UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EVERTON PINHO DA SILVA

CARACTERIZAÇÃO DE FUNÇÕES INTEIRAS E CONTÍNUAS SOB CERTAS CONDIÇÕES

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2018

EVERTON PINHO DA SILVA

CARACTERIZAÇÃO DE FUNÇÕES INTEIRAS E CONTÍNUAS SOB CERTAS CONDIÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento Acadêmico de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Débora A. F. Albanez

CORNÉLIO PROCÓPIO
2018

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento Acadêmico de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Débora A. F. Albanez
(Orientador)

Prof^{a}. Dra. Claúdia Brunosi Medeiros

Prof^{a}. Dra. Renata Mascari

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso”

Dedico este trabalho a minha família, Rosângela Ap. Pinho, Maria S. Pinho, Azer M. Pinho, Adolfo G. Silva, Helen P. Pinho, João G. Pinho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha orientadora Prof. Dra. Débora A. F. Albanez pela sabedoria com a qual me guiou, durante todo percurso feito até aqui, pelo convite de participar no Projeto de Iniciação Científica voluntário “Espaços Métricos, Métricas, Bolas e Esferas” que foi enriquecido pela parceria com o Prof. Dr. Anderson Paião dos santos. E pela orientação no Projeto de Iniciação Científica “O Teorema de Banach–Steinhaus e aplicações” vinculado ao projeto Modos de Fourier forma determinante aplicada à equações de evolução.

Agradeço as Prof. Dras Claúdia Brunosi Medeiros e Renata Mascari pela colaboração na construção e enriquecimento desse trabalho com suas sugestões na banca de TCC1.

A Coordenação do Curso Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Cornélio Procópio pela cooperação.

Aos meus amigos que estiveram ao meu lado nessa jornada acadêmica, que direta ou indiretamente contribuíram para a minha formação.

A minha família, sem a qual não seria possível a realização desse trabalho, que sempre me deram apoio e inspiração para seguir em frente. Agradeço imensamente pelos esforços dos meu avô(a) Azér M. Pinho, Maria S. Pinho e mãe Rosângela Ap. Pinho e ao meu avô Adolfo G. da Silva.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso.

“A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela”.

(Albert Einstein)

RESUMO

SILVA, Everton Pinho. **Caracterização de funções inteiras e contínuas sob certas condições**. 2018. 39 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018

O objetivo deste trabalho é explorar um processo de interpolação polinomial para funções inteiras e determinar funções contínuas que satisfazem certas propriedades. Além disso, apresentamos a fórmula do Binômio de Newton para números naturais, como consequência do processo de interpolação.

Palavras-chave: Interpolação, Função Inteira, Binômio de Newton, Função Contínua

ABSTRACT

SILVA, Everton Pinho. **Representation of entire and continuas functions under certain conditions**. 2018. 39 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018

The aim of this work is to investigate an polinomial interpolation process for entire functions and determinate continuous functions which satisfy certain properties. Moreover, we present Newton binomial expansion for natural numbers as a result of interpolation process.

Keywords: Interpolation, Entire Function, Binomial Expansion, Continous Function.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho trata da caracterização de funções inteiras e contínuas. Buscamos analisar, compreender e justificar os processos matemáticos que sustentam e validam a interpolação polinomial e a caracterização de certas funções contínuas sob certas condições que se encontram em mais detalhes no texto.

O processo de interpolação é de extrema importância para aplicações em diversas áreas do conhecimento, como por exemplo um pesquisador que tenha a intenção de medir o índice de acumulo de gás carbônico na atmosfera ao longo do tempo. Para isso, mede-se anualmente, durante 15 anos, a concentração de gás carbônico na atmosfera de sua região. Representando o tempo no eixo da abscissa x e a concentração na ordenada y obtemos um conjunto discreto de 15 pontos no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, e é possível, utilizando inclusive softwares matemáticos, aproximar uma curva contínua que melhor se ajuste a esses pontos. Por sua vez, o pesquisador pode fazer previsões de concentrações futuras com base nesta curva. No entanto, pela delimitação do tema essas aplicações não são objeto de estudo.

O objetivo desse trabalho é explorar a matemática que está por trás destes processos, mais formalmente, explorar um processo de interpolação polinomial para funções inteiras,estudar uma de suas aplicações como o conhecido Binômio de Newton e determinar funções contínuas que satisfazem certas propriedades. Para tal, usamos como metodologia de pesquisa, a revisão bibliográfica, sendo a principal referência o livro: *Curso de Análise de Cauchy: uma edição comentada*, parte da coleção *História da Matemática* (SCHUBRING; ROQUE, 2016). A escolha deste livro foi interessante, pois, trata-se da primeira tradução da famosa obra de Cauchy: *Cours d' analyse* para o português. Essa tradução feita em 2016, baseia-se na obra original de 1821, um período em que o formalismo matemático moderno dava seus primeiros passos com esse e outros matemáticos do século XIX.

Formalmente um processo de interpolação pode ser definido como qualquer método de determinação de uma função, através da informação de algumas características dessa função, como por exemplo, o conhecimento de finitos ou infinitos valores particulares os quais a função atinge em seu domínio. Por exemplo, se o intuito é determinar uma função

$$f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a < b,$$

a partir de n valores conhecidos na imagem, então devemos encontrar uma curva parametrizada $(t, f(t))$, $t \in [a, b]$, a qual passará por esses n valores conhecidos. Por outro lado, se f é uma função de duas variáveis, isto é,

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

então procuramos uma superfície contendo tais pontos conhecidos.

Há uma variedade de maneiras para resolver tais questões. Por exemplo, na *interpolação trigonométrica*, obtém-se um polinômio trigonométrico que passa por um conjunto de pares conhecidos (x, y), e é utilizada para determinação de funções periódicas (ver (RALSTON; RABINOWITZ, 2001)).

A primeira parte deste trabalho baseia-se na *interpolação polinomial* para funções inteiras (analíticas), que é um tipo de interpolação cuja função interpoladora é um polinômio (ver YOUNG e GREGORY (1972), KREYSZIG (2006)). Isso significa que ao procurarmos uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ conhecendo-se a imagem das abscissas $(x_i)_{i=1}^n$, encontraremos um polinômio $p(x)$ de modo que

$$f(x_i) = p(x_i),$$

para todo $i = 1, 2, ..., n$. Além disso, neste trabalho encontra-se também o caso para funções de duas variáveis, que pode ser estendido para funções inteiras de várias variáveis x_1, x_2, ..., x_n, (Ver teorema 4.0.2) e também como consequência, a fórmula do Binômio de Newton $(x + y)^n$ para números naturais x e y.

Na segunda parte, procuramos caracterizar algumas funções contínuas que possuam certas propriedades através de uma análise matemática rigorosa, envolvendo conceitos como convergência de sequências e densidade nos números reais. Esta parte está dividida em 4 problemas propostos.

O trabalho está dividido da seguinte forma: No Capítulo 2 fazemos uma breve introdução a alguns conceitos de interpolação de funções inteiras bem como definições e teoremas, que serão fundamentais para os nossos estudos. No Capítulo 3, desenvolvemos algumas aplicações dos resultados obtidos através do processo de interpolação de funções inteiras, no Capítulo 4 generalizamos esses resultados para várias o que nos leva ao Capítulo 5, onde se encontra a dedução do *Binômio de Newton* para os números naturais. Finalizando com o Capítulo 6 que trata da caracterização de funções contínuas a partir de propriedades dadas. As referências utilizadas no capítulo 2 e 3 são as seguintes: (SCHUBRING; ROQUE, 2016) e (CHURCHILL; BROWN, 2015).

2 INTERPOLAÇÃO PARA FUNÇÕES INTEIRAS

O método de interpolação pode ser entendido como qualquer método matemático de determinação de uma função a partir de um certo número de valores particulares supostamente conhecidos (um conjunto discreto). Por exemplo, se desejamos determinar uma função de uma ou duas variáveis, e essas funções podem ser consideradas como uma curva ou uma superfície, respectivamente, o problema da interpolação consiste em encontrar a expressão geral dessa curva, ou dessa superfície, a partir de alguns pontos discretos $(x, f(x))$ conhecidos, com $x \in \text{Dom}(f)$.

Para tal estudo, faremos agora uma breve introdução a teoria das funções inteiras.

Definição 2.0.1. *Seja Z um conjunto de números complexos. Uma* ***função*** *$f : Z \to \mathbb{C}$ é uma regra que associa a cada $z \in Z$ um número complexo w. Dizemos que w é o* ***valor*** *de f assumido em z e o denotamos por $f(z)$, ou seja, $f(z) = w$. O conjunto Z é denominado* ***domínio*** *de f.*

Exemplo 2.0.1. *Uma função que usamos com muita frequência nesse trabalho é a função polinomial. Seja n um número natural, se $a_0, a_1, ..., a_n$ forem constantes complexas, com $a_n \neq 0$, a função*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

será um ***polinômio complexo de grau*** *n. Note que essa soma tem um número finito de parcelas e seu domínio de definição é todo plano complexo.*

Definição 2.0.2. *Seja f uma função cujo domínio de definição contenha uma vizinhança $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \epsilon\}$ de um ponto z_0. A* ***derivada*** *de f em z_0 é definida como o limite*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

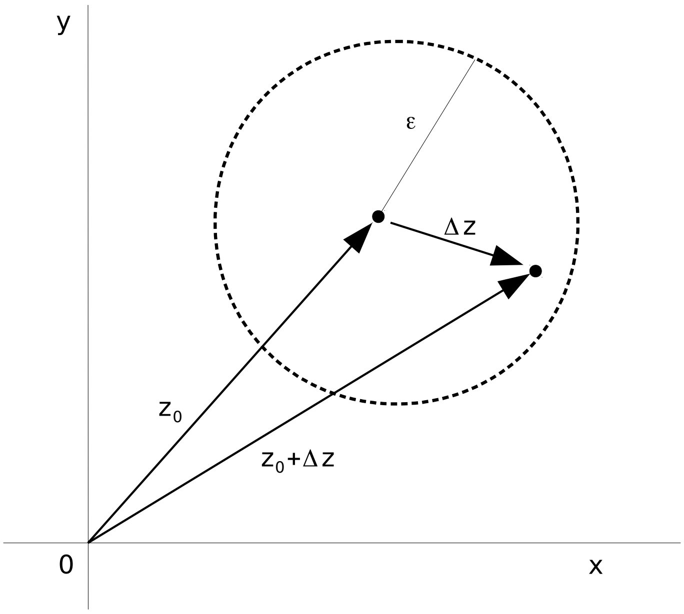
e, se esse limite existir, diremos que a função f é ***derivável*** *em z_0.*

De maneira equivalente escrevendo a variável z da Definição 2.0.2 como $\Delta z = z - z_0$ com $z \neq z_0$, obtemos no lugar de (2.1) a seguinte equação

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \tag{2.1}$$

Como f está definida em uma vizinhança de z_0, o número $f(z_0 + \Delta z)$ está definido com $|\Delta z|$ suficientemente pequeno.

Figura 1 – Interpretação geométrica da derivada no plano complexo.



Fonte: Autor.

Denotando o numerador de (2.1) por $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0),$ o qual indica a variação no valor $w = f(z)$ de f correspondente a uma variação Δz do ponto do domínio de f e denotando $f'(z_0)$ por $dw/dz,$ a equação (2.1) é dada por

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Vejamos agora um exemplo de função derivável em um certo subconjunto dos números complexos.

Exemplo 2.0.2. *Suponha que $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Em cada ponto $z \in \mathbb{C}$ não nulo,*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{1}{z + \Delta z} - \frac{1}{z} \right) \frac{1}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-1}{(z + \Delta z)z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-1}{z^2 + \Delta z \cdot z} = -\frac{1}{z^2}$$

e portanto

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2}, \text{ ou } f'(z) = -\frac{1}{z^2}, \text{ com } z \neq 0.$$

Definição 2.0.3. *Uma função f de uma variável complexa é dita analítica em $z_0 \in$ Dom(f) se f é diferenciável em z_0 e sua vizinhança, isto é, se existe $\delta > 0$ tal que f é diferenciável em $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \delta\}$. Além disso, f é dita analítica em um conjunto aberto $Z \subset$ Dom$(f) \subset \mathbb{C}$ se f é analítica para toda vizinhança de $z \in Z$.*

Caso seja necessário falar de uma função que é analítica em um conjunto Z que não é aberto, deve ser entendido que essa função é analítica em algum conjunto aberto que contém Z.

Definição 2.0.4. *Uma função analítica em cada ponto de todo o plano complexo $\mathbb{C}$ é dita **inteira**.*

Os resultados enunciados a seguir apresentam algumas das propriedades de funções inteiras, as quais serão úteis mais adiante para determinação de funções inteiras a partir de um conjunto discreto de pontos supostos conhecidos. O primeiro trata de uma propriedade de divisibilidade das funções inteiras.

Observação 2.0.1. *Seja $f : X \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira. Se existir um $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 0$, então $f(x)$ é divisível por $x - x_0$.*

A observação seguinte é uma generalização da Observação 2.0.1.

Observação 2.0.2. *Seja $f : X \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira. Se existir uma sequência finita $(x_i)_{i=0}^{n-1}$, contida em X formada por n termos conhecidos tal que $f(x_i) = 0$, para todo $i = 0,...,n-1$ então $f(x)$ é divisível pelo produto:*

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}).$$

A definição a seguir nos diz que igualdade de funções complexas é análoga a qualquer tipo de função.

Definição 2.0.5. *Dizemos que duas funções inteiras $f, g : X \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ são iguais, se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.*

O próximo teorema trata das condições necessárias para que duas funções inteiras sejam iguais.

Teorema 2.0.1. *Sejam $f, g : X \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ duas funções inteiras. Se $(f(x_i))_{i=0}^{n-1} = (g(x_i))_{i=0}^{n-1}$ para uma sequência finita $(x_i)_{i=0}^{n-1}$, contida em X de n termos conhecidos, com $n \in \mathbb{N}$ maior que o grau de ambas as funções, então $f(x)$ e $g(x)$ são iguais, isto é $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções inteiras e suponha, sem perda de generalidade, ambas de grau $n - 1$ e além disso, $(f(x_i))_{i=0}^{n-1} = (g(x_i))_{i=0}^{n-1}$ para uma sequência finita $(x_i)_{i=0}^{n-1}$ de n termos.

Suponha por absurdo que $f \neq g$, assim fazendo a diferença $f - g$ temos também um polinômio, uma vez que a diferença de polinômios é um polinômio, sendo f e g de grau $n - 1,$ o grau do polinômio diferença $f - g$ não ultrapassa $n - 1$, e mais ainda $f(x_i) - g(x_i) = 0$ nos n pontos para $i = 0, 1, ..., n - 1$. Logo pelo Teorema 2.0.2 o polinômio $f - g$ é divisível pelo produto

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Porém note que, este produto é um polinômio de grau $n,$ o que é absurdo, pois temos um polinômio de grau n dividindo outro de grau $n - 1$. Portanto as funções $f(x)$ e $g(x)$ são iguais para todo $x \in X$. □

A partir do resultado do Teorema 2.0.1, podemos formular o seguinte corolário, que auxilia na determinação de funções inteiras iguais, podendo ser usado como caracterização de duas funções inteiras iguais.

Corolário 2.0.1. *Dizemos que duas funções $f, g : X \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ inteiras são iguais se, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$, ou se $(f(x_i))_{i=0}^{n-1} = (g(x_i))_{i=0}^{n-1}$ para n valores discretos em X onde $n \in \mathbb{N}$ é um número maior que o grau de cada uma das funções.*

Demonstração. Segue do Teorema 2.0.1. □

3 ENCONTRANDO O POLINÔMIO INTERPOLANTE, POR APROXIMAÇÃO

Sob as hipóteses do Teorema 2.0.1, o número de valores de x para os quais $f(x)$ e $g(x)$ são ou assumem valores iguais é indefinido. Assim, temos que uma função inteira u, de grau $n-1$, será completamente determinada caso se conheça $u(x_i)$, para $i = 0,...,n-1$, onde $(x_i)_{i=0}^{n-1}$ é uma sequência finita contida em X.

Defina $u_i = u(x_i)$ e suponha inicialmente que os valores particulares conhecidos $(u_i)_{i=0}^{n-1}$ da sequência $(x_i)_{i=0}^{n-1}$ são tais que $u_i = 0$ para todo $i \neq 0$, isto é, apenas u_0 é não-nulo. Pelo Teorema 2.0.2, a função u, é divisível pelo produto

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}),$$

e pela definição de divisibilidade u será, consequentemente, da forma

$$u = k(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}), \tag{3.1}$$

onde k é uma constante, pois se k for um polinômio de grau maior ou igual a 1, temos uma contradição com o grau de u. Além disso, fazendo $x = x_0$ obtemos u_0, logo

$$u_0 = k(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1}), \tag{3.2}$$

isolando a constante k em (3.1) e (3.2) obtemos

$$k = \frac{u}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})} = \frac{u_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})} \tag{3.3}$$

isto é, temos por (3.3) que

$$\frac{u}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})} = \frac{u_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1}} \tag{3.4}$$

multiplicando o lado esquerdo da equação (3.4) pelo denominador direito e o lado direito pelo denominador esquerdo, temos:

$$u\{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})\} = u_0\{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})\} \tag{3.5}$$

isolando u em (3.5) temos que

$$u = u_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}. \tag{3.6}$$

De forma análoga ao que foi feito de (3.1) à (3.6), se os valores particulares conhecidos da sequência $(u_i)_{i=0}^{n-1}$ são tais que $u_i = 0$, com exceção de $i = 1$, encontramos

$$u = u_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n-1})},$$

e podemos proceder desta maneira, supondo que $u_i = 0$ para todo i exceto $i = j$. Finalmente, para o último caso, se os valores particulares conhecidos da sequência $(u_i)_{i=0}^{n-1}$, são tais que

$u_i = 0$ com exceção do último $u_{n-1} \neq 0$, encontraremos

$$u = u_{n-1}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})}.$$

Reunindo estas expressões assumidas por u, nos processos descritos acima, encontramos por soma um polinômio em x de grau $n-1$, que terá a propriedade de se reduzir a u_0 para $x = x_0$, a u_1, para $x = x_1$ e assim sucessivamente. Portanto u poderá ser expressa pela soma:

$$\begin{aligned} u &= u_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})} \\ &+ u_1\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n-1})} \\ &+ \cdots + \\ &+ u_{n-1}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Esse polinômio será, então, a expressão a qual procurávamos.

Observação 3.0.1. *Note que ao tomarmos $x = x_0$, temos de fato $u(x_0) = u_0$, como é esperado:*

$$\begin{aligned} u(x_0) &= u_0\frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})} \\ &+ u_1\frac{(x_0-x_0)(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n-1})} \\ &+ \cdots + \\ &+ u_{n-1}\frac{(x_0-x_0)(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})} \\ &= u_0\frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})} + 0 + 0 + \cdots + 0 = u_0. \end{aligned}$$

Da mesma maneira, tomando $x = x_i$ em (3.7)*, temos $u(x_i) = u_i$ para todo $i = 1,...,n-1$, o que mostra que* (3.7) *é realmente o polinômio u procurado.*

Considerando ainda a construção de (3.7), veja que podemos por esse processo inferir uma nova equação da seguinte maneira:

Seja a uma constante complexa. Pelo Corolário 2.0.1, vimos que uma função inteira u de grau $n-1$ é completamente determinada caso conheçamos a imagem de uma sequência finita $(x_i)_{i=0}^{n-1}$ de n pontos pertencentes ao domínio da função. Assim a função $\overline{u} = u - a$, também de grau $n-1$, será completamente determinada caso se conheça $(u(x_i) - a)$ valores de $u - a$ avaliados em (x_i) para $i = 0,...,n-1$, onde $(x_i)_{i=0}^{n-1}$, é a mesma sequência finita contida em X e $u(x_i)$ são pontos conhecidos.

Ao aplicarmos $(u(x) - a)$ nos pontos $(x_i)_{i=0}^{n-1}$, obtemos a sequência

$$(u(x_i)_{i=0}^{n-1} - a) = (u(x_0) - a, u(x_1) - a, ..., u(x_{n-1}) - a)$$

contida em $\mathbb{C}$ com n termos conhecidos. Ou simplesmente

$$(u_i - a)_{i=0}^{n-1} = (u_0 - a, u_1 - a, ..., u_{n-1} - a).$$

Procuremos sob estas condições o valor geral da função $\overline{u} = u - a$. Da mesma maneira feita para encontrarmos u, acrescentamos ainda a hipótese que os valores particulares conhecidos são tais que $(u_i - a)_{i=0}^{n-1} = 0$ para todo $i \neq 0$. Pelo Teorema 2.0.2, a função $u - a$, será divisível pelo produto

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1}), \tag{3.8}$$

então, pela definição de divisibilidade e analisando o grau do polinômio (3.8), $(u - a)$ será, consequentemente, da forma

$$u - a = k(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1}), \tag{3.9}$$

sendo k uma constante. Além disso, fazendo $x = x_0$ em (3.9)

$$u_0 - a = k(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_{n-1}), \tag{3.10}$$

isolando a constante k em (3.9) e (3.10) temos que

$$k = \frac{u - a}{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})} = \frac{u_0 - a}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_{n-1})} \tag{3.11}$$

e, portanto olhando para a segunda igualdade de (3.11),

$$\frac{(u - a)}{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})} = \frac{(u_0 - a)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_{n-1})} \tag{3.12}$$

multiplicando ambos os lados pelos denominadores de (3.12), obtemos

$$(u-a)[(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})] = (u_0-a)[(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})] \tag{3.13}$$

e por fim, isolando $u - a$ em (3.13) obtemos,

$$u - a = (u_0 - a)\frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_{n-1})}. \tag{3.14}$$

De modo análogo ao feito de (3.9) à (3.14), se os valores particulares conhecidos da sequência $(u_i - a)_{i=0}^{n-1}$ são tais que $(u_i - a = 0)$, com exceção de $i = 1$, encontramos

$$u - a = (u_1 - a)\frac{(x - x_0)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_{n-1})}...$$

Procedendo desta mesma maneira para todo i, encontramos a última equação abaixo, ao considerar apenas $i = n - 1$ não nulo.

$$u - a = (u_{n-1} - a)\frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-2})}{(x_{n-1} - x_0)(x_{n-1} - x_1)\cdots(x_{n-1} - x_{n-2})}.$$

Reunindo estas n expressões acima assumidas por $u - a$, encontramos por soma um polinômio em x de grau $n - 1$, que terá a propriedade de se reduzir a $u_0 - a$ para $x = x_0$, a $u_1 - a$, para $x = x_1$,..., a $u_{n-1} - a$, para $x = x_{n-1}$. Assim $\overline{u} = u - a$ poderá ser expressa pela soma:

$$\begin{aligned}
u-a &= (u_0-a)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}\\
&+ (u_1-a)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n-1})}\\
&+ \cdots +\\
&+ (u_{n-1}-a)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})};
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Esse polinômio é, então, a expressão procurada.

Observação 3.0.2. *A expressão* $(u_i-a)_{i=0}^{n-1}$ *é igual a* u_i*, quando substituído* $x=x_i$ *como esperado. Por exemplo, no caso de* $i=0,$ *temos por* (3.15)

$$\begin{aligned}
u-a &= (u_0-a)\frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}\\
&+ (u_1-a)\frac{(x_0-x_0)(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n-1})}\\
&+ \cdots +\\
&+ (u_{n-1}-a)\frac{(x_0-x_0)(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})}\\
&= (u_0-a)\frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}0+0+\cdots+0=u_0-a.
\end{aligned}$$

Agora, subtraindo a equação (3.15) de (3.7), obtemos

$$\begin{aligned}
u-(u-a) &= u_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}\\
&- (u_0-a)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}\\
&+ u_1\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n-1})}\\
&- (u_1-a)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n-1})}\\
&+ \cdots +\\
&+ u_{n-1}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})}\\
&- (u_{n-1}-a)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Desenvolvendo o termo do lado direito de (3.16), temos

$$\begin{aligned}
a &= u_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}\\
&- u_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}\\
&+ a\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}\\
&+ u_1\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n-1})}\\
&- u_1\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n-1})}\\
&+ a\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n-1})}\\
&+ \cdots +\\
&+ u_{n-1}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})}\\
&- u_{n-1}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})}\\
&+ a\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Após o cancelamento dos termos em (3.17), temos

$$\begin{aligned}
a &= a\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}\\
&+ a\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n-1})}\\
&+ \cdots +\\
&+ a\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Por fim, dividindo ambos os lados da igualde em (3.18) por $a \neq 0,$ encontramos a seguinte equação

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}\\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n-1})}\\
&+ \cdots +\\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})}.
\end{aligned}$$

As equações (3.7) e (3.15) são utilizadas para resolver problemas de interpolação de funções inteiras, mas em geral, por conveniência usamos a equação (3.15), pois tomando a constante a igual a um ponto da sequência finita $(u_i)_{i=0}^{n-1}$, diminuímos um termo do lado direito da equação.

Abordaremos agora dois exemplos de aplicações da expressão geral (3.15).

Exemplo 3.0.1. *Podemos usar* (3.15) *para determinar uma reta passando por dois pontos dados. Sejam* (x_0, y_0) *e* (x_1, y_1) *dois pontos distintos do plano complexo. Substituindo na expressão* (3.15) u *por* y, *e tomando* $n = 1$ *e* $a = y_0$, *encontramos como equação da reta*

$$
\begin{aligned}
(y - y_0) &= (y_0 - y_0)\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + (y_1 - y_0)\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \\
&= 0\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + (y_1 - y_0)\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}
\end{aligned}
$$

Logo a equação da reta desejada em coordenadas cartesiana é

$$
y - y_0 = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)
$$

Exemplo 3.0.2. *De modo análogo, podemos determinar uma parábola passando por três pontos distintos dados com seu eixo paralelo ao eixo* y. *Sejam* (x_0,y_0), (x_1,y_1) *e* (x_2,y_2) *a representação desses três pontos em coordenadas polares,* y *a ordenada variável da parábola. Substituindo* u *por* y, *na fórmula* (3.15), $n = 2$ *e* $a = y_0$, *encontramos como equação da parábola*

$$
\begin{aligned}
y - y_0 &= (y_0 - y_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\
&+ (y_1 - y_0)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\
&+ (y_2 - y_0)\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\
&= 0\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\
&+ (y_1 - y_0)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\
&+ (y_2 - y_0)\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}
\end{aligned}
$$

Logo a equação da parábola desejada é

$$
y - y_0 = \quad (y_1 - y_0)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + (y_2 - y_0)\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad .
$$

Voltando a equação (3.7), ao considerarmos $u = x^m$ com $m < n$, $m \in \mathbb{Z}$ a sequência finita de valores particulares $(u_i)_{i=0}^{n-1}$ conhecidos será igual a $(x_i^m)_{i=0}^{n-1}$. Substituindo estas informações em (3.7) obtemos

$$
\begin{aligned}
x^m &= x_0^m \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_{n-1})} \\
&+ x_1^m \frac{(x - x_0)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_{n-1})} \\
&+ \cdots + \\
&+ x_{n-1}^m \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-2})}{(x_{n-1} - x_0)(x_{n-1} - x_1)\cdots(x_{n-1} - x_{n-2})},
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

e observe que, tomando $m = 0$, esta última equação torna-se (3.3). Além disso, note que desenvolvendo o produto do lado direito dessa equação obtemos um polinômio em x.

Para $n = 2$, temos:

$$x^m = x_0^m \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + x_1^m \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = x_0^m \frac{x - x_1}{(x_0 - x_1)} + x_1^m \frac{x - x_0}{(x_1 - x_0)}$$

Observe que o coeficiente de x é $\dfrac{x_0^m}{(x_0 - x_1)} + \dfrac{x_1^m}{(x_1 - x_0)}$.

Para $n = 3$, temos:

$$\begin{aligned} x^m &= x_0^m \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + x_1^m \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + x_2^m \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_2)} \\ &= x_0^m \frac{x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + x_1^m \frac{x^2 - x_0 x - x_2 x + x_0 x_2}{(x_1 - x_1)(x_1 - x_2)} + x_2^m \frac{x^2 - x_0 x - x_1 x + x_0 x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

Observe que os coeficientes de x são

$$\frac{x_0^m}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{x_1^m}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \frac{x_2^m}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Para que a equação (3.19) seja válida, as potências de x e, em particular, a potência x^{n-1}, deve necessariamente ter o mesmo coeficiente em ambos os lados da equação. Assim é interessante analisarmos os seguintes casos:

1º: Supondo $m < n - 1$, necessariamente o coeficiente de x^{n-1} tem que ser zero:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{x_0^m}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_{n-1})} \\ &+ \frac{x_1^m}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_{n-1})} \\ &+ \cdots + \\ &+ \frac{x_{n-1}^m}{(x_{n-1} - x_0)(x_{n-1} - x_1)\cdots(x_{n-1} - x_{n-2})}; \end{aligned} \tag{3.20}$$

2º: Supondo $m = n - 1$, necessariamente o coeficiente de x^{n-1} tem de ser 1, pois do lado esquerdo da equação (3.19) o coeficiente de x^m é 1.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{x_0^{n-1}}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_{n-1})} \\ &+ \frac{x_1^{n-1}}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_{n-1})} \\ &+ \cdots + \\ &+ \frac{(x_{n-1})^{n-1}}{(x_{n-1} - x_0)(x_{n-1} - x_1)\cdots(x_{n-1} - x_{n-2})}. \end{aligned}$$

Vale a pena observar que a fórmula (3.20) vale mesmo no caso que se supõe $m = 0$, que faz com que os numeradores dos coeficientes sejam todos iguais a 1:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_{n-1})} \\
&+ \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_{n-1})} \\
&+ \cdots + \\
&+ \frac{1}{(x_{n-1} - x_0)(x_{n-1} - x_1)\cdots(x_{n-1} - x_{n-2})}.
\end{aligned}$$

4 INTERPOLAÇÃO DE FUNÇÕES INTEIRAS DE VÁRIAS VARIÁVEIS.

Os métodos vistos até agora por meio dos quais podemos determinar as funções inteiras de uma única variável a partir de um certo número de valores particulares conhecidos, podem ser estendidos também para funções inteiras de **várias variáveis**. Faremos agora tal generalização.

Teorema 4.0.1. *Sejam $f, g : X \times Y \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções inteiras de duas variáveis x e y, se $f(x_i, y_i) = g(x_i, y_i)$ para as sequências $(x_i)_{i=0}^{n-1}$ e $(y_i)_{i=0}^{n-1}$, contidas em X de n, com n maior que o grau de ambas as funções, então $f(x, y)$ e $g(x, y)$ serão iguais, para todos $x, y \in X$.*

Demonstração. Sejam $f(x, y)$ e $g(x, y)$ com $f, g : X \times Y \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções inteiras de duas variáveis x e y. Suponha, sem perda de geralidade, ambas de grau $n-1$ em relação a cada uma das variáveis e que para as sequências finitas de n pontos $(x_i)_{i=0}^{n-1}$ e $(y_i)_{i=0}^{n-1}$ pertencentes a X ocorra

$$f(x_n, y_n) = g(x_n, y_n).$$

Note que ao fixar $x = x_0$, $f(x_0, y)$ e $g(x_0, y)$ são duas funções de uma única variável y e que se tornam iguais para os n pontos de $(y_i)_{i=0}^{n-1}$, isto é,

$$f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0), f(x_0, y_1) = g(x_0, y_1),...,f(x_0, y_{n-1}) = g(x_0, y_{n-1}).$$

Logo pelo Teorema 2.0.1 essas duas funções serão iguais para todo y, portanto

$$f(x_0, y) = g(x_0, y), \tag{4.1}$$

para todo $y \in Y$. De modo análogo, encontramos

$$\begin{aligned} f(x_1, y) &= g(x_1, y), \\ f(x_2, y) &= g(x_2, y), \\ &\vdots \\ f(x_{n-1}, y) &= g(x_{n-1}, y). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Por outro lado, seja $\overline{y} \in Y$ fixado. De (4.1) e (4.2) temos que

$$f(x_0, \overline{y}) = g(x_0, \overline{y}), f(x_1, \overline{y}) = g(x_1, \overline{y}),..., f(x_{n-1}, \overline{y}) = g(x_{n-1}, \overline{y}),$$

isto é, $f(x_i, \overline{y}) = g(x_n, \overline{y})$ para n valores, daí pelo Teorema 2.0.1 essas duas funções serão iguais para todo $x \in X$, portanto

$$f(x, \overline{y}) = g(x, \overline{y}).$$

Como $\overline{y} \in Y$ é arbitrário, concluímos que para todo $y \in Y$ e $x \in X$,

$$f(x, y) = g(x, y),$$

mostrando assim o desejado. □

Corolário 4.0.1. *Duas funções $f, g : X \times Y \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ inteiras de duas variáveis são iguais se $f(x, y) = g(x, y)$ para todo $(x, y) \in X \times Y$, ou se $f(x_i, y_i) = g(x_i, y_i)$ para n valores discretos maiores que o grau de ambas f e g.*

Demonstração. Segue do Teorema 4.0.1. □

Segue do Teorema 4.0.1 que a função inteira $f(x,y)$ de grau $n-1$ em relação a cada uma das variáveis x e y, será completamente determinada caso conheçamos a imagem das sequências $(x_i)_{i=0}^{n-1}$ e $(y_i)_{i=0}^{n-1}$. Sob as mesmas hipóteses para construção da equação (3.7), fazendo $u = f(x,y)$ em (3.7) temos:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})} \\ &+ f(x_1,y)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n-1})} \\ &+ \cdots + \\ &+ f(x_{n-1},y)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Por outro lado, fixando $x_m \in (x_i)_{i=0}^{n-1}$ obtemos a equação (4.3) em função da variável y :

$$\begin{aligned} f(x_m,y) &= f(x_m,y_0)\frac{(y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_{n-1})}{(y_0-y_1)(y_0-x_2)\cdots(y_0-y_{n-1})} \\ &+ f(x_m,y_1)\frac{(y-y_0)(y-y_1)\cdots(y-y_{n-1})}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)\cdots(y_1-y_{n-1})} \\ &+ \cdots + \\ &+ f(x_m,y_{n-1})\frac{(y-y_0)(y-y_1)\cdots(y-y_{n-2})}{(y_{n-1}-y_0)(y_{n-1}-y_1)\cdots(y_{n-1}-y_{n-2})}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Exemplo 4.0.1. *Tomando $n=2$ a equação* (4.3) *é da forma*

$$f(x,y) = f(x_0,y)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1,y)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

e a equação (4.4) *igual à*

$$f(x_m,y) = f(x_1,y_0)\frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f(x_1,y_1)\frac{y-y_0}{y_1-y_0}. \tag{4.5}$$

Considerando $m=0$ e $m=1$ em (4.5)*, obteremos as expressões $f(x_0,y)$ e $f(x_1,y)$. Substituindo tais expressões em* (4.5)*, temos*

$$\begin{aligned} f(x,y) = \quad & f(x_0,y_0)\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}\cdot\frac{(y-y_1)}{(y_0-y_1)} + f(x_0,y_1)\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}\cdot\frac{(y-y_0)}{(y_1-y_0)} \\ & + f(x_1,y_0)\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\cdot\frac{(y-y_1)}{(y_0-y_1)} + f(x_1,y_1)\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\cdot\frac{(y-y_0)}{(y_1-y_0)}. \end{aligned}$$

Da mesma maneira, é possível estender o resultados do Teorema 4.0.1 e Corolário 4.0.1 para funções de 3 ou mais variáveis, utilizando raciocínio análogo ao usado nesses resultados.

Corolário 4.0.2. Duas funções $f,g : X\times Y\times Z \subset \mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ inteiras de três variáveis x,y e z, são iguais se $f(x,y,z) = g(x,y,z)$ para todo $x,y,z \in X$, ou se $f(x_i,y_i,z_i) = g(x_i,y_i,z_i)$ para n valores discretos maiores que um limite dado.

5 APLICAÇÕES

O desenvolvimento teórico feito até aqui nos permite inferir algumas aplicações e com este intuito, consideremos em particular os produtos obtidos através da multiplicação sucessiva de fatores da forma,

$$x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-(n-1)) \tag{5.1}$$

com o primeiro fator sendo uma variável inteira e n um número natural qualquer. Fazendo $x = y$ em (5.1), temos:

$$y(y-1)(y-2)(y-3)\cdots(y-(n-1)) \tag{5.2}$$

Problema 5.0.1. *Suponha agora que queiramos, por meio dos produtos, em* (5.1) *e* (5.2) *expressar o seguinte produto:*

$$(x+y)(x+y-1)(x+y-2)(x+y-3)\cdots(x+y-(n-1)). \tag{5.3}$$

Antes de resolver este problema enunciaremos um resultado de análise combinatória que nos será útil pois estamos interessados em calcular todas as combinações possíveis do produto (5.3). Como temos m elementos tomados p a p com $m > p$ e como a ordem dos fatores não altera o produto, podemos usar a fórmula da combinação:

$$C_{m,p} = \frac{m!}{p!(m-p)!}, \tag{5.4}$$

onde m é a quantidade de elementos de um conjunto e p é um número natural menor ou igual a m, que representa a quantidade de elementos que irão formar os agrupamentos.

Demonstração. Para resolvermos este problema, suponhamos primeiramente que x e y sejam números inteiros maiores que n. Fazendo $m = (x+y)$, $p = n$ na fórmula (5.4), obtemos:

$$C_{x+y,n} = \frac{(x+y)!}{n!(x+y-n)!}. \tag{5.5}$$

Desenvolvendo o fatorial no numerador em (5.5),

$$C_{x+y,n} = \frac{(x+y)(x+y-1)(x+y-2)\cdots(x+y-(n-1))(x+y-n)!}{n!(x+y-n)!} \tag{5.6}$$

efetuando o cancelamento em (5.6), segue que

$$C_{x+y,n} = \frac{(x+y)(x+y-1)(x+y-2)\cdots(x+y-(n-1))}{n!}, \tag{5.7}$$

ou ainda, podemos reescrever o denominador em (5.7) como

$$C_{x+y,n} = \frac{(x+y)(x+y-1)(x+y-2)\cdots(x+y-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}. \tag{5.8}$$

Note que o numerador de $C_{x+y,n}$ em (5.8) é igual ao produto (5.3) que queremos expressar e esta última equação expressa o número de possibilidades possíveis de agrupamento dos termos $x+y$, variáveis tomadas n a n. Observe que dentre estas possibilidades de agrupamentos, existem aquelas que serão formadas apenas pelos termos x. Novamente usando (5.4), mas agora fazendo $m = x$ e $p = n$, o número de possibilidades deste tipo será expressa pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} C_{x,n} &= \frac{x!}{n!(x-n)!} \\ &= \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))(x-n)!}{n!(x-n)!} \\ &= \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))}{n!} \\ &= \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Seguindo esta mesma lógica, também há as possibilidades de agrupamentos que englobaram $n-1$ termos de x e um termo de y. Deste modo, o número de possibilidades é dado pela multiplicação da possibilidade do primeiro grupo pelo segundo. Logo utilizando (5.4) temos:

$$\begin{aligned} C_{x,n-1}\cdot C_{y,1} &= \frac{x!}{(n-1)!(x-(n-1))!}\cdot\frac{y!}{1!(y-1)!} \\ &= \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-2)(x-(n-1))!}{(n-1)!(x-(n-1))!}\cdot\frac{y(y-1)!}{1!(y-1)!} \\ &= \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-2))}{(n-1)!}\cdot\frac{y}{1} \\ &= \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-2))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}\cdot\frac{y}{1} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Procedendo desta forma, temos o grupo de possibilidades formados por $n-2$ termos de x e dois termos de y. Assim fazendo $m=x$ e $p=n-2$ e também $m=y$ e $p=2$ no segundo, temos o número de possibilidades, calculado de modo análogo a (5.10):

$$C_{x,n-2}\cdot C_{y,2} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-3))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)}\cdot\frac{y(y-1)}{1\cdot 2}. \tag{5.11}$$

Assim sucessivamente até que todos os termos sejam formados apenas por variáveis y e o número de possibilidades deste grupo igual a

$$C_{y,n} = \frac{y(y-1)(y-2)\cdots(y-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}. \tag{5.12}$$

Fazendo a soma das expressões obtidas de (5.9) à (5.12), a qual expressa todas as combinações possíveis da multiplicação de $x+y$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x+y)(x+y-1)(x+y-2)\cdots(x+y-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\\
&\quad = \quad \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\\
&\quad + \quad \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-2))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}\cdot\frac{y}{1}\\
&\quad + \quad \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-3))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)}\cdot\frac{y(y-1)}{1\cdot 2}\\
&\quad + \quad \cdots +\\
&\quad + \quad \frac{x}{1}\cdot\frac{y(y-1)(y-2)\cdots(y-(n-2))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}\\
&\quad + \quad \frac{y(y-1)(y-2)\cdots(y-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

Multiplicando a expressão (5.13) em ambos os lados por $n!$ encontramos a seguinte expressão:

$$
\begin{aligned}
&(1\cdot 2\cdots n)\ \frac{(x+y)(x+y-1)(x+y-2)\cdots(x+y-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\\
&\quad = (1\cdot 2\cdots n)\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\\
&\quad + (1\cdot 2\cdots n)\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-2))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}\cdot\frac{y}{1}\\
&\quad + (1\cdot 2\cdots n)\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-3))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)}\cdot\frac{y(y-1)}{1\cdot 2}\\
&\quad + \cdots +\\
&\quad + (1\cdot 2\cdots n)\frac{x}{1}\cdot\frac{y(y-1)(y-2)\cdots(y-(n-2))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}\\
&\quad + (1\cdot 2\cdots n)\frac{y(y-1)(y-2)\cdots(y-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

efetuando os cancelamentos em ambos os lados da expressão (5.14)

$$
\begin{aligned}
&(x+y)(x+y-1)(x+y-2)\cdots(x+y-(n-1))\\
&\quad = \quad x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))\\
&\quad + \quad nx(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-2))\cdot y\\
&\quad + \quad \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-3))\cdot y(y-1)\\
&\quad + \quad \cdots +\\
&\quad + \quad nx\cdot y(y-1)(y-2)\cdots(y-(n-2))\\
&\quad + \quad y(y-1)(y-2)\cdots(y-(n-1))
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Esse polinômio é, então a expressão procurada que resolve o problema proposto. $\square$

Os corolários a seguir são algumas variações da expressão (5.13) obtidas modificando apenas os valores das variáveis x e y.

Corolário 5.0.1. *Substituindo na expressão* (5.13) x *por* $-x$ *e* y *por* $-y$, *obtém-se a seguinte expressão, após colocar os sinais negativos em evidência:*

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x+y)(x+y+1)(x+y+2)\cdots(x+y+(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} \\
&= \frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} \\
&+ \frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-2))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}\cdot\frac{y}{1} \\
&+ \frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-3))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)}\cdot\frac{y(y-1)}{1\cdot 2} \\
&+ \cdots + \\
&+ \frac{x}{1}\cdot\frac{y(y+1)(y+2)\cdots(y+(n-2))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)} \\
&+ \frac{y(y+1)(y+2)\cdots(y+(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}
\end{aligned}
$$

Corolário 5.0.2. *Aplicando a expressão* (5.13) *em* $\frac{x}{2}$ *e* $\frac{y}{2}$. *Multiplicando convenientemente ambos os lados da mesma por 2, encontramos a seguinte expressão:*

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x+y)(x+y-2)(x+y-4)\cdots(x+y-(2n-2))}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} \\
&= \frac{x(x-2)(x-4)\cdots(x-(2n-2))}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} \\
&+ \frac{x(x-2)(x-4)\cdots(x-(2n-4))}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}\cdot\frac{y}{2} \\
&+ \frac{x(x-2)(x-4)\cdots(x-(2n-6))}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-4)}\cdot\frac{y(y-2)}{2\cdot 4} \\
&+ \cdots + \\
&+ \frac{x}{2}\cdot\frac{y(y-2)(y-4)\cdots(y-(2n-4))}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)} \\
&+ \frac{y(y-2)(y-4)\cdots(y-(2n-2))}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}
\end{aligned}
$$

Exemplo 5.0.1. *Aqui mostraremos como é feita a dedução do Corolário 5.0.3, a seguir. Para tal suponhamos* $n = 3$ *em* (5.13), *assim obtemos a seguinte equação:*

$$
\begin{aligned}
\frac{(x+y)(x+y-1)(x+y-2)}{1\cdot 2\cdot 3} &= \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{y}{1} \\
&+ \frac{x}{1}\cdot\frac{y(y-1)}{1\cdot 2} + \frac{y(y-1)(y-2)}{1\cdot 2\cdot 3}
\end{aligned} \tag{5.16}
$$

desenvolvendo os produtos em (5.16) *obtemos os seguintes termos*

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^3-3x^2+3x^2y+3xy^2-6xy+2x+y^3-3y^2+2y}{6} \\
&= \frac{x^3-3x^2+2x}{6} + \frac{yx^2-yx}{2} + \frac{xy^2-xy}{2} + \frac{y^3-3y^2+2y}{6}
\end{aligned} \tag{5.17}
$$

Considerando na expressão (5.17) *apenas os termos cuja a soma dos expoentes das variáveis é igual a 3, obtemos a expressão a seguir:*

$$\frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{6}=\frac{x^3}{6}+\frac{yx^2}{2}+\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{6} \tag{5.18}$$

Agora com os produtos em evidência na expressão (5.18) *temos:*

$$\frac{(x+y)^3}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{y}{1}+\frac{x}{1}\cdot\frac{y^2}{1\cdot 2}+\frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} \tag{5.19}$$

O valor de $(x+y)^3$ obtido por meio da expressão (5.19) *é justamente aquele que fornece o Binômio de Newton para o caso em que x e y são números naturais e $n=3$.*

Corolário 5.0.3. *Desenvolvendo o produto nos dois lados da expressão* (5.13)*, e conservando apenas os termos cuja soma dos expoentes das variáveis é igual a n, obtemos a seguinte expressão:*

$$\begin{aligned}\frac{(x+y)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} &= \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}+\frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n-1}\cdot\frac{y}{1}+\frac{x^{n-2}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n-1}\cdot\frac{y^2}{1\cdot 2}\\ &+ \cdots+\frac{x}{1}\cdot\frac{y^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n-1}+\frac{y^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\end{aligned}$$

O valor de $(x+y)^n$ obtido por meio dessa última fórmula é precisamente conhecido como ***Binômio de Newton****.*

As expressões que acabamos de obter podem ser estendidas para os casos em que se consideram três ou mais variáveis, e o método que utilizamos para responder o Problema 5.0.1 é igualmente aplicável ao problema seguinte.

Problema 5.0.2. *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ variáveis complexas quaisquer. Suponha que desejamos expressar o produto finito*

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)(x_1+x_2+\cdots+x_k-1)(x_1+x_2+\cdots+x_k-2)\cdots(x_1+x_2+\cdots+x_k-(n-1))$$

em função dos seguintes

$$\begin{gathered} x_1(x_1-1)(x_1-2)\cdots(x_1-(n-1)),\\ x_2(x_2-1)(x_2-2)\cdots(x_2-(n-1)),\\ \cdots,\\ x_k(x_k-1)(x_k-2)\cdots(x_k-(n-1)),\end{gathered}$$

Assim como feito no Problema 5.0.1, para resolvermos este problema suponhamos que as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sejam todas maiores que n. De modo análogo a dedução de (5.8)*, obtemos a seguinte fração*

$$\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_k)(x_1+x_2+\cdots+x_k-1)(x_1+x_2+\cdots+x_k-2)\cdots(x_1+x_2+\cdots+x_k-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$$

expressa todas as combinações possíveis que se podem formar com $x_1+x_2+\cdots+x_k$ variáveis tomadas n a n. De modo análogo a dedução da expressão (5.13) *encontramos a fórmula que* *responde este problema e a partir dela, podemos deduzir o valor da potência*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$$

desenvolvendo os produtos em ambos os lados da expressão encontrada e conservando apenas aqueles cuja soma dos expoentes das variáveis é igual a n.

6 DETERMINAÇÃO DE CERTAS FUNÇÕES CONTÍNUAS DE UMA ÚNICA VARIÁVEL

Além de aplicações, nas seções precedentes tratamos principalmente da interpolação de funções inteiras de uma e várias variáveis, supondo conhecido um conjunto discreto de pontos e determinando a função inteira mais precisa que aproxima certa função que passa por esses pontos e, nesse capítulo mudamos a abordagem para determinação de certas funções contínuas de uma única variável.

Observe ainda que, dado um conjunto discreto de pontos existem pelo menos duas funções continuas distintas e coincidentes nos pontos dados, por esse motivo para a determinação de certas funções contínuas, não é suficiente ter o conhecimento de um conjunto discreto de pontos assumidos pela função.

Para determinar uma função contínua de uma única variável, define-se uma propriedade e busca-se uma função que à satisfaz. Trataremos pelos próximos 4 problemas da determinação de certas funções continuas de uma única variável real, partindo de uma suposta propriedade satisfeita pela função.

Problema 6.0.1. *Determinar a função $\varphi(x)$ contínua, tal que, para todos os valores reais das variáveis x_1 e x_2 seja satisfeita a seguinte condição:*

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2). \tag{6.1}$$

Demonstração. Primeiramente podemos estender a propriedade (6.1) para um número $m \in \mathbb{N}$ de vezes, fazendo em (6.1) a substituição de x_2 por $x_2 + x_3$, em sua vez x_3 por $x_3 + x_4$ sucessivamente até x_{m-1} por $x_{m-1} + x_m$. Reescrevendo a propriedade (6.1) de acordo com essa construção, obtemos a generalização da condição (6.1) da seguinte forma:

$$\varphi(x_1 + x_2 + \cdots + x_m) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \cdots + \varphi(x_m),$$

para as x_i variáveis com $i = 1,...,m$. Além disso, fixando α uma constante positiva, e considerando

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m = \alpha,$$

encontramos a seguinte fórmula:

$$\varphi(m\alpha) = m\varphi(\alpha). \tag{6.2}$$

Queremos agora estender a propriedade (6.2) para o caso em que m seja um número $\mu \in \mathbb{R}$ qualquer. Para tal, estenderemos o resultado aos números racionais e usaremos o fato dos racionais serem densos nos reais, ou seja, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Seja $\beta = \dfrac{m}{n}\alpha$, com m e $n \neq 0$ dois números inteiros quaisquer, podemos concluir que (6.2) é verdadeira para $q = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ qualquer, através das seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{m}{n}\alpha \\
\Rightarrow n\beta &= m\alpha \\
\Rightarrow \varphi(n\beta) &= \varphi(m\alpha) \\
\Rightarrow n\varphi(\beta) &= m\varphi(\alpha) \\
\Rightarrow \varphi(\beta) &= \frac{m}{n}\varphi(\alpha),
\end{aligned}$$

sendo a quarta igualde acima justificada por (6.2).

Seja agora $\mu \in \mathbb{R}$. Então μ é limite de alguma sequência (q_n) de números racionais, pelo fato do conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ ser denso no conjunto dos reais $\mathbb{R}$, isto é, para todo $\mu \in \mathbb{R}$, existe uma sequência $q_n \in \mathbb{Q}$ tal que, $q_n \to \mu$, quando $n \to \infty$. Como $\alpha > 0$ é, constante segue que

$$\lim_{n\to\infty} q_n\alpha = \mu\alpha.$$

Supondo φ contínua, então é válido que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(q_n\alpha\right) = \varphi(\lim_{n\to\infty} q_n\alpha) = \varphi(\mu\alpha) \tag{6.3}$$

por outro lado,

$$\lim_{n\to\infty} q_n\varphi(\alpha) = \mu\varphi(\alpha), \tag{6.4}$$

uma vez que $\varphi(\alpha)$ é constante. Logo, pela unicidade do limite em (6.3) e (6.4), mostramos que

$$\varphi(\mu\alpha) = \mu\varphi(\alpha)$$

para todo $\mu \in \mathbb{R}$ como desejado.

Agora caso se tome $\alpha = 1$, temos que, para todos os valores positivos de μ, ocorre:

$$\varphi(\mu) = \mu\varphi(1), \tag{6.5}$$

e, portanto, na equação acima fazendo μ convergir para zero, segue que

$$\varphi(0) = 0. \tag{6.6}$$

Além disso, se na equação (6.1) tomarmos $x_1 = \mu$, $x_2 = -\mu$, concluímos que

$$\begin{aligned} \varphi(\mu - \mu) &= \varphi(\mu) + \varphi(-\mu) \\ \varphi(0) &= \varphi(\mu) + \varphi(-\mu) \end{aligned} \tag{6.7}$$

isolando $\varphi(-\mu)$ em (6.7) e usando (6.5) e (6.6) mostramos a igualdade abaixo,

$$\varphi(-\mu) = \varphi(0) - \varphi(\mu) = -\mu\varphi(1).$$

A equação (6.5) é então valida, quando trocarmos μ por $-\mu$, ou seja, mostramos que para valores quaisquer positivos ou negativos da variável x, a propriedade:

$$\varphi(x) = x\varphi(1), \tag{6.8}$$

é valida.

Segue da fórmula (6.8) que toda função $\varphi(x)$ que, permanecendo contínua, que verifica a equação (6.1), é necessariamente da forma

$$\varphi(x) = ax, \tag{6.9}$$

a designando uma constante arbitrária, a qual é a imagem de $x = 1$. De fato a função $\varphi(x) = ax$ satisfaz as propriedades enunciadas para qualquer valor da constante a. Com efeito, o produto

ax é uma função contínua, pois, $\lim_{x \to b} \varphi(x) = ab = \varphi(b)$ para quaisquer valores de x e, tal função cumpre (6.1):

$$\varphi(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2).$$

A função (6.9) fornece, então, uma solução para o problema proposto. A constante a é denotada constante arbitrária. $\square$

Problema 6.0.2. *Determinar uma função $\kappa(x)$ contínua, tal que, satisfaça para todos os valores reais das variáveis x_1 e x_2, a seguinte propriedade:*

$$\kappa(x_1 + x_2) = \kappa(x_1) \cdot \kappa(x_2). \tag{6.10}$$

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que a função $\kappa(x)$, sujeita a verificar a equação (6.10), assume apenas valores não-negativos. De fato, escolha $x_1 = x_2$ na equação (6.10), assim,

$$\kappa(x_1 + x_1) \quad = \quad \kappa(x_1) \cdot \kappa(x_1),$$

isto é,

$$\kappa(2x_1) \quad = \quad [\kappa(x_1)]^2. \tag{6.11}$$

Em sequência, aplicando (6.11), em $\frac{1}{2}x_1$, temos:

$$\kappa(x_1) \quad = \quad \left[\kappa\left(\frac{1}{2}x_1\right)\right]^2 \geq 0,$$

mostrando assim que a função $\kappa(x)$ é sempre não-negativa.

De modo análogo ao feito no problema (6.0.1) podemos estender a propriedade (6.10) um número $m \in \mathbb{N}$ de vezes, fazendo a substituição em (6.10) de x_2 por $x_2 + x_3$, em sua vez x_3 por $x_3 + x_4$, sucessivamente até x_{m-1} por $x_{m-1} + x_m$. Reescrevendo a propriedade (6.10) de acordo com essa construção, obtemos a generalização da condição que deve ser igualmente satisfeita:

$$\kappa(x_1 + x_2 + \cdots + x_m) = \kappa(x_1) \cdot \kappa(x_2) \cdot \ldots \cdot \kappa(x_m), \tag{6.12}$$

para as variáveis $x_i \in \mathbb{R}$ onde $i = 1,...,m$. Por outro lado, fixando α uma constante positiva e fazendo

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m = \alpha,$$

a equação (6.12) passa a ser da forma:

$$\kappa(m\alpha) = [\kappa(\alpha)]^m. \tag{6.13}$$

Agora como feito no problema anterior, queremos estender a fórmula (6.13) para um $\mu \in \mathbb{R}$ arbitrário.

Com efeito, seja $\beta = \frac{m}{n}\alpha$, com m e $n \neq 0$ dois números naturais quaisquer. Então,

$$n\beta = m\alpha \tag{6.14}$$

Aplicando a função κ em ambos os lados da igualdade (6.14), obtemos o conjunto de equações abaixo que mostram a validade da propriedade (6.13) para o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} \kappa(n\beta) &= \kappa(m\alpha) \\ \Rightarrow \kappa(\beta)^n &= \kappa(\alpha)^m \\ \Rightarrow \sqrt[n]{\kappa(\beta)^n} &= \sqrt[n]{\kappa(\alpha)^m}, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade acima é assegurada pela equação (6.13), e assim mostramos que $\kappa(\beta) = \kappa\left(\frac{m}{n}\alpha\right) = \kappa(\alpha)^{\frac{m}{n}}$, pois $\kappa(x) \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Novamente usando que o conjunto dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$, isto é, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, temos da mesma maneira do problema (6.0.1), dado $\mu \in \mathbb{R}$, existe uma sequência $(q_n) \subset \mathbb{Q}$ tal que $q_n \to \mu$ quando $n \to \infty$. Além disso, temos que $q_n\alpha \to \mu\alpha$ com α uma constante positiva. Supondo a função κ contínua, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \kappa(q_n\alpha) = \kappa(\mu\alpha) \tag{6.15}$$

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \kappa(q_n\alpha) = \lim_{n\to\infty} (\kappa(\alpha))^{q_n} = (\kappa(\alpha))^{\mu} \tag{6.16}$$

assim pelas equações (6.15) e (6.16), podemos concluir pela unicidade do limite que $\kappa(\mu\alpha) = \kappa(\alpha)^{\mu}$, como desejado.

Escolhendo convenientemente $\alpha = 1$, a fim de caracterizar a função procurada $\kappa(x)$, para todos os valores positivos de μ temos a igualdade abaixo:

$$\kappa(\mu) = [\kappa(1)]^{\mu}, \tag{6.17}$$

e, portanto, fazendo $\mu \in \mathbb{R}$ convergir para zero em (6.17), isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \kappa(\mu_n) &= \lim_{n\to\infty} \kappa(1)^{\mu_n} \\ \Rightarrow \kappa(0) &= \kappa(1)^0, \end{aligned}$$

e portanto $\kappa(0) = 1$. Mostraremos agora que a propriedade (6.10), ainda é verdadeira para o caso em que se tome $-\mu$. De fato, sejam $x_1 = \mu$ e $x_2 = -\mu$ em (6.10), de modo que $\kappa(\mu) \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned} \kappa(\mu + (-\mu)) &= \kappa(\mu)\cdot\kappa(-\mu) \\ \Rightarrow \kappa(0) &= \kappa(\mu)\cdot\kappa(-\mu) \\ \Rightarrow \kappa(-\mu) &= \frac{\kappa(0)}{\kappa(\mu)} = \frac{1}{\kappa(\mu)} = \kappa(1)^{-\mu} \end{aligned}$$

Desta maneira, vemos que para quaisquer valores positivos ou negativos da variável x, a função $\kappa(x)$ satisfaz a igualdade

$$\kappa(x) = [\kappa(1)]^x \tag{6.18}$$

e portanto é necessariamente da forma: $\kappa(x) = a^x$, onde a é a imagem de $x = 1$ e designa uma constante positiva arbitrária. De fato, para todo valor positivo de a, a função a^x é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$ uma vez que $\lim_{x \to b} a^x = a^b = \kappa(b)$ com $b \in \mathbb{R}$ e a equação

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y,$$

satisfaz a propriedade imposta, chegando assim ao desejado. $\square$

Problema 6.0.3. *Determinar a função $\xi(x)$ contínua, tal que satisfaça, para todos os valores positivos das variáveis x_1 e x_2, não nulos:*

$$\xi(x_1 \cdot x_2) = \xi(x_1) + \xi(x_2). \tag{6.19}$$

Demonstração. Seja $0 < a \neq 1$ e defina $L(x)$ a função logaritmo na base a, ou seja, $L(x) = \log_a x$. Daí, para todos os valores positivos das variáveis x_1 e x_2,

$$x_1 = a^{\log_a x_1}, \qquad x_2 = a^{\log_a x_2},$$

pois as funções $L(x) = \log_a(x)$ e $g(x) = a^x$ são inversas. Assim a equação (6.19) pode ser escrita na forma

$$\xi(a^{\log_a x_1} \cdot a^{\log_a x_2}) = \xi(a^{\log_a x_1 + \log_a x_2}) = \xi(a^{\log_a x_1}) + \xi(a^{\log_a x_2}). \tag{6.20}$$

Note que na fórmula (6.20), podemos substituir $\log_a x_1$ e $\log_a x_2$ pelas variáveis x_1 e x_2, pelo fato da função logaritmo $L(x) = \log_a x$ ser sobrejetora, isto é, dados x_1, x_2 quaisquer, sempre existirá $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ tais que $x_1 = \log_a \overline{x_1}$ e $x_2 = \log_a \overline{x_2}$. Logo,

$$\xi(a^{x_1+x_2}) = \xi(a^{x_1}) + \xi(a^{x_2}). \tag{6.21}$$

Estendendo a equação (6.21) um número $m \in \mathbb{N}$ de vezes, substituindo x_2 por $x_2 + x_3$, em sua vez x_3 por $x_3 + x_4$ sucessivamente até x_{m-1} por $x_{m-1} + x_m$, temos a sua generalização:

$$\xi(a^{x_1+x_2+\cdots+x_m}) = \xi(a^{x_1}) + \xi(a^{x_2}) + \cdots + \xi(a^{x_m}). \tag{6.22}$$

Seja agora $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante positiva, e fixe

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m = \alpha,$$

deste modo a equação (6.22) passa a ser da forma:

$$\xi(a^{m\alpha}) = m\xi(a^\alpha), \tag{6.23}$$

de modo análogo ao feito no Problema (6.0.1) para obter a equação (6.5), isto é, usando a densidade dos racionais nos reais, estendemos m em (6.23) a um número real x arbitrário, ganhando a seguinte equação:

$$\xi(a^{x\alpha}) = x\xi(a^\alpha),$$

Por sua vez, fixando $\alpha = 1$ temos que,

$$\xi(a^x) = x\xi(a^1) = x\xi(a),$$

assim, voltando a notação $\log_a x$

$$\xi(a^{\log_a x}) = \xi(a) \cdot \log_a x.$$

Portanto, chegamos a equação desejada:

$$\xi(x) = \xi(a) \cdot \log_a x, \tag{6.24}$$

assim por (6.24) temos que toda função $\xi(x)$, que satisfaz a propriedade 6.0.3, é da forma

$$\xi(x) = b \log_a(x),$$

sendo $1 \neq b > 0$ qualquer constante arbitrária. □

Problema 6.0.4. *Determinar a função $\omega(x)$ contínua, tal que, para todos os valores positivos das variáveis x_1 e x_2,*

$$\omega(x_1 x_2) = \omega(x_1) \cdot \omega(x_2). \tag{6.25}$$

Demonstração. Com efeito, seja $0 < a \neq 1$ e $L(x)$ a função logaritmo na base a, ou seja, $L(x) = \log_a x$. Usando o mesmo argumento do problema (6.0.3), temos que para todos os valores positivos das variáveis x_1 e x_2, podemos escrever $x_1 = a^{\log_a x_1}$ e $x_2 = a^{\log_a x_2}$, pois, $\log_a(x)$ é a operação inversa de $g(x) = a^x$. Logo, podemos colocar a equação (6.25) na forma:

$$\omega(a^{\log_a x_1} \cdot a^{\log_a x_2}) = \omega(a^{\log_a x_1 + \log_a x_2}) = \omega(a^{\log_a x_1}) \cdot \omega(a^{\log_a x_2}). \tag{6.26}$$

Note que na fórmula (6.20), podemos substituir $\log_a x_1$ e $\log_a x_2$ pelas variáveis x_1 e x_2, pelo fato da função logaritmo $L(x) = \log_a x$ ser sobrejetora, isto é, dados x_1, x_2 quaisquer, sempre existirá $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ tais que $x_1 = \log_a \overline{x_1}$ e $x_2 = \log_a \overline{x_2}$. Logo,

$$\omega(a^{x_1 + x_2}) = \omega(a^{x_1}) \cdot \omega(a^{x_2}).$$

Agora, seja $m \in \mathbb{Z}$. Com efeito,

$$\omega(a^m) = \omega\overbrace{(a \cdot a \cdots a)}^{m-vezes} = \overbrace{\omega(a) \cdot \omega(a) \cdots \omega(a)}^{m-vezes} = [\omega(a)]^m$$

Suponha agora $m = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$\omega(a^{\frac{p}{q}}) = \omega(\sqrt[q]{a^p}) = \omega\overbrace{(\sqrt[q]{a} \cdot \sqrt[q]{a} \cdots \sqrt[q]{a})}^{p-vezes} = \overbrace{\omega(\sqrt[q]{a}) \cdot \omega(\sqrt[q]{a}) \cdots \omega(\sqrt[q]{a})}^{p-vezes} = [\omega(a)]^{\frac{p}{q}}.$$

Daí, usando o fato do conjunto dos números racionais serem densos nos números reais, concluímos que para qualquer $x \in \mathbb{R}$ vale:

$$\omega(a_1^x) = [\omega(a)]_1^x,$$

A seguir demonstraremos uma propriedade de logaritmo, que vamos utilizar mais adiante para concluir o problema proposto.

Lema 6.0.1. *Sejam $x,y \in \mathbb{R}_+$ e $0 < b \neq 1$, então $x^{\log_b y} = y^{\log_b x}$.*

Demonstração. De fato, seja $z = \log_b y$. Daí, como $b^z = y$, então

$$y^{\log_b x} = (b^z)^{\log_b x} = b^{z \log_b x} = b^{\log_b x^z} = x^z = x^{\log_b y}.$$

□

Portanto, usando o Lema 6.0.1 na segunda igualdade abaixo, concluímos que

$$\omega(a^{\log_a x}) = [\omega(a)]^{\log_a x} = x^{\log_a \omega(a)}$$

ou, equivalentemente,

$$\omega(x) = x^a,$$

a constante. O que resolve o problema proposto. □

7 CONCLUSÃO

No processo de interpolação de funções inteiras, pudemos perceber que o grau do polinômio interpolante está diretamente ligado ao número de valores conhecidos da função que desejamos aproximar. Assim, quanto maior o número de valores conhecidos, mais preciso é o ajuste da curva obtida por esse processo. Quando o conjunto de n pontos conhecidos pertencem a imagem de um polinômio p de grau $n-1$, então a aproximação polinomial encontrada é exatamente o polinômio p.

Pudemos perceber também neste processo de interpolação polinomial que as imagens $p(x)$ do polinômio interpolante p são escritos como combinação linear dos dados conhecidos. É importante salientar que a hipótese da função ser inteira, isto é, derivável em todo ponto do plano complexo, é condição necessária para a unicidade da função de aproximação, pois se a função é apenas contínua pode existir dois ou mais polinômios aproximantes que coincidam nos pontos dados.

Para a determinação de uma função contínua não é suficiente apenas conhecer alguns valores assumidos pela mesma. Dessa forma, a ideia neste trabalho foi impor que certa(s) propriedade(s) seja(m) satisfeita(s), como por exemplo, que a imagem da soma de uma função contínua seja igual ao produto das imagens; Através de uma análise matemática, foi possível a determinação de tais funções. As funções encontradas em cada um dos quatro problemas apresentados estão relacionadas com constantes fixas, porém arbitrárias: $ax,\ a^x,\ b\log_a x$ e x^a.

Portanto a principal diferença entre o processo de interpolação polinomial através de valores dados e a determinação de funções contínuas satisfazendo certas propriedades é que no primeiro caso, encontramos um polinômio de aproximação porém com coeficientes fixos, enquanto que no segundo encontramos uma classe de funções exatas que variam com constantes reais arbitrárias.

REFERÊNCIAS

CHURCHILL, R.V.; BROWN, J. W. **Variáveis Complexas e Aplicações**. São Paulo: Mc Graw Hill, 2015. Citado na página 11.

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics**. Nova York: Wiley Sons, 2006. Citado na página 10.

RALSTON, A.; RABINOWITZ, P. **A First Course In Numerical Analysis**. Nova York: Dover, 2001. Citado na página 10.

SCHUBRING, GERT; ROQUE, TATIANA. **Curso de Análise de Cauchy: uma edição comentada**. 2. ed. Rio de Janeiro: Coleção História da Matemática, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.

YOUNG, D. M.; GREGORY, R. T. **A Survey Of Numerical Mathematics**. Londres: Adisson-Wesley, 1972. v. 1. Citado na página 10.