

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GABRIELA DA SILVA OLIVEIRA

**OTIMIZAÇÃO LINEAR APLICADA AO BALANCEAMENTO DE ESTOQUE DE
UMA INDÚSTRIA DE MÓVEIS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO
2018

GABRIELA DA SILVA OLIVEIRA

**OTIMIZAÇÃO LINEAR APLICADA AO BALANCEAMENTO DE ESTOQUE DE
UMA INDÚSTRIA DE MÓVEIS**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação, apresentado à disciplina TCC 2, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná — UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciada.

Orientador: Glaucia Maria Bressan

CORNÉLIO PROCÓPIO

2018



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática



FOLHA DE APROVAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

Glauca Maria Bressan
(Orientador)

Prof. Dr. André Luis Machado Martinez

Profa. Dra. Elenice Weber Stiegelmeier

Dedico este trabalho à minha família, que está presente em todos os momentos da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, pela vida e por me guiar em todos os meus caminhos e à minha família, pelo apoio e dedicação.

À minha orientadora, Prof. Dr. Glaucia Maria Bressan, pela confiança e empenho dedicado à elaboração deste trabalho.

À banca examinadora, pelas contribuições ao trabalho.

À Universidade e seu corpo docente, por serem essências em minha formação.

Aos amigos que fiz durante a graduação, por todos os momentos compartilhados.

RESUMO

OLIVEIRA, Gabriela da Silva . **Otimização Linear aplicada ao balanceamento de estoque de uma indústria de móveis**. 2018. 60 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018

Este trabalho apresenta um estudo sobre Otimização Linear e sua aplicação no balanceamento de estoques para o planejamento e controle da produção de uma indústria de móveis. A modelagem matemática do problema é realizada por meio do chamado Problema Combinado, o qual acopla dois importantes problemas de otimização: o problema de dimensionamento de lotes e o corte de estoques. O estudo de caso desenvolvido consiste em coletar os dados do modelo em uma fábrica de móveis de pequeno porte do município de Cornélio Procópio, PR, a fim de planejar a produção de diferentes tipos de móveis ao longo de um período anual, considerando estoques de peças e de produtos finais. O Método Simplex e o Algoritmo *Branch-and-Bound* são aplicados para obtenção das soluções dos problemas propostos, auxiliando na tomada de decisão e minimizando os custos globais de produção. Resultados indicam que o modelo proposto, considerando balanceamento de estoques, proporciona o planejamento da produção e o custo mínimo global de produção, em comparação com a produção que atende a demanda em cada período.

Palavras-chave: Otimização Linear. Método Simplex. Algoritmo *Branch-and-Bound*. Problema Combinado. Balanceamento de estoque.

ABSTRACT

OLIVEIRA, Gabriela da Silva . **Linear optimization applied to the stock balancing of a furniture industry**. 2018. 60 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018

This work presents a study on Linear Optimization and its application in the stocks balancing production planning and control of a furniture industry. The Mathematical modeling of the studied problem is performed using the so-called Combined Problem, which connects two important optimization problems: lot sizing and stock cutting problems. The case study developed consists in collecting data from a small-scale furniture plant, located in Cornélio Procópio city, in the state of Paraná, Brazil, in order to plan the production of different types of furniture over an annual period, considering pieces and final products stocks. Simplex Method and *Branch and Bound* Algorithm are applied in order to obtain the solutions to the proposed scenarios of production, providing support to the decision make and minimizing the global costs of production. The results indicate that the proposed model, considering stocks balancing, provides the production planning and the minimum production costs in comparison with the production that answer demand by each period.

Keywords: Linear Optimization. Simplex Method. *Branch-and-Bound* Algorithm. Combined Problem. Stock Balancing

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Procedimento de procura da solução ótima	27
FIGURA 2 – Conjunto de soluções viáveis do problema de minimização	27
FIGURA 3 – Solução ótima para minimização do problema	28
FIGURA 4 – Solução do problema relaxado	40
FIGURA 5 – Ponto inicial do problema relaxado	40
FIGURA 6 – Região eliminada do conjunto de soluções viáveis	41
FIGURA 7 – Resultado dos problemas relaxados 2 e 3	42
FIGURA 8 – Árvore de solução do algoritmo <i>Branch-and-Bound</i>	42
FIGURA 9 – Árvore de resolução do algoritmo <i>Branch-and-Bound</i>	44
FIGURA 10 – Árvore de solução do algoritmo <i>Branch-and-Bound</i>	45

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Quadro Inicial do Simplex no Formato Tabular	32
TABELA 2 – Identificação das Matrizes e Variáveis no Formato Simplex Tabular	32
TABELA 3 – Quadro Geral do Simplex	33
TABELA 4 – Homens hora por unidade produzida	35
TABELA 5 – Padrões de Corte	50
TABELA 6 – Custo de estocagem de produtos finais em reais	50
TABELA 7 – Custo de estocagem de peças em reais	51
TABELA 8 – Demanda de produtos finais por período	51
TABELA 9 – Estoques de peças nos períodos anteriores de produção	51
TABELA 10 – Estoques de produtos finais nos períodos anteriores de produção	52
TABELA 11 – Análise de Sensibilidade para os intervalos dos coeficientes da função objetivo - estoque de peças	53
TABELA 12 – Análise de Sensibilidade para os intervalos das constantes das restrições - estoque de peças	54
TABELA 13 – Análise de Sensibilidade para os intervalos dos coeficientes da função objetivo - estoque de produtos finais	54
TABELA 14 – Análise de Sensibilidade para os intervalos das constantes das restrições - estoque de produtos finais	54
TABELA 15 – Análise de Sensibilidade para os intervalos dos coeficientes da função objetivo - estoque de produtos finais e peças	54
TABELA 16 – Análise de Sensibilidade para os intervalos das constantes das restrições - estoque de produtos finais e peças	55
TABELA 17 – Comparação entre os valores das funções objetivo	55

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	OBJETIVOS	19
1.1.1	Objetivo Geral	20
1.1.2	Objetivos Específicos	20
1.2	JUSTIFICATIVA	20
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	20
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
3	PESQUISA OPERACIONAL E PROGRAMAÇÃO LINEAR	23
3.1	RESOLUÇÃO GRÁFICA DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR	25
4	MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR	29
4.1	MÉTODO SIMPLEX	29
4.2	O ALGORITMO PRIMAL SIMPLEX	31
4.2.1	Exemplo Numérico	34
4.3	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	36
4.4	ALGORITMO <i>Branch-and-Bound</i>	38
4.4.1	Exemplo Numérico	39
5	PROBLEMA COMBINADO	47
6	ESTUDOS DE CASO	49
6.1	BALANCEAMENTO DE ESTOQUE DE PEÇAS	50
6.2	BALANCEAMENTO DE ESTOQUE DE PRODUTOS FINAIS	52
6.3	BALANCEAMENTO DE ESTOQUE DE PEÇAS E PRODUTOS FINAIS	52
6.4	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DOS CASOS EM ESTUDO	53
6.5	COMPARAÇÃO DO ESTUDO E A PRÁTICA DA MANUFATURA	55
7	CONCLUSÃO	57
	REFERÊNCIAS	59

1 INTRODUÇÃO

A intensificação dos avanços tecnológicos e os aspectos econômicos incentivam a competitividade entre as indústrias, que precisam inovar em seus produtos e automatizar seus processos, para tornar a produção mais eficiente e ter vantagem competitiva no mercado. Nesse sentido, a otimização é requerida no setor industrial, pois possibilita o controle e planejamento da produção em determinado período de tempo.

A administração da produção em uma indústria é responsável pelo planejamento e controle da transformação de matérias-primas em produtos finais (BRESSAN, 2003). Este sistema é denominado *Planejamento e Controle da Produção*, e segundo Russomano (2000, p.47), “[...] é uma função de apoio de coordenação das várias atividades de acordo com os planos de produção, de modo que os programas pré-estabelecidos possam ser atendidos nos prazos e quantidades”.

A Otimização Linear é uma ferramenta que pode auxiliar a decidir o melhor plano de produção para uma indústria, a fim de alcançar um certo objetivo. Para Goldberg e Luna (2005), uma vantagem do modelo de Otimização Linear é a eficiência dos algoritmos de solução existentes, o que permite que sejam implementados por meio de planilhas em microcomputadores pessoais. Nesse contexto, o Método Simplex destaca-se na resolução de Problemas de Programação Linear.

Assim, a proposta desse trabalho é realizar o planejamento anual da produção de uma fábrica de móveis, localizada na cidade de Cornélio Procópio - PR, considerando o balanceamento de estoque de peças e de produtos finais e buscando a otimização da produção, no sentido de minimizar os custos globais de produção. O problema é formulado utilizando-se o *Problema Combinado* (GRAMANI, 2001), o qual acopla dois conhecidos problemas de Otimização Linear: o *problema de dimensionamento de lotes* e o *problema de corte de estoque*.

O problema de dimensionamento de lotes consiste em planejar a quantidade de produtos finais a ser produzida em cada período ao longo de um horizonte de tempo finito, de modo a atender a demanda e minimizar os custos de produção e de estoque (ARENALES et al., 2007). O problema de corte de estoque, por sua vez, consiste na otimização do processo de corte de placas (de madeira) em peças menores, para compor os produtos finais (ARENALES et al., 2007). Desta forma, o Problema Combinado consiste em decidir a quantidade de produtos finais a serem produzidos em cada período de planejamento, minimizando os custos da produção, preparação e estocagem, além da quantidade de placas a serem cortadas para compor produtos finais (BRESSAN, 2003).

O Método Simplex é aplicado para obtenção das soluções dos problemas propostos, auxiliando na tomada de decisão e minimizando os custos globais de produção. Para fins de comparação, o Algoritmo *Branch-and-Bound* também é aplicado ao problema para garantia de obtenção de soluções inteiras. As soluções são obtidas com apoio computacional do *software* LINDO ("*Linear, Interactive and Discrete Optimizer*"), que é gratuito e livre, para realizar a execução do Método Simplex e do Algoritmo *Branch-and-Bound*.

1.1 OBJETIVOS

A questão central deste trabalho consiste em planejar a produção anual de uma fábrica de móveis de forma a obter o menor custo global de produção, atendendo a demanda, considerando o balanceamento de estoque de peças e de produtos finais em cada período e, conseqüentemente, minimizando também o desperdício de matéria prima.

1.1.1 Objetivo Geral

Aplicar métodos de Otimização Linear para o planejamento anual da produção de uma manufatura, considerando balanceamento de estoque, atendendo à demanda e minimizando os custos globais de produção.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Desenvolver resoluções numéricas de cenários reais de produção;
- Desenvolver resoluções numéricas de balanceamentos de estoque por meio do Problema Combinado;
- Comparar as soluções obtidas por meio do Método Simplex (solução real) e do Algoritmo *Branch-and-Bound* (solução inteira);
- Estudar o planejamento e o controle da produção;
- Minimizar o desperdício de matéria-prima e o custo global de produção.

1.2 JUSTIFICATIVA

No cenário econômico brasileiro, buscar formas de maximizar lucros e minimizar perdas é importante para manter o equilíbrio financeiro das indústrias. Além disso, a situação ambiental do planeta faz com que seja necessário o uso moderado e consciente dos recursos naturais. Frequentemente, ocorrem conferências das Nações Unidas sobre mudanças climáticas e discussões sobre como preservar o meio ambiente. Assim, planejar a produção de uma indústria moveleira, cuja matéria-prima é madeira, de modo a minimizar os custos e o desperdício de materiais no processo de corte, contribui para reduzir o desperdício de matéria-prima e o impacto ambiental do corte de árvores.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 descreve a revisão bibliográfica dos trabalhos de maior relevância ao tema. O Capítulo 3 define a Pesquisa Operacional e a Programação Linear, apresentando seus conceitos e sua formulação. Os métodos de resolução são apresentados no Capítulo 4, sendo estes, o Método Simplex e o Algoritmo *Branch-and-Bound*, aplicados neste estudo. O Capítulo 5 descreve a formulação matemática do Problema Combinado. O Capítulo 6 descreve os estudos de caso referentes à aplicação dos conceitos estudados, bem como a Análise de Sensibilidade e a comparação do estudo com a prática realizada na manufatura e, finalmente, o Capítulo 7 traz uma conclusão e as perspectivas futuras do trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Na literatura, há vários autores que destacam a Pesquisa Operacional no auxílio à tomada de decisões e resolvem os problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes a partir da Programação Linear.

O grande número de artigos pesquisados mostra o aumento do interesse de pesquisadores em problemas de dimensionamento de lotes. Em Karimi, Ghomi e Wilson (2003), são considerados problemas de tamanho de lote de nível único, suas variantes e abordagens de solução. Os autores discutem problemas de dimensionamento de lote de nível único, juntamente com abordagens exatas e heurísticas para sua solução.

Uma visão geral dos desenvolvimentos recentes no campo da modelagem de problemas determinísticos de tamanho de lote dinâmico de nível único é dada por Jans e Degraeve (2008). O foco está na modelagem de várias extensões industriais e não nas abordagens de solução. Mais recentemente, Brahim et al. (2017) apresenta uma pesquisa atualizada e extensa de problemas de tamanho de lote de item único com foco em publicações de 2004 a 2016. Procedimentos de soluções exatas e heurísticas são pesquisados e segundo os autores, quase 300 artigos sobre o problema de dimensionamento de lotes de itens individuais foram encontrados.

O problema de corte de estoque também tem sido extensivamente estudado na literatura. O estudo de Danwé, Bindzia e L.Meva'a (2012) objetiva solucionar o problema de otimizar a produção com base no valor comercial dos cortes, uma vez que a perda de matérias-primas nas indústrias de corte de madeira tem alcançado alta.

O problema do corte de inteiros unidimensional é também abordado em Poldi e Arenales (2009), que consiste em cortar o conjunto de comprimentos de estoque disponíveis para produzir a demanda de itens menores. Existem vários comprimentos de estoque disponíveis em quantidades limitadas. Alguns métodos heurísticos são propostos para obter uma solução inteira e comparados com outros. Poldi e Arenales (2010) propuseram um modelo de Otimização Linear Inteira, para abordar o problema de corte de estoque multiperíodo, o qual está relacionado com o planejamento da produção em indústrias que tem como um estágio de produção, o corte de objetos. O trabalho busca minimizar as perdas dos cortes, os custos de estocagem de peças e itens. Testes numéricos com a aplicação do Método Simplex com geração de colunas mostraram que o modelo proposto auxilia na tomada de decisão entre a antecipação ou não da produção.

A integração do problema de dimensionamento de lotes e o problema do corte de estoque são estudados por Vanzela, Rangel e Araujo (2013). O objetivo é compreender a dependência que existe entre duas decisões importantes no processo de produção, a fim de economizar matéria-prima e também reduzir os custos de produção e estoque. Além disso, a técnica de geração de colunas é utilizada para resolver o relaxamento linear do modelo proposto.

Alem e Morabito (2013) estudam o Problema Combinado do planejamento da produção e corte de estoque, ligados as incertezas da demanda e dos custos de fabricação comuns em indústrias moveleiras de pequeno porte. Os autores esclarecem que o Problema Combinado é utilizado, uma vez que considerar separadamente os problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes pode elevar o desperdício de matéria-prima, o que aumenta os custos de produção e prejudicam a competitividade da indústria no mercado. Ressaltam que na prática a tomada de decisão é amparada pela aproximação dos valores incertos por valores médios ou de pior caso. Foram propostos três modelos matemáticos, considerando custo incerto, demanda incerta e ambos, custo e demanda incertos e feitos testes computacionais com dados reais, para determinar o impacto que estas incertezas ocasionam no planejamento. A partir da comparação entre o que é feito na prática e os modelos de otimização apresentados, concluíram que a utilização do segundo permite economia nos custos de produção. Modelos robustos de

otimização foram propostos, uma vez que existem incertezas a serem consideradas.

Bressan (2003) apresenta uma revisão do Método Simplex com geração de colunas e considera o Problema Combinado com sua formulação matemática. O trabalho tem como Objetivo a resolução de sistemas lineares provenientes do método, considerando algumas propriedades da matriz de restrições e como construir uma base esparsa para a matriz, a partir de um reordenamento estático. Por meio de simulações numéricas no MATLAB ("*Matrix Laboratory*"), conclui-se que a construção da base estática leva a excelentes resultados computacionais.

Pierini (2017) considera importante integrar o problema de dimensionamento de lotes e corte de estoque de forma integrada para realizar o planejamento de uma indústria de papel. É proposto um modelo para planejar o corte de papel, cuja solução é implementada a partir do Método Simplex com geração de colunas, bem como uma heurística *relax-and-fix*.

Mais recentemente, Bressan et al. (2017) utilizou o Problema Combinado para minimizar os custos de produção de uma manufatura, considerando dois cenários de produção: primeiro, considerando custos e demandas de produtos como constantes e, segundo, considerando custos e demandas variáveis ao longo dos períodos de planejamento. Porém, Bressan et al. (2017) não considera que haja estoque de um período para o outro, ou seja, todas as peças e produtos finais são esgotados ao final de um período. Desta forma, ressalta-se a principal contribuição deste trabalho para a literatura: aqui, considera-se que haja estoque de peças e/ou de produtos finais em cada período de planejamento, retratando melhor a realidade da manufatura em estudo. Além disso, o planejamento anual de produção de uma fábrica de móveis contribui para reduzir o desperdício de matérias-primas no processo de corte.

Portanto, a Programação Linear é muito utilizada na resolução de problemas ligados ao planejamento e controle da produção, a partir da utilização dos problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes. Nota-se também, que o Método Simplex é frequentemente aplicado para solucionar esses problemas.

3 PESQUISA OPERACIONAL E PROGRAMAÇÃO LINEAR

A Pesquisa Operacional é uma área de pesquisa que agrupa técnicas de modelagem matemática, que permitem solucionar modelos quantitativos que podem ser escritos matematicamente, a fim de identificar as melhores condições de funcionamento de um sistema. Os principais modelos da Pesquisa Operacional são denominados Programação Matemática, em que programação é entendida como planejamento (GOLDBARG; LUNA, 2005).

A Programação Matemática é consagrada devido à sua grande utilidade na solução de problemas de otimização, e na prática, auxilia na tomada de decisão, uma vez que examina inúmeras configurações possíveis para a solução de um problema e estabelece, dentro de certos critérios, a mais adequada para o alcance de determinado objetivo. Nesse sentido, é necessária a representação da situação real, por meio de equações ou expressões matemáticas. Se existem n decisões quantificáveis a serem tomadas, então pode-se associar a cada decisão uma variável do modelo, denominada *variável de decisão*. Seus valores são obtidos pela execução do próprio modelo e simbolicamente, são representadas por letras minúsculas com índices, como: x_i , $i=1,2,\dots,n$. Para expressar a medida da eficácia procurada, estrutura-se uma função numérica das variáveis de decisão. Tal função, $z=f(x_1, \dots, x_n)$ é denominada *função objetivo*. Como os modelos são a tradução de um sistema real, há limitações de recursos, as quais são expressas matematicamente por meio de equações e inequações, chamadas *restrições*.

As técnicas da Programação Matemática são divididas em subáreas, dentre elas, a Programação Linear, que por sua vez caracteriza-se por modelos de programação cuja finalidade é otimizar uma função de variáveis lineares, que está sujeita a um conjunto de equações, ou seja, são modelos de otimização nos quais as variáveis são contínuas e apresentam comportamento linear em relação à função objetivo e às restrições. Um problema pode ser representado por meio de um modelo de Programação Linear se possuir as seguintes características (LACHERMACHER, 2009):

- **Proporcionalidade:** o valor da função objetivo é diretamente proporcional ao valor de cada variável de decisão.
- **Aditividade:** considera que as variáveis de decisão do modelo são independentes, não permitindo que haja interdependência entre elas.
- **Divisibilidade:** assume que todas as variáveis de decisão possam ser divididas em qualquer número de partes, isto é, qualquer variável de decisão pode assumir qualquer valor fracionário.
- **Certeza:** assume que todos os parâmetros do modelo são conhecidos e constantes.

A formulação geral de um Problema de Programação Linear (PPL), segundo Lachermacher (2009) é apresentada a seguir:

$$\text{Otimizar } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (3.1)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n & \text{ sinal } b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n & \text{ sinal } b_2 \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n & \text{ sinal } b_m \end{aligned} \quad (3.2)$$

Em que:

n é o número de variáveis do problema;

m é o número de restrições do problema;

c_j é o coeficiente da variável x_j da função objetivo ($j = 1, 2, \dots, n$);

a_{ij} é o coeficiente na i -ésima restrição e da variável x_j ($i = 1, 2, \dots, m$);

b_i é a constante da i -ésima restrição.

O termo *otimizar* em (3.1) refere-se a busca de maximizar ou minimizar a função objetivo. Para solucionar o problema, deve-se encontrar o valor das variáveis de decisão x_j que satisfaçam as restrições (3.2) e otimize o valor de z . A palavra “sinal” representa uma igualdade ou desigualdade.

Além da forma geral apresentada, há também a forma padrão e a forma canônica de representação de um Problema de Programação Linear (GOLDBARG; LUNA, 2005). A primeira, caracteriza-se pela minimização da função objetivo, a partir de restrições de igualdade e por constantes (b_i) e variáveis de decisão (x_j) que apresentam valores não negativos. Já a segunda, considera que o problema é de maximização com restrições do tipo “menor ou igual” ou que o problema é de minimização com restrições do tipo “maior ou igual”. Como as formulações são equivalentes, é possível que um mesmo modelo de Programação Linear seja reescrito em cada uma das formas básicas, por meio das seguintes operações elementares:

Operação 1: mudança no critério de otimização, ou seja, transformação de maximização para minimização e vice-versa:

Maximizar $f(x)$ corresponde a Minimizar $(-f(x))$ e
 Minimizar $f(x)$ corresponde a Maximizar $(-f(x))$.

Operação 2: transformação de uma variável livre, ou seja, uma variável que assume valores reais em uma variável não negativa. A variável livre x_n é substituída por duas variáveis auxiliares x_n^1 e x_n^2 , ambas maiores ou iguais a zero, mas cuja diferença é igual à variável original. Assim, tem-se:

$$x_n = x_n^1 - x_n^2$$

Operação 3: transformação de desigualdades em igualdades e vice-versa. Para o caso da transformação de restrições de menor ou igual em restrições de igualdade, podemos somar uma variável chamada *variável de folga* $x_{n+1} \geq 0$ capaz de “completar” a desigualdade, tornando-a igualdade. Assim, a restrição representada por:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq b,$$

é transformada em:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1} = b$$

Para o caso da transformação de restrições de maior ou igual em restrições de igualdade, podemos subtrair uma *variável de folga* $x_{n+1} \geq 0$, tornando-a igualdade. Logo, a restrição representada por:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq b,$$

é transformada em:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n - x_{n+1} = b$$

A forma padrão é utilizada para a aplicação dos métodos de resolução de um Problema de Programação Linear. Destaca-se que para a aplicação do Método Simplex, é necessário que o problema esteja na forma padrão. Portanto, um problema na forma canônica, com a maximização da função objetivo e restrições de desigualdade do tipo “menor ou igual”, pode ser reescrito na forma padrão como:

$$\text{Maximizar } z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + 0x_{n+1} + \cdots + 0x_{n+m}$$

Sujeito a:

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$

$$x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m} \geq 0$$

em que x_1, \cdots, x_n são as variáveis de decisão e x_{n+1}, \cdots, x_{n+m} são variáveis de folga.

De maneira semelhante, um problema na forma canônica, com a minimização da função objetivo e restrições do tipo “maior ou igual”, pode ser reescrito na forma padrão a partir das operações elementares como:

$$\text{Minimizar } z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + 0x_{n+1} + \cdots + 0x_{n+m}$$

Sujeito a:

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m$$

$$x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m} \geq 0$$

em que x_1, \cdots, x_n são as variáveis de decisão e x_{n+1}, \cdots, x_{n+m} são variáveis de folga.

3.1 RESOLUÇÃO GRÁFICA DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Um Problema de Programação Linear que envolve duas variáveis de decisão, pode ser resolvido graficamente. Para tal, o modelo escrito é traduzido a partir de um gráfico com dois eixos. Considere, como exemplo, o seguinte problema de Programação Linear (LACHTERMACHER, 2009):

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2$$

Sujeito a:

$$x_1 \leq 3 \quad (3.3)$$

$$x_2 \leq 4 \quad (3.4)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9 \quad (3.5)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (3.6)$$

Para representar o problema graficamente e obter sua solução ótima, é necessário realizar alguns passos. Primeiramente, deve-se estabelecer os dois eixos que irão representar as quantidades das variáveis de decisão x_1 e x_2 . Em seguida, é preciso encontrar o conjunto das soluções viáveis do problema, a partir da representação gráfica imposta por cada uma das restrições. As restrições (3.3), (3.4) e (3.6), são de fácil interpretação. Já a restrição (3.5) trata-se da representação de uma reta em R^2 . Assim, ao considerar x_1 a variável independente e x_2 a variável dependente, a equação de uma reta é dada por $x_2 = ax_1 + b$, onde a é o coeficiente angular da reta e b é o coeficiente linear. Ressalta-se que, como tal restrição é do tipo “menor ou igual”, todos os pontos abaixo e sobre a reta satisfazem a restrição. Portanto, analiticamente pode-se definir:

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$2x_2 \leq 9 - x_1$$

$$x_2 \leq \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_1$$

A solução ótima pode ser encontrada por meio de um procedimento simples, que consiste em atribuir valores a Z , o que torna a função objetivo uma reta. Verifica-se então, se existem pontos dessa reta que fazem parte do conjunto de soluções viáveis estabelecidos pelo conjunto de restrições. O problema é resolvido quando se obtém o maior valor possível para Z , pois trata-se de um problema de maximização, que nesse caso é igual a 21, em uma solução ótima de $x_1 = 3$ e $x_2 = 3$, como mostra a Figura 1. Os teoremas descritos na Seção 3.2 esclarecem que a solução ótima estará localizada, quando esta existir, em um *vértice* da região de soluções.

Problemas de minimização também podem ser resolvidos com esse mesmo procedimento. Considere o seguinte problema exposto por Lachtermacher (2009, p.22):

$$\text{Min } Z = 7x_1 + 9x_2$$

Sujeito a:

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \leq 5$$

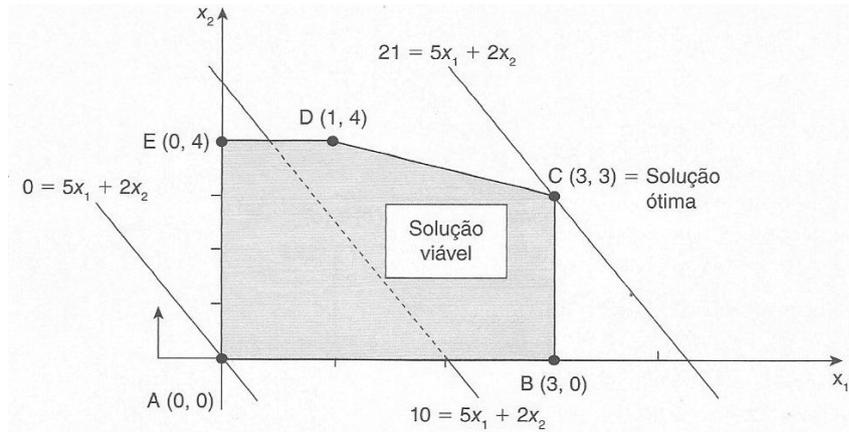
$$x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + 5x_2 \geq 15$$

$$5x_1 + 4x_2 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

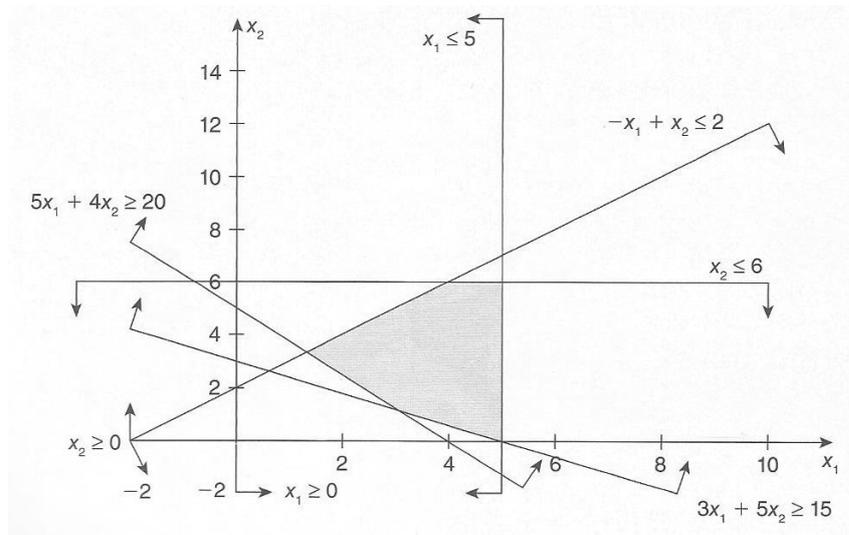
Figura 1 – Procedimento de procura da solução ótima



Fonte: (LACHTERMACHER, 2009, p.22)

Como descrito no exemplo anterior, é preciso encontrar o conjunto de soluções viáveis a partir das restrições do problema, o que pode ser visto na Figura 2.

Figura 2 – Conjunto de soluções viáveis do problema de minimização

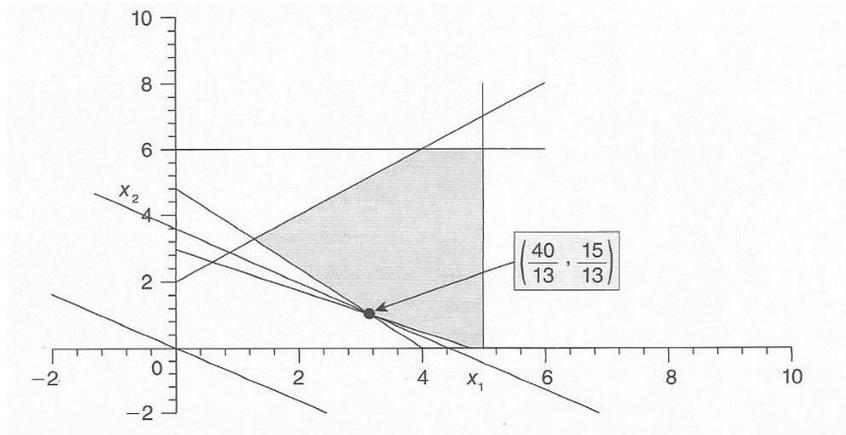


Fonte: (LACHTERMACHER, 2009, p.22)

A partir da verificação dos pontos na função objetivo, a solução ótima que minimiza a função objetivo pode ser encontrada. Assim, a solução mínima desse Problema de Programação Linear é o ponto $(\frac{40}{13}, \frac{15}{13})$, representado na Figura 3.

Salienta-se que, algumas vezes, existem restrições redundantes na formulação do Problema de Programação Linear, ou seja, quando uma ou mais restrições não participam da determinação do conjunto de soluções viáveis, pois sua exclusão não altera tal conjunto. Há também outros casos que podem ocorrer, como o problema ter mais de uma solução ótima, o caso em que o problema tem infinitas soluções viáveis, o que impede a determinação da solução ótima e ainda, os problemas em que não existem soluções.

No próximo capítulo, são apresentados os métodos exatos de resolução de Problemas de Programação Linear. O Método Simplex é uma generalização do método gráfico apresentado

Figura 3 – Solução ótima para minimização do problema

Fonte: (LACHTERMACHER, 2009, p.23)

anteriormente, podendo ser aplicado para resolução de problemas que envolvem mais do que duas variáveis de decisão.

4 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Este capítulo aborda métodos exatos de resolução de Problemas de Programação Linear, cujos algoritmos são aplicados nos estudos de caso apresentados posteriormente. Tais métodos são denominados: Método Simplex e o Algoritmo *Branch-and-Bound*.

4.1 MÉTODO SIMPLEX

O Método Simplex é um algoritmo para resolução de sistemas lineares, e assim, é aplicado para fornecer a solução ótima de Problemas de Programação Linear. Desenvolvido em 1947, pelo matemático norte-americano George B. Dantzig, o método consiste em um procedimento numérico iterativo, que executa repetidamente uma sequência de passos para alcançar a solução ótima do problema, caso ela exista. O algoritmo parte de uma solução básica viável do sistema de equações que constituem as restrições do problema. A partir dessa solução inicial identifica novas soluções viáveis melhores ou iguais que a atual. Como é um método iterativo, pode ser implementado computacionalmente usando linguagem de programação para executar suas iterações.

Para que o algoritmo seja desenvolvido, é preciso apresentar alguns teoremas que serão utilizados pelo método (GOLDBARG; LUNA, 2005).

Teorema 4.1. *O conjunto C das soluções viáveis de um modelo de Programação Linear é um conjunto convexo.*

Demonstração. Seja C o conjunto das soluções viáveis de um modelo de Programação Linear. Logo, C é o conjunto formado pelos pontos x tais que:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$C = \{x; Ax = b, x \geq 0\}$$

Se C é convexo então, por definição, tem-se que para qualquer conjunto composto por dois pontos distintos x_1, x_2 , a combinação linear convexa desses pontos também pertence a C. É equivalente dizer que:

$$\{x_1, x_2\} \in C \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C \\ 0 \leq \lambda \leq 1. \end{cases}$$

Sejam duas soluções viáveis de C, x_1, x_2 , tais que $x_1 \neq x_2$, então:

$$\begin{aligned} Ax_1 &= b & \text{e} & & Ax_2 &= b \\ x_1 &\geq 0 & & & x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

E seja:

$$\begin{aligned} x &= \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \\ 0 &\leq \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 Ax &= A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \\
 &= \lambda Ax_1 + (1 - \lambda)Ax_2 \\
 &= \lambda b + (1 - \lambda)b \\
 &= \lambda b + b - \lambda b \\
 &= b
 \end{aligned}$$

e $x \geq 0$, uma vez que

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \geq 0$$

pois

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

■

Teorema 4.2. *Toda solução básica viável do sistema $Ax = b$ é um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis, ou seja, um extremo do conjunto C .*

Demonstração. Seja C o conjunto formado pelos pontos x tais que:

$$\begin{aligned}
 Ax &= b \\
 x &\geq 0
 \end{aligned}$$

Seja, ainda, uma solução viável qualquer x , de dimensão n , na qual, sem perda de generalidade, as variáveis básicas são as m primeiras:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com todos os componentes } x_i \geq 0$$

Suponha, por absurdo, que x não seja um ponto extremo do conjunto convexo C , definido anteriormente. Então, x pode ser obtido por uma combinação convexa de outros dois pontos distintos desse mesmo conjunto. Chamando de y e z esses dois pontos, tem-se:

$$\begin{aligned}
 x &= \lambda y + (1 - \lambda)z \\
 0 &\leq \lambda \leq 1.
 \end{aligned}$$

Como y e z pertencem ao conjunto C , as seguintes relações de pertinência são válidas:

$$\begin{aligned}
 Ay &= b \quad \text{e} \quad Az = b \\
 y &\geq 0 \quad z \geq 0
 \end{aligned}$$

A relação $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$, colocada em termos das coordenadas de cada um dos três vetores, fornece as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \lambda y_1 + (1 - \lambda)z_1 \\
x_2 &= \lambda y_2 + (1 - \lambda)z_2 \\
&\vdots \\
x_m &= \lambda y_m + (1 - \lambda)z_m \\
0 &= \lambda y_{m+1} + (1 - \lambda)z_{m+1} \\
&\vdots \\
0 &= \lambda y_n + (1 - \lambda)z_n
\end{aligned}$$

Devido às relações $0 \leq \lambda \leq 1$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$ as últimas $(n - m)$ relações do conjunto acima descrito só podem ser satisfeitas em um dos seguintes casos:

1. $0 < \lambda < 1$ e $y_{m+i} = z_{m+i} = 0$ para $i = 1, \dots, (n - m)$.

Neste caso, tem-se $x = y = z$, pois tanto y quanto z são soluções básicas do sistema em análise, calculados com as mesmas variáveis básicas.

2. $\lambda = 0$ e $z_{m+i} = 0$ para $i = 1, \dots, (n - m)$.

Por raciocínio análogo ao anterior, deduz-se que $x = z$. Além disso, como $\lambda = 0$, segue-se que $x = y = z$.

3. $\lambda = 1$ e $y_{m+i} = 0$ para $i = 1, \dots, (n - m)$.

Por razões análogas, conclui-se que $x = y = z$.

Dessa forma, demonstra-se que não existem soluções viáveis y e z , distintas da solução básica x que satisfaçam a relação $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$. Por contradição com a hipótese inicial, demonstra-se, então, que x é um ponto extremo do conjunto convexo C . ■

Teorema 4.3. *Um ponto x é o extremo em um conjunto de soluções viáveis de um Problema de Programação Linear se e somente se $x \geq 0$ for uma solução básica do sistema de equações lineares $Ax = b$.*

Teorema 4.4. 1. *Se uma função objetivo possui um máximo ou um mínimo finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo C do Teorema 4.1.*

2. *Se a função objetivo assume o máximo ou o mínimo em mais de um ponto extremo, então ela toma o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos.*

As demonstrações dos Teoremas 4.3 e 4.4 podem ser consultadas em Hillier e Lieberman (2006).

4.2 O ALGORITMO PRIMAL SIMPLEX

Para facilitar a execução do Algoritmo Simplex, utiliza-se um formato tabular para seu desenvolvimento. Os quadros do formato de resolução tabular auxiliam na compreensão dos cálculos provenientes do método. Há várias versões do algoritmo, que envolvem a incorporação de outras técnicas, como por exemplo, a geração de colunas. Neste trabalho, é aplicado

o algoritmo Primal Simplex, por constituir sua forma mais básica e obter a solução ótima satisfatoriamente. Descreve-se a seguir um Problema de Programação Linear na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_sx_s + 0x_{s+1} + 0x_{s+2} + \dots + 0x_n \\ \text{Sujeito a:} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s + x_{s+1} + 0 + 0 + \dots + 0 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2s}x_s + 0 + x_{s+2} + 0 + \dots + 0 &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{ms}x_s + 0 + 0 + 0 + \dots + x_n &= b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Após, monta-se uma quadro inicial para os cálculos, conforme a Tabela 1 (GOLDBARG; LUNA, 2005):

Tabela 1 – Quadro Inicial do Simplex no Formato Tabular

		$x_1 \dots\dots\dots x_k \dots\dots\dots x_s$	$x_{s+1} \dots\dots\dots x_{s+r} \dots\dots\dots x_n$	
	z	$c_1 \dots\dots\dots c_{1k} \dots\dots\dots c_s$	$c_{s+1} \dots\dots\dots c_{s+r} \dots\dots\dots c_n$	
x_{s+1}	b_1	$a_{11} \dots\dots\dots a_{1k} \dots\dots\dots a_{1s}$	$1 \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots 0$ $0 \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots 0$	$\frac{\bar{b}_s}{a_{sk}}$
\vdots	\vdots	$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$	$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$	
x_{s+r}	b_r	$a_{r1} \dots\dots\dots a_{rk} \dots\dots\dots a_{rs}$	$0 \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots 0$	
\vdots	\vdots	$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$	$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$	
x_n	b_m	$a_{m1} \dots\dots\dots a_{mk} \dots\dots\dots a_{ms}$	$0 \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots 1$	
	Termo Ind.	Matriz de Restrições $(m \times m - n)$	Variáveis de Folga $(m \times m)$	

A primeira coluna é referente a base do método. Nesta, coloca-se as *variáveis básicas*, ou seja, aquelas que constituem uma *matriz identidade*. De modo geral, essas variáveis correspondentes à base são as variáveis de folga x_{s+1}, \dots, x_n . As colunas intermediárias contêm informações sobre as variáveis $x_1 \dots x_k \dots x_s$ e a última coluna contêm na primeira linha o valor atual da função objetivo.

As duas primeiras linhas referem-se à função objetivo z . As demais linhas são relativas às restrições do problema.

A configuração matemática associada é dada na Tabela 2, que ao longo das iterações do algoritmo corresponde à forma canônica, conforme o quadro geral representado na Tabela 3.

Tabela 2 – Identificação das Matrizes e Variáveis no Formato Simplex Tabular

		Índice das Variáveis		
	Valor da F.O.	Valor de $z_j - c_j$		
Índice das Variáveis Básicas	\bar{x}_B	$x_N = B^{-1}R$	B^{-1}	Área de Cálculos
		Variáveis Não Básicas	Variáveis Básicas	

Tabela 3 – Quadro Geral do Simplex

		$x_1 \dots\dots\dots x_k \dots\dots\dots x_s$	$x_{s+1} \dots\dots\dots x_{s+r} \dots\dots\dots x_n$	
	z	$z_1 - c_1 \dots z_k - c_k \dots z_s - c_s$		$z_{s+1} - c_{s+1} \dots z_{s+r} - c_{s+r} \dots z_n - c_n$
x_{B1}	\bar{b}_1	$y_{11} \dots\dots\dots y_{1k} \dots\dots\dots y_{1s}$	B^{-1}	
\vdots	\vdots	\vdots		
x_{Br}	\bar{b}_r	$y_{r1} \dots\dots\dots y_{rk} \dots\dots\dots y_{rs}$		
\vdots	\vdots	\vdots		
x_{Bm}	\bar{b}_m	$y_{m1} \dots\dots\dots y_{mk} \dots\dots\dots y_{ms}$		
				$\frac{\bar{b}_s}{y_{sk}}$

Com o auxílio do quadro anterior, executa-se uma sequência de passos para que a solução ótima do sistema de inequações lineares sujeitas a uma função objetivo seja encontrada.

Passo 1: Organizar o quadro inicial como indicado, partindo de um PPL escrito na forma padrão

Passo 2: Realizar o teste de parada

- Se todos os $z_j - c_j \leq 0$ ($j \in J$), então a solução ótima foi alcançada.
- Caso contrário, escolha o maior $z_j - c_j \geq 0$ ($j \in J$), isto é, $z_k - c_k$, escolhendo o vetor associado x_k para entrar na base

Passo 3: Definir a variável que sairá da base:

- Se $y_{ik} \leq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$, então a variável x_k poderá ser diminuída indefinidamente e o valor de z tenderá ao infinito negativo. Neste caso, a solução será ilimitada.
- Se $y_{ik} > 0$ para algum $i, i = 1, \dots, m$, então faça:

Calcule r , onde r é a variável básica relacionada ao mínimo entre os coeficientes $\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}$. O elemento y_{rk} é denominado: pivô.

Passo 4: Substituir a r -ésima variável, correspondente a r -ésima equação pela variável x_k , que passará a integrar a nova base, e recalculer as matrizes B^{-1} , Y e os vetores $z_j - c_j, \bar{x}_B$ e z_0 . Retornar ao passo 2.

Para recalculer as matrizes e os vetores do método com base no quadro simplex apresentado, utiliza-se o método de inversão de matrizes por operações elementares, considerando que as variáveis que permaneceram na base já possuem suas colunas canonizadas, ou seja transformadas em vetores canônicos. Assim, para canonizar a coluna da nova variável divide-se a linha r pelo elemento pivô, obtendo 1 na posição do pivô e para reduzir a zero os demais elementos da coluna, utiliza-se a adição de múltiplos da linha.

A formalização do Método Simplex, a partir do processo de escolha da base inicial de cálculo, critério de troca de variáveis na base e regra de parada é apresentada na forma de um algoritmo, como a seguir (GOLDBARG; LUNA, 2005):

Inicialização

Determinar uma solução básica inicial \bar{x}_B . Seja I o conjunto das colunas de A pertencentes à base e $J = N \setminus I$ (operação de diferença de conjuntos).

Passo 1: Calcular a matriz $Y = (y_j) = (y_{sj}), s \in I$ e $j \in J$ e os valores $z_j - c_j, \forall j \in J$ como se segue:

$$y = B^{-1}R$$

$$z_j = c_B y_j, j \in J$$

- Se $z_j - c_j \leq 0 \forall j \in J$ então a solução básica viável \bar{x}_B é ótima . **Pare!**
- Caso contrário, fazer $J_1 = \{j \in J; z_j - c_j > 0\}$.

Passo 2:

- Se $y_i \leq 0$ para pelo menos um $j \in J_1$, não existe solução ótima finita. **Pare!**
- Caso contrário, determinar k de modo que $z_k - c_k = \max_{j \in J_1} \{z_j - c_j\}$. Na coluna k encontrar a relação: $\frac{\bar{b}_s}{y_{sk}} = \frac{\bar{x}_s}{y_{sk}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0, 1 \leq i \leq m \right\} \Rightarrow x_s$.

Passo 3: Considere a nova base B deduzida a partir da anterior pela substituição de a_s por a_k .

$$B = (B \setminus \{a_s\}) \cup \{a_k\}$$

Calcular a nova solução básica viável:

$$\bar{x}_B = B^{-1}b$$

$$z_0 = z_0 - (z_k - c_k) \frac{\bar{x}_{Bs}}{y_{sk}}$$

Atualizar:

$$R = (R \setminus \{a_k\}) \cup \{a_s\}$$

$$I = (I \setminus \{s\}) \cup \{k\}$$

$$J = (J \setminus \{k\}) \cup \{s\}$$

Voltar para o passo 1.

4.2.1 Exemplo Numérico

Para exemplificar a resolução de um Problema de Programação Linear a partir do Método Simplex, em sua forma tabular, descreve-se o seguinte problema, formulado por Lins e Calôba (2006): Uma manufatura produz mesas e bancos, sendo capaz de vender toda sua produção no período. O único recurso restrito é a mão de obra, cuja produtividade, juntamente com os lucros, são dados na Tabela 4.

As variáveis de decisão são as quantidades de mesas e bancos a serem produzidos, x_1 e x_2 . Objetiva-se aumentar os lucros da manufatura, logo a função objetivo é:

$$\text{Max } 20x_1 + 24x_2$$

Tabela 4 – Homens hora por unidade produzida

Produto	Lucro Unitário	Montagem	Acabamento
Mesas	R\$20	3	4
Banco	R\$24	6	2
Homens\hora		60	32

As restrições quanto à disponibilidade de homens por hora nos departamentos de montagem e acabamento, são apresentadas abaixo:

$$3x_1 + 6x_2 \leq 60 \quad \text{restrição de montagem}$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 32 \quad \text{restrição de acabamento}$$

Formulado o problema, sua forma padrão é:

$$\text{Min} - 20x_1 - 24x_2$$

s.a.:

$$3x_1 + 6x_2 + x_3 = 60$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_4 = 32$$

Então, monta-se o primeiro quadro com os coeficientes das variáveis.

	x_1	x_2	x_3	x_4	cte
Base	-20	-24	0	0	0
x_3	3	6	1	0	60
x_4	4	2	0	1	32

Variável que entra na base: x_2 (maior valor negativo em módulo: 24)

Variável que sai da base: x_3 (pois $60/6$ é menor que $32/2$)

Pivô=6

Deve-se escalonar a coluna x_2 dividindo toda a linha do pivô por ele mesmo, ou seja, dividindo a linha correspondente a x_3 por 6. Obtém-se então:

	x_1	x_2	x_3	x_4	cte
Base	-20	-24	0	0	0
x_3	1/2	1	1/6	0	10
x_4	4	2	0	1	32

Deve-se agora, zerar os outros elementos da coluna do pivô, ou seja, -24 e 2. Para tal, multiplica-se a linha do pivô por 24 e soma-se com a linha correspondente à função objetivo. Em seguida, multiplica-se a linha do pivô por -2 e soma-se com a linha da variável x_4 .

	x_1	x_2	x_3	x_4	cte
Base	-8	0	4	0	240
x_2	1/2	1	1/6	0	10
x_4	3	0	-1/3	1	12

Note que ainda há elementos negativos na linha referente à função objetivo. Assim, esta não é a solução ótima. Logo, tem-se que:

Variável que entra na base: x_1

Variável que sai da base: x_4

Pivô=3.

Deve-se escalonar a coluna x_1 dividindo toda a linha do pivô por ele mesmo, ou seja, dividindo a linha correspondente a x_4 por 3. Obtém-se:

	x_1	x_2	x_3	x_4	cte
Base	-8	0	4	0	240
x_2	1/2	1	1/6	0	10
x_4	1	0	-1/9	1/3	4

Agora, deve-se zerar os outros elementos da coluna do pivô, ou seja, -8 e 1/2. Para isso, multiplica-se a linha do pivô por 8 e soma-se com a linha correspondente à função objetivo. Em seguida, multiplica-se a linha do pivô por -1/2 e soma-se com a linha da variável x_2 . Tem-se o seguinte quadro:

	x_1	x_2	x_3	x_4	cte
Base	0	0	28/9	8/3	272
x_2	0	1	2/9	-1/6	8
x_1	1	0	-1/9	1/3	4

Como não há nenhum coeficiente negativo na linha da função objetivo, a solução ótima foi alcançada. Portanto, o lucro máximo é de R\$272, com a produção de 4 mesas e 8 cadeiras.

4.3 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

A Análise de Sensibilidade é uma técnica que permite avaliar os impactos que um programa sofre quando são feitas modificações nas condições de modelagem (GOLDBARG; LUNA, 2005). Assim, caracteriza-se pelo estudo de um modelo de Programação Matemática submetido a mudanças em suas condições iniciais. É considerada uma análise pós-otimização, que verifica as possíveis variações, para cima e para baixo, dos valores dos coeficientes da função objetivo, dos coeficientes e das constantes das restrições, por exemplo, sem que a solução básica seja alterada (LACHTERMACHER, 2009). Há dois tipos de análise de sensibilidade: o primeiro determina limites inferiores e superiores para todos os coeficientes da função objetivo e para as constantes de restrições. Tal estudo, pode ser realizado com o apoio do *software* LINDO ("*Linear, Interactive and Discrete Optimizer*"); o segundo, permite verificar se a alteração simultânea de mais de uma mudança modifica a solução ótima de determinado problema.

As modificações que podem ser feitas na modelagem de um problema e seu impacto, são apresentadas a seguir, de acordo com Goldberg e Luna (2005).

Mudança no vetor de custos

A mudança no vetor de custos, podem incidir sobre dois tipos de variáveis, as básicas e as não básicas. A fórmula para calcular os custos reduzidos é:

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j$$

Logo, para a alteração de uma variável não básica, o termo $c_B B^{-1} a_j$ não se modifica, o que significa que as alterações nos custos reduzidos se propagam diretamente com a variação do termo c_j . Considerando a possível variação do custo igual a δ , tem-se que para a variável de índice $j \in J$ seja candidata a entrar na base é necessário que $z_j - (c_j + \delta) > 0$ ou $\delta < z_j - c_j$.

Por outro lado, quando os valores dos custos das variáveis básicas sofrem modificações, temos duas situações. Se as alterações ocorrerem no sentido de tornar as variáveis ainda mais desejáveis, elas jamais deixarão a base, porém, não é possível determinar o que ocorreria no caso inverso. Nesse sentido, o objetivo é determinar o intervalo de variação admissível no vetor custo para que certa variável permanecesse na base sem alterar a base calculada.

Mudança no vetor de termos independentes

O impacto da mudança no vetor b é calculado por meio da seguinte fórmula:

$$B^{-1}(b + \Delta b)$$

em que Δb indica a variação no vetor b .

Para o caso de se exigir a viabilidade primal então:

$$B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$$

Mudança nas restrições

A mudança nas restrições, enquadra-se em três casos:

- Acréscimo de uma nova restrição ao problema: nesse caso, reduz-se o espaço das soluções viáveis, o que gera ou o aumento/redução do valor da função objetivo, ou não altera a solução encontrada. A sugestão é verificar se há alteração da solução. Se houver, deve-se solucionar o novo problema.
- Exclusão de uma restrição: pode-se identificar dois subcasos. O primeiro é o a da restrição excluída ser de desigualdade. Nesse, se a variável básica relacionada com essa restrição for a variável de folga a ela associada, então a restrição é inativa e sua eliminação não causará modificação na solução ótima. Por outro lado, se a variável básica for real, não é possível afirmar nada e assim, deve-se retomar o procedimento de solução como um problema novo. O segundo é referente à exclusão de uma restrição de igualdade. Nesse, deve-se recomeçar a solução a partir da eliminação da restrição.
- Alteração de coeficientes de uma restrição já existente: não é necessária a introdução da variável de folga para completar a base. Assim, recai-se no caso de acréscimo de uma nova restrição.

Mudança nas variáveis

Três casos devem ser considerados na mudança nas variáveis:

- Eliminação de variável: se divide em outros dois subcasos. Pode-se ter a eliminação de uma variável não básica, o que não altera a solução ótima, já que as variáveis não básicas são nulas. Além dessa, pode-se ter a eliminação de uma variável básica, o que não é realizado de forma simples, uma vez que a inversa da base foi calculada em sua

função. Então, o indicado é migrar para uma base vizinha que não contenha essa variável e, posteriormente, eliminá-la do programa como variável não básica, o que torna-se necessário forçar um pivoteamento.

- Acréscimo de uma nova variável: a introdução de uma nova variável x_l exige o recálculo dos custos reduzidos e da coluna (l) da matriz Y .
- Alteração dos coeficientes de uma variável já existente: se divide em dois subcasos. No primeiro, modifica-se uma variável não básica, o que implica no recálculo da coluna (l). No segundo, modifica-se uma variável básica, o que torna necessário o recálculo da coluna (l), sua introdução no quadro e a conclusão do processo de inversão da base.

4.4 ALGORITMO *BRANCH-AND-BOUND*

O algoritmo denominado *Branch-and-Bound* fundamenta-se no desenvolvimento de uma enumeração inteligente dos pontos candidatos à solução inteira de um problema (GOLDBARG; LUNA, 2005). O termo *branch* está relacionado ao fato do algoritmo efetuar partições no espaço das soluções e o termo *bound* ressalta que a prova de otimalidade da solução utiliza-se de limites calculados ao longo da enumeração.

Consiste no procedimento mais utilizado atualmente na resolução de problemas de Programação Linear Inteira ou Programação Linear Inteira Mista, que são tipos de Programação Linear, nos quais uma ou mais variáveis de decisão devem assumir valores inteiros (LACHTERMACHER, 2009).

O algoritmo começa com a seguinte abordagem: primeiro, ignore a restrição de que as componentes de x devem ser inteiros; resolva o Problema de Programação Linear com o Método Simplex, normalmente. Claro que a solução pode não ser inteira; então, uma nova estratégia é requerida.

O Problema de Programação Linear obtido suprimindo-se a restrição de integralidade é chamado de PL-relaxado. Aplicando-se o Método Simplex, seja x^* a solução ótima obtida (valor real) para uma determinada variável de decisão. Considere que o valor real x^* está entre dois valores inteiros: x_{min} e x_{max} . O algoritmo então considera dois casos separadamente: Seja P1 o Problema de Programação Linear obtido adicionando-se a restrição $x^* \leq x_{min}$ ao PL-relaxado, e seja P2 o problema obtido incluindo-se a outra possibilidade: $x^* \geq x_{max}$. Note que uma árvore de subproblemas de Programação Linear está sendo construída. Esta é chamada de *árvore de enumeração*. Cada nó da árvore corresponde a um subproblema definido como *problema de maximização inteiro misto*.

No algoritmo, um nó é explorado em 3 situações: se seu sub-problema é infactível; se a solução ótima do sub-problema relaxado satisfaz as restrições de integralidade (não há necessidade de ramificar) e se o valor ótimo do sub-problema relaxado é pior ou igual ao valor da solução atual.

Considere que o nó $S_j, j = 0, \dots, N$ deve ser resolvido. O primeiro passo é resolver a relaxação. Seja $S_j^*, j = 0, \dots, N$ o vetor solução do subproblema relaxado. A solução de cada subproblema fornece um limite superior para os subproblemas nos nós descendentes da árvore. Este processo continua até que o limite inferior exceda o limite superior atual, até que o subproblema seja inviável (ou infactível), ou até que a solução forneça finalmente valores inteiros para as variáveis inteiras. A solução inteira (no nó da árvore) fornece limites inferiores da solução inteira ótima.

Se o valor ótimo do sub-problema relaxado é pior ou igual ao valor da solução atual, o nó é explorado. Esta aproximação garante que a solução ótima não será eliminada se todos os

sub-problemas relaxados forem resolvidos por otimalidade, o que é fácil de computar no caso de problemas convexos.

A seguir, o algoritmo *Branch-and-Bound* é descrito de acordo com Nemhauser e Wolsey (1988), Stiegelmeier (2012).

Inicialização

Entradas: nó ativo, nível da árvore

Saída: MelhorInt

Passo 1: Faça nó ativo o nó pai;

Passo 2: Execute o nó do sub-problema relaxado para resolver o nó ativo;

Passo 3: Salve a melhor solução encontrada como SoluçãoPai;

Poda por Otimalidade

Passo 4: Se SoluçãoPai é inteiro, então

Se SoluçãoPai > MelhorInt, então

MelhorInt = SoluçãoPai

Poda por Limitantes

Passo 5: Se SoluçãoPai não é inteiro e SoluçãoPai \leq MelhorInt, então

MelhorInt = SoluçãoPai

Passo 6: Ramifique o nó ativo e crie dois subproblemas S_1 e S_2 ;

Passo 7: Ramifique e limite (S_1 , nível da árvore+1, MelhorInt);

Passo 8: Ramifique e limite (S_2 , nível da árvore+1, MelhorInt);

Passo 9: Aplique novamente a rotina até que MelhorInt = melhor solução inteira.

4.4.1 Exemplo Numérico

Nesta seção, o algoritmo *Branch-and-Bound* é desenvolvido por meio do exemplo de um Problema de Programação Linear Inteira (PLI). Considere o seguinte problema (LACHTER-MACHER, 2009, p.156):

Problema 1

$$\text{Max } 3x_1 + 3x_2$$

s.a.:

$$x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

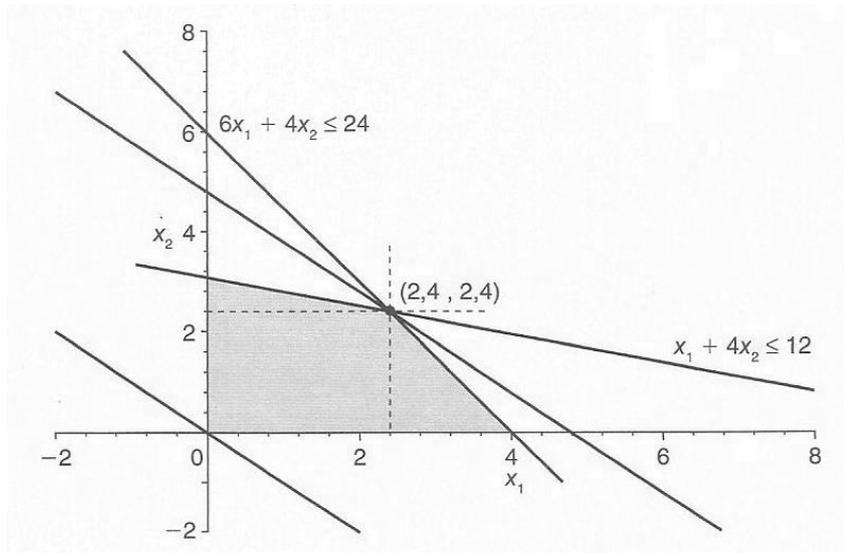
x_1 e x_2 são inteiros

A Figura 4 apresenta a solução ótima ($x_1 = 2, 4$ e $x_2 = 2, 4$) para o problema relaxado, que tem um valor ótimo igual a $72/5$. Como é um problema de maximização, o valor ótimo do problema relaxado impõe um limite superior ($72/5$) ao valor ótimo da função objetivo da PLI. Note que o ponto $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ está contido no conjunto de soluções viáveis, assim, ele impõe um limite inferior (9) ao valor ótimo da função objetivo da PLI. Então, pode-se estabelecer um intervalo para o valor ótimo da função objetivo da PLI:

$$9 \leq \text{valor ótimo da função objetivo} \leq 72/5$$

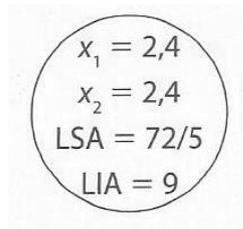
Denote $72/5$ de LSA (limite superior atual) e 9 de LIA (limite inferior atual). Considere também, a solução do problema relaxado $x_1 = 2, 4$ e $x_2 = 2, 4$. Pode-se representar essas condições como um ponto inicial do algoritmo, como mostra a Figura 5.

Figura 4 – Solução do problema relaxado



Fonte: (LACHTERMACHER, 2009, p.156)

Figura 5 – Ponto inicial do problema relaxado



Fonte: (LACHTERMACHER, 2009, p.156)

Pela formulação do problema, sabe-se que os valores de x_1 e x_2 não podem ser fracionários, ou seja, devem ser inteiros. Logo, é preciso escolher um dos dois para tentar torná-lo inteiro. Ao escolher a variável x_1 , tem-se que seu valor deve ser menor ou igual a 2 ou, então, maior ou igual a 3, já que nenhuma solução com valor de x_1 nesse intervalo faz parte do conjunto de soluções viáveis da PLI. Assim, divide-se o Problema 1 em dois subproblemas (problemas 2 e 3).

Problema 2

$$\text{Max } 3x_1 + 3x_2$$

s.a.:

$$x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 e x_2 são inteiros

Problema 3

$$\text{Max } 3x_1 + 3x_2$$

s.a.:

$$x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

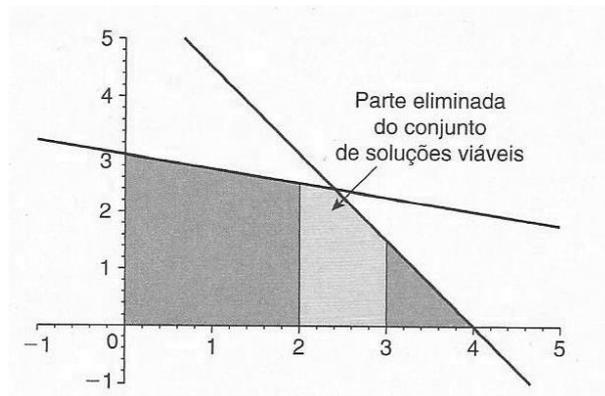
$$x_1 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 e x_2 são inteiros

Isso representa a eliminação de uma parte do conjunto de soluções viáveis do problema, como ilustrado na Figura 6.

Figura 6 – Região eliminada do conjunto de soluções viáveis



Fonte: (LACHTERMACHER, 2009, p.157)

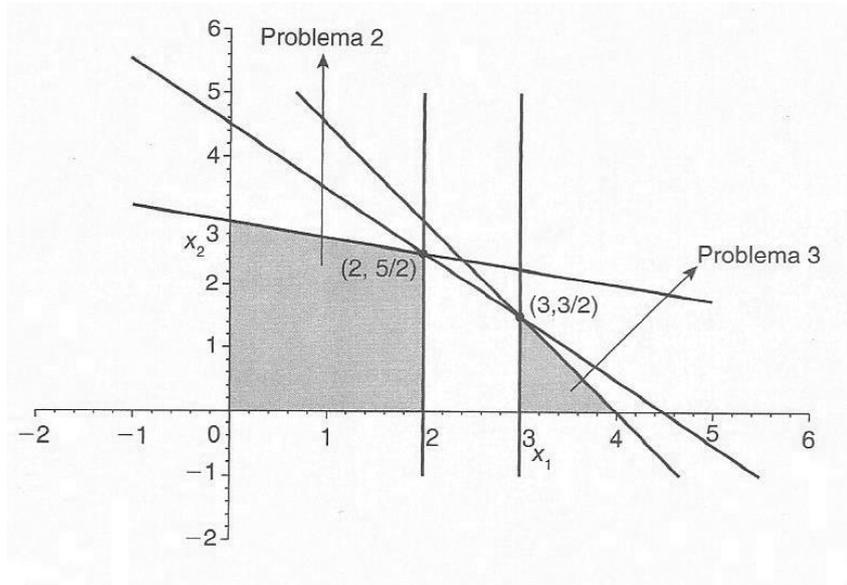
O próximo passo é verificar quais as soluções para os problemas relaxados 2 e 3 (Figura 7). A sistematização do momento atual do algoritmo pode ser vista na Figura 8.

Por acaso, a solução ótima para ambos os problemas tem a mesma reta como suporte. No problema 2 relaxado, a solução ótima é $x_1 = 2$ e $x_2 = 5/2$, que geram o valor ótimo da função objetivo de $27/2$. No problema relaxado 3, a solução ótima é $x_1 = 3$ e $x_2 = 3/2$, com valor ótimo de $27/2$ para a função objetivo.

Como em ambos os casos o valor ótimo do problema relaxado é menor que o LSA, esse valor passa a ser o melhor valor (ótimo) que a função objetivo pode atingir. Assim, estabelece-se um intervalo de valores para os quais a função objetivo pode assumir.

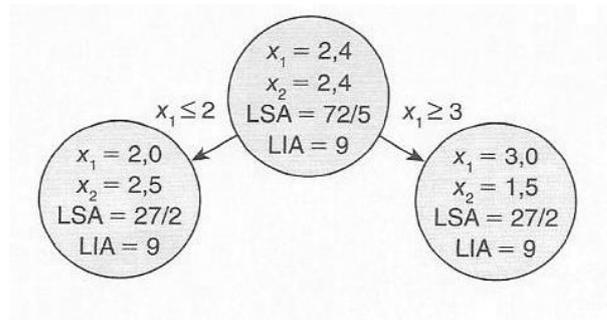
$$9 \leq \text{valor ótimo da função objetivo} \leq 27/2$$

Figura 7 – Resultado dos problemas relaxados 2 e 3



Fonte: (LACHTERMACHER, 2009, p.157)

Figura 8 – Árvore de solução do algoritmo *Branch-and-Bound*



Fonte: (LACHTERMACHER, 2009, p.157)

Observe que o valor da variável x_2 ainda é fracionário nos dois casos (problema 2 e 3). Portanto, subdivide-se ambos em duas partes. O problema 2 pode ser dividido nos problemas 4 e 5, a seguir:

Problema 4

$$\text{Max } 3x_1 + 3x_2$$

s.a.:

$$x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 e x_2 são inteiros

Problema 5

$$\text{Max } 3x_1 + 3x_2$$

s.a:

$$x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 e x_2 são inteiros

O problema 3, por sua vez, pode ser dividido nos problemas 6 e 7, como a seguir:

Problema 6

$$\text{Max } 3x_1 + 3x_2$$

s.a:

$$x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 e x_2 são inteiros

Problema 7

$$\text{Max } 3x_1 + 3x_2$$

s.a.:

$$x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \geq 2$$

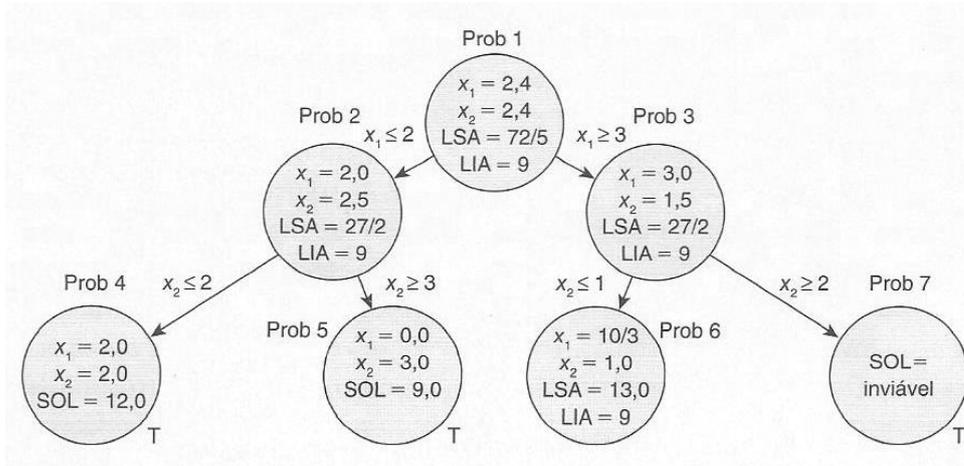
$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 e x_2 são inteiros

O próximo passo é resolver esse conjunto de problemas relaxados. A solução do problema 4 é $x_1 = 2$ e $x_2 = 2$, e como se trata de números inteiros, encerra-se esse ramo da árvore do algoritmo. O problema 5, tem como solução, $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$. A solução ótima para o problema 6 é $x_1 = 10/3$ e $x_2 = 1$. Já o problema 7, tem conjunto de soluções viáveis vazio, isto é, o problema é inviável. Tais soluções podem ser vistas na Figura 9.

Note que apenas um ramo da árvore não tem solução definitiva. Assim, deve-se dividir esse ramo (problema 6) em duas partes, representadas pelos problemas 8 e 9, como a seguir:

Figura 9 – Árvore de resolução do algoritmo *Branch-and-Bound*



Fonte: (LACHTERMACHER, 2009, p.159)

Problema 8

$$\text{Max } 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a } x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 e x_2 são inteiros

Problema 9

$$\text{Max } 3x_1 + 3x_2$$

s.a.:

$$x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 \geq 3 \text{ redundante}$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 4$$

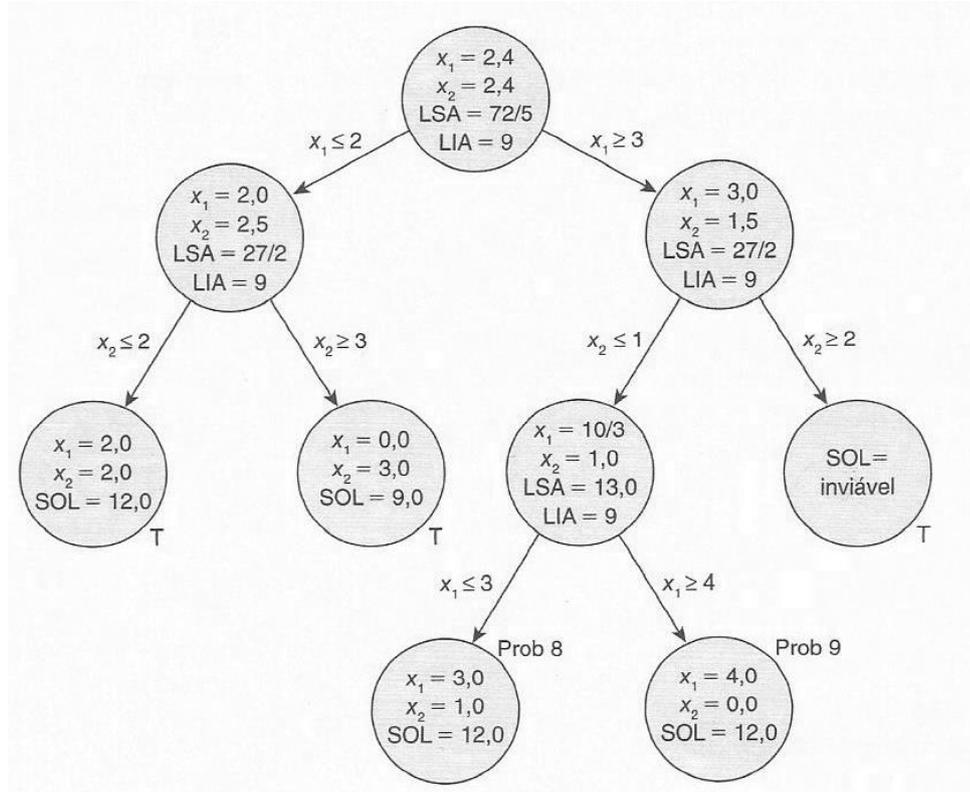
$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 e x_2 são inteiros

Decorre que a solução ótima do problema 8 é $x_1 = 3$ e $x_2 = 1$, com valor da função objetivo igual a 12. Já a solução ótima do problema 9 é dada por $x_1 = 4$ e $x_2 = 0$, com valor da função objetivo igual a 12.

A incorporação desses novos resultados na árvore do algoritmo é apresentada na Figura 10.

Figura 10 – Árvore de solução do algoritmo *Branch-and-Bound*



Fonte: (LACHTERMACHER, 2009, p.160)

Observa-se que todos os ramos da árvore apresentam soluções inteiras e/ou inviáveis. Portanto, o processo do algoritmo está encerrado. Nota-se também, que a solução para o problema é múltipla, já que três ramos atingiram a mesma solução ótima inteira. Se uma das soluções ótimas finais de um ramo fosse maior do que as outras, a maior delas seria escolhida.

Quando comparada à PL correspondente, a PLI leva muito mais tempo para ser resolvida, uma vez que mais de um Problema de Programação Linear é resolvido para obter a solução.

5 PROBLEMA COMBINADO

No processo de corte de uma placa em peças menores, há perdas de material. No entanto, esta perda tende a ser menor conforme a demanda de peças aumenta, pois é realizado um melhor rearranjo dos padrões de corte na placa (BRESSAN, 2003). Nesse sentido, é vantajoso para as indústrias antecipar a fabricação de produtos, a fim de minimizar as perdas decorrentes do corte de placas sem realizar um planejamento. No entanto, há custos para estocagem, o que pode retardar a produção. Surge então, o Problema Combinado, que acopla dois problemas de otimização: o dimensionamento de lotes e o corte de estoque (GRAMANI, 2001).

O Problema de Dimensionamento de Lotes (PDL) caracteriza-se pelo planejamento da quantidade de itens a ser produzido em cada período do horizonte de tempo, com a intenção de atender a demanda de produtos e otimizar uma função objetivo, como minimizar os custos de produção e estocagem.

O Problema de Corte de Estoque (PCE) consiste no corte de placas em peças menores nas quantidades e tamanhos necessários, a fim de otimizar uma função objetivo, como minimizar o número de placas a serem cortadas.

Diante do exposto, é possível definir o Problema Combinado. Este, é formulado para decidir a quantidade de produtos finais a serem produzidos em cada período do planejamento tal que minimize os custos de produção e estocagem e a quantidade de placas a serem cortadas. O modelo pode ser utilizado em indústrias moveleiras, onde placas são cortadas para a produção de itens.

Segundo Gramani (2001), considerando que apenas um tipo de placa esteja disponível em estoque, define-se o modelo da seguinte forma:

$$\min \sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^T c_{it}x_{it} + h_{it}e_{it} + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T c_{pj}y_{jt} + \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T h_{p_{pt}}e_{p_{pt}} \quad (5.1)$$

s.a.:

$$x_{it} + e_{i,t-1} - e_{it} = d_{it} \quad (5.2)$$

$$\sum_{j=1}^N a_{pj}y_{jt} + e_{p_{p,t-1}} - e_{p_{pt}} = \sum_{i=1}^M r_{pi}x_{it} \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (5.3)$$

$$\sum_{j=1}^N v_j y_{jt} \leq u_t \quad (5.4)$$

$$x_{it}, e_{it}, y_{jt}, e_{p_{pt}} \geq 0 \quad (5.5)$$

A função objetivo (5.1) minimiza o custo dos produtos finais e o custo do processo de corte. As restrições (5.2) referem-se às equações de balanço de estoque com relação aos produtos finais, o que garante que a demanda vai ser atendida. As restrições (5.3) asseguram que a demanda das peças será satisfeita, referindo-se às equações de balanço de estoque com relação às peças. As restrições (5.4) se referem a capacidade da serra, o que garante que o tempo máximo de operação da serra não será ultrapassado. Já (5.5) são as condições de não-negatividade.

Índices:

$t = 1, \dots, T$ número de períodos.

$p = 1, \dots, P$ número de diferentes tipos de peças a serem cortadas.

$j = 1, \dots, N$ número de diferentes tipos de padrões de corte.

$i = 1, \dots, M$ número de diferentes produtos finais demandados.

Parâmetros:

c_{it} : custo da produção do produto final i no período t .

h_{it} : custo de estocagem do produto final i no período de tempo t .

$h_{p_{pt}}$: custo de estocagem da peça tipo p no período t .

d_{it} : demanda do produto final i no período t .

r_{pi} : número de peças tipo p necessárias para formar um produto i .

v_j : tempo gasto para cortar uma placa no padrão de corte j .

a_{pj} : número de peças tipo p no padrão j .

u_t : tempo máximo de operação da serra.

cp : custo da placa a ser cortada.

Variáveis de decisão:

x_{it} : quantidade do produto final i produzido no período t .

e_{it} : quantidade do produto final i em estoque no fim do período t .

$e_{p_{pt}}$: quantidade de peça tipo p em estoque no fim do período t .

y_{jt} : quantidade de placas cortadas usando o padrão j no período t .

6 ESTUDOS DE CASO

A aplicação do Problema Combinado é desenvolvida para que o planejamento anual da produção de uma fábrica de pequeno porte do município de Cornélio Procópio - PR seja realizado e a produção seja otimizada. O objetivo principal é minimizar os custos globais de produção e, conseqüentemente, o desperdício de matéria-prima no processo de corte. Nesse sentido, a atribuição dos parâmetros numéricos é feita a partir de dados reais fornecidos pelo histórico da indústria em estudo, no ano de 2017. É considerada a produção dos três produtos que apresentam maior demanda: mesa, banco e cadeira, e há variação dos custos de estocagem de peças e de produtos finais, bem como de demandas de produtos finais. Além disso, em um primeiro cenário de produção, considera-se que há estoques de peças nos períodos anteriores. Em um segundo cenário, considera-se que há estoques de produtos finais nos períodos anteriores e, em um terceiro cenário de produção, considera-se que há tanto estoques de peças quanto de produtos finais.

A formulação do problema da produção da fábrica de móveis considera que a demanda, os custos de estocagem de peças e de produtos finais variam ao longo dos meses do horizonte de planejamento de produção anual. Abaixo, descreve-se os índices utilizados neste estudo, de acordo com a formulação do Problema Combinado:

$t = 12$ períodos de tempo (meses);

$p = 6$ tipos de peças;

$j = 4$ tipos de padrões de corte;

$i = 3$ tipos de produtos finais demandados.

Desta forma, o modelo matemático é descrito como:

$$\min \sum_{i=1}^3 \sum_{t=1}^{12} c_{it}x_{it} + h_{it}e_{it} + \sum_{j=1}^4 \sum_{t=1}^{12} c_{pj}y_{jt} + \sum_{p=1}^6 \sum_{t=1}^{12} h_{p_{pt}}e_{p_{pt}}$$

s.a:

$$x_{it} + e_{i,t-1} - e_{it} = d_{it}; \quad t = 1, \dots, 12; i = 1, 2, 3 \quad (\text{balanço de estoque de produtos finais})$$

$$\sum_{j=1}^4 a_{pj}y_{jt} + e_{p,t-1} - e_{p_{pt}} = \sum_{i=1}^3 r_{pi}x_{it}; \quad t = 1, \dots, 12 \quad (\text{balanço de estoque de peças})$$

$$\sum_{j=1}^4 v_j y_{jt} \leq u_t; \quad t = 1, \dots, 12; j = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{capacidade da serra})$$

$$x_{it}, e_{it}, y_{jt}, e_{p_{pt}} \geq 0$$

As peças a serem cortadas para compor os produtos finais considerados são:

Peça tipo 1 = tampo da mesa;

Peça tipo 2 = pé da mesa;

Peça tipo 3 = viga da mesa;

Peça tipo 4 = encosto/assento;

Peça tipo 5 = pé de cadeira/banco;

Peça tipo 6 = viga de cadeira/banco.

Os padrões de corte, ou seja, as formas como as placas são cortadas em peças menores, podem ser vistos na Tabela 5.

Os parâmetros que não se alteraram ao longo do período de planejamento fornecidos

Tabela 5 – Padrões de Corte

Padrão de corte	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	Tempo de corte
$j=1$	2	0	0	0	0	0	5 s
$j=2$	1	50	0	0	0	100	350 s
$j=3$	0	0	10	18	30	0	148 s
$j=4$	0	10	13	12	103	0	197 s

pela fábrica são: $c_{1t} = R\$255$, representa o custo da produção do produto final mesa, $c_{2t}=R\$80$, o custo da produção de uma cadeira, $c_{3t}=R\$60$ o custo da produção de um banco, $c_p=R\$137,07$ o custo da placa. As quantidades de peças necessárias para compor um produto final são: $r_{11}=1$, $r_{21}=4$, $r_{31}=2$, $r_{42}=2$, $r_{52}=4$, $r_{62}=2$, $r_{43}=1$, $r_{53}=4$ e $r_{63}=2$.

Os parâmetros de custo de estocagem dos produtos finais, para cada período de planejamento, são dados em reais e descritos na Tabela 6.

Tabela 6 – Custo de estocagem de produtos finais em reais

	Mesa (R\$)	Cadeira (R\$)	Banco (R\$)
$t = 1$	5	3	2
$t = 2$	5	3	2
$t = 3$	5	3	2
$t = 4$	5	3	2
$t = 5$	6	3	2
$t = 6$	6	3,5	2
$t = 7$	6	3,5	2,5
$t = 8$	6	3,5	2,5
$t = 9$	6	3,5	2,5
$t = 10$	6,5	3,8	2,5
$t = 11$	6,5	3,8	2,7
$t = 12$	6,5	3,8	2,7

Por sua vez, os custos de estocagem de peças, para cada período de planejamento, são mostrados na Tabela 7.

A demanda dos produtos finais é obtida considerando-se as variações no decorrer dos períodos de planejamento. A Tabela 8 apresenta os valores utilizados.

O Problema Combinado, ao ser resolvido e ao ser obtida a solução ótima, deve indicar as quantidades de produtos finais a serem produzidas em cada período de planejamento, a fim de que sejam alcançados os menores custos de produção. Assim, com o apoio computacional do software LINDO ("*Linear, Interactive and Discrete Optimizer*"), foram executados, para fins de comparação das soluções, o Método Simplex (solução real) e o Algoritmo *Branch-and-Bound*, para a garantia de solução inteira.

6.1 BALANCEAMENTO DE ESTOQUE DE PEÇAS

Neste cenário de produção, os estoques de peças gerados no período anterior ($t - 1$) são considerados. Tais estoques podem ser vistos na Tabela 9.

Resultados preliminares apontam que, com a aplicação do Método Simplex, a solução ótima é R\$33600,75, a qual sugere a antecipação da produção de cadeiras, a partir da variável

Tabela 7 – Custo de estocagem de peças em reais

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$
$t = 1$	0,8	0,1	0,12	0,15	0,05	0,09
$t = 2$	0,8	0,1	0,12	0,15	0,05	0,09
$t = 3$	0,8	0,1	0,12	0,15	0,05	0,09
$t = 4$	0,8	0,1	0,12	0,15	0,05	0,09
$t = 5$	1	0,1	0,12	0,15	0,05	0,09
$t = 6$	1	0,12	0,14	0,15	0,06	0,09
$t = 7$	1	0,12	0,14	0,16	0,06	0,11
$t = 8$	1	0,12	0,14	0,16	0,06	0,11
$t = 9$	1	0,12	0,14	0,16	0,06	0,11
$t = 10$	1,2	0,13	0,15	0,16	0,07	0,11
$t = 11$	1,2	0,13	0,15	0,17	0,07	0,12
$t = 12$	1,2	0,13	0,15	0,17	0,07	0,12

Tabela 8 – Demanda de produtos finais por período

	Mesa	Cadeira	Banco
$t = 1$	1	4	2
$t = 2$	1	4	2
$t = 3$	2	10	3
$t = 4$	3	14	6
$t = 5$	3	14	6
$t = 6$	3	14	6
$t = 7$	4	20	8
$t = 8$	3	14	6
$t = 9$	3	14	6
$t = 10$	6	30	10
$t = 11$	6	30	10
$t = 12$	7	36	12

Tabela 9 – Estoques de peças nos períodos anteriores de produção

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$
$t = 0$	0	0	0	0	0	0
$t = 1$	0	0	0	0	0	0
$t = 2$	0	5	2	0	1	2
$t = 3$	0	2	1	0	2	3
$t = 4$	1	3	1	2	5	2
$t = 5$	2	2	1	3	6	5
$t = 6$	1	6	5	3	2	4
$t = 7$	2	4	0	2	1	3
$t = 8$	1	3	2	1	2	1
$t = 9$	1	2	3	4	3	2
$t = 10$	2	5	4	2	1	4
$t = 11$	1	2	3	2	2	1

de decisão $x_{21}=204$, gerando estoque, e a produção de mesas e bancos no segundo período de planejamento, representadas por $x_{12}=42$ e $x_{32}=77$.

Para comparar soluções ótimas, o algoritmo *Branch-and-Bound* foi aplicado, o qual garante a obtenção de valores inteiros para Problemas de Programação Linear que requerem soluções inteiras. Como o Método Simplex já apresentou solução inteira, o algoritmo *Branch-and-Bound* convergiu para a mesma solução ótima, efetuando quatro iterações, assim como o Método Simplex.

6.2 BALANCEAMENTO DE ESTOQUE DE PRODUTOS FINAIS

No segundo cenário de produção, considera-se que haja estoques de produtos finais provenientes do período anterior. As quantidades consideradas são apresentadas na Tabela 10. A execução do modelo, a partir do Método Simplex, encontrou a solução ótima de R\$32106,59. Esta sugere a antecipação da produção para os primeiros períodos de planejamento. A produção de cadeiras é indicada para o primeiro período de planejamento, como mostra a variável de decisão $x_{21} = 198$. Já a produção de mesas e bancos é proposta para o segundo período, representada pelas variáveis de decisão $x_{12} = 39$ e $x_{32} = 72$. O algoritmo *Branch-and-Bound* foi aplicado, o qual convergiu para a mesma solução e executou o mesmo número de iterações.

Tabela 10 – Estoques de produtos finais nos períodos anteriores de produção

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$t = 0$	0	0	0
$t = 1$	0	2	0
$t = 2$	1	0	2
$t = 3$	0	0	1
$t = 4$	0	1	0
$t = 5$	1	0	0
$t = 6$	0	2	1
$t = 7$	0	0	0
$t = 8$	0	0	0
$t = 9$	0	1	1
$t = 10$	1	0	0
$t = 11$	0	0	0

6.3 BALANCEAMENTO DE ESTOQUE DE PEÇAS E PRODUTOS FINAIS

No terceiro cenário de produção, considera-se que haja tanto estoque de peças quanto estoques de produtos finais, o que é comum acontecer na realidade das fábricas de móveis. As quantidades de peças em estoque no período anterior foram as utilizadas no primeiro cenário de produção e as quantidades de produtos finais são as mesmas do segundo cenário de produção, ou seja, foram aplicadas essas quantidades simultaneamente. A execução do Método Simplex, encontrou a solução ótima de R\$31972,24. A antecipação da produção para os períodos iniciais de produção foi indicada, a partir das variáveis de decisão $x_{21} = 198$, $x_{31} = 72$ e $x_{13} = 39$, que representam respectivamente: a produção de cadeiras no primeiro período de planejamento, a produção de bancos no primeiro período de planejamento e a produção de mesas no terceiro período de planejamento. Aplicou-se o algoritmo *Branch-and-Bound*, que apresentou a mesma solução ótima e o mesmo número de iterações.

Portanto, as soluções ótimas sugerem antecipar a produção de alguns produtos, deixando-os em estoque, e postergar a produção de outros, otimizando os problemas de corte e de dimensionamento de lotes conjuntamente, minimizando os custos globais de produção. Observa-se então, a contribuição da aplicação de métodos de otimização para as indústrias, uma vez que a produção de produtos finais, principalmente em pequenas empresas, costuma ser feita por período, sem que haja um planejamento eficaz da produção. Nos casos em estudo, percebe-se que ao antecipar a produção, há economia de matéria-prima e consequente aumento dos lucros.

6.4 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DOS CASOS EM ESTUDO

De acordo com Bazaraa, Jarvis e Sherali (2010), é importante estudar o efeito em soluções ótimas da variação em determinados dados do problema, sem que seja preciso resolver o problema do início para cada execução. Suponha que o Método Simplex produza uma base ótima B . Nessa secção, será descrito como fazer uso das condições de otimalidade para encontrar uma nova solução ótima, se alguns dos dados do problema mudarem, sem resolver o problema do zero. Em particular, as seguintes variações no problema serão consideradas: mudança nos coeficientes da função objetivo e mudança no vetor do lado direito (constantes). Mais detalhes da Análise de Sensibilidade podem ser vistos em (BAZARAA; JARVIS; SHERALI, 2010; VANDERBEI, 2014).

A Tabela 11 mostra a Análise de Sensibilidade para os intervalos dos coeficientes da função objetivo, considerando o *estoque de peças*. A primeira coluna mostra as variáveis de decisão; a segunda coluna exibe o coeficiente atual da função objetivo; a terceira e quarta coluna mostram, respectivamente, os intervalos em que é permissível aumentar ou diminuir os coeficientes sem que a base seja alterada.

Tabela 11 – Análise de Sensibilidade para os intervalos dos coeficientes da função objetivo - estoque de peças

Variáveis	Coeficiente atual	Aumento permitido	Diminuição permitida
x_{12}	255	0	262,72
x_{21}	80	3,631	90,26
x_{32}	60	0	68,35
y_{22}	137,07	0	137,07

A variável de decisão x_{21} , por exemplo, pode aumentar para $80 + 3,631 = 83,631$ e a base permanece inalterada. Se esse caso ocorrer, o valor atual da função objetivo \$33600,75, será adicionado a $3,631 \times 204 = 740,72$. Portanto, a nova função objetivo será \$34341,47.

Considerando a estocagem de peças, a Tabela 12 exibe as constantes atuais das restrições e os intervalos de aumento e redução permitidos nos quais a base é inalterada.

Note a primeira restrição, por exemplo, cuja constante é 42. Esse valor pode aumentar para $42 + 1147,44 = 1189,44$ ou diminuir para $42 - 42 = 0$ que a base permanece inalterada.

Similarmente, a Tabela 13 mostra a Análise de Sensibilidade para os intervalos de coeficientes da função objetivo, considerando *estoque de produtos finais*. Como antes, a Tabela mostra os intervalos permitidos de aumento e diminuição nos quais a base é inalterada.

Por exemplo, a variável de decisão x_{21} pode aumentar para 83,631 e a base é inalterada. Se isso ocorrer, o valor atual da função objetivo \$32106,59, será adicionado a $3,631 \times 198 = 718,94$. Portanto, a nova função objetivo terá o valor de \$32825,53.

Tabela 12 – Análise de Sensibilidade para os intervalos das constantes das restrições - estoque de peças

Coeficiente atual	Aumento permitido	Diminuição permitida
42	1147,44	42
204	430,29	204
77	491,76	77
-148	3442,32	2149
12960	infinito	7978,87

Tabela 13 – Análise de Sensibilidade para os intervalos dos coeficientes da função objetivo - estoque de produtos finais

Variáveis	Coeficiente atual	Aumento permitido	Diminuição permitida
x_{12}	255	0	262,72
x_{21}	80	3,631	90,26
x_{32}	60	0	68,35
y_{22}	137,07	0	137,07

Considerando o estoque de produtos finais, a Tabela 14 mostra as constantes atuais das restrições e os intervalos de aumento e redução permitidos nos quais a base é inalterada.

Tabela 14 – Análise de Sensibilidade para os intervalos das constantes das restrições - estoque de produtos finais

Coeficiente atual	Aumento permitido	Diminuição permitida
39	1128,77	39
198	423,29	198
72	483,76	72
0	3386,32	2205
12960	infinito	7849,07

Por exemplo, a primeira restrição cuja constante é 39, pode aumentar para $39 + 1128,77 = 1167,77$ ou diminuir para $39 - 39 = 0$ que a base é inalterada.

Finalmente, a Tabela 15 mostra a Análise de Sensibilidade para os intervalos de valores que podem assumir os coeficientes da função objetivo, considerando *estoque de produtos finais e peças*.

Tabela 15 – Análise de Sensibilidade para os intervalos dos coeficientes da função objetivo - estoque de produtos finais e peças

Variável	Coeficiente atual	Aumento permitido	Diminuição permitida
x_{12}	255	0	262,72
x_{21}	80	3,631	90,26
x_{32}	60	0	68,35
y_{22}	137,07	0	137,07

A variável de decisão x_{21} , pode aumentar para 83,631, por exemplo, e a base é inalterada. Se isso ocorrer, o valor atual da função objetivo \$31972,24, será adicionado de 718,94 e a nova função objetivo será \$32691,18. A Tabela 16 mostra as constantes atuais das restrições e os intervalos de aumento e redução permitidos nos quais a base é inalterada.

Tabela 16 – Análise de Sensibilidade para os intervalos das constantes das restrições - estoque de produtos finais e peças

Coeficiente atual	Aumento permitido	Diminuição permitida
39	1178,11	39
198	441,79	198
72	504,91	72
-148	3534,31	2057
12960	infinito	8192,12

Por exemplo, a primeira restrição, cuja constante é 39, pode aumentar para $39 + 1178,11 = 1217,11$ ou diminuir para $39 - 39 = 0$ que a base permanece inalterada.

6.5 COMPARAÇÃO DO ESTUDO E A PRÁTICA DA MANUFATURA

As soluções ótimas obtidas por meio de modelos de otimização com balanceamento de estoque são comparadas com as soluções obtidas pela fabricação de móveis, que atende a demanda para cada período de produção. O planejamento da produção proposto pelos modelos de otimização sugere antecipar a produção de alguns produtos finais, gerando estoque, e postergando a produção de outros. Por outro lado, a manufatura em estudo produz a demanda requerida de cada período. A Tabela 17 mostra a comparação entre os custos mínimos obtidos a partir das funções objetivo (Produção Planejada) e a produção por período, considerando os três casos de balanceamento de estoque.

Assim, a última coluna da Tabela 17 mostra a porcentagem de lucro proporcionada pelas soluções ótimas, quando estas são comparadas com o custo de produção que satisfaz a demanda em cada período de tempo, sem a utilização de modelos de otimização.

Em relação ao número de placas a serem cortadas, as soluções ótimas mostram que, considerando a estocagem de peças, o número de placas cortadas é de $y_{22} = 14,24$. Considerando o estoque de produtos finais, o número é de $y_{22} = 14,61$ e, por fim, considerando produtos finais e peças em estoque, o número de placas cortadas é de $y_{21} = 13,62$. Em situações práticas, uma estratégia pode ser aplicada para arredondar variáveis fracionárias, a fim de que estas assumam valores inteiros, e seja obtida uma solução viável (MIYAZAMA, 2015). Como o número de placas em uma solução deve ser inteiro, uma solução ótima deve usar pelo menos uma placa. Assim, se a solução obtida pelo arredondamento não for a ótima, é usada no máximo mais uma placa do que o número apresentado pela solução ótima (MIYAZAMA, 2015).

Tabela 17 – Comparação entre os valores das funções objetivo

Balanceamento de Estoque	Produção Planejada	Produção por período	Porcentagem de lucro
Peças	33600,75	35101,55	4,28%
Produtos finais	32106,59	35079,44	8,47%
Produtos finais e peças	31972,24	35054,05	8,8%

A produção por período normalmente corta 15,5 placas para a produção de sua demanda. Então, ao comparar com o número de placas a serem cortadas quando utiliza-se a produção em estudo, evidencia-se que os modelos de otimização e planejamento de produção proporcionam economia de matéria-prima.

7 CONCLUSÃO

O planejamento e controle da produção é essencial para as indústrias que precisam organizar seu funcionamento do melhor modo possível, para que possam manter e melhorar o aspecto financeiro e comercial, a fim de se destacar em relação às demais empresas.

Utilizar métodos de Otimização Linear auxilia a tomada das melhores decisões, uma vez que as soluções ótimas sugerem o número de produtos que devem ser produzidos e quando, a fim de fornecer os custos globais mínimos de produção e otimizar as etapas de produção de uma indústria. Dentre os métodos exatos, a literatura recomenda o Método Simplex e, para a obtenção de soluções inteiras, o Algoritmo *Branch and Bound* (BAZARAA; JARVIS; SHERALI, 2010; VANDERBEI, 2014).

O Problema Combinado ainda é pouco explorado na literatura, mas a relevância da combinação de corte de estoque e dimensionamento de lotes em diferentes situações elege este problema como uma questão importante a ser pesquisada, já que este modelo de otimização vem minimizando os custos globais de produção.

A proposta de planejar a produção de uma fábrica de móveis da cidade de Cornélio Procopio - PR, possibilita que pequenos empresários tomem contato com as soluções apresentadas pelas técnicas de programação da produção, e sejam capazes de controlar e planejar a produção dos itens, no sentido de minimizar os custos e os desperdícios de materiais; neste estudo de caso, placas de madeiras a serem cortadas.

Portanto, no estudo realizado, conclui-se que produzir nos períodos iniciais de planejamento e armazenar os itens em estoque é mais vantajoso que a produção da demanda por período ou postergar a produção para os períodos finais. Pode-se observar então, a contribuição da aplicação de métodos de otimização para as indústrias, uma vez que a produção de itens, principalmente em pequenas empresas, costuma ser feita por período, sem que haja um planejamento eficaz que considere a antecipação da fabricação, por exemplo. Nos casos em estudo, baseados no histórico de demandas, ao antecipar a produção e gerar estoque, há economia de matéria-prima e consequente aumento dos lucros.

Como trabalhos futuros, pretende-se considerar mais de um tipo de placa a ser cortada, com dimensões diferentes, de tal forma que elas possam ser empilhadas para serem cortadas no mesmo padrão de corte.

Vale destacar que parte deste estudo foi aceito para publicação e apresentação no Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC 2018), com o título "Planejamento Anual da Produção de uma Fábrica de Móveis". O evento foi realizado no mês de setembro, na UNICAMP, SP. Outro trabalho está em confecção e será submetido para um periódico internacional, com o título "Linear Programming and Application in the Stocks Balancing of a Manufacture," com possibilidade de publicação em 2019.

REFERÊNCIAS

- ALEM, D.; MORABITO, R. O problema combinado de planejamento da produção e corte de estoque sob incertezas: aplicação em fábricas de móveis de pequeno porte. **Gestão & Produção (UFSCAR)**, v. 20, n. 1, p. 111–113, 2013. Citado na página 21.
- ARENALES, M. et al. **Pesquisa Operacional: para cursos de engenharia**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. Citado na página 19.
- BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. **Linear Programming and Network Flows**. 4. ed. [S.l.]: Wiley, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 57.
- BRAHIMI, N. et al. Single-item dynamic lot-sizing problems: An updated survey. **European Journal of Operational Research**, v. 263, n. 3, p. 838–863, 2017. Citado na página 21.
- BRESSAN, G. M. **Solução de Sistemas Lineares Esparsos - Aplicação à Programação de Lotes e Cortes**. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciências Matemáticas e Computação da Universidade de São Paulo: ICMC - USP, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 19, 22 e 47.
- BRESSAN, G. M. et al. Production planning of a manufacturing industry using linear programming. **Advances in Mathematical Sciences and Applications**, v. 26, n. 1, p. 175–191, 2017. Citado na página 22.
- DANWÉ, R.; BINDZIA, I.; LMEVA'A. Optimisation of cutting in primary wood transformation industries. **Advances in Mathematical Sciences and Applications**, v. 5, n. 1, p. 115–132, 2012. Citado na página 21.
- GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. **Otimização Combinatória e Programação Linear**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005. Citado 8 vezes nas páginas 19, 23, 24, 29, 32, 33, 36 e 38.
- GRAMANI, M. C. N. **Solução de Sistemas Lineares Esparsos - Aplicação à Programação de Lotes e Cortes**. Tese de Doutorado: Densis, UNICAMP, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 47.
- HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo: McGraw-Hill, 2006. Citado na página 31.
- JANS, R.; DEGRAEVE, Z. Modeling industrial lot sizing problems: a review. **Journal of Production Research**, v. 46, n. 6, p. 1619–1643, 2008. Citado na página 21.
- KARIMI, B.; GHOMI, S. M. T. Fatemi; WILSON, J. M. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. **Advances in Mathematical Sciences and Applications**, v. 31, n. 5, p. 365–378, 2003. Citado na página 21.
- LACHTERMACHER, G. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009. Citado 13 vezes nas páginas 23, 25, 26, 27, 28, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 44 e 45.
- LINS, M. P. E.; CALÔBA, G. M. **Programação Linear: com aplicações em teoria dos jogos e avaliação de desempenho**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. Citado na página 34.
- MIYAZAMA, F. K. **Programação Inteira**. 2015. Disponível em: <www.ic.unicamp.br/~fkm/lectures/progint.pdf>. Acesso em: 27 de novembro de 2015. Citado na página 55.

NEMHAUSER, G. L.; WOLSEY, L. A. **Integer and Combinatorial Optimization**. New York, NY: Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons, 1988. Citado na página 39.

PIERINI, L. M. **Problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque no processo industrial de produção de papel**. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas: UNICAMP, 2017. Citado na página 22.

POLDI, K. C.; ARENALES, M. N. Heuristics for the one-dimensional cutting stock problem. **Computers and Operations Research**, v. 36, n. 6, p. 2074–2081, 2009. Citado na página 21.

_____. O problema de corte de estoque unidimensional multiperíodo. **Pesquisa Operacional**, v. 30, n. 1, p. 153–174, 2010. Citado na página 21.

RUSSOMANO, V. H. **PCP, Planejamento e Controle da Produção**. São Paulo: Pioneira, 2000. Citado na página 19.

STIEGELMEIER, E. W. **Modelo de otimização para controle de plantas daninhas usando programação não linear inteira mista**. Tese (Doutorado - Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica) - Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo: EESC - USP, 2012. Citado na página 39.

VANDERBEI, R. J. **Linear Programming: foundations and extensions**. 4. ed. Princeton, NJ, USA: Springer US, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 57.

VANZELA, M.; RANGEL, S.; ARAUJO, S. A. The integrated lot sizing and cutting stock problem in a furniture factory. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 46, n. 7, p. 390–395, 2013. Citado na página 21.