g(z))-(L+M)| \leq |f(z)-L|+|g(z)-M|$$

Se $z \in D_f \cap D_g$ *e* $0 < |z-z_0| < \delta$*, onde* $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ *então teremos*

$$|(f(z)+g(z))-(L+M)| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{z\to z_0} f(z)+g(z) = L+M = \lim_{z\to z_0} f(z) + \lim_{z\ \to z_0} g(z).$$

De modo análogo, demonstra-se que $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)-g(z)) = L-M$. ■

Demonstração item **2*:*** *Temos que,*

$$\begin{aligned} |f(z)g(z)-LM| &= |f(z)[g(z)-M]+M[f(z)-L]| \\ &\leq |f(z)|\,|g(z)-M|+|M|\,|f(z)-L| \\ &\leq |f(z)|\,|g(z)-M|+(|M|+1)\,|f(z)-L| \end{aligned}$$

Assim,

$$|f(z)g(z)-LM| \leq |f(z)|\,|g(z)-M|+(|M|+1)\,|f(z)-L| \tag{4.1}$$

Como $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L$*, dado* $\varepsilon = 1$*, existe* $\delta_1 > 0$ *tal que se* $0 < |z-z_0| < \delta_1$*, então*

$$|f(z)-L| < 1$$

Assim

$$|f(z)-L| \geq |f(z)|-|L|$$

isto é,

$$1 \geq |f(z)|-|L|$$

ou seja,

$$|f(z)| \leq |L|+1 = k.$$

Assim $|f(z)| < k$ *onde* k *é uma constante positiva. Como* $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = M$*, dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta_2 > 0$ *tal que se* $0 < |z-z_0| < \delta_2$ *então*

$$|g(z)-M| < \frac{\varepsilon}{2k}$$

Como $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$, *dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta_3 > 0$ *tal que se* $0 < |z - z_0| < \delta_3$, *então*

$$|f(z) - L| < \frac{\varepsilon}{2|M| + 2}.$$

Usando esses resultados em (4.1), obtemos

$$|f(z)g(z) - LM| < k\frac{\varepsilon}{2k} + (|M| + 1)\frac{\varepsilon}{2|M| + 2} = \varepsilon,$$

onde, $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ *e* $0 < |z - z_0| < \delta$. ■

Demonstração item **3*:*** *Pelo item anterior, basta mostrar que*

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{M},$$

pois,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} f(z)\frac{1}{g(z)} = L\frac{1}{M}.$$

Dado $\varepsilon = \frac{|M|}{2}$, *existe* $\delta_2 > 0$ *tal que* $0 < |z - z_0| < \delta_2$ *então*

$$|g(z) - M| < \frac{|M|}{2}.$$

Então,

$$\left|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M - g(z)}{g(z)M}\right| < 2\frac{|M - g(z)|}{|M|^2}.$$

Como por hipótese , $\lim g(z) = M$ *, dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta_1 > 0$ *tal que*

$$|g(z) - M| < \varepsilon \qquad 0 < |z - z_0| < \delta_1.$$

Escolhendo $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, *temos*

$$\left|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{M}\right| < \frac{2\varepsilon}{|M|^2},$$

com $0 < |z - z_0| < \delta$. ■

Definição 4.2.4 *Dizemos que o limite de* $f : D_f \longrightarrow \mathbb{C}$ *tende a infinito quando* z *tende a* z_0 *se dado qualquer* $k > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que, para* $z \in D_f$ *tem-se*

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > k,$$

e neste caso denota-se

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty.$$

Exemplo 4.2.5 *Mostre que* $\lim\limits_{z\to 3i} \dfrac{i}{z-3i} = \infty.$

Solução: Observe que se $f(z) = \dfrac{i}{z-3i}$ então

$$|f(z)| = \left|\frac{i}{z-3i}\right| = \frac{1}{|z-3i|}$$

isto é, se

$$|f(z)| > K \;\;\Rightarrow\;\; \frac{1}{|z-3i|} > K \;\;\Rightarrow\;\; |z-3i| < \underbrace{\frac{1}{K}}_{\delta}.$$

Assim, tomando $\delta = \frac{1}{K}$ tem-se:

$$\begin{aligned} 0 < |z-3i| < \delta \;\;&\Rightarrow\;\; |z-3i| < \frac{1}{K} \\ &\Rightarrow\;\; \frac{1}{|z-3i|} > K \\ &\Rightarrow\;\; \left|\frac{i}{z-3i}\right| > K \\ &\Rightarrow\;\; |f(z)| > K. \end{aligned}$$

Portanto $\lim\limits_{z\to 3i} \dfrac{i}{z-3i} = \infty.$

Definição 4.2.6 *Dizemos que o limite de f é L quando z tende para infinito, quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $K > 0$ tal que para $z \in \mathsf{D}_f$*

$$|z| > K \quad\Rightarrow\quad |f(z) - L| < \varepsilon$$

e neste caso, denota-se por

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = L.$$

Definição 4.2.7 *Dizemos que uma função f tende ao infinito quando z tende ao infinito, se para todo $K > 0$, existe $M > 0$ tal que se $z \in \mathsf{D}_f$*

$$|z| > K \quad\Rightarrow\quad |f(z)| > M$$

e quando isto ocorre, denota-se por

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty.$$

Exemplo 4.2.8 *Mostre que* $\lim\limits_{z\to\infty} 4z = \infty$.

Solução: Com efeito, dado $K > 0$, tome $M = \frac{K}{4}$, assim

$$|z| > M \;\Rightarrow\; |z| > \frac{K}{4} \;\Rightarrow\; 4|z| > K$$

isto é

$$|4z| > K$$

portanto $\lim\limits_{z\to\infty} 4z = \infty$.

A definição de Continuidade em um ponto que segue é dado em (ÁVILA, 2000).

Definição 4.2.9 (Continuidade) *Quando o ponto z_0 pertence ao domínio de f e $L = f(z_0)$, dizemos que f é contínua no ponto z_0 e escrevemos*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

4.3 DIFERENCIABILIDADE

Definição 4.3.1 (Derivada) *Seja a função f definida em uma vizinhança de uma ponto z_0. A derivada de f em relação a z_0, denotada por $f'(z_0)$, é*

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z\to z_0} \tag{4.2}$$

Exemplo 4.3.2 *Calcule $f'(0)$ para $f(z) = z\cdot\bar{z}$. Obtenha também $f'(z)$ para $z \neq 0$.*

Solução: Da definição

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{z\bar{z}}{z} = \lim_{z\to 0} \bar{z} = 0.$$

Portanto f é derivável em $z = 0$ e $f'(0) = 0$.

Para $z \neq 0$ temos:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(z+h)\overline{(z+h)} - z\bar{z}}{h} = \frac{z\bar{h}}{h} + \bar{z} + \bar{h}$$

tomando $h = re^{i\theta}$ temos

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{ze^{-i\theta}r}{re^{i\theta}} + \overline{z} + re^{-i\theta}.$$

Assim

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{r\to 0} ze^{-2i\theta} + \overline{z} + re^{-i\theta} = ze^{-2i\theta}.$$

Portanto, como o limite acima não existe, $f'(z)$ não existe para $z \neq 0$.

Teorema 4.3.3 *Se f e g são deriváveis em um ponto z então (4.2) pode usada para mostrar:*

1. $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$
2. $(f \cdot g)'(z) = f'(z)\cdot g(z) + f(z)\cdot g'(z)$
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$

Demonstração item 1***:*** *Se f e g são deriváveis em z, pela definição de derivada temos*

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

e

$$g'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{g(z+h)-g(z)}{h}.$$

Desta forma

$$\begin{aligned}
(f+g)'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(z+h)-(f+g)(z)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(z+h)+g(z+h))-(f(z)+g(z))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f(z+h))-f(z))+(g(z+h)-g(z))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h))-f(z)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(z+h)-g(z)}{h}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z).$$

■

A verificação da subtração segue analogamente ao resultado anterior.

Demonstração item* 2*:

Se f e g são deriváveis em z, pela definição de derivada temos

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

e

$$g'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(fg)'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(z+h) - (fg)(z)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)g(z+h) - f(z)g(z)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)g(z+h) + f(z)g(z+h) - f(z)g(z+h) - f(z)g(z)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(z+h) - f(z)}{h} g(z+h) + f(z)\frac{g(z+h) - g(z)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \lim_{h\to 0} g(z+h) + \lim_{h\to 0} f(z) \lim_{h\to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} \\
&= f'(z)g(z) + f(z)g'(z).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z).$$

∎

Demonstração item* 3*: *Se f e g são deriváveis em z e $g(z) \neq 0$, então também é derivável em z então*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \left(fg^{-1}\right)'(z)$$

Pela propriedade 2 segue que

$$\begin{aligned}
\left(fg^{-1}\right)'(z) &= \lim_{h\to 0} f'(z)g^{-1}(z) - f(z)g^{-2}(z)g'(z) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f'(z)}{g(z)} - \frac{f(z)g'(z)}{g^2(z)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}.$$

■

Teorema 4.3.4 *Se f é derivável em z_0 então f é contínua em z_0.*

Demonstração: Note que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) - f(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) = 0.$$

Portanto, se f é derivável em z_0 também será contínua neste ponto. ■

Definição 4.3.5 (Função Analítica) *Dizemos que f é analítica numa região $\mathscr{R}$, se f é derivável em todos os pontos de $\mathscr{R}$. Dizemos que f é analítica em z_0 se f for analítica numa região contendo z_0; neste caso z_0 é dito ponto regular, caso contrário z_0 é chamado de ponto singular ou singularidade.*

4.3.1 EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN

Se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é derivável em termos de u e v e tomando $h = k \in \mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned} f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{[u(x+k,y) + iv(x+k,y)] - [u(x,y) + iv(x,y)]}{k} \\ &= \frac{[u(x+k,y) - u(x,y)] + i\,[v(x+k,y) - v(x,y)]}{k} \\ &= \frac{u(x+k,y) - u(x,y)}{k} + i\frac{v(x+k,y) - v(x,y)}{k} \end{aligned} \tag{4.3}$$

fazendo $k \to 0$ em (4.3)

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \tag{4.4}$$

De modo análogo, e fazendo $h = it$, $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{[u(x,y+t) + iv(x,y+t)] - [u(x,y) + iv(x,y)]}{it} \\ &= \frac{[u(x,y+t) - u(x,y)] + i\,[v(x,y+t) - v(x,y)]}{it} \\ &= -i\frac{u(x,y+t) - u(x,y)}{t} + \frac{v(x,y+t) - v(x,y)}{t} \end{aligned} \tag{4.5}$$

fazendo $t \to 0$ em (4.5) temos que

$$f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y). \tag{4.6}$$

De (4.4) e (4.6) concluí-se que

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y) \tag{4.7}$$

isto é

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= v_y(x,y) \\ v_x(x,y) &= -u_y(x,y). \end{aligned} \tag{4.8}$$

As equações dadas em (4.8) são denominadas *Equações de Cauchy-Riemann*. Estabelece-se em (4.7) uma fórmula para obter a derivada de f a partir de u e v, e além disso temos a seguinte proposição.

Proposição 4.3.6 *Se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é derivável em $z_0 = x_0 + iy_0$ então as equações de Cauchy-Riemann, são satisfeitas em (x_0, y_0), isto é*

$$\begin{aligned} u_x(x_0,y_0) &= v_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) &= -u_y(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Perguntamo-nos se a recíproca desta afirmação é verdadeira, ou seja, se as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em $z_0 = x_0 + iy_0$, implica que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é derivável em $z_0 = x_0 + iy_0$. Vejamos o exemplo seguinte.

Exemplo 4.3.7 *Seja $f(z) = \sqrt{|xy|}$, onde $z = x + iy$.*

Note que

$$u(x,y) = \sqrt{|xy|} \quad \text{e} \quad v(x,y) = 0.$$

logo

$$v_x(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad v_y(x,y) = 0$$

contudo

$$u_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(k,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

e

$$u_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(0,k) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{k} = 0.$$

Logo $f(z)=\sqrt{|xy|}$ satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em $z=0=0+i0$.

No entanto f não é derivável em $z=0$. Com efeito

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$

tomando $h=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\text{sen}\theta)$ reescrevemos $f'(0)$ como

$$f'(0)=\lim_{r\to 0}\frac{\sqrt{r^2\,|\cos\theta\cdot\text{sen}\theta|}}{re^{i\theta}}=\lim_{r\to 0}\frac{\sqrt{|\cos\theta\cdot\text{sen}\theta|}}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}\sqrt{\frac{|\text{sen}(2\theta)|}{2}}$$

e uma vez que $f'(0)$ depende de θ, concluí-se que $f'(0)$ não existe.

Para que a recíproca seja verdadeira é necessário que f seja analítica, como o próximo resultado estabelece.

Teorema 4.3.8 *Sejam $u=u(x,y)$ e $v=v(x,y)$ funções reais contínuas com derivadas parciais $u_x(x,y), u_y(x,y), v_x(x,y)$ e $v_y(x,y)$ contínuas numa região $\mathscr{R}\subset\mathbb{C}$. Então $f=u+iv$ é analítica em $\mathscr{R}$ se, e somente se, u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em $\mathscr{R}$.*

Prova: : Veja (ÁVILA, 2000).

Exemplo 4.3.9 *A função $f(z)=e^z$ é analítica em $\mathbb{C}$ e além disso $f'(z)=e^z$.*

Note que, se $z=x+iy$ então

$$f(z)=e^z=e^x(\cos y+i\text{sen}y)$$

o que implica

$$u(x,y)=e^x\cos y \quad \text{e} \quad v(x,y)=e^x\text{sen}y$$

assim

$$u_x(x,y)=e^x\cos y=v_y(x,y)$$

e

$$u_y(x,y)=-e^x\text{sen}y=-v_x(x,y),$$

isto é, u e v são contínuas em $\mathbb{C}$ e possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em $\mathbb{C}$, e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. Pelo Teorema 4.3.8 f é analítica em todo $z\in\mathbb{C}$. Sendo f analítica, f é derivável e sua derivada pode ser calculada a partir de (4.7), ou seja,

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = e^x \cos y + ie^x \text{sen} y = e^{x+iy} = e^z.$$

Portanto $f'(z) = e^z$.

4.4 TEORIA INTEGRAL

Nesta seção, será apresentado alguns conceitos sobre a teoria integral de funções de variáveis complexas. Para que seja realizada uma introdução, o conceito acerca de integral de funções de variáveis reais será formalizado.

4.4.1 INTEGRAIS REAIS

O objetivo do cálculo integral envolvendo funções de variáveis reais é o cálculo de áreas delimitadas por funções no plano. Para que esse procedimento possa ocorrer há cinco passos que levam a definição de integral definida a serem conhecidos.

Passos que Levam a Definição da Integral Definida:

1. Seja f uma função de uma variável x definida em todos os pontos em um intervalo fechado $[a,b]$.
2. Seja P uma partição

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

de $[a,b]$ em n subintervalos de comprimento $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (Figura 9).

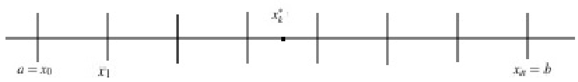

Figura 9: Partição P

3. Seja $||P||$ a norma da partição P de $[a,b]$, isto é, o comprimento do maior subintervalo.
4. Seja x_k^* um ponto em cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de $[a,b]$ (Figura 9).
5. Forma-se produtos $f(x_k^*)\Delta x_k$, $k = 1,2,...,n$, e somemos

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k.$$

Define-se integral definida de f em $[a,b]$ é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k,$$

se esse limite existir.

4.4.2 INTEGRAÇÃO COMPLEXA

Para a definição de integrais complexas é necessário o estudo de arcos e regiões como conteúdo precedente bem como explicitado na seguinte definição.

Definição 4.4.1 *Um arco contínuo é um conjunto $\mathscr{C}$ dado por*

$$\mathscr{C} = \{z(t) = x(t) + iy(t) \mid t \in [a,b]\}$$

onde $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções reais contínuas. Neste caso, dizemos que $z = z(t)$ é uma parametrização de $\mathscr{C}$.

Se $\mathscr{C}$ é um arco contínuo parametrizado por $z(t) = x(t) + iy(t)$ com $t \in [a,b]$, então $-\mathscr{C}$ representa o arco $\mathscr{C}$ percorrido com orientação contrária à original, isto é,

$$-\mathscr{C} : \quad w(t) = z(-t) = x(-t) + iy(-t),$$

com $t \in [-b,-a]$.

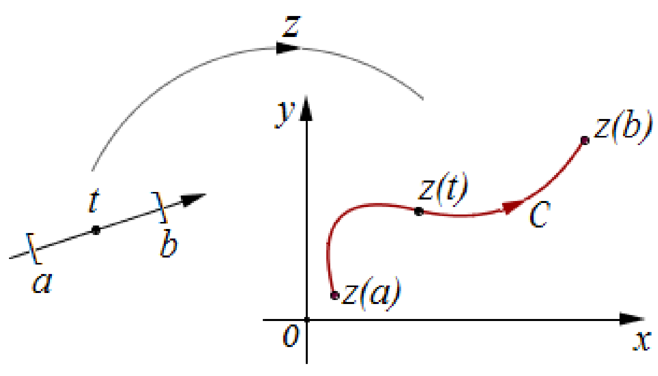

Figura 10: Arco parametrizado.

Exemplo 4.4.2 *Parametrize o arco $\mathscr{C}$ constituído do segmento de reta que liga os pontos $z_1 = 0$ a $z_2 = 2 + 3i$.*

$$z(t) = (z_2 - z_1)t + z_1 = (2 + 3i - 0)t + 0 = 2t + 3it \qquad t \in [0,1].$$

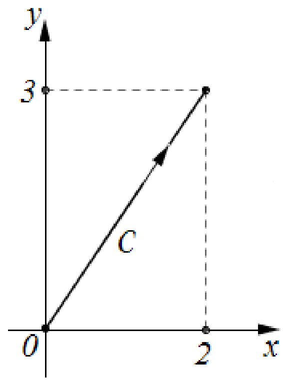

Figura 11: $\mathscr{C}$ **é o segmento de reta de** 0 **a** $2+3i$**.**

Definição 4.4.3 (Curva Simples) *Uma curva simples é um arco em que* $z(t)$ *corresponde a um único valor do parâmetro* t*.*

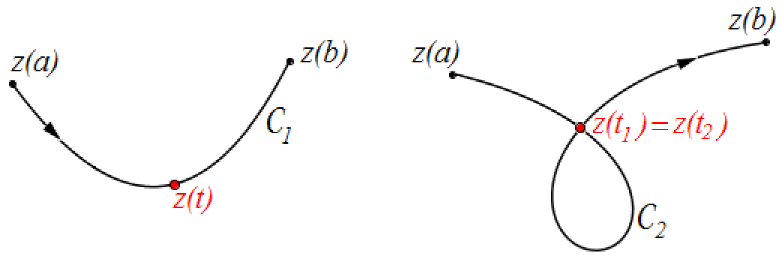

Figura 12: A curva $\mathscr{C}_1$ **é simples. A curva** $\mathscr{C}_2$ **é não-simples**

Definição 4.4.4 (Curva Fechada) *Uma curva fechada é todo arco cujas extremidades são coincidentes, isto é,* $z(a) = z(b)$ *para* $t \in [a,b]$*.*

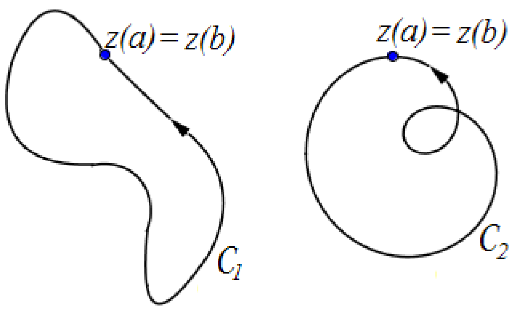

Figura 13: $\mathscr{C}_1$ **é uma curva fechada simples;** $\mathscr{C}_2$ **é uma curva fechada não-simples.**

Definição 4.4.5 (Região Simplesmente Conexa) *Uma região* $\mathscr{R} \subset \mathbb{C}$ *é dita simplesmente conexa quando toda curva* $\mathscr{C} \subset \mathscr{R}$ *pode ser reduzida a um ponto sem sair do interior de* $\mathscr{R}$*.*

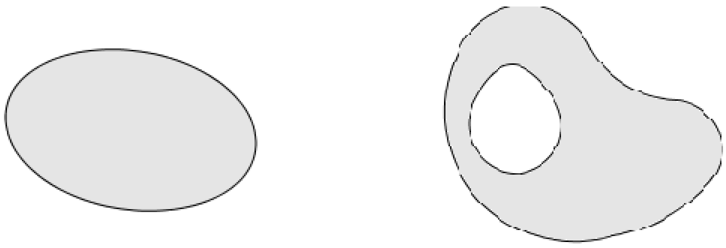

Figura 14: Região Simplesmente Conexa e Região Conexa respectivamente

Intuitivamente, ser simplesmente conexa significa dizer a que a região $\mathscr{R}$ não possui "buracos".

Definição 4.4.6 (Arco Regular) *Dizemos que um arco $z : [a,b] \to \mathbb{C}$ é regular quando $z'(t)$ é contínuo e não se anula para todo $t \in [a,b]$, isto é, se $z(t) = x(t) + iy(t)$, então*

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

é contínua e além disso, $x'(t)$ e $y'(t)$ não se anulam simultaneamente.

Exemplo 4.4.7 *O arco $z : [1,2] \to \mathbb{C}$ dado por*

$$z(t) = t + it^2$$

é regular, pois

$$z'(t) = 1 + 2ti \neq 0 \qquad \forall t \in [1,2]$$

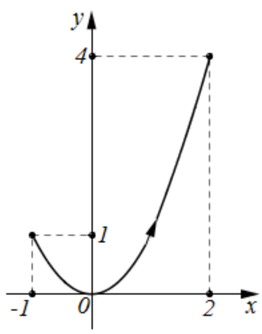

Figura 15: O arco $z(t) = t + it^2$ é regular.

Um exemplo de arco não regular é $w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dado por

$$w(t) = t + i|t|.$$

Veja que para $w'(0)$ não existe.

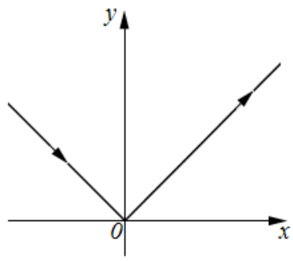

Figura 16: O arco $w(t) = t + i|t|$ não é regular.

Definição 4.4.8 (Contorno) *Chama-se contorno ou caminho todo arco contínuo que consiste de um número finito de arcos regulares.*

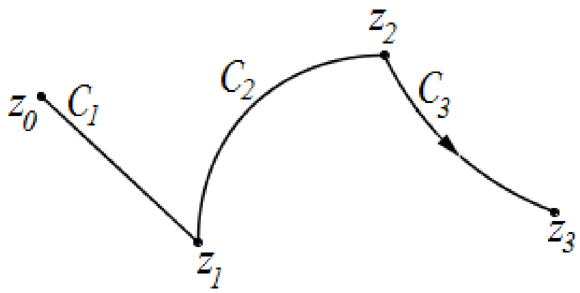

Figura 17: Contorno ou caminho.

Definição 4.4.9 *Seja $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua, onde $f(t) = u(t) + iv(t)$. Definimos a integral de f como*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

Assim como na subseção 4.4.2, é estabelecido alguns passos que levam a definição de integral complexa a serem conhecido.

1. Seja f uma função complexa definida em todos os pontos de uma curva suave C parametrizada por $z(t) = x(t) + iy(t)$, onde $a \leq t \leq b$

2. Seja P uma partição de $[a,b]$ em n subintervalos $[t_{k-1}, t_k]$ com comprimento $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, isto é

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b$$

Isto induz uma partição de C em sub-arcos cujos extremos são os pares:

$$z_{n-1} = x(t_{n-1}) + iy(t_{n-1}), \qquad z_n = x(t_n) + iy(t_n)$$

3. Seja $\| P \|$ a norma da partição de $[a,b]$, isto é, o comprimento do mais longo intervalo;

4. Seja $z_k^* = x_k^* + iy_k^*$ um ponto em cada subarco de C;

5. Formemos n produtos $f(z_k^*)\Delta z_k$, $k = 1,2,...,n$ e os somemos

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k.$$

Definição 4.4.10 *A integral complexa de f em C é*

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k$$

Propriedades:

1. $Re\left(\int_a^b f(t)\, dt\right) = \int_a^b Re(f(t))\, dt$

   Prova: Pela definição 4.4.9, nota-se que

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i\int_a^b v(t)\, dt$$

   Sendo assim,

$$\begin{aligned} Re\left(\int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt\right) = \int_a^b u(t)dt = \int_a^b Re(f(t))dt &= \int_a^b Re(u(t)+iv(t))dt \\ &= \int_a^b u(t)dt \end{aligned}$$

   Portanto,

$$Re\left(\int_a^b f(t)\, dt\right) = \int_a^b Re(f(t))\, dt$$

■

2. $Im\left(\int_a^b f(t)\, dt\right) = \int_a^b Im(f(t))\, dt$

   Prova: Pela definição 4.4.9, nota-se que

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i\int_a^b v(t)\, dt$$

   Dessa forma,

$$Im\left(\int_a^b f(t)\ dt\right) = Im\left(\int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt\right) = \int_a^b v(t)dt = \int_a^b Im(f(t))dt.$$

Portanto,

$$Im\left(\int_a^b f(t)\ dt\right) = \int_a^b Im(f(t))\ dt$$

■

3. $\displaystyle\int_a^b [f(t)+g(t)]\ dt = \int_a^b f(t)\ dt + \int_a^b g(t)\ dt$

Prova: Pela definição de integração complexa temos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(t)+g(t)]\ dt &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}[f(z_k)+g(z_k)]\,\Delta t_k \\
&= \lim_{\|P\|\to 0}\left[\sum_{k=1}^{n}(u_1(t)+iv_1(t))\,\Delta t_k + \sum_{k=1}^{n}(u_2(t)+iv_2(t))\,\Delta t_k\right] \\
&= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}(u_1(t)+iv_1(t))\,\Delta t_k + \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}(u_2(t)+iv_2(t))\,\Delta t_k \\
&= \int_a^b f(t)\ dt + \int_a^b g(t)\ dt
\end{aligned}$$

Concluí-se assim que

$$\int_a^b [f(t)+g(t)]\ dt = \int_a^b f(t)\ dt + \int_a^b g(t)\ dt$$

■

4. $\displaystyle\int_a^b cf(t)\ dt = c\int_a^b f(t)\ dt$ com c constante

Prova: Pela definição de integração complexa temos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b cf(t)\ dt &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} cf(z_k)\Delta t_k \\
&= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} c\,(u_1(t)+iv_1(t))\,\Delta t_k \\
&= c\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}(u_1(t)+iv_1(t))\,\Delta t_k \\
&= c\int_a^b f(t)\ dt
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_a^b cf(t)\, dt = c\int_a^b f(t)\, dt$$

■

5. $\left|\int_a^b f(t)\, dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt$

Prova: Se $\int_a^b f(t)dt = 0$ não há nada para provar.

Suponha que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \neq 0 = re^{i\theta}, \qquad r > 0 \quad e \quad \theta \in \mathbb{R}$, ou seja

$$r = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt$$

Pela propriedade 1 temos

$$r = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt = Re\left[\int_a^b e^{-i\theta} f(t)dt\right].$$

Logo,

$$r = \int_a^b Re(e^{-i\theta} f(t))dt$$

Como $Re(z) \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, segue que,

$$r \leq \int_a^b \left|e^{-i\theta} f(t)\right| dt = \int_a^b \left|e^{-i\theta}\right| |f(t)|\, dt = \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Por outro lado,

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \left|re^{-i\theta}\right| = |r|\left|e^{-i\theta}\right| = r.$$

Portanto,

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

■

Teorema 4.4.11 *Seja $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função contínua e $z(t) = x(t) + iy(t)$ com $t \in [a,b]$ uma parametrização do contorno $\mathscr{C}$. Definimos a integral curvilínea ou integral de contorno de f sobre $\mathscr{C}$ como:*

$$\int_{\mathscr{C}} f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\, dt.$$

Demonstração:

De fato, sabe-se que a integral complexa de f em C, sendo C um contorno é

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k.$$

Abreviando tal notação substituindo $f(z) = u + iv$, $\Delta z = \Delta x + \Delta y$, $\lim\limits_{\|P\|\to 0} = \lim$ e $\sum_{k=1}^{n} = \sum$ podemos escrever o lado direito da última igualdade como

$$\begin{aligned}
\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k &= \lim \sum (u+iv)(\Delta x + i\Delta y) \\
&= \lim \left[\sum (u\Delta x - v\Delta y) + i \sum (v\Delta x + u\Delta y)\right]
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy. \tag{4.10}$$

Dessa forma, separamos em partes real e imaginária a integral de contorno $\int_C f(z)dz$. Sabe-se por hipótese que $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são equações paramétricas de C. Dessa forma, podemos substituir os símbolos x, y, dx e dy por $x(t), y(t), x'(t)dt$ e $y'(t)dt$, respectivamente traduzindo o lado direito de (4.4.2) em

$$\int_a^b [u(x(t),y(t))]x' - v(x(t),y(t))y'(t)]dt + i\int_a^b [v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)]dt.$$

Dessa forma, colocando $x'(t) + iy'(t)$ em evidência e considerando $z(t) = x(t) + iy(t)$, concluímos que

$$[u(x(t),y(t)) + iv(x(t)+y(t))][x'(t) + iy'(t)] = f(z(t))z'(t)$$

$\blacksquare$

Observação 4.4.12 *A integral de $f = f(z)$ sobre uma curva fechada $\mathscr{C}$, é denotada por*

$$\oint_{\mathscr{C}} f(z)\, dz.$$

Propriedades:

1. Se f e g são funções complexas, a e b são constantes, então

$$\int_{\mathscr{C}} af(z) + bg(z)\, dz = a\int_{\mathscr{C}} f(z)\, dz + b\int_{\mathscr{C}} g(z)\, dz;$$

2. Se $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \cdots \cup \mathscr{C}_n$ então

$$\int_{\mathscr{C}} f(z)\, dz = \int_{\mathscr{C}_1} f(z)\, dz + \cdots + \int_{\mathscr{C}_n} f(z)\, dz;$$

3. Se $-\mathscr{C}$ é o contorno $\mathscr{C}$ com orientação contrária, então

$$\int_{-\mathscr{C}} f(z)\, dz = -\int_{\mathscr{C}} f(z)\, dz;$$

4. Observando que $|dz| = |z'(t)|dt$ temos

$$\left| \int_a^b f(z)\, dz \right| \leqslant \int_a^b |f(z)|\, |dz|.$$

Prova: : A demonstração das propriedades se encontram em (ÁVILA, 2000).

Proposição 4.4.13 *Seja $f : \mathsf{D} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $\Omega \subset \mathsf{D}$ uma região simplesmente conexa onde f é analítica. Se existe F analítica, com $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$ então*

$$\int_{\mathscr{C}} f(z)\, dz = F(z_1) - F(z_0)$$

onde $z_0, z_1 \in \Omega$ e $\mathscr{C}$ é um contorno ligado z_0 a z_1.

Prova: : Veja (ZILL, 2011).

Teorema 4.4.14 (Green) *Seja P, Q funções reais contínuas definidas em um conjunto $\mathscr{R}$ simplesmente conexo, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Então*

$$\iint_{\mathscr{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\partial \mathscr{R}} P\, dx + Q\, dy.$$

Teorema 4.4.15 (Cauchy-Goursat) *Se f é uma função analítica em um domínio simplesmente conexo D, então*

$$\oint_{\mathscr{C}} f(z)\, dz = 0$$

para qualquer contorno fechado $\mathscr{C}$ contido em D.

Prova: Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ e suponha que $f'(z)$ seja contínua. Das Equações de Cauchy-Riemann e do Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned} \oint_{\mathscr{C}} f(z)\, dz &= \oint_{\mathscr{C}} u\, dx - v\, dy + i \oint_{\mathscr{C}} u\, dx - v\, dy \\ &= \iint_{\Omega} (-v_x - u_y)\, dxdy + i \iint_{\Omega} (u_x - v_y)\, dxdy = 0 \end{aligned}$$

onde Ω é região limitada que tem por fronteira a curva $\mathscr{C}$. ■

4.4.2.1 CONSEQUÊNCIAS DO TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT

1. Se f é analítica em D e $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ são contornos fechados então:

$$\oint_{\mathscr{C}_1} f(z)\,dz = 0$$

e nada se pode afirmar sobre $\oint_{\mathscr{C}_2} f(z)\,dz$.

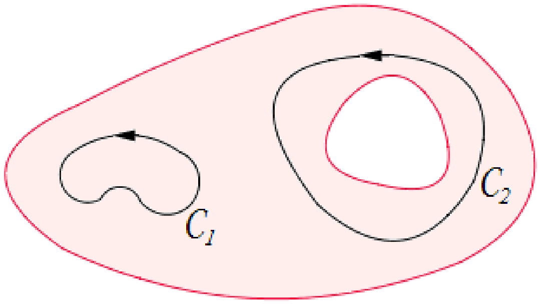

Figura 18: f é analítica sobre $\mathscr{C}_1$.

2. Se f é analítica em D; $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, etc, são contornos ligando z_1 a z_2 em D então

$$\int_{\mathscr{C}_1} f(z)\,dz = \int_{\mathscr{C}_2} f(z)\,dz = \int_{\mathscr{C}_3} f(z)\,dz$$

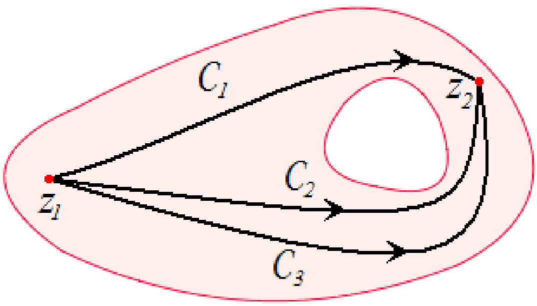

Figura 19: Independência do caminho.

3. Se f é analítica em D, e $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ são contornos fechados conforme a Figura 20, então

$$\oint_{\mathscr{C}_1} f(z)\,dz = \oint_{\mathscr{C}_2} f(z)\,dz \tag{4.11}$$

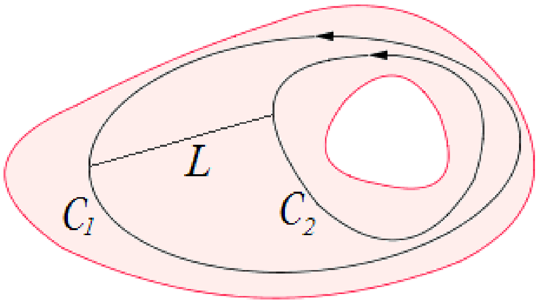

Figura 20: O valor da integral sobre $\mathscr{C}_1$ é o mesmo que sobre $\mathscr{C}_2$.

4. Se f é analítica em D e $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ conforme a Figura 21, então

$$\oint_{\mathscr{C}} f(z)\,dz = \oint_{\mathscr{C}_1} f(z)\,dz + \oint_{\mathscr{C}_2} f(z)\,dz \tag{4.12}$$

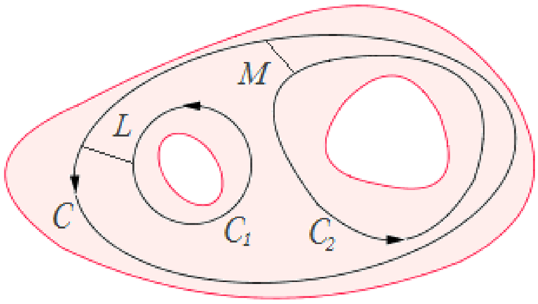

Figura 21: O valor da integral sobre $\mathscr{C}$ é igual a soma das integrais sobre $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$.

Exemplo 4.4.16 *1. Para todo contorno fechado $\mathscr{C} \subset \mathbb{C}$*

$$\oint_{\mathscr{C}} z^n\,dz = 0\,, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

pois $f(z) = z^n$ é função inteira para todo $n = 1,2,3,\ldots$.

2. Se $\mathscr{C} \subset \mathbb{C}$ é um contorno fechado então

$$\oint_{\mathscr{C}} \frac{1}{z-z_0}\,dz = \begin{cases} 0, & se \quad z_0 \notin int(\mathscr{C}) \\ 2\pi i, & se \quad z_0 \in int(\mathscr{C}) \end{cases} \tag{4.13}$$

Note que $z_0 \notin int(\mathscr{C})$ então $f(z) = \dfrac{1}{z-z_0}$ é analítica em $\mathscr{C}$, assim pelo Teorema de Cauchy-Goursat

$$\oint_{\mathscr{C}} \frac{1}{z-z_0}\,dz = 0.$$

Se $z_0 \in int(\mathscr{C})$, tome $\mathscr{C}_1$ a circunferência de centro z_0 e raio r suficientemente pequeno de modo que $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}$, isto é,

$$\mathscr{C}_1 : \ z(t) = z_0 + re^{i\theta} \qquad com \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Da Definição 4.4.11 temos que

$$\begin{aligned} \oint_{\mathscr{C}} \frac{1}{z - z_0}\, dz = \oint_{\mathscr{C}_1} \frac{1}{z - z_0}\, dz &= \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}\, d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} d\theta \ = \ i\,\theta|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

4.4.3 FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

Teorema 4.4.17 *Seja f uma função analítica em um região simplesmente conexa D e sobre o contorno fechado simples $\mathscr{C}$, e z_0 um ponto interior a $\mathscr{C}$. Então*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{C}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \tag{4.14}$$

onde a integração é feita no sentido positivo.

Prova: : Veja (ÁVILA, 2000).

4.4.4 FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY PARA DERIVADAS

Teorema 4.4.18 *Se f é analítica numa região $\mathscr{R}$ simplesmente conexa, então f possui derivada de todas as ordens as quais por sua vez são analíticas em $\mathscr{R}$. Se $z_0 \in \mathscr{R}$ e $\mathscr{C}$ é um contorno fechado contido em $\mathscr{R}$ tal que z_0 pertence ao interior de $\mathscr{C}$ então*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathscr{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \tag{4.15}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Prova: : Veja (ÁVILA, 2000).

4.5 SÉRIES E RESÍDUOS

Definição 4.5.1 (Sequência) *Uma sequência de números complexos $\{z_n\}$ é uma função*

$$\begin{array}{rccl} z: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ & n & \mapsto & z(n) = z_n = x_n + iy_n \end{array}$$

onde $x_n = Re(z_n)$ e $y_n = Im(z_n)$ são sequências numéricas reais.

Definição 4.5.2 (Convergência) *Dizemos que a sequência $\{z_n\}$, converge para $L \in \mathbb{C}$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então*

$$|z_n - L| < \varepsilon.$$

Quando isto ocorre diz-se que L é o limite de z_n quanto n tende para infinito, que é denotado por

$$\lim_{n\to\infty} z_n = L \quad ou \quad z_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} L \quad ou \quad z_n \to L$$

Caso contrário dizemos que sequência é divergente ou que o limite não existe.

Se $\{z_n\}$ é uma sequência convergente, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$

$$|z_n - L| < \varepsilon.$$

Observe que se $L = A + iB$ então

$$\begin{aligned} |z_n - L| &= |(x_n + iy_n) - (A + iB)| \\ &= |(x_n - A) + i(y_n - B)| \end{aligned}$$

assim

$$|x_n - A| \leqslant |z_n - L| \quad \text{e} \quad |y_n - B| \leqslant |z_n - L| \tag{4.16}$$

e por outro lado

$$|z_n - L| \leqslant |x_n - A| + |y_n - B| \tag{4.17}$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} z_n = L \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = A \;\text{ e }\; \lim_{n\to\infty} y_n = B.$$

Exemplo 4.5.3 *Seja* $z_n = \dfrac{2n-i}{n+2i}$. *Observe que*

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{2n-i}{n+2i} = \frac{2n-i}{n+2i} \cdot \frac{n-2i}{n-2i} \\ &= \frac{2n^2-2}{n^2+4} + i\frac{5n}{n^2+1} \end{aligned}$$

tomando

$$x_n = \frac{2n^2-2}{n^2+4} \qquad e \qquad y_n = \frac{5n}{n^2+1}$$

temos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-2}{n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}} = 2$$

e

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{n^2+1} = \lim \frac{5}{n\left(1+\frac{4}{n^2}\right)} = 0$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + iy_n = 2 + i0 = 2.$$

Definição 4.5.4 (Série) *Se* $\{z_n\}$ *é uma sequência de números complexos, definimos, a partir de* $\{z_n\}$*, uma nova sequência* $\{s_n\}$ *por:*

$$\begin{aligned} s_1 &= z_1 \\ s_2 &= z_1 + z_2 \\ &\vdots \\ s_n &= z_1 + z_2 + \cdots + z_n \end{aligned}$$

de modo equivalente

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} x_k + i \sum_{k=1}^{n} y_k$$

A sequências $\{s_n\}$ *é chamada sequência de somas parciais de* $\{z_n\}$.

Chama-se série de termo geral z_n *a soma infinita*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n \cdots \tag{4.18}$$

que será denotada simplesmente por $\sum z_n$ *quando não houver risco de confusão.*

Se $S = \lim_{n\to\infty} s_n$ então diz-se que a série (4.18) é convergente e que sua soma é S e neste caso usar-se-á a notação

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n < \infty \qquad ou \qquad \sum z_n < \infty.$$

Caso contrario, diz que a série (4.18) é divergente; que denotar-se-á por

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \infty \qquad ou \qquad \sum z_n = \infty.$$

Sendo $Re(s_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k$ e $Im(s_n) = \sum_{k=1}^{n} y_k$, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n < \infty \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} y_n < \infty$$

Definição 4.5.5 *Uma série $\sum z_n$ é:*

1. *absolutamente convergente se*
$$\sum |z_n| < \infty;$$
2. *condicionalmente convergente se*
$$\sum z_n < \infty \quad e \quad \sum |z_n| = \infty.$$

Teorema 4.5.6 *Se $\sum |z_n|$ é convergente então $\sum z_n$ é convergente.*

Prova: : Veja (ZILL, 2011).

Exemplo 4.5.7 *Para quais valores de $z \in \mathbb{C}$ a série geométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z^1 + z^2 + \cdots$$

é convergente?

Solução: Para respondermos esta pergunta, tomaremos a sequência das somas parciais de $\{z^n\}$; conforme a definição:

Observe que

$$\begin{aligned}
s_0 &= 1\\
s_1 &= 1+z\\
s_2 &= 1+z+z^2\\
&\vdots\\
s_k &= 1+z+z^2+\cdots+z^k
\end{aligned}\tag{4.19}$$

multiplicando (4.19) por z temos

$$zs_k = z+z^2+\cdots+z^{k+1}\tag{4.20}$$

subtraindo (4.20) de (4.19) e isolando s_k tem-se

$$\begin{aligned}
s_k - zs_k &= 1-z^{k+1}\\
s_k(1-z) &= 1-z^{k+1}\\
s_k &= \frac{1-z^{k+1}}{1-z}
\end{aligned}\tag{4.21}$$

para $|z|<1$ temos que

$$|z^{k+1}| = |z|^{k+1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \Rightarrow \qquad z^{k+1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

assim

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1-z^{k+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}.\tag{4.22}$$

Portanto, para $|z|<1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.\tag{4.23}$$

Definição 4.5.8 *Uma série de potências é uma série da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots\tag{4.24}$$

onde $a_n \in \mathbb{C}$ são os coeficientes, $z_0 \in \mathbb{C}$ é o centro da série e z é uma variável complexa.

Para quais valores de z, (4.24) é convergente? Usando o Teste da Raiz ou Teste da Razão encontramos uma resposta para esta pergunta conforme vemos no exemplo a seguir.

Exemplo 4.5.9 *Considere a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{(n+1)^2}\tag{4.25}$$

o centro da série é $z_0 = 1$, *os coeficientes são* $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Aplicando o Teste da Razão para o termo geral $c_n = \dfrac{(z-1)^n}{(n+1)^2}$, *temos:*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(z-1)^{n+1}}{(n+2)^2}}{\frac{(z-1)^n}{(n+1)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}|z-1|\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 = |z-1|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 = |z-1|.1$$

Desta forma para $|z-1| < 1$ *concluí-se, pelo Teste da Razão, que (4.25) é convergente.*

Geometricamente, a série (4.25) é convergente quando z *está no interior da circunferências de centro* 1 *e raio* 1.

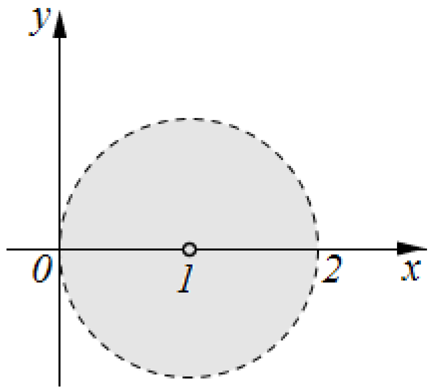

Figura 22: Região de convergência.

Ainda com relação ao exemplo anterior, nota-se que para cada ponto $z \in \mathscr{D}_1(1)$, exites um único $w \in \mathbb{C}$, tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(n+1)^2} = w,$$

pode-se assim estabelecer uma correspondência entre os pontos $z \in \mathscr{D}_1(1)$ e os pontos $w \in \mathbb{C}$, em outras palavras, é possível definir uma função $w = f(z)$ dada por

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathscr{D}_1(1) & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(n+1)^2}. \end{array}$$

Para toda série de potências, existe um número $R \in [0,+\infty)$ ou $R = +\infty$ chamado *raio de convergência*, tal que (4.24) é convergente para $|z-z_0| < R$ e divergente para $|z-z_0| > R$. Para $|z-z_0| = R$ nada se pode afirmar.

- Se $R = 0$ então (4.24) é convergente somente em $z = z_0$;

- Se $R = +\infty$ então (4.24) é convergente para todo $z \in \mathbb{C}$.

O conjunto

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n < \infty \right\}$$

é chamado *região de convergência* da série.

Teorema 4.5.10 *Seja $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - z_0| < R\}$. A função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

é:

1. *analítica em Ω e*
$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}; \tag{4.26}$$

2. *se $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathbb{C}$ é uma curva contida em Ω então*
$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\, dz &= \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \, dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{z_1}^{z_2} a_n (z - z_0)^n \, dz \end{aligned} \tag{4.27}$$
onde $z_1 = \gamma(t_1)$ e $z_2 = \gamma(t_2)$.

É possível obter novas representações para funções partir séries de potências conhecidas, recorrendo a mudanças de variáveis. Por exemplo, sabemos de (4.23) que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \text{para } |z| < 1$$

se $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$ então

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} &= \frac{1}{1-(-z)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \quad \text{para } |-z| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad \text{para } |z| < 1 \end{aligned}$$

Portanto para $|z| < 1$ temos

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n. \tag{4.28}$$

4.5.1 SÉRIE DE TAYLOR

Para introduzir as série de Taylor de uma da função f, considere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Derivando sucessivamente f conforme (4.26) do Teorema 4.5.10, segue que

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \\
f''(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (z-z_0)^{n-2} \\
f'''(z) &= \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (z-z_0)^{n-3} \\
&\vdots \\
f^{(k)}(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-(k-1)) a_n (z-z_0)^{n-k}
\end{aligned}$$

ou de modo equivalente

$$\begin{aligned}
f'(z) &= 1.a_1 + 2a_2(z-z_0)^1 + 3a_3(z-z_0)^2 + \cdots \\
f''(z) &= 2.1.a_2 + 3.2a_3.(z-z_0)^1 + 4.3a_4.(z-z_0)^2 + \cdots \\
f'''(z) &= 3.2.1.a_3 + 4.3.2a_4.(z-z_0)^1 + \cdots \\
&\vdots \\
f^{(k)}(z) &= k!a_k + \frac{(k+1)!}{1} a_{k+1}.(z-z_0)^1 + \cdots
\end{aligned}$$

tomando $f^{(k)}(z_0)$ para $k = 1, 2, \ldots$ temos

$$f^{(k)}(z_0) = k!a_k \quad \Leftrightarrow \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \tag{4.29}$$

ou seja, pode-se expandir f em série de potências de $(z-z_0)$, a partir dos valores das derivadas de f calculadas em z_0. Temos assim um método prático para calcular os coeficientes a_n e obter uma representação de f na forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \tag{4.30}$$

A série dada em (4.30) é chamada de *série de Taylor* de f em torno do ponto z_0.

Quando $z_0 = 0$, a série (4.30) reduz-se a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

e é denominada como série de *MacLaurin*.

Teorema 4.5.11 (Teorema de Taylor) *Seja f uma função analítica em um domínio D e seja z_0 um ponto em D. Então, f tem a seguinte representação em série*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

válida para o maior círculo C com centro em z_0 e raio R que esteja totalmente contido em D.

Prova: : Veja (ZILL, 2011).

Exemplo 4.5.12 *Obtenha a série de MacLaurin da função $f(z) = e^z$.*

Solução: Calculando as derivadas de f em $z_0 = 0$ temos

$$\begin{array}{ccc} f(z) = e^z & \Rightarrow & f(0) = 1 \\ f'(z) = e^z & \Rightarrow & f'(0) = 1 \\ f''(z) = e^z & \Rightarrow & f''(0) = 1 \\ & \vdots & \\ f^{(n)}(z) = e^z & \Rightarrow & f^{(n)}(0) = 1 \end{array}$$

logo, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

portanto, para todo $z \in \mathbb{C}$ temos

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

4.5.2 SÉRIE DE LAURENT

As séries de Laurent correspondem ao ponto chave deste trabalho, na qual, fundamentará o Teorema dos Resíduos, esse que, por sua vez, viabilizará o cálculo da transformada inversa de Laplace.

Considere a função $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3}$ e observe que f somente não é analítica em $z = 0$, entretanto é possível obter uma expansão em série para f:

$$
\begin{aligned}
\frac{e^z}{z^3} &= \frac{1}{z^3}e^z = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-3}}{n!} \\
&= \underbrace{\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z}}_{\text{potências negativas}} + \frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}z+\frac{1}{5!}z^2+\cdots \\
&= \sum_{n=-3}^{\infty}\frac{z^n}{(n+3)!}
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

Nota-se que série (4.31) possui potências negativas de z e é válida para qualquer valor de $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Esta série é um exemplo de uma *série de Laurent*.

As séries de Laurent fornecem um método relativamente simples de calcular integrais sobre contornos fechados, por exemplo, se recorrermos a (4.31) para calcular

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3}\,dz$$

teremos:

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3}\,dz &= \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}z+\cdots\,dz \\
&= \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^3}\,dz + \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2}\,dz + \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{2z}\,dz + \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{3!}\,dz + \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{4!}z\,dz + \cdots
\end{aligned}
$$

usando a Teorema de Cauchy-Goursat, concluí-se que

$$
\begin{gathered}
\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{3!}\,dz = 0 \\
\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{4!}z\,dz = 0 \\
\vdots \\
\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{(n+3)!}z^n\,dz = 0
\end{gathered}
$$

por outro lado, da Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas tem-se que

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^3}\, dz = 0$$
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2}\, dz = 0$$

ou seja,

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3}\, dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{2z}\, dz = \frac{1}{2} \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz$$

e de (4.13) concluí-se que

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3}\, dz = \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_{-1}} \cdot 2\pi i = \pi i$$

Observe que o valor da $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3}\, dz$ foi obtido pelo produto de $\frac{1}{2} = a_{-1}$ por $2\pi i$, isto nos leva a pensar que a integral em questão só depende do coeficiente a_{-1} da série de Laurent da função em questão.

O próximo resultado fornece condições para a obtenção da série de Laurent de uma dada função f.

Teorema 4.5.13 (de Laurent) *Se $f : \mathsf{A} \to \mathbb{C}$ é uma função analítica em região anelar $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$, então para todo $z \in \Omega$*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{4.32}$$

onde para todo $n \in \mathbb{Z}$ os coeficientes a_n são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \tag{4.33}$$

e $\mathscr{C}$ é um contorno fechado qualquer contido em Ω que envolve z_0 uma vez no sentido positivo.

Prova: : Veja (ÁVILA, 2000).

A série em (4.32) referida é denominada *série de Laurent* de f em potências de $(z - z_0)$.

Definição 4.5.14 *O coeficiente da série de Laurent*

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathscr{C}} f(z)\, dz$$

é chamado de resíduo de f na singularidade isolada z_0 e será denotado por

$$a_{-1} = res\,(f; z_0)\,.$$

Exemplo 4.5.15 *Determine o desenvolvimento em série de Laurent da função*

$$f(z) = \frac{5z+2i}{z(z-i)}$$

na região $1 < |z+i| < 3$.

Solução: Usando frações parciais temos:

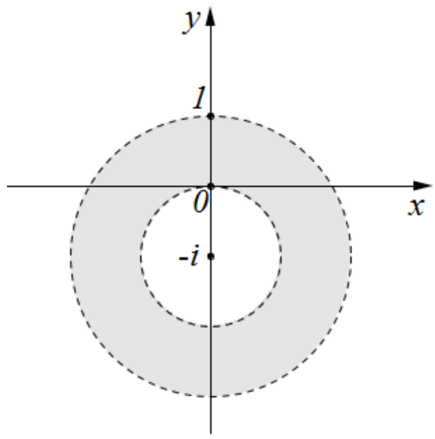

Figura 23: Região anelar $1 < |z+i| < 3$**.**

$$f(z) = \frac{5z+2i}{z(z-i)} = -\frac{2}{z} + \frac{7}{z-i} \tag{4.34}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} = \frac{1}{(z+i)-i} = \frac{1}{(z+i)\left(1-\frac{i}{z+i}\right)} = \frac{1}{z+i}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{i}{z+i}\right)} &= \frac{1}{z+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z+i}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{(z+i)^{n+1}} \end{aligned} \tag{4.35}$$

para $1 < |z+i|$.

Por outro lado

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{(z+i)-2i} = \frac{1}{2i\left(\frac{z+i}{2i}-1\right)} = -\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z+i}{2i}\right)} &= -\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{2i}\right)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(2i)^{n+1}} \end{aligned} \tag{4.36}$$

para $|z+i| < 2$.

Substituindo (4.35) e (4.36) em (4.34) conclui-se que na região $1 < |z+i| < 2$

$$f(z) = -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{(z+i)^{n+1}} - 7\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(2i)^{n+1}}$$

Neste caso

$$res(f;-i) = -2.$$

4.5.3 SINGULARIDADES

As singularidades de uma função complexa correspondem aos pontos na qual a mesma não é analítica. Tal fato não impede que a relação em questão seja analítica em outros pontos que envolvam esse ponto. A definição a seguir trará dois tipos fundamentais de singularidades.

Definição 4.5.16 (Singularidade) *Um ponto z_0 é dito singularidade de uma função f, se f não é analítica em z_0. As singularidades são classificadas em:*

1. ***isoladas**: z_0 é uma singularidade isolada, se existe $r > 0$ tal que f é analítica na região $0 < |z-z_0| < r$, isto é, f é analítica em todo ponto $z \in \mathscr{D}_r(z_0)\backslash\{z_0\}$.*

2. ***não isoladas:** z_0 é uma singularidade não isolada, se para todo $r > 0$, existem pontos em $z \in \mathscr{D}_r(z_0)\backslash\{z_0\}$ onde f não é analítica.*

Exemplo 4.5.17 1. *A função $f(z) = \frac{\cosh(z)}{z(z-1)}$ tem $z = 0$ e $z = 1$ como singularidades isoladas;*

2. *A função $f(z) = \frac{1}{sen(\frac{\pi}{z})}$ possui infinitas singularidades. Note que os valores que anulam o denominador são dados por*

$$sen\left(\frac{\pi}{z}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad n\pi = \frac{\pi}{z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{n}$$

assim, para $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $z_n = \frac{1}{n}$ é uma singularidade isolada; mas o ponto $z = 0$ singularidade não isolada, uma vez que

$$z_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

A definição seguinte denota três possíveis formas que uma expansão em série de Laurent pode assumir. A partir destas, será possível estabelecer uma forma de obter o coeficiente a_{-1} sem a necessidade de expandir em série de Laurent uma função complexa.

Definição 4.5.18 *Seja z_0 uma singularidade isolada de f, de modo que o desenvolvimento de Laurent de f em torno de z_0*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{4.37}$$

é válido numa certa região $0 < |z-z_0| < r$. Então podem ocorrer três possibilidades:

1. *não há potência negativas de $(z-z_0)$ em (4.37), isto é,*

   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{4.38}$$

   Observe que podemos definir

   $$f(z_0) = a_0.$$

   Por isso tal singularidade isolada é dita singularidade removível. Além disso é imediato que

   $$res(f, z_0) = 0.$$

2. *Há um número finito m de potências negativas de $(z-z_0)$ em (4.37), isto é,*

   $$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

   onde $a_{-m} \neq 0$.

   Neste caso z_0 é dito polo de ordem m. Se $m = 1$ então z_0 é chamado polo simples.

3. *Quando existem infinitos termos com potências negativas de $(z-z_0)$, z_0 é dito singularidade essencial.*

Exemplo 4.5.19 *1. A função $f(z) = \frac{senz}{z}$ tem singularidade $z = 0$. Note que $z = 0$ é singularidade isolada, além disto*

$$\begin{aligned} \frac{senz}{z} &= \frac{1}{z} \cdot senz = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n-1)!} \end{aligned}$$

ou seja

$$f(z) = \frac{senz}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{5!} + \cdots$$

logo $z = 0$ é uma singularidade removível. Substituindo $z = 0$ na série, podemos definir $f(0) = 1$.

2. *A função* $f(z) = \frac{e^z}{z^3}$ *tem singularidade isolada* $z = 0$*, que é um polo de ordem* 3*. Com efeito, em (4.31),*

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}z + \frac{1}{5!}z^2 + \cdots$$

ou seja, a série de Laurent de f *possui três potências negativas de* z*. Logo* $z = 0$ *é um polo de ordem* 3*. É facil ver que*

$$res(f;0) = \frac{1}{2}.$$

3. *O ponto* $z = 1$ *é uma singularidade de* $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$*. Veja que*

$$e^{\frac{1}{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z-1}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^n}$$

então, como a série de Laurent de f *possui um infinidade de potências negativas de* $(z-1)$*, concluí-se que* $z = 1$ *é uma singularidade essencial.*

4.5.4 CÁLCULO DE RESÍDUOS

Como visto anteriormente o termo a_{-1} da série de Laurent de uma função f, chamado *resíduo de* f , é determinante no cálculo da integral de f. Sendo assim estabeleceremos um método para obter o resíduo de uma função sem que seja necessário expandir f em série de Laurent.

Proposição 4.5.20 (Singularidade Removível) *Um ponto* z_0 *é singularidade removível de uma função* f *se o seguinte limite existe:*

$$\lim_{z \to z_0} f(z)$$

e neste caso

$$res(f;z_0) = 0.$$

Justificativa: Note que se z_0 é singularidade removível de f, do item *1* da Definição (4.5.18), temos que na expansão em série de Laurent de f em torno de z_0, não há potências negativas de $(z-z_0)$, ou seja,

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0)^1 + a_2(z-z_0)^2 \cdots$$

Fazendo $z \to z_0$ obtemos da igualdade anterior

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$$

consequentemente, como não potência negativa alguma

$$res(f, z_0) = 0.$$

■

Proposição 4.5.21 (Polo de Ordem m) *Um ponto z_0 é polo de ordem m de f, se*

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = L \neq 0.$$

Neste caso

$$res(f; z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right].$$

Justificativa: Note que se z_0 é um polo de ordem m de f, do item *2* da Definição 4.5.18, temos que

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

com $a_{-m} \neq 0$, assim

$$\begin{aligned} (z - z_0)^m f(z) &= a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} \end{aligned} \tag{4.39}$$

logo

$$equation \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = a_{-m} \neq 0. \tag{4.40}$$

Para isolar o termo $a_{-1} = res(f, z_0)$ em (4.39), derivamos (4.39) $m-1$ vezes, e tomamos $z \to z_0$.

■

Observação 4.5.22 (Polo Simples) *Quando $m = 1$ em (4.40), isto é, quando z_0 é um polo simples, o cálculo do resíduo em z_0 simplifica-se para*

$$res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{4.41}$$

4.5.5 TEOREMA DOS RESÍDUOS

O Teorema dos Resíduos é o ponto central deste trabalho. A partir dele pode-se obter os valores de integrais de contorno de funções complexas a partir de suas singularidades. Como o foco principal do trabalho é a aplicação da transformada de Laplace para a obtenção de soluções de equações diferenciais com o auxílio do Teorema dos Resíduos, o seguinte Teorema é necessário para este fim.

Teorema 4.5.23 (Teorema dos Resíduos) *Seja f uma função analítica em um domínio* D*, exceto em um número finito $z_1, z_2, \ldots, z_k$ de singularidades isoladas. Então*

$$\oint_{\mathscr{C}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} res(f, z_j)$$

onde $\mathscr{C}$ é um contorno fechado em D *envolvendo $z_1, z_2, \ldots, z_k$ uma vez no sentido positivo.*

Prova: : Como consequência do Teorema de Cauchy-Goursat (4.12), temos que a integral de f sobre $\mathscr{C}$ pode ser calculada como a soma das integrais de f sobre os contornos que envolvem cada uma das singularidades conforme a Figura a seguir

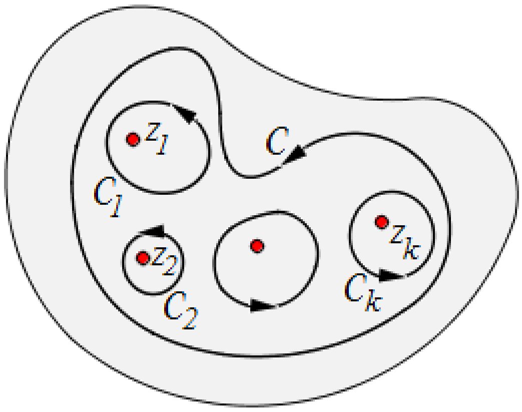

Figura 24: $z_1, \ldots, z_k$ **são singularidades isoladas.**

Desta forma

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathscr{C}} f(z)\,dz &= \oint_{\mathscr{C}_1} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{\mathscr{C}_k} f(z)\,dz \\
&= 2\pi i res(f, z_1) + \cdots + 2\pi i res(f, z_k) \\
&= 2\pi i\,(res(f, z_1) + \cdots + res(f, z_k)) \\
&= 2\pi i \sum_{j=1}^{k} res(f, z_j)
\end{aligned}$$

■

Exemplo 4.5.24 *Calcule a integral*

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{(z+1)(z-2)^2}\,dz$$

utilizando o Teorema dos Resíduos.

Solução: Para obter o valor da integral acima, considere a função

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)(z-2)^2}$$

cujas singularidades são $z_1 = -1$ e $z_2 = 2$ que estão no interior de $\mathscr{C} : |z| = 3$.

Para empregar o Teorema dos Resíduos, é necessários calcular os resíduos em cada singularidade, após a classificação das mesmas.

Classificação das Singularidades de f.

Note que $z_1 = -1$ é polo simples. Com efeito

$$\lim_{z \to -1} (z+1) f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{e^z}{(z-2)^2} = \frac{1}{9e} \neq 0.$$

Portanto, segue que

$$res(f; -1) = \frac{1}{9e}.$$

Note que $z_2 = 2$ é polo de ordem 2. Com efeito

$$\lim_{z \to 2} (z-2)^2 f(z) = \lim_{z \to 2} \frac{e^z}{z+1} = \frac{e^2}{3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} res(f; 2) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz} \left[(z-2)^2 f(z) \right] &= \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^z}{z+1} \right) \\ &= \lim_{z \to 2} \frac{e^z (z+1) - e^z}{(z+1)^2} = \frac{2e^2}{9}. \end{aligned}$$

Assim, do Teorema dos Resíduos, segue que

$$\begin{aligned} \oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{(z+1)(z-2)^2} \, dz &= 2\pi i \sum_{j=1}^{2} res(f; z_j) \\ &= \frac{2\pi i (1 + 2e^3)}{9e}. \end{aligned}$$

5 TRANFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Nos capítulos anteriores, relatou-se sobre as propriedades da transformada de Laplace e a teoria de funções de variáveis complexas. O presente capítulo trata da transformada inversa de Laplace e realizará aplicações em funções diferenciais que descrevem fenômenos, tais como os circuitos elétricos.

Temos, a partir de (1.1), que o cálculo da transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é realizado pela aplicação na transformada integral, obtendo assim uma nova função $F(s)$. A partir dos estudos realizados acerca da teoria de funções complexas poderemos por meio do Teorema dos Resíduos calcular a transformada inversa de Laplace dessas funções.

O Lema a seguir, fundamenta e fornece o embasamento necessário para que a aplicação do Teorema dos Resíduos para a obtenção da transformada inversa de Laplace possa ser obtida. Tal resultado é uma adaptação do Lema de Jordan em (ZILL, 2011), visando a aplicação na transformada de Laplace.

5.1 LEMA DE JORDAN

Lema 5.1.1 *Sejam $R > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e*

$$\mathscr{C}_R = \left\{ z = \gamma + Re^{i\theta} \;\middle|\; \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right\}.$$

Se f é analítica no semiplano $Re(z) \leqslant \gamma$, exceto num número finito de singularidades isoladas e

$$\mathsf{G}(R) = \max_{z \in C_R} \{|f(z)|\} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

então

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathscr{C}_R} e^{rz} f(z)\, dz = 0.$$

Prova: De fato

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{C}_R} e^{rz} f(z)\, dz &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{r(\gamma+Re^{i\theta})} f(\gamma+Re^{i\theta}) iRe^{i\theta}\, d\theta \\
&= iR \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{i\theta} e^{r\gamma+rR(\cos\theta+i\mathrm{sen}\theta)} f(\gamma+Re^{i\theta})\, d\theta \\
&= iR \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{r(\gamma+R\cos\theta)} e^{i(\theta+rR\mathrm{sen}\theta)} f(\gamma+Re^{i\theta})\, d\theta
\end{aligned}$$

Assim

$$\left| \int_{\mathscr{C}_R} e^{rz} f(z)\, dz \right| \leqslant R\mathrm{G}(R) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{r(\gamma+R\cos\theta)}\, d\theta. \tag{5.1}$$

Observe que o integrando de (5.1), $e^{r(\gamma+R\cos\theta)}$, é simétrico com relação a reta $\theta = \pi$.

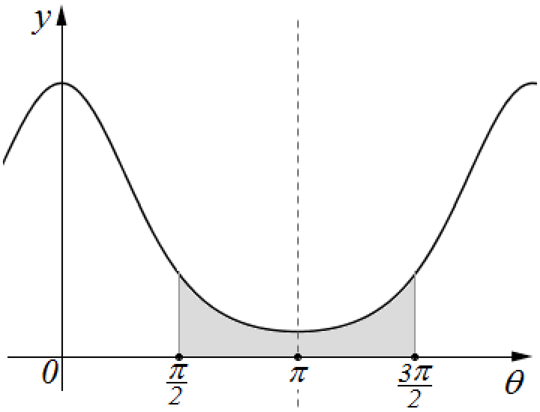

Figura 25: Gráfico $y = e^{r(\gamma+R\cos\theta)}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{r(\gamma+R\cos\theta)}\, d\theta = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{r(\gamma+R\cos\theta)}\, d\theta. \tag{5.2}$$

Por outro lado, observando que o gráfico de $y = \cos\theta$ está abaixo do gráfico da reta $y = -\frac{2}{\pi}\theta + 1$ como expresso na Figura 26 segue que para $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

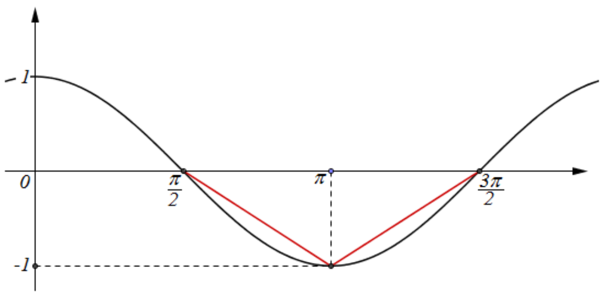

Figura 26: Gráfico de $y = \cos\theta$**.**

$$\cos\theta \leqslant -\frac{2}{\pi}\theta + 1 \tag{5.3}$$

o que implica para $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$$e^{r(\gamma + R\cos\theta)} \leqslant e^{r\left(\gamma - R\left(\frac{2\theta}{\pi} - 1\right)\right)}. \tag{5.4}$$

Substituindo (5.4) em (5.2) temos

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{r(\gamma + R\cos\theta)}\, d\theta &\leqslant 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{r\left(\gamma - R\left(\frac{2\theta}{\pi} - 1\right)\right)}\, d\theta \\
&= 2e^{r(\gamma + R)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\frac{2rR}{\pi}\theta}\, d\theta \\
&= -e^{r(\gamma + R)} \frac{\pi}{rR} \left[e^{-\frac{2rR}{\pi}\theta}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= -e^{r(\gamma + R)} \frac{\pi}{rR} \left[e^{-2rR} - e^{-rR}\right] \\
&= -e^{r(\gamma + R)} \frac{\pi}{rR} e^{-rR} \left[e^{-rR} - 1\right] \\
&= -\frac{\pi e^{r\gamma}}{rR} \left[e^{-rR} - 1\right]
\end{aligned} \tag{5.5}$$

substituindo (5.5) em (5.1) temos

$$\left|\int_{\mathscr{C}_R} e^{rz} f(z)\, dz\right| \leqslant -\frac{\pi e^{r\gamma}}{r} \mathsf{G}(R) \left(e^{-rR} - 1\right). \tag{5.6}$$

Fazendo $R \to \infty$ em (5.6) temos

$$\lim_{R\to\infty} -\frac{\pi e^{r\gamma}}{r} \mathsf{G}(R) \left(e^{-rR} - 1\right) = 0$$

pois, $\left(e^{-rR} - 1\right)$ é limitado e da hipótese, $\mathsf{G}(R) \to 0$. Logo

$$\lim_{R\to\infty} \left|\int_{\mathscr{C}_R} e^{rz} f(z)\, dz\right| = 0$$

portanto, como queríamos demonstrar, concluímos que

$$\int_{\mathscr{C}_R} e^{rz} f(z)\, dz \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

■

5.2 FÓRMULA COMPLEXA DE INVERSÃO

A fórmula complexa de inversão corresponde a alternativa de encontrar a transformada inversa de Laplace a partir da integração complexa. O Teorema a seguir é uma generalização deste procedimento, sendo assim, mais eficaz que métodos convencionais. Este resultado foi embasado em (ÁVILA, 2000), bem como os conceitos pertinentes as integrais de Fourier presente no capítulo preliminar.

Teorema 5.2.1 *Sejam f e f' funções seccionalmente contínuas em $[0,+\infty)$, f de ordem exponencial γ_0 para $t \geqslant 0$. Se $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ então*

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}F(s)\,ds,$$

onde $\gamma > \gamma_0$.

Prova: : Por (1.1) sabe-se que

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} f(u)du. \tag{5.7}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st}F(s)ds &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT}\int_0^{\infty} e^{st}e^{-su}f(u)duds\\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT}\int_0^{\infty} e^{st-su}f(u)duds\end{aligned} \tag{5.8}$$

Tomando em (5.8) $s = \gamma + iy$, $ds = idy$ temos

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}e^{\gamma t}\int_{-T}^{T} e^{iyt}dy\int_0^{\infty} e^{-iyu}[e^{-\gamma u}f(u)]du &= \frac{1}{2\pi}e^{\gamma t}\begin{cases} 2\pi e^{-\gamma t}f(t) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}\\ &= \begin{cases} f(t) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}\end{aligned} \tag{5.9}$$

pelo Teorema da Integral de Fourier. Assim,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}F(s)\,ds.$$

■

Observe pela Figura 27 que a integração de contorno é efetuada sobre a reta ℓ perpendicular ao eixo-real passando pelo ponto $(\gamma, 0)$.

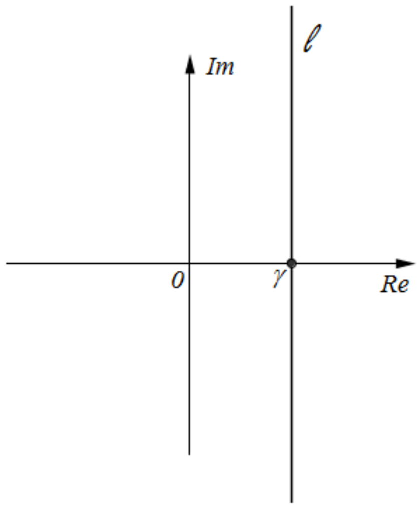

Figura 27: Contorno ℓ.

Para obter o valor da integral, podemos empregar o Teorema dos Resíduos. Para isto consideremos o contorno fechado $\mathscr{B}_R = L_R \cup C_R$, onde:

$$L_R: \quad s(\tau) = \gamma + i\tau \qquad \text{com} \qquad \tau \in [-R, R]$$

$$C_R: \quad s(\theta) = \gamma + Re^{i\theta} \qquad \text{com} \qquad \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

de modo que para $R > 0$ suficientemente grande, o contorno $\mathscr{B}_R$ contenha todas as singularidades do integrando $e^{st}F(s)$.

O contorno $\mathscr{B}_R$ é chamado de *contorno de Bromwich*.

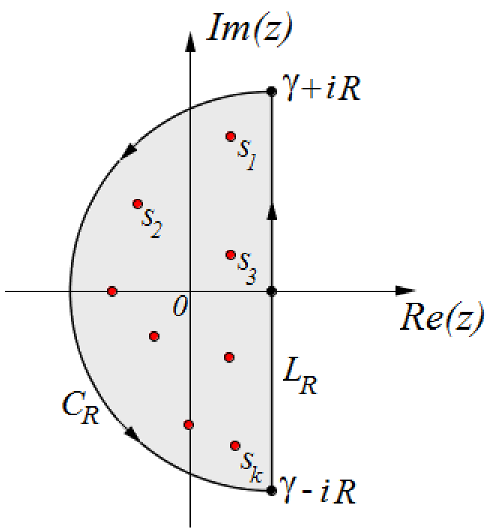

Figura 28: Contorno de Bromwich.

Observe que quando $R \to \infty$, o contorno $\mathscr{B}_R$ degenera-se-á para reta ℓ.

O Teorema a seguir garantirá que a fórmula complexa de inversão poderá ser calculada a partir do Teorema dos Resíduos, enunciado na seção 5.4.8.

Teorema 5.2.2 *Seja $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ uma função que possui um número finito de singularidades isoladas $s_1, s_2, \ldots, s_k$ à esquerda da reta vertical ℓ, $\ell : Re(s) = \gamma$, e $\mathscr{B}_R$ o contorno de Bromwich. Se $sF(s)$ for limitada em C_R quando $R \to \infty$ então*

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{j=1}^{k} res\left(e^{st}F(s), s_j\right).$$

Prova: Do Teorema dos Resíduos tem-se que

$$\oint_{\mathscr{B}_R} e^{st}F(s)\,ds = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} res\left(e^{st}F(s), s_j\right). \tag{5.10}$$

Por outro lado

$$\oint_{\mathscr{B}_R} e^{st}F(s)\,ds = \int_{C_R} e^{st}F(s)\,ds + \int_{L_R} e^{st}F(s)\,ds$$

isto é

$$\int_{L_R} e^{st}F(s)\,ds = -\int_{C_R} e^{st}F(s)\,ds + \oint_{\mathscr{B}_R} e^{st}F(s)\,ds$$

ou seja

$$\int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} e^{st}F(s)\,ds \quad = \quad -\int_{C_R} e^{st}F(s)\,ds + 2\pi i \sum_{j=1}^{k} res\left(e^{st}F(s), s_j\right).$$

Tomando $R \to \infty$ e usando Lema (5.1.1)

$$\int_{C_R} e^{st}F(s)\,ds \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

logo

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} e^{st}F(s)\,ds = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} res\left(e^{st}F(s), s_j\right)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}F(s)\,ds = \sum_{j=1}^{k} res\left(e^{st}F(s), s_j\right).$$

Portanto, como queríamos demonstrar, concluímos que

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{j=1}^{k} res\left(e^{st}F(s), s_j\right).$$

■

5.3 APLICAÇÕES

Até o presente momento foi elaborado um apanhado acerca da definição, condições de existência e propriedades da transformada de Laplace, assim como, toda a teoria de funções de variáveis complexas. Esse estudo irá fundamentar e servir de suporte para a aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações integro-diferenciais.

Alguns problemas físicos caracterizados por tais equações serão explicitados e solucionados pela aplicação do Teorema dos Resíduos. Será possível visualizar que tal estratégia foge do convencional, ou seja, da utilização de tabelas para se chegar ao objetivo proposto. Iniciaremos com alguns exemplos simples até que estejamos aptos a descrever e resolver problemas físicos.

5.3.1 CIRCUITOS ELÉTRICOS

Mostraremos a eficiência da aplicação da transformada de Laplace na obtenção de soluções para os circuitos elétricos. Não será estendida as definições acerca dos conceitos que regem tal campo mas sim, alguns exemplos de circuitos, bem como suas respectivas soluções.

Um circuito consiste em um número qualquer de elementos unidos por seus terminais, com pelo menos um caminho fechado através do qual a carga possa fluir. Podemos vislumbrar dois tipos de circuitos, sendo esses: o circuito RC, caracterizado por um resistor e um capacitor, e ainda o circuito RL formado por um resistor e um indutor. As definições conseguintes são provenientes de (MALLEY, 1993).

Iremos nos deparar com alguns fatores importantes nesse estudo. A corrente elétrica i que é resultante do movimento de cargas elétricas e medida em ampère (A) é uma função do tempo t. Assim como seu nome nos deixa deduzir, o resistor é o componente capaz de transformar a energia elétrica em energia térmica e é medida em ohm (Ω). O capacitor, por sua vez, é responsável pelo armazenamento de cargas em seus condutores e medidos em farads (F). A indutância L medida em henrys (H), é capaz de armazenar energia na forma de campo magnético. Temos ainda a tensão E em volts (V) e a carga Q em coulombs (C) são funções do tempo

Podemos estabelecer uma relação entre carga e corrente elétrica, sendo esta

$$i = \frac{dQ}{dt}, \tag{5.11}$$

e ainda pela segunda lei de Kirchhoff, pode-se expressar o fluxo da corrente no circuito. A lei em questão diz que em um circuito fechado, a tensão aplicada é igual a soma das quedas de tensão no resto do circuito. A partir desta afirmação podemos estabelecer que

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}Q = E(t), \tag{5.12}$$

pois, a queda de tensão no resistor é Ri, a queda de tensão no capacitor é $\frac{Q}{C}$ e, a queda de tensão no indutor é $L\frac{di}{dt}$.

Combinando a equação (6.8) com a equação (6.9) obtemos uma equação de segunda ordem com relação a carga Q, sendo esta

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t), \tag{5.13}$$

onde as condições iniciais para 5.3.1 são

$$Q(t_0) = Q_0, \quad Q'(t_0) = i(t_0) = i_0.$$

Ainda, através da equação 5.3.1 pode-se obter uma equação diferencial para a corrente i diferenciando 5.3.1 e, posteriormente, utilizando (6.8). Obtém-se assim

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i = E(t), \tag{5.14}$$

com as condições iniciais

$$i(t_0) = i_0, \quad i'(t_0) = i'_0.$$

Exemplo 5.3.1 *Um circuito RL tem uma voltagem de* 5V*, uma indutância de* 1 *henry, uma resistência de* 60 *ohm e não tem corrente inicial.Determinar a corrente no circuito para qualquer instante de tempo* t.

Solução: O circuíto explicitado corresponde a Figura a seguir:

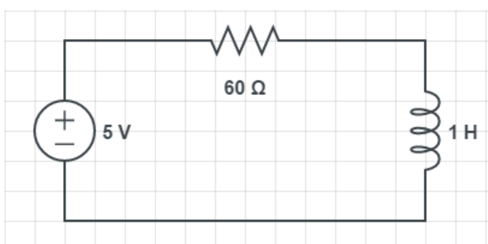

Figura 29: Circuíto elétrico.

Pela equação (6.10) a expressão que determina a corrente i no circuíto é

$$\frac{di}{dt} + 60i = 5. \tag{5.15}$$

Dessa forma, poderemos solucionar tal expressão aplicando a transformada de Laplace com o auxílio do Teorema dos Resíduos. Pelos Teoremas 3.2 e 3.2.7 temos que a equação (6.12) se tornará

$$sI(s) + 60I(s) = \frac{5}{s} \Rightarrow I(s) = \frac{5}{s(s+60)} \tag{5.16}$$

Pela fórmula complexa de inversão

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\frac{5}{s(s+60)}\,ds, \tag{5.17}$$

onde $\gamma > \gamma_0$.

Deveremos agora classificar as duas singularidades de $e^{st}I(s) = e^{st}\frac{5}{s(s+60)}$ sendo essas: $s_1 = 0$ e $s_2 = -60$.

- Para $s_1 = 0$ temos que,

$$\lim_{s\to 0}(s-0)e^{st}\frac{5}{s(s+60)} = \lim_{s\to 0}\frac{5e^{st}}{s+60} = \frac{1}{12} \tag{5.18}$$

- Para $s_2 = -60$ temos

$$\lim_{s\to -60}(s+60)e^{st}\frac{5}{s(s+60)} = \lim_{s\to -60}\frac{5e^{st}}{s} = -\frac{1}{12}e^{-60t} \tag{5.19}$$

Aplicando assim o Teorema 5.2.2 teremos a partir da equação (6.14)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\frac{5}{s(s+60)}\,ds &= \frac{1}{12} - \frac{1}{12}e^{-60t}\\ &= \frac{1}{12}\left(1 - e^{-60t}\right).\end{aligned}$$

Exemplo 5.3.2 *Uma bateria de* $12V$ *é conectada a um circuíto em série RL no qual a indutância é de* $\frac{1}{2}$ *henry e a resistência do resistor,* $10ohm$. *Determine a corrente i sabendo que a corrente inicial é de 2A.*

Solução: O circuíto correspondente é o seguinte:

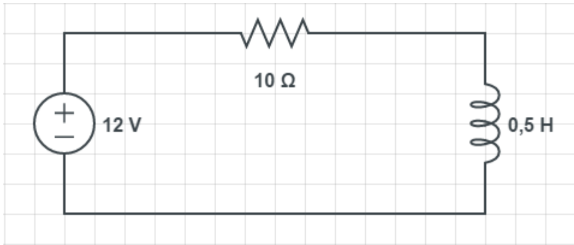

Figura 30: Circuíto elétrico.

Pela lei de Kirchhoff, a equação que caracteriza o circuíto RL em questão é a equação (6.10). Substituindo os valores dados na questão obtemos a seguinte expressão:

$$i' + 20i = 24 \tag{5.20}$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros da equação (6.17) e recorrendo aos Teoremas 3.2 e 3.2.7 obtemos

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{i'\} + 20\mathscr{L}\{i\} &= \mathscr{L}\{24\} \\ \Rightarrow sI(s) - i(0) + 20I(s) &= \frac{24}{s} \end{aligned} \tag{5.21}$$

Substituindo o valor da corrente em $t = 0$ em (5.21) e isolando o termo $I(s)$ chegamos na seguinte expressão

$$sI(s) - i(0) + 20I(s) = \frac{24}{s} \tag{5.22}$$

$$\Rightarrow sI(s) - 2 + 20I(s) = \frac{24}{s} \tag{5.23}$$

$$\Rightarrow I(s) = \frac{24 + 2s}{s(s+20)} \tag{5.24}$$

Pela fórmula complexa de inversão, a transformada inversa de Laplace é dada pela seguinte integral:

$$\mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st}\frac{25 + 2s}{s(s+20)}\, ds \tag{5.25}$$

Por meio do Teorema dos Resíduos iremos obter a solução da integral em (5.25). A singularidades de $\frac{25+2s}{s(s+20)}$ são $s_1 = 0$ e $s_2 = -20$. Classificaremos, portanto, tais singularidades.

- Para $s_1 = 0$ temos
$$\lim_{s\to 0}(s-0)e^{st}\frac{24+2s}{s+20} = \lim_{s\to 0}\frac{24+2s}{s+20}e^{st} = \frac{6}{5} \tag{5.26}$$

- Para $s_2 = -20$ temos

$$\lim_{s\to -20}(s+20)\frac{24+2s}{s(s+20)}e^{st} = \lim_{s\to -20}\frac{24+2s}{s} = \frac{4}{5}e^{st} \tag{5.27}$$

Sendo assim, aplicando o Teorema dos Resíduos na equação (6.23) obtemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\frac{25+2s}{s(s+20)}\,ds = \frac{6}{5}+\frac{4}{5}e^{st} \tag{5.28}$$
$$= \frac{4e^{st}+6}{5}. \tag{5.29}$$

Portanto, o valor da corrente i no circuíto RL dado é

$$i(t) = \frac{4e^{st}+6}{5}.$$

Exemplo 5.3.3 *Uma força eletromotriz (fem) de* 100 *volts é aplicada a um circuíto em série RC por uma resistência de* 200*ohm e uma capacitância de* 10^{-4} *farad. Determine a carga* $q(t)$ *no capacitor, sabendo que* $q(0) = 0$*.*

Solução: O circuíto em questão é o apresentando na Figura a seguir

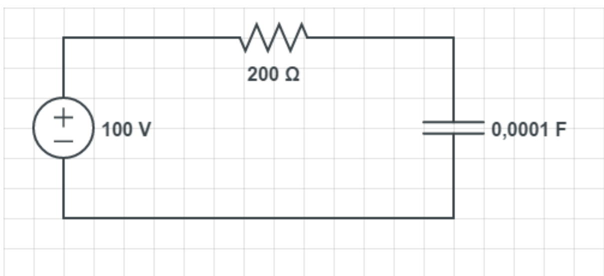

Figura 31: Circuíto elétrico.

Pelas leis de Kirchhoff temos que a expressão que descreve tal questão é

$$\frac{dq}{dt}+\frac{q}{CR} = \frac{E(t)}{R} \tag{5.30}$$

Substituindo os valores dados na equação (5.30) chegamos na seguinte expressão

$$q' + 50q = \frac{1}{2} \tag{5.31}$$

Podemos aplicar a transformada de Laplace em ambos os membros da equação (6.29), obtendo assim

$$\mathscr{L}\{q'\} + 50\mathscr{L}\{q\} = \mathscr{L}\{\frac{1}{2}\}. \tag{5.32}$$

Recorrendo ao Teorema 3.2.7 em (5.32) concluímos que,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{q'\} + 50\mathscr{L}\{q\} = \mathscr{L}\{\frac{1}{2}\} & \\
\Rightarrow sQ(s) - q(0) + 50Q(s) &= \frac{1}{2s} \\
\Rightarrow Q(s) &= \frac{1}{(s+50)2s}.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Pela fórmula complexa de inversão, sabe que

$$\mathscr{L}^{-1}\{Q(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\frac{1}{(s+50)2s}\,ds = \sum_{j=1}^{k} res(e^{st}Q(s);s_j). \tag{5.34}$$

Calcularemos o valor da integral em (5.34) recorrendo ao Teorema dos Resíduos, sabendo que as singularidades da função no integrando são $s_1 = 0$ e $s_2 = -50$. Classificaremos assim tais singularidades.

- Para $s_1 = 0$ note que

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}(s-0)e^{st}\frac{1}{(s+50)2s} &= \lim_{s\to 0} e^{st}\frac{1}{(s+50)2} \\
&= \frac{1}{100}
\end{aligned}$$

Logo,

$$res\,(Q(s);0) = \frac{1}{100}. \tag{5.35}$$

- Para $s_2 = -50$ note que

$$\begin{aligned}\lim_{s\to -50}(s+50)e^{st}\frac{1}{(s+50)2s} &= \lim_{s\to -50}\frac{e^{st}}{2s}\\ &= -\frac{e^{-50t}}{100}.\end{aligned}$$

Logo,

$$res\,(Q(s);-50) = -\frac{e^{-50t}}{100} \tag{5.36}$$

Portanto, por (5.34) temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\frac{1}{(s+50)2s}\,ds &= \frac{1}{100}-\frac{e^{-50t}}{100}\\ &= \frac{1}{100}\left(1-e^{-50t}\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$q(t) = \frac{1}{100}\left(1-e^{-50t}\right)$$

Exemplo 5.3.4 *Um circuito em série tem um capacitor de* $0,25\cdot 10^{-6}F$ *e um indutor de* $1H$*. A carga inicial no capacitor é* $10^{-6}C$ *e não há corrente inicial. Encontre a carga* Q *em qualquer instante* t

Solução:

Para a resolução deste problema, poderemos utilizar a equação 5.3.1. Assim, substituindo os valores dados no problema teremos

$$Q'' + \frac{1}{0,25\cdot 10^{-6}}Q = 0. \tag{5.37}$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros de (5.37) e substituindo as condições iniciais obtemos

$$s^2Q(s) - sq(0) - q'(0) + Q(s)\frac{1}{0,25\cdot 10^{-6}} = Q(s)(s^2+4\cdot 10^6) - s10^{-6}. \tag{5.38}$$

Isolando o termo $Q(s)$ e, posteriormente fatorando o denominador chegamos que

$$Q(s) = \frac{s10^{-6}}{(s-2000i)(s+2000i)} \tag{5.39}$$

Teremos então que encontrar a transformada inversa de Laplace de $Q(s)$. Para isso, iremos recorrer ao Teorema dos Resíduos. Sabemos que

$$q(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Q(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}Q(s)\,ds = 2\pi i\sum_{j=1}^{k} res(e^{st}Q(s), s_j). \tag{5.40}$$

Para calcular os resíduos devemos classificar as singularidades de

$$e^{st}\frac{s10^{-6}}{(s-2000i)(s+2000i)}.$$

Para $s_1 = 2000i$ note que

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 2000i}(s-2000i)e^{st}\frac{s10^{-6}}{(s-2000i)(s+2000i)} &= e^{2000it}\frac{2000i10^{-6}}{2000i+2000i}\\ &= \frac{e^{2000it}10^{-6}}{2}\end{aligned}$$

Logo,

$$res(e^{st}Q(s);2000i) = \frac{e^{2000it}10^{-6}}{2}. \tag{5.41}$$

Para $s_2 = -2000i$ temos

$$\begin{aligned}\lim_{s\to -2000i}(s+2000i)e^{st}\frac{s10^{-6}}{(s-2000i)(s+2000i)} &= -e^{-2000it}\frac{2000i10^{-6}}{-2000i-2000i}\\ &= \frac{e^{-2000it}10^{-6}}{2}\end{aligned}$$

Logo,

$$res(e^{st}Q(s);-2000i) = \frac{e^{-2000it}10^{-6}}{2}. \tag{5.42}$$

Sendo assim, por (5.41) e (5.42) conclui-se que

$$\begin{aligned}q(t) &= \frac{e^{2000it}10^{-6}}{2} + \frac{e^{-2000it}10^{-6}}{2}\\ &= 10^{-6}\left(\frac{e^{2000it}+e^{-2000it}}{2}\right)\\ &= 10^{-6}cos2000t.\end{aligned}$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A transformada de Laplace é uma estratégia amplamente útil para a obtenção de soluções de equações diferenciais ou ainda equações integrais. Neste trabalho, foi explicitada uma forma de utiliza-la sem que ocorra as limitações das tabelas, alternativa essa geralmente aderida nas literaturas.

Foi apresentado o embasamento necessário para a aplicação do Teorema dos Resíduos para a obtenção da transformada inversa de Laplace. Tanto as definições acerca da transformada de Laplace, como a teoria que fundamenta a integração complexa são essenciais para podermos realizar tal aplicação. Cada propriedade apresentada estava subordinada a resultados previamente abordados.

Pode ser destacado como fatores determinantes para se chegar a aplicação do Teorema dos Resíduos na obtenção da transformada inversa de Laplace o Lema de Jordan, a fórmula complexa de inversão e ainda, as séries de Laurent. Tais conceitos fundamentam essa estratégia, onde, desta forma, faz-se possível a resolução de equações diferenciais recorrendo as propriedades de integrais de contorno. Neste trabalho, foi possível verificar a aplicabilidade de conceitos muitas vezes abstratos vistos no decorrer do ensino superior, como por exemplo, as funções de variáveis complexas na resolução de problemas físicos.

A estratégia abordada mostrou-se eficiente a partir de aplicações realizadas em circuítos elétricos. Esse campo da física é fundamental no dia-a-dia, pois são capazes de transformar a energia cinética presente nos elétrons em energia elétrica. No entanto, a transformada de Laplace pode ser aplicada ainda em outros diversos campos das ciências exatas, como deflexão de vigas, pêndulos, equações do calor, entre outras, tendo em vista que a situação abordada envolva uma modelagem a partir de equações integrais ou diferenciais.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Variáveis Complexas**. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

BOYCE, W. C. D. W. E. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

FIGUEIREDO, D. G. **Equações Diferenciais Aplicadas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

GROOVE, A. C. **An Introduction To The Laplace Transform And The Z Transform**. Grã-Bretanha: Prentice Hall Inc., 1991.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Análise**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

MALLEY, J. R. O. **Análise de Circuitos**. São Paulo: McGraw-Hill, 1993.

SPIEGEL, M. R. **Transformada de Laplace**. E.U.A: McGraw-Hill, 1965.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TONIDANDEL, D. A. V. **Transformada de Laplace: uma obra de engenharia**. Minas Gerais: Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 34, n. 2, 2601, 2012.

ZILL, D. G. **Análise Complexa com aplicações**. U.S.A: LTC, 2011.

ÍNDICE

arco
- contínuo, 41
- parametrização, 41
- regular, 43

caminho, 44
conjunto
- imagem, 28

contorno, 44
- de Bromwich, 74

curva
- fechada, 42
- simples, 42

Equações de Cauchy-Riemann, 38

Função
- de ordem exponencial, 18
- seccionalmente contínua, 18

função, 28
- analítica, 37
- conjunto imagem de, 28
- contradomínio, 28
- domínio, 28
- imagem, 28
- parte imaginária de, 29
- parte real de, 29

números complexos, 28

parametrização, 41
ponto
- regular, 37
- singular, 37

região
- de convergência da série, 58
- simplesmente conexa, 42

resíduo, 63

série, 54
- absolutamente convergente, 55
- condicionalmente convergente, 55
- convergente, 55
- de Laurent, 62
- de MacLaurin, 60
- de potências, 56
- de Taylor, 60
- divergente, 55
- geométrica, 55
- raio de convergência, 57
- região de convergência, 58

sequência, 53
- convergente, 53
- de somas parciais, 54
- divergente, 53

singularidade, 37, 64
- essencial, 65
- removível, 65

Teorema
- da derivada, 24
- da translação, 22
- de Cauchy-Goursat, 49
- de Existência, 19
- de Green, 49
- de Laurent, 62
- de Taylor, 60
- do valor final, 27
- do valor inicial, 26
- linearidade, 22
- mudança de escala, 23

Transformada de Laplace, 10